Санкт - Петербургский государственный университет
Математико - механический факультет

Отчёт по практике №3

Решение СЛАУ численными методами.

Выполнила: Карасева У.П.
451 группа

Санкт - Петербург
2020

Постановка задачи

Будем решать СЛАУ $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ численными методами, а именно методом простой итерации и методом Зейделя.

Метод простой итерации

В векторном виде расчётная формула имеет следующий вид:

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = H\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{g} \tag{1}$$

Необходимое и достаточное условие сходимости: спектральный радиус матрицы H < 1.

Простота метода простой итерации делает его привлекательным, однако не следует забывать, что и этому методу присущи недостатки, так как он не всегда обеспечивает сходимость. Поэтому для любой программы, в которой используется этот алгоритм, необходимо предусматривать контроль сходимости и прекращать счет, если сходимость не обеспечивается. Сходимость же всегда можно обеспечить выполнением условия устойчивости. Метод простой итерации обладает наибольшей экономичностью по затратам машинного времени на одну итерацию и оперативной памяти ЭВМ в сравнении с другими методами. Однако эффективность его зависит от обусловленности системы алгебраических уравнений. При плохой обусловленности необходимо применять различные способы ускорения сходимости итераций. Достоинством метода простой итерации является возможность решения с его помощью различного рода нелинейных задач, возникающих в теории резонаторов и приводящих к нелинейным интегральным уравнениям.

Метод Зейделя

Если представить матрицу H в виде $H = H_L + H_R$, где:

$$H_L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ h_{21} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_{n1} & h_{n2} & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad H_R = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} & \dots & h_{1n} \\ 0 & h_{22} & \dots & h_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & h_{nn} \end{pmatrix} \tag{2}$$

Тогда можем прийти к следующей формуле:

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = (E - H_L)^{-1} H_R \mathbf{x}^{(k)} + (E - H_L)^{-1}\mathbf{g} \tag{3}$$

Достаточное условие сходимости: $||H||_\infty < 1$. $||H||_\infty$ — максимальный элемент матрицы H.

Метод Зейделя сходится быстрее явного метода простой итерации. Процесс Зейделя может сходиться даже в том случае, если расходится процесс итерации. Кроме того, метод Зейделя требует несколько меньшей памяти, чем простая итерация, так как необходимо помнить только один вектор переменных. Данный метод широко используется для расчетов установившегося режима электрических систем.

Переход от $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ к $\mathbf{x} = H\mathbf{x} + \mathbf{g}$

Если матрица А имеет диагональное преобладание, то:

$$H = E - D^{-1}A, \quad \mathbf{g} = D^{-1}\mathbf{b} \tag{4}$$

где D — диагональная матрица, у которой на диагонали стоя диагональные элементы матрицы A.

Описание численного эксперимента

Будем брать СЛАУ уравнений и смотреть сколько итераций потребуется методам, для достижения заданной точности.

Тесты

Тест 1

В этом тесте возьмём следующие матрицу A и вектор $\mathbf{b}$:

$$H_L = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.02 & 0.03 \\ 0.04 & 0.5 & 0.06 \\ 0.07 & 0.08 & 0.9 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{5}$$

Заданная точность была равна 1e-12. При этой точности методам потребовалось 23 и 10 итераций для метода простой итерации и метода Зейделя, соответственно. Отличия в полученных решениях начинаются после 11 знака после запятой.

Тест 2

В этом тесте рассмотрим разреженную матрицу S размерностью 50×50, имеющую следующую структуру(компоненты матрицы имеет случайные значения из промежутка $(0, 1)$, но при этом матрица симметричная):

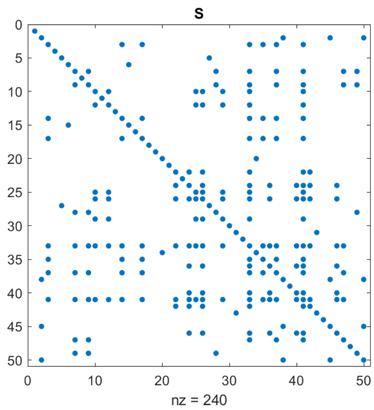

Рис. 1: Ненулевые значения матрицы S

Вектор $\mathbf{b}$ имеет такой же вид, как и в предыдущем тесте (5).

Количество итераций, которое потребовалась методам при заданной точности 1e-12, 59 и 30 для метода простой итерации и метода Зейделя, соответственно.

Тест 3

В этом тесте рассмотрим матрицу Гильберта размерностью 10×10, а вектор $\mathbf{b} = H\mathbf{e}$, где $\mathbf{e}$ состоит из единиц и имеет размерность 1×10.

В этом случае метод простой итерации не сходится, т.к. не выполняется условие сходимости.

Однако метод Зейделя при заданной точности 1e-12 сходится за 110650754 итераций, а норма вектора погрешности равна 2.71e-4.

Вывод

Данные тесты показывают, что у метода Зейделя область и скорость сходимости больше, чем у метода простой итерации. Так же при рассмотрении матрицы Гильберта, при маленькой заданной точности, метод Зейделя сходится лучше к решению, чем метод простых итераций.