Тема 1. Що таке ймовірність?

План. 1. Історична довідка.
2. Основні визначення за класичного підходу.
3. Класична імовірнісна схема
4. Статистичний підхід.
5. Теоретико-множинний підхід.
6. Геометрична ймовірність.

Література:

1. Конспект лекцій. URL: https://drive.google.com/drive/folders/1jYAJHdSefxIUX4RQxmhGS50gxqPH7wci?usp=sharing
2. Кучук Г. А., Кучук Н. Г. Теорія ймовірностей. Част. 1: навчальний посібник. Харків : НТУ «ХПІ», 2024. 229 с. URL: https://repository.kpi.kharkov.ua/handle/KhPI-Press/80011
3. Теорія ймовірностей : навч. посіб. для студ. спеціальності 121 «Інженерія програмного забезпечення» / КПІ ім. Ігоря Сікорського; уклад.: О.В. Барабаш, А.П. Мусієнко, О.В. Свинчук. – Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2021. – 193 с. URL: https://ela.kpi.ua/bitstream/123456789/42046/1/Navch_Posib_Teor_Ymovirn_BarabashO_MusienkoA_SvynchukO.pdf
4. Теорія ймовірностей та математична статистика: навчальний посібник / О. І. Огірко, Н. В. Галайко. – Львів: 2017. – 292 с. URL: http://dspace.lvduvs.edu.ua/bitstream/1234567890/629/1/%D1%82%D0%B5%D0%BE%D1%80%D1%96%D1%8F%20%D0%B9%D0%BC%D0%BE%D0%B2%D1%96%D1%80%D0%BD%D0%BE%D1%81%D1%82%D0%B5%D0%B9%20%D0%BF%D1%96%D0%B4%D1%80%D1%83%D1%87%D0%BD%D0%B8%D0%BA.pdf
5. Навчальний посібник з дисципліни «Теорія ймовірностей, імовірнісні процеси та математична статистика». Курс лекцій. Частина 1 / Павлов О.А., Гавриленко О.В., Рибачук Л.В. – Київ: КПІ, 2021. – 154 с. URL: https://ela.kpi.ua/bitstream/123456789/41672/3/Posibnyk_Pavlov-Havrylenko-Rybachuk_KonspLek-1.pdf

1. Історична довідка.

Випадкове явище - це таке явище, яке при неодноразовому відтворенні одного й того ж досвіду (експерименту) протікає щоразу птрохи інакше.

Приклади.

1) зважування на точних аналітичних терезах;
2) випробування виробу на безвідмовність роботи;
3) ряд пострілів з однієї й тієї ж зброї в однакових умовах;
4) роздача колоди гральних карт;
5) лотерея.

Одне, окреме явище практично непередбачуване.

За дуже великої кількості таких явищ випадковість, непередбачуваність практично зникає.

Мета імовірнісних (статистичних) методів полягає в тому, щоб минаючи надто складне (а часто неможливе) дослідження окремого випадкового явища, звернутися до законів, які керують масами таких явищ.

Теорія ймовірностей – математична наука, що вивчає загальні закономірності у випадкових явищах.

Ціль теорії ймовірностей - здійснення прогнозу випадкового явища.

Предмет теорії ймовірностей – математичні моделі випадкових явищ.

Подібно до інших математичних наук теорія ймовірності виникла з практики: 17 століття – спроба створення загальної теорії страхування в Західній Європі, заснованої на аналізі закономірностей у таких масових явищах, як захворюваність, смертність, статистика нещасних випадків; Галілей - дослідження помилок фізичних вимірів. Також сприяли розвиток міського господарства, статистика населення.

Однак у розглянутих завданнях занадто багато випадкових факторів, для науки потрібен був простий матеріал – азартні ігри. За підсумками їх дослідження сформувалися основні поняття науку й прийоми обчислення: Паскаль, Ферма, Гюйгенс (середина 17 століття), Бернуллі (кінець 17 століття), Моавр (поч. 18 століття). Лаплас (поч. 19 століття) – систематичний виклад основ науки; Пуассон - застосував до теорії стрілянини.

19 століття – наймодніша наука (навіть судочинство, історія, богослов'я тощо) – потім лженаука для Західної Європи.

20 століття: Колмогоров – аксіоматична побудова науки; Вінер, Феллер, Фішер, Нейман: виділення низки окремих наук (теорія інформації, наприклад, теорія ігор).

2. ***Основні визначення у класичному підході.***

Досвід (експеримент, випробування) – деяка сукупність умов, у яких спостерігається те чи інше явище, фіксується той чи інший результат.

Досвід з випадковим результатом - досвід, результат якого варіюється при його повторенні (буде надалі - досвід).

Випадкова подія чи подія – факт, який у результаті досвіду з випадковим результатом може статися чи не відбутися (позначаємо великими літерами латинського алфавіту – A, B, C...)

Приклад.

Досвід – витягнути картку, подія – витягнути туза з карткової колоди.

