Санкт - Петербургский государственный университет
Математико - механический факультет

Отчёт по практике №1

Решение дифференциальных уравнений жестких систем с контролем точности

Выполнила: Карасева У.П.
451 группа

Санкт - Петербург
2020

1 Постановка задачи

Рассмотрим задачу Коши для системы n обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка

$$Y' = AY,\ Y(t_0) = Y_0,\ Y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ \dots \\ y_n(t) \end{pmatrix},\ A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Пусть $\lambda_1,\ \dots \lambda_n$ — собственные числа матрицы A, они различны, и им соответствуют собственные векторы $U_1,\ \dots U_n$. В таком случае общее решение системы имеет следующий вид

$$Y(t) = C_1 U_1 e^{\lambda_1 t} +\ \dots\ + C_n U_n e^{\lambda_n t}. \tag{2}$$

Система называется жёсткой, если выполняются следующие условия

$$\begin{aligned} & Re(\lambda_i) < 0, \qquad i = 1,\ \dots, n \\ & \frac{\max\limits_{1 \le i \le n} (-Re(\lambda_i))}{\min\limits_{1 \le i \le n} (-Re(\lambda_i))} >> 1 \end{aligned} \tag{3}$$

Решим задачу, используя некоторые рассмотренные ниже методы.

1.1 Обратный метод Эйлера

Расчетная формула метода

$$Y_{i+1}(E - hA)^{-1} Y_i \tag{4}$$

Если обозначить $W = (E - hA)^{-1}$, то

$$\lambda_i(W) = \frac{1}{(1 - h\lambda_i(A))} \tag{5}$$

$|\lambda_i(W)| < 1,\ i = 1, 2,\ \dots n$, то есть метод устойчив при любых h. Теоретический порядок точности 2.

В неявном алгоритме для определения x_{k+1} требуются дополнительные вычисления, но они по сравнению с аналогичным прямым алгоритмом более устойчивы и дают более высокую точность вычислений.

1.2 Метод Адамса

Интерполяционный метод Адамса третьего порядка

$$Y_{i+1} = \frac{\left(1 + \frac{2hA}{3}\right)}{\left(1 - \frac{5hA}{12}\right)} Y_i - \frac{\frac{hA}{12}}{\left(1 - \frac{5hA}{12}\right)} Y_{i-1} \qquad i = 1, 2,\ \dots \tag{6}$$

Для нахождения Y_1 будем использовать обратный метод Эйлера. Сам метод Адамса в используемой форме является устойчивым при $h < \frac{1}{\max\limits_{1\le i\le n}|\lambda_i|}$.

Структура погрешности метода Адамса такова, что погрешность остаётся ограниченной или растёт очень медленно в случае асимптотически устойчивых решений уравнения. Это позволяет использовать этот метод для отыскания устойчивых периодических решений, в частности, для расчёта движения небесных тел.

1.3 Метод Рунге – Кутты

$$
\begin{aligned}
&Y_{i+1} = Y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4),\ \text{где} \\
&k_1 = hAY_i \qquad\qquad k_2 = hA(Y_i + \frac{k_1}{2}) \\
&k_3 = hA(Y_i + \frac{k_2}{2}) \qquad\qquad k_4 = hA(Y_i + k_3)
\end{aligned}
\tag{7}
$$

Функция устойчивости: $R(z) = 1+z+\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{6}+\frac{z^4}{24}$, где $z = h\max\limits_{1\le i\le n}|\lambda_i|$. Метод является устойчивым при $h < \frac{2.78}{\max\limits_{1\le i\le n}|\lambda_i|}$. Теоретический порядок точности 4.

Метод Рунге-Кутта требует большего объема вычислений, однако это окупается повышенной точностью, что дает возможность проводить счет с большим шагом.

2 Описание численного эксперимента

Будем решать поставленную задачу, делая глобальное сгущение сетки для гарантий оценки погрешности расчета. Пользуемся методом Ричардсона.

- Строим последовательность равномерных сеток с шагами $h, \frac{h}{2}, \frac{h}{4},\ \ldots$
- Решаем задачу Коши по выбранной схеме на каждой сетке
- Рассматриваем решение на двух соседних сетках $v_1(t), v_2(t)$

Оценка погрешности по правилу Ричардсона: $\Delta(t) = \frac{v_2(t)-v_1(t)}{2^p-1}$, p — теоретический порядок точности численного метода. Однако проведение анализа погрешности в каждом узле нецелесообразно. Возьмем норму погрешности для N узлов сетки.

$$||\Delta||_C = \max_{1\le n\le N}|\Delta(t_n)| \tag{8}$$

Итоговая погрешность d относится к неуточненному решению, поэтому уточняем последнее решение, уменьшив сетку еще раз, и получаем ответ с полученной до этого погрешностью d.

