Тема №3. Байєсовський підхід до розрахунку ймовірностей.

1. Формула повної ймовірності.
2. Приклади використання.
3. Формула Байєса.
4. Приклади перерахунку ймовірностей гіпотез.

Література:

1. Конспект лекцій. URL: https://drive.google.com/drive/folders/1jYAJHdSefxIUX4RQxmhGS50gxqPH7wci?usp=sharing
2. Кучук Г. А., Кучук Н. Г. Теорія ймовірностей. Част. 1: навчальний посібник. Харків : НТУ «ХПІ», 2024. 229 с. URL: https://repository.kpi.kharkov.ua/handle/KhPI-Press/80011
3. Теорія ймовірностей : навч. посіб. для студ. спеціальності 121 «Інженерія програмного забезпечення» / КПІ ім. Ігоря Сікорського; уклад.: О.В. Барабаш, А.П. Мусієнко, О.В. Свинчук. – Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2021. – 193 с. URL: https://ela.kpi.ua/bitstream/123456789/42046/1/Navch_Posib_Teor_Ymovirn_BarabashO_MusienkoA_SvynchukO.pdf
4. Теорія ймовірностей та математична статистика: навчальний посібник / О. І. Огірко, Н. В. Галайко. – Львів: 2017. – 292 с. URL: http://dspace.lvduvs.edu.ua/bitstream/1234567890/629/1/%D1%82%D0%B5%D0%BE%D1%80%D1%96%D1%8F%20%D0%B9%D0%BC%D0%BE%D0%B2%D1%96%D1%80%D0%BD%D0%BE%D1%81%D1%82%D0%B5%D0%B9%20%D0%BF%D1%96%D0%B4%D1%80%D1%83%D1%87%D0%BD%D0%B8%D0%BA.pdf
5. Навчальний посібник з дисципліни «Теорія ймовірностей, імовірнісні процеси та математична статистика». Курс лекцій. Частина 1 / Павлов О.А., Гавриленко О.В., Рибачук Л.В. – Київ: КПІ, 2021. – 154 с. URL: https://ela.kpi.ua/bitstream/123456789/41672/3/Posibnyk_Pavlov-Havrylenko-Rybachuk_KonspLek-1.pdf

1. *Формула повної ймовірності*

Наслідком двох основних правил (складання та множення) є формула повної ймовірності, що часто використовується на практиці.

Нехай проводиться дослід, про результати якого можна зробити n виключаючих одне одного (тобто попарно несумісних) припущень, що утворюють повну групу несумісних подій, що позначаються як $H_1 \ldots H_n$, які називаються гіпотезами:

$$\left\{H_1,\ldots,H_n \middle| H_i \cap H_j = 0 \;\; \forall_i \neq j\right\}$$

Кожна гіпотеза H_i - це подія з ймовірністю $P(H_i)$.

Припустимо, що подія A може з'явитися тільки з однією з гіпотез і поставимо умовні ймовірності появи A як $P(A/H_i)$.

Теорема. Безумовна ймовірність події у досліді з гіпотетичними умовами обчислюється як сума добутків ймовірностей кожної гіпотези на умовну ймовірність події за цієї гіпотези.

Доведення. Оскільки гіпотези утворюють повну групу, то:

$$\Omega = H_1 + H_2 + \ldots + H_n;$$
$$A \cdot \Omega = A \cdot (H_1 + H_2 + \ldots + H_n).$$

З несумісності гіпотез випливає, що

$$A \cdot \Omega = A \cdot H_1 + A \cdot H_2 + \ldots + A \cdot H_n$$

і можна застосувати правило складання кількох подій:

$$H(A \cdot \Omega) = P(A \cdot H_1) + P(A \cdot H_2) + \ldots + P(A \cdot H_n) = \sum_{i=1}^{n} P(A \cdot H_i).$$

Застосувавши до події $A \cdot H_i$ правило множення, отримаємо

$$P(A \cdot H_i) = P(H_i) \cdot P(A / H_i),$$

а, отже $P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) \cdot P(A / H_i)$, тобто теорема доведена.

Виведена формула називається формулою ймовірності. Ця формула застосовна у випадках, коли можна описати умови досліду і розіграти його результат.

2. Приклади використання.

Приклад. Є три однакові урни. У першій – 2 білих та 3 чорних кулі, у другій 4 білих та 1 чорна, у третій – 3 білих. Виймають одну кулю із довільної урни. Якою є ймовірність того, що вона біла?

Нехай подія А – вийнята біла куля. Зробимо три гіпотези H_1, H_2 і H_3, які полягають у тому, що кулю виймуть із урни з відповідним номером. Оскільки урни однакові, то

$$P(H_1) = P(H_2) = P(H_3) = 1/3\ .$$

Знаючи, з якої урни вийнята куля, можна розрахувати умовну ймовірність такої події:

$$P(A / H_1) = \frac{2}{5};\ P(A / H_2) = \frac{4}{5};\ P(A / H_3) = 1.$$

Тоді за формулою повної ймовірності

$$P(A) = \sum_{i=1}^{3} P(H_i) \cdot P(A / H_i) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5} + \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{5} + \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{11}{15}.$$

Задача 1.18. З урни, в якій містяться 5 білих та 7 чорних куль, навмання вибираються дві кулі й перекладаються в урну, в якій є 5 білих та 3 чорні кулі. Кулі в другій урні перемішують та навмання вибирають одну кулю. Визначити ймовірність події, яка полягає в тому, що куля, яку вибрали з другої урни, є білою.

