Навчальна дисципліна:
Теорія ймовірностей (Probability theory)

Лекції – кожного тижня.

Практичні заняття – кожного тижня.

Наприкінці семестру - іспит

Викладачі

професор Кучук Георгій Анатолійович < Heorhii.Kuchuk@khpi.edu.ua>

професор Філоненко Алевтина Михайлівна < Alevtyna.Filonenko@khpi.edu.ua >

Тема 1
Що таке ймовірність?

Питання лекції

1. Основні визначення.
2. Класична імовірнісна схема
3. Теоретико-множинний підхід.
4. Статистичний підхід.
5. Геометрична ймовірність.

Посилання на навчальні матеріали:

https://drive.google.com/drive/folders/1jYAJHdSefxIUX4RQxmhGS50gxqPH7wci?usp=sharing

Рекомендована література

1. Конспект лекцій. URL: https://drive.google.com/drive/folders/1jYAJHdSefxIUX4RQxmhGS50gxqPH7wci?usp=sharing

2. Кучук Г. А., Кучук Н. Г. Теорія ймовірностей. Частина 1 : навчальний посібник. Харків : НТУ «ХПІ», 2024. 229 с. URL: https://repository.kpi.kharkov.ua/handle/KhPI-Press/80011

3. Теорія ймовірностей : навч. посіб. для студ. спеціальності 121 «Інженерія програмного забезпечення» / КПІ ім. Ігоря Сікорського; уклад.: О.В. Барабаш, А.П. Мусієнко, О.В. Свинчук. – Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2021. – 193 с. URL: https://ela.kpi.ua/bitstream/123456789/42046/1/Navch_Posib_Teor_Ymovirn_BarabashO_MusienkoA_SvynchukO.pdf

4. Навчальний посібник з дисципліни «Теорія ймовірностей, імовірнісні процеси та математична статистика». Курс лекцій. Частина 1 / Павлов О.А., Гавриленко О.В., Рибачук Л.В. – Київ: КПІ, 2021. – 154 с. URL: https://ela.kpi.ua/bitstream/123456789/41672/3/Posibnyk_Pavlov-Havrylenko-Rybachuk_KonspLek-1.pdf

1. Основні визначення

Теорія ймовірностей – математична наука, що вивчає загальні закономірності у випадкових явищах.
Мета теорії ймовірностей - здійснення прогнозу випадкового явища.
Предмет теорії ймовірностей – математичні моделі випадкових явищ.

Досвід (експеримент, випробування) – деяка сукупність умов, у яких спостерігається те чи інше явище, фіксується той чи інший результат.
Досвід з випадковим результатом - досвід, результат якого варіюється при його повторенні (буде надалі - досвід).
Випадкова подія чи подія – факт, який у результаті досвіду з випадковим результатом може статися чи не відбутися (позначаємо великими літерами латинського алфавіту – A, B, C...)

Приклад.
Досвід – витягнути картку з написаною десятковою цифрою,
подія – витягнути картку з цифрою 9.

Протилежна подія – подія $\overline{A}$, що полягає у непояві події А.

Імовірність події – чисельна міра об'єктивної можливості цієї події А – Р(А).
Одиниця виміру – достовірна подія – Р(А) = 1 (кістка, ≤ 6 очок).
Протилежна йому - неможлива подія - $P(\overline{A}) = 0$ (кістка, > 6 очок).

$$0 \le P(A) \le 1$$

Практично достовірна подія Р(А) ≈1 (30 червня у Харкові не випаде сніг)
Практично неможлива подія Р(А) ≈0 (32 літери розрізної абетки, 18 разів вибрати одну й туж літеру – теорія ймовірності)

Принцип практичної впевненості : якщо ймовірність події А в даному досвіді дуже мала, то при одноразовому виконанні досвіду можна поводитися так, ніби подія А взагалі неможливо, тобто не розраховувати на її появу.

