Підсумкове тестування
за темою 3:
Байєсовський підхід до розрахунку ймовірностей

Посилання на тест:
https://forms.gle/d9SaWxyszBEMESJy6

Час проходження: 8.30-8.45

Навчальна дисципліна:
Теорія ймовірностей

Тема 4

Випадкові величини та способи їх завдання

Питання лекції

1. Поняття випадкової величини.
2. Ряд, багатокутник та функція розподілу випадкової величини.
3. Щільність розподілу випадкової величини.
4. Способи завдання випадкової величини.
5. Побудова функції розподілу ймовірностей ВВ.
6. Побудова функції щільності розподілу ймовірностей неперервної ВВ.
7. Приклади розв'язання задач.

Рекомендована література

1. Конспект лекцій. URL: https://drive.google.com/drive/folders/1jYAJHdSefxIUX4RQxmhGS50gxqPH7wci?usp=sharing

2. Кучук Г. А., Кучук Н. Г. Теорія ймовірностей. Частина 1 : навчальний посібник. Харків : НТУ «ХПІ», 2024. 229 с. URL: https://repository.kpi.kharkov.ua/handle/KhPI-Press/80011

3. Теорія ймовірностей : навч. посіб. для студ. спеціальності 121 «Інженерія програмного забезпечення» / КПІ ім. Ігоря Сікорського; уклад.: О.В. Барабаш, А.П. Мусієнко, О.В. Свинчук. – Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2021. – 193 с. URL: https://ela.kpi.ua/bitstream/123456789/42046/1/Navch_Posib_Teor_Ymovirn_BarabashO_MusienkoA_SvynchukO.pdf

4. Навчальний посібник з дисципліни «Теорія ймовірностей, імовірнісні процеси та математична статистика». Курс лекцій. Частина 1 / Павлов О.А., Гавриленко О.В., Рибачук Л.В. – Київ: КПІ, 2021. – 154 с. URL: https://ela.kpi.ua/bitstream/123456789/41672/3/Posibnyk_Pavlov-Havrylenko-Rybachuk_KonspLek-1.pdf

1. Визначення випадкової величини

Def. Випадкова величина (ВВ) - величина, яка в результаті досліду з випадковим результатом набуває того чи іншого значення.

Велика буква – випадкова величина, маленька – її конкретне значення.

S – множина можливих значень випадкової величини.

Def. Дискретна випадкова величина - випадкова величина, множина значень якої скінчена або злічена.

Приклади

1) дослід – кидання гральної кістки.
   Випадкова величина - число очок, що випали $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

2) дослід – кидання трьох монет
   Випадкова величина – кількість гербів $S = \{0, 1, 2, 3\}$
   Інша випадкова величина – частота появи герба $S = \{0, 1/3, 2/3, 1\}$

3) дослід – 5 пострілів з мішені
   Випадкова величина - кількість попадань в ціль $S = \{0, 1, 2, 3,4,5\}$

4) дослід - стрільба по мішені до влучення
   Випадкова величина – кількість пострілів до влучення
   $S = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ *нескінчена, злічена*

5) дослід – вимірювання вмісту спирту у пляшці з прозорою рідиною.
   Випадкова величина - % вмісту спирту
   $S = \{s \mid 0 \le s \le 100\}$ *нескінчена, незлічена*

