Тема 7. Деякі розподіли неперервних випадкових величин.

План. 1. Рівномірний розподіл.
2. Показниковий розподіл.
3. Нормальний розподіл.
4. Гамма-розподіл
5. Розподіл Ерланга.

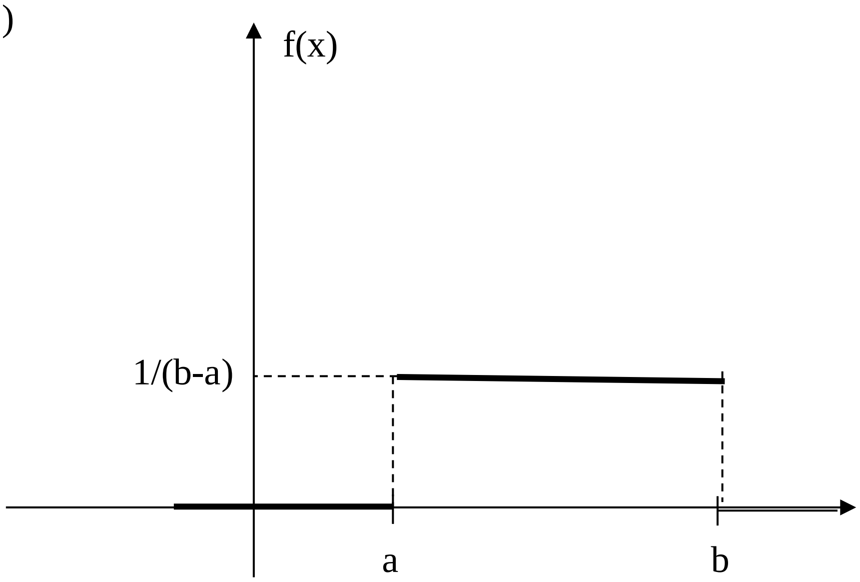
1. Рівномірний розподіл

Def. Випадкова величина X має рівномірний розподіл на ділянці від a до b якщо її щільність на цій ділянці постійна:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & x\in(a,b)\\ 0, & x\notin(a,b)\end{cases}.$$

Вивчення:

1)



$m_x=\dfrac{b+a}{2}$ медиана - m_x

2)

$D_x=\dfrac{(b-a)^2}{12};\sigma_x=\dfrac{b-a}{\sqrt{12}}.$

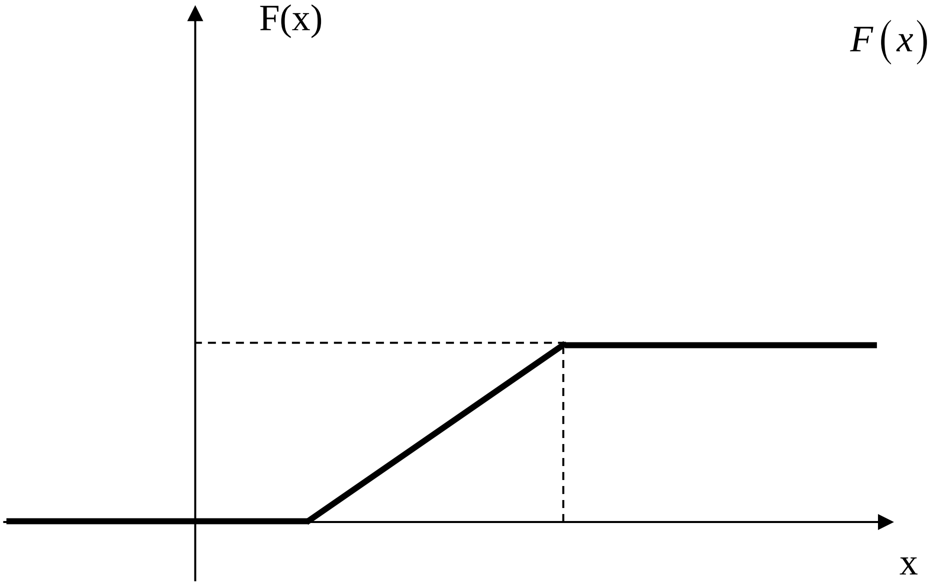
Розподіл є симетричним відносно m_x.

