Тема 2. Методи розрахунку ймовірностей

План лекції.
1. Статистичний підхід.
2. Геометрична ймовірність.
3. Правило додавання.
4. Умовна ймовірність події та правило множення.
5. Формула Бернуллі.

Література:

1. Конспект лекцій. URL: https://drive.google.com/drive/folders/1jYAJHdSefxIUX4RQxmhGS50gxqPH7wci?usp=sharing
2. Кучук Г. А., Кучук Н. Г. Теорія ймовірностей. Част. 1: навчальний посібник. Харків : НТУ «ХПІ», 2024. 229 с. URL: https://repository.kpi.kharkov.ua/handle/KhPI-Press/80011
3. Теорія ймовірностей : навч. посіб. для студ. спеціальності 121 «Інженерія програмного забезпечення» / КПІ ім. Ігоря Сікорського; уклад.: О.В. Барабаш, А.П. Мусієнко, О.В. Свинчук. – Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2021. – 193 с. URL: https://ela.kpi.ua/bitstream/123456789/42046/1/Navch_Posib_Teor_Ymovirn_BarabashO_MusienkoA_SvynchukO.pdf
4. Теорія ймовірностей та математична статистика: навчальний посібник / О. І. Огірко, Н. В. Галайко. – Львів: 2017. – 292 с. URL: http://dspace.lvduvs.edu.ua/bitstream/1234567890/629/1/%D1%82%D0%B5%D0%BE%D1%80%D1%96%D1%8F%20%D0%B9%D0%BC%D0%BE%D0%B2%D1%96%D1%80%D0%BD%D0%BE%D1%81%D1%82%D0%B5%D0%B9%20%D0%BF%D1%96%D0%B4%D1%80%D1%83%D1%87%D0%BD%D0%B8%D0%BA.pdf
5. Навчальний посібник з дисципліни «Теорія ймовірностей, імовірнісні процеси та математична статистика». Курс лекцій. Частина 1 / Павлов О.А., Гавриленко О.В., Рибачук Л.В. – Київ: КПІ, 2021. – 154 с. URL: https://ela.kpi.ua/bitstream/123456789/41672/3/Posibnyk_Pavlov-Havrylenko-Rybachuk_KonspLek-1.pdf

1. Статистичний підхід

Отже, ми вміємо підраховувати ймовірності при дослідах, що мають симетрію «випадків». Переважна більшість подій за класичною формулою не обчислюється.

Приклад: 1) гральна кістка зі зміщеним центром ваги;
2) потрапляння в ціль під час пострілу;
3) вихід з ладу технічного пристрою протягом доби роботи.

Припустимо, що кожна з випадкових подій має якусь ймовірність, укладену між 0 і 1. Для симетричних дослідів правильне класичне визначення ймовірності: $\frac{m}{n}$. Для прикладів 1-3 справа складніша: необхідні експерименти, статистика.

Частота події А в серії дослідів – це відношення числа дослідів, у яких з'явилася подія А до загальної кількості дослідів. Частота (статистична ймовірність), $p^*(A) = \frac{M_A}{n}$. При невеликому n p^* випадково, при $n \to \infty$ p^* стабілізується, наближаючись до стійкої величини:

- зі збільшенням n частота події наближається до ймовірності;
- наближення йде повільно, але явно простежується на статистичному матеріалі;
- коливання частоти біля ймовірності носять довільний, незакономірний характер.

! Імовірність не математична границя частоти !

X_n сходиться по ймовірності до а, якщо для $\forall \varepsilon \to 0$ ймовірність нерівності $|X_n - a| < \varepsilon$ із збільшенням n наближається до 1.

Недолік. Треба надто багато дослідів.

2. Геометрична ймовірність

У деяких випадках прийом безпосереднього підрахунку ймовірностей допускає поширення на випадок незліченної множини елементарних подій. Наприклад, у межах області Ω відзначається випадково точка а (всі точки рівноправні, ніяке місце не має переваги). Тоді

$$p(A) = p\{a \in A\} = \frac{S_A}{S_\Omega}.$$

Приклад 1) На відрізку L довжини 20 см вміщено менший відрізок *l* довжини 10 см. Знайти ймовірність того, що точка, навмання поставлена на більший відрізок, потрапить також і на менший відрізок. Передбачається, що можливість попадання точки на відрізок пропорційна довжині відрізка і не залежить від його розташування.

