

Санкт - Петербургский государственный университет  
Математико - механический факультет

Отчёт по практике №8

**Сеточные методы для задачи теплопроводности.**

Выполнила: Карасева У.П.  
451 группа

# Постановка задачи

Рассмотрим простейший случай уравнения теплопроводности:

$$u_t(x, t) = ku_{xx}(x, t) + f(x, t), \quad (1)$$

где  $k$  — положительная константа, а  $x \in (0, a), t \in (0, T)$ .

В качестве дополнительных условий зададим одно начальное и два граничных:

$$\begin{aligned} u(x, 0) = \mu(x), \quad x \in [0, a]; \\ u(0, t) = \mu_1(t) \\ u(a, t) = \mu_2(t) \end{aligned} \quad t \in [0, T].$$

Решать эту задачу будем двумя сеточными методами явным и неявным.

## Преобразование для применения двухслойных схем

Можно преобразовать (1) в  $\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \Lambda\mathbf{u} + \mathbf{f}$ , где  $\Lambda$  — трёхдиагональная матрица с элементами:  $a_{ii} = -\frac{2k}{h^2}, a_{i,i\pm 1} = \frac{k}{h^2}, i = 1, \dots, n-1, n$  — количество узлов координатной сетки.

Теперь можно найти решение на следующем узле временной сетки  $\hat{\mathbf{u}}$  через известное решение на текущем узле временной сетке  $\mathbf{u}$  с помощью одностадийной схемы Розенброка.

$$(E - \sigma\tau\Lambda)\mathbf{w} = \Lambda\mathbf{u} + \mathbf{f} \quad (2)$$

После решения системы относительно  $\mathbf{w}$  и записывается  $\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{u} + \tau Re(\mathbf{w})$ .

## Явная схема

Один из примеров явной схемы — это схема Розенброка с  $\sigma = 0$ . Традиционная формула записи имеет следующий вид:

$$\frac{\hat{u}_n - u_n}{\tau} = \frac{k}{h^2}(u_{n-1} - 2u_n + u_{n+1}) + f(x_n, \hat{t}); \quad (3)$$

Данная схема является условно устойчивой с условием на шаг:  $2k\tau \leq h^2$ . То есть данная схема не пригодна для вычислений на больших временных интервалах.

## Неявная схема

Для получения неявной схемы нужно взять  $\sigma = \frac{1+i}{2}$ . Такая схема называется комплексной схемой Розенброка. В первом отчёте мы уже разбирали принцип её работы, поэтому остановимся на её свойствах. Эта схема;

- Безусловно устойчива по начальным данным

- Устойчива равномерно
- Устойчива по правой части
- Имеет полную погрешность аппроксимации  $O(\tau^2 + h^2)$
- Асимптотически безусловно устойчива

Эта схема имеет значительные вычислительные достоинства: аппроксимация 2-го порядка и L2-устойчивость, что особенно ценно для нелинейных задач, т. к. позволяет избежать итерационных процедур при переходе на следующий временной слой.

## Проведение численного эксперимента

Будем брать решение  $u(x, t)$  подставляя его в 1, начальное и краевые условия, чтобы получить функции  $f, \mu, \mu_1, \mu_2$ . В качестве результата, будем засекают время работы программ и выводить графики отклонения от точного решения и дополнительно посмотрим, что будет выдавать явный метод при не соблюдении условия устойчивости. Во всех тестах  $a = 1, T = 0.5, h = 0.01$ .

## Тесты

### Тест 1

В этом тесте возьмём решение  $u(x, t) = x^3 + t^3$ . Тогда:

$$f(x, t) = 3t^2 - 6x; \mu(x) = x^3; \mu_1(x) = t^3; \mu_2(x) = 1 + t^3; \quad (4)$$

При  $\tau = \frac{h^2}{2k}$  работающий 0.87 секунд явный метод имеет максимальное отклонение равное  $7.44e-6$ , а неявный, работающий 3.26 секунд, имеет максимальное отклонение равное  $2.85e-5$ .

При  $\tau = 10^{-3}$  (не удовлетворяющее условиям устойчивости) работающий 0.7 секунд явный метод расходится, а неявный, работающий 0.3 секунд, имеет максимальное отклонение равное  $8.03e-4$ .

