Підсумкове тестування за темою 6:

Основні розподіли дискретних випадкових величин

Посилання на тест:

https://forms.gle/GS7XCAyCBvvqbMqv7

Час для проходження: 20 хвилин

Навчальна дисципліна:
Теорія ймовірностей

Тема 7

Деякі розподіли неперервних випадкових величин

Питання лекції

1. Рівномірний розподіл.
2. Показниковий розподіл.
3. Нормальний розподіл.
4. Гамма-розподіл.
5. Розподіл Ерланга.

.

.

Рекомендована література

1. Конспект лекцій. URL: https://drive.google.com/drive/folders/1jYAJHdSefxIUX4RQxmhGS50gxqPH7wci?usp=sharing

2. Кучук Г. А., Кучук Н. Г. Теорія ймовірностей. Частина 1 : навчальний посібник. Харків : НТУ «ХПІ», 2024. 229 с. URL: https://repository.kpi.kharkov.ua/handle/KhPI-Press/80011

3. Теорія ймовірностей : навч. посіб. для студ. спеціальності 121 «Інженерія програмного забезпечення» / КПІ ім. Ігоря Сікорського; уклад.: О.В. Барабаш, А.П. Мусієнко, О.В. Свинчук. – Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2021. – 193 с. URL: https://ela.kpi.ua/bitstream/123456789/42046/1/Navch_Posib_Teor_Ymovirn_BarabashO_MusienkoA_SvynchukO.pdf

4. Навчальний посібник з дисципліни «Теорія ймовірностей, імовірнісні процеси та математична статистика». Курс лекцій. Частина 1 / Павлов О.А., Гавриленко О.В., Рибачук Л.В. – Київ: КПІ, 2021. – 154 с. URL: https://ela.kpi.ua/bitstream/123456789/41672/3/Posibnyk_Pavlov-Havrylenko-Rybachuk_KonspLek-1.pdf

1. Рівномірний розподіл

Def. Неперервна випадкова величина X має *<u>рівномірний розподіл</u>* на ділянці від a до b якщо її щільність на цій ділянці постійна і дорівнює

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & x \in (a, b) \\ 0, & x \notin (a, b) \end{cases}$$

