Тестирование алгоритма Вигдерсона

In [1]:
```
import numpy as np
from scipy.stats import bernoulli, uniform, randint
import matplotlib.pyplot as plt
import networkx
import tqdm
import itertools
%matplotlib inline

plt.rc('font', size="16")

from WigdersonAlgorithm import get_coloring
```

Вспомогательные функции и генерация графов

Проверка сертификата раскраски

In [2]:
```
def is_legal_coloring(graph, colors):
    for v in range(len(graph)):
        for u in graph[v]:
            if colors[v] == -1 or colors[u] == -1:
                continue
            if colors[v] == colors[u]:
                print(u, v)
                return False

    return True
```

Генерируется k-дольный случайный граф с заданной вероятностью ребра, $k \in \{2, 3\}$

Цвета вершин соответствуют номерам блоков по номерам: $[0..\frac{n}{2}), [\frac{n}{3}..2 \cdot \frac{n}{3}), [2 \cdot \frac{n}{3}..n)$

In [3]:
```
def get_k_coloring_sample(sizes=[333, 333, 333], p=0.5):
    graph = [[] for i in range(sum(sizes))]

    starts = [0] + list(np.cumsum(sizes))

    for i, j in itertools.combinations(range(3), 2):
        for u in range(starts[i], starts[i + 1]):
            for v in range(starts[j], starts[j + 1]):
                if bernoulli.rvs(p):
                    graph[u].append(v)
                    graph[v].append(u)
    return graph
```

Генерируется тест, на котором достигается максимальная раскраска

In [4]:
```
def get_maximal_test_sample(sqrt_n=32):
    k = sqrt_n
    n = k ** 2

    graph = [[] for i in range(n)]

    for i in range(k - 1):
        start = i * (k + 1)
        for v in range(k + 1):
            graph[v + start].append((v + 1) % (k + 1) + start)
            graph[(v + 1) % (k + 1) + start].append(v + start)

        for v in range(2, k):
            graph[start].append(v + start)
            graph[v + start].append(start)

    return graph
```

Создает граф для бибилиотека networkx

In [5]:
```
def mk_networkx_graph(graph):
    G = networkx.DiGraph()
    for i in range(len(graph)):
        G.add_node(i)
    for v in range(len(graph)):
        for u in graph[v]:
            G.add_edge(v, u)
    return G
```

Рисует граф

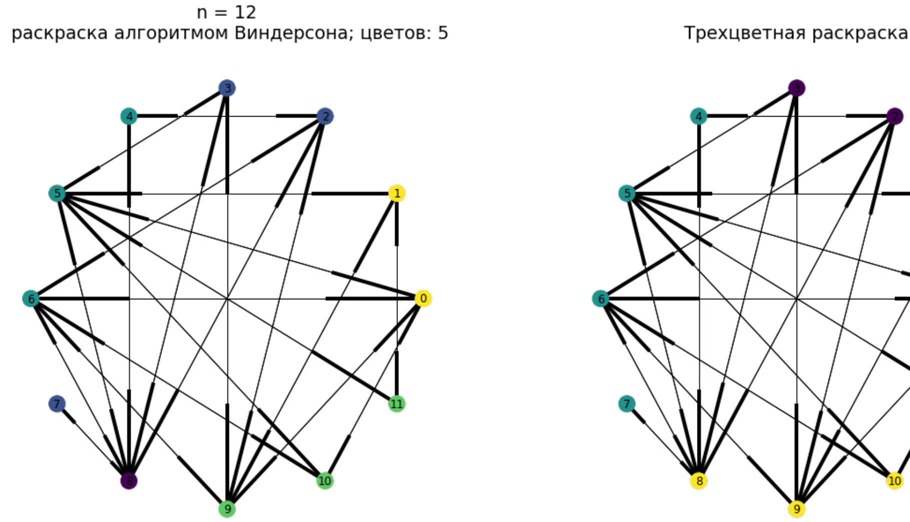
In [6]:
```
def draw_graph(G, colors=0, pos=None):
    colors = np.array(colors, dtype=float)
    plt.axis('off')
    networkx.draw_networkx(G, node_color=colors / max(colors), pos=pos)
```