Приклади: поїздка потягом (подія – аварія).

Найважче питання: наскільки має бути мала ймовірність події, щоб її вважати практично неможливим? Відповідь виходить із практичних міркувань та залежить від важливості досвіду.
Приклади – зважування на звичайних вагах, можливість аварійної ситуації на АЕС.

2. Класична імовірнісна схема

Класичний досвід, або досвід, що має симетрію - досвід, в якому різні результати об'єктивно однаково можливі.

Безпосередній підрахунок можливостей.
Розглядатимемо досліди, що володіють симетрією (об'єктивно однаково можливі) і що проводяться кінцеве число разів (класична схема).

Сфера практичної дії класичної схеми дуже обмежена, проте зручна вивчення основних властивостей ймовірностей.

Визначення: 1. Декілька подій у даному досвіді утворюють **повну групу**, якщо в результаті досвіду неминуче має з'явитися хоча б одна з них.

Приклади: 1) гральна кістка: повна - 6 подій (1, 2, 3, 4, 5, 6).
2) поява хоча б однієї чорної, або хоча б однієї білої кулі при витягуванні 2 куль із урни.

Властивість: До повної групи подій можна додавати будь-які події – властивість повноти не зникне.

Визначення: 2. Декілька подій у цьому досвіді називаються **несумісними**, якщо жодні з них не можуть з'явитися разом.

Приклади: 1) гральна кістка: несумісні - 6 подій (1, 2, 3, 4, 5, 6).
2) поява або чорної, або білої кулі при витягуванні кулі із урни.

Властивість: можна із групи викидати будь-які події (до 2-х), властивість несумісності залишається.

Визначення: 3. Декілька подій у цьому досвіді називаються **рівноможливими**, якщо жодна із них об'єктивно не більш можлива, ніж інші.

Приклади: 1) гральна кістка: повна - 6 подій (1, 2, 3, 4, 5, 6).
2) поява хоча б однієї чорної, або хоча б однієї білої кулі при витягуванні 2 куль із урни.

Визначення: 4. **Випадок** – подія із несумісної повної групи рівноможливих подій одного досвіду.

Визначення*:* Випадок сприятливий для події А, якщо він спричиняє появу даної події.

Розрахунок ймовірності події А: $P(A) = \dfrac{m_A}{n}$

m_A – число випадків, сприятливих для події А;
n – загальна кількість випадків.

Приклади

1. Чи утворять повну групу події?

Досвід: два постріли по мішені.

1.1 Події: A_1 хоча б одне влучення, A_2 хоча б один промах.

1.2 Події: A_1 точно одне влучення, A_2 точно два влучення

2. Чи є несумісними такі події?

Досвід – кидання двох монет.

A_1 – поява герба на першій монеті, A_2 – поява решки на другій монеті.

3. *Чи є рівноможливими такі події?*

Досвід – кидання двох монет.

Події: A_1 – поява двох гербів; A_2 – поява двох решок,
A_3 – поява одного герба та однієї решки

4.*Чи є випадками такі групи подій:*

4.1. Досвід – кидання монети.

Події: A_1 – поява герба, A_2 – поява решки

4.2 Досвід – кидання гральної кістки.

A_1 – поява не більше 2-х очок; A_2 – поява 3-х чи 4-х очок;

A_3 – поява не менше 5 очок

<u>Послідовність розв'язання завдань:</u>

1. Визначити групу випадків, зручну на вирішення цієї задачі.
2. Порахувати кількість всіх випадків.
3. Порахувати кількість сприятливих випадків.
4. Порахувати за формулою ймовірність.

<u>Приклад.</u> В урні 3 білих і дві чорні кулі. Із неї витягли кулю.
Знайти ймовірність, що він білий (подія А).

<u>Рішення</u>: 1. Досвід – витягування кулі: б б б ч ч
1 2 3 4 5

2. Випадки: витягування і-ої кулі (5)

3. Сприятливі: 1, 2, 3 $\Rightarrow$ 4. $P(A) = 3/5$.

