Тема 6. Основні розподіли дискретних випадкових величин

Питання лекції

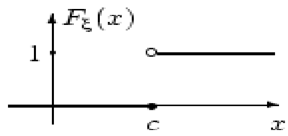
1. Вироджений розподіл.
2. Розподіл Бернуллі.
3. Біноміальний розподіл.
4. Розподіл Пуассона
5. Потоки подій
6. Геометричний розподіл.

1. Вироджений розподіл

Кажуть, що випадкова величина X має *вироджений розподіл* у точці c, якщо вона набуває єдиного значення у цій точці з ймовірністю 1.

Функція розподілу має вигляд:

$$F_\xi(x) = \mathsf{P}(\xi < x) = \mathsf{P}(c < x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant c; \\ 1, & x > c. \end{cases}$$



Пояснення. X – невипадкова.

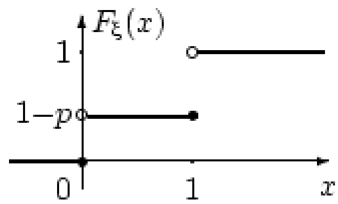
Математичне сподівання - c; дисперсія - 0, СКВ - 0.

2. Розподіл Бернуллі

Кажуть, що випадкова величина X має *розподіл Бернуллі* з параметром p, якщо вона набуває значень 1 і 0 з ймовірностями p і 1-p відповідно.

Функція розподілу випадкової величини така:

$$F_\xi(x) = \mathsf{P}(\xi < x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0; \\ 1-p, & 0 < x \leqslant 1 \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$



Приклад.

U – індикатор події; 1 – сталося; 0 – ні; U =

0	1
q	p

q=1-p

$$M[U] = 0 \cdot q + 1 \cdot p = p$$

$$D[U] = M\left[U^2\right] - (M[U])^2 = 0^2 \cdot q + 1^2 \cdot p - p^2 = p - p^2 =$$

$$= p(1-p) = pq = p(1-p) = pq$$

$$\delta[U] = \sqrt{pq}$$

3. Біноміальний розподіл

1. <u>Визначення</u> Дискретна випадкова величина X має <u>*біноміальний розподіл*</u> , якщо:

а) вона набуває значення $\{0,1\ \ldots,\ m,\ \ldots n\}$

б) $P_m = P\{X = m\} = C_n^m p^m q^{n-m},\ 0 < p < 1$

$$q=1-p, \quad m \in [0,n]$$

<u>Пояснення</u> : Умови біноміального розподілу:

Виконується n незалежних дослідів, у кожному з яких певна подія A (успіх) відбувається з ймовірністю p; X – кількість успіхів.

<u>Доповнення</u> : Порахуємо ймовірність події $B = \{X = m\}$.

$$\text{Імовірність одного варіанта } B_1 = \left\{ \underbrace{+\ldots+}_{m}\underbrace{-\ldots-}_{m-n} \right\}$$

$$P(B_1) = p^m (1-p)^{n-m}$$

Число варіантів - $C_n^m \Rightarrow$, Біноміальний розподіл.

<u>Зауваження</u> : $R_m = P\{X \ge m\} = \sum_{i=m}^{n} C_n^i p^i q^{n-i}$

або

$$\left.\begin{aligned} R_m &= P\{X \ge m\} = \sum_{i=m}^{n} C_n^i p^i q^{n-i} \\ R_m &= 1 - \sum_{i=0}^{m-1} C_n^i p^i q^{n-i} \end{aligned}\right\} \text{ймовірність не менше } m \text{ успіхів у } n \text{ дослідах.}$$

<u>Th.</u> Характеристики біноміального розподілу

$$\left[\begin{aligned} m_x &= np \\ D_x &= npq \\ \delta_x &= \sqrt{npq} \end{aligned}\right.$$

<u>Доказ</u> . Побудуємо функцію, що виробляє

$$\varphi(Z) = \sum_{m=0}^{n} P_m Z^m = \sum_{m=0}^{n} C_n^m p^m q^{n-m} Z^m$$

$\varphi(Z) = (q + pZ)^n$ - за біномом Ньютона.