3 Тесты

3.1 Тест 1

$$A = \begin{pmatrix} -125 & 123.55 \\ 123.55 & -123 \end{pmatrix}, \qquad Y_0(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{9}$$

Для этого теста была взята следующая точность $\varepsilon = 1e^{-5}$

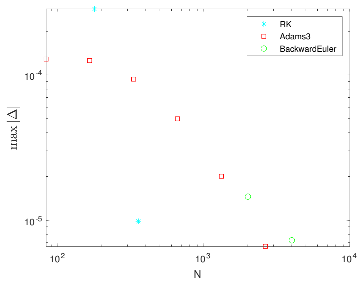


Рис. 1: Зависимость $||\Delta||_C$ от N в масштабе log_{10}

3.2 Тест 2

$$A = \begin{pmatrix} -100 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -99 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -100 & 2 & -2 & 0 & 0 \\ -100 & 2 & 9998 & -9990 & -10 \\ -100 & 2 & 9988 & 20 & -10010 \end{pmatrix}, \qquad Y_0(0) = \begin{pmatrix} 10 \\ 11 \\ 11 \\ 111 \\ 111 \end{pmatrix} \tag{10}$$

Точность $\varepsilon = 1e^{-2}$

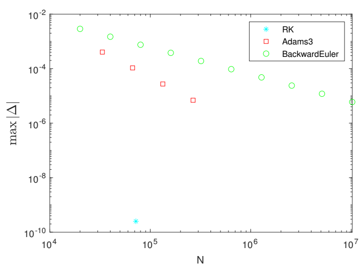
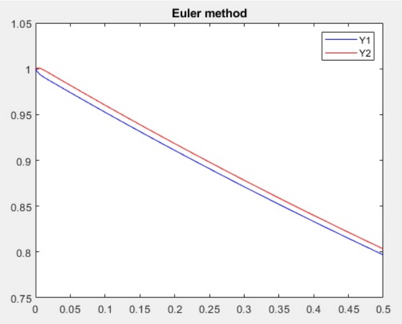
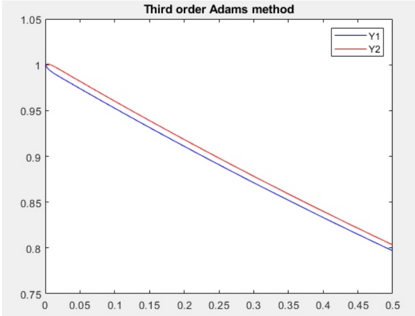


Рис. 2: Зависимость $||\Delta||_C$ от N в масштабе log_{10}

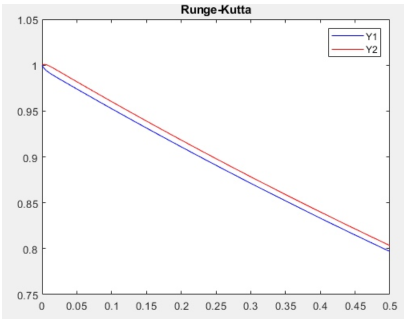
Графики решений всех трех методов для теста в логарифмических осях



BackwardEuler



Adams3



Runge-Kutta

3.3 Тест 3

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -10000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -10000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -10000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & -10000 \end{pmatrix}, \qquad Y_0(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1000 \\ 1000 \\ 1000 \end{pmatrix} \qquad (11)$$

Точность $\varepsilon = 1e^{-1}$

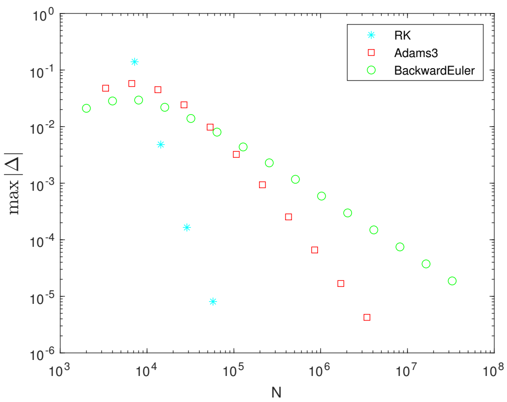


Рис. 3: Зависимость $||\Delta||_C$ от N в масштабе log_{10}

Сводная таблица времени

Обратим внимание на время выполнения каждого из методов в различных тестах

Тест	BackwardEuler, сек	Adams3, сек	RungeKutta, сек
1	0.03	0.05	0.04
2	22.80	4.18	0.42
3	32.97	6.50	0.61

Вывод

При углублении сеток во всех тестах погрешность становится меньше. Из рис. 1, 2, 3 видно, что кривые, соответствующие обратному методу Эйлера и интерполяционному методу Адамса имеют угол наклона меньше, чем у метода Рунге-Кутты, и почти совпадают. Это объясняется тем, что порядок точности метода Р–К равен 4, у Эйлера - 2, а у Адамса - 3. Помимо того, что метод Рунге-Кутты достигает наименьшей погрешности, выполнение метода происходит значительно быстрее.