Відповідь. $P(A) = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$.

Приклад 2) У колі радіусу R вміщено менший круг радіусу r . Знайти ймовірність того, що точка, навмання кинута у велике коло, потрапить також і в мале коло. Передбачається, що ймовірність попадання точки в коло пропорційна площі кола і залежить від його розташування.

Відповідь. $P = \frac{r^2}{R^2}$.

3. Правило додавання.

Правило складання ймовірностей з точки зору теоретико-множинного підходу є однією з аксіом при визначенні поняття ймовірності:

$P\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$, якщо всі A_i – несумісні.

<u>Наслідок 1.</u> Якщо кілька подій утворюють повну групу несумісних подій, то їх ймовірність дорівнює 1.

<u>Доведення.</u> З властивості повноти випливає, що $\sum_{i=1}^{т} A_i = \Omega$, отже

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right) = P(\Omega) = 1.$$

З іншого боку, внаслідок несумісності, за правилом складання

$P\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) = 1$, тобто теорема доведена.

<u>Наслідок 2.</u> Сума ймовірностей протилежних подій дорівнює одиниці, тобто. $P(A) + P(\overline{A}) = 1$.

<u>Наслідок 3.</u> Для сумісних подій $P(A+B) = P(A) + P(B) – P(AB)$

$P(AB) = P(A) + P(B) – P(A+B)$.

<u>Приклад.</u> У лотереї 1000 квитків: 1 – 500 гр, 10 – по 100 гр, 50 – по 20 гр, 100 – по 5 гр, інші без виграшу. Якою є ймовірність виграшу не менше 20 гр.

<u>Розв'язання.</u> A - виграш ≥20 гр.; A_{20} – рівно 20 гр, A_{100} – рівно 100 гр, A_{1000} – рівно 1000гр.

A_{20} , A_{100} , A_{1000} - несумісні, $A = A_{20} + A_{100} + A_{1000}$, отже, за правилом додавання

$$P(A) = P(A_{20}) + P(A_{100}) + P(A_{1000}) = \frac{50}{1000} + \frac{10}{1000} + \frac{1}{1000} = 0{,}061.$$

4. Умовна ймовірність події та правило множення.

Імовірність деякої випадкової події A часто змінюється, якщо вже відомо, що сталася подія B.

<u>Приклад.</u> У урні 5 білих та одна чорна куля. Подія A – дістається біла куля; подія B – дістається чорна куля.

P(A) = 5/6. Нехай до події A сталася подія B. Тоді в нових умовах ймовірність події A зміниться і дорівнюватиме 1.

Очевидно, що розглянуті в прикладі ймовірності події A треба розрізняти.

Введемо визначення залежних та незалежних подій.

Визначення. Подія А називається незалежною від події В, якщо ймовірність події А не залежить від того, чи відбулася подія В чи ні. В іншому випадку події називаються залежними .

Визначення. Імовірність події А, обчислена за умови, що мала місце інша подія, називається умовною ймовірністю події А і позначається Р(А/В).

Тоді у наведеному вище прикладі Р(А) = 5/6, а Р(А/В) = 1.

Теорема. Умовні ймовірності розраховуються за такими формулами:

$$P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)},P(B)\neq 0;$$

$$P(B/A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)},P(A)\neq 0.$$

Наслідок 1. (Правило множення).

$$P(AB) = P(A)\cdot P(B/A) = P(B)\cdot P(A/B).$$

Наслідок 2. Для незалежних подій

$$P(AB) = P(A)\cdot P(B).$$

Наслідок 3. Властивості залежності чи незалежності подій завжди взаємні (тобто якщо подія А не залежить від події В, то і подія не залежить від події А).

Зауваження. У загальному випадку $P(B/A) \neq P(A/B)$.

У розглянутому прикладі Р(А/В) = 1;

Р(В/А) = 1/5.

Для двох подій вводяться такі поняття, як попарна незалежність і незалежність у сукупності.

Визначення. Декілька подій називаються попарно незалежними, якщо незалежні між собою будь-які два з них.

Визначення. Декілька подій називаються незалежними в сукупності, якщо ймовірність кожного з них не змінюється при настанні інших подій, взятих в будь-якій комбінації і в будь-якому числі.

Незалежність подій у сукупності є більш жорсткою вимогою, ніж їхня попарна незалежність.