2. Ряд, багатокутник та функція розподілу випадкової величини

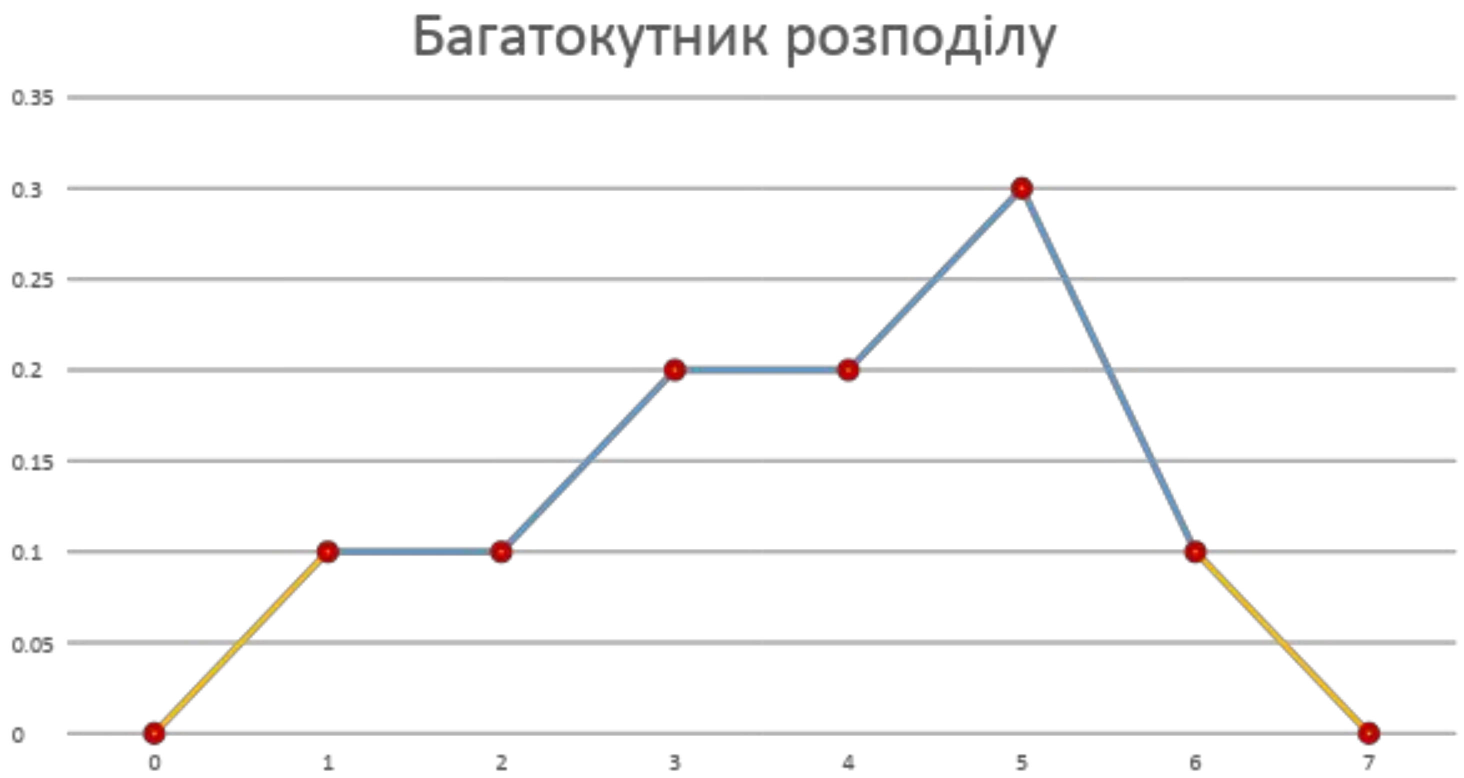
Def. Закон розподілу випадкової величини - правило, що дозволяє знаходити ймовірність подій, пов'язаних із випадковою величиною.

Def. Ряд розподілу дискретної випадкової величини – таблиця, де кожному значенню випадкової величини відповідає можливість появи цього значення.

Def. Багатокутник розподілу дискретної випадкової величини – графічне зображення ряду розподілу.

Приклад 1. $X = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\};\ P(x) = \left\{\frac{1}{10}, \frac{1}{10}, \frac{2}{10}, \frac{2}{10}, \frac{3}{10}, \frac{1}{10}\right\}$

x	1	2	3	4	5	6
p(x)	1/10	1/10	2/10	2/10	3/10	1/10



Приклад 2. Є 3 пристрої. Імовірність перебування у робочому стані першого – 0,2; другого – 0,4; третього 0,5. Випадкова величина *X* – кількість діючих пристроїв. Побудувати низку розподілу *X* .

<u>Рішення</u> : $S = \{0, 1, 2, 3\}$

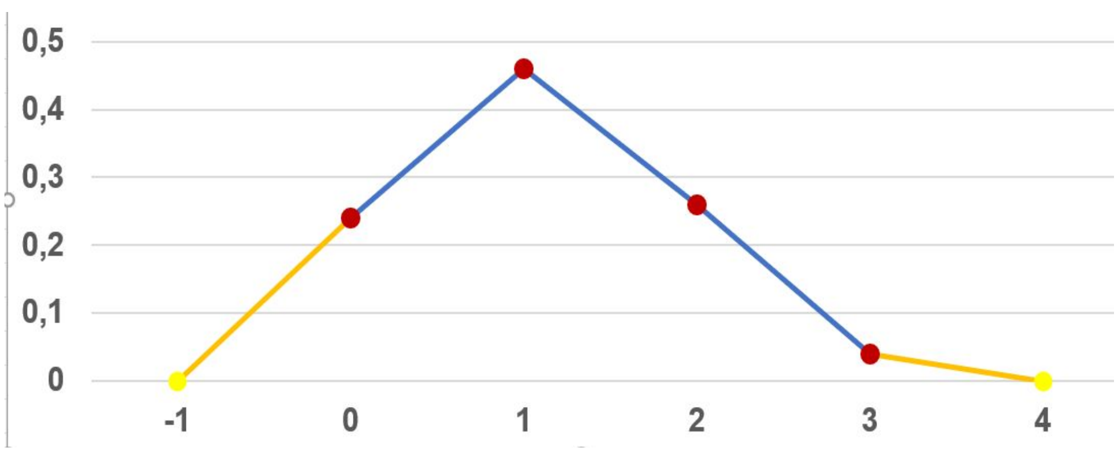
$P_0 = P\{X = 0\} = P\{- - -\} = 0,8 \cdot 0,6 \cdot 0,5 = 0,24$

