Підсумкове тестування
за темою 2:

Методи розрахунку ймовірностей

Посилання на тест:
https://forms.gle/ekyCTc9FbuoeXUTH8

Час проходження: 8.30-8.45

Навчальна дисципліна:

Теорія ймовірностей

Тема 3

Байєсовський підхід до розрахунку ймовірностей

Питання лекції

1. **Формула повної ймовірності.**
2. **Формула Байєса.**

Посилання на навчальні матеріали:

https://drive.google.com/drive/folders/1jYAJHdSefxIUX4RQxmhGS50gxqPH7wci?usp=sharing

Рекомендована література

1. Конспект лекцій. URL: https://drive.google.com/drive/folders/1jYAJHdSefxIUX4RQxmhGS50gxqPH7wci?usp=sharing

2. Кучук Г. А., Кучук Н. Г. Теорія ймовірностей. Частина 1 : навчальний посібник. Харків : НТУ «ХПІ», 2024. 229 с. URL: https://repository.kpi.kharkov.ua/handle/KhPI-Press/80011

3. Теорія ймовірностей : навч. посіб. для студ. спеціальності 121 «Інженерія програмного забезпечення» / КПІ ім. Ігоря Сікорського; уклад.: О.В. Барабаш, А.П. Мусієнко, О.В. Свинчук. – Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2021. – 193 с. URL: https://ela.kpi.ua/bitstream/123456789/42046/1/Navch_Posib_Teor_Ymovirn_BarabashO_MusienkoA_SvynchukO.pdf

4. Навчальний посібник з дисципліни «Теорія ймовірностей, імовірнісні процеси та математична статистика». Курс лекцій. Частина 1 / Павлов О.А., Гавриленко О.В., Рибачук Л.В. – Київ: КПІ, 2021. – 154 с. URL: https://ela.kpi.ua/bitstream/123456789/41672/3/Posibnyk_Pavlov-Havrylenko-Rybachuk_KonspLek-1.pdf

1. Формула повної ймовірності

Нехай про якийсь дослід зроблено n гіпотез, що виключають одна одну

$$\left\{H_1,\ldots,H_n \middle| H_i \cap H_j = \varnothing \quad \forall i \neq j\right\}.$$

$P(H_i)$ – апріорні ймовірності гіпотез.
Припустимо, що подія A може з'явитися тільки з однією з гіпотез і поставимо умовні ймовірності появи A як $P(A/H_i)$.

<u>Теорема.</u> Безумовна ймовірність події у досліді з гіпотетичними умовами обчислюється як сума добутків ймовірностей кожної гіпотези на умовну ймовірність події за цієї гіпотези.

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) \cdot P(A/H_i)$$

Ця формула називається формулою ймовірності. Ця формула застосовна у випадках, коли можна описати умови досліду і розіграти його результат.

Приклади розв'язання задач

Приклад 7. Є три однакові урни. У першій – 2 білих та 3 чорних кулі, у другій 4 білих та 1 чорна, у третій – 3 білих. Виймають одну кулю із довільної урни. Якою є ймовірність того, що вона біла?

Розв'язання. Нехай подія A – вийнята біла куля. Зробимо гіпотези H_1, H_2 і H_3, які полягають у тому, що куля із урни з таким номером. Оскільки урни однакові, то: $P(H_1) = P(H_2) = P(H_3) = 1/3$.

Знаючи номер урни, можна розрахувати умовну ймовірність події A:

$$P(A/H_1) = \frac{2}{5};\ P(A/H_2) = \frac{4}{5};\ P(A/H_3) = 1$$

Тоді за формулою повної ймовірності

$$P(A) = \sum_{i=1}^{3} P(H_i)\cdot P(A/H_i) = \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{5} + \frac{1}{3}\cdot\frac{4}{5} + \frac{1}{3}\cdot 1 = \frac{11}{15}.$$

Відповідь: шукана ймовірність – 11/15.

Приклад 8. З урни, в якій містяться 5 білих та 7 чорних куль, навмання вибираються дві кулі й перекладаються в урну, в якій є 5 білих та 3 чорні кулі. Кулі в другій урні перемішують та навмання вибирають одну кулю. Визначити ймовірність події, яка полягає в тому, що куля, яку вибрали з другої урни, є білою.

Розв’язання. Введемо до розгляду подію А, яка полягає в тому, що з другої урни вибираємо білу кулю, та такі гіпотези:

H1 – з першої урни в другу було перекладено дві білі кулі;

H2 – з першої урни в другу було перекладено одну білу та одну чорну;

H3 – з першої урни в другу було перекладено дві чорні кулі.

Гіпотези H1, H2, H3 є складними випадковими подіями.

