Санкт - Петербургский государственный университет
Математико - механический факультет

Отчёт по практике №6

Решения краевой задачи для ОДУ второго порядка сеточным методом

Выполнила: Карасева У.П.
451 группа

Санкт - Петербург
2020

Постановка задачи

Решаем обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка сеточным методом. Для определённости возьмём уравнение струны:

$$u_{xx}(x) + q(x) \cdot u_x(x) + r(x) \cdot u(x) = f(x) \tag{1}$$

и следующую краевую задачу:

$$\begin{cases} \alpha_1 \cdot u(a) - \alpha_2 \cdot u'(a) = \alpha_3,\ |\alpha_1| + |\alpha_2| \neq 0,\ \alpha_1 \cdot \alpha_2 \geq 0 \\ \beta_1 \cdot u(b) + \beta_2 \cdot u'(b) = \beta_3,\ |\beta_1| + |\beta_2| \neq 0,\ \beta_1 \cdot \beta_2 \geq 0 \end{cases} \tag{2}$$

Имеем следующие ограничения: $q, r, f \in C^2[a,b],\ r(x) \geq m > 0,\ h \cdot \underset{x\in[a,b]}{max}|q(x)| \neq 2$. Эти ограничения не являются необходимым условием сходимости и разностное решение может существовать и сходится к точному, даже при нарушении этих условий.

Сеточный метод

Имеем равномерную сетку $x_n = a + n \cdot h, 0 \leq n \leq N$. Заменим производные с помощью симметричных разностных схем, в итоге придём к следующей системе:

$$\frac{1}{h^2}(u_{n+1} - 2 \cdot u_n + u_{n-1}) + \frac{q_n}{2 \cdot h}(u_{n+1} - u_{n-1}) - r_n \cdot u_n = f_n,\ n = 1,\ ...,\ N-1 \tag{3}$$

Здесь q_n, r_n, f_n — значения соответствующих функций в точке x_n.

Так как данные соотношения можно записать только для внутренних узлов сетки, имеем $N-1$ уравнение с $N+1$ неизвестной. Дополним эту систему граничными условиями (2), в которых первую производную будем заменять следующими разностными формулами:

$$\begin{aligned} u_0' &\approx (-\frac{3}{2}u_0 + 2u_1 - \frac{1}{2}u_2)/h \\ u_N' &\approx (\frac{3}{2}u_N - 2u_{N-1} + \frac{1}{2}u_{N-2})/h \end{aligned} \tag{4}$$

После этого составим матрицу A с помощью (3) и (4), в которую будут входить коэффициенты перед соответствующим u_i. Тогда для нахождение решения нужно решить систему $A\mathbf{u} = \mathbf{b}$, где $\mathbf{b} = (\alpha_3, f_1, ...f_{N-1}, \beta_3)^T$.

Главной проблемой метода является построение правильной разностной схемы, которая будет сходиться к решению. Построение схемы выполняется исходя из свойств исходного дифференциального оператора.

Для простых задач построение разностной схемы выполняется быстрее, чем в методе конечных элементов.

К достоинствам метода конечных разностей следует отнести его высокую универсальность, например, значительно более высокую, чем у аналитических методов. Применение этого метода нередко характеризуется относительной простотой построения решающего алгоритма и его программной реализации. Зачастую удается осуществить распараллеливание решающего алгоритма.

К числу недостатков метода следует отнести: проблематичность его использования на нерегулярных сетках; очень быстрый рост вычислительной трудоемкости при увеличении размерности задачи (увеличении числа неизвестных переменных); сложность аналитического исследования свойств разностной схемы.

Описание численного эксперимента

Начнём вычисление на грубой сетки из 10 интервалов, после чего, с помощью используемого ранее, метода Ричардсона будем сгущать сетку до необходимой точности. В качестве результата будем выводить количество итераций и график, на котором будут точное и численное решения.

