Тема: Числові характеристики випадкових величин.

План. 1. Математичне сподівання.
2. Моменти випадкової величини.
3. Дисперсія випадкової величини.
4. Основні властивості математичного сподівання та дисперсії.
5. Твірна функція.

1. Математичне сподівання, мода та медіана

Часто для роботи з випадковою величиною достатньо знати не весь закон розподілу, а лише основні характеристики.

Визначення . *Математичне сподівання* дискретної випадкової величини – це сума добутків всіх її можливих значень на ймовірності цих значень:

$$m_x = \sum_i x_i p_i \quad M[X] = m_x = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$$

Для неперервної випадкової величини

$$M[X] = m_x = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx$$

Для змішаної випадкової величини

$$m_x = \sum_i x_i P_i + \int_{(н)} xF'(x)dx,$$

Н – множина ділянок неперервності F(x).

Визначення . Мода випадкової величини – її найбільш ймовірне значення:

Для дискретної випадкової величини $\quad Mo[X] = \left(x_k \middle| p_k = \max_{i \in 1...n} p_i \right);$

для неперервної випадкової величини $\quad Mo[X] = \left(x_k \middle| x_k = \max f(x) \right).$

Визначення. Медіана Me неперервної випадкової величини X – це таке її значення x_m, для якого

$$Me[X] = \left(x_m \middle| \int_{-\infty}^{x_m} f(x) dx = \int_{x_m}^{\infty} f(x) dx = \frac{1}{2} \right)$$

тобто однаково ймовірно, чи виявиться значення випадкової величини X меншим x_m або більшим x_m .
Геометрично медіана є тією абсцисою, для якої площі, що ліворуч і праворуч від неї, рівні.

Для симетричного розподілу (природно, неперервного) математичне сподівання, мода та медіана збігаються.

2. Моменти випадкової величини.

Визначення. *Початковим моментом порядку s* називається математичне сподівання s-го ступеня цієї величини

$$L_s[X] = M[X^s]$$

Для дискретної – $L_s[X] = \sum_{i=1}^{n} xi^s P_i$; для неперервної: $L_s[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x^s f(x) dx$

Зауваження : $m_x = M[X] = L_1[X]$, тобто. математичне сподівання – перший початковий момент.

Визначення : *Центрована випадкова величина –* відхилення випадкової величини від математичного сподівання:

$$\overset{0}{X} = X - m_x$$

Примітка: $M\left[\overset{0}{X}\right] = 0$

Дискретна: $M[X - m_x] = \Sigma(x_i - m_x)p_i = \sum \; x_i p_i - m_x \Sigma_{Pi} i = 0$

Визначення . Центральний момент порядку s – початковий момент порядку s центрованої випадкової величини

$$\mu_s[X] = M\left[\overset{0}{X}{}^s\right] = M\left[(X - m_x)^s\right]$$

для дискретної: $\mu_s = \sum_{i=1}^{n} (x_i - m_x)^s P_i$ для неперервної: $\mu_s = \underset{-\infty}{\overset{\infty}{S}} (x - m_x)^s f(x) dx$

$$\mu_1 = M\left[\overset{0}{X}\right] = M[X - m_x] = 0$$

$$\mu_2 = M\left[\overset{0}{X}{}^2\right] = \Sigma(x_i - m_x)^2 P_i =$$

Примітка: $= \Sigma x_i{}^2 P_i - 2m_x \Sigma x_i P_i + \Sigma mx^2 P_i =$

$$= L_2 - 2m_{x^2} + m_{x^2} = \underline{L_2 - mx^2}$$

$$\underline{\mu_3 = L_3 - 3L_2 m_x + 2mx^3}$$

3. Дисперсія випадкової величини

Визначення . *Дисперсія* – другий центральний момент,

$$\mathrm{D}[\mathrm{X}] = \mathrm{D_x} = \mathrm{M}\left[\overset{0}{\mathrm{X}}{}^2\right] = \mathrm{M}\left[(\mathrm{X} - \mathrm{m_x})^2\right]$$

чи дисперсія – це математичне сподівання квадрата відповідної випадкової величини.

Для дискретної: $\mathrm{D}[X] = \mathrm{D_x} = \sum_{i=1}^{n} (x_i - m_x)^2 p_i = \mathrm{M}\left[X^2\right] - (m_x)^2$

Для неперервної: $\mathrm{D}[X] = \mathrm{D_x} = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^2 f(x) dx = \mathrm{M}\left[X^2\right] - (m_x)^2$

Зауваження : $\mathrm{D_x} = \mathrm{M}\left[\mathrm{X}^2\right] - (\mathrm{m_x})^2$

Дисперсія випадкової величини – це характеристика розсіювання, розкиду величини біля її математичного сподівання.

