Санкт - Петербургский государственный университет
Математико - механический факультет

Отчёт по практике №3

Решение СЛАУ численными методами.

Выполнила: Карасева У.П.
451 группа

Санкт - Петербург
2020

Постановка задачи

Будем решать СЛАУ $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ численными методами, а именно методом простой итерации и методом Зейделя.

Метод простой итерации

В векторном виде расчётная формула имеет следующий вид:

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = H\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{g} \tag{1}$$

Необходимое и достаточное условие сходимости: спектральный радиус матрицы H < 1.

Метод Зейделя

Если представить матрицу H в виде $H = H_L + H_R$, где:

$$H_L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ h_{21} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_{n1} & h_{n2} & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad H_R = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} & \dots & h_{1n} \\ 0 & h_{22} & \dots & h_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & h_{nn} \end{pmatrix} \tag{2}$$

Тогда можем прийти к следующей формуле:

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = (E - H_L)^{-1} H_R \mathbf{x}^{(k)} + (E - H_L)^{-1}\mathbf{g} \tag{3}$$

Достаточное условие сходимости: $||H||_\infty < 1$. $||H||_\infty$ — максимальный элемент матрицы H.

Переход от $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ к $\mathbf{x} = H\mathbf{x} + \mathbf{g}$

Если матрица A имеет диагональное преобладание, то:

$$H = E - D^{-1}A, \quad \mathbf{g} = D^{-1}\mathbf{b} \tag{4}$$

где D — диагональная матрица, у которой на диагонали стоя диагональные элементы матрицы A.

Описание численного эксперимента

Будем брать СЛАУ уравнений и смотреть сколько итераций потребуется методам, для достижения заданной точности.

Тесты

Тест 1

В этом тесте возьмём следующие матрицу A и вектор $\mathbf{b}$:

$$H_L = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.02 & 0.03 \\ 0.04 & 0.5 & 0.06 \\ 0.07 & 0.08 & 0.9 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{5}$$

Заданная точность была равна 1e-12. При этой точности методам потребовалось 23 и 10 итераций для метода простой итерации и метода Зейделя, соответственно. Отличия в полученных решениях начинаются после 11 знака после запятой.

Тест 2

В этом тесте рассмотрим разреженную матрицу S размерностью 50×50, имеющую следующую структуру(компоненты матрицы имеет случайные значения из промежутка $(0, 1)$, но при этом матрица симметричная):

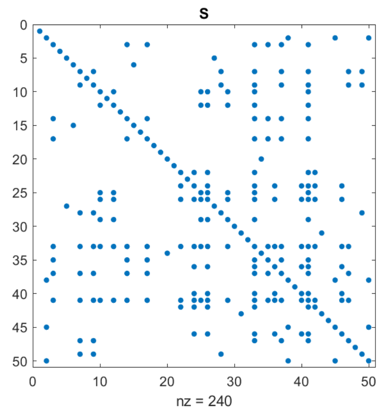

Рис. 1: Ненулевые значения матрицы S

Вектор $\mathbf{b}$ имеет такой же вид, как и в предыдущем тесте (5).

Количество итераций, которое потребовалась методам при заданной точности 1e-12, 59 и 30 для метода простой итерации и метода Зейделя, соответственно.

Тест 3

В этом тесте рассмотрим матрицу Гильберта размерностью 10×10, а вектор $\mathbf{b} = H\mathbf{e}$, где $\mathbf{e}$ состоит из единиц и имеет размерность 1×10.

В этом случае метод простой итерации не сходится, т.к. не выполняется условие сходимости.

Однако метод Зейделя при заданной точности 1e-12 сходится за 110650754 итераций, а норма вектора погрешности равна 2.71e-4.

Вывод

Данные тесты показывают, что у метода Зейделя область и скорость сходимости больше, чем у метода простой итерации. Так же при рассмотрении матрицы Гильберта, при маленькой заданной точности, метод Зейделя сходится лучше к решению, чем метод простых итераций.