Підсумкове тестування
за темою 4:
Випадкові величини та способи їх завдання

Посилання на тест:
https://forms.gle/uKpHu2zzDob3Rqin9

Час проходження: 8.30-8.45

Навчальна дисципліна:
Теорія ймовірностей

Тема 3
Випадкові величини та їх характеристики

Питання лекції

1. Числові характеристики дискретної випадкової величини.
2. Числові характеристики неперервної випадкової величини.
3. Основні властивості математичного сподівання та дисперсії.
4. Твірна функція.

Рекомендована література

1. Конспект лекцій. URL: https://drive.google.com/drive/folders/1jYAJHdSefxIUX4RQxmhGS50gxqPH7wci?usp=sharing

2. Кучук Г. А., Кучук Н. Г. Теорія ймовірностей. Частина 1 : навчальний посібник. Харків : НТУ «ХПІ», 2024. 229 с. URL: https://repository.kpi.kharkov.ua/handle/KhPI-Press/80011

3. Теорія ймовірностей : навч. посіб. для студ. спеціальності 121 «Інженерія програмного забезпечення» / КПІ ім. Ігоря Сікорського; уклад.: О.В. Барабаш, А.П. Мусієнко, О.В. Свинчук. – Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2021. – 193 с. URL: https://ela.kpi.ua/bitstream/123456789/42046/1/Navch_Posib_Teor_Ymovirn_BarabashO_MusienkoA_SvynchukO.pdf

4. Навчальний посібник з дисципліни «Теорія ймовірностей, імовірнісні процеси та математична статистика». Курс лекцій. Частина 1 / Павлов О.А., Гавриленко О.В., Рибачук Л.В. – Київ: КПІ, 2021. – 154 с. URL: https://ela.kpi.ua/bitstream/123456789/41672/3/Posibnyk_Pavlov-Havrylenko-Rybachuk_KonspLek-1.pdf

1. Числові характеристики дискретної випадкової величини (ДВВ)

Def. **Математичне сподівання** ДВВ – це сума добутків всіх її можливих значень на ймовірності цих значень:

$$\mathrm{M}\left[X\right]=\mathrm{m_x}=\sum_{i=1}^{n} x_i p_i$$

Def. **Мода** ДВВ – її найбільш ймовірне значення:

$$\mathrm{Mo}\left[X\right]=\left(x_k \middle| p_k = \max_{i\in 1\ldots n} p_i \right)$$

Def. **Дисперсія** ДВВ: $\mathrm{D}\left[X\right]=\mathrm{D_x}=\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-m_x\right)^2 p_i = \quad \left[X^2\right]-\left(m_x\right)^2$

Def. **Середнє квадратичне відхилення** ДВВ: $\sigma\left[X\right]=\sigma_x=\sqrt{\mathrm{D}\left[X\right]}\geq 0$

Приклад

Дослід – кидання двох монет.
Випадкова величина – кількість гербів, $S = \{0, 1, 2\}$. Її ряд розподілу:

Значення ДВВ	**0**	**1**	**2**
Ймовірність значення ДВВ	1/4	?	1/4

Математичне сподівання:
$m_X = 0 \cdot 1/4 + 1 \cdot 1/2 + 2 \cdot 1/4 = 0 + 1/2 + 1/2 = 1{,}0.$

Мода: $Mo[X] = 1$

Дисперсія:
$D_X = 0^2 \cdot 1/4 + 1^2 \cdot 1/2 + 2^2 \cdot 1/4 - 1{,}0^2 = 0 + 1/2 + 1 - 1{,}0 = 1/2 = 0{,}5$

Середнє квадратичне відхилення: $\sigma_x = \sqrt{0{,}5} \approx 0{,}7$

2. Числові характеристики неперервної випадкової величини (НВВ)

Def. **Математичне сподівання** НВВ: $\mathrm{M}[X] = \mathrm{m_x} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\,\mathrm{d}x$

Def. **Мода** НВВ: $\mathrm{Mo}[X] = \left(x_k \,\middle|\, f(x_k) = \max f(x) \right)$

Def. **Медіана** НВВ: $\mathrm{Me}[X] = \left(x_m \,\middle|\, \int\limits_{-\infty}^{x_m} f(x)\,dx = \int\limits_{x_m}^{\infty} f(x)\,dx = \frac{1}{2} \right)$