Визначення . Середнє квадратичне відхилення випадкової величини – це число, квадрат якого дорівнює дисперсії:

$$\sigma[X] = \sqrt{\mathrm{D}[X]} \geq 0$$

Визначення . Коефіцієнт варіації випадкової величини – відношення середнього квадратичного відхилення до математичного сподівання:

$$\mathrm{V} = \frac{\delta}{\mathrm{m}}$$

Зауваження . Коефіцієнт варіації визначає рівень «випадковості» випадкової величини:

Зауваження. Діапазон можливих значень випадкової величини $m \pm 3\sigma$ (правило трьох «сигма»)

Отже :1) 1-ий центральний момент (математичного сподівання) – положення;

2) 2-ий центральний момент (математичного сподівання) - ступінь розкидання випадкової величини;

3) третій центральний момент (математичного сподівання) - ступінь асиметрії випадкової величини (асиметрія);

4) 4-ий центральний момент (математичного сподівання) – ступінь «крутості» довільної величини (ексцес).

$$\mathrm{E_x} = \frac{\mathrm{M_4}}{\delta^4} - 3$$

4. Основні властивості математичного сподівання та дисперсії

1) Математичне сподівання невипадкової величини є сама величина:

$$M[c]=c$$

$$P(c)=1 \Rightarrow M[c]=c\cdot 1=c$$

2) Дисперсія невипадкової величини дорівнює 0.

$$D[c]=0$$

$$D[c]=(M[c])^2-M[c^2]=c^2-c^2=0$$

3) При збільшенні випадкової величини на невипадкову величину математичне сподівання збільшується на ту саму величину:

$$M[X+c]=M[X]+c$$

$$M[x+c]=\Sigma(x_i+c)P_i=\sum X_iP_i+c\sum P_i=m_x+c$$

4) У разі збільшення випадкової величини на невипадкову величину дисперсія не змінюється

$$D[X+c]=D[X]$$

$$D[X+c]=\left(M\left[(x+c)^2\right]\right)-(M[X+c])^2=\sum(x_i+c)^2P_i-\sum(x_i+c)P_i)^2=$$

$$=\sum X_i{}^2P_i+2c\sum X_iP_i+c^2-m^2{}_x-2c\cdot m_x-c^2=D[X]$$

5) При множенні випадкової величини на невипадкову її математичне сподівання також множиться на цю величину

$$M[cX]=cM[X]$$

$$M[cX]\int_{-\infty}^{\infty}cxf(x)dx=c\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)dx=cM[X]$$

6) При множенні випадкової величини на невипадкову дисперсія множиться на квадрат невипадкової величини, а середньоквадратичне відхилення – на її модуль.

$$D[cX]=M\left[c^2\overset{0}{X}{}^2\right]=c^2M\left[\overset{0}{X}{}^2\right]=c^2D[X]$$

$$D[cX]=c^2D[X] \qquad \sqrt{D[cX]}=|c|\sqrt{D[X]}\Rightarrow\ldots$$

Приклад: U – індикатор події U :

0	1
q	p

$$M[U]=0\cdot q+1\cdot p=p$$

$$D[U]=M\left[U^2\right]-(M[U])^2=0^2\cdot q+1^2\cdot p-p^2=p-p^2=$$

$$=p(1-p)=pq=p(1-p)=pq$$

$$\delta[U]=\sqrt{pq}$$

6. Твірна функція

X – <u>дискретна </u>випадкова величина; X = {0, 1, 2 …, , k ,;…}

<u>Визначення </u>*Твірна функція* випадкової величини X

$$\vartheta(Z) = \sum_{к=0}^{\infty} P_k Z^k$$, де 0 <Z≤1

При $Z = 1$ $$\vartheta(1) = \sum_{k=0}^{\infty} P_k = 1$$

$$\vartheta'(Z) = \sum_{k=0}^{\infty} k P_k Z^{k-1} \Rightarrow \vartheta^1(1) = m_x$$

$$\vartheta''(Z) = \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1) P_k Z^{K-2}$$

$$\vartheta''(1) = \sum k^2 P_K - \sum k P_K = L_2 - m_x \Rightarrow D_x = \vartheta''(1) + m_x - (m_x)^2$$