Навчальна дисципліна: **Теорія ймовірностей (Probability theory)**

Лекції – кожного тижня.

Практичні заняття – кожного тижня.

Наприкінці семестру - іспит

Викладачі

професор Кучук Георгій Анатолійович < Heorhii.Kuchuk@khpi.edu.ua>

професор Філоненко Алевтина Михайлівна < Alevtyna.Filonenko@khpi.edu.ua >

Тема 2
Методи розрахунку ймовірностей

Питання лекції

1. Статистичний підхід.
2. Геометрична ймовірність.
3. Правило додавання.
4. Умовна ймовірність події та правило множення.
5. Формула Бернуллі.

Посилання на навчальні матеріали:

https://drive.google.com/drive/folders/1iYAJHdSefxIUX4RQxmhGS50gxqPH7wcj?usp=sharing

Рекомендована література

1. Конспект лекцій. URL: https://drive.google.com/drive/folders/1jYAJHdSefxIUX4RQxmhGS50gxqPH7wci?usp=sharing

2. Кучук Г. А., Кучук Н. Г. Теорія ймовірностей. Частина 1 : навчальний посібник. Харків : НТУ «ХПІ», 2024. 229 с. URL: https://repository.kpi.kharkov.ua/handle/KhPI-Press/80011

3. Теорія ймовірностей : навч. посіб. для студ. спеціальності 121 «Інженерія програмного забезпечення» / КПІ ім. Ігоря Сікорського; уклад.: О.В. Барабаш, А.П. Мусієнко, О.В. Свинчук. – Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2021. – 193 с. URL: https://ela.kpi.ua/bitstream/123456789/42046/1/Navch_Posib_Teor_Ymovirn_BarabashO_MusienkoA_SvynchukO.pdf

4. Навчальний посібник з дисципліни «Теорія ймовірностей, імовірнісні процеси та математична статистика». Курс лекцій. Частина 1 / Павлов О.А., Гавриленко О.В., Рибачук Л.В. – Київ: КПІ, 2021. – 154 с. URL: https://ela.kpi.ua/bitstream/123456789/41672/3/Posibnyk_Pavlov-Havrylenko-Rybachuk_KonspLek-1.pdf

1. Статистичний підхід

Некласичні приклади: 1) гральна кістка зі зміщеним центром ваги;
2) потрапляння в ціль під час пострілу;
3) вихід з ладу технічного пристрою протягом доби роботи.

Частота події А в серії дослідів – це відношення числа дослідів, у яких з'явилася подія А до загальної кількості дослідів.

Частота (статистична ймовірність): $p^*(A) = \frac{M_A}{n}$.

При невеликому n p^* випадково, при $n \to \infty$ p^* стабілізується, наближаючись до стійкої величини:

- зі збільшенням n частота події наближається до ймовірності;
- наближення йде повільно, але явно простежується на статистичному матеріалі;
- коливання частоти біля ймовірності носять довільний, незакономірний характер.

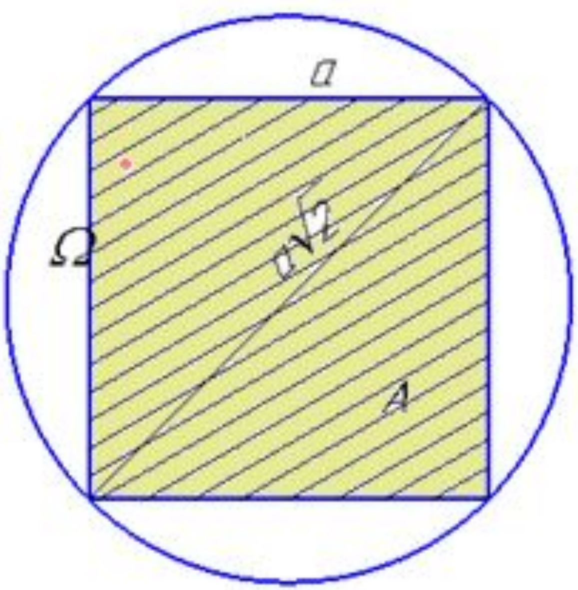
Суттєвий недолік. Треба надто багато дослідів.