Тесты

Тест 1

Решаем следующее уравнение:

$$\frac{d^2}{dt^2}\,u\left(t\right) - \left(\frac{t}{2}+1\right)\left(t-3\right)\frac{d}{dt}\,u\left(t\right) - \mathrm{e}^{t/2}\,u\left(t\right)\,\left(t-3\right) = \left(t-2\right)\left(t-3\right)$$

с краевыми условиями:

$$u\left(-1\right)=0,\ u\left(1\right)=0$$

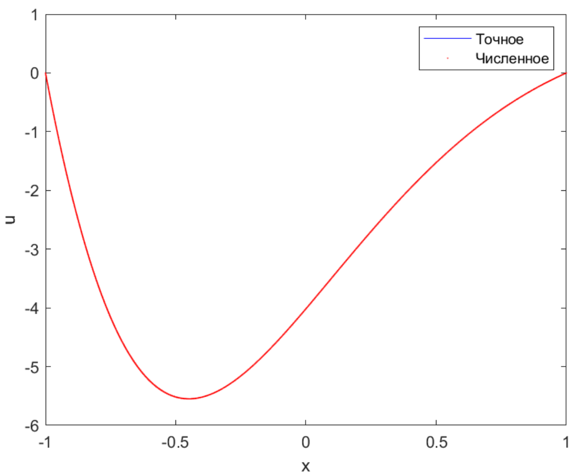

Рис. 1: График точного и численного решений

При заданной точности 1e-6, количество итераций равно 11, а погрешность равна 2.92e-7

Время выполнения точного решения: 0.33 сек

Время выполнения численного решения: 3.33 сек

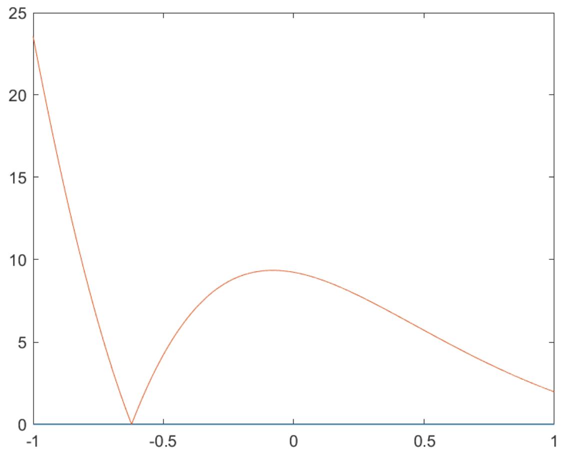

Рис. 2: Отклонение численного решения от точного

Тест 2

Решаем следующее уравнение:

$$\frac{d^2}{dt^2}\,u\left(t\right)-\frac{u\left(t\right)\,\left(2\,t+5\right)\,\left(\mathrm{e}^{t/2}+1\right)}{t+4}-\frac{\left(\frac{t}{2}+1\right)\left(2\,t+5\right)\frac{d}{dt}\,u\left(t\right)}{t+4}=-\frac{\left(2\,t+5\right)\left(t+2\right)}{t+4}$$

с краевыми условиями:

$$\frac{u\left(-1\right)}{2}-\left(\left(\frac{d}{dt}\,u\left(t\right)\right)\Bigg|_{t=-1}\right)=-\frac{1}{5},\;\frac{3\,u\left(1\right)}{10}+\left(\left(\frac{d}{dt}\,u\left(t\right)\right)\Bigg|_{t=1}\right)=-\frac{3}{10}$$

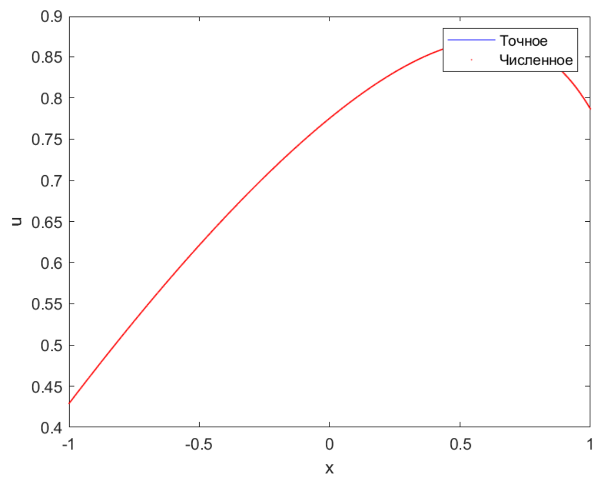

Рис. 3: График точного и численного решений

При заданной точности 1e-6, количество итераций равно 9, а погрешность равна 4.92e-7

