Тема: Випадкові величини та способи їх завдання

.

План. 1. Поняття випадкової величини.
2. Ряд, багатокутник та функція розподілу випадкової величини.
3. Щільність розподілу випадкової величини.
4. Способи завдання випадкової величини.
5. Побудова функції розподілу ймовірностей випадкової величини.
6. Побудова функції щільності розподілу ймовірностей неперервної випадкової величини.

1. Поняття випадкової величини.

1. Def. Випадкова величина - величина, яка в результаті досвіду з випадковим результатом набуває того чи іншого значення.

Позначення: велика буква – випадкова величина, маленька – її конкретне значення.

S – множина можливих значень випадкової величини.

Приклади: 1) Досвід – кидання гральної кістки. Випадкова величина - число очок, що випали $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

2) Досвід – кидання трьох монет

Випадкова величина – кількість гербів

$S = \{0, 1, 2, 3\}$

Випадкова величина – частота появи герба

$S = \{0, 1/3, 2/3, 1\}$

3) Досвід – 5 пострілів з мішені

Випадкова величина - кількість попадань в ціль при п'яти пострілах

$S = \{0, 1, 2, 3,4,5\}$

Злічення множина

4) Досвід - стрільба по мішені до влучення

Випадкова величина – кількість пострілів до влучення

$S = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$

Незлічена множина

5) Досвід – вимірювання вмісту спирту у пляшці з прозорою рідиною.

Випадкова величина - % вмісту спирту

$S = \{s / 0 \le s \le 100\}$

Def. Дискретна випадкова величина - випадкова величина, множина значень якої скінчена або злічена.

Випадкова величина – функція елементарної події

$$X = \varphi(\omega)$$

2. Def. Закон розподілу випадкової величини - правило, що дозволяє знаходити ймовірність подій, пов'язаних із випадковою величиною.

2. Ряд, багатокутник та функція розподілу випадкової величини.

<u>Def. Ряд розподілу дискретної випадкової величини</u> – таблиця, де кожному значенню випадкової величини відповідає можливість появи цього значення.

<u>Def. Багатокутник розподілу дискретної випадкової величини</u> – графічне зображення.

<u>Приклад1</u> . $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$; $P(x) = \left\{\frac{1}{10}, \frac{1}{10}, \frac{2}{10}, \frac{2}{10}, \frac{3}{10}, \frac{1}{10}\right\}$. Ряд та багатокутник розподілу.

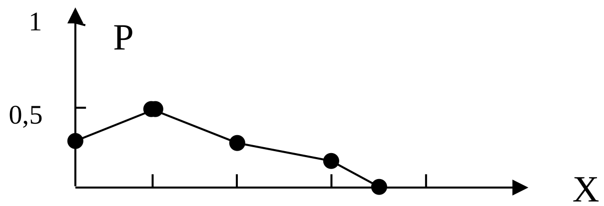
<u>Приклад 2</u> . Є 3 пристрої. Імовірність перебування у робочому стані першого – 0,2; другого – 0,4; третього 0,5. Випадкова величина X – кількість діючих пристроїв. Побудувати низку розподілу X .

<u>Рішення</u> : $S = \{0, 1, 2, 3\}$

$$P_0 = P\{X = 0\} = P\{- - -\} = 0{,}8 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}5 = 0{,}24$$
$$P_1 = P\{X = 1\} = P\{+ - -\} + P\{- + -\} + P\{- - +\} = 0{,}46$$
$$P_2 = P\{X = 2\} = P\{- + +\} + P\{+ - +\} + P\{+ + -\} = 0{,}26$$
$$P_3 = P\{X = 3\} = P\{+ + +\} = 0{,}04$$

0	1	2	3
0,24	0,46	0,26	0,04

$\sum p_i = 1$



Чи можна для недискретної випадкової величини побудувати ряд розподілу або багатокутник розподілу? <u>Ні.</u>

