Санкт - Петербургский государственный университет
Математико - механический факультет

Отчёт по практике №8

Сеточные методы для задачи теплопроводности.

Выполнила: Карасева У.П.
451 группа

Санкт - Петербург
2020

Постановка задачи

Рассмотрим простейший случай уравнения теплопроводности:

$$u_t(x,t) = ku_{xx}(x,t) + f(x,t), \tag{1}$$

где k — положительная константа, а $x \in (0,a), t \in (0,T)$.

В качестве дополнительных условий зададим одно начальное и два граничных:

$$u(x,0) = \mu(x),\ x \in [0,a]; \qquad \begin{matrix} u(0,t) = \mu_1(t) \\ u(a,t) = \mu_2(t) \end{matrix} \quad t \in [0,T].$$

Решать эту задачу будем двумя сеточными методами явным и неявным.

Преобразование для применения двухслойных схем

Можно преобразовать (1) в $\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \Lambda\mathbf{u} + \mathbf{f}$, где Λ — трёхдиагональная матрица с элементами: $a_{ii} = -\frac{2k}{h^2}, a_{i,i\pm1} = \frac{k}{h^2},\ i = 1,..n-1$, n — количество узлов координатной сетки.

Теперь можно найти решение на следующем узле временной сетки $\hat{\mathbf{u}}$ через известное решение на текущем узле временной сетке $\mathbf{u}$ с помощью одностадийной схемы Розенброка.

$$(E - \sigma\tau\Lambda)\mathbf{w} = \Lambda u + \mathbf{f} \tag{2}$$

После решения системы относительно $\mathbf{w}$ и записывается $\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{u} + \tau Re(\mathbf{w})$.

Явная схема

Один из примеров явной схемы — это схема Розенброка с $\sigma = 0$. Традиционная формула записи имеет следующий вид:

$$\frac{\hat{u_n} - u_n}{\tau} = \frac{k}{h^2}(u_{n-1} - 2u_n + u_{n+1}) + f(x_n, \hat{t}); \tag{3}$$

Данная схема является условно устойчивой с условием на шаг: $2k\tau \leq h^2$. То есть данная схема не пригодна для вычислений на больших временных интервалах.

Неявная схема

Для получения неявной схемы нужно взять $\sigma = \frac{1+i}{2}$. Такая схема называется комплексной схемой Розенброка. В первом отчёте мы уже разбирали принцип её работы, поэтому остановимся на её свойствах. Эта схема;

- Безусловно устойчива по начальным данным

- Устойчива равномерно
- Устойчива по правой части
- Имеет полную погрешность аппроксимации $O(\tau^2 + h^2)$
- Асимптотически безусловно устойчива

Эта схема имеет значительные вычислительные достоинства: аппроксимация 2-го порядка и L2-устойчивость, что особенно ценно для нелинейных задач, т. к. позволяет избежать итерационных процедур при переходе на следующий временной слой.

Проведение численного эксперимента

Будем брать решение $u(x,t)$ подставлять его в 1, начальное и краевые условия, чтобы получить функции f, μ, μ_1, μ_2. В качестве результата, будем засекать время работы программ и выводить графики отклонения от точного решения и дополнительно посмотрим, что будет выдавать явный метод при не соблюдении условия устойчивости. Во всех тестах $a = 1, T = 0.5, h = 0.01$.

Тесты

Тест 1

В этом тесте возьмём решение $u(x,t) = x^3 + t^3$. Тогда:

$$f(x,t) = 3t^2 - 6x;\ \mu(x) = x^3;\ \mu_1(x) = t^3;\ \mu_2(x) = 1 + t^3; \tag{4}$$

При $\tau = \frac{h^2}{2k}$ работающий 0.87 секунд явный метод имеет максимальное отклонение равное 7.44e-6, а неявный, работающий 3.26 секунд, имеет максимальное отклонение равное 2.85e-5.

При $\tau = 10^{-3}$(не удовлетворяющее условиям устойчивости) работающий 0.7 секунд явный метод расходится, а неявный, работающий 0.3 секунд, имеет максимальное отклонение равное 8.03e-4.

