UE AUTOMATISATION

Régulation
Systèmes linéaires et continus

Présentation

Automatisation

- **3 types de systèmes automatisés :**

❶ Les Systèmes Combinatoires	❷ Les Systèmes Linéaires Continus	❸ Les Systèmes Séquentiels
Fait en prépa	21h Cours/TD 3h de TP	13,5 h Cours/TD 6h de TP 4,5 h de Projet
	Cours réalisés 1ère moitié du semestre	***Cours réalisés 2ème moitié du semestre***

Présentation

- Pour la partie Régulation
-
    - 21 h de Cours /TD
    - 3 h de TD noté (utilisation de Matlab-Simulink)
    - DS de 2h avec documents et avec calculatrice

Présentation

- Pré-requis nécessaire :
  - Transformée de Laplace

- Objectifs :
  - Caractériser et interpréter le fonctionnement des systèmes linéaires continus
  - Présenter les principes et les buts de la correction des systèmes
  - Corriger, si nécessaire, le comportement d'un système par l'utilisation d'un correcteur adapté

Présentation

- Résultats d'apprentissage :

A l'issue de cet enseignement, l'étudiant doit être capable de :

- Définir le fonctionnement d'un système en asservissement et en régulation
- Corriger un système pour atteindre un comportement pré-défini (rapidité, stabilité et précision)
- Étudier et simuler le comportement d'un système par l'utilisation de Matlab-Simulink

Règles

- Avoir un rapporteur,
- Avoir un compas,
- Avoir une calculatrice (HEI) pendant les cours et TD,
- Avoir son polycopié de cours à chaque TD,
- Feuille d'appel.

Plan

- Le cours se compose de 8 chapitres :
    1. Notions de systèmes asservis (SA)
    2. Modélisation mathématique des SA
    3. Dynamique des SA
    4. Analyse fréquentielle des systèmes
    5. Analyse des systèmes linéaires types
    6. Stabilité des SA
    7. Identification des processus
    8. Correction des systèmes

CHAPITRE 1

Notions de systèmes asservis

Notions de systèmes asservis

- Système : entité relativement individualisable qui se détache de son contexte tout en procédant à des échanges avec son environnement.

- Exemple :

  - La vitesse d'une voiture => voiture

  - La température d'un studio ou d'un four => studio ou four

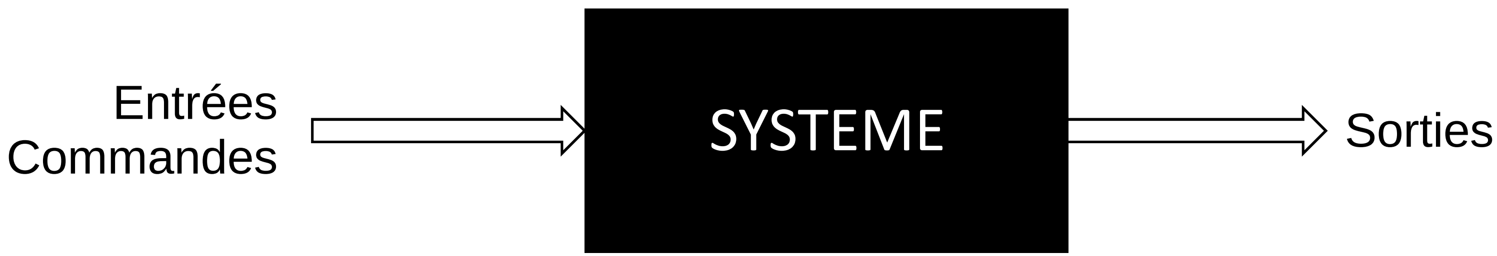
  - La hauteur de liquide dans une cuve => cuve

  - ...

Nous nous intéressons au fonctionnement de ce **système et nous allons chercher à commander ce système.**

Notions de systèmes asservis

Un système (en automatique) peut donc se voir comme une boîte noire qui possède des entrées sur lesquelles nous pouvons agir et des sorties qui permettent d'observer les réactions induites.



Notions de systèmes asservis

- Exemple : le système « voiture »

Entrées :
- Accélérateur
- Frein
- Volant

Sorties :
- Position latérale
- Position longitudinale
- Vitesse

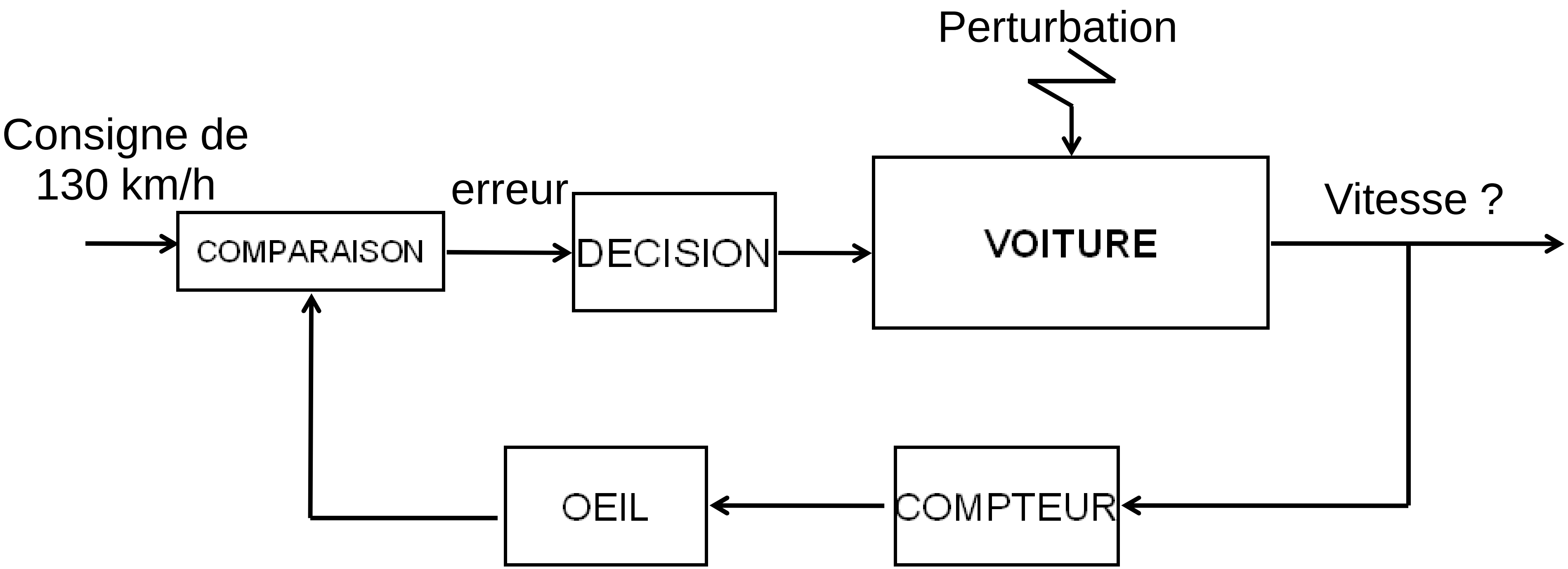
Accélérateur → VOITURE → Positions

Frein → VOITURE → Vitesse

Volant → VOITURE

Notions de systèmes asservis

- Exemple : le système « voiture »
  Si nous nous intéressons à la vitesse de la voiture :
  nous sommes sur autoroute à 130 km/h

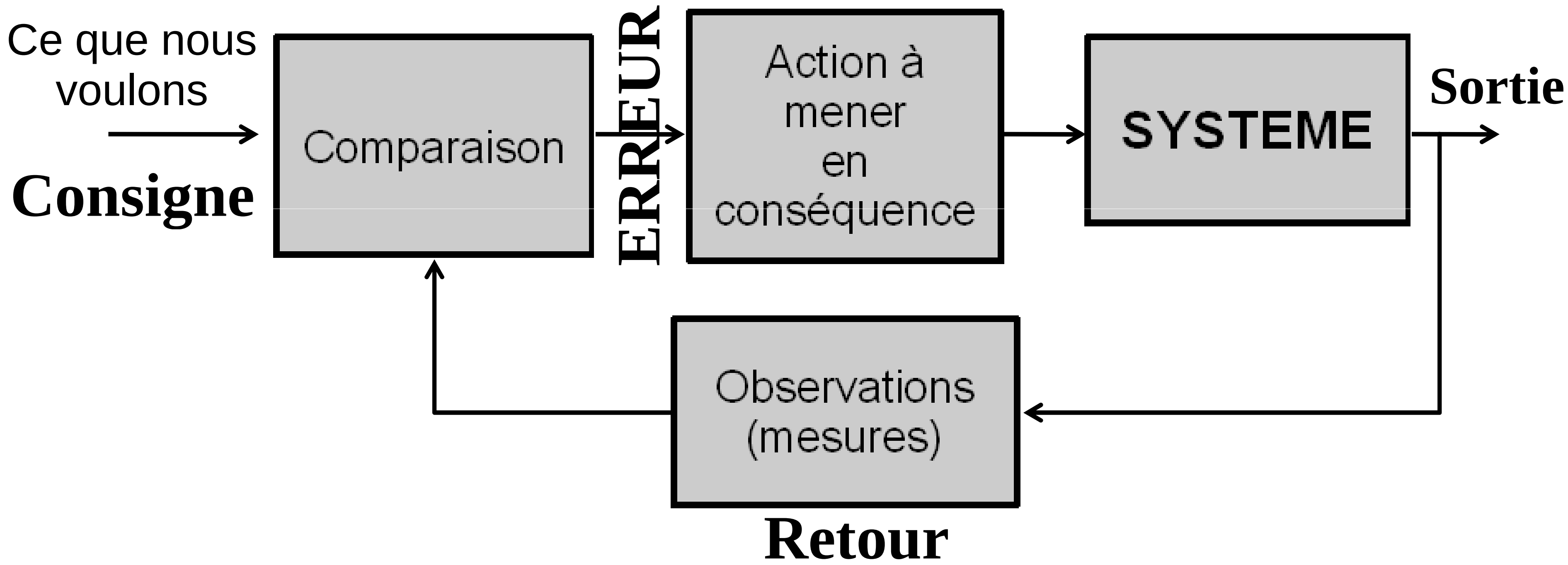


- Exemple : le système « voiture »

• Exemple : le système « voiture »

Notions de systèmes asservis

- Structure générale d'un système asservi



Un système est « asservi » si le signal de sortie est contrôlé suivant les signaux reçus en entrées. Il faut permettre au système d'atteindre le but fixé !

Notions de systèmes asservis

- Domaines d'applications :
  - Aérospatiale : guidage-pilotage d'avions / fusées, positionnement de satellites,...

  - Machines outils : commande numérique pour l'usinage,...

Découpe laser

Robot

Notions de systèmes asservis

- Domaines d'applications :
  - Énergie - Électrotechnique : moteurs, générateurs, environnement ...

  - Génie des procédés : chimie, raffinage, dépollution, pharmacie, agro-alimentaire,...

Embouteilleuse

Notions de systèmes asservis

•Domaines d'applications :

- Industrie & Industrie automobile : commande moteur, suspension active, ABS, régulateur,...

