

Санкт - Петербургский государственный университет
Математико - механический факультет

Отчёт по практике №6

**Решения краевой задачи для ОДУ второго порядка сеточным
методом**

Выполнила: Карасева У.П.
451 группа

Постановка задачи

Решаем обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка сеточным методом. Для определённости возьмём уравнение струны:

$$u_{xx}(x) + q(x) \cdot u_x(x) + r(x) \cdot u(x) = f(x) \quad (1)$$

и следующую краевую задачу:

$$\begin{cases} \alpha_1 \cdot u(a) - \alpha_2 \cdot u'(a) = \alpha_3, & |\alpha_1| + |\alpha_2| \neq 0, & \alpha_1 \cdot \alpha_2 \geq 0 \\ \beta_1 \cdot u(b) + \beta_2 \cdot u'(b) = \beta_3, & |\beta_1| + |\beta_2| \neq 0, & \beta_1 \cdot \beta_2 \geq 0 \end{cases} \quad (2)$$

Имеем следующие ограничения: $q, r, f \in C^2[a, b]$, $r(x) \geq m > 0$, $h \cdot \max_{x \in [a, b]} |q(x)| \neq 2$. Эти ограничения не являются необходимым условием сходимости и разностное решение может существовать и сходиться к точному, даже при нарушении этих условий.

Сеточный метод

Имеем равномерную сетку $x_n = a + n \cdot h, 0 \leq n \leq N$. Заменяем производные с помощью симметричных разностных схем, в итоге придём к следующей системе:

$$\frac{1}{h^2}(u_{n+1} - 2 \cdot u_n + u_{n-1}) + \frac{q_n}{2 \cdot h}(u_{n+1} - u_{n-1}) - r_n \cdot u_n = f_n, \quad n = 1, \dots, N-1 \quad (3)$$

Здесь q_n, r_n, f_n — значения соответствующих функций в точке x_n .

Так как данные соотношения можно записать только для внутренних узлов сетки, имеем $N-1$ уравнение с $N+1$ неизвестной. Дополним эту систему граничными условиями (2), в которых первую производную будем заменять следующими разностными формулами:

$$\begin{aligned} u'_0 &\approx (-\frac{3}{2}u_0 + 2u_1 - \frac{1}{2}u_2)/h \\ u'_N &\approx (\frac{3}{2}u_N - 2u_{N-1} + \frac{1}{2}u_{N-2})/h \end{aligned} \quad (4)$$

После этого составим матрицу A с помощью (3) и (4), в которую будут входить коэффициенты перед соответствующим u_i . Тогда для нахождения решения нужно решить систему $A\mathbf{u} = \mathbf{b}$, где $\mathbf{b} = (\alpha_3, f_1, \dots, f_{N-1}, \beta_3)^T$.

Главной проблемой метода является построение правильной разностной схемы, которая будет сходиться к решению. Построение схемы выполняется исходя из свойств исходного дифференциального оператора.

Для простых задач построение разностной схемы выполняется быстрее, чем в методе конечных элементов.

К достоинствам метода конечных разностей следует отнести его высокую универсальность, например, значительно более высокую, чем у аналитических методов. Применение этого метода нередко характеризуется относительной простотой построения

решающего алгоритма и его программной реализации. Зачастую удается осуществить распараллеливание решающего алгоритма.

К числу недостатков метода следует отнести: проблематичность его использования на нерегулярных сетках; очень быстрый рост вычислительной трудоемкости при увеличении размерности задачи (увеличении числа неизвестных переменных); сложность аналитического исследования свойств разностной схемы.

Описание численного эксперимента

Начнём вычисление на грубой сетки из 10 интервалов, после чего, с помощью используемого ранее, метода Рундсона будем сгущать сетку до необходимой точности. В качестве результата будем выводить количество итераций и график, на котором будут точное и численное решения.

Тесты

Тест 1

Решаем следующее уравнение:

$$\frac{d^2}{dt^2} u(t) - \left(\frac{t}{2} + 1 \right) (t - 3) \frac{d}{dt} u(t) - e^{t/2} u(t) (t - 3) = (t - 2) (t - 3)$$

с краевыми условиями:

$$u(-1) = 0, \quad u(1) = 0$$

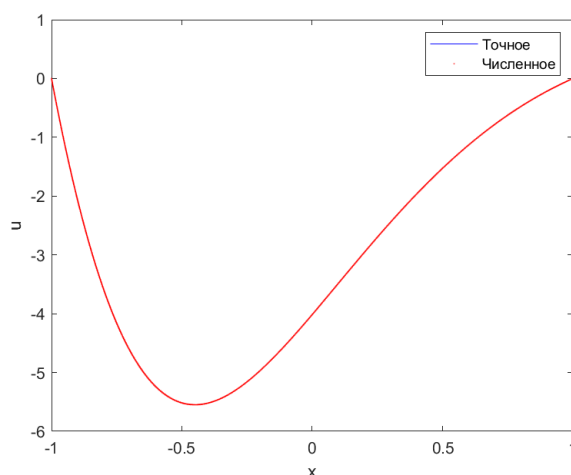


Рис. 1: График точного и численного решений

При заданной точности $1e-6$, количество итераций равно 11, а погрешность равна $2.92e-7$