Вони можуть бути виражені через такі елементарні події:

B1 – з першої урни буде вибрана перша куля білого кольору;

B2 – з першої урни буде вибрана друга куля білого кольору;

C1 – з першої урни буде вибрана перша куля чорного кольору;

C2 – з першої урни буде вибрана друга куля чорного кольору.

Приклад 8 (закінчення).

$$P(H_1)=P(B_1B_2)=P(B_1)P(B_2/B_1)=\frac{5}{12}\cdot\frac{4}{11}=\frac{5}{33}$$

$$P(H_2)=P(B_1C_2)+P(C_1B_2)=P(B_1)P(C_2/B_1)+P(C_1)P(B_2/C_1)=\frac{5}{12}\cdot\frac{7}{11}+\frac{7}{12}\cdot\frac{5}{11}=\frac{35}{66}$$

$$P(H_3)=P(C_1C_2)=P(C_1)P(C_2/C_1)=\frac{7}{12}\cdot\frac{6}{11}=\frac{7}{22}$$

Крім того, з умови задачі маємо

$$P(A/H_1)=\frac{7}{10};\quad P(A/H_2)=\frac{3}{5};\quad P(A/H_3)=\frac{1}{2}$$

Отже, за формулою повної ймовірності

$$P(A)=\frac{5}{33}\cdot\frac{7}{10}+\frac{35}{66}\cdot\frac{3}{5}+\frac{7}{22}\cdot\frac{1}{2}=\frac{49}{132}$$

Відповідь: шукана ймовірність приблизно дорівнює 0,37.

Приклад 9. В офісі є 4 ноутбуки виготовлених компанією *К1*, 6 – компанією *К2*, 8 – компанією *К3* та два, які виготовляє *К4*. Гарантії, що ноутбуки цих компаній працюватимуть протягом гарантійного терміну без ремонту становлять 70%, 80%, 85%, та 55% для кожної з них. Потрібно знайти ймовірність того, що вибраний ноутбук працюватиме без ремонту протягом гарантійного терміну.

Розв'язання. Позначимо події таким чином: H_i – вибрано ноутбук компанії; A – ноутбук працюватиме без ремонту. Тоді:

$$P(H_1)=\frac{4}{4+6+8+2}=0,2;\quad P(H_2)=\frac{6}{20}=0,3;\quad P(H_3)=\frac{8}{20}=0,4;\quad P(H_4)=\frac{2}{20}=0,1.$$

Ймовірності, що вони працюватимуть без ремонту беремо з умови:

$$P(A/H_1)=\frac{70\%}{100\%}=0,7;\quad P(A/H_2)=0,8;\quad P(A/H_3)=0,85;\quad P(A/H_4)=0,55;$$

Тоді за формулою повної ймовірності:

$$P(A)=0,2\cdot 0,7+0,3\cdot 0,8+0,4\cdot 0,85+0,1\cdot 0,55=$$
$$=0,14+0,24+0,34+0,055=0,775.$$

Відповідь: шукана ймовірність – 0,775.

Приклад 10. На двох верстатах-автоматах виробляють однакові деталі, які надходять на транспортер. Продуктивність першого верстата утричі більша, ніж другого, причому перший верстат виробляє нестандартну деталь з ймовірністю 0,15, а другий — з ймовірністю 0,2. Знайти ймовірність того, що навмання взята з транспортера деталь буде стандартною.

Розв'язання. Введемо дві гіпотези: H1 – «деталь виготовлено на першому верстаті»; H2 – «деталь виготовлено на другому верстаті». Нехай подія A – «вибрана деталь стандартна».
Події H1 і H2 несумісні й утворюють повну групу. Що ж до події A, то вона може відбутись одночасно з кожною із цих подій.
Умовні ймовірності настання події A відомі: 0,15 та 0,2.
Згідно з умовою, що продуктивність першого верстата утричі більша, ніж другого, знаходимо : P (H1) = 0,75, P (H2) = 0,25.
За формулою повної ймовірності маємо:

$$P(A)= 0{,}75 \cdot 0{,}85 + 0{,}25 \cdot 0{,}8 = 0{,}8375.$$

Відповідь: шукана ймовірність приблизно дорівнює 0,84.

2. Формула Байєса

Нехай про якийсь дослід зроблено n гіпотез, що виключають одна одну

$$\left\{H_1,\dots,H_n \,\middle|\, H_i \cap H_j = \varnothing \quad \forall i \neq j\right\}.$$

P(H_i) – апріорні ймовірності, P(A/H_i) – умовні ймовірності появи події *A*.

Зроблено дослід, у результаті якого виникла подія *A*. Як змінилися ймовірності гіпотез при цьому (умовні ймовірності P(H_i /A), що звуться апостеріорними ймовірностями гіпотез) ?