<u>Приклад.</u> В урні 10 білих і 5 чорних куль. Із неї витягли 2 кулі. Знайти ймовірність, що вони чорні (подія А).

<u>Рішення</u>: 1. Надамо кулям номери від 1 до 15.
Досвід – витягування двох перенумерованих куль.
2. Випадки: кількість різних комбінацій по 2 кулі з 15 можливих.
3. Сприятливі: дві перенумеровані кулі з 5 можливих чорних.

4. $P(A) = \dfrac{C_5^2}{C_{15}^2} = \dfrac{\dfrac{5!}{2!\,13!}}{\dfrac{15!}{2!\,113!}} = \dfrac{5!\;2!\;13!}{2!\;3!\;15!} = \dfrac{5\times 4}{15\times 14} = \dfrac{1}{3}\times\dfrac{2}{7} = \dfrac{2}{21}$.

<u>Приклад.</u> Знайти ймовірність витягнути із колоди карт (32 листи) 2 туза.

<u>Рішення</u>: 1. Досвід – витягування двох карт.
2. Випадки: кількість різних комбінацій по 2 карти з 32 можливих.
3. Сприятливі: два туза з чотирьох можливих.

4. $P(A) = \dfrac{C_4^2}{C_{32}^2} = \dfrac{\dfrac{4!}{2!\,2!}}{\dfrac{32!}{2!\,30!}} = \dfrac{4\cdot 3}{32\cdot 31} = \dfrac{3}{243} \approx \dfrac{1}{80}$.

3. Теоретико-множинний підхід

Нехай проводиться досвід із випадковим результатом.

Позначимо Ω - множину всіх можливих наслідків досвіду, $\omega \in \Omega$ елементарна подія. Ω - простір елементарних подій.

Подія $A \subseteq \Omega$ – підмножина множини елементарних подій

Def. Варіанти події A - події $A_1, \ldots, A_n$, такі, що

$$\sum_{i=1}^{n} A_i = A;$$

$$(\forall i \le n, j \le n | i \ne j) \Rightarrow A_i \cdot A_j = 0.$$

Приклади: 1) Досвід – кидають одну гральну кістку.

Елементарні події $\Omega = \{ \{1\},\{2\},\{3\},\{4\},\{5\},\{6\} \}$.

Подія A – випадання непарного числа;

Варіанти $A = \{ \{1\},\{3\},\{5\} \}$.

2) Досвід – постріл по мішені (коло радіусу R), координати декартові, з центром у центрі кола.

Елементарна подія ω – потрапляння до $\forall (x, y)$.

Ω - вся площина x0y.

Подія A – потрапляння у мішень $A = \{ (x, y)\} | x^2 + y^2 \le R^2\}$.

<u>Def.</u> <u>Достовірна подія</u> – множина Ω.

<u>Неможлива подія</u> – порожня множина $\varnothing$.

<u>Def.</u> Події A_1 ..., A_n утворюють повну групу, якщо $\sum_{i=1}^{n} A_i = \Omega$.

<u>Def.</u> Дві події несумісні, якщо їх множини не перетинаються: $A_1 A_2 = \varnothing$.

Події A_1 ..., A_n несумісні, якщо поява будь-якого з них виключає появу кожного з інших: $(\forall i \le n, \ \forall j \le n \ | i \ne j) \Rightarrow A_i \cdot A_j = \varnothing$.

<u>Def.</u> <u>Сумою</u> двох подій A і B називається подія C, що полягає у виконанні події A, або події B, або обох подій разом.

<u>Def .</u> <u>Добутком</u> двох подій A і B називається подія D , що полягає в спільному виконанні події A і події B.

<u>Def .</u> $\overline{A}$ – подія, протилежна по відношенню до події A, полягає у непояві A.