3) $\mu_3=0$ (асиметрії немає).

4) $\mu_4=\dfrac{(b-a)^4}{80}\Rightarrow\varepsilon_x=\dfrac{\mu^4}{\sigma^4}-3=\dfrac{144}{80}-3=-1{,}2<0$

(крутості немає)

5)



$$F(x)=\begin{cases}0, & x<a\\ \dfrac{x\text{-}a}{b\text{-}a}, & a<x<b\\ 1, & x>b\end{cases}$$

6) $P\{\alpha<x<\beta\}=\dfrac{\beta-\alpha}{b-a}$, если $(\alpha,\beta)\subset(a,b)$.

Пояснення: 1) Прилад із грубими поділками. Проводиться вимір. X – помилка виміру.

а) найближче ціле $\Rightarrow$(a , b) = (-½; ½) $m_x = 0$, $D_x = 1/12$;

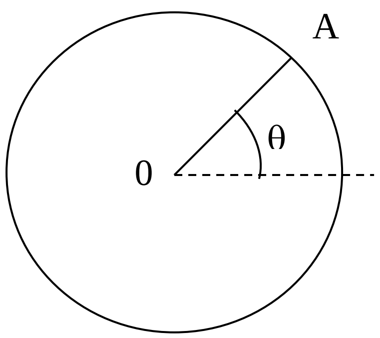
б) найближче менше $\Rightarrow$(a , b) = (0, 1) $m_x = ½$, $D_x = 1/12$;

в) найближче більше $\Rightarrow$(a , b) = (-1; 0) $m_x = -\dfrac{1}{2}$, $D_x = 1/12$;

1 – ціна поділу.

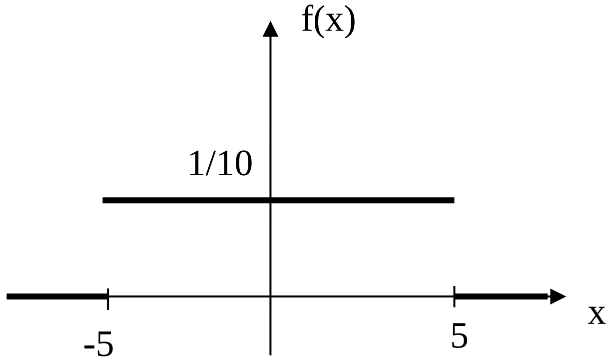
2) Час очікування поїзда метро, якщо поїзди ходять із рівними проміжками.

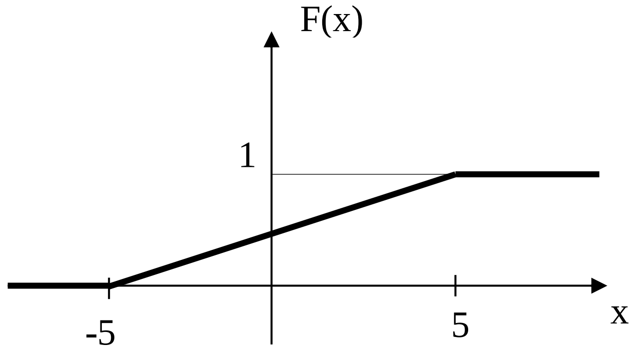
3) На колесі фіксується радіус OA. Колесо обертається та зупиняється внаслідок тертя. θ- Кут з горизонтом, рівномірно розподілена на інтервалі (0,2 π).



Приклад. Довжина навчального класу вимірюється рулеткою, поділки якої розташовані через 10 см. Округлюємо до найближчого поділу. Випадкова величина X – помилка виміру. Знайти і побудувати f (x), F (x); знайти m_x , D_x , σ_x .