$$\varphi'(Z) = n \cdot (q + pZ)^{n-1} \cdot p$$

$$\varphi'(1) = n \cdot (q + p)^{n-1} \cdot p = n \cdot 1^{n-1} \cdot p = np \Rightarrow m_x = np$$

$$\varphi''(Z) = n(n-1) \cdot (q + pZ)^{n-2} p^2 = n(n-1)p^2$$

Приклад. Надіслано 5 повідомлень по каналу зв'язку. Кожне повідомлення спотворюється із ймовірністю p = 0,3. X – кількість спотворених повідомлень.

Знайти $m_x,\ D_x,\ \delta_x,\ P\{X \ge 1\}$

$$m_x = n \cdot p = 5 \cdot 0{,}3 = 1{,}5$$

$$D_x = n \cdot p \cdot q = 5 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}7 = 1{,}05$$

$$\delta_x = \sqrt{1{,}05} \approx 1{,}03$$

$$P\{X \ge 1\} = 1 - P\{X = 0\} = 1 - C_5^0 \cdot p^0 q^5 = 1 - 1 \cdot 1 \cdot 0{,}7^5 = 1 - 0{,}17 \approx 0{,}83$$

4. Розподіл Пуассона чи «закон рідкісних явищ»

Визначення . Дискретна випадкова величина X має розподіл Пуассона, якщо:

а) вона має зліченну кількість значень {0,1, …m …},

б) $P_m = P(X = m) = \dfrac{a^m}{m!} e^{-a}, \quad a > 0, \quad m \ge 0, m \in Z.$

Таблиця:

a	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	1	2	3	4	5
e^{-a}	0,9	0,8	0,74	0,67	0,6	0,37	0,14	0,05	0,02	0,007

Пояснення: Такий розподіл мають багато фізичних явищ

Th1 . Характеристики розподілу Пуассона: $\begin{cases} m_x = a \\ D_x = a \\ \delta = \sqrt{a} \end{cases}$

Доведення

$$\varphi(Z) = \sum_{m=0}^{\infty} P_m Z_m = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a^m}{m!} e^{-a} Z^m = e^{-a} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(aZ)^m}{m!}$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(aZ)^m}{m!} = e^{aZ} \Rightarrow \varphi(Z) = e^{-a} \cdot e^{aZ} = e^{a(Z-1)}$$

$$\varphi'(Z) = ae^a(Z-1); \ \varphi'' = a^2 e^{a(Z-1)}$$

$$Z = 1 \Rightarrow m_x = \varphi'(1) = a \cdot e^0 = a \cdot 1 = a$$

$$L_2 = \varphi''(1) + m_x = a^2 + a$$

$$D_x = L_2 - m_x^2 = a^2 + a - a^2 = a$$

$$\delta_x = \sqrt{a}$$

Зауваження : 1) коефіцієнт варіації $V = \frac{\delta_x}{m_x} = \frac{\sqrt{a}}{a} = (\sqrt{a})^{-1} = \frac{1}{\sqrt{a}}$ при $a \to \infty$ $v \to 0$.

2) якщо *a = np, n* - велике, *p* - мало, то біноміальний розподіл можна замінити розподілом Пуассона.

Приклади застосування закону Пуассона:

1. (Пуассон) X – число солдатів-кавалеристів, убитих копитом коня;
n – кількість зустрічей кавалеристів з конем,
p - можливість бути вбитим копитом;
2. *X* – кількість електронних пристроїв, що загорілися при включенні,
n - число включень;
p – ймовірність спалаху при включенні.