Імовірність події та правило додавання

Def . Кожній події у відповідність ставиться число, яке називається ймовірністю події А – p(A), що задовольняє таким аксіомам:

1. $0 \le p(A) \le 1 \ \forall A \subseteq \Omega$.

2. $AB = \varnothing \Rightarrow p(A+B) = p(A)+p(B)$ (правило додавання).

3. Якщо $A_1, \ldots, A_n, \ldots$ - несумісні, то $p\left(\sum_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} p(A_i)$.

Def . Події $A_1, \ldots, A_n$ рівноможливі, якщо $p(A_1) = p(A_2) = \ldots = p(A_n)$

Def . Подія з кінцевої повної несумісної рівноможливої групи назвемо випадком.
Випадок A_i сприятливий для події А, якщо $A_i \subseteq A$.

Якщо ймовірність випадку $1/n \Rightarrow p(A) = \frac{m_A}{n}$, отже отримаємо класичне визначення імовірності.

4. Статистичний підхід

Некласичні приклади: 1) гральна кістка зі зміщеним центром ваги;
2) потрапляння в ціль під час пострілу;
3) вихід з ладу технічного пристрою протягом доби роботи.

Частота події A в серії дослідів – це відношення числа дослідів, у яких з'явилася подія A до загальної кількості дослідів.

Частота (статистична ймовірність): $p^*(A) = \frac{M_A}{n}$.

При невеликому n p^* випадково, при $n \to \infty$ p^* стабілізується, наближаючись до стійкої величини:

- зі збільшенням n частота події наближається до ймовірності;
- наближення йде повільно, але явно простежується на статистичному матеріалі;
- коливання частоти біля ймовірності носять довільний, незакономірний характер.

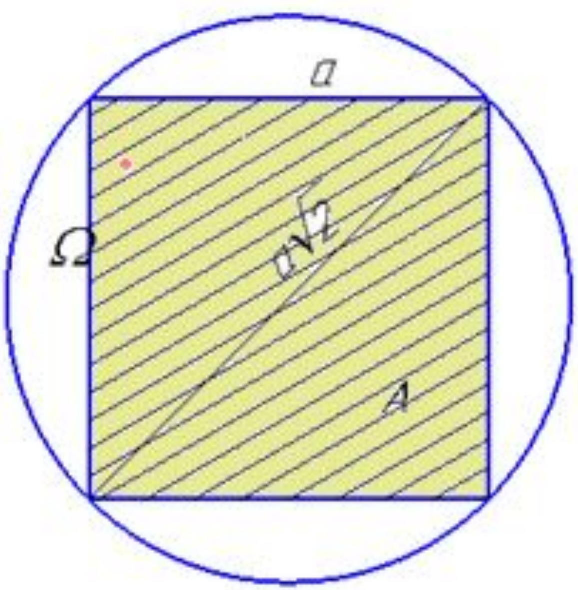
Суттєвий недолік. Треба надто багато дослідів.

5. Геометрична ймовірність

У деяких випадках прийом безпосереднього підрахунку ймовірностей допускає поширення на випадок незліченної множини елементарних подій. Наприклад, у межах області Ω відзначається випадково точка a (всі точки рівноправні, ніяке місце не має переваги). Тоді

$$p(A) = p\{a \in A\} = \frac{S_A}{S_\Omega}.$$

Приклад. В круг вписано квадрат. У круг навмання кидають точку. Знайти ймовірність того, що вона виявиться всередині квадрата.



Рішення. Площа квадрата: $\mu(A) = S_\square = a^2$.

Діаметр круга: $D = a\sqrt{2}$.

Площа цього круга: $\mu(\Omega) = S_0 = \dfrac{\pi a^2}{2}$.

Ймовірність: $p = \dfrac{\mu(A)}{\mu(\Omega)} = \dfrac{a^2}{\pi a^2 / 2} = \dfrac{2}{\pi} \approx 0,64$.