Санкт - Петербургский государственный университет
Математико - механический факультет

Отчёт по практике №7

Проекционные методы решения краевой задачи для ОДУ второго порядка

Выполнила: Карасева У.П.
451 группа

Санкт - Петербург
2020

1 Предисловие

Иногда при постановке краевых задач математической физики бывает удобнее использовать не дифференциальные, а интегральные уравнения, и формулировать задачу как задачу о поиске минимума некоторого функционала. Такой подход, в частности, позволяет формулировать обобщенные постановки задач, в которых от решения требуется меньшая гладкость, чем при использовании дифференциальных уравнений. В соответствие краевым задачам математической физики можно ставить задачи о поиске минимума функционала. Этот минимум можно приближенно найти на некотором конечномерном множестве функций.

2 Постановка задачи

Будем решать проекционными методами Ритца и методом коллокаций ОДУ второго порядка с однородными граничными условиями. Общий вид рассматриваемой задачи

$$Lu = f(x) \tag{1}$$

с краевыми условиями

$$\begin{cases} \alpha_1 \cdot u(a) - \alpha_2 \cdot u'(a) = \alpha_3, \ |\alpha_1| + |\alpha_2| \neq 0, \ \alpha_1 \cdot \alpha_2 \geq 0 \\ \beta_1 \cdot u(b) + \beta_2 \cdot u'(b) = \beta_3, \ |\beta_1| + |\beta_2| \neq 0, \ \beta_1 \cdot \beta_2 \geq 0 \end{cases} \tag{2}$$

Применение любого проекционного метода заключается в выборе л.н.з. система функций $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ \dots \ , \varphi_n(x)$. Такая система называется координатной, а приближенное решение ищется в виде линейной комбинации этих функий

$$u^n(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i \varphi_i(x) \tag{3}$$

Коэффициенты разложения c_i являются решением линейной системы

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} c_j = f_i, \quad i = 1, \ \dots \ , n \tag{4}$$

Компоненты a_{ij} матрицы A и f_i вектора F задаются непосредственно используемым проекционным методом.

3 Метод Ритца

Основная идея заключается в переходе от решения краевой задачи к решению вариационной задачи приближенными методами. Как было заявлено выше: решение будем искать в виде линейной комбинации конечного числа координатных функций

$$u^n(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i \varphi_i(x) \tag{5}$$

Не забываем про краевые условия. Рассмотрим их в следующем виде

$$u(a) = u_a, u(b) = u_b \tag{6}$$

Поэтому положим, что

$$\varphi_0(a) = 1, \varphi_i(a) = 0, i \geqslant 1 \qquad \varphi_n(b) = 1, \varphi_i(b) = 0, i \leqslant n-1 \tag{7}$$

В таком случае $c_0 = u_a$, $c_n = u_b$. Теперь задача заключается в том, чтобы из множества допустимых экстремалей выбрать те, что удовлетворяют заявленным краевым условиям, а так же условиям минимума. Поставленная задача решается при помощи первой вариации функционала (необходимое условие экстремума)

$$\frac{\partial}{\partial c_i} L\left(\sum_{i=1}^{n} c_i \varphi_i(x)\right) = 0 \quad i = 1, \ \dots, n-1 \tag{8}$$

Таким образом, если, например, рассмотреть следующий функционал

$$L(u) = \frac{1}{2}\int_a^b (k(u')^2 + qu^2)dx - \int_a^b fudx \tag{9}$$

то система принимает вид

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} c_i(x) = d_i, i = 1, \ \dots, n-1 \qquad c_0 = u_a, c_n = u_b, \tag{10}$$

где

$$a_{ij} = \int_a^b (k\varphi_i' \varphi_j' + q\varphi_i \varphi_j)dx, \quad d_i = \int_a^b f\varphi_i dx \tag{11}$$

Стоит отметить, что в этом методе получаемая функция u^n определена на всем промежутке $[a, b]$ (в сеточных методах определяли только в узлах сетки). Но за это есть своя плата – матрица в общем случае будет плотной и может быть плохо обусловленной.

Быстрота сходимости метода Ритца сильно зависит от выбора системы базисных функций. Однако при удачном выборе для достижения приемлемой точности часто бывает достаточно 3-4 слагаемых в линейной комбинации.