$P_1 = P\{X = 1\} = P\{+ - -\} + P\{- + -\} + P\{- - +\} = 0,46$

$P_2 = P\{X = 2\} = P\{- + +\} + P\{+ - +\} + P\{+ + -\} = 0,26$

$P_3 = P\{X = 3\} = P\{+ + +\} = 0,04$

x	0	1	2	3
p(*x*)	0,24	0,46	0,26	0,04



Def. Функцією розподілу (або інтегральною функцією розподілу) **випадкової величини X** називається функція *F (x)* , яка виражає ймовірність того, що вона набуде значення, менше, ніж задане *x* :

$$\boldsymbol{F(x) = P\{X < x\}}$$

Def. Недискретна випадкова величина **неперервна**, якщо її функція розподілу неперервна та диференційована в ∀ точці.

<u>Властивості *F*(*x*) </u>: 1) *F*(*x*) – неспадна функція

2) $F(-\infty) = 0$

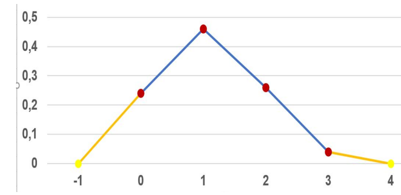
3) $F(+\infty) = 1$

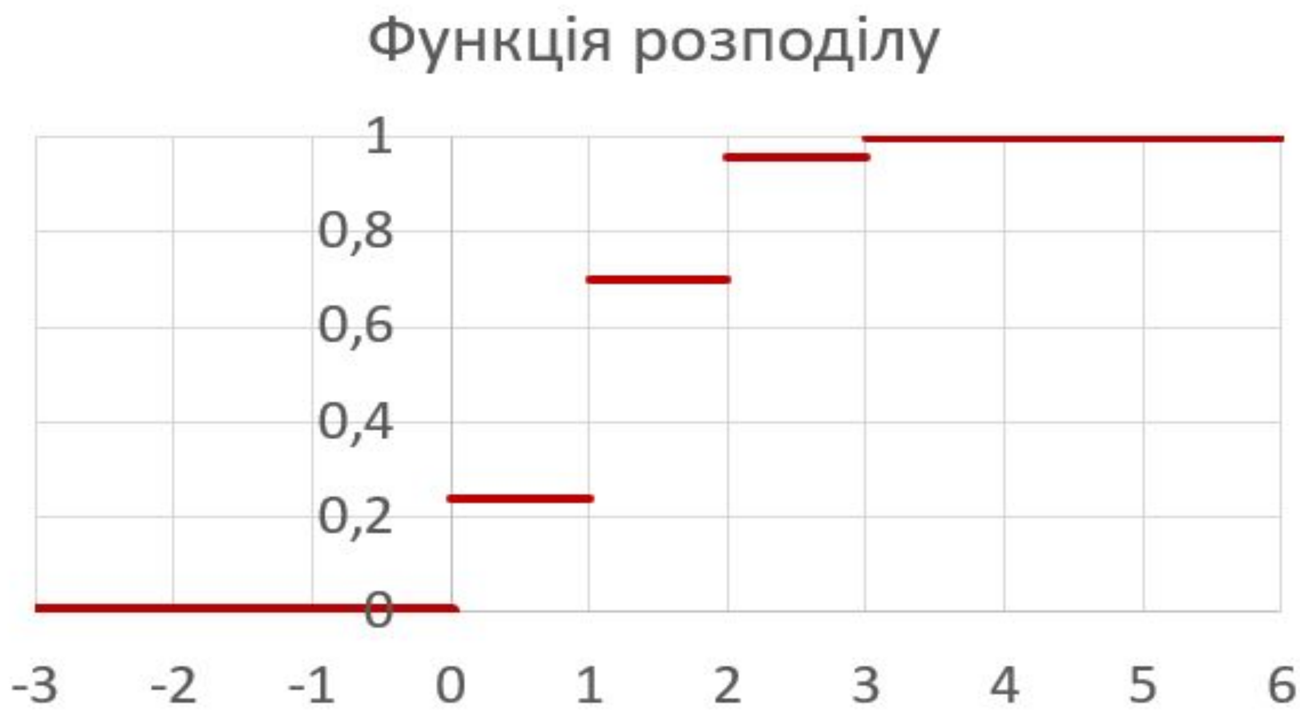
4) $$P\{x \in [\alpha, \beta]\} = F(\beta) - F(\alpha)$$