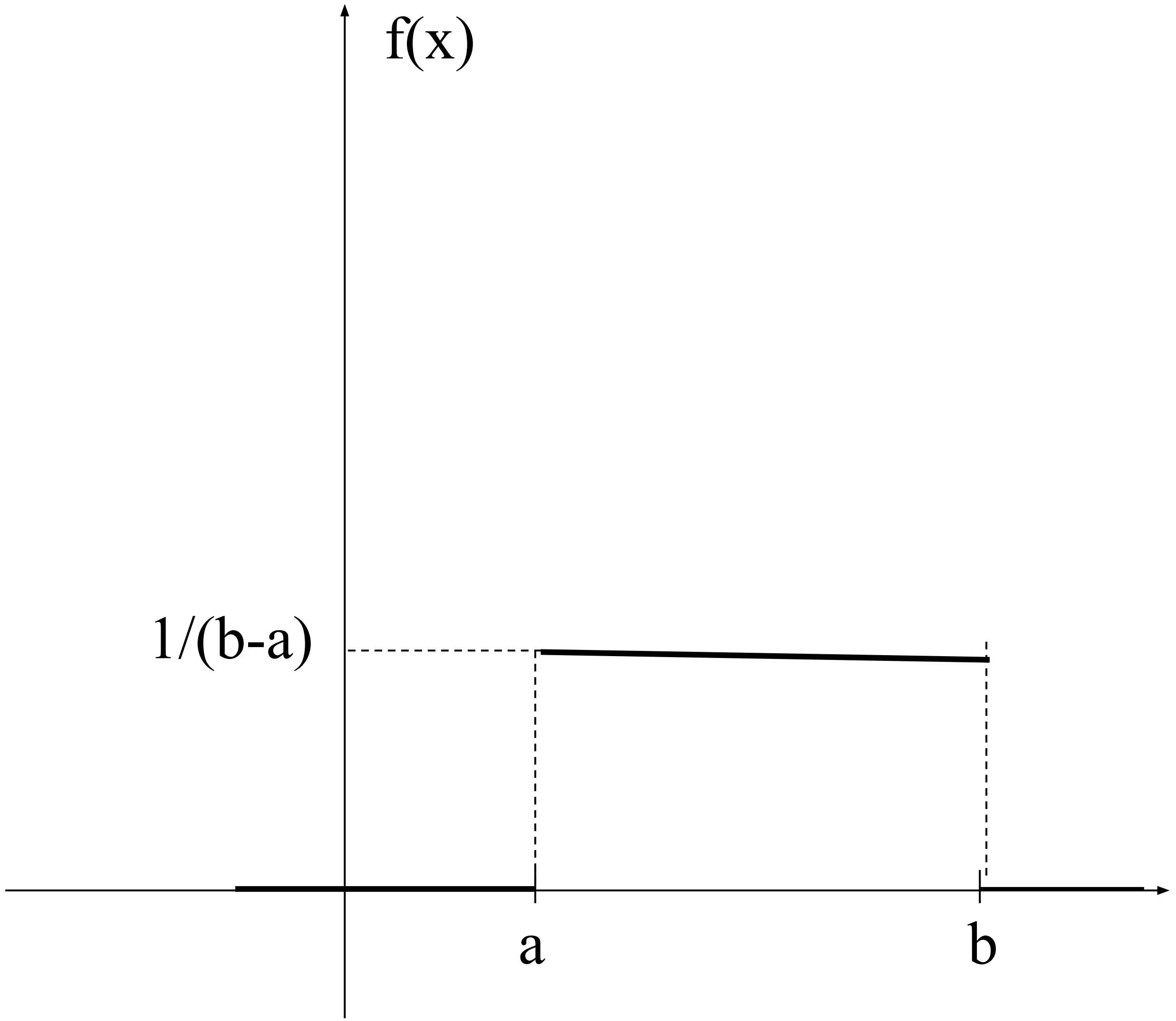
Умови рівномірного розподілу: випадкова величина може приймати (теоретично) нескінчену незлічену кількість значень, причому ні одне з них не має переваги над іншими.

Характеристики рівномірного розподілу:

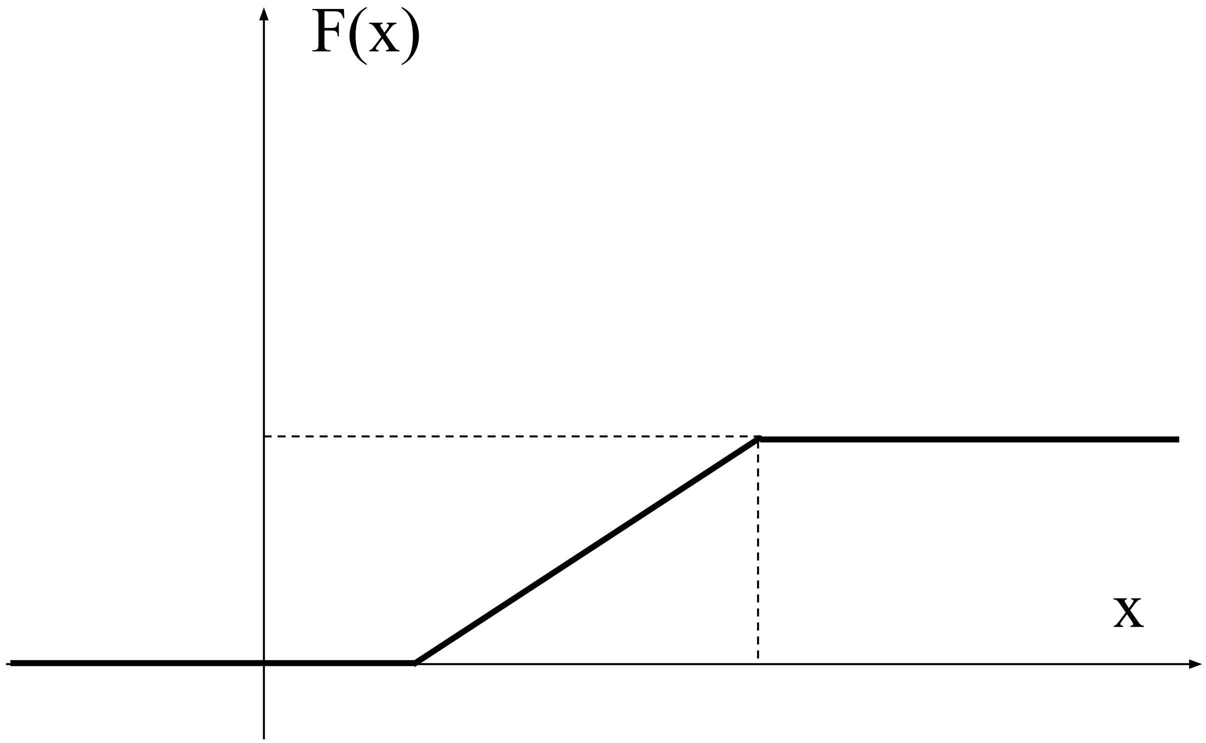
$$m_x = \frac{b+a}{2} \text{ медиана } m_x$$