Розв’язання. Введемо до розгляду подію А, яка полягає в тому, що з другої урни вибираємо білу кулю. З умови видно, що подія А може статися за наявності таких гіпотез:

– H_1 – гіпотеза, яка полягає в тому, що з першої урни в другу було перекладено дві білі кулі;
– H_2 – гіпотеза, яка полягає в тому, що з першої урни в другу було перекладено одну кулю білу та одну чорну;
– H_3 – гіпотеза, яка полягає в тому, що з першої урни в другу було перекладено дві чорні кулі.

Гіпотези H_1, H_2, H_3 складають повну групу подій, оскільки ніяких інших наслідків у досліді, який полягає у визначені складу куль, що перекладаються із першої урни в другу, бути не може, та один із цих наслідків обов’язково відбудеться.

Тоді $$A = AH_1 + AH_2 + AH_3,$$

а із (2.29) маємо

$$P(A) = P(H_1)P(A/H_1) + P(H_2)P(A/H_2) + P(H_3)P(A/H_3). \qquad (2.30)$$

Розглянемо детальніше визначення ймовірностей випадкових безумовних подій (ймовірність гіпотез) та випадкових умовних подій, які зазначені в правій частині (2.30).

Гіпотези H_1, H_2, H_3 є складними випадковими подіями, які можуть бути виражені через такі елементарні події:

– B_1 – подія, яка полягає в тому, що з першої урни буде вибрана перша куля білого кольору;

– B_2 – подія, яка полягає в тому, що з першої урни буде вибрана друга куля білого кольору.

Із умови задачі випливає таке:

– $\overline{B}_1$ – подія, яка полягає в тому, що з першої урни буде вибрана перша куля чорного кольору;

– $\overline{B}_2$ – подія, яка полягає в тому, що з першої урни буде вибрана друга куля чорного кольору.

Тоді $H_1 = B_1 B_2;\ H_2 = B_1\overline{B}_2 + \overline{B}_1 B_2;\ H_3 = \overline{B}_1\overline{B}_2.$

Події $B_1\overline{B}_2$ та $\overline{B}_1 B_2$ є несумісними, а події B_1, B_2 – залежними.

Тому $$P(H_1) = P(B_1 B_2) = P(B_1)P(\overline{B}_2/B_1) = \frac{5}{12}\cdot\frac{4}{11} = \frac{5}{33};$$

$$P(H_2)=P(B_1\bar{B}_2)+P(\bar{B}_1B_2)\;=$$

$$=P(B_1)P(\bar{B}_2/B_1)\;+P(\bar{B}_1)P(B_2/\bar{B}_1)\;=\frac{5}{12}\cdot\frac{7}{11}+\frac{7}{12}\cdot\frac{5}{11}\;=\frac{35}{66};;$$

$$P(H_3)=P(\bar{B}_1\bar{B}_2)=P(\bar{B}_1)P(\bar{B}_2/\bar{B}_1)\;=\frac{7}{12}\cdot\frac{6}{11}\;=\frac{7}{22},$$

а також $P(A/H_1)=\dfrac{7}{10};\quad P(A/H_2)=\dfrac{3}{5};\quad P(A/H_3)=\dfrac{1}{2}..$

Виходить, з (2.30) маємо

$$P(A)=\frac{5}{33}\cdot\frac{7}{10}+\frac{35}{66}\cdot\frac{3}{5}+\frac{7}{22}\cdot\frac{1}{2}=\frac{49}{132}.$$

3. Формула Байєса.

Наслідком теорем множення та повної ймовірності є формула Байєса.

Нехай є повна група несумісних подій $H_1, H_2, \ldots, H_n$ з такими ймовірностями: $P(H_1), \ldots, P(H_n)$.

Зроблено дослід, у результаті якого виникла подія А. Як змінилися ймовірності гіпотез при цьому? (іншими словами, якими є умовні ймовірності $P(H_i/A)$).

Визначення. Імовірності гіпотез $P(H_i)$, розраховані до настання події А, називаються апріорними; після настання події А – апостеріорні ($P(H_i/A)$).

Теорема. Апостеріорні ймовірності гіпотез пов'язані з апріорними формулою Байєса: $P(H_i/A)=\dfrac{P(H_i)\cdot P(A/H_i)}{\sum\limits_{i=1}^{n}P(H_i)\cdot P(A/H_i)}$.

Доведення. За правилом множення

$$P(AH_i)=P(A)\cdot P(H_i/A)=P(H_i)\cdot P(A/H_i).$$

Відкидаючи ліву частину, отримаємо

$$P(H_i/A)=\frac{P(H_i)\cdot P(A/H_i)}{P(A)}.$$

Виразивши P(A) за допомогою повної ймовірності формули отримаємо формулу Байеса.