5) $$P\{x \in \alpha\} = \lim_{\beta \to \alpha} [F(\beta) - F(\alpha)]$$

Приклад

x	0	1	2	3
p(x)	0,24	0,46	0,26	0,04



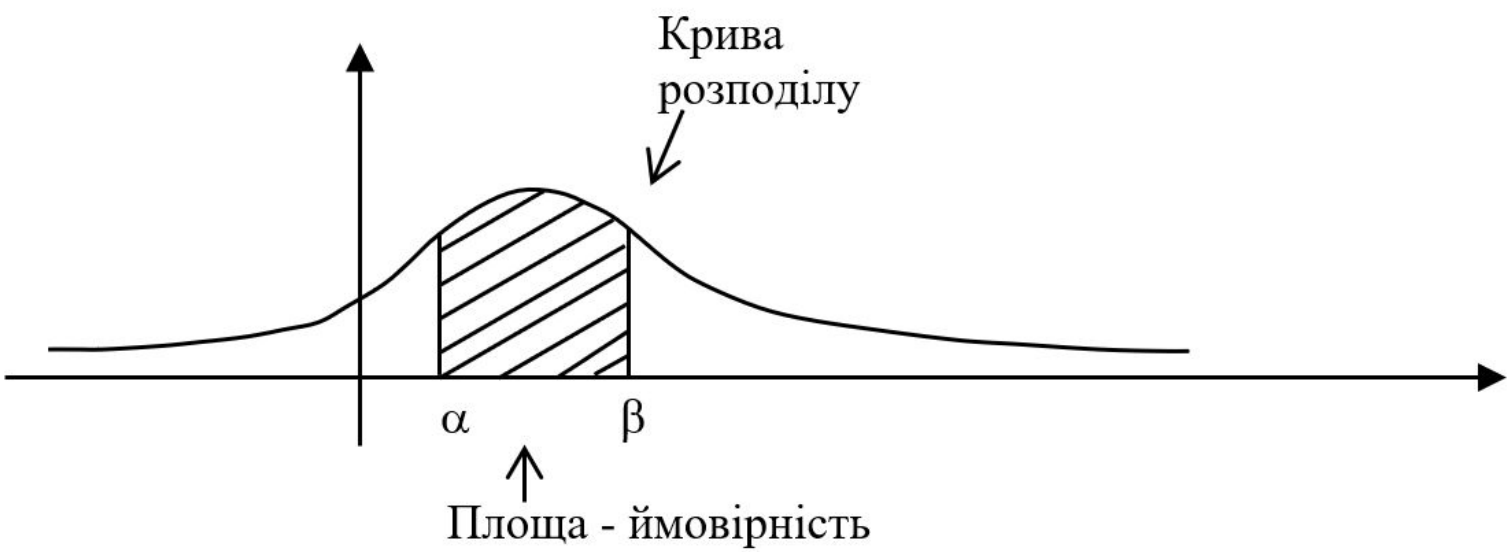


3. Щільність розподілу випадкової величини

Def. Щільність розподілу (щільність ймовірності або диференціальна функція розподілу) безперервної випадкової величини X у точці x – похідна її функції розподілу у цій точці.

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt \qquad f(x)=F'(x)=\frac{d}{dx}F(x)$$

$$P\{\alpha<x<\beta\}=\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx; \qquad \int_{\infty}^{\infty} f(x)dx=1$$



4. Способи завдання випадкової величини

Що треба для того, щоб поставити випадкову величину:

а) набір можливих значень

б) ймовірності їх появи

Це закон розподілу – він ставить відповідність між можливими значеннями та його ймовірностями.

Три види завдання:

1) табличний;
2) аналітичний;
3) графічний.

Способи завдання дискретних та безперервних величин різні:

– дискретні: орієнтуємось на значення

– неперервні: орієнтуємося на інтервали значень.

