Санкт - Петербургский государственный университет
Математико - механический факультет

Отчёт по практике №4

Поиск собственных значений методом Якоби

Выполнила: Карасева У.П.
451 группа

Санкт - Петербург
2020

1 Постановка задачи

Хотим найти собственные значения матрицы A. Нахождение характеристического многочлена и его корней может оказаться достаточно трудоемким. Для нахождения собственных значений в случае, когда матрица A – эрмитова, можно воспользоваться методом вращений Якоби.

2 Метод вращений Якоби

Так как преобразование подобия не меняет спектра матрицы, тогда можно A свести к диагональному виду при помощи унитарной матрицы V

$$V^T A V = \Lambda \tag{1}$$

Пусть A – вещественная симметричная матрица. Метод заключается в построении последовательности матриц A^k так, чтобы максимально приблизиться к Λ. Построение последовательности происходит следующим образом

$$A^{(k+1)} = V_{i_k j_k}^{(T)}(\varphi_k) A V_{i_k j_k}(\varphi_k) \tag{2}$$

Матрица поворота задается следующим образом

$$V = \begin{pmatrix}
1 & & & & & & & & & & \\
& \ddots & & & & & & & & & \\
& & 1 & & & & & & & & \\
& & & \cos\varphi_k & & & & -\sin\varphi_k & & & \\
& & & & 1 & & & & & & \\
& & & & & \ddots & & & & & \\
& & & & & & 1 & & & & \\
& & & \sin\varphi_k & & & & \cos\varphi_k & & & \\
& & & & & & & & 1 & & \\
& & & & & & & & & \ddots & \\
& & & & & & & & & & 1
\end{pmatrix} \tag{3}$$

Приводить матрицу к диагональному виду можно несколькими способами. Мы рассмотрим вариант поиска максимального по модулю наддиаганального элемента матрицы и циклический выбор.

Угол φ_k выбирается по правилу

$$a_{i_k j_k}^{(k+1)} = \frac{a_{j_k j_k}^{(k)} - a_{i_k i_k}^{(k)}}{2} sin(2\varphi) + a_{i_k j_k}^{(k)} cos(2\varphi) = 0 \tag{4}$$

Где i_k и j_k определяются из выбранного максимального по модулю, либо циклически взятого элемента матрицы. После чего вычисляются интересующие нас $cos(\varphi_k)$ и $sin(\varphi_k)$.

Основное достоинство метода Якоби заключается в том, что при выполнении каждого плоского вращения уменьшается сумма квадратов внедиагональных элементов; сходимость этой суммы к нулю по мере увеличения числа шагов гарантирует сходимость процесса диагонализации. Существует большое количество численных схем, связанных с реализацией этого метода.

В современном виде это один из наиболее развитых и эффективных по реализации на ЭВМ методов решения полной проблемы собственных значений матрицы.

Метод Якоби является самым медленным из имеющихся алгоритмов вычисления собственных значений симметричной матрицы. Тем не менее, он способен вычислять малые собственные числа и отвечающие им собственные векторы с гораздо большей точностью, чем другие методы. Кроме того, он не предполагает первоначального приведения матрицы к трехдиагональной форме.

3 Описание численного эксперимента

Берем симметричную вещественную матрицу и ищем ее собственные числа при помощи метода вращений Якоби, реализованного двумя способами обнуления наддиагональных элементов. Так же смотрим на полученные точным методом истинные собственные значения. Не забываем следить за количеством итераций метода Якоби. Выберем точность $1e^{-9}$ для всех тестов.

4 Тесты

4.1 Тест 1

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2.5 & 3 \\ 2.5 & 8 & 0.1 \\ 3 & 0.1 & 15 \end{pmatrix} \tag{5}$$

Точный метод дает следующие собственные числа

$$\lambda = \begin{pmatrix} -0.326219118500917 \\ 8.660887922484394 \\ 15.665331196016522 \end{pmatrix} \tag{6}$$

Метод Якоби в варианте с обнулением максимального по модулю недиагонального элемента срабатывает за 7 итераций и дает следующие с.ч.

$$\lambda = \begin{pmatrix} -0.326219118501438 \\ 8.660887922484395 \\ 15.665331196016512 \end{pmatrix} \tag{7}$$

Метод Якоби в варианте с циклическим обнулением недиагональных элементов срабатывает за 9 итераций и дает следующие с.ч.

$$\lambda = \begin{pmatrix} -0.326219118500916 \\ 8.660887922484392 \\ 15.665331196016520 \end{pmatrix} \quad (8)$$

4.2 Тест 2

Возьмем матрицу Гильберта размерностью 5×5
Точный метод дает следующие собственные числа

$$\lambda = \begin{pmatrix} 0.000003287928772 \\ 0.000305898040151 \\ 0.011407491623420 \\ 0.208534218611013 \\ 1.567050691098231 \end{pmatrix} \quad (9)$$

Метод Якоби в варианте с обнулением максимального по модулю недиагонального элемента срабатывает за 29 итераций и дает следующие с.ч.

$$\lambda = \begin{pmatrix} 1.567050691076490 \\ 0.208534218611739 \\ 0.000305920414789 \\ 0.000003287888411 \\ 0.011407491623420 \end{pmatrix} \quad (10)$$

Метод Якоби в варианте с циклическим обнулением недиагональных элементов срабатывает за 30 итерации и дает следующие с.ч.

$$\lambda = \begin{pmatrix} 1.567050691099370 \\ 0.208534218527412 \\ 0.000003287928963 \\ 0.011407491623420 \\ 0.000305898040151 \end{pmatrix} \quad (11)$$

5 Вывод

По полученным результатам можно сделать вывод, что метод вращений Якоби достаточно точно приводит матрицу к диагональному виду, а обнуление посредством выбора максимального по модулю недиагонального элемента срабатывает за меньшее количество итераций. Различия в полученных данных, в том числе с точным методом, начинаются после 12-го знака после запятой.