Four industriel

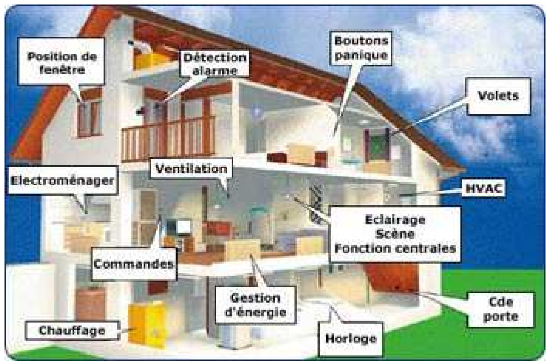
Notions de systèmes asservis

- Domaines d'applications :
  - Transport :

Métro

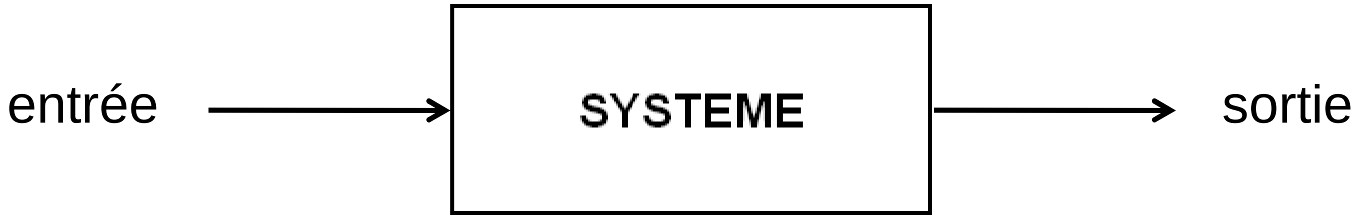
Pilote automatique

  - Bâtiment : chauffage, climatisation, domotique.



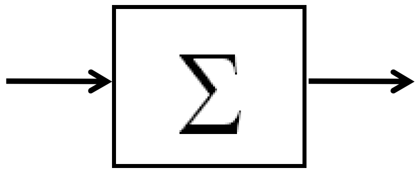
Notions de systèmes asservis

- Définitions :
  - **SISO : Single Input Single Output**
  - SIMO : Single Input Multiple Output
  - MISO : Multiple Input Single Output
  - MIMO : Multiple Input Multiple Output

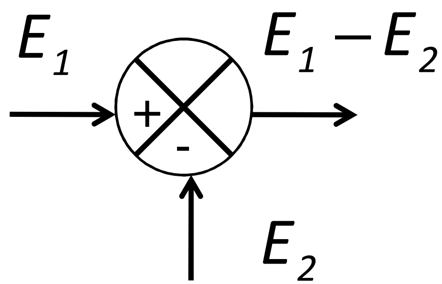


Notions de systèmes asservis

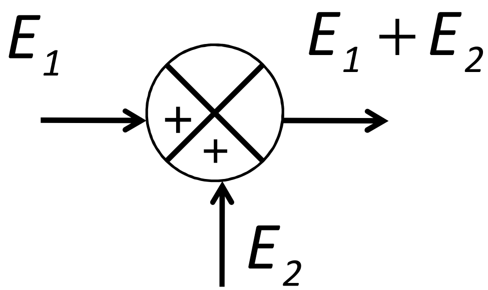
- Représentation des systèmes :



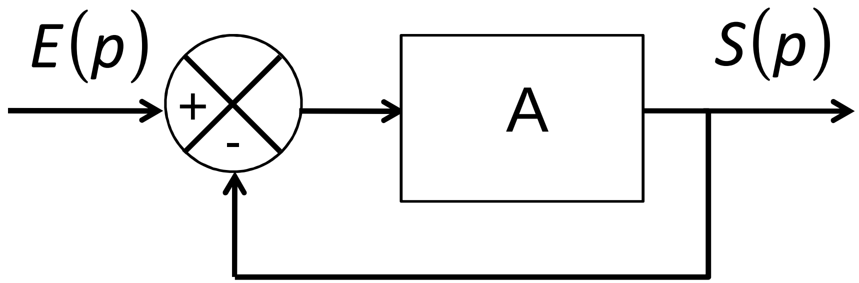
Système



Comparateur



Sommateur



Boucle fermée

Notions de systèmes asservis

Dans la suite du cours, nous allons :

- Modéliser mathématiquement les systèmes que nous allons étudier (chapitre 2)

- Étudier le comportement des systèmes en fonction des consignes et de la modélisation : *quelle sera la température finale de mon four si je demande X° ? Est ce que mon système est stable ? (chapitre 3 à 7)*

- Observer les résultats obtenus et agir sur le système pour atteindre le but fixé (chapitre 8)

Nous chercherons surtout à analyser le système avant de le corriger si cela est nécessaire

CHAPITRE 2

Modélisation mathématique des systèmes

Modélisation mathématique

- Outils mathématiques à maîtriser :

  - Fraction (simplification / mise au même dénominateur)

  - Résolution d'équation du second degré

  - Connaître la partie réelle / la partie imaginaire d'un complexe

  - Avoir un vague souvenir d'une équation différentielle

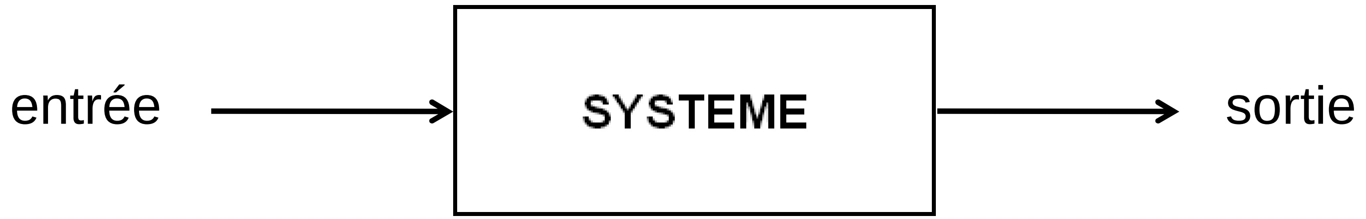
  - Quelques relations trigonométriques simples (les plus compliquées vous seront données...)

Modélisation mathématique

- Principe :

Le but de la modélisation est de déterminer les équations de fonctionnement ou de comportement de notre système.

TOUT SYSTEME PEUT ETRE DECRIT PAR DES EQUATIONS DIFFERENTIELLES

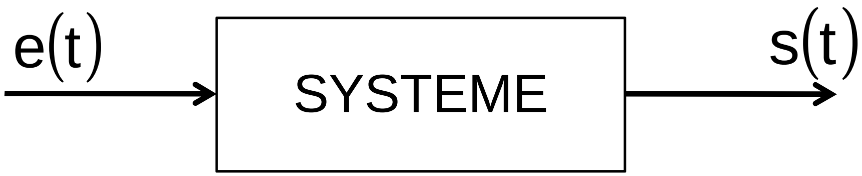


Nous cherchons donc une relation entre l'entrée et la sortie (système monovariable) telle que :

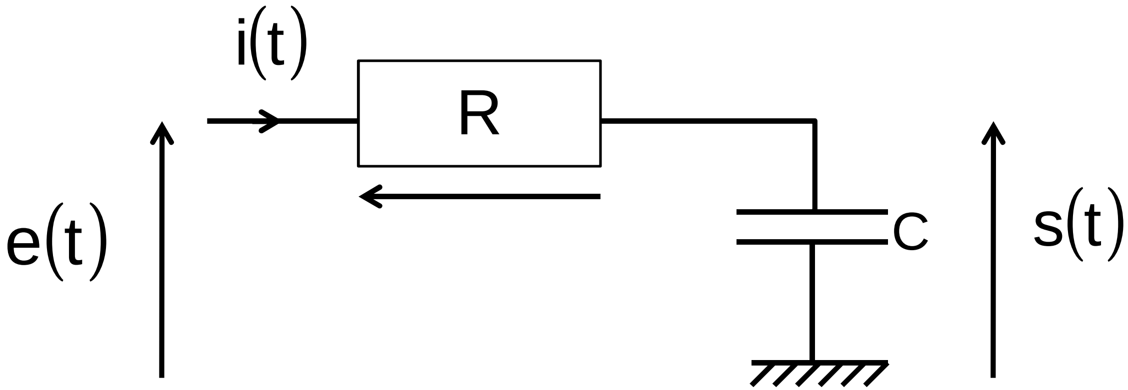
$$f\left(e(t), s(t), \frac{de(t)}{dt}, \frac{ds(t)}{dt}, \ldots\right) = 0$$

Modélisation mathématique

- Exemple d'un schéma électrique



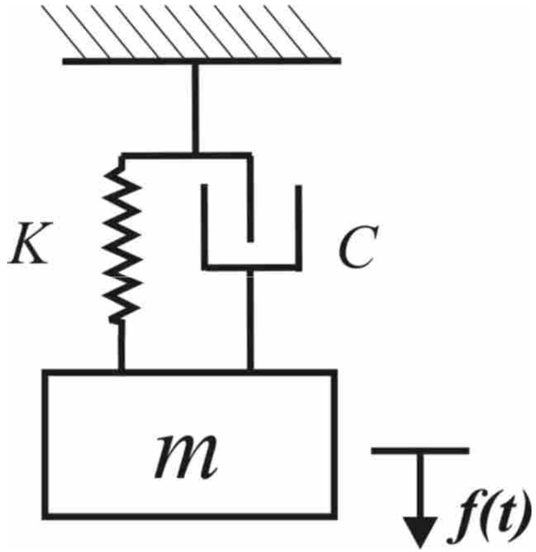
$$s(t) = \frac{1}{C}\int_0^t i(\alpha)\,d\alpha$$



$$e(t) = R.i(t) + s(t)$$

Modélisation mathématique

- Exemple d'un système mécanique :



$$m\frac{d^2x(t)}{dt^2}+c\frac{dx(t)}{dt}+kx(t)=f(t)$$

Avec :

- c : amortissement
- k : coefficient de raideur
- x(t) : le déplacement

$$f(t) \longrightarrow \boxed{\text{SYSTEME}} \longrightarrow x(t)$$

Modélisation mathématique

- Exemple d'un moteur à courant continu entraînant une charge :

  L'entrée est la tension d'induit appliquée au moteur u(t) et la sortie est la vitesse de rotation de la charge Ω(t).

$$\Gamma_m(t) = k.i(t)$$

$$e(t) = k.\Omega(t)$$

$$u(t) = r.i(t) + L.\frac{di(t)}{dt} + e(t)$$

$$\Gamma_m(t) = J\frac{d\Omega(t)}{dt} + \Gamma_r(t) + f\Omega(t)$$

avec :

k : coef. proportionnalité

L : inductance d'induit

r : résistance d'induit

Γ_m : couple moteur

e : fcem

J : inertie totale

f : coef. de frottement visqueux

Γ_r : couple résistant

Modélisation mathématique

- Exemple d'une voiture :

TROP COMPLIQUE !

Mais il doit y avoir beaucoup d'équations différentielles !!!!
Dans ce cas, nous divisons le système
en sous-systèmes individualisables.

Modélisation mathématique

- Nous allons étudier les systèmes linéaires continus et réalisables :

Un système est dit linéaire si son comportement est décrit par des équations différentielles linéaires à coefficients constants.