$X = \{x | x \in (-5,5)\}$, Розподіл рівномірний.





$$f(x) = \frac{1}{10}, x \in (-5,5)$$

$$F(x) = \begin{cases} 0, x < -5 \\ \dfrac{x+5}{10}, |x| < 5 \\ 1, x > 5 \end{cases}$$

$m_x = 0; D_x = \frac{10^2}{1^2} = \frac{25}{3} = 8\frac{1}{3}; \sigma_x = \frac{5}{\sqrt{3}} \approx 2{,}9.$

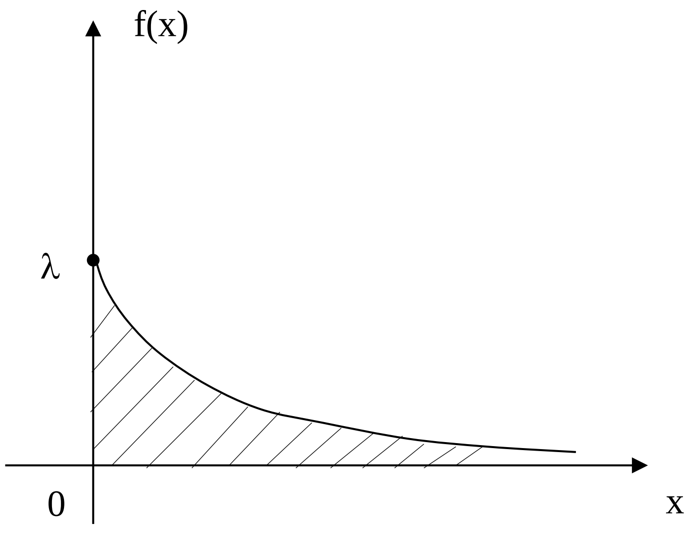
2. Показниковий розподіл

<u>Def .</u> Випадкова величина X має показниковий розподіл (експоненційний), якщо

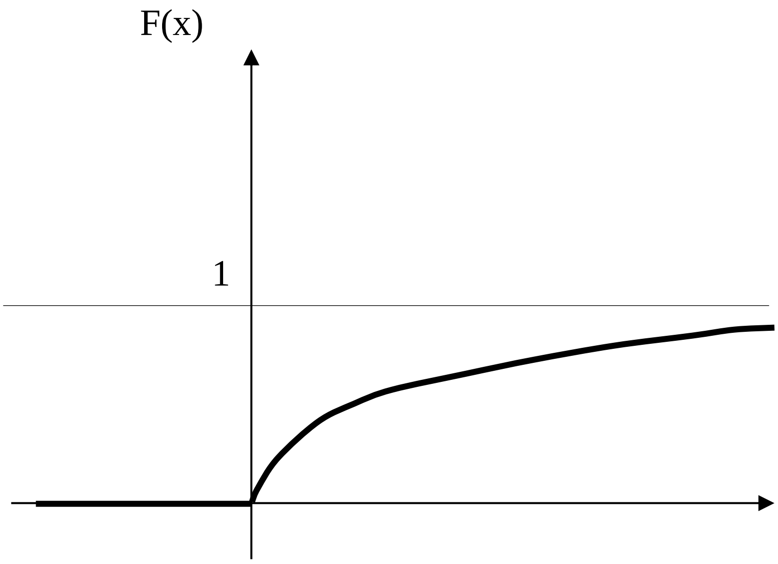
$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0 \ \ (\lambda \text{ - параметр розподілу}) \\ 0, & x \le 0 \end{cases}.$$

Вивчення (властивості):

1)



2)



$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x} \quad (x > 0)$$

$$F(x) = \int_0^x \lambda e^{-\lambda x} dx = -e^{-\lambda x} \Big|_0^x .$$

3)

$$m_x = \frac{1}{\lambda}$$

$$D_x = 1/\lambda^2 \quad \sigma_x = 1/\lambda$$

$$V = \frac{\sigma_x}{m_x} = 1$$

$$m_x = \int_0^\infty x\lambda e^{-\lambda x} dx$$

$$D_x = \int x^2 \lambda e^{-\lambda x} dx - 1/\lambda^2$$

4) $\mu_3 = 2/\lambda^3$; *асиметрія* $S_k = \dfrac{\mu^3}{\sigma^3} = 2 > 0.$

Th . Інтервал часу між двома сусідніми подіями в найпростішому потоці має показниковий розподіл з параметром, що дорівнює інтенсивності потоку:

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}, t > 0.$$

Позначення: $e^{x} = \exp(x)$.

Приклад. Найпростіший потік має інтенсивність 2 заявки на хвилину. Знайти ймовірність того, що інтервал часу між сусідніми заявками буде від 1 до 2 хвилин , параметри розподілу інтервалів часу?