$$D_x = \frac{(b-a)^2}{12}; \sigma_x = \frac{b-a}{\sqrt{12}}.$$

Графік функції щільності рівномірного розподілу:



Функція розподілу (рівномірний розподіл)



$$F(x)=\begin{cases}0, & x<a\\ \dfrac{x\text{-}a}{b\text{-}a}, & a<x<b\\ 1, & x>b\end{cases}$$

$$P\{\alpha < x < \beta\} = \frac{\beta-\alpha}{b-a},\ \text{если}\,(\alpha,\beta)\subset(a,b).$$

Приклад. Довжина навчального класу вимірюється рулеткою, поділки якої розташовані через 10 см. Округлюємо до найближчого поділу. Випадкова величина X – помилка виміру.
Знайти і побудувати f (x), F (x); знайти m_x , D_x , σ_x , P(x > 2).

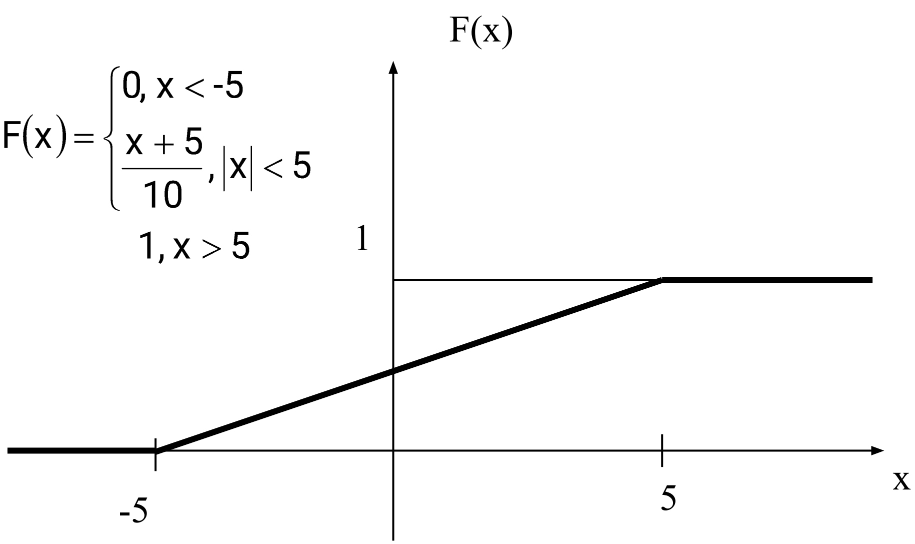
Рішення. 1. Відзначаємо рівномірний розподіл, $X = \{x | x \in (-5, 5)\}$.

Параметри розподілу: a = - 5 ; b = 5.