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \frac{d^i s(t)}{dt^i} = \sum_{j=0}^{m} b_j \frac{d^j e(t)}{dt^j}$$

Avec :

- a_i et b_j : coefficients constants,
- n = ordre du système,
- un système physique est réalisable si n > m.

Modélisation mathématique

- Transformée de Laplace :

A toute fonction *f(t)*, nous faisons correspondre une fonction F(p) de variable complexe *p.*

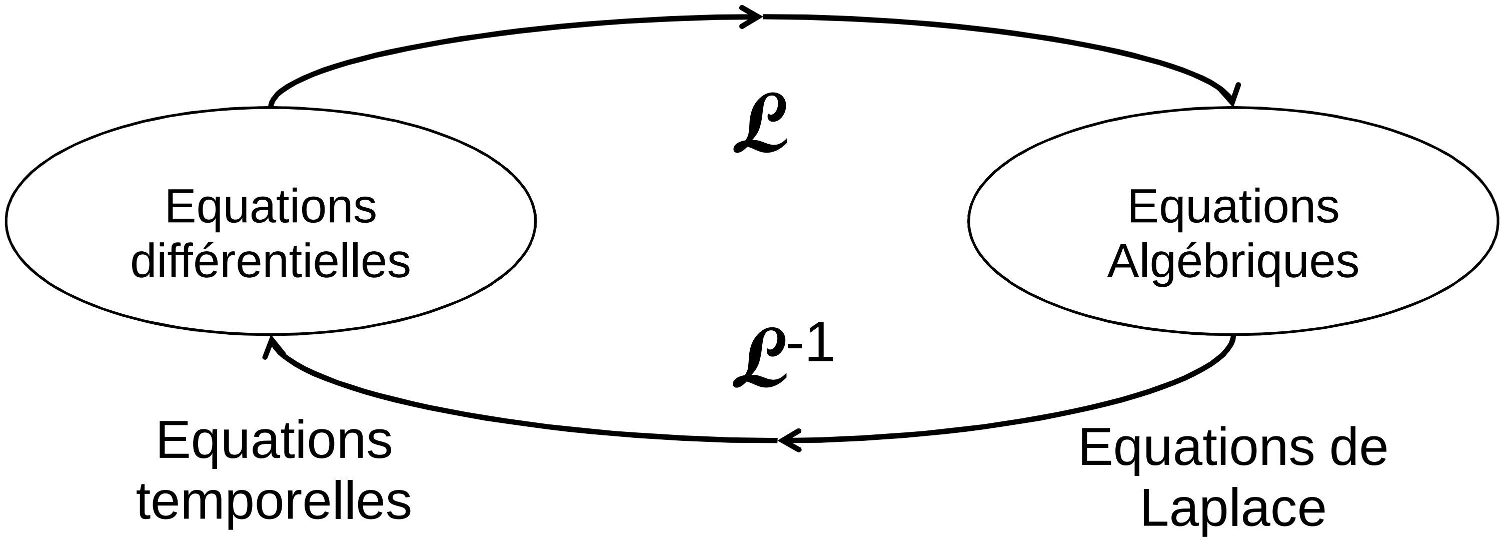
Nous définissons la transformée de Laplace :

$$F(p) = L(f(t)) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt$$

La transformée de Laplace est l'outil le plus important et permet la résolution dans le domaine <u>fréquentiel</u> de problèmes posés dans le domaine temporel.

Modélisation mathématique

- Transformée de Laplace :



$$e(t) \xrightarrow{\quad\quad\mathcal{L}\quad\quad} E(p)$$

$$s(t) \xleftarrow[\quad\quad\mathcal{L}^{-1}\quad\quad]{} S(p)$$

Modélisation mathématique

- Propriétés de la TL :

Nous considérons les **conditions initiales nulles**.

Linéarité : $$TL\left(a.f(t)+b.g(t)\right)=a.F(p)+b.G(p)$$

Dérivation première : $$TL\left(\frac{df(t)}{dt}\right)=p.F(p)$$

Dérivation : $$TL\left(\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right)=p^n.F(p)$$

Intégration : $$TL\left(\int_0^t f(\alpha)d\alpha\right)=\frac{1}{p}.F(p)$$

Modélisation mathématique

•Propriétés de la TL :

Le théorème de la valeur finale permet de connaître le comportement final de notre système.

$$\boxed{\lim_{t \to \infty} f(t) = \lim_{p \to 0} p.F(p)}$$

Les autres transformations de Laplace sont données dans le tableau de la page 13 du polycopié

Modélisation mathématique

• *Exercice C-1:*

Donner la transformée de Laplace de l'équation différentielle ci-dessous.

$$m\frac{d^2x(t)}{dt^2}+c\frac{dx(t)}{dt}+kx(t)=f(t)$$

Modélisation mathématique

•*Exercice C-2*:

Donner la transformée de Laplace de l'équation différentielle ci-dessous.

$$\Gamma_m(t) = k.i(t) \qquad \Rightarrow$$

$$e(t) = k.\Omega(t) \qquad \Rightarrow$$

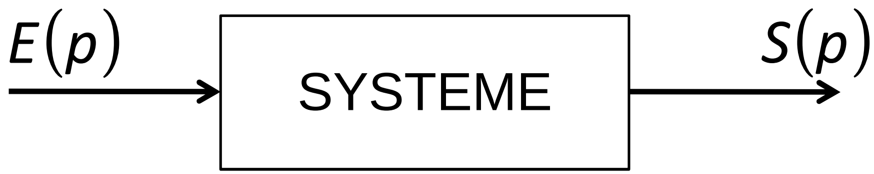
$$u(t) = r.i(t) + L.\frac{di(t)}{dt} + e(t) \qquad \Rightarrow$$

$$\Gamma_m(t) = J\frac{d\Omega(t)}{dt} + \Gamma_r(t) + f\Omega(t) \qquad \Rightarrow$$

Modélisation mathématique

•Fonction de transfert :

Nous appelons fonction de transfert, le rapport des deux polynômes associés à l'entrée et à la sortie de notre système.



Nous obtenons la fonction du transfert du système :

$$G(p)=\frac{S(p)}{E(p)}=\frac{\sum_{j=0}^{m} b_j.p^j}{p^k.\sum_{i=0}^{n} a_i.p^i}$$

Nous appellerons :

n + k = Ordre de la fonction de transfert : le degré du dénominateur obtenu après simplification

k = Classe de la fonction de transfert : la valeur de la puissance de p mise en facteur au dénominateur.

Modélisation mathématique

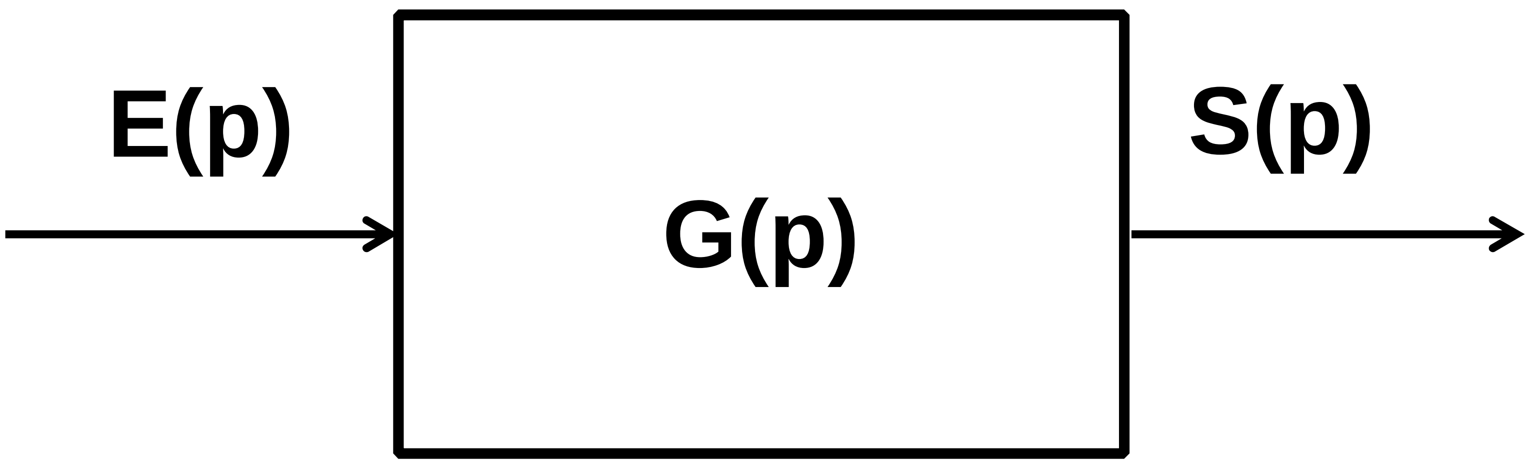
- Représentation des systèmes par un schéma bloc :

  - Dans certains cas, il est plus simple de représenter un système sous forme d'un schéma pour en déduire la fonction de transfert complète.

  - Pour **chacune** des équations différentielles, écrites ensuite sous Laplace, nous la représentons sous la forme d'un bloc **unique** et nous « assemblons » ces différents blocs.

Modélisation mathématique

- Représentation des systèmes par un schéma bloc :

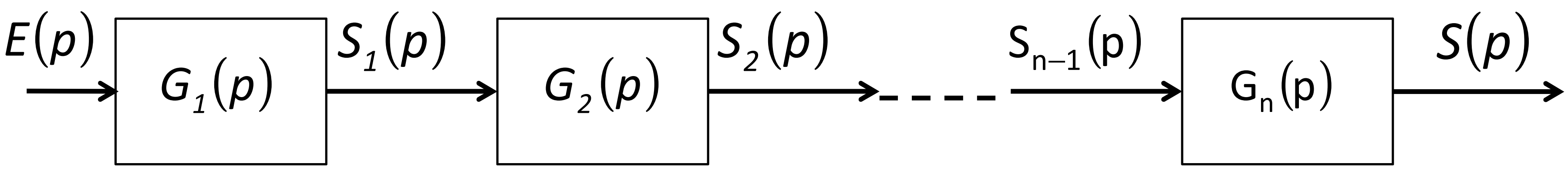


$$E(p).G(p)=S(p)$$

$$S(p)=G(p).E(p)$$

Modélisation mathématique

- Fonction de transfert pour des systèmes en série :



$$G_1(p) = \frac{S_1(p)}{E(p)} \qquad G_2(p) = \frac{S_2(p)}{S_1(p)} \qquad G_n(p) = \frac{S(p)}{S_{n-1}(p)}$$