Розв'язання. За теоремою інтервал часу між подіями в найпростішому потоці має показовий розподіл з параметром λ= 2: $f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$

P $\{1<T<2\}$ = F(2) - F(1) = $1 - e^{-4} - (1 - e^{-2}) = e^{-2} - e^{-4}$ = 0,35 - 0,002 ≈0,13.

$m_t = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{2}$

$D_t = \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{4}$

$F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$.

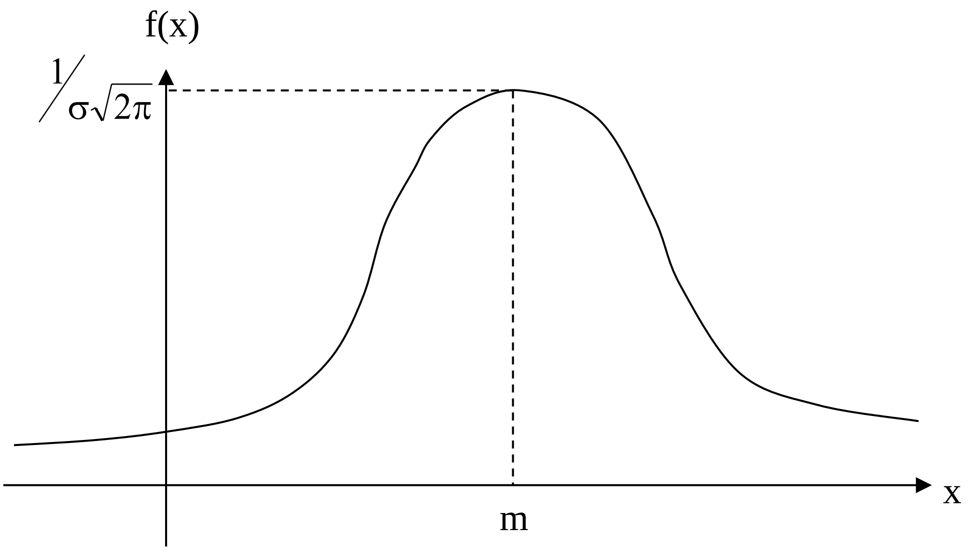
3. Нормальний розподіл

Def . Випадкова величина X розподілена за нормальним законом (законом Гауса) з параметром m та σ, якщо

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left(\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right).$$

Вивчення (властивості):

1)



2) $m_x = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)dx = m$ *(центр розсіювання).*

3) $D_x = \int\limits_{-\infty}^{\infty} (x-m)^2 f(x)dx = \sigma^2$

$\sigma_x = \sqrt{D_x} = \sigma.$

4) $\mu_4 = 3\sigma^4 \Rightarrow \varepsilon_x = 0.$

5) $p\{\alpha < x < \beta\} = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{\frac{\alpha-m}{\sigma}}^{\frac{\beta-m}{\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$,

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$ - *функція Лапласа*

$$P(\alpha < x < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - m}{\sigma}\right) - \left(\frac{\alpha - m}{\sigma}\right)\quad \begin{array}{|l} \text{а) } \Phi(0) = 0 \\ \text{б) } \Phi(-x) = -\Phi(x) \\ \text{в) } \Phi(-\infty) = -0{,}5 \\ \quad\ \Phi(+\infty) = 0{,}5 \end{array}$$

6) $F(x) = \dfrac{1}{2} + \Phi\left(\dfrac{x - m}{\sigma}\right).$

<u>Нормальний</u> розподіл виникає при складанні багатьох незалежних (або слабко залежних) величин, порівняних за своїм впливом на суму.

<u>Примітка:</u> 1) помилки вимірів;
2) помилки стрільби;
3) множини «помилок» (відхилень від норми), які супроводжують цілеспрямовану діяльність людини.

Приклад. У спійманому косяку риби вага окремої риби підпорядковується нормальному закону з параметрами m = 375 г, σ= 25 г (N (375, 25)). Знайти з точністю до 0,01 ймовірність того, що вага однієї спійманої риби буде:

а) від 300 до 425 м; Ф(2) = 0,48; Ф(3) = 0,5.
б) трохи більше 450 р;
в) більше ніж 425 р.