При решении задачи методом Ритца можно использовать значительно более широкий класс аппроксимирующих функций, чем при решении задачи методом Галеркина.

Метод Ритца получил ныне широкое применение не только в изучении колебаний, но и в решении задач теории упругости, теории сооружений, нелинейной механики и других разделов физики. Вероятно, никакой другой математический прием не позволил развернуть научные исследования по сопротивлению материалов и теории упругости в столь широкой степени, как этот метод.

4 Метод коллокаций

Метод требует, чтобы невязка $L(u) - f(x)$ обращалась в ноль в некоторых точках исследуемого промежутка $[a, b]$, так же естественное требование – координатные функции удовлетворяют краевым условиям.

Выбираем узлы коллокаций

$$a \leqslant t_0 < t_1 < \ \dots \ < t_n \leqslant b \tag{12}$$

Тогда система принимает вид

$$\sum_{j=1}^{n} L(\varphi_j)|_{x=t_i} c_j = f(t_i), i = 0, 1, \ \dots \ , n \tag{13}$$

В качестве узлов коллокации удобно брать узлы многочлена Чебышева первого рода или узлы многочлена Якоби. Будем пользоваться многочленами Чебышева.

5 Описание численного эксперимента

Рассмотрим краевую задачу ОДУ. Будем строить решения точным методом, а затем сравнивать с решениями, полученными проекционными методами. Возьмем разное число n и посмотрим, как будет меняться общая картина.

6 Тест

Рассмотрим следующую граничную задачу

$$-\frac{1}{2+x}u'' + \frac{1}{(2+x)^2}u' + cos(x)u = 1 + x$$

$$u(-1) = 0, \quad u(1) = 0$$

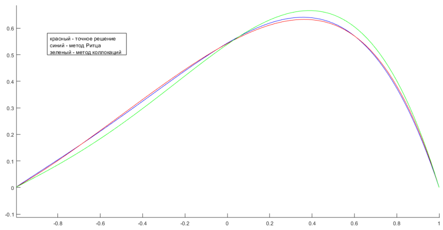

Рис. 1: n=3

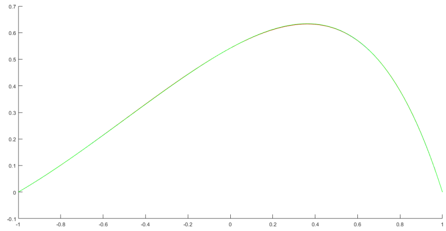

Рис. 2: n=5

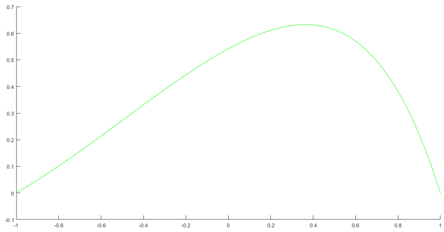

Рис. 3: n=7

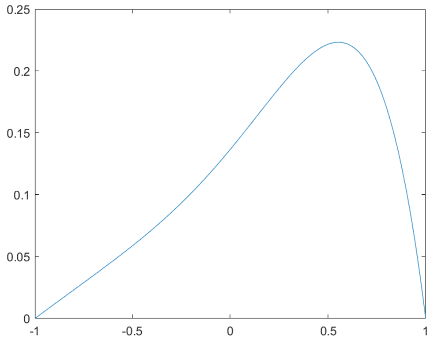

Рис. 4: Отклонение метода коллокаций

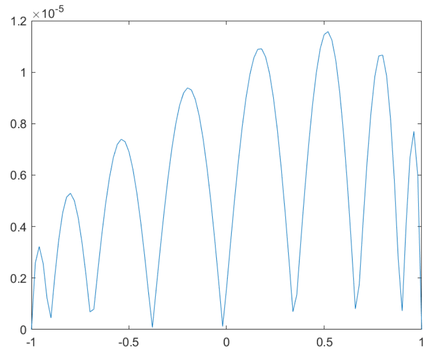

Рис. 5: Отклонение метода Ритца

Вывод

По графикам можно сделать вывод, что решение проекционными методами очень близко к точному решению, когда расширяется система координатных функций.