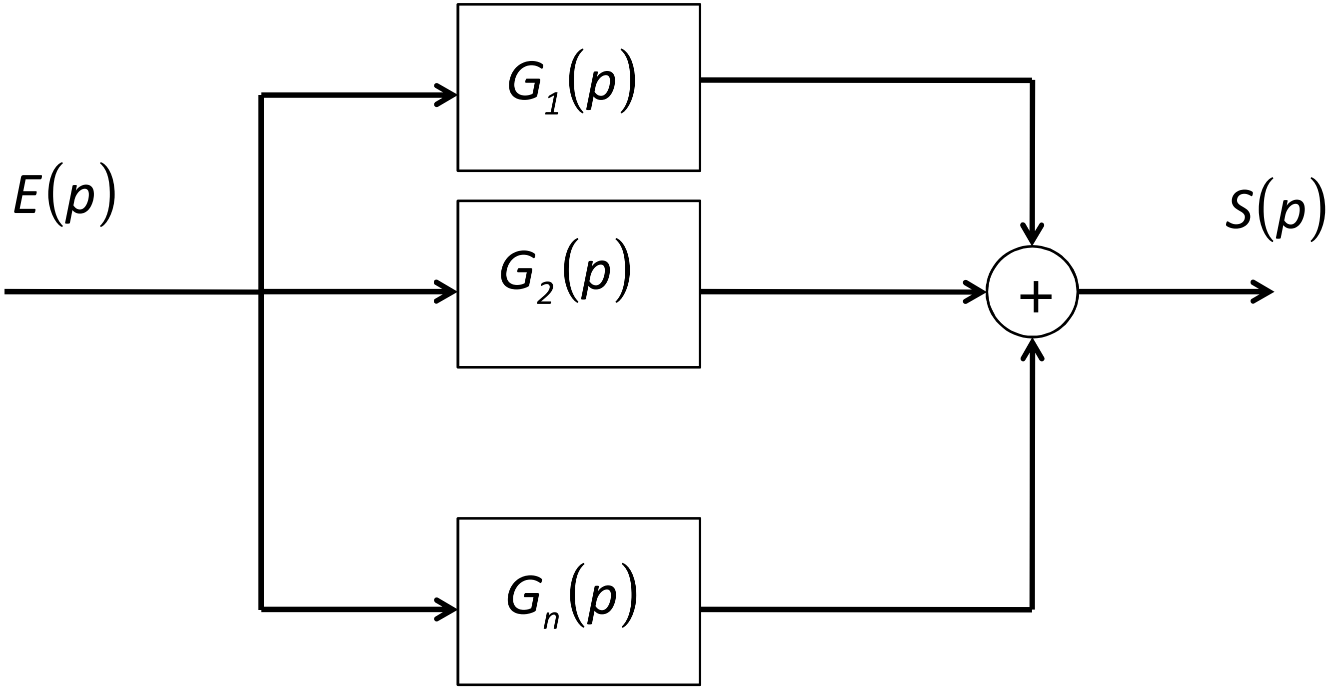
$$E(p).G_1(p) = S_1(p) \qquad S_1(p).G_2(p) = S_2(p) \qquad S_{n-1}(p).G_n(p) = S(p)$$

$$E(p).G_1(p).G_2(p).\cdots.G_n(p) = S(p)$$

$$\boldsymbol{G(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = G_1(p).G_2(p).\cdots.G_n(p)}$$

Modélisation mathématique

- Fonction de transfert pour des systèmes en parallèle :

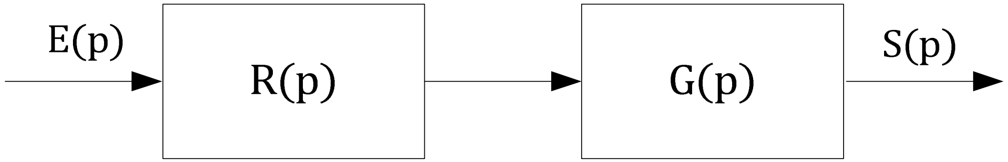


$$G(p) = G_1(p) + G_2(p) + \cdots + G_n(p)$$

Modélisation mathématique

•*Exercice C-3* (partie 1)

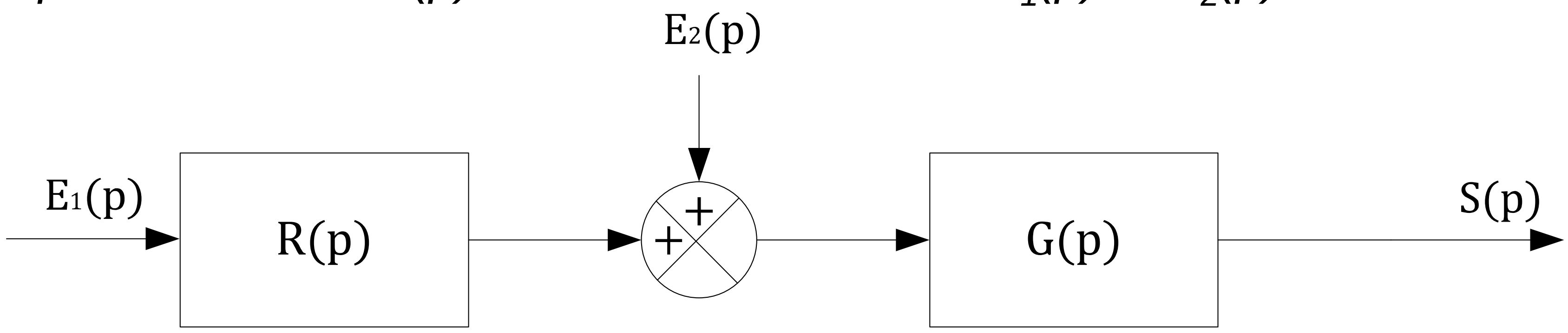
Exprimer la sortie S(p) en fonction de l'entrée E(p).



Modélisation mathématique

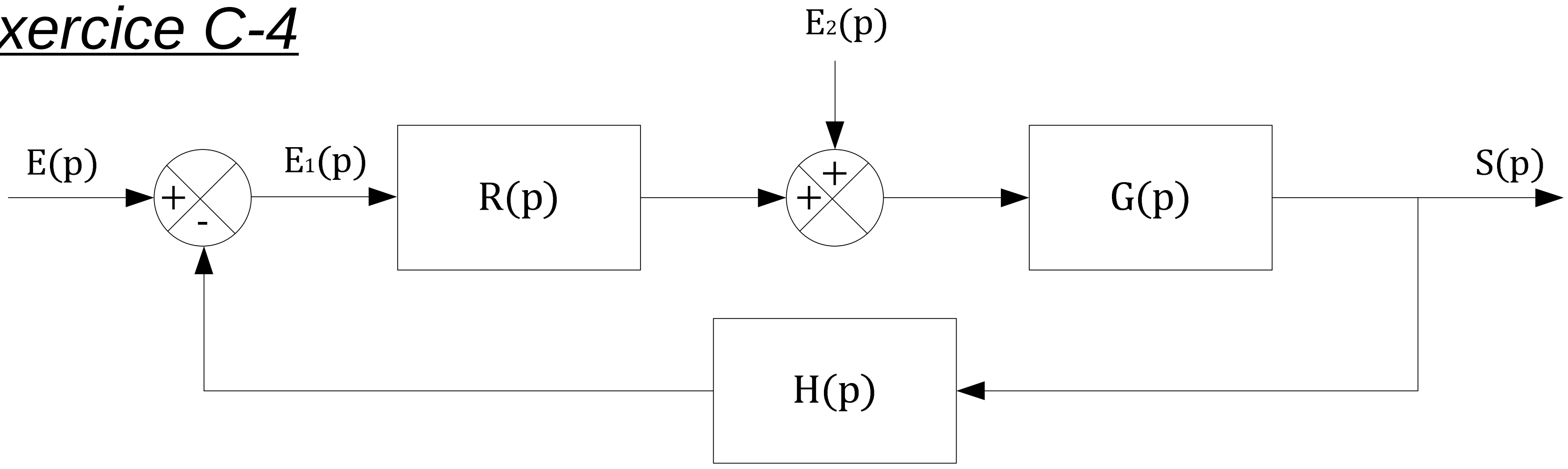
•*__Exercice C-3__* (partie 2)

Exprimer la sortie $S(p)$ en fonction de l'entrée $E_1(p)$ et $E_2(p)$.



Modélisation mathématique

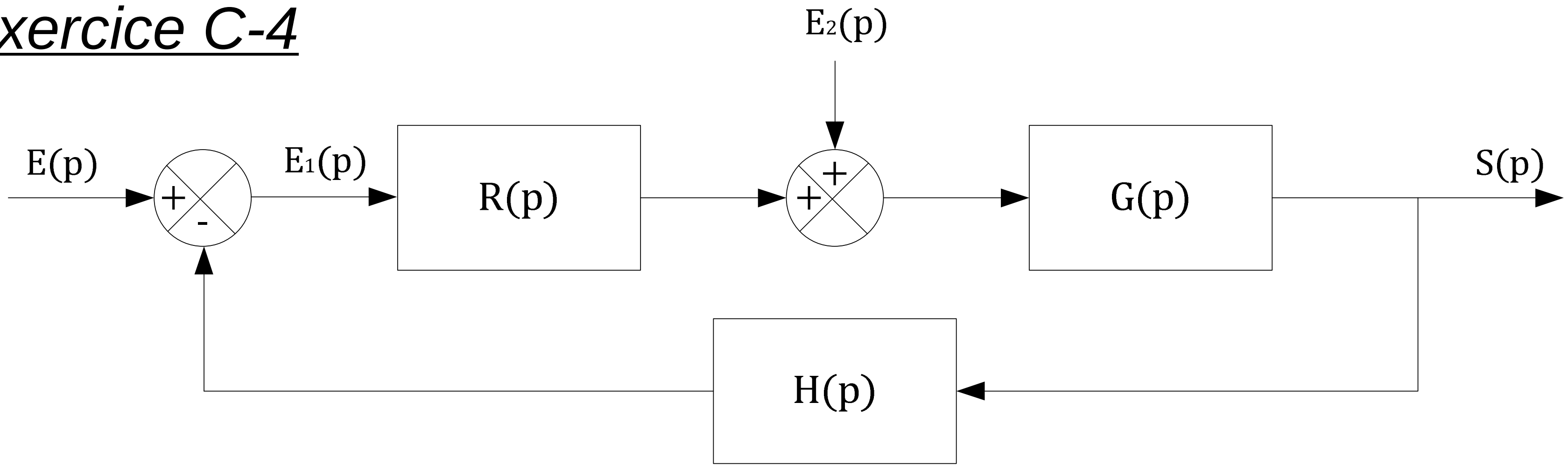
•*Exercice C-4*



1- Exprimer la sortie S(p) en fonction de l'entrée $E_1(p)$ et $E_2(p)$.

