Санкт - Петербургский государственный университет
Математико - механический факультет

Отчёт по практике №2

Решение СЛАУ точными методами.

Выполнила: Карасева У.П.
451 группа

Санкт - Петербург
2020

Постановка задачи

Будем решать СЛАУ $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ точными методами, а именно LU – разложением и QR – разложением.

LU – разложение

Этот метод заключается в разложении $A = LU$, где L — нижняя треугольная матрица с единицами на диагонали, а U — верхняя треугольная матрица.

Задаём дополнительную матрицу M_i, в которой i-ый столбец задаётся следующим образом: $(0,\ \dots\ , \underset{i\text{-ая строка}}{1}, -\mu_{i+1,i},\ \dots\ , -\mu_{n,i})^T$, где $\mu_{i,j} = \frac{a_{i,j}}{a_{j,j}}$. На диагонали этой матрицы стоят единицы.

Тогда при вычислении всех M_i можем найти:

$$U = M_{n-1} \cdot\ \dots\ \cdot M_1 \cdot A; \qquad L = M_1^{-1} \cdot\ \dots\ \cdot M_{n-1}^{-1} \tag{1}$$

Основные применения данного алгоритма — решение систем алгебраических уравнений, вычисление определителя, вычисление обратной матрицы и др. Однажды найдя LU-разложение для матрицы мы можем очень быстро решать системы линейных алгебраических уравнений с различной правой частью.

QR – разложение

Этот метод также заключается в разложении матрицы $A = QR$, но в данном случае Q — ортогональная матрица, а R — верхняя треугольная. В отличии от предыдущего метода, в данном случае число обусловленности не будет расти. Есть несколько способов произвести QR разложение. Мы рассмотрим метод вращений.

Будем выполнять элементарные повороты, заданные следующей матрицей:

$$T_{ij} = \begin{pmatrix}
1 & & & & & & & & & \\
 & \ddots & & & & & & & & \\
 & & 1 & & & & & & & \\
 & & & \cos\varphi_{i,j} & & & & -\sin\varphi_{i,j} & & \\
 & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & & \ddots & & & & \\
 & & & & & & 1 & & & \\
 & & & \sin\varphi_{i,j} & & & & \cos\varphi_{i,j} & & \\
 & & & & & & & & 1 & \\
 & & & & & & & & & \ddots \\
 & & & & & & & & & & 1
\end{pmatrix} \tag{2}$$

Здесь угол $\varphi_{i,j} = arctg\left(\frac{-A^{(k)}_{i,j}}{A^{(k)}_{j,j}}\right)$. $A^{(k)}$ — матрица, которую уже повернули k раз.

В итоге получаем следующие выражения для Q и R:

$$Q = T_{12}^{-1} \cdot\ \dots\ \cdot T_{1n}^{-1} \cdot T_{23}^{-1} \cdot\ \dots\ \cdot T_{2n}^{-1} \cdot\ \dots\ \cdot T_{n-2,n-1}^{-1} \cdot T_{n-2,n-1}^{-1} \cdot T_{n-1,n}^{-1}; \qquad R = Q^T \cdot A. \tag{3}$$

QR-разложение является основой одного из методов поиска собственных векторов и чисел матрицы — QR-алгоритма.

Описание численного эксперимента

Будем проверять методы на матрице Гильберта, которая является плохо обусловленной.

Возьмём $\mathbf{e} = (1, \ \dots \ , 1)^T$ и вычислим $\mathbf{b} = H\mathbf{e}$, после чего решим систему $H\mathbf{x} = \mathbf{b}$ LU и QR разложениями.

При решении LU – разложением, сначала решим дополнительную СЛАУ $L\mathbf{y} = \mathbf{b}$, после чего решим $U\mathbf{x} = \mathbf{y}$.

При решении QR – разложением решаем следующую систему $R\mathbf{x} = Q^T\mathbf{b}$.

В итоге, рассматриваем погрешность между решением системы и $\mathbf{e}$.

Дополнительно исследуем влияние параметра регуляризации α, при вводе которого появляется система:

$$(A + \alpha E)\mathbf{x} = \mathbf{b} + \alpha \mathbf{x}_0 \tag{4}$$

Здесь E — единичная матрица; а $\mathbf{x}_0$ — заданное значение, в нашем случае $\mathbf{x}_0 = \mathbf{e}$.

Тесты

Тест 1

Первый тест с матрицей Гильберта размерностью 15×15. Норма погрешностей 33 и $9e3$ для LU и QR разложений, соответственно.

При введении параметра регуляризации, получены следующие графики:

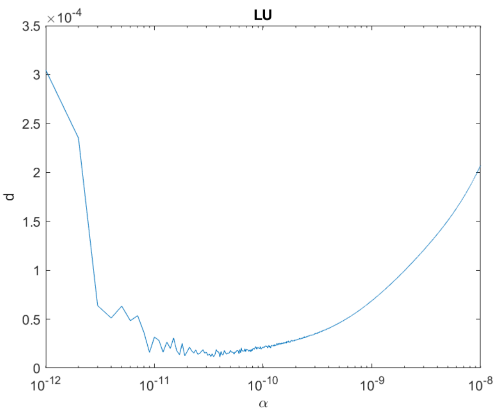

Рис. 1: Зависимость погрешности от α

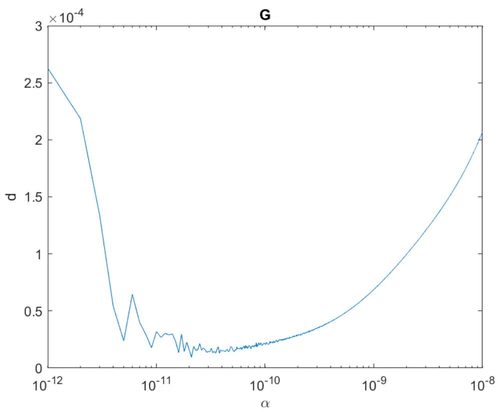

Рис. 2: Зависимость погрешности от α

Из графиков видно, что наименьшая погрешность $d = 9.38e\text{-}6$ достигается при $\alpha = 2.1e\text{-}11$ при решении с помощью QR – разложения, а при LU – разложении наименьшая погрешность $d = 1.13e\text{-}5$ достигается при $\alpha = 4e\text{-}11$.

Тест 2

Тест с матрицей Гильберта размерностью 20×20. Норма погрешностей $1.1e2$ и $9.52e5$ для LU и QR разложений, соответственно.

При введении параметра регуляризации, получены следующие графики:

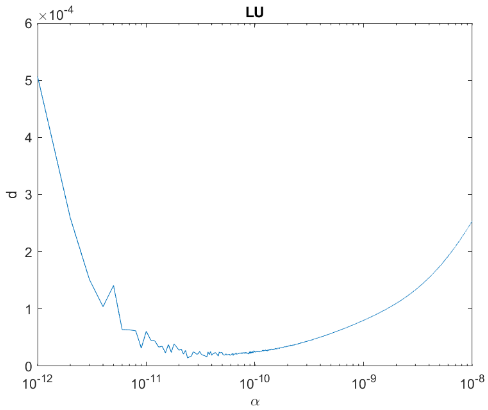

Рис. 3: Зависимость погрешности от α

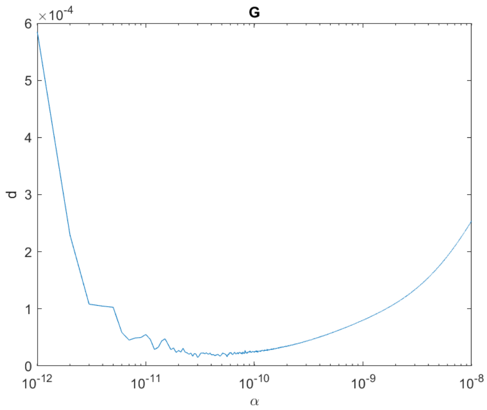

Рис. 4: Зависимость погрешности от α

Из графиков видно, что наименьшая погрешность $d = 1.49e\text{-}5$ достигается при $\alpha = 3e\text{-}11$ при решении с помощью QR – разложения, а при LU – разложении наименьшая погрешность $d = 1.43e\text{-}5$ достигается при $\alpha = 2.4e\text{-}11$.

Тест 3

Тест с матрицей Гильберта размерностью 25×25. Норма погрешностей $1.37e2$ и $8.31e5$ для LU и QR разложений, соответственно.

При введении параметра регуляризации, получены следующие графики:

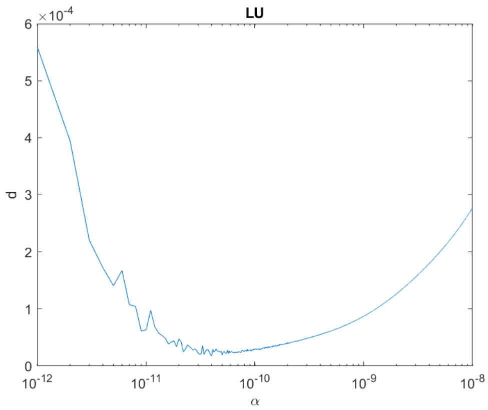

Рис. 5: Зависимость погрешности от α

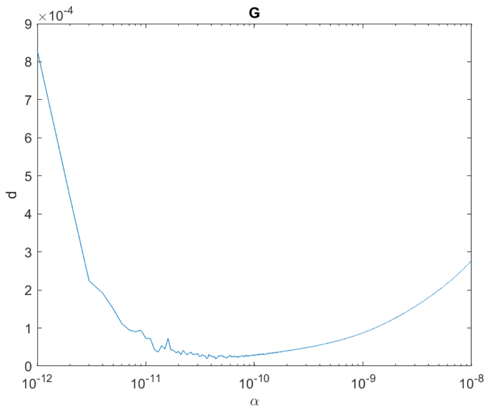

Рис. 6: Зависимость погрешности от α

Из графиков видно, что наименьшая погрешность $d = 1.88e\text{-}5$ достигается при $\alpha = 4.4e\text{-}11$ при решении с помощью QR – разложения, а при LU – разложении наименьшая погрешность $d = 1.77e\text{-}5$ достигается при $\alpha = 4e\text{-}11$.

Вывод

Первичные погрешности, полученные до введения параметра регуляризации, очень велики для LU и QR разложений. После введения параметра регуляризации задача становится лучше обусловлена и получается очень близкое решение - погрешность порядке 1e-5 при использовании LU и QR разложения.