Приклад. У коробці є чотири квитки з номерами 110, 101, 011, 000. Нехай події А, В і С полягають у тому, що, відповідно, перша, друга та третя цифра номера навмання витягнутого квитка дорівнює 1. Легко показати, що Р(А) = Р(В) = Р(С) = 1/2; Р(В/А) = Р(В/С) = 1/2; Р(С/А) = Р(С/В) = 1/2; Р(А/В) = Р(А/С) = 1/2. Отже, події А, В та С попарно незалежні. Однак, якщо відбулися події А і В, то подія стає неможливим, тобто. події А, В та С незалежними в сукупності не є.

Теорема. Якщо кілька подій $A_1, \ldots A_n$ незалежні в сукупності, то $P(A_1\cdot\ldots\cdot A_n) = P(A_1)\cdot\ldots\cdot P(A_n)$.

Теорема. Якщо кілька подій $A1 , \dots A_n$ попарно незалежні, то

$$P\left(A_1 + \dots + A_n\right) + P\left(\overline{A}_1 + \dots + \overline{A}_n\right) = 1.$$

Наслідок 4. Якщо A і B незалежні, то незалежні наступні пари подій:

$$\overline{A} \text{ и } \overline{B};\ A \text{ и } \overline{B};\ \overline{A} \text{ и } B.$$

Доведення. (Для A і $\overline{B}$).

$$\left.\begin{array}{l} A = AB + A\overline{B}\xi \\ AB \text{ и } \overline{AB} \text{ несовместны} \end{array}\right\} \Rightarrow P(A) = P(AB) + P(A\overline{B}) = P(A)\cdot P(B) + P(A\overline{B}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(A\overline{B}) = P(A) - P(A)\cdot P(B) = P(A)(1 - P(B)) = P(A)\cdot P(\overline{B}), \text{ ч.т.д.}$$

Насправді під час вирішення завдань зазвичай застосовуються як правило додавання, так і правило множення. При цьому подія, ймовірність якої потрібно визначити, представляється у вигляді суми кількох несумісних подій (варіантів даноїподії), кожна з яких, своєю чергою, є добутком подій.

Приклад. В урні 10 білих та 15 чорних куль. Знайти ймовірність того, що дві вийнятих навмання кулі мають різний колір?

C - аналізована подія;

$C = A_{бч} + A_{чб}$ де $A_{бч}$ - спочатку білий, потім чорний

$A_{чб}$ - спочатку чорний, потім білий;

Події $A_{бч}$ та $A_{чб}$ несумісні.

$A_б$ - вийнята біла куля; $A_ч$ - виймуть чорну кулю.

$$P(C) = P(A_{бч} + A_{чб}) = P(A_{бч}) + P(A_{чб}) = P(A_б)P(A_ч / A_б) +$$

$$+P(A_б)P(A_б / A_ч) = \frac{10}{25}\cdot\frac{15}{24} + \frac{15}{25}\cdot\frac{10}{24} = 2\cdot\frac{10\cdot 15}{25\cdot 24} = 1/2.$$

5. Формула Бернуллі

В теорії ймовірностей зустрічаються завдання, коли проводиться ряд дослідів і цікавить кількість вдалих дослідів, а не результат конкретного досліду.

Визначення. Декілька аналогічних дослідів називаються незалежними, якщо ймовірність результату кожного з них не залежить від інших.

Приклади. 1) кілька кидань монети;

2) кілька пострілів за однакових умов.

Нехай проводиться n незалежних дослідів, у яких цікава для нас подія A може з'явитися з ймовірністю p і не з'явитися з ймовірністю $q = 1 - p$.

Теорема. Імовірність того, що подія А з'явиться рівно в m дослідах ($m \le n$) дорівнює

$P_{m,n} = C_n^m p^m q^{n-m}$ (формула Бернуллі).

Примітка 1. $P_{m,n}$ – член розкладання бінома $(p+q)^n = \sum_{m=0}^{n} c^m p^m q^{n-m}$.

Зауваження 2. Врахувати p + q =1.

Приклад. По мішені стріляють 5 разів у однакових умовах із ймовірністю влучення 0,8. Яка ймовірність рівно 4 влучень?

Рішення.

$$P_{4,5} = C_5^4 0,8^4 \cdot (1-0,8) = \frac{5!}{4!1!} \cdot 0,8^4 \cdot 0,2 = 5 \cdot 0,2 \cdot 0,64^2 = 0,4096 \approx 0,4.$$