<u>Def. Функцією розподілу (або інтегральною функцією розподілу) випадкової величини X</u> називається функція $F(x)$, яка виражає ймовірність того, що вона набуде значення, менше, ніж задане x :

$$F(x) = P\{X < x\}$$

<u>Властивості $F(x)$</u> : 1) $F(x)$ – неспадна функція

2) $F(-\infty) = 0$

3) $F(+\infty) = 1$

4) $P\{x \in [\alpha, \beta]\} = F(\beta) - F(\beta) - F(\alpha)$

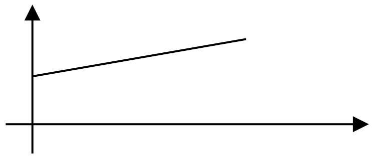
5) $P\{x \in \alpha) = \lim\limits_{\beta \to \alpha} [F(\beta) - F(\alpha)]$

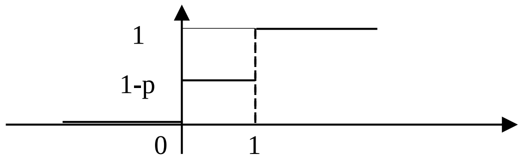
<u>Питання:</u> Подія має ймовірність, відмінну від нуля, але складається з подій, що мають ймовірність нуль? Як це? Як правило складання?

<u>Відповідь:</u> Площа фігури, що складається з точок, площа точки = 0, а фігури – ні.

<u>Def Ідентифікатор події А </u>– випадкова величина V , що дорівнює одиниці, якщо в результаті досвіду подія А відбулася, і 0 – якщо А не відбулося.
Р – ймовірність події А
Ряд розподілу V

0	1
1-p	1





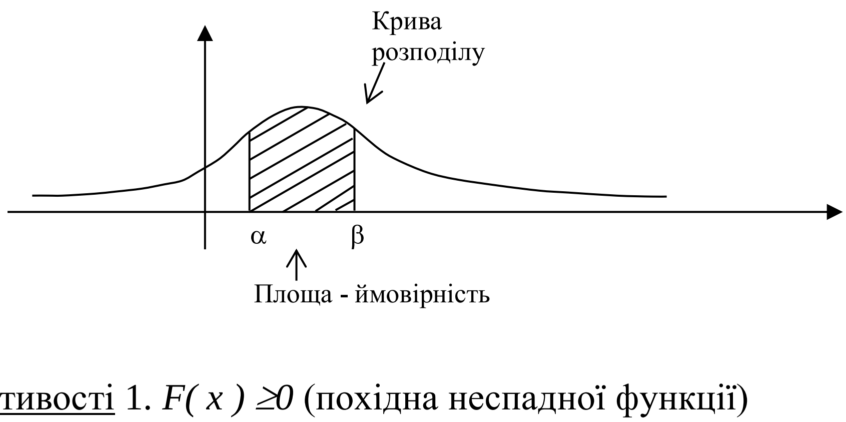
Як оцінити ймовірність окремої події для дискретної випадкової величини?
<u>Def.</u> Недискретна випадкова величина неперервна, якщо її функція розподілу неперервна та диференційована в ∀ точці.

3. Щільність розподілу випадкової величини.

<u>Def</u> <u>Щільність розподілу </u>(щільність ймовірності або диференціальна функція розподілу) безперервної випадкової величини X у точці x – похідна її функції розподілу у цій точці;

$$f(x) = F'(x) = \frac{d}{dx} F(x);$$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt \quad P\{\alpha < x < \beta\} = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx; \qquad \int_{\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$$



<u>Властивості</u> 1. *F(x) ≥0* (похідна неспадної функції)

2. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$

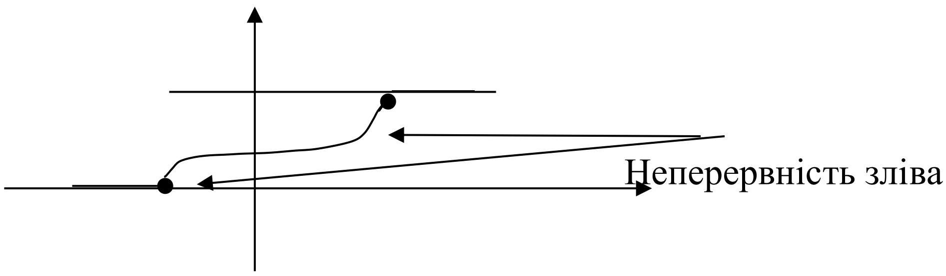
<u>Def.</u> *P(A /x)* – умовна ймовірність події *A* при *X = x*
<u>Th </u>Інтегральна формула повної ймовірності:

$$P(A)=\int_{-\infty}^{\infty}P(A|x)f(x)dx$$

Def $f_A(x)$ – щільність розподілу випадкової величини X за умови появи події A
Th Інтегральна формула Байєса

$$f_A(x)=\frac{f(x)\cdot P(A|x)}{P(A)}$$

Def Змішана випадкова величина – випадкова величина, функція розподілу якої безперервна на ділянках, крім окремих точок.



4. Способи завдання випадкової величини

Початок . Що треба для того, щоб поставити випадкову величину
а) набір можливих значень
б) ймовірності їх появи

Це закон розподілу – він ставить відповідність між можливими значеннями та його ймовірностями.

Три види завдання: 1) табличний;
2) аналітичний;
3) графічний.

Способи завдання дискретних та безперервних величин різні:
– дискретні: орієнтуємось на значення
– неперервні: орієнтуємося на інтервали значень.

Розглянемо перший вид завдання (табличний).

Для дискретної – звичайний, для безперервної – зазвичай немає (практично неприйнятний). При ньому перший рядок містить весь набір значень, а другий – відповідні ймовірності.

Для неперервної випадкової величини ряд і багатокутник розподілу у загальному випадку побудувати не можна. Можна область значень X розбити на рівні інтервали, в яких визначити ймовірності середніх значень (дискретизувати неперервну випадкову величину).

5. Побудова функції розподілу ймовірностей випадкової величини

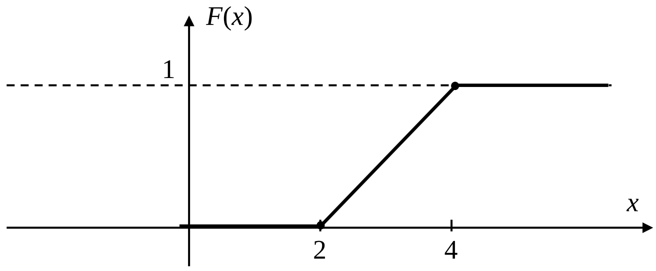
Функція розподілу (інтегральна функція розподілу) – універсальна характеристика випадкової величини. Вона підходить як для дискретної випадкової величини, так і для неперервної випадкової величини.

Її сенс – показати характер "накопичення" ймовірності:

$$F(x) = P(X < x)$$

Для неперервної ВВ графік функції розподілу – неперервна неспадаюча лінія в смузі від 0 до 1, наприклад:

Приклад . $F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 2 \\ \frac{x}{2} - 1, & 2 < x \le 4 \\ 1, & x > 4 \end{cases}$



Знання функції розподілу допомагає швидко знаходити ймовірності попадань значень у заданий інтервал, особливо для неперервних випадкових величин:

$$P(2{,}5 < x < 3{,}5) = F(3{,}5) - F(2{,}5) = \left(\frac{7}{4} - 1\right) - \left(\frac{5}{4-1}\right) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

6. Побудова функції щільності розподілу ймовірностей неперервної випадкової величини

Функція розподілу не наочна, а ряд розподілу дискретної випадкової величини – не найзручніший спосіб завдання ВВ. Виявилося, що наочніше для неперервної ВВ функція щільності розподілу ймовірностей (диференціальна функція розподілу):

$$f(x) = F'(x)$$

Для дискретної ВВ – не застосовується (там нульова функція зі стрибками).

Приклад . $f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0, & x \notin (2{,}4) \\ 1/2, & x \in (2{,}4) \end{cases}$