Приклад. Тираж шкільного підручника 100 000 екземплярів. Імовірність неправильного брошурування $3 \cdot 10^{-5}$. Знайти ймовірність того, що у тиражі:
а) є хоча б одна бракована книга
б) рівно 5 бракованих книг

Рішення. n=100000; $p=3 \cdot 10^{-5}$, a=np=3

$$а)\ P\{X \ge 1\} = 1 - P\{X = 0\} = 1 - \frac{1}{1} \cdot e^{-3} = 1 - 0{,}005 = 0{,}95$$

$$б)\ P\{X = 5\} = \frac{a^5}{5} \cdot e^{-3} = \frac{3^5}{5!} \cdot 0{,}05 = \frac{243}{120} \cdot 0{,}05 \approx 0{,}1$$

5. Потоки подій

Нехай на часовій осі відзначаються часи однорідних подій (виклики на АТС, прихід відвідувачів до магазину, надходження машин до ремонтної майстерні). Послідовність таких дій назвемо *потоком подій* – послідовність подій, що наступають одна за одною у випадкові моменти часу.

Визначення. Потік *стаціонарний*, якщо середня кількість подій, що з'являються за одиницю часу, завжди постійна, позначимо її λ - інтенсивність (щільність) потоку.

Визначення. Потік *ординарний*, якщо ймовірність появи двох подій за малий проміжок часу мала.

Визначення. Потік має *відсутність післядії*, якщо поява подій не пов'язана між собою.

Визначення. *Найпростіший потік* - це стаціонарний ординарний потік з відсутністю післядії.

Визначення. Пуассонівський потік – ординарний потік без післядії.

Th. Для пуассонівського потоку кількість подій, що відбулися за час $(t_0, t_0 + r)$ розподілена згідно із законом Пуассона:

$$p_m = \frac{a^m}{m!} e^{-a}, \text{ де } a = \int_{t_0}^{t_0+\tau} \lambda(t)dt,$$, λ- Інтенсивність потоку

Наслідок Для найпростішого потоку ($\lambda(t) = const$) число подій, що відбулися за час $(t_0, t_0 + \tau)$, розподілено за законом Пуассона

$$p_m = \frac{(\lambda\tau)^m}{m!} e^{-\lambda\tau},$$ λ- Інтенсивність потоку

Приклади.

1. . На відомчу АТС надходить найпростіший потік викликів з інтенсивністю $\lambda=0{,}8$ (викликів/хв). Знайти ймовірність того, що за 2 хв:

а) не прийде жодного виклику;

б) прийде рівно один виклик;

в) прийде хоча б один виклик . ($e^{-1,6} = 0{,}2$)

X – кількість викликів, розподілена за законом Пуассона

$a = \lambda\cdot\tau = 0{,}8$ викл./хв $\cdot 2$ хв$= 1{,}6$ (викл)

$$а) P_0 = \frac{a^0}{0!} e^{-1,6} = e^{-1,6} \approx 0{,}2$$

$$б)\ P_1 = \frac{a^1}{1!} e^{-1,6} = a \cdot e^{-1,6} \approx 1{,}6 \cdot 0{,}2 \approx 0{,}32$$

$$в)\ R_1 = P\{X \ge 1\} = 1 - P\{X = 0\} = 1 - P_0 \approx 0{,}8$$

2. Потік викликів на АТС – пуасонівський, нестаціонарний, з інтенсивністю $\lambda(t)$ на ділянці часу від 0 годин до 6 год.40 м.

$$\lambda(t) = bt + c$$

$$\lambda(0)=0{,}2 \text{ викл./хв}$$

$$\lambda\left(6\frac{2}{3^2}\right) = 0{,}4 \text{ викл./хв.}$$

$\boxed{(e^{-3}=0{,}05}$

Знайти ймовірність того, що за 10 хвилин від 3 год.15 м. до 3 год.25 хв. Прийде щонайменше три виклики.