Тест 2

В этом тесте возьмём решение $u(x,t) = \sin(2t+1)\cos(2x)$. Тогда:

$$\begin{aligned} f(x,t) &= 2\cos(2x)(\cos(2t+1) + 2\sin(2t+1)); \\ \mu(x) &= \sin(1)\cos(2x);\ \mu_1(x) = \sin(2t+1);\ \mu_2(x) = \sin(2t+1)\cos(2a); \end{aligned} \tag{5}$$

При $\tau = \frac{h^2}{2k}$ работающий 0.32 секунд явный метод имеет максимальное отклонение равное 9.34e-6, а неявный, работающий 3.7 секунд, имеет максимальное отклонение равное 5.01e-5.

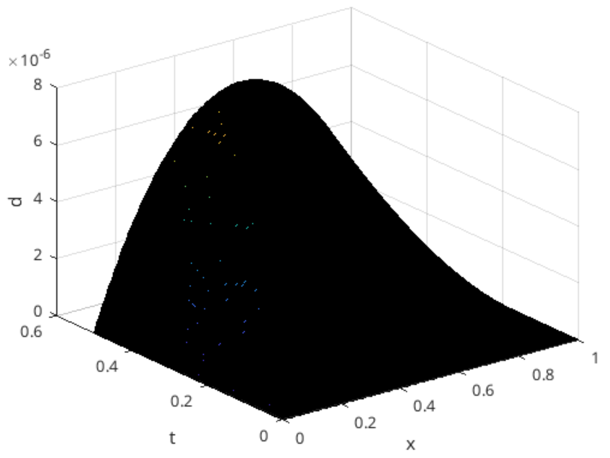

Рис. 1: График отклонения для явного метода

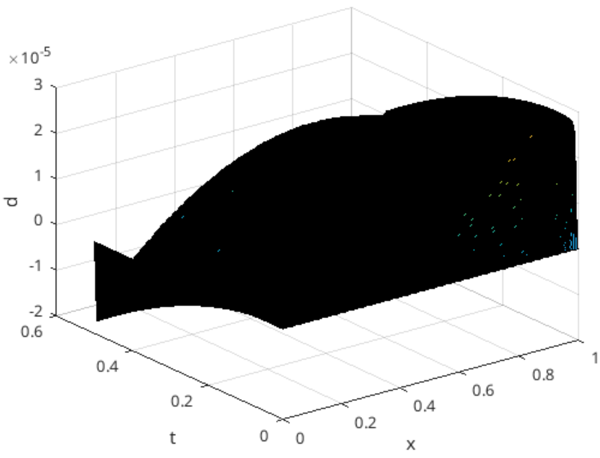

Рис. 2: График отклонения для неявного метода

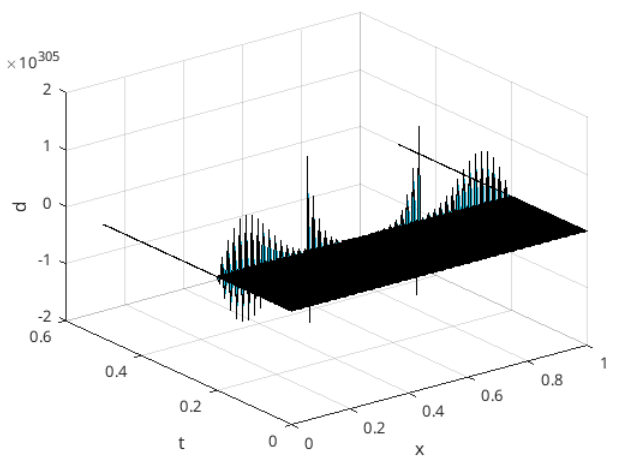

Рис. 3: График отклонения для явного метода

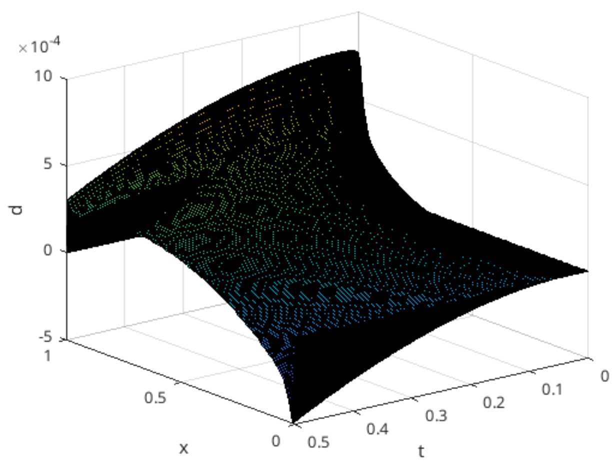

Рис. 4: График отклонения для неявного метода

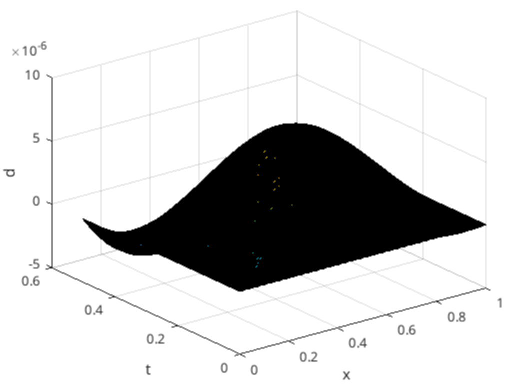

Рис. 5: График отклонения для явного метода

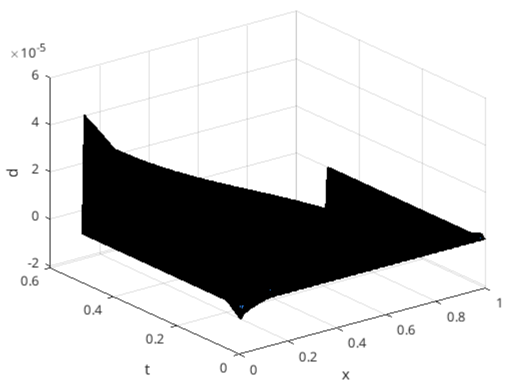

Рис. 6: График отклонения для неявного метода