2. Геометрична ймовірність

У деяких випадках прийом безпосереднього підрахунку ймовірностей допускає поширення на випадок незліченної множини елементарних подій. Наприклад, у межах області Ω відзначається випадково точка a (всі точки рівноправні, ніяке місце не має переваги). Тоді

$$p(A) = p\{a \in A\} = \frac{S_A}{S_\Omega}.$$

Приклад 1. В круг вписано квадрат. У круг навмання кидають точку. Знайти ймовірність того, що вона виявиться всередині квадрата.



Рішення. Площа квадрата: $\mu(A) = S_\square = a^2$.

Діаметр круга: $D = a\sqrt{2}$.

Площа цього круга: $\mu(\Omega) = S_0 = \dfrac{\pi a^2}{2}$.

Ймовірність: $p = \dfrac{\mu(A)}{\mu(\Omega)} = \dfrac{a^2}{\pi a^2 / 2} = \dfrac{2}{\pi} \approx 0,64$.

Ω - множина всіх можливих наслідків досліду (простір елементарних подій)

$$0 \le P(A) \le 1 \qquad \forall A \subseteq \Omega$$

.

3. Правило додавання

Правило: $P\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$, якщо всі A_i – несумісні.

<u>Наслідок 1.</u> Якщо кілька подій утворюють повну групу несумісних подій, то ймовірність їхньої суми дорівнює 1.

<u>Наслідок 2.</u> Сума ймовірностей протилежних подій дорівнює одиниці, тобто $P(A) + P(\overline{A}) = 1$.

<u>Наслідок 3.</u> Для сумісних подій: P(A+B) = P(A) + P(B) – P(AB)
P(AB) = P(A) + P(B) – P(A+B).

Приклади розв'язання задач

Приклад 2. У лотереї 1000 квитків: 1 – 1000 гр., 10 – по 100 гр., 50 – по 20 гр., 100 – по 5 гр., інші без виграшу. Якою є ймовірність виграшу не менше 20 гр.?

Розв'язання. Розглянемо такі варіанти події A (виграти не менше 20 гр.): A_{20} – рівно 20 гр.; A_{100} – рівно 100 гр.; A_{1000} – рівно 1000 гр.
Варіанти A_{20} , A_{100} , A_{1000} – несумісні.
$A = A_{20} + A_{100} + A_{1000}$, отже, за правилом додавання:

$$P(A) = P(A_{20}) + P(A_{100}) + P(A_{1000}) = \frac{50}{1000} + \frac{10}{1000} + \frac{1}{1000} = 0{,}061$$

Відповідь: ймовірність виграшу ≥ 20 гр. – 0,061.

4. Умовна ймовірність події та правило множення

Приклад. У урні 5 білих та одна чорна куля. Подія А – дістається біла куля; подія В – дістається чорна куля.

P(A) = 5/6. Після здійснення події В – P(A) = 1? P(A/B) = 1.

Визначення. Подія А називається незалежною від події В, якщо ймовірність події А не залежить від того, чи відбулася подія В чи ні. В іншому випадку події називаються залежними .

Визначення. Імовірність події А, обчислена за умови, що мала місце інша подія, називається умовною ймовірністю події А і позначається P(A/B).

Теорема. Умовні ймовірності розраховуються за такими формулами:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, P(B) \neq 0 \qquad P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}, P(A) \neq 0$$

Наслідок 1. (Правило множення):

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B/A) = P(B) \cdot P(A/B).$$

Наслідок 2. Для незалежних подій:

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B).$$

Наслідок 3. Властивості залежності чи незалежності подій завжди взаємні (тобто якщо подія A не залежить від події B, то і подія не залежить від події A).

Зауваження. У загальному випадку $P(B/A) \neq P(A/B)$.
У розглянутому на слайді вище прикладі:

$$P(A/B) = 1; \quad P(B/A) = 1/5.$$

Наслідок 4. Якщо A і B незалежні, то незалежні наступні пари подій:

$$\overline{A} \text{ и } \overline{B};\ A \text{ и } \overline{B};\ \overline{A} \text{ и } B.$$

Визначення. Декілька подій називаються попарно незалежними, якщо незалежні між собою будь-які два з них.