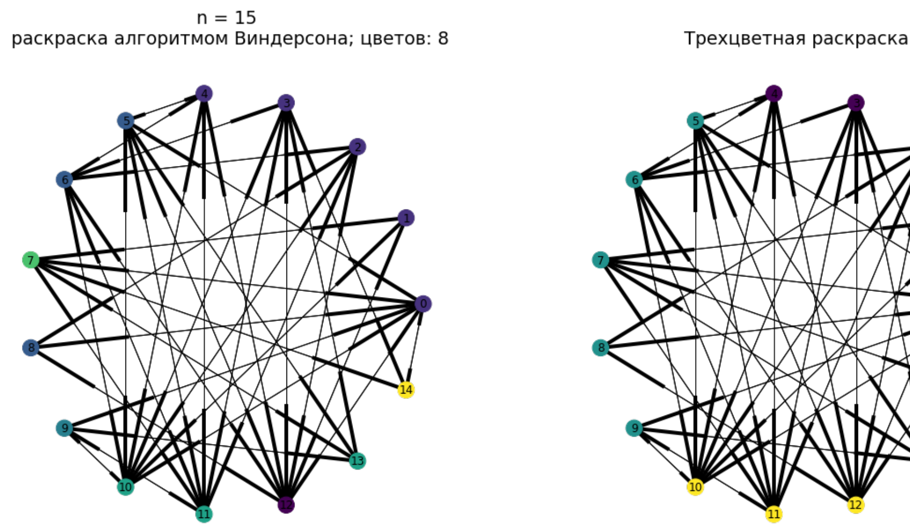
Генерирует случайный граф и показывает оптимальную раскраску и жадную

In [21]:
```
def test_and_color(sizes = [7, 7, 7]):
    starts = np.cumsum(sizes)
    graph = get_k_coloring_sample(sizes)
    colors = get_coloring(graph)
    num_colors = max(colors) + 1
    G = mk_networkx_graph(graph)
    pos = networkx.layout.shell_layout(G)
#     pos = networkx.layout.shell_layout(G,
#                                        nlist=[
#                                            range(starts[0]),
#                                            range(starts[0], starts[1]),
#                                            range(starts[1], starts[2])])
    plt.figure(figsize=(20, 10))
    plt.subplot(1,2,1)
    plt.title("n = {}\n раскраска алгоритмом Виндерсона; цветов: {}".format(sum
(sizes), num_colors))
    draw_graph(G, colors, pos)
    plt.subplot(1,2,2)
    plt.title("Трехцветная раскраска")
    draw_graph(G, [0] * sizes[0] + [1] * sizes[1] + [2] * sizes[2], pos)
    if not is_legal_coloring(graph, colors):
        print("illegal coloring")
```