### Тест 2

В этом тесте возьмём решение  $u(x, t) = \sin(2t + 1) \cos(2x)$ . Тогда:

$$\begin{aligned} f(x, t) &= 2 \cos(2x) (\cos(2t + 1) + 2 \sin(2t + 1)); \\ \mu(x) &= \sin(1) \cos(2x); \mu_1(x) = \sin(2t + 1); \mu_2(x) = \sin(2t + 1) \cos(2a); \end{aligned} \quad (5)$$

При  $\tau = \frac{h^2}{2k}$  работающий 0.32 секунд явный метод имеет максимальное отклонение равное  $9.34e-6$ , а неявный, работающий 3.7 секунд, имеет максимальное отклонение равное  $5.01e-5$ .

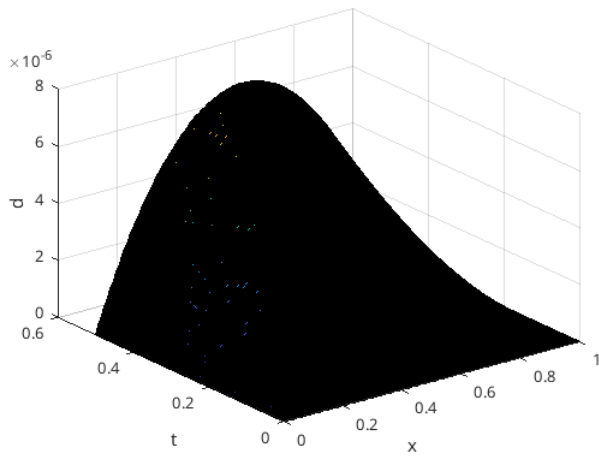


Рис. 1: График отклонения для явного метода

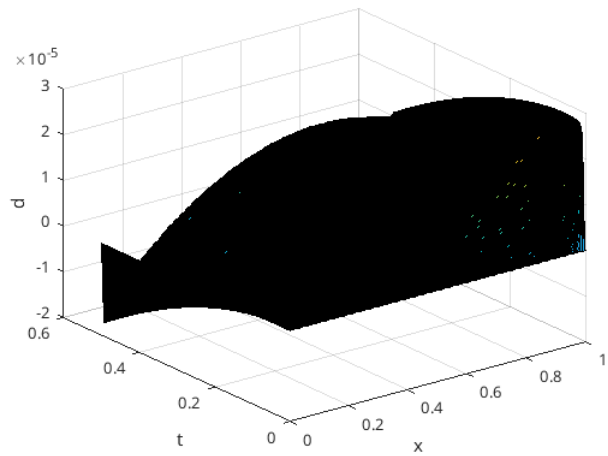


Рис. 2: График отклонения для неявного метода

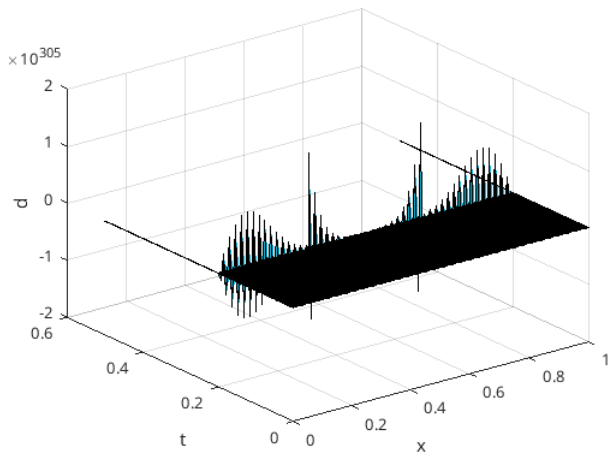


Рис. 3: График отклонения для явного метода

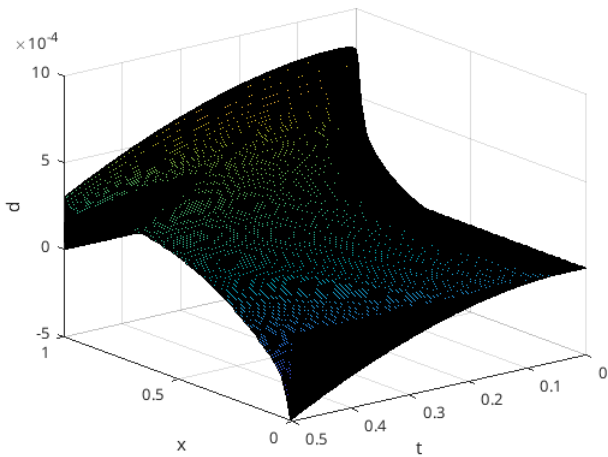


Рис. 4: График отклонения для неявного метода

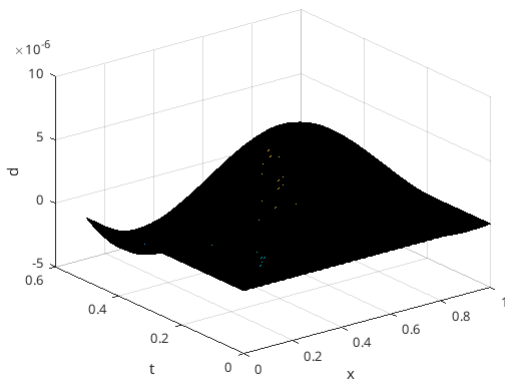