а) $P(300 < x < 425) = \Phi\left(\dfrac{425 - 375}{25}\right) - \Phi\left(\dfrac{300 - 375}{25}\right) =$

$= \Phi(2) - \Phi(-3) = \Phi(2) + \Phi(3) = 0{,}48 + 0{,}5 = 0{,}98.$

б) $P(x < 450) = P(-\infty < x < 450) = \Phi\left(\dfrac{450 - 375}{25}\right) - \Phi\left(\dfrac{-\infty - 375}{25}\right) =$

$= \Phi(3) - \Phi(-\infty) = \Phi(3) + \Phi(\infty) = 0{,}5 + 0{,}5 = 1.$

в) $P(x>425)=P(425<x<+\infty)=\Phi(+\infty)-\Phi\left(\frac{425-375}{25}\right)=$

$=\frac{1}{2}-\Phi(2)=0,5-0,48=0,02.$

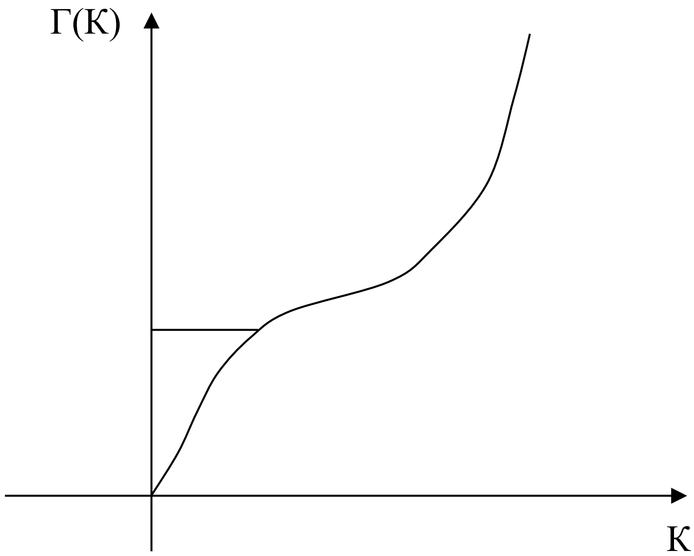
4. Гамма-розподіл

Def . Випадкова величина X має гамма-розподіл, якщо її щільність ймовірності виражається формулою

$$f_k(x)=\frac{\lambda^k x^{k-1}e^{-\lambda x}}{\Gamma(K)},(x>0)$$

$$\lambda>0, к>0, \Gamma(K)=\int_0^\infty e^{-t}\cdot t^{K-1}dt.$$

Властивості гамма-функцій :



1) Γ(1) = 1

2) Γ(К + 1) = КΓ(К)

3) Γ(К + 1) = К ∀К∈ Z_+

4) $\Gamma\left(K+\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{\pi}(2к-1)}{2^к}$, де (2к - 1) !! = 1. 3. 5 ·… ·(2к – 1).

Властивості гамма-розподілу:

1) $m_x=\frac{\Gamma(K+1)}{\lambda\Gamma(K)}=\frac{K}{\lambda}$;

2) $D_x={}^{K}\!/_{\lambda2}$;

3) при К = 1 гамма-розподіл переходить у показовий.

5. Розподіл Ерланга

Def . Розподіл Ерланга К-ого порядку називається гамма-розподіл із щільністю $f_K(x)$, де К - ціле число, >1.

$$f_k(x)=\frac{\lambda^k x^{k-1}e^{-\lambda x}}{(K-1)},\left(x>0,\ K>1,\ K\in Z_+\right)$$

$$f_k(x)=\lambda\cdot\frac{(\lambda x)^{k-1}}{(K-1)!}e-(\lambda x)\leftarrow \textit{знаходимо по таблиці для розоділу Пуассона.}$$

Зауваження. Закону Ерланга порядку *k* підпорядковується сума незалежних випадкових величин, розподілених за показовим законом $\Rightarrow$ інтервал часу Т, що складається з суми *k* інтервалів між подіями в найпростішому потоці розподілу за законом Ерланга.