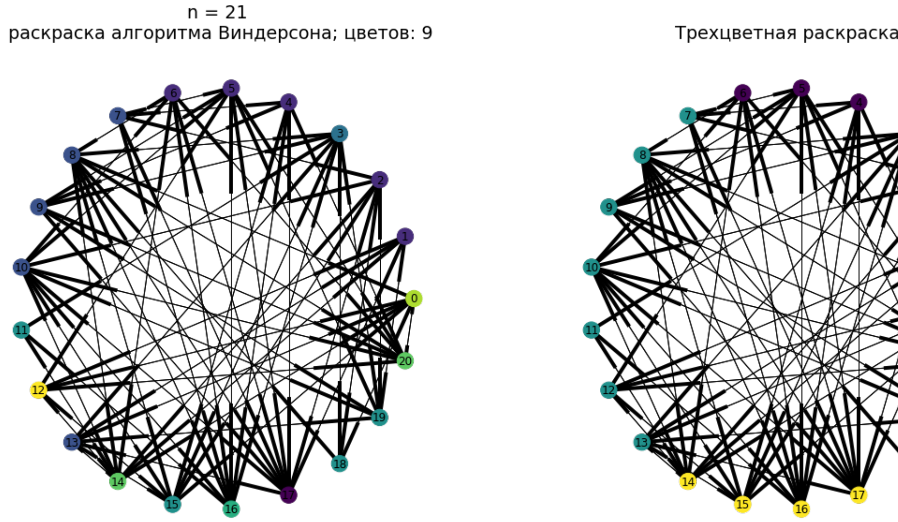
Примеры раскрасок

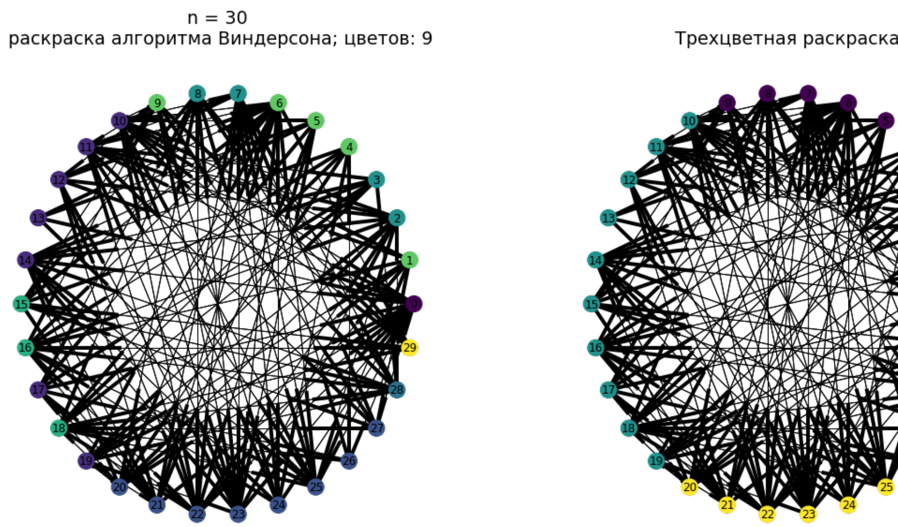
In [22]:
```
test_and_color([4, 4, 4])
test_and_color([5, 5, 5])
```





In [20]:
```
test_and_color([7, 7, 7])
test_and_color([10, 10, 10])
```





Стресс-тест

In [10]:
```
def stress_test(iters=20, maxn=10**2):
    for i in tqdm.tqdm_notebook(range(iters)):
        n = randint.rvs(max(1, maxn // 2), maxn)
        p = uniform.rvs()
        graph = get_k_coloring_sample([n, n, n], p)
        colors = get_coloring(graph)
        if is_legal_coloring(graph, colors):
            print("test {} is ok (n = {}, p = {:.2f})".format(i, n * 3, p))
        else:
            raise ValueError("incorrect coloring")
```

In [11]:
```
stress_test(20, 100)
stress_test(1, 2)
```

```
test 0 is ok (n = 264, p = 0.15)
test 1 is ok (n = 189, p = 0.17)
test 2 is ok (n = 258, p = 0.92)
test 3 is ok (n = 294, p = 0.19)
test 4 is ok (n = 165, p = 0.40)
test 5 is ok (n = 264, p = 0.17)
test 6 is ok (n = 231, p = 0.52)
test 7 is ok (n = 216, p = 0.09)
test 8 is ok (n = 171, p = 0.50)
test 9 is ok (n = 159, p = 0.61)
test 10 is ok (n = 189, p = 0.93)
test 11 is ok (n = 195, p = 0.21)
test 12 is ok (n = 261, p = 0.39)
test 13 is ok (n = 237, p = 0.79)
test 14 is ok (n = 234, p = 0.63)
test 15 is ok (n = 213, p = 0.29)
test 16 is ok (n = 285, p = 0.32)
test 17 is ok (n = 231, p = 0.58)
test 18 is ok (n = 279, p = 0.40)
test 19 is ok (n = 150, p = 0.56)


test 0 is ok (n = 3, p = 0.99)
```

Проверка асимптотики количества цветов.

Из алгоритма их должно быть не больше $4 \cdot \sqrt{n}$.