Modélisation mathématique

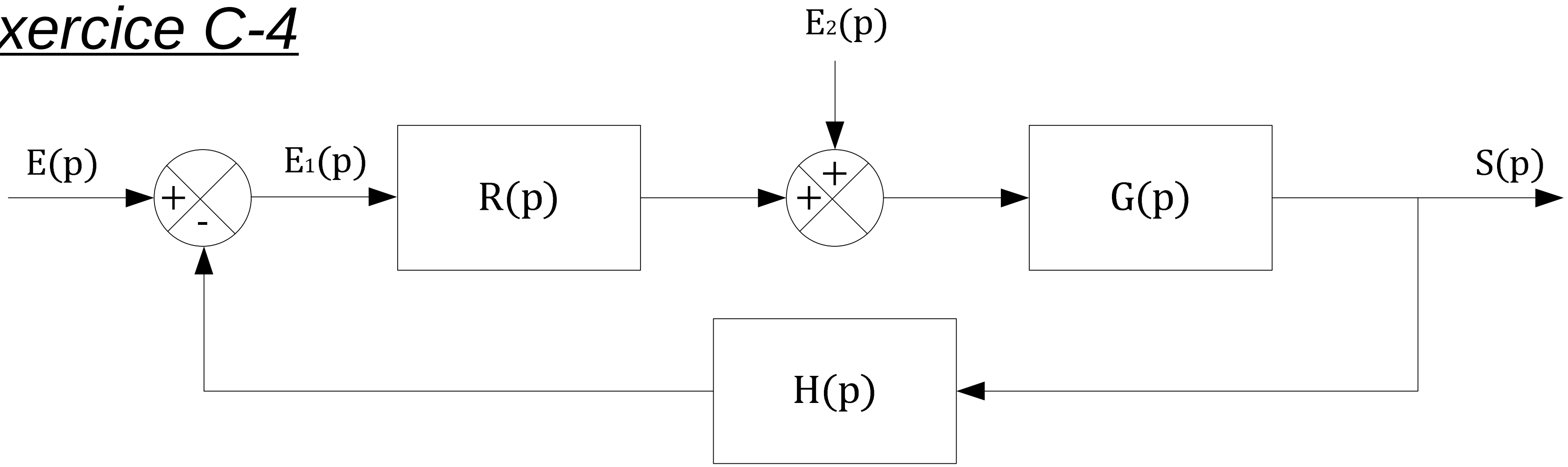
•*Exercice C-4*



2- Exprimer $E_1(p)$ en fonction de E(p) et S(p) .

Modélisation mathématique

•*Exercice C-4*



3- Exprimer S(p) en fonction de E(p) et $E_2(p)$.

Modélisation mathématique

- Représentation des systèmes par un schéma bloc :

  ➢ *<u>Exercice C-5</u> : Faire le schéma bloc du système décrit par les équations suivantes :*

$$\begin{cases} i(t) = \dfrac{K}{\pi}\left(e(t) - s(t)\right) \\ \dfrac{dn(t)}{dt} + 100.n(t) = 100.i(t) \\ \dfrac{d^2s(t)}{dt^2} + 1{,}7.\dfrac{ds(t)}{dt} = 0{,}2.n(t) \end{cases}$$

Modélisation mathématique

- Etape N°1 : transformée de Laplace

$$i(t) = \frac{K}{\pi}\left(e(t) - s(t)\right)$$

$$\frac{dn(t)}{dt} + 100.n(t) = 100.i(t)$$

$$\frac{d^2 s(t)}{dt^2} + 1{,}7.\frac{ds(t)}{dt} = 0{,}2.n(t)$$

$$\xrightarrow{\mathcal{L}}$$

1. $$\left(E(p) - S(p)\right).\frac{K}{\pi} = I(p)$$
2. $$100.I(p) = p.N(p) + 100.N(p)$$
3. $$0{,}2.N(p) = p^2.S(p) + 1{,}7.p.S(p)$$

Modélisation mathématique

- Etape N°2 : mise en facteur

1 $I(p)=\frac{K}{\pi}(E(p)-S(p))$

2 $p.N(p)+100.N(p)=100.I(p)$ $\Rightarrow$

3 $p^2.S(p)+1{,}7.p.S(p)=0{,}2.N(p)$

1 $\boldsymbol{I(p)=\frac{K}{\pi}(E(p)-S(p))}$

2 $N(p).(p+100)=100.I(p)$

3 $S(p).(p^2+1{,}7.p)=0{,}2.N(p)$

Modélisation mathématique

- Etape N°2 : mise en facteur

1 $$I(p)=\frac{K}{\pi}(E(p)-S(p))$$

2 $$N(p).(p+100)=100.I(p)$$

3 $$S(p).(p^2+1,7.p)=0,2.N(p)$$

$\Rightarrow$

1 $$(E(p)-S(p)).\frac{K}{\pi}=I(p)$$

2 $$I(p).\frac{100}{p+100}=N(p)$$

3 $$N(p).\frac{0,2}{p^2+1,7.p}=S(p)$$

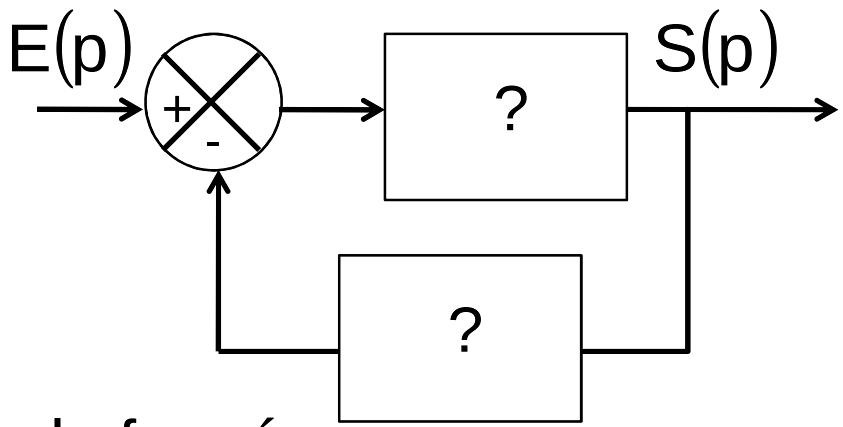
Modélisation mathématique

- Etape N°3 : définir l’entrée et la sortie

ENTREE : E(p)

SORTIE : S(p)

Voici la forme recherchée :

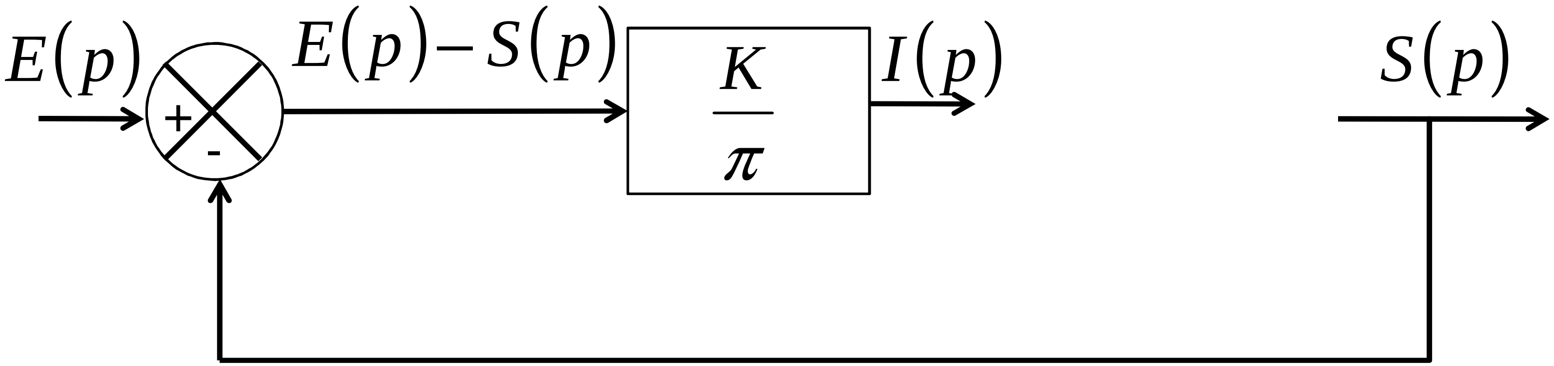


Boucle fermée

Modélisation mathématique

- Etape N°4 : trouver l'équation qui fait apparaitre le comparateur (attention dans certain cas il n'y a pas de comparateur dans les équations)

$$1 \quad I(p) = \frac{K}{\pi}\left(E(p) - S(p)\right) \qquad \left(E(p) - S(p)\right).\frac{K}{\pi} = I(p)$$