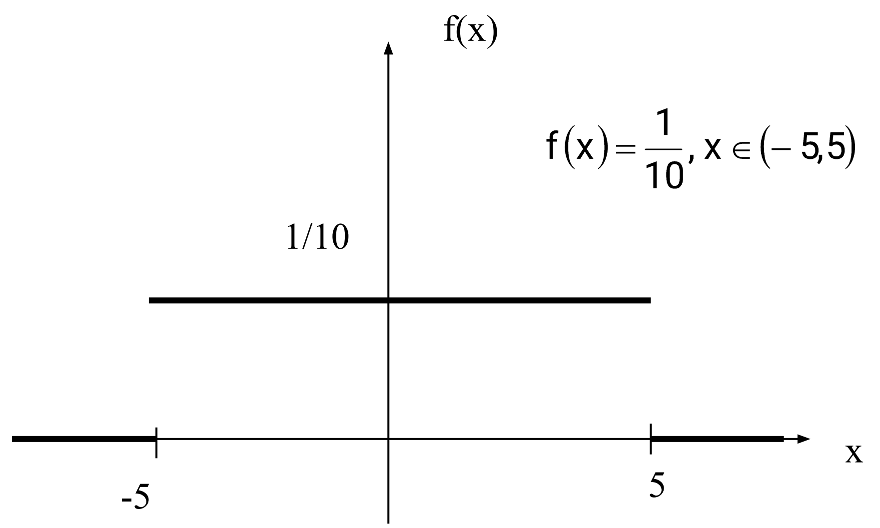
Характеристики розподілу: $m_x = 0; D_x = \frac{10^2}{12} = \frac{25}{3} = 8\frac{1}{3}; \sigma_x = \frac{5}{\sqrt{3}} \approx 2,9.$

P(x > 2) = P(2 < x < 5) = (5 – 2) / (5 – (– 5)) = 3 / 10 = 0,3.

$$F(x) = \begin{cases} 0, x < -5 \\ \frac{x+5}{10}, |x| < 5 \\ 1, x > 5 \end{cases}$$



$$f(x) = \frac{1}{10}, x \in (-5, 5)$$



2. Показниковий (експоненційний) розподіл

Def. Неперервна випадкова величина X має *<u>показниковий розподіл</u>,* якщо її щільність розподілу задається таким чином:

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x},\ x\ge 0 \ (\lambda - \text{параметр розподілу}) \\ 0,\quad 0 \le x\end{cases}$$

Умови показникового розподілу. Інтервал часу між двома сусідніми подіями в найпростішому потоці має показовий розподіл з параметром, що дорівнює інтенсивності потоку.

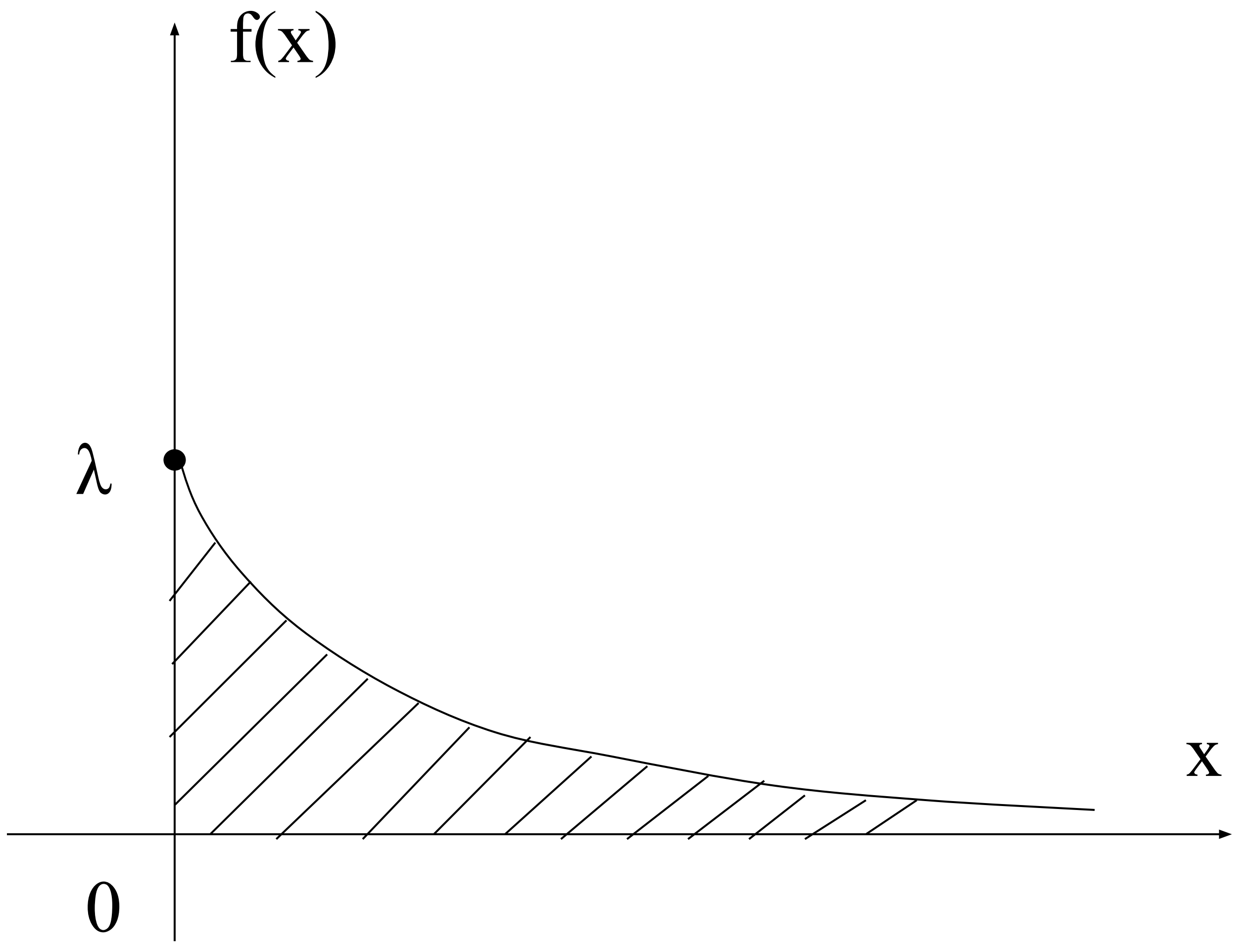
Характеристики показникового розподілу:

$$m_x=\frac{1}{\lambda}$$

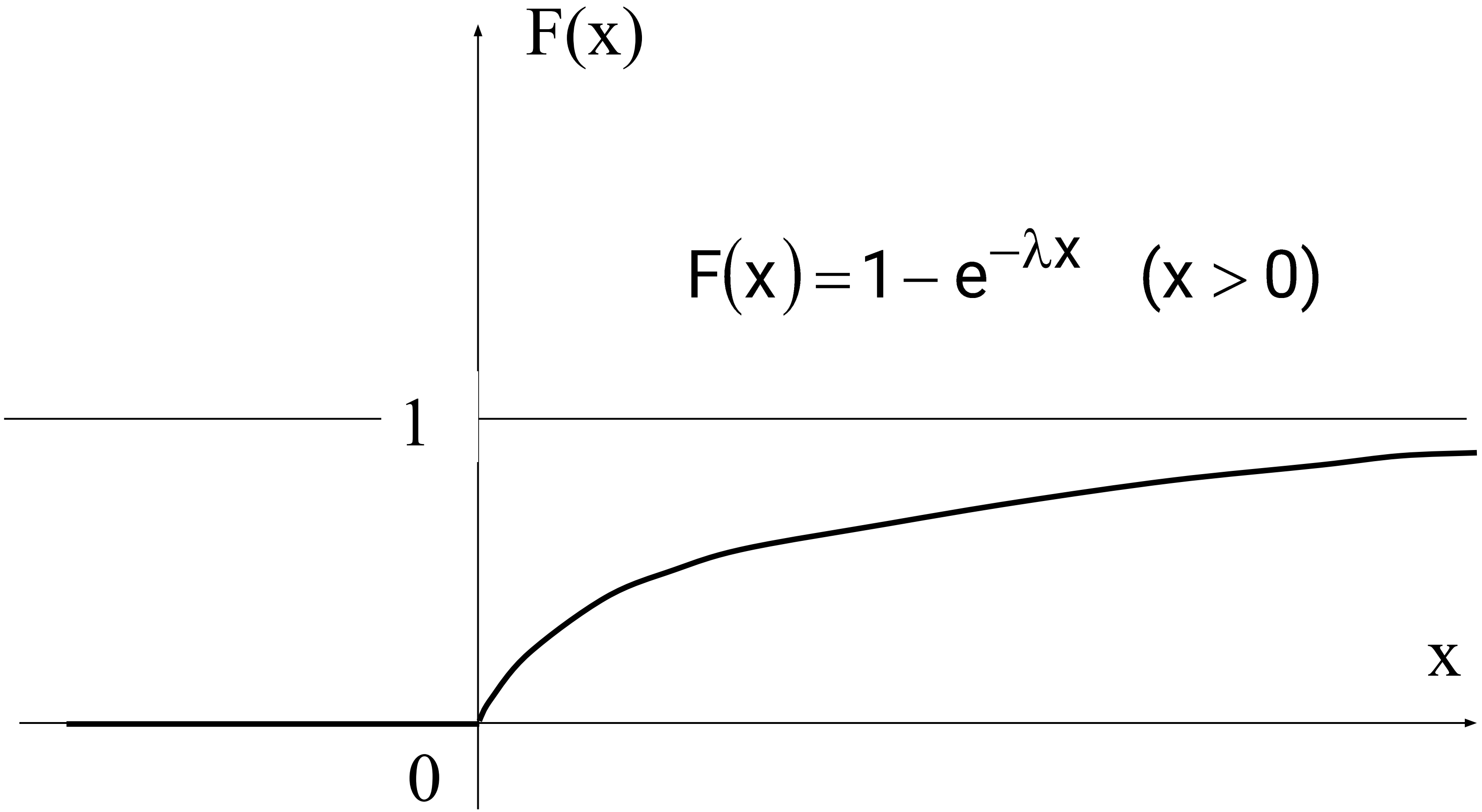
$$D_x={}^{1}\!/_{\lambda^2};\quad \sigma_x={}^{1}\!/_{\lambda}$$