Протилежна подія – подія $\overline{A}$, що полягає у непояві події A.

Імовірність події – чисельна міра об'єктивної можливості цієї події A – P(A).

Одиниця виміру – достовірна подія – P(A) = 1 (кістка, ≤ 6 очок).

Протилежна йому - неможлива подія - $P(\overline{A}) = 0$ (кістка, > 6 очок).

$$0 \le P(A) \le 1$$

Практично достовірна подія $P(A) \approx 1$ (30 червня у Харкові не випаде сніг)

Практично неможлива подія $P(A) \approx 0$ (32 літери розрізної абетки, 18 разів – теорія ймовірності)

Принцип практичної впевненості : якщо ймовірність події А в даному досвіді дуже мала, то при одноразовому виконанні досвіду можна поводитися так, ніби подія А взагалі неможливо, тобто не розраховувати на її появу.

Приклади: поїздка поїздом (подія – аварія)

Найважче питання: наскільки має бути мала ймовірність події, щоб її вважати практично неможливим? Відповідь виходить із практичних міркувань та залежить від важливості досвіду.

Приклади – зважування, Чорнобиль, пуск ракети.

Класичний досвід, або досвід, що має симетрію - досвід, в якому різні результати об'єктивно однаково можливі.

3. ***Класична імовірнісна схема***

Безпосередній підрахунок можливостей.

Розглядатимемо досліди, що володіють симетрією (об'єктивно однаково можливі) і що проводяться кінцеве число разів (класична схема).

Сфера практичної дії класичної схеми дуже обмежена, проте зручна вивчення основних властивостей ймовірностей.

Визначення: 1. Декілька подій у даному досвіді утворюють повну групу, якщо в результаті досвіду неминуче має з'явитися хоча б одна з них.

Приклад: 1) гральна кістка: повна - 6 подій (1, 2, 3, 4, 5, 6).

2) поява хоча б однієї чорної, або хоча б однієї білої кулі при витягуванні 2 куль із урни.

Властивість: До повної групи подій можна додавати будь-які події – властивість повноти не зникне.

Визначення: 2. Декілька подій у цьому досвіді називаються несумісними , якщо жодні з них не можуть з'явитися разом.

Властивість: можна із групи викидати будь-які події (до 2-х), властивість несумісності залишається.

Визначення: 3. Декілька подій у цьому досвіді називаються рівноможливими, якщо жодна із них об'єктивно не більш можлива, ніжбудь-яка інша.

Визначення: 4. Випадок – подія із несумісної повної групи рівноможливих подій одного досвіду.

Визначення: Випадок сприятливий події А, якщо він спричиняє появу даної події.

Розрахунок ймовірності події А:

$$P(A) = \frac{m_A}{n} \quad P(A) = \frac{m_A}{n}$$

m_A – число випадків, сприятливих для події А;

n – загальна кількість випадків.

Приклади

1. *Чи утворять повну групу подиї?*
- Досвід: два постріли по мішені.

Події: A_1 хоча б одне влучення, A_2 хоча б один промах.

Події: A_1 точно одне влучення, A_2 точно два влучення

2. *Чи є несумісними такі події?*

б) Досвід – кидання двох монет.

A_1 – поява герба на першій монеті, A_2 – поява решки на другій монеті.

3. *Чи є рівноможливими такі події?*

а) Досвід - кидання "правильної" монети.

Події: A_1 – поява герба, A_2 – поява решки

б) Досвід – кидання погнутої монети.

Події з пункту а)

в) Досвід – кидання двох монет.

Події: A_1 – поява двох гербів

A_2 – поява двох решок, A_3 – поява одного герба та однієї решки

4..*Чи є випадками такі групи подій:*

а) Досвід – кидання монети.

Події: A_1 – поява герба, A_2 – поява решки

б) Досвід – кидання гральної кістки.

A_1 – поява не більше 2-х очок; A_2 – поява 3-х чи 4-х очок; A_3 – поява не менше 5 очок

<u>Послідовність розв'язання завдань:</u>

1. Визначити групу випадків, зручну на вирішення цієї задачі.
2. Порахувати кількість всіх випадків.
3. Порахувати кількість сприятливих випадків.
4. Порахувати за формулою ймовірність.

<u>Приклад.</u> В урні 3 білих і дві чорні кулі. Із неї витягли кулю. Знайти ймовірність, що він білий (подія А).

Рішення: а) досвід – витягування кулі. б б б ч ч

1 2 3 4 5

випадки: витягування і-ої кулі (5)

сприятливі: 1, 2, 3 $\Rightarrow$ P(A) = 3/5.

Приклад. Знайти ймовірність витягнути із колоди карт (32 листи) 2 туза.

$$\frac{C_4^2}{C_{32}^2} = \frac{\frac{4!}{2!\,2!}}{\frac{32!}{2!\,30!}} = \frac{4 \cdot 3}{32 \cdot 31} = \frac{3}{243} \approx \frac{1}{80}.$$

4. Теоретико-множинний підхід.