$$\lambda(0) = 0{,}2 \Rightarrow c = 0{,}2$$

$$\lambda\left(6_2\frac{2}{3}м\right) = \lambda(400хв.) = в \cdot 400 + 0{,}2 = 0{,}4$$

$$в \cdot 400 = 0{,}2 \Rightarrow в = 0{,}5 \cdot 10^{-3}$$

$$a = \int\limits_{3ч.15м.}^{3ч.25м.} \lambda(t)dt = \int\limits_{195}^{205} (вt + c)dt = \frac{bt^2}{2} + ct \Big|_{195}^{205} =$$

$$= \frac{в}{2}(205^2 - 195^2) + c(205 - 195) = \frac{в}{2} \cdot 10 \cdot 400 + c \cdot 10 =$$

$$= \frac{0{,}5}{2} \cdot 4 + 0{,}2 \cdot 10 = 1 + 2 = 3$$

$$\frac{a^0}{0!} + \frac{a'}{1!} + \frac{a^2}{2!} = 1 + 3 + \frac{3^2}{2}$$

$$P\{X \geq 3\} = 1 - (P_0 + P_1 + P_2) = 1 - e^{-3} =$$

$$= 1 - e^{-3} \cdot 8{,}5 = 1 - 8{,}5 \cdot 0{,}05 = 1 - 0{,}425 \approx \underline{0{,}575}$$

6. Геометричний розподіл

Визначення Дискретна випадкова величина *X* має геометричний розподіл, якщо її значення належать множині $Z^+ = \{0, 1, 2, \ldots, m \ldots\}$, а ймовірності цих значень $p_m = q^m p$, де $\begin{cases} 0 < p < 1 \\ q = 1 - p \end{cases}$

Пояснення : робиться ряд дослідів, ймовірність успіху p; X – кількість дослідів до першої успішної спроби;

Приклади : - кидання монети до випадання герба;

- кидання кістки до випадання шістки;
- народження дітей до появи хлопчика

Th1. Характеристики геометричного розподілу

$$m_x = q/p$$

$$D_x = q/p^2$$

$$\delta_x = \sqrt{a}/p$$

$$\varphi(Z) = p \sum_{m=0}^{\infty} (qZ)^m = p \frac{1}{1 - qZ}$$

Дов .

$$\varphi'(Z) = \frac{pq}{(1 - qz)^2} \qquad \varphi''(Z) = \frac{2pq^2}{(1 - qZ)^3}$$

$$m_x = \varphi'(1) = \frac{pq}{(1-q)^2} = \frac{q}{p}$$

$$L_2 = \varphi''(1) + m_x = \frac{2q^{2p}}{(1-q)^3} + \frac{q}{p} = \frac{2q^2}{p^2} + \frac{q}{p} = \frac{q}{p^2}(2q+p) =$$

$$\frac{q}{p^2}(q+q+p) = \frac{q}{p^2}(1+q)$$

$$D_x = \frac{q}{p^2}(1+q) - \frac{q^2}{p^2} = \frac{q}{p^2}(1+q-q) = \frac{q}{p^2}$$

$$\delta_x = \sqrt{q}\big/p$$

<u>Зауваження</u> : практично часто використовують величину Y=X+1 (зсунутий геометричний розподіл – номер успішного досвіду)

$$m_y = \mathrm{M}[X+1] = m_x + 1 = \frac{q}{p} + 1 = \frac{q+p}{p} = \frac{1}{p}$$

$$D_y = D[X+1] = D_x = \frac{q}{p^2}$$

$$\sigma_y = \sigma_x = \frac{\sqrt{q}}{p}$$

Приклад. При кожному огляді РЛС літак виявляється із ймовірністю p=0,2. X – кількість невдалих оглядів до першого виявлення, Y- кількість здійснених оглядів до виявлення. Знайти m_x, D_x, δ_x, m_y, D_y, δ_y. Знайти практично максимальну кількість оглядів, за які літак ще не буде виявлений.

X: p = 0,2 , геометричний розподіл; Y=X+1

$$m_x = \frac{q}{p} = \frac{0{,}8}{0{,}2} = 4;\ \ D_x = \frac{q}{p^2} = \frac{0{,}8}{0{,}04} = 20;\ \ \sigma_x = \sqrt{20} \approx 4{,}46$$

$$m_y = 4 + 1 = 5;\ \ D_y = 20;\ \ \sigma_x = 4{,}5$$

За правилом трьох сигма: n = m_x +3 σ_x = 4+3 ·4 ≈4+13 ≈17.