$$\mu_3={}^{2}\!/_{\lambda^3};\text{асиметрія } S_k=\frac{\mu^3}{\sigma^3}=2>0.$$

Графік функції щільності показникового розподілу:



Функція розподілу (показниковий розподіл)



$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x} \quad (x > 0)$$

$$P\{\alpha < x < \beta\} = F(\beta) - F(\alpha) = \exp(-\lambda\alpha) - \exp(-\lambda\beta)$$

Приклад. Найпростіший потік має інтенсивність 2 заявки на хвилину. Знайти ймовірність того, що інтервал часу між сусідніми заявками буде від 1 до 2 хвилин , параметри розподілу інтервалів часу?

Рішення. 1. Відзначаємо показниковий розподіл, випадкова величина X - інтервал часу між сусідніми заявками.

Параметр розподілу: λ= 2 (заявки на хвилину) – за умовою.

$$m_t = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{2};$$

Характеристики розподілу: $$D_t = \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{4};$$

$$\sigma_t = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{2};$$

$P\{1 < T < 2\} = F(2) - F(1) = 1 - e^{-4} - (1 - e^{-2}) = e^{-2} - e^{-4} \approx 0{,}13$.

3. Нормальний розподіл (закон Гауса)

Def. Неперервна випадкова величина X має *нормальний розподіл* з з параметрами m та σ, якщо її щільність розподілу є такою:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left(\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right).$$