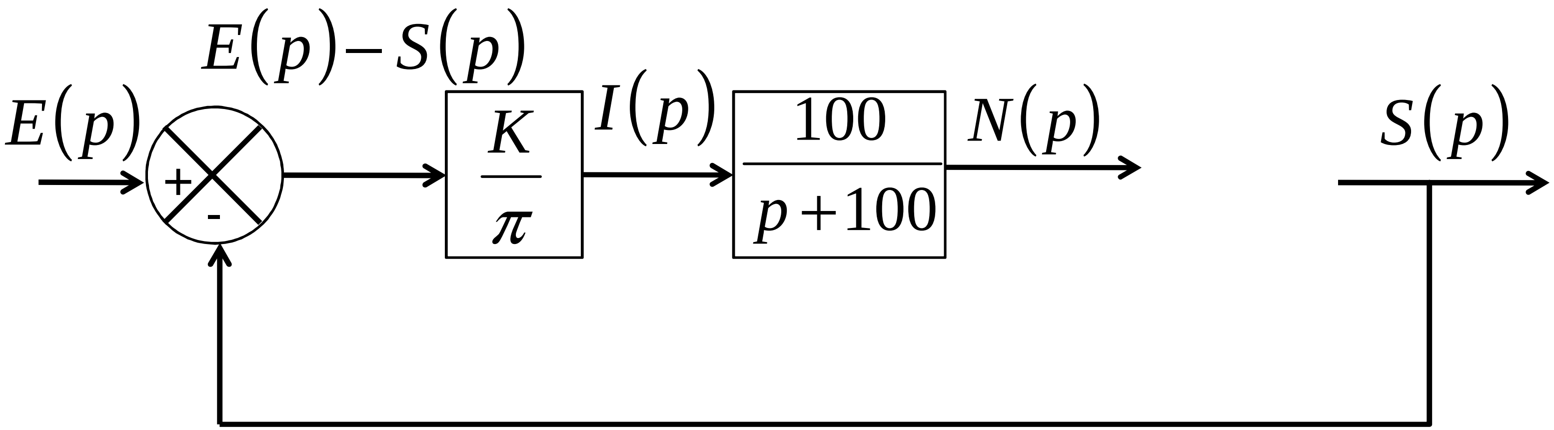


Modélisation mathématique

- Etape N°5 : Compléter le schéma blocs avec les autres équations

2 $N(p)=\dfrac{100}{p+100}.I(p)$

$$I(p).\frac{100}{p+100}=N(p)$$

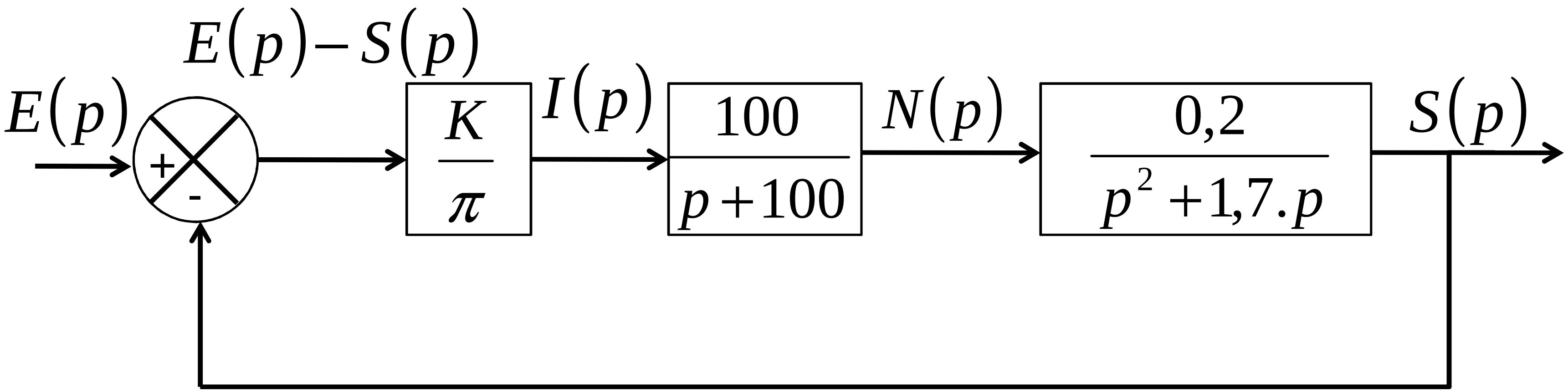


Modélisation mathématique

- Etape N°5 : Compléter le schéma blocs avec les autres équations

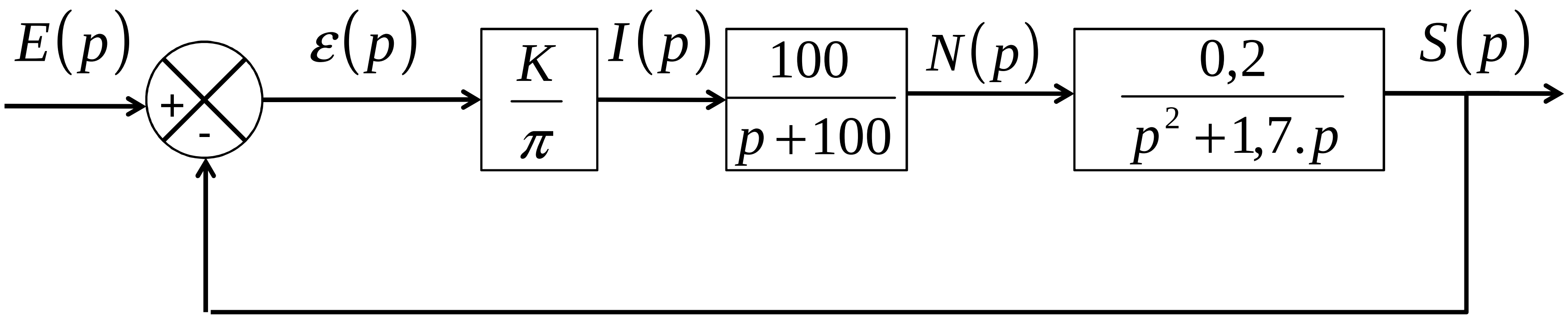
3 $$S(p) = \frac{0,2}{p^2 + 1,7.p}.N(p)$$

$$N(p).\frac{0,2}{p^2 + 1,7.p} = S(p)$$



Modélisation mathématique

- Etape N°6 : Résultat



Modélisation mathématique

- Représentation des systèmes par un schéma bloc :

➢ *Exercice C-6 :* Exemple du moteur à courant continu (entrée u(t), sortie Ω(t))

$$\begin{cases} \Gamma_m(t) = k.i(t) \\ e(t) = k.\Omega(t) \\ u(t) = r.i(t) + L.\dfrac{di(t)}{dt} + e(t) \\ \Gamma_m(t) = J\dfrac{d\Omega(t)}{dt} + \Gamma_r(t) + f\Omega(t) \end{cases}$$

$$\Gamma_m(t) = k.i(t) \qquad \Gamma_m(P) = k.I(P)$$

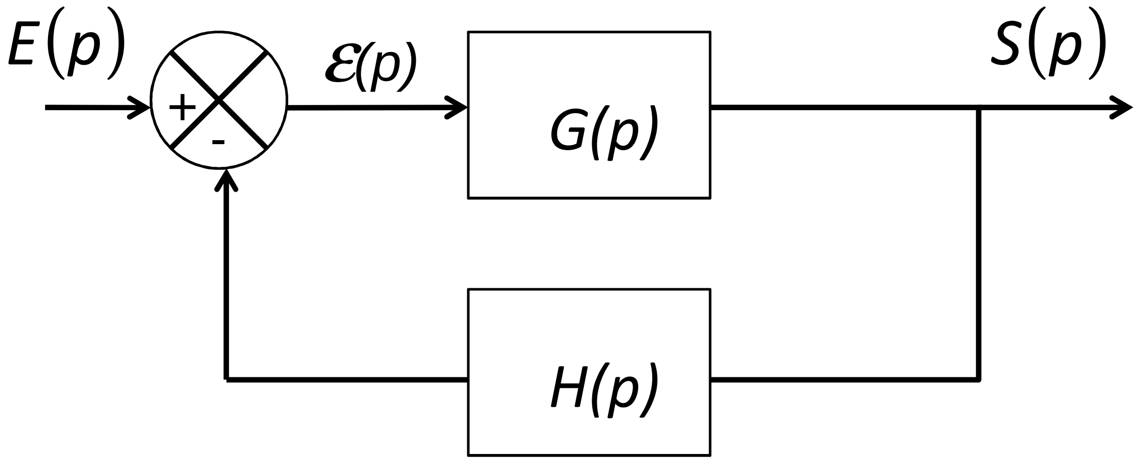
$$e(t) = k.\Omega(t) \qquad E(P) = k.\Omega(P)$$

$$u(t) = r.i(t) + L.\frac{di(t)}{dt} + e(t) \qquad U(P) = r.I(P) + L.P.I(P) + E(P)$$

$$\Gamma_m(t) = J\frac{d\Omega(t)}{dt} + \Gamma_r(t) + f\Omega(t) \qquad \Gamma_m(P) = J.P.\Omega(P) + \Gamma_r(P) + f.\Omega(P)$$

Modélisation mathématique

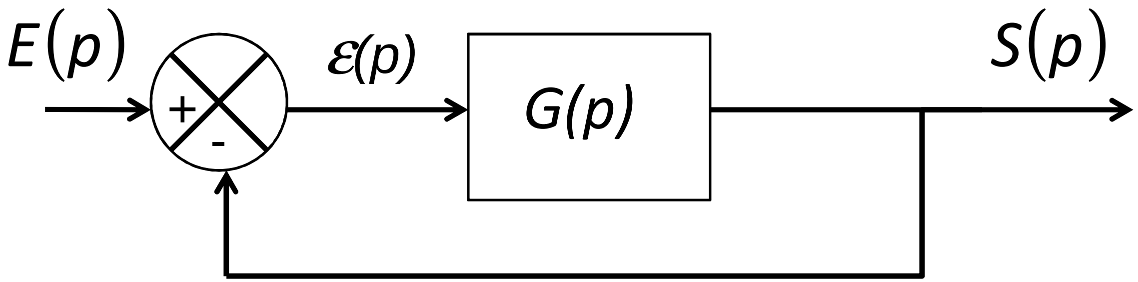
- Fonction de transfert pour une boucle de retour :



$$H_{BF}(p) = \frac{G(p)}{1 + G(p).H(p)}$$

Modélisation mathématique

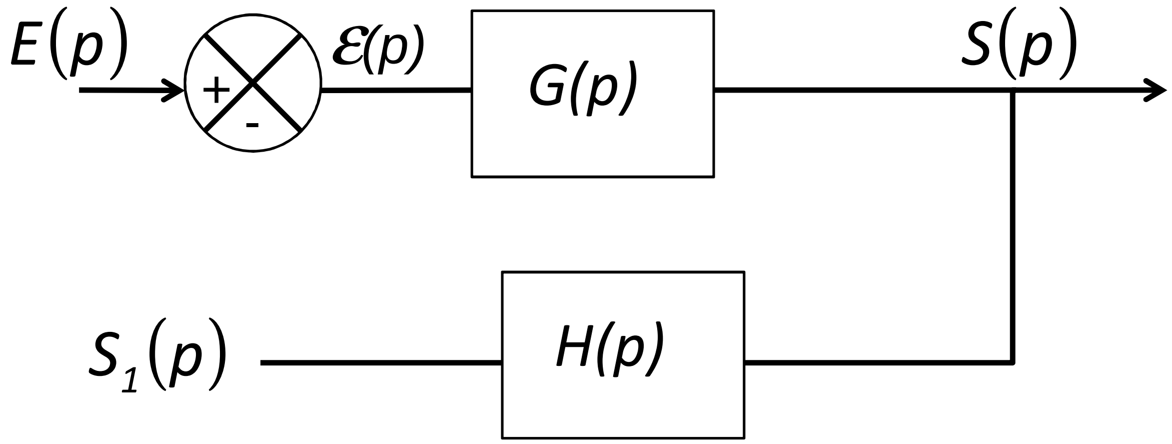
- Fonction de transfert pour une boucle à retour unitaire :



$$H_{BF}(p) = \frac{G(p)}{1 + G(p)}$$

Modélisation mathématique

- Fonction de transfert en BO:

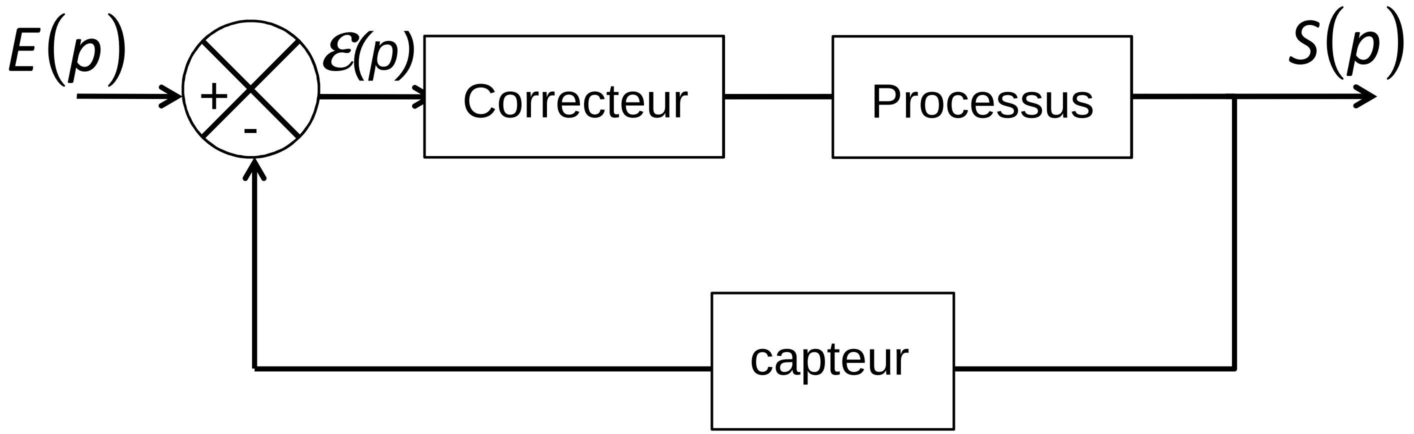


A partir de la BF, on « déconnecte » le retour !