Максимальный тест

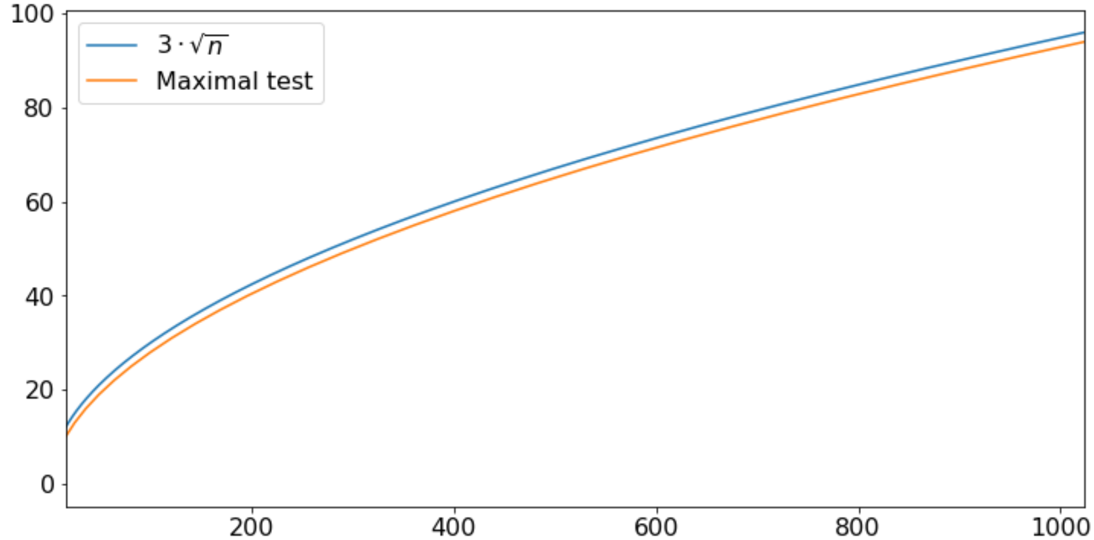
Построим пример, на котором алгоритм будет достигать оценки в $\sqrt{n}$. Из описания алгоритма следует, что больше всего цветов прибавляется на первых двух стадиях (раскрашивании вершин с большой степенью с соседями). То есть можно сделать $\sqrt{n} - 1$ несвязных кластеров с циклом из $\sqrt{n} + 1$ вершин, одна из которых соединена со всеми другими. Оставшуюся вершину ни с чем не соединять.

Тогда реализованный алгоритм должен последовательно закрашивать кластеры, что даст порядка $3 \cdot \sqrt{n}$ цветов.

In [12]:
```
ns = []
nums = []

for k in range(4, 33):
    graph = get_maximal_test_sample(k)
    colors = wigderson_algorithm(graph)
#     print(colors)
    num = max(colors) - min(colors) + 1
    if not is_legal_coloring(graph, colors):
        raise ValueError("incorrect coloring")
    nums.append(num)
    ns.append(k ** 2)
```

In [13]:
```
plt.figure(figsize=(12, 6))
asym = lambda x : 3 * np.sqrt(x)
grid = np.linspace(0, 1024, 1000)
plt.plot(grid, asym(grid), label=r'$3 \cdot \sqrt{n}$')
plt.plot(ns, nums, label='Maximal test')
plt.legend(loc='upper left')
plt.xlim(16, 1024)
plt.show()
```



Случайные графы

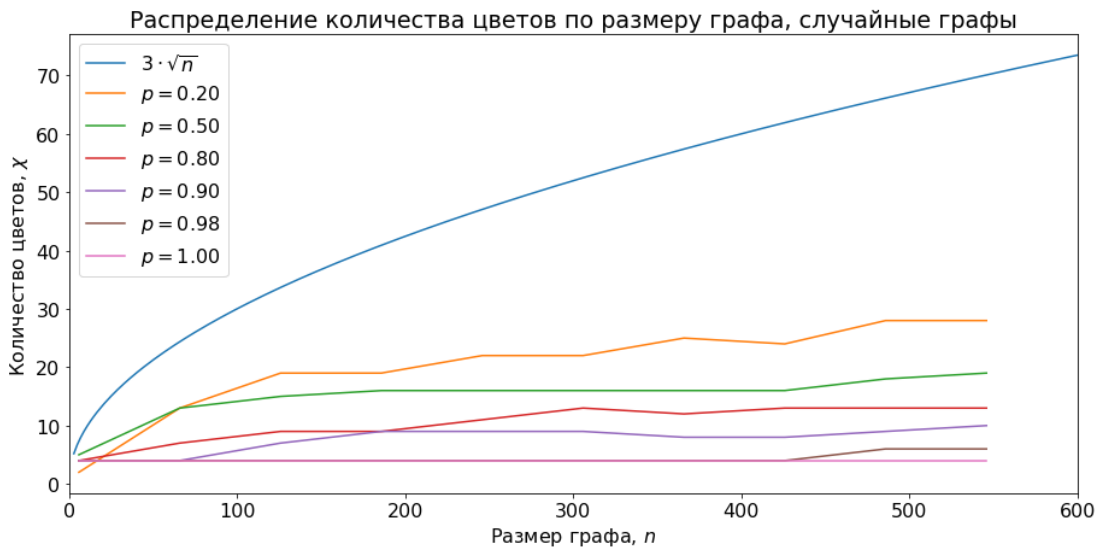
Теперь проведем тестирование на случайных графах