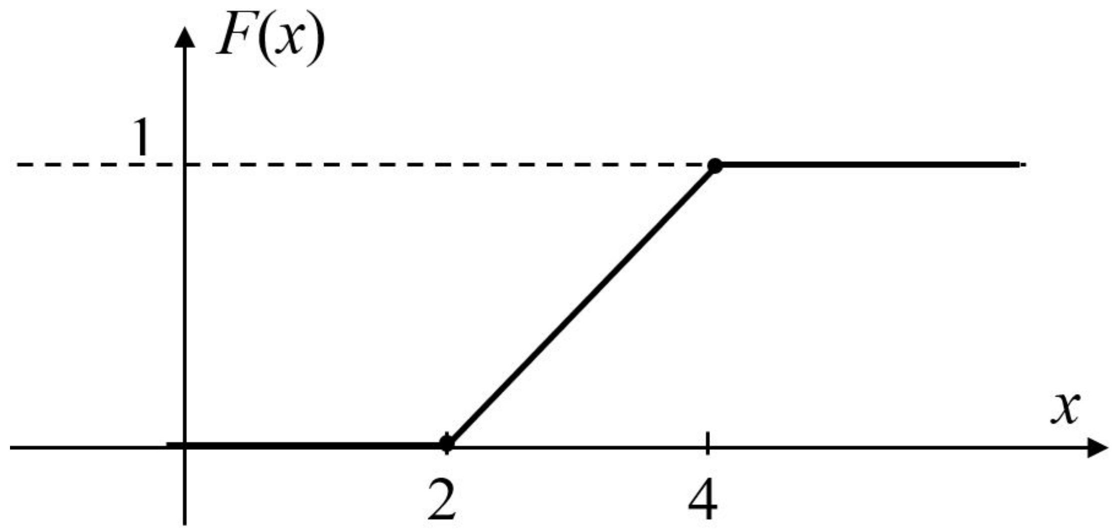
5. Побудова функції розподілу ймовірностей випадкової величини (інтегральна функція розподілу)

Її сенс – показати характер "накопичення" ймовірності:

$$F(x) = \mathrm{P}(X < x)$$

Для неперервної ВВ графік функції розподілу – неперервна неспадаюча лінія в смузі від 0 до 1:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 2 \\ \dfrac{x}{2} - 1, & 2 < x \le 4 \\ 1, & x > 4 \end{cases}$$

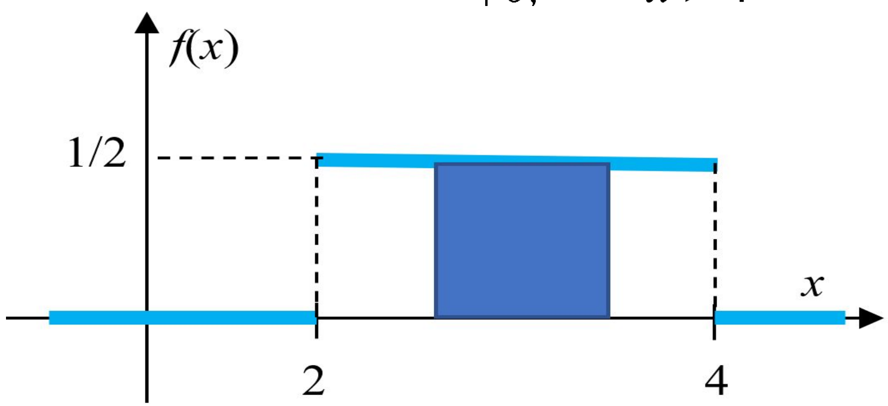


$$P(2{,}5 < x < 3{,}5) = F(3{,}5) - F(2{,}5) = \left(\frac{7}{4} - 1\right) - \left(\frac{5}{4 - 1}\right) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

6. Побудова функції щільності розподілу ймовірностей випадкової величини (диференціальна функція розподілу)

$$f(x) = F'(x)$$

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 2\\ \dfrac{x}{2}-1, & 2<x\le 4\\ 1, & x>4\end{cases}\qquad f(x)=F'(x)=\begin{cases}0, & x\le 2\\ \dfrac{1}{2}, & 2<x\le 4\\ 0, & x>4\end{cases}=\begin{cases}0, & \text{або } x\le 2 \quad x>4\\ \dfrac{1}{2}, & 2<x\le 4\end{cases}$$



$$P(2,5<x<3,5)=\int\limits_{2,5}^{3,5} f(x)\,\mathrm{d}x = 1\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}.$$

4. Приклади

Приклад 1 **.** Що можна сказати про значення випадкової величини X, якщо:

а) $F(4) = 1$

б) $F(5) = 0$

в) $$\int_{1}^{3} f(x)dx = 0$$

г) $$\int_{1}^{3} f(x)dx = 1$$

Приклад 2 .