<u>Теорема</u>. Апостеріорні ймовірності гіпотез пов'язані з апріорними формулою Байєса:

$$P(H_i / A) = \frac{P(H_i)\cdot P(A/H_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(H_i)\cdot P(A/H_i)} = \frac{P(H_i)\cdot P(A/H_i)}{P(A)}$$

Приклади розв'язання задач

Приклад 11. В офісі є 4 ноутбуки виготовлених компанією *К1*, 6 – компанією *К2*, 8 – компанією *К3* та два, які виготовляє *К4*. Гарантії, що ноутбуки цих компаній працюватимуть протягом гарантійного терміну без ремонту становлять 70%, 80%, 85%, та 55% для кожної з них. Був вибраний ноутбук, що працював без ремонту протягом гарантійного терміну. Яка ймовірність, що це ноутбук компанії *К4*?

Розв'язання. Орієнтуємося на результати прикладу 9.
H_i – вибрано ноутбук компанії; *A* – ноутбук працював без ремонту.

Для компанії *D вже маємо:* $P(A/H_4)=0{,}55;\quad P(H_4)=\frac{2}{20}=0{,}1.$

Також була розрахована ймовірність події А: Р(А) = 0,775.

Отже, $$P(H_4/A)=\frac{0{,}1\cdot 0{,}55}{0{,}775}\approx 0{,}071.$$

Відповідь: шукана ймовірність приблизно 0,07, або 7%.

Приклад 12. На склад надходять монітори трьох фірм, причому частка моніторів першої фірми становить 25%, другої – 60%, третьої – 15%. Відомо також, що середній відсоток моніторів з браком для першої фірми становить 2%, другої – 4%, третьої – 1%. Знайти ймовірність того, що монітор виготовлений на першій фірмі, якщо він бракований.

Розв'язання. Введемо гіпотези: H_1 – монітор виготовлено на першій фірмі; H_2 – на другій; H_3 – на третій.
Нехай подія A – навмання вибраний монітор виявився бракованим.

Ймовірності гіпотез: $P(H_1) = \frac{25\%}{100\%} = 0,25;\quad P(H_2) = 0,6;\quad P(H_3) = 0,15.$

Застосуємо формулу повної ймовірності для визначення можливості вибору бракованого монітору:

$$P(A) = 0,25 \cdot 0,02 + 0,6 \cdot 0,04 + 0,15 \cdot 0,01 = \\ = 0,005 + 0,024 + 0,0015 = 0,0305.$$

Тоді $P(H_1 / A) = \dfrac{P(H_1)P(A/H_1)}{P(A)} = \dfrac{0,25 \cdot 0,02}{0,0305} \approx 0,164.$

Відповідь: шукана ймовірність приблизно дорівнює 0,164.

Приклад 13. Два стрілки стріляють по одній мішені незалежно один від одного, по одному пострілу. Імовірність потрапляння 1-го стрілка у мішень $P_1 = 0,8$, 2-го – $P_2 = 0,1$. Після стрільби виявлено, що було тільки одне попадання. Яка ймовірність, що потрапив 1-й стрілок?

Розв'язання. Нехай подія А - попадання в ціль До досліду були 4 гіпотези: H_{00} – ніхто потрапив; H_{10} – перший влучив, другий не влучив; H_{01} – навпаки; H_{11} – обидва потрапили. Розрахуємо ймовірності:

$$P(H_{00}) = P(\overline{P}_1 \cdot \overline{P}_2) = P(\overline{P}_1) \cdot P(\overline{P}_2) = 0,2 \cdot 0,9 = 0,18,$$

$$P(H_{10}) = P(P_1 \cdot \overline{P}_2) = P(P_1) \cdot P(\overline{P}_2) = 0,8 \cdot 0,9 = 0,72,$$

$$P(H_{01}) = P(\overline{P}_1 \cdot P_2) = P(\overline{P}_1) \cdot P(P_2) = 0,2 \cdot 0,1 = 0,02,$$

$$P(H_{11}) = P(P_1 \cdot P_2) = P(P_1) \cdot P(P_2) = 0,8 \cdot 0,1 = 0,08.$$

$$P(A / H_{00}) = 0; \quad P(A / H_{01}) = 1; \quad P(A / H_{10}) = 1; \quad P(A / H_{11}) = 0.$$

$$P(A) = 0,18 \cdot 0 + 0,02 \cdot 1 + 0,72 \cdot 1 + 0,08 \cdot 0 = 0,74.$$

$$P(H_{10} / A) = \frac{P(H_{10}) \cdot P(A / H_{10})}{P(A)} = \frac{0,72}{0,74} \approx 0,97.$$

Відповідь: шукана ймовірність приблизно дорівнює 0,97.