In [14]:
```
maxn = 200
ns = np.arange(2, maxn, 20)

def test_fix_prob(p=0.5, alg=get_coloring):
    num_colors = []
    for n in tqdm.tqdm(ns):
        graph = get_k_coloring_sample([n, n, n], p)
        colors = alg(graph)
        num_colors.append(max(colors) + 1)
    return num_colors
```

In [15]:
```
plt.figure(figsize=(15, 7))
grid = np.linspace(1, maxn, 300) * 3
plt.plot(grid, asym(grid), label='$3 \cdot \sqrt{n}$')
plt.title("Распределение количества цветов по размеру графа, случайные графы")
plt.xlabel("Размер графа, $n$")
plt.ylabel("Количество цветов, $\chi$")
for p in [0.2, 0.5, 0.8, 0.9, 0.98, 1]:
    plt.plot(ns * 3, test_fix_prob(p), label='$p = {:.2f}$'.format(p))
plt.legend(loc='upper left')
plt.xlim(0, maxn * 3)
plt.show()
```

```
100%|██████████| 10/10 [00:13<00:00,  1.34s/it]
100%|██████████| 10/10 [00:15<00:00,  1.52s/it]
100%|██████████| 10/10 [00:13<00:00,  1.31s/it]
100%|██████████| 10/10 [00:12<00:00,  1.30s/it]
100%|██████████| 10/10 [00:13<00:00,  1.31s/it]
100%|██████████| 10/10 [00:12<00:00,  1.28s/it]
```



При увеличении p количество цветов уменьшается.

На этот эффект влияет то, что граф становится более структуризированным: становится похожим на $K_{(n,n,n)}$. Тогда алгоритм на первом шаге красит соседей (а это почти все вершины из других компонент) в два цвета. А потом на оставшемся маленьком количестве вершин жадный алгоритм завершает работу, покрасив все в три цвета.

Распределение количества цветов по вероятностям

In [16]:
```
maxn = 100

pgrid = np.linspace(0, 1, 20)
num_colors = []
for p in tqdm.tqdm(pgrid):
    colors_sum = 0
    for n in range(2, maxn, 10):
        graph = get_k_coloring_sample([n, n, n], p)
        colors = get_coloring(graph)
        colors_sum += max(colors) + 1
    num_colors.append(colors_sum / (maxn - 2))
```

```
100%|██████████| 20/20 [01:05<00:00,  3.26s/it]
```

In [17]:
```
plt.figure(figsize=(12, 7))
plt.plot(pgrid, num_colors)
plt.title("Распределение количества цветов по вероятностям, случайные графы")
plt.xlabel("вероятеость, $p$")
plt.ylabel("Количество цветов, $\chi$")
plt.grid(ls=":")
plt.show()
print("argmax num_colors(p) = {:.3f}".format(pgrid[np.argmax(num_colors)]))
```


```
argmax num_colors(p) = 0.158
```

При $p = 0.158$ алгоритм в среднем использует наибольшее число цветов. При малом p степени вершин маленькие и работать будет, в основном, жадный алгоритм, а количество цветов будет близко к $O(\sqrt{n})$. При росте p степени вершин растут и становится оправданным использование алгоритма Вигдерсона.

Выводы

1. Написали Алгритм Вигдерсона
2. Нарисовали маленькие тесты
3. Протестировали на случайных графах
4. Построили максимальный тест
5. Посмотрели на распределение количества цветов по количеству вершин и по вероятностям