Время выполнения точного решения: 0.33 сек

Время выполнения численного решения: 3.33 сек

Тест 2

Решаем следующее уравнение:

$$\frac{d^2}{dt^2} u(t) - \frac{u(t) (2t+5) (e^{t/2} + 1)}{t+4} - \frac{(\frac{t}{2} + 1) (2t+5) \frac{d}{dt} u(t)}{t+4} = -\frac{(2t+5) (t+2)}{t+4}$$

с краевыми условиями:

$$\frac{u(-1)}{2} - \left(\left(\frac{d}{dt} u(t) \right) \Big|_{t=-1} \right) = -\frac{1}{5}, \quad \frac{3u(1)}{10} + \left(\left(\frac{d}{dt} u(t) \right) \Big|_{t=1} \right) = -\frac{3}{10}$$

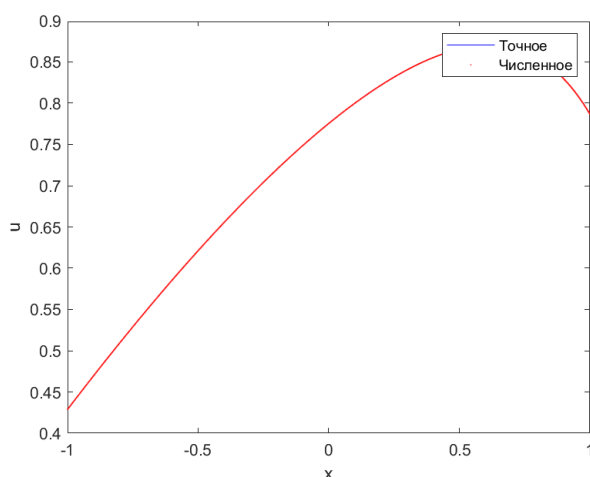


Рис. 2: График точного и численного решений

При заданной точности 1e-6, количество итераций равно 9, а погрешность равна 4.92e-7

Время выполнения точного решения: 0.16 сек

Время выполнения численного решения: 0.43 сек

Тест 3

Решаем следующее уравнение:

$$\frac{d^2}{dt^2} u(t) - \frac{u(t) (3t+7) \left(\frac{\cos(t)}{2} + 1 \right)}{t+6} - \frac{(\frac{t}{2} - 1) (3t+7) \frac{d}{dt} u(t)}{t+6} = \frac{(\frac{t}{3} - 1) (3t+7)}{t+6}$$

с краевыми условиями:

$$\left(\left(\frac{d}{dt} u(t) \right) \Big|_{t=-1} \right) - 2u(-1) = 0, \quad \left(\left(\frac{d}{dt} u(t) \right) \Big|_{t=1} \right) = 0$$

При заданной точности 1e-6, количество итераций равно 8, а погрешность равна 4.15e-7

Время выполнения точного решения: 0.11 сек

Время выполнения численного решения: 0.09 сек

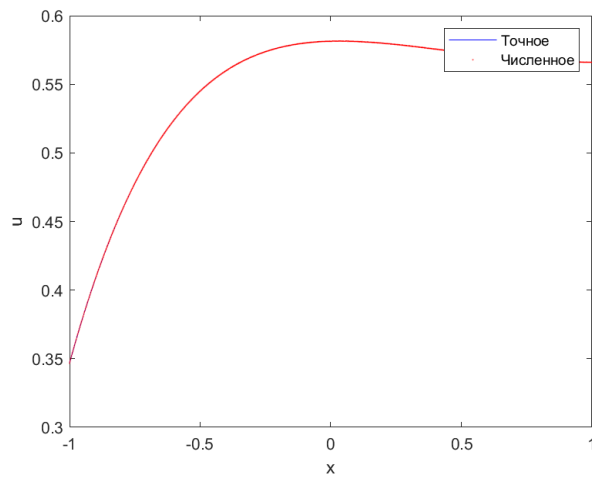


Рис. 3: График точного и численного решений

Вывод

Из графиков видно, что численное решение практически совпадает с точным, погрешность во всех тестах был порядка $10e-7$. При этом такая точность достигается при довольно небольших количествах итераций.