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0;\\ ax^2, & x\in[0,1];\\ 1, & x>1.\end{cases}$$

$F(x)$ - неперервна. Знайти параметр *a*, P (0,25<*x*<0,5), побудувати графіки $f(x)$, $F(x)$.

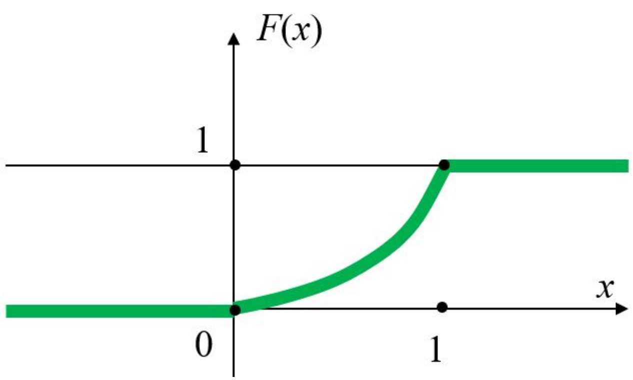
Рішення Виходячи з безперервності:

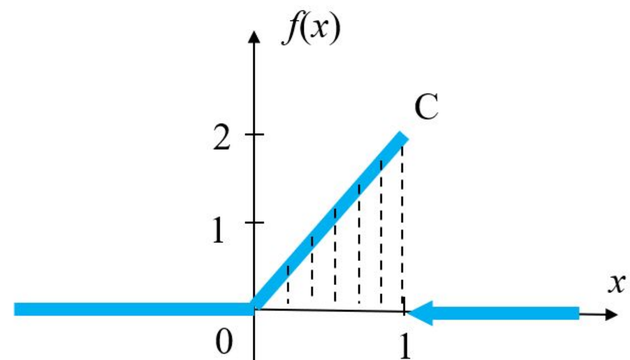
$$\begin{cases} ax^2\big|_{x=1}=1 \Rightarrow a=1.\\ ax^2\big|_{x=0}=0,\end{cases}$$

Тоді:

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0;\\ x^2, & x\in[0,1];\\ 1, & x>1.\end{cases}$$

$$f(x)=F'(x)=\begin{cases}0, & x<0;\\ 2x, & 0\le x\le 1;\\ 0, & x>1.\end{cases}$$





$$1.\ P(0,25<x<0,5)=F(0,5)-F(0,25)=x^2\Big|_{x=0,5}-x^2\Big|_{x=0,25}=\frac{1}{4}-\frac{1}{16}=\frac{3}{16}$$

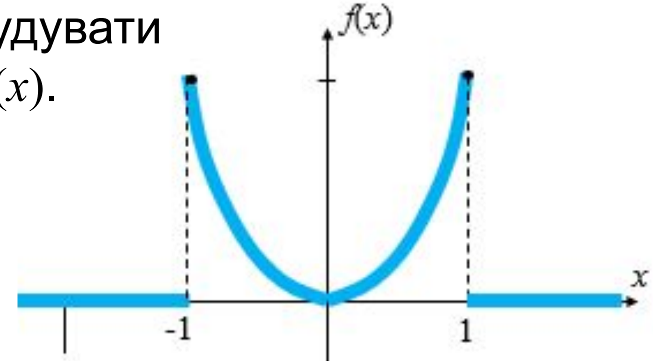
$$2.\ P(0,25<x<0,5)=\int_{1/2}^{1/4} f(x)dx=\int_{1/2}^{1/4} 2xdx=x^2\Big|_{1/2}^{1/4}=\frac{1}{4}-\frac{1}{16}=\frac{3}{16}$$

3. Площа трапеції:

((0,5+1,0)/2) · 0,25=

=3/16

Приклад 3 . $f(x)=\begin{cases} Ax^2, & |x|<1; \\ 0, & |x|\geq 1. \end{cases}$ Знайти параметр *A*, P
(0<*x*<0,5), побудувати
графіки $f(x)$, $F(x)$.