При $\tau = 10^{-3}$(не удовлетворяющее условиям устойчивости) работающий 0.04 секунд явный метод расходится, а неявный, работающий 0.48 секунд, имеет максимальное отклонение равное 1.4e-3.

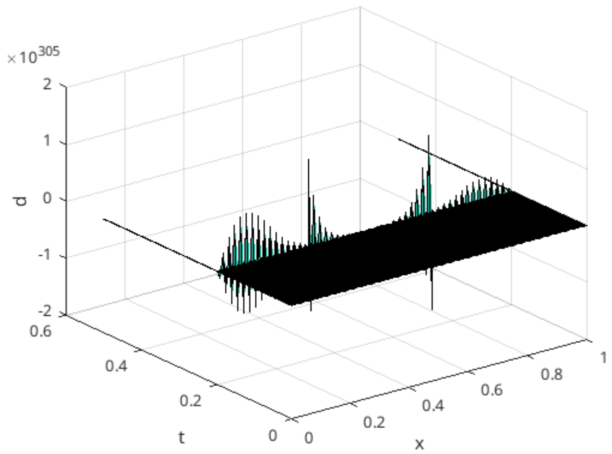

Рис. 7: График отклонения для явного метода

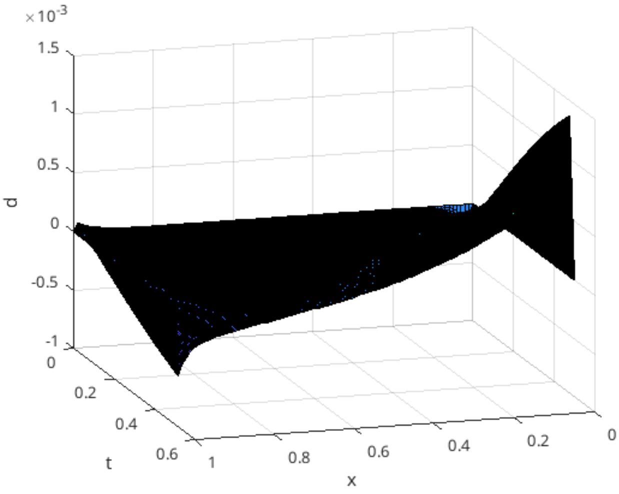

Рис. 8: График отклонения для неявного метода

Комментарии к графикам: Графики для явного метода получились плохими, потому что данный метод неустойчив и лаг был выбран неправильно. Для порядка аппроксимации $\tau^2 + h^2$ краевые условия не нулевые, из-за чего точность в неявном методе меньше, что плохо. Отклонения на много порядков меньше решения, поэтому метод можно считать близким к точному.

Вывод

Из данных тестов можно сделать вывод, что при не выполнении условий устойчивости, решение, полученное явным методом, уходит на бесконечность. Также в тестах заметно, что решение, полученное неявным методом, менее точное, в сравнении с явной схемой. Это связано с тем, что при ненулевых граничных условиях точность неявной схемы уменьшается.