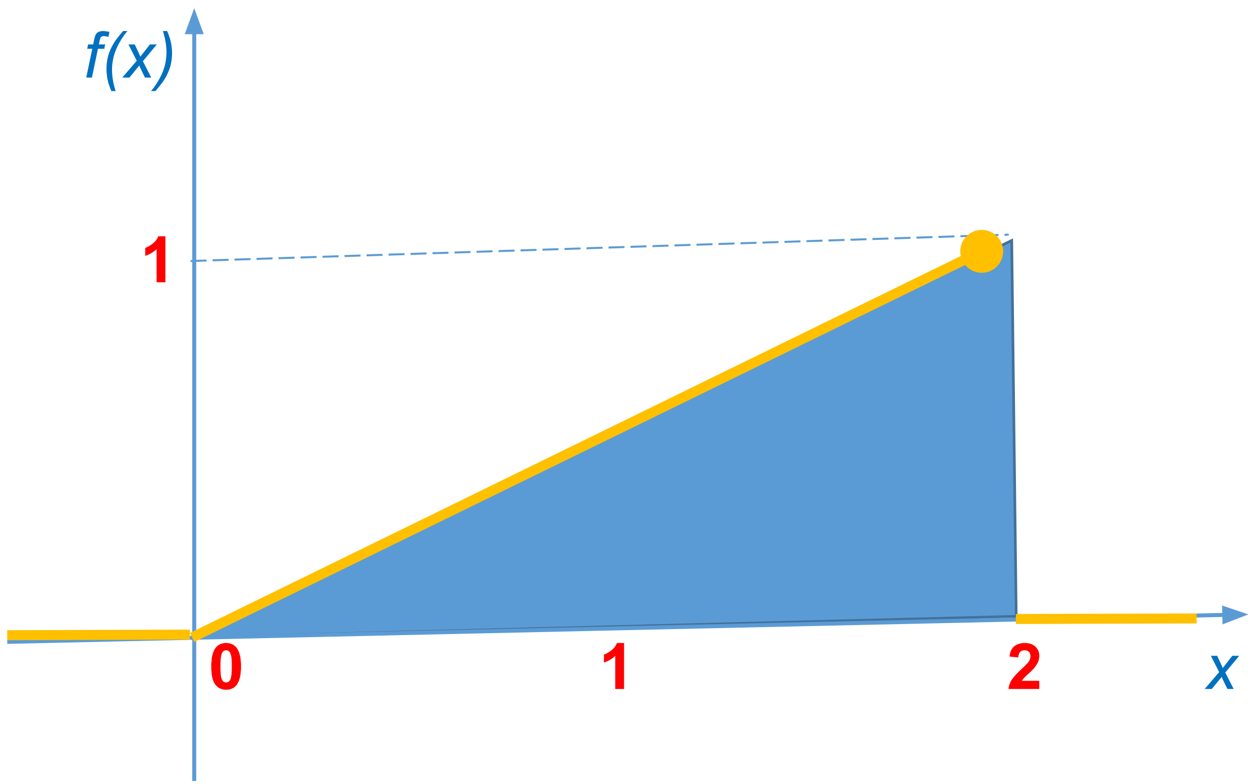
Def. **Дисперсія** НВВ: $\mathrm{D}[X] = \mathrm{D_x} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^2 f(x)\,dx = \mathrm{M}\left[X^2\right] - (m_x)^2$

Def. **Середнє квадратичне відхилення** НВВ: $\sigma[X] = \sigma_x = \sqrt{\mathrm{D}[X]} \geq 0$

Приклад

Неперервна випадкова величина може приймати будь-яке дійсне значення з інтервалу від 0 до 2 та задана функцією щільності ймовірності:

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<0;\\ \dfrac{x}{2}, & 0\le x\le 2;\\ 0, & x>2.\end{cases}$$



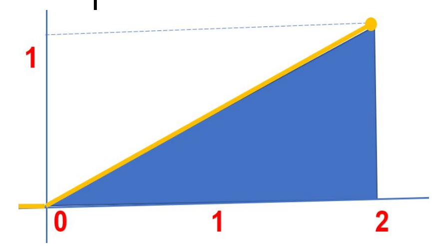
Def. **Математичне сподівання**: $m_x = \int_0^2 x \cdot \frac{x}{2} \mathrm{d}x = \left.\frac{x^3}{6}\right|_0^2 = \frac{2^3}{6} = \frac{4}{3}$

Def. **Мода**: $\mathrm{Mo}[X] = 2 \qquad \left(f(2) = \max f(x) = 1 \right)$

Def. **Медіана**: $\mathrm{Me}[X] = \sqrt{2} \qquad \left(\int_0^{x_m} \frac{x}{2} \mathrm{d}x = \frac{x_m^2}{4} = \frac{1}{2} \Rightarrow x_m = \sqrt{2} \right)$

Def. **Дисперсія**: $D_x = M\left[X^2\right] - (m_x)^2 =$

$$= \int_0^2 x^2 \cdot \frac{x}{2} dx - \frac{16}{9} = \left.\frac{x^4}{8}\right|_0^2 - \frac{16}{9} = 2 - \frac{16}{9} = \frac{2}{9}$$



Def. **Середнє квадратичне відхилення**: $\sigma_x = \sqrt{\frac{2}{9}} \approx 0,47$

3. Основні властивості математичного сподівання та дисперсії

1. Математичне сподівання невипадкової величини є сама величина: $M[c] = c$.
2. Дисперсія невипадкової величини дорівнює 0: $D[c] = 0$.
3. При збільшенні випадкової величини на невипадкову величину математичне сподівання збільшується на ту саму величину: $M[X + c] = M[X] + c$.
4. У разі збільшення випадкової величини на невипадкову величину дисперсія не змінюється: $D[X + c] = D[X]$.
5. При множенні випадкової величини на невипадкову її математичне сподівання також множиться на цю величину: $M[c \cdot X] = c \cdot M[X]$.
6. При множенні випадкової величини на невипадкову дисперсія множиться на квадрат невипадкової величини: $D[c \cdot X] = c^2 \cdot D[X]$.

4. Твірна функція

X – дискретна випадкова величина; X = {0, 1, 2 …, , k ,;…}

Визначення *Твірна функція* випадкової величини X

$$\vartheta(Z) = \sum_{к=0}^{\infty} P_k Z^k, \text{ де } 0 < Z < 1.$$

При $Z = 1$ $$\vartheta(1) = \sum_{k=0}^{\infty} P_k = 1$$

$$\vartheta'(Z) = \sum_{k=0}^{\infty} k P_k Z^{k-1} \Rightarrow \vartheta^1(1) = m_x$$

$$\vartheta''(Z) = \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1) P_k Z^{K-2}$$

$$\vartheta''(1) = \sum k^2 P_K - \sum k P_K = L_2 - m_x \Rightarrow \quad D_x = \vartheta''(1) + m_x - (m_x)^2$$