Нехай проводиться досвід із випадковим результатом.

Позначимо Ω - множину всіх можливих наслідків досвіду,$\omega \in \Omega$ елементарна подія.

Ω - простір елементарних подій.

Подія $A \subseteq \Omega$ – підмножина множини елементарних подій

Def. Варіанти події A - події A_1 , ..., A_n , такі, що

$$\sum_{i=1}^{n} A_i = A;$$

$$(\forall i \le n, j \le n | i \ne j) \Rightarrow A_i \cdot A_j = 0.$$

Приклади: 1) Досвід – кидають одну гральну кістку.

Елементарні події $\Omega = \{ \{1\},\{2\},\{3\},\{4\},\{5\},\{6\} \}$.

Подія A – випадання непарного числа;

Варіанти $A = \{ \{1\},\{3\},\{5\} \}$.

2) Досвід – постріл по мішені (коло радіусу R), координати декартові, з центром у центрі кола.

Елементарна подія ω – потрапляння до $\forall(x, y)$.

Ω - вся площина x0y.

Подія A – потрапляння у мішень $A = \{ (x, y)\} \mid x^2 + y^2 \le R^2\}$.

Def. Достовірна подія – множина Ω.

Неможлива подія – порожня множина $\varnothing$.

Def. Події A_1 ..., A_n утворюють повну групу, якщо $\sum_{i=1}^{n} A_i = \Omega$, тобто їхня сума є достовірною подією.

Def. Дві події несумісні, якщо їх множини не перетинаються: $A_1 A_2 = = \varnothing$.

Події A_1 ..., A_n несумісні, якщо поява будь-якого з них виключає появу кожного з інших: $(\forall i \le n, \forall j \le n \; | i \ne j) \Rightarrow A_i \cdot A_j = \varnothing$.

Def. Сумою двох подій A і B називається подія C, що полягає у виконанні події A, або події B, або обох подій разом.

Def . Добутком двох подій A і B називається подія D , що полягає в спільному виконанні події A і події B.

Def . $\overline{A}$ – подія, протилежна по відношенню до події A, полягає у непояві A.

Імовірність події та правило додавання

Def . Кожній події у відповідність ставиться число, яке називається ймовірністю події A – p(A), що задовольняє таким аксіомам:

1. $0 \le p(A) \le 1 \forall A \subseteq \Omega$.

Правило додавання

2. $AB = \varnothing \Rightarrow p(A+B) = p(A)+p(B)$.
3. Якщо $A_1, ..., A_n, ...$ - несумісні, то

$$p\left(\sum_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} p(A_i).$$

Def . Події $A_1, ..., A_n$ рівноможливі, якщо $p(A_1) = p(A_2) = \ldots = p(A_n)$

Def . Подія з кінцевої повної несумісної рівноможливої групи назвемо випадком.

Випадок A_i сприятливий для події A, якщо $A_i \subseteq A$.

Якщо ймовірність випадку $1/n \Rightarrow p(A) = \frac{m_A}{n}$ – отримаємо класичне визначення імовірності.

5. ***Статистичний підхід***

Отже, ми вміємо підраховувати ймовірності при дослідах, що мають симетрію «випадків». Переважна більшість подій за класичною формулою не обчислюється.

Приклад: 1) гральна кістка зі зміщеним центром ваги;

2) потрапляння в ціль під час пострілу;

3) вихід з ладу технічного пристрою протягом доби роботи.

Припустимо, що кожна з випадкових подій має якусь ймовірність, укладену між 0 і 1. Для симетричних дослідів правильне класичне визначення ймовірності: $\frac{m}{n}$. Для прикладів 1-3 справа складніша: необхідні експерименти, статистика.

Частота події A в серії дослідів – це відношення числа дослідів, у яких з'явилася подія A до загальної кількості дослідів. Частота (статистична ймовірність), $p^*(A) = \frac{M_A}{n}$. При невеликому n p^* випадково, при $n \to \infty$ p^* стабілізується, наближаючись до стійкої величини:

- зі збільшенням n частота події наближається до ймовірності;
- наближення йде повільно, але явно простежується на статистичному матеріалі;
- коливання частоти біля ймовірності носять довільний, незакономірний характер.

! Імовірність не математична границя частоти !

X_n сходиться по ймовірності до a, якщо для $\forall \varepsilon \to 0$ ймовірність нерівності $|X_n - a| < \varepsilon$ із збільшенням n наближається до 1.

Недолік. Треба надто багато дослідів.

6. Геометрична ймовірність

У деяких випадках прийом безпосереднього підрахунку ймовірностей допускає поширення на випадок незліченної множини елементарних подій. Наприклад, у межах області Ω відзначається випадково точка a (всі точки рівноправні, ніяке місце не має переваги). Тоді

$$p(A) = p\{a \in A\} = \frac{S_A}{S_\Omega}.$$