Рішення. Значення параметра *A* знайдемо,
використовуючи властивість
щільності розподілу
(площа під ним дорівнює 1):

$$1=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=\int_{-1}^{1} Ax^2 = A\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{1} = A\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right)=\frac{2A}{3} \quad\Rightarrow\quad \frac{2A}{3}=1 \quad\Rightarrow\quad =\frac{3}{2}$$

F(*x*) визначається як первісна *f*(*x*) на кожній з ділянок неперервності:

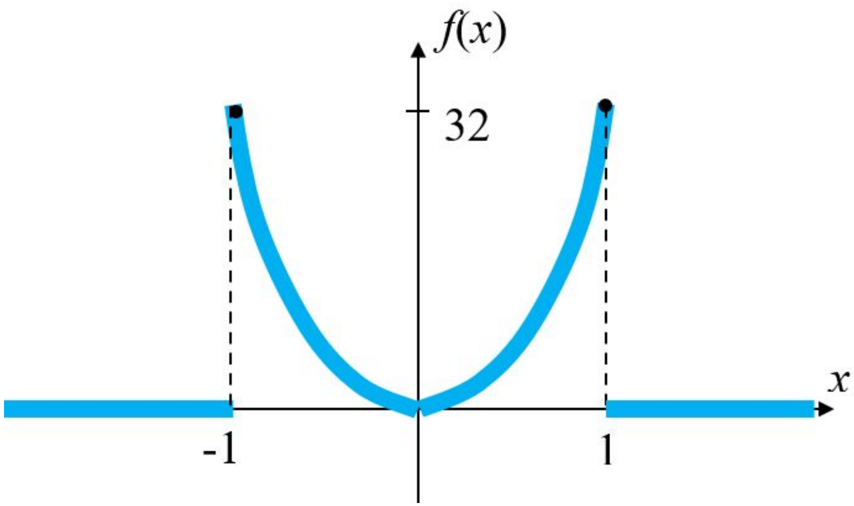
$$x<-1 \quad\Rightarrow\quad F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)dx=\int_{-\infty}^{x} 0\cdot dx=0;$$

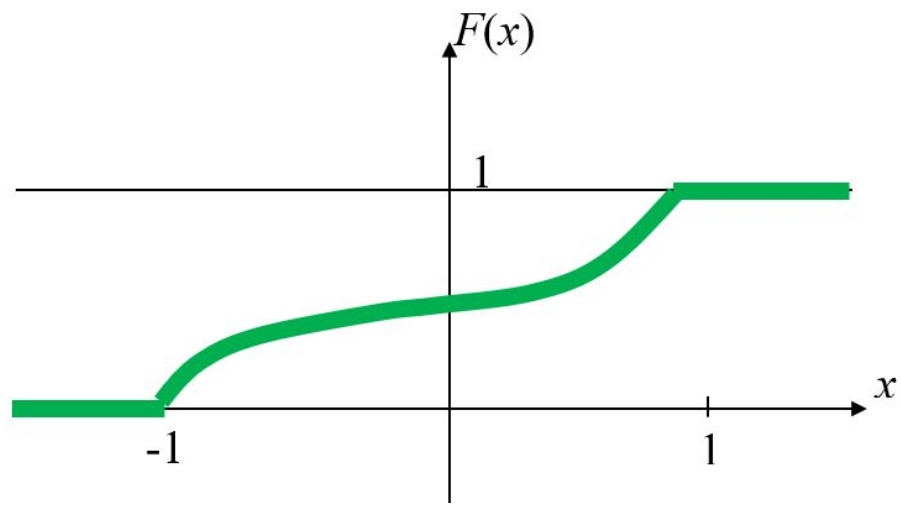
$$\underline{-1\leq x\leq 1 \quad\Rightarrow\quad} F(x)=\int_{-\infty}^{-1} 0\cdot dx+\int_{-1}^{x} Ax^2dx=0+\frac{Ax^3}{3}\Big|_{-1}^{x}=\frac{x^3}{2}\Big|_{-1}^{x}=\frac{x^3}{2}+\frac{1}{2}=\frac{x^3+1}{2};$$

$$\underline{x>-1} \quad\Rightarrow\quad F(x)=\int_{-\infty}^{-1} 0\cdot dx+\int_{-1}^{1}\frac{x^3+1}{2}dx+\int_{1}^{x}0\cdot dx=0+1+0=1$$

<u>Приклад 3</u> . *Закінчення.*

$$f(x)=\begin{cases} Ax^2, & |x|<1; \\ 0, & |x|\ge 1. \end{cases} \qquad F(x)=\begin{cases} 0, & x<-1 \\ \dfrac{x^3+1}{2}, & -1\le \quad \le 1 \\ 0, & x>1 \end{cases}$$





$$P\left(0<x<\frac{1}{2}\right)=F\left(\frac{1}{2}\right)-F(0)=\frac{(1/2)^3+1}{2}-\frac{0^3+1}{2}=\frac{1}{16}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=\frac{1}{16}$$

Приклад 4 .