$$H_{BO}(p) = \frac{S_1(p)}{E(p)} = G(p).H(p)$$

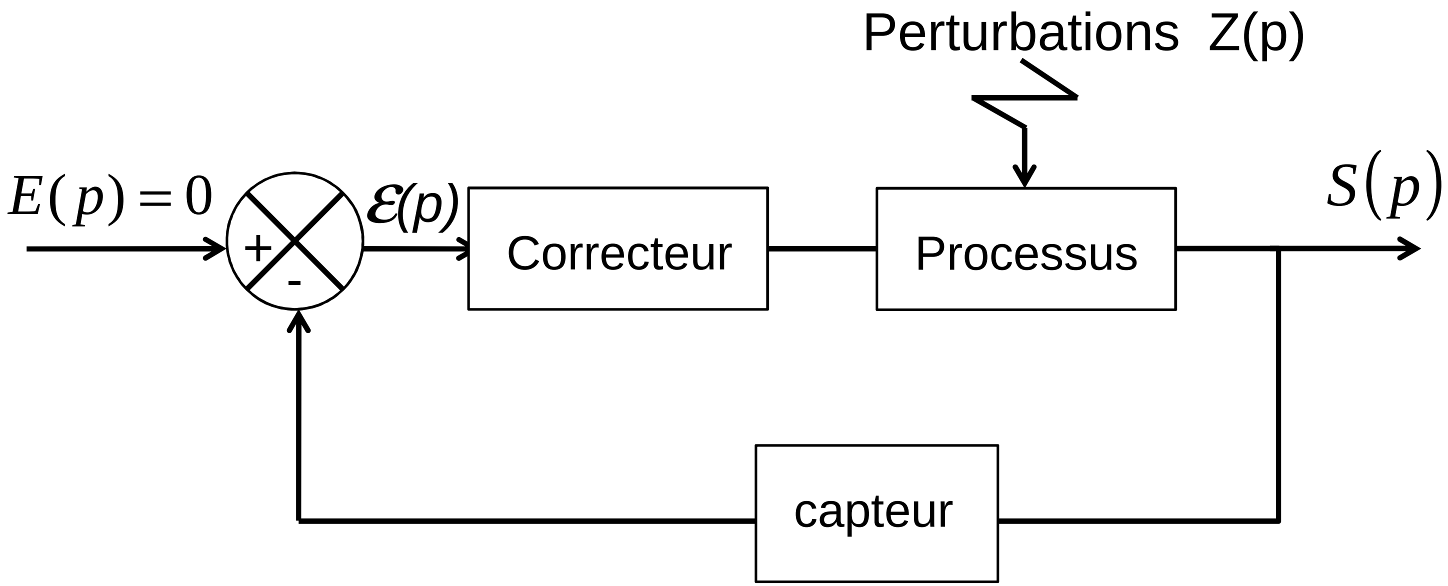
Modélisation mathématique

- Régulation / Asservissement
  - **ASSERVISSEMENT** : C'est la poursuite par la sortie d'une consigne qui peut être variable au cours du temps. La perturbation est supposée constante et nous voulons une erreur nulle.



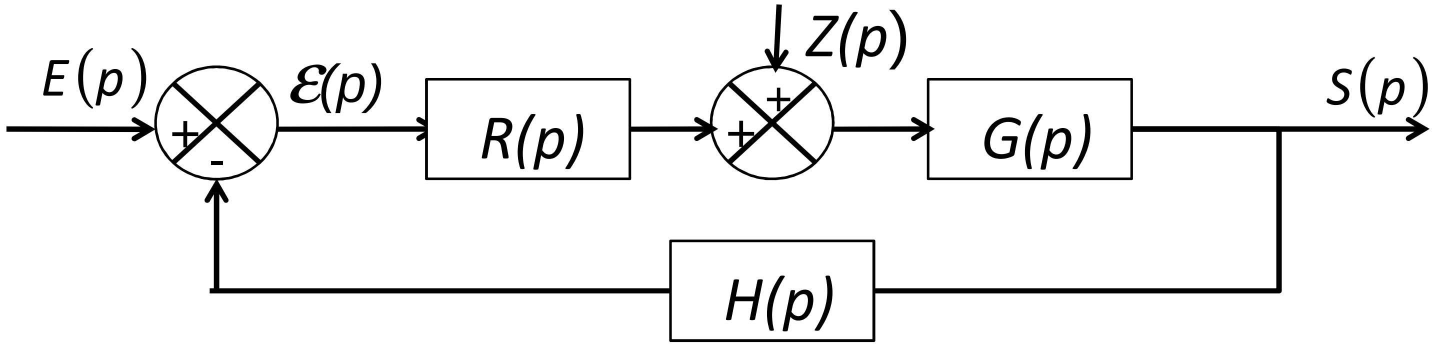
Modélisation mathématique

- Régulation / Asservissement
  - **REGULATION** : C'est la compensation de perturbations variables sur la sortie pour une entrée constante. Dans ce cas, nous ne nous intéressons qu'aux perturbations.



Modélisation mathématique

- Asservissement / Régulation



- Dans le cadre de l'asservissement, la consigne est variable. La fonction de transfert associée est donc :

$$\mathbf{H_{bf\ ass}(p) = S(p) / E(p)}$$

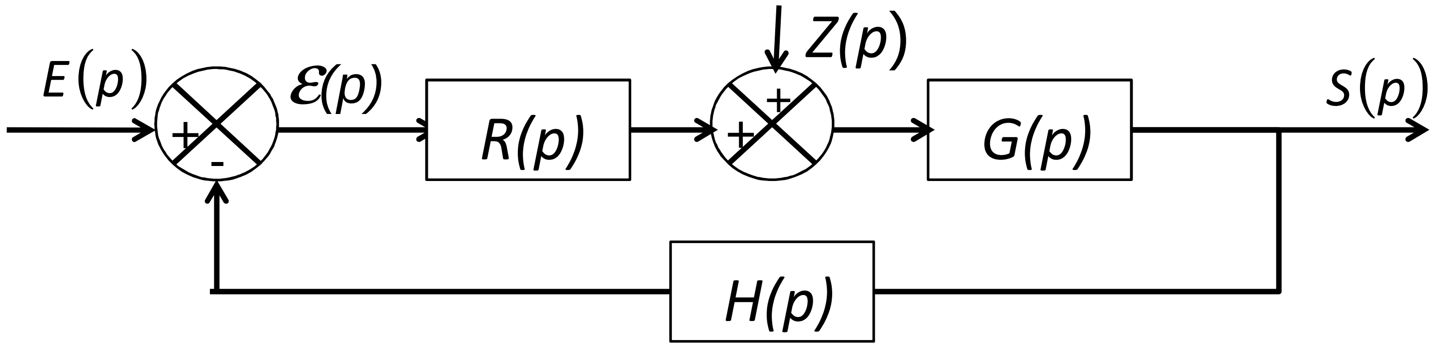
- Dans le cadre de la régulation, la consigne est constante et nous ne nous intéressons qu'aux perturbations. La fonction de transfert sera alors :

$$\mathbf{H_{bf\ reg}(p) = S(p) / Z(p)}$$

- **Dans les deux cas, l'erreur en régulation ou l'erreur en asservissement se calcule au même endroit du schéma bloc!**