4. Приклади перерахунку ймовірностей гіпотез.

Приклад. Два стрілки стріляють по одній мішені незалежно один від одного, роблячи кожен по одному пострілу. Імовірність потрапляння першого стрілка у мішень $P_1 = 0{,}8$, другого – $P_2 = 0{,}1$. Після стрільби виявлено, що було тільки одне попадання. Яка ймовірність, що потрапив перший стрілок?

Рішення. До досліду було 4 гіпотези: H_{00} – ніхто потрапив; H_{10} – перший влучив, другий не влучив; H_{01} – навпаки; H_{11} – обидва потрапили.

$$P(H_{00}) = P(\overline{P}_1 \cdot \overline{P}_2) = P(\overline{P}_1) \cdot P(\overline{P}_2) = 0{,}2 \cdot 0{,}9 = 0{,}18,$$
$$P(H_{10}) = P(P_1 \cdot \overline{P}_2) = P(P_1) \cdot P(\overline{P}_2) = 0{,}8 \cdot 0{,}9 = 0{,}72,$$
$$P(H_{01}) = P(\overline{P}_1 \cdot P_2) = P(\overline{P}_1) \cdot P(P_2) = 0{,}2 \cdot 0{,}1 = 0{,}02,$$
$$P(H_{11}) = P(P_1 \cdot P_2) = P(P_1) \cdot P(P_2) = 0{,}8 \cdot 0{,}1 = 0{,}08.$$

Відповідно, якщо А - попадання в ціль, то

$$P(A / H_{00}) = 0; \qquad P(A / H_{01}) = 1;$$
$$P(A / H_{10}) = 1; \qquad P(A / H_{11}) = 01.$$

Після досліду нам треба перерахувати ймовірність гіпотези H_{10} (це питання задачі):

$$P(H_{10} / A) =$$
$$= \frac{P(H_{10}) \cdot P(A / H_{10})}{P(H_{00})P(A / H_{00}) + P(H_{01})P(A / H_{01}) + P(H_{10})P(A / H_{10}) + P(H_{11})P(A / H_{11})} =$$
$$= \frac{0{,}72 \cdot 1}{0{,}18 \cdot 0 + 0{,}02 \cdot 1 + 0{,}72 \cdot 1 + 0{,}08 \cdot 0} = \frac{0{,}72}{0{,}74} \approx 0{,}97.$$

Приклад. Транзистори виготовляються на трьох підприємствах. На першому підприємстві виготовляється 20 %, а на другому й третьому – 40 % продукції від загальної кількості. Продукція першого підприємства містить 100 % стандартних транзисторів, другого – 90 %, третього – 80 %. Продукція з усіх підприємств надходить на склад. Для виготовлення виробу з складу навмання вибрали нестандартний транзистор. Визначити ймовірність події, яка полягає в тому, що транзистор виготовлений на другому підприємстві, за умови, що він є нестандартним.

Розв’язання. Введемо до розгляду подію А, яка полягає в тому, що зі складу надійшов нестандартний транзистор, та гіпотези такого змісту:

– H_1 – гіпотеза, яка полягає в тому, що транзистор виготовлений на першому підприємстві;

– H_2 – гіпотеза, яка полягає в тому, що транзистор виготовлений на другому підприємстві;

– H_3 – гіпотеза, яка полягає в тому, що транзистор виготовлений на третьому підприємстві.

Тоді

$$P(H_2/A) = \frac{P(H_2)P(A/H_2)}{P(H_1)P(A/H_1) + P(H_2)P(A/H_2) + P(H_3)P(A/H_3)} =$$

$$= \frac{0,4 \cdot 0,1}{0,2 \cdot 0 + 0,4 \cdot 0,1 + 0,4 \cdot 0,2} = \frac{0,04}{0,12} = 0,33\,.$$

Слід відзначити, що якщо $P(A/H_1) = 0$, тоді гіпотезу H_1 можна було б не вводити до розгляду, а це означає, що можна висловлювати поняття “повної групи гіпотез”, тобто визначити таку сукупність гіпотез, за наявності яких подія А може статися. Тоді поняття “повної групи гіпотез” не збігається з поняттям “повної групи подій”. Звичайно, можна рекомендувати визначати гіпотези так, щоб вони складали завжди повну групу подій, оскільки при підрахунках потім відповідні ймовірності умовних подій будуть визначені рівними нулю.

На завершення відмітимо, що формула повної ймовірності дозволяє обчислити ймовірність події А, яка може статися в досліді за наявності гіпотез, тобто дозволяє обчислити апріорну (додослідну) ймовірність випадкової події, а формула гіпотез дозволяє обчислити умовну ймовірність $P(H_i/A)$ за умови, що подія А вже відбулася, дослід вже поставлений і його результатом є випадкова подія А. Формула гіпотез дозволяє обчислити апостеріорну (післядослідну) ймовірність умовної події.

Якщо на практиці ймовірність події А може бути визначена за результатами випробувань, то результати обчислення ймовірностей умовних випадкових подій $P(H_i/A)$ за формулою гіпотез можуть служити підґрунтям для прийняття рішень щодо вдосконалення технічних виробів.