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<-\dfrac{\pi}{2};\\ a(\sin x+1), & -\dfrac{\pi}{2}\le x\le\dfrac{\pi}{2};\\ 1, & x>\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$$

$F(x)$ - неперервна. Знайти параметр a, P ($0<x<\pi/4$), побудувати графіки $f(x)$, $F(x)$.

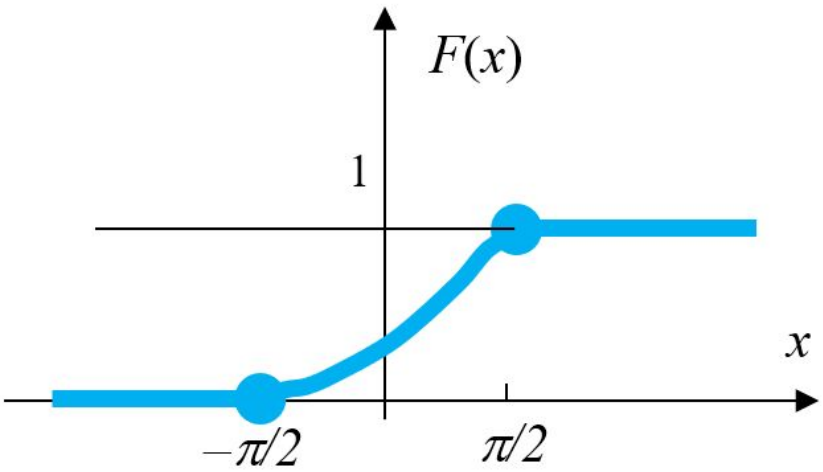
Рішення Виходячи з безперервності: $a\left(\sin\dfrac{\pi}{2}+1\right)=1$ $\Rightarrow$ $a\cdot 2=1$ $\Rightarrow$ a = 1/2.

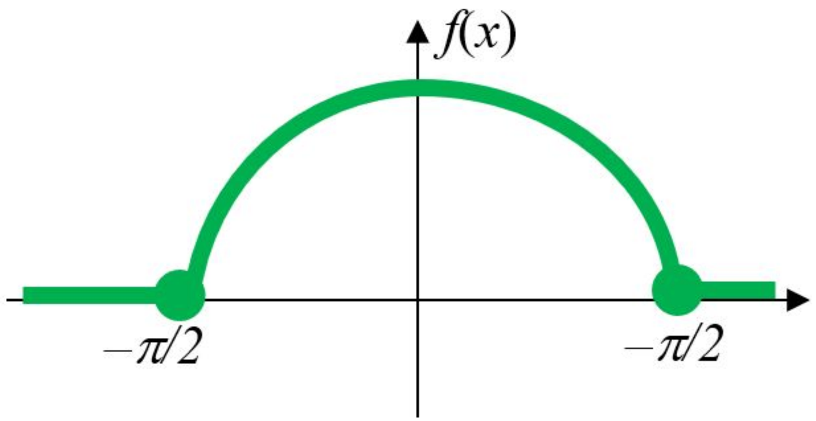
Тоді:

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<-\dfrac{\pi}{2};\\ \dfrac{\sin x}{2}+\dfrac{1}{2}, & -\dfrac{\pi}{2}\le x\le\dfrac{\pi}{2};\\ 1, & x>\dfrac{\pi}{2}\end{cases}\qquad f(x)=F'(x)=\begin{cases}0, & x<-\dfrac{\pi}{2}\\ \dfrac{\cos x}{2}, & -\dfrac{\pi}{2}\le x\le\dfrac{\pi}{2};\\ 0, x & <+\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$$

***Приклад 4**. Закінчення.*

$$P\left(0 < x < \frac{\pi}{4}\right) = F\left(\frac{\pi}{4}\right) - F(0) = \frac{1}{2}\left(\sin\frac{\pi}{4} + 1\right) - \frac{1}{2}(\sin 0 + 1) = \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$





Приклад 5 . $f(x) = \begin{cases} e^x, & x > 0; \\ 0, & x \le 0. \end{cases}$ Знайти $F(x)$, ймовірність попадання на інтервал (1,2) та побудувати графіки $f(x)$, $F(x)$.

Рішення. *F*(*x*) визначається як первісна *f*(*x*) на кожній з 2 ділянок неперервності:

$$F(x) = \begin{cases} \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int\limits_{0}^{x} -e^{-t}dt = -e+1, \quad x > 0; \\ 0, x < 0. \end{cases}$$

$$P\{1 < x < 2\} = F(2) - F(1) = (1 - e^{-2}) - (1 - e^{-1}) = \frac{1}{e} - \frac{1}{e^2}$$