Время выполнения точного решения: 0.16 сек

Время выполнения численного решения: 0.43 сек

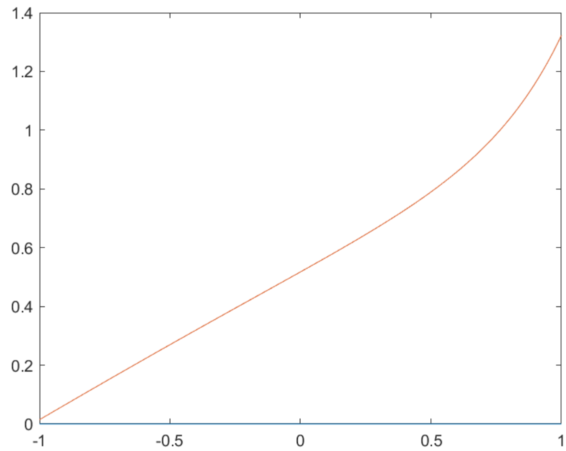

Рис. 4: Отклонение численного решения от точного

Тест 3

Решаем следующее уравнение:

$$\frac{d^2}{dt^2}\,u\,(t) - \frac{u\,(t)\,\,(3\,t+7)\left(\frac{\cos(t)}{2}+1\right)}{t+6} - \frac{\left(\frac{t}{2}-1\right)(3\,t+7)\,\frac{d}{dt}\,u\,(t)}{t+6} = \frac{\left(\frac{t}{3}-1\right)(3\,t+7)}{t+6}$$

с краевыми условиями:

$$\left(\left(\frac{d}{dt}\,u\,(t)\right)\bigg|_{t=-1}\right) - 2\,u\,(-1) = 0,\ \left(\left(\frac{d}{dt}\,u\,(t)\right)\bigg|_{t=1}\right) = 0$$

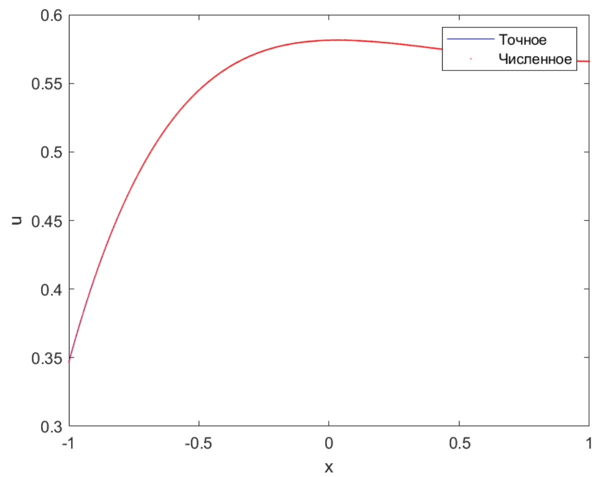

Рис. 5: График точного и численного решений

При заданной точности 1e-6, количество итераций равно 8, а погрешность равна 4.15e-7

Время выполнения точного решения: 0.11 сек

Время выполнения численного решения: 0.09 сек

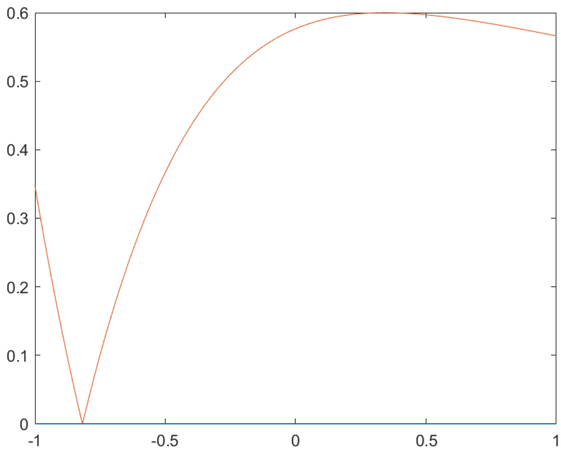

Рис. 6: Отклонение численного решения от точного

Вывод

Из графиков видно, что численное решение практически совпадает с точным, погрешность во всех тестах был порядка 10e-7. При этом такая точность достигается при довольно небольших количествах итераций.