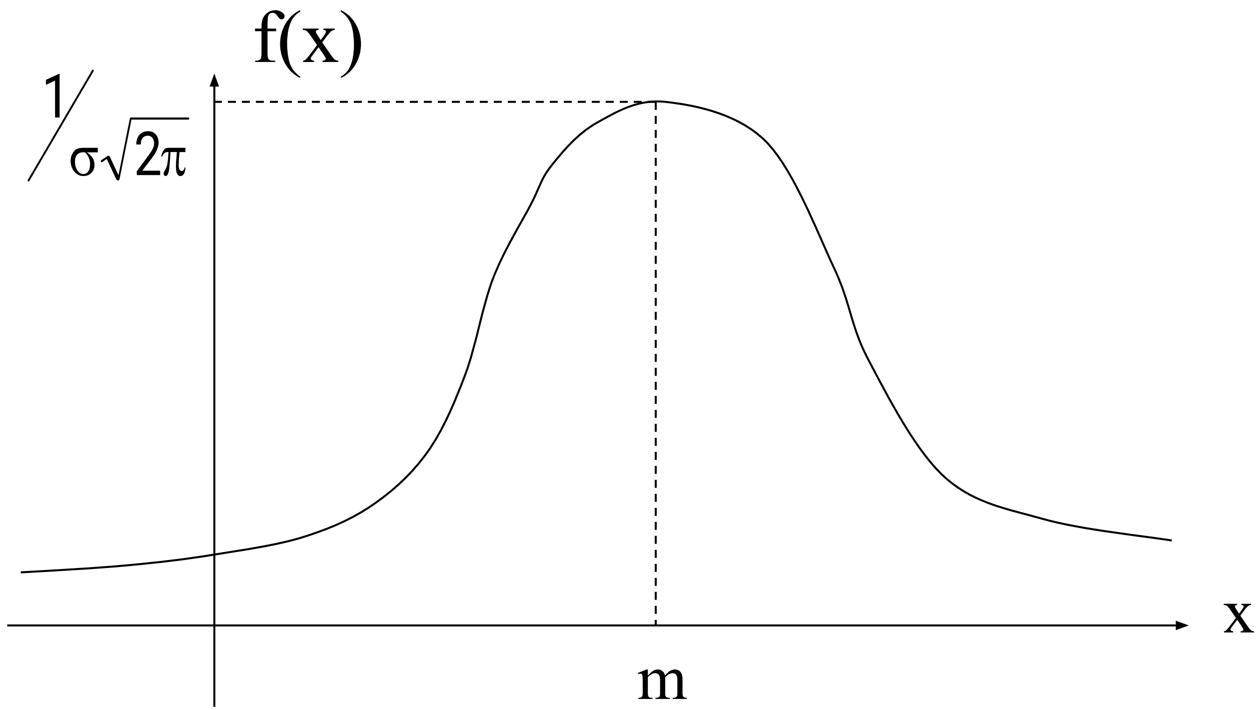
Умови нормального розподілу. Нормальний розподіл виникає при складанні багатьох незалежних (або слабко залежних) величин, порівняних за своїм впливом на суму..

Характеристики нормального розподілу:

$$m_x = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx = m \text{ (центр розсіювання)}$$

$$D_x = \int_{-\infty}^{\infty} (x-m)^2 f(x)\,dx = \sigma^2 \; ; \quad \sigma_x = \sqrt{D_x} = \sigma.$$

Графік функції щільності нормального розподілу:



Функція Лапласа:

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

$$P(\alpha < x < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - m}{\sigma}\right) - \left(\frac{\alpha - m}{\sigma}\right)$$

а) $\Phi(0) = 0$

б) $\Phi(-x) = -\Phi(x)$

в) $\Phi(-\infty) = -0{,}5$

$\Phi(+\infty) = 0{,}5$

Приклад. У спійманому косяку риби вага окремої риби підпорядковується нормальному закону з параметрами m = 375 г, σ = 25 г (N (375, 25)). Знайти з точністю до 0,01 ймовірність того, що вага однієї спійманої риби буде:

а) від 300 до 425 г; Φ(2) = 0,48; Φ(3) = 0,5.

б) трохи більше 450 г;

в) більше ніж 425 г?

Рішення. 1. Відзначаємо нормальний розподіл, випадкова величина N (375, 25).

$$a)\quad P\left(300<x<425\right)=\Phi\left(\frac{425-375}{25}\right)-\Phi\left(\frac{300-375}{25}\right)=$$

$$=\Phi\left(2\right)-\Phi\left(-3\right)=\Phi\left(2\right)+\Phi\left(3\right)=0,48+0,5=0,98.$$

$$б)\quad P\left(x<450\right)=P\left(-\infty<x<450\right)=\Phi\left(\frac{450-375}{25}\right)-\Phi\left(\frac{-\infty-375}{25}\right)=$$

$$=\Phi\left(3\right)-\Phi\left(-\infty\right)=\Phi\left(3\right)+\Phi\left(\infty\right)=0,5+0,5=1.$$

$$в)\quad P\left(x>425\right)=P\left(425<x<+\infty\right)=\frac{1}{2}-\Phi\left(2\right)=0,5-0,48=0,02.$$