Підсумкове тестування
за темою 5:
Випадкові величини та їх характеристики

Посилання на тест:
https://forms.gle/Emh4ca6xXrjJGnCi9

Час для проходження: 10 хвилин

Навчальна дисципліна:
Теорія ймовірностей

Тема 6. **Основні розподіли дискретних випадкових величин**

Питання лекції

1. Вироджений розподіл.
2. Розподіл Бернуллі.
3. Біноміальний розподіл.
4. Розподіл Пуассона
5. Потоки подій
6. Геометричний розподіл.

.

.

Рекомендована література

1. Конспект лекцій. URL: https://drive.google.com/drive/folders/1jYAJHdSefxIUX4RQxmhGS50gxqPH7wci?usp=sharing

2. Кучук Г. А., Кучук Н. Г. Теорія ймовірностей. Частина 1 : навчальний посібник. Харків : НТУ «ХПІ», 2024. 229 с. URL: https://repository.kpi.kharkov.ua/handle/KhPI-Press/80011

3. Теорія ймовірностей : навч. посіб. для студ. спеціальності 121 «Інженерія програмного забезпечення» / КПІ ім. Ігоря Сікорського; уклад.: О.В. Барабаш, А.П. Мусієнко, О.В. Свинчук. – Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2021. – 193 с. URL: https://ela.kpi.ua/bitstream/123456789/42046/1/Navch_Posib_Teor_Ymovirn_BarabashO_MusienkoA_SvynchukO.pdf

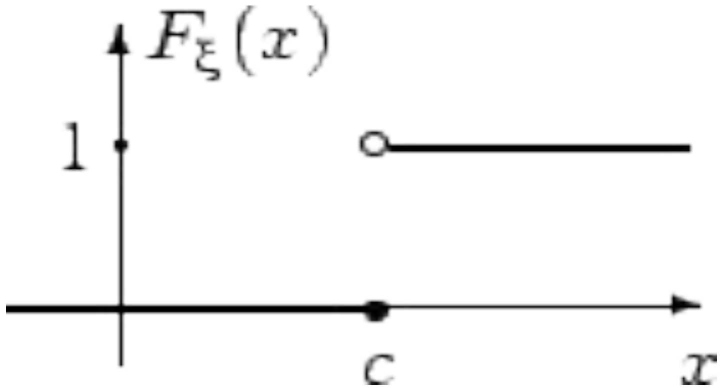
4. Навчальний посібник з дисципліни «Теорія ймовірностей, імовірнісні процеси та математична статистика». Курс лекцій. Частина 1 / Павлов О.А., Гавриленко О.В., Рибачук Л.В. – Київ: КПІ, 2021. – 154 с. URL: https://ela.kpi.ua/bitstream/123456789/41672/3/Posibnyk_Pavlov-Havrylenko-Rybachuk_KonspLek-1.pdf

1. Вироджений розподіл

Def. Дискретна випадкова величина *X* має *__вироджений розподіл__* у точці *c*, якщо вона набуває єдиного значення у цій точці з ймовірністю 1.

Функція розподілу має вигляд:

$$F_\xi(x) = \mathrm{P}(\xi < x) = \mathrm{P}(c < x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant c; \\ 1, & x > c. \end{cases}$$



Випадкова величина *X* – *__невипадкова__*.

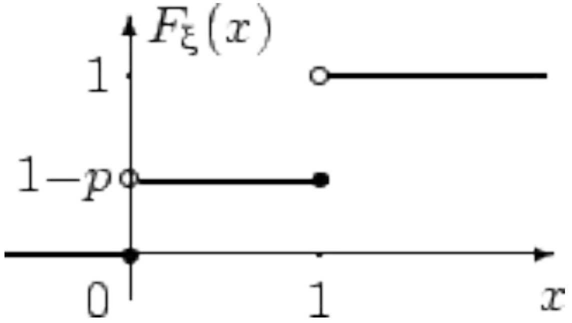
Математичне сподівання - *c*; дисперсія - 0, СКВ - 0.