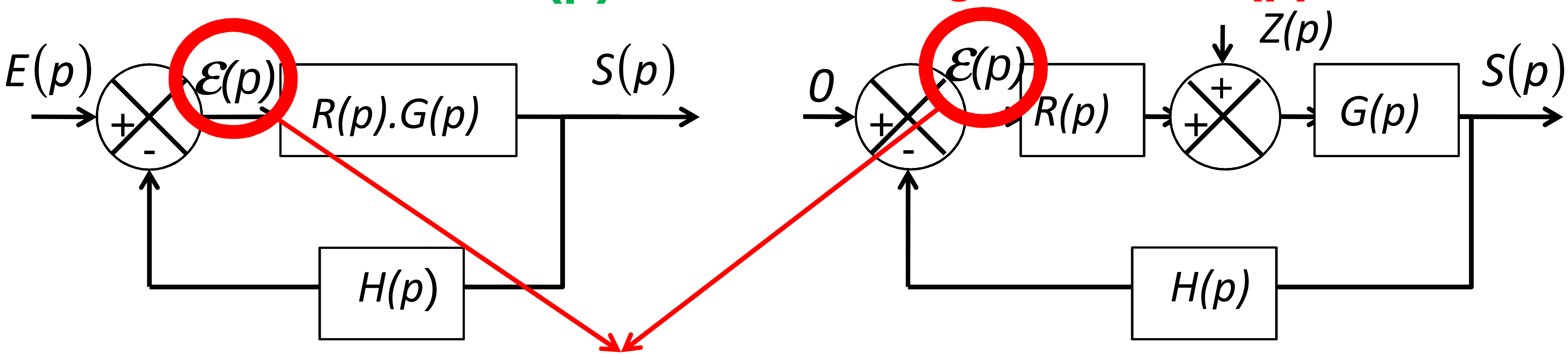
Modélisation mathématique

- Régulation / Asservissement



Asservissement : Z(p)=0

Régulation : E(p)=0



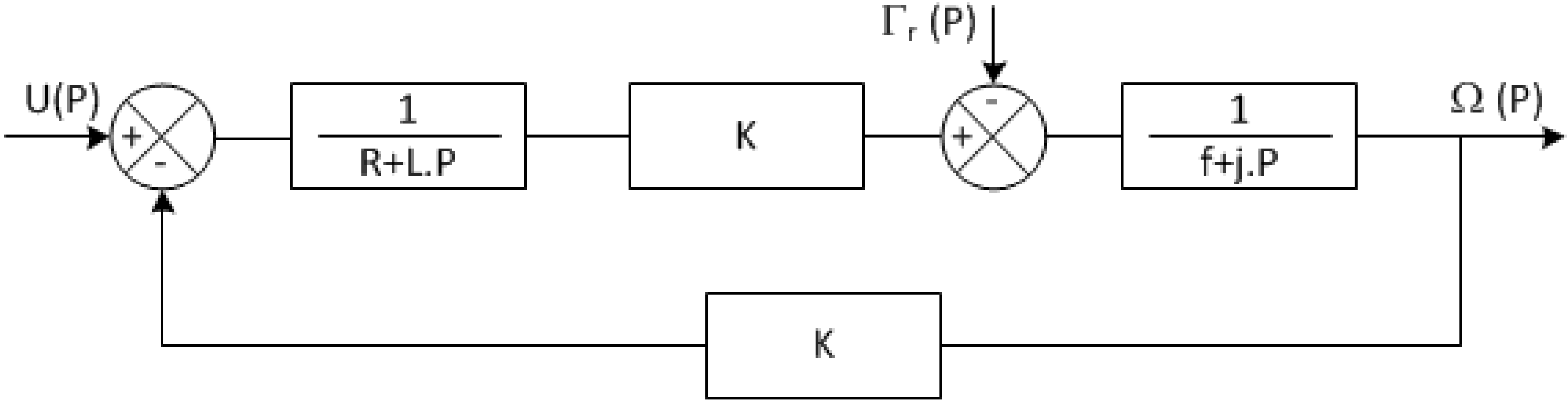
ERREUR

Modélisation mathématique

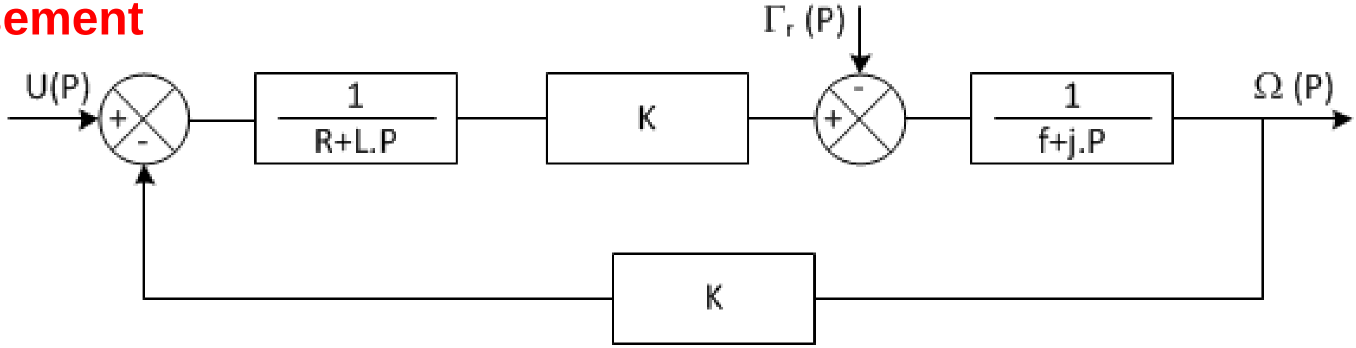
- *<u>Exercice C-7 :</u> soit un moteur à courant continu entraînant une charge. L'entrée est la tension d'induit appliquée au moteur u(t) et la sortie est la vitesse de rotation de la charge Ω(t).*

  Donnez la fonction de transfert de ce MCC en asservissement et en régulation.

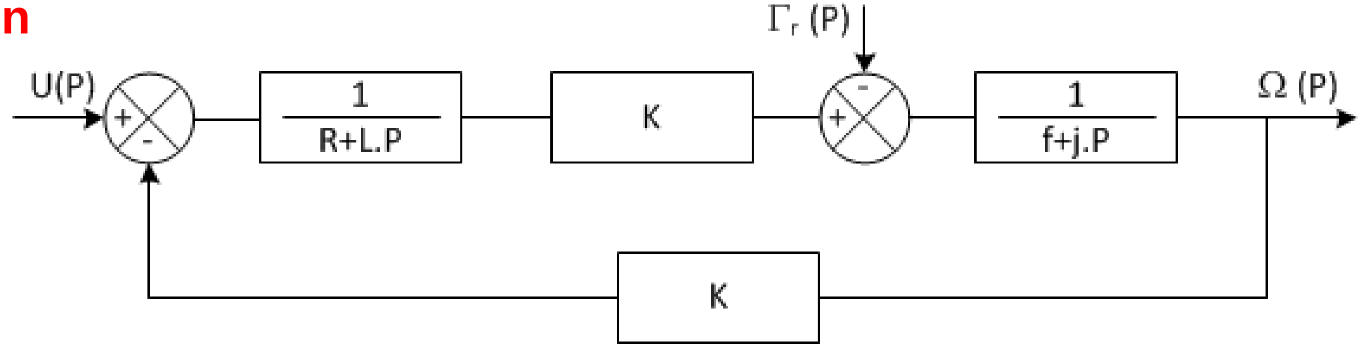
  Donnez les expressions de l'erreur en asservissement et en régulation



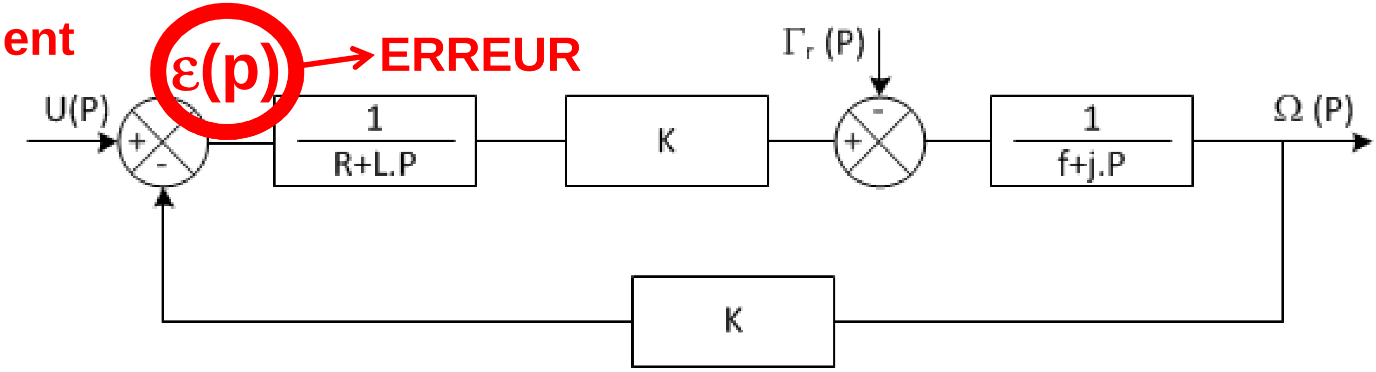
Asservissement



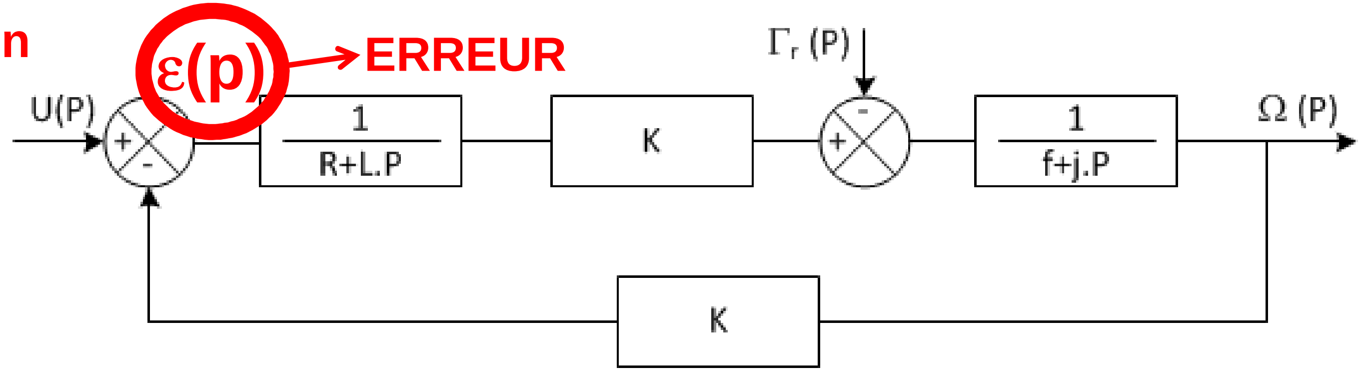
Régulation



Asservissement



Régulation



CHAPITRE 3

Dynamique des Systèmes Asservis

Dynamique des Systèmes Asservis

- Introduction :

  - Généralement, nous appliquons à l'entrée du système un signal temporel, que la sortie suit plus ou moins suivant le système à étudier.

  - Les objectifs de l'analyse de la dynamique des SA sont de pouvoir comparer les performances de différents systèmes suivant un signal d'entrée bien défini, mais aussi de pouvoir appréhender le système de commande idéal pour ce type de système.

Dynamique des Systèmes Asservis

• Introduction :

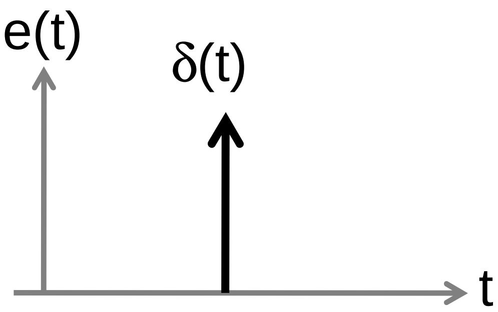
- Suivant la nature du signal mis en entrée, différentes informations peuvent être obtenues.
- Avec un signal temporel, nous pouvons caractériser :
  - la rapidité,
  - la précision,
  - la stabilité du système.
- Avec un signal fréquentiel, nous pourrons déterminer les réglages pour obtenir la stabilité du système.

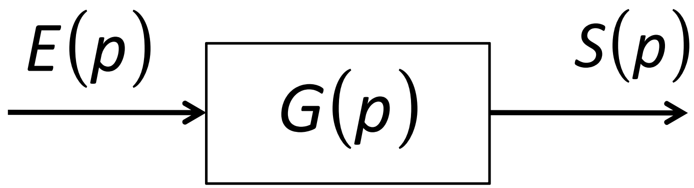
Dynamique des Systèmes Asservis

- Introduction :
  - Les critères pour le choix du signal à appliquer sont :
    - Faciliter la résolution des équations différentielles
    - Attaquer un système plus difficile
    - Pouvoir comparer les performances de différents systèmes
  - Les signaux appliqués sont :
    - Un dirac,
    - Un échelon,
    - Une rampe,
    - Une excitation harmonique.

Dynamique des Systèmes Asservis

- Signaux d'entrée:
  - Impulsion de Dirac :





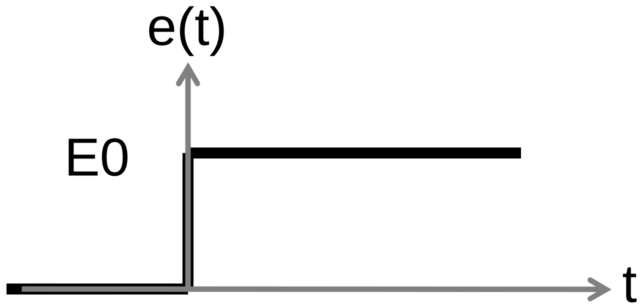
Or TL($\delta(t)$)=1

d'où S(p) = G(p).E(p) = G(p)

Si l'entrée est une impulsion de dirac, la réponse est dite **IMPULSIONNELLE**

Dynamique des Systèmes Asservis

- Signaux d'entrée:
  - Echelon :

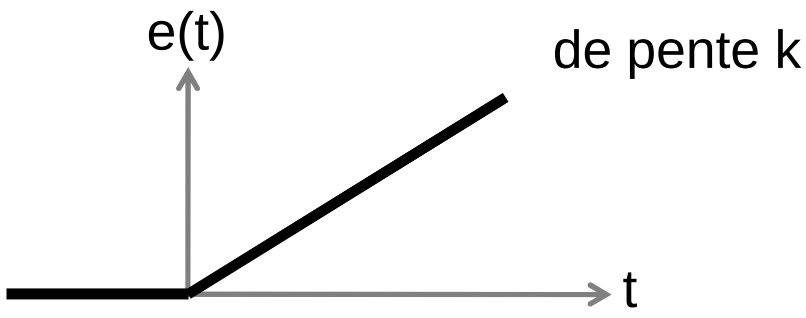


Avec TL(E0) = E0/p

Si l'entrée est un échelon unitaire, la réponse est dite **INDICIELLE**

Dynamique des Systèmes Asservis

