Résumé du cours Transformée de Laplace

0.1 Transformée de Laplace

0.1.1 Les fonctions de E_0

Définition 0.1

E_0 est l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires à coefficients réels ou complexes des fonctions de la forme $t \mapsto t^n e^{rt}\mathcal{U}(t-\alpha)$ où α est un réel positif, n un entier positif et r un nombre complexe quelconque.

0.1.2 Existence de $\int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt$ pour f élément de E_0

Définition 0.2

*Si une fonction g de la forme : $t \mapsto g(t) = k\mathcal{U}(t-\alpha)t^n e^{rt}$ avec k réel, r complexe, a réel positif, le nombre complexe r est appelé **exposant** de la fonction g.*

Propriété 0.1 ***et définition***

L'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt$ est absolument convergente si p est un nombre réel appartenant à l'intervalle $]\sigma(f),\ +\infty[$ où $\sigma(f)$ est la plus grande des parties réelles des exposants des fonctions composant la combinaison linéaire réalisant f.
*Le réel $\sigma(f)$ est appelé **abscisse de convergence** de f.*

0.1.3 Définition de la transformation de Laplace dans E_0

Soit f un élément de E_0 d'abscisse de convergence $\sigma(f)$.
La **transformée de Laplace** de f est la fonction, notée F, définie sur $]\sigma(f), +\infty[$ par

$$p \mapsto F(p) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt$$

On notera : $f \sqsupset F$ ou $f(t) \sqsupset F(p)$ ou $F = \mathcal{L}(f)$ ou $F(p) = \mathcal{L}[f](p)$
Le symbole : $\mathcal{L}$ désignant la transformation de Laplace : $f \mapsto F$.

0.2 Théorème de la valeur initiale et de la valeur finale

Théorème 0.1 ***Théorème de la valeur initiale***

Si *une fonction f de E_0 admet pour transformée de Laplace la fonction F,*
alors $\lim_{p\to+\infty} F(p) = 0$ *et*

$$\lim_{p\to+\infty} pF(p) = f(0^+)$$

Théorème 0.2 ***Théorème de la valeur finale***

Si *une fonction f de E_0 admet pour transformée de Laplace la fonction F* ***et si*** $\lim_{t\to+\infty} f(t)$ ***existe et est finie, alors***

$$\lim_{p\to 0} pF(p) = \lim_{t\to+\infty} f(t)$$

Définition 0.3 ***Produit de convolution***
Soient f et g deux fonctions appartenant à E_0.
On appelle produit de convolution (ou convolée) de f et g la fonction causale h notée $f * g$ définie pour tout $t \in \mathbb{R}^+$ par :

$$h(t) = (f * g)(t) = \int_0^t f(x)g(t-x)dx$$

0.3 Dictionnaire d'images

Condition(s)	Fonction f	$\mathcal{L}(f) = F$
$p > 0$	$\mathcal{U}(t)$	$\frac{1}{p}$
$p > 0$	$t\mathcal{U}(t)$	$\frac{1}{p^2}$
$p > 0$	$t^n\mathcal{U}(t),\ n \in \mathbb{N}$	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
$p > \mathcal{R}(a)$	$e^{-at}\mathcal{U}(t)$	$\frac{1}{p+a}$
$p > 0$	$\Big(\cos(\omega t)\big)\mathcal{U}(t)$	$\frac{p}{p^2+\omega^2}$
$p > 0$	$\Big(\sin(\omega t)\big)\mathcal{U}(t)$	$\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$
$f \in E_0,\ p > \sigma(f)$ $g \in E_0,\ p > \sigma(g)$	$f(t)$ $g(t)$	$F(p)$ $G(p)$
$f \in E_0,\ p > \sigma(f),\ a > 0$	$f(at)$	$\frac{1}{a}F\left(\frac{p}{a}\right)$
$f \in E_0,\ p > \sigma(f),\ \tau > 0$	$f(t-\tau)$	$F(p)e^{-\tau p}$
$f \in E_0,\ p > \sigma(f) - a,\ a \in \mathbb{R}$	$f(t)e^{-at}$	$F(p+a)$
$f \in E_0,\ p > \sigma(f),\ f \in \mathcal{C}^0$	$f'(t)$	$pF(p) - f(0^+)$
$f \in E_0,\ p > \sigma(f),\ f \in \mathcal{C}^1$	$f"(t)$	$p^2F(p) - pf(0^+) - f'(0+)$
$f \in E_0,\ p > \sigma(f)$	$\int_0^t f(x)dx$	$\frac{F(p)}{p}$
$f \in E_0,\ p > \sigma(f)$	$-tf(t)$	$\frac{dF}{dp}(p)$
$(f,g) \in E_0^2,\ p > \max\big(\sigma(f), \sigma(g)\big)$	$\lambda f(t) + \mu g(t)$	$\lambda F(p) + \mu G(p)$
$(f,g) \in E_0^2,\ p > \max\big(\sigma(f), \sigma(g)\big)$	$(f * g)(t)$	$F(p) \times G(p)$
$f \in E,\ p > \sigma(f)$ f périodique de période T $f_0(t) = \begin{cases} f(t) \text{ si } t \in [0,T] \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$	$f_0(t)$ $f(t)$	$F_0(p) = \mathcal{L}[f_0](p)$ $F(p) = \mathcal{L}[f](p) = \frac{F_0(p)}{1-e^{-pT}}$