2. Розподіл Бернуллі

Def. Дискретна випадкова величина *X* має *розподіл Бернуллі* з параметром p, якщо вона набуває значень 1 і 0 з ймовірностями p і 1-p відповідно.

Функція розподілу має вигляд:

$$F_\xi(x) = \mathrm{P}(\xi < x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0; \\ 1-p, & 0 < x \leqslant 1 \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$



Приклад. U – індикатор події; 1 – сталося; 0 – ні; q = 1 – p; U =

0	1
q	p

Математичне сподівання: $\mathrm{M}[\mathrm{U}] = 0 \cdot q + 1 \cdot p = p$

дисперсія: $\mathrm{D}[\mathrm{U}] = \mathrm{M}[\mathrm{U}^2] - (\mathrm{M}[\mathrm{U}])^2 = 0^2 \cdot q + 1^2 \cdot p - p^2 = p - p^2 =$

$= p(1-p) = pq = p(1-p) = pq$

СКВ: $\delta[\mathrm{U}] = \sqrt{pq}$

3. Біноміальний розподіл

Def. Дискретна випадкова величина X має *біноміальний розподіл* , якщо: а) вона набуває значення {0,1 …, m, …n}

б) $P_m = P\{X = m\} = C_n^m p^m q^{n-m}$, $0 < p < 1$; $q=1-p$, $m \in [0,n]$.

Умови біноміального розподілу: Виконується n незалежних дослідів, у кожному з яких певна подія А (успіх) відбувається з ймовірністю p; X – кількість успіхів.

Характеристики біноміального розподілу:

$$\begin{cases} m_x = np \\ D_x = npq \\ \sigma_x = \sqrt{npq} \end{cases}$$

Приклад. Надіслано 5 повідомлень по каналу зв'язку. Кожне повідомлення спотворюється із ймовірністю p = 0,3. X – кількість спотворених повідомлень. Знайти характеристики X, P (X>=1).

Рішення. $m_x = n \cdot p = 5 \cdot 0,3 = 1,5;$

$$D_x = n \cdot p \cdot q = 5 \cdot 0,3 \cdot 0,7 = 1,05; \quad \delta_x = \sqrt{1,05} \approx 1,03;$$

$$\mathrm{P}\{X \ge 1\} = 1 - \mathrm{P}\{\mathrm{X} = 0\} = 1 - C_5^0 \cdot p^0 q^5 = 1 - 1 \cdot 1 \cdot 0,7^5 = 1 - 0,17 \approx 0,83.$$

4. Розподіл Пуассона

Def. Дискретна випадкова величина X має *розподіл Пуассона,* якщо:

а) вона набуває зліченну кількість значень {0,1 …, m, …}

б) $$P_m = P(X=m) = \frac{a^m}{m!}e^{-a}, \quad a>0, \quad m \ge 0, m \in Z.$$

Умови розподілу Пуассона: ймовірність успіху (*p*) мала, але існує для великої кількості дослідів (*n*), *n* · *p* = *a* (параметр розподілу).

Характеристики розподілу Пуассона: $m_x = a; \quad D_x = a; \quad \delta = \sqrt{a}$

Приклад. Тираж шкільного підручника 100 000 екз. Імовірність неправильного брошурування 3 · 10 $^{-5}$. Знайти ймовірність того, що у тиражі: а) є хоча б одна бракована книга; б) рівно 5 бракованих книг.