Рис. 5: График отклонения для явного метода

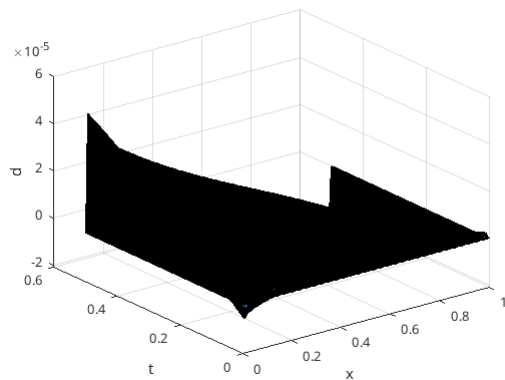


Рис. 6: График отклонения для неявного метода

При  $\tau = 10^{-3}$  (не удовлетворяющее условиям устойчивости) работающий 0.04 секунд явный метод расходится, а неявный, работающий 0.48 секунд, имеет максимальное отклонение равное  $1.4 \times 10^{-3}$ .

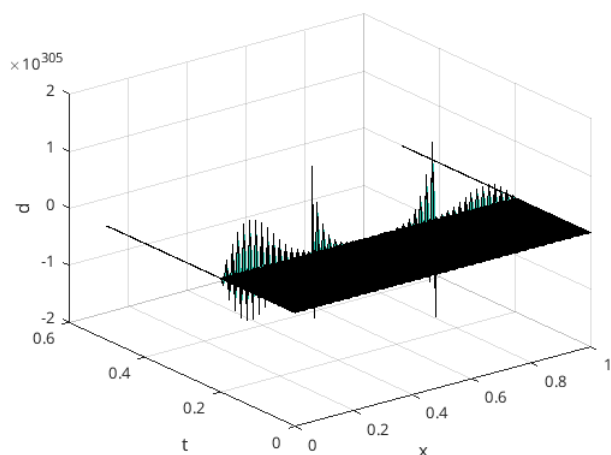


Рис. 7: График отклонения для явного метода

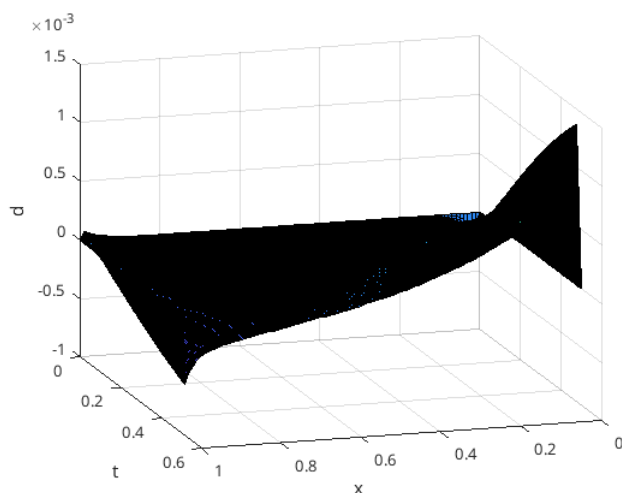


Рис. 8: График отклонения для неявного метода

## Вывод

Из данных тестов можно сделать вывод, что при не выполнении условий устойчивости, решение, полученное явным методом, уходит на бесконечность. Также в тестах заметно, что решение, полученное неявным методом, менее точное, в сравнении с явной схемой. Это связано с тем, что при ненулевых граничных условиях точность неявной схемы уменьшается.