Приклади розв’язання задач

Приклад 3. На співбесіду прийшло 10 чоловік. Троє із них – некваліфіковані робітники. Представник фірми запросив до кабінету двох робітників. Знайти ймовірність того, що вони обидва:
а) некваліфіковані; б) кваліфіковані.

Розв’язання. а) Нехай подія А - перший, що зайшов, некваліфікований, подія В - другий некваліфікований.

Події А та В залежні, тому: $P(A) = 3/10$; $P(B/A) = 2/9$.

За правилом множення: [illegible].

б) Нехай подія А - перший, що зайшов, кваліфікований, подія В – другий кваліфікований; залежні події, тоді: $P(A) = 7/10$; $P(B/A) = 6/9$.

За правилом множення: [illegible].

Відповідь: шукані ймовірності: а – 1/15; б – 7/15.

Приклад 4. Абонент забув останню цифру номера телефона і набирає її навмання. Знайти ймовірність того, що йому доведеться дзвонити не більше, ніж в 4 місця.

Розв'язання. Нехай подія A – абоненту довелось дзвонити не більш ніж в 4 місця; A_i - він невірно набрав цифру при і-му наборі; і = 1…4.

Тоді [illegible].

Оскільки цифр 10, вірна з них одна, і абонент не буде двічі набирати невірну цифру, то

. [illegible]

[illegible]

А тоді [illegible]

Відповідь: шукана ймовірність приблизно дорівнює 0,4.

Приклад 5. З п`яти гвинтівок, з яких три снайперські і дві звичайні, навмання вибирається одна, і з неї робиться постріл. Знайти ймовірність влучення, якщо ймовірність влучити зі снайперської гвинтівки дорівнює 0,95, а ймовірність влучити зі звичайної гвинтівки дорівнює 0,7.

Розв’язання. Нехай є такі події:

подія A - постріл влучний;

подія B - вибрано снайперську гвинтівку;

подія C - вибрано звичайну гвинтівку.

Тоді

[illegible]

Відповідь: шукана ймовірність дорівнює 0,85.

Приклад 6. В урні 10 білих та 15 чорних куль. Знайти ймовірність того, що дві вийнятих навмання кулі мають різний колір?

Розв'язання. Нехай *C* – аналізована подія;

$C = A_{бч} + A_{чб}$ де $A_{бч}$ - спочатку білий, потім чорний

$A_{чб}$ - спочатку чорний, потім білий;

Події $A_{бч}$ та $A_{чб}$ несумісні.

Введемо події: $A_б$ - вийнята біла куля; $A_ч$ - вийнята чорна куля.

$$P(C) = P(A_{бч} + A_{чб}) = P(A_{бч}) + P(A_{чб}) =$$

$$= P(A_б)P(A_ч / A_б) + P(A_ч)P(A_б / A_ч) =$$

$$= \frac{10}{25}\cdot\frac{15}{24} + \frac{15}{25}\cdot\frac{10}{24} = 2\cdot\frac{10\cdot 15}{25\cdot 24} = 1/2.$$

Відповідь: шукана ймовірність дорівнює 0,5.

5. Формула Бернуллі

Нехай проводиться n незалежних дослідів, у яких подія A може з'явитися з ймовірністю p і не з'явитися з ймовірністю $q = 1 - p$.

Теорема. Імовірність того, що подія A з'явиться рівно в m дослідах ($m \le n$) дорівнює (формула Бернуллі):

$$P_{m,n} = C_n^m p^m q^{n-m}, \quad C_n^m = \frac{n!}{(n-m)!m!}.$$

Приклад 7. По мішені стріляють 5 разів у однакових умовах із ймовірністю влучення 0,8. Яка ймовірність рівно 4 влучань?

Розв'язання.

$$P_{4,5} = C_5^4 0,8^4 \cdot (1-0,8) = \frac{5!}{4!1!} \cdot 0,8^4 \cdot 0,2 = 5 \cdot 0,2 \cdot 0,64^2 = 0,4096 \approx 0,4.$$

Відповідь: шукана ймовірність приблизно дорівнює 0,4.