Рішення. n=100000; p=3 · 10 $^{-5}$, a = np = 3, $m_x = 3; \quad D_x = 3; \quad \delta = \sqrt{3}$

$$a)\ \mathrm{P}\{X \ge 1\} = 1 - \mathrm{P}\{X=0\} = 1 - \frac{1}{1}\cdot e^{-3} = 1 - 0,05 = 0,95$$

$$б)\ \mathrm{P}\{X=5\} = \frac{a^5}{5}\cdot e^{-3} = \frac{3^5}{5!}\cdot 0,05 = \frac{243}{120}\cdot 0,05 \approx 0,1$$

5. Потоки подій

Визначення. Потік ***стаціонарний***, якщо середня кількість подій, що з'являються за одиницю часу, завжди постійна,
позначимо її λ - інтенсивність (щільність) потоку.

Визначення. Потік ***ординарний***, якщо ймовірність появи двох подій за малий проміжок часу мала.

Визначення. Потік має ***відсутність післядії***, якщо поява подій не пов'язана між собою.

Визначення. ***Найпростіший потік*** - це стаціонарний ординарний потік з відсутністю післядії.

Визначення. ***Пуассонівський потік*** – ординарний потік без післядії.

Th. Для пуассонівського потоку кількість подій, що відбулися за час $(t_0, t_0 + \tau)$ розподілена згідно із законом Пуассона з параметром

$$a = \int_{t_0}^{t_0+\tau} \lambda(t)\,\mathrm{d}t,$$

<u>Наслідок</u>. Для найпростішого потоку ($\lambda(t) = \text{const}$) число подій, що відбулися за час $(t_0, t_0 + \tau)$, розподілене за законом Пуассона з параметром $\mathbf{a = \lambda \cdot \tau}$, λ - інтенсивність потоку.

Приклад. На відомчу АТС надходить найпростіший потік викликів з інтенсивністю $\lambda=0,8$ (викликів/хв). Знайти ймовірність того, що за 2 хв:
а) не прийде жодного виклику;   б) прийде рівно один виклик;
<u>в) прийде хоча б один виклик . ($e^{-1,6} = 0,2$)</u>

Рішення. *X* – кількість викликів, розподілена за законом Пуассона:

$$\underline{a = \lambda \cdot \tau = 0,8} \text{ викл./хв} \cdot 2 \text{ хв.} = 1,6 \text{ (викл.)}$$

$$P_0 = P\left(X=0\right) = \frac{a^0}{0!}e^{-1,6} = e^{-1,6} \approx 0,2$$

$$P_1 = P\left(X=1\right) == \frac{a^1}{1!}e^{-1,6} = a \cdot e^{-1,6} \approx 1,6 \cdot 0,2 \approx 0,32$$

$$R_1 = P\{X \geq 1\} = 1 - P\{X = 0\} = 1 - P_0 \approx 0,8$$

6. Геометричний розподіл

Def. Дискретна випадкова величина X має *<u>геометричний розподіл</u>*, якщо: а) вона набуває значення {0,1 …, m, …}

б) $P_m = P\{X = m\} = p \cdot q^m$, $0 < p < 1$; $q = 1 - p$.

Умови геометричного розподілу: Виконується n незалежних дослідів, у кожному з яких певна подія A (успіх) відбувається з ймовірністю p; X – кількість дослідів до першої успішної спроби.

Характеристики геометричного розподілу:

$$m_x = q/p;$$

$$D_x = q/p^2; \quad \sigma_x = \sqrt{a}/p.$$

Приклад. При кожному огляді РЛС літак виявляється із ймовірністю p = 0,2. X – кількість невдалих оглядів до першого виявлення. Знайти m_x, D_x, δ_x. Знайти практично максимальну кількість оглядів, за які літак ще не буде виявлений.

Рішення. X : p = 0,2 , геометричний розподіл:

$$m_x = \frac{q}{p} = \frac{0,8}{0,2} = 4;$$

$$D_x = \frac{q}{p^2} = \frac{0,8}{0,04} = 20;$$

$$\sigma_x = \sqrt{20} \approx 4,46.$$

За правилом трьох сигма: $n = m_x + 3\,\sigma_x = 4 + 3 \cdot 4 \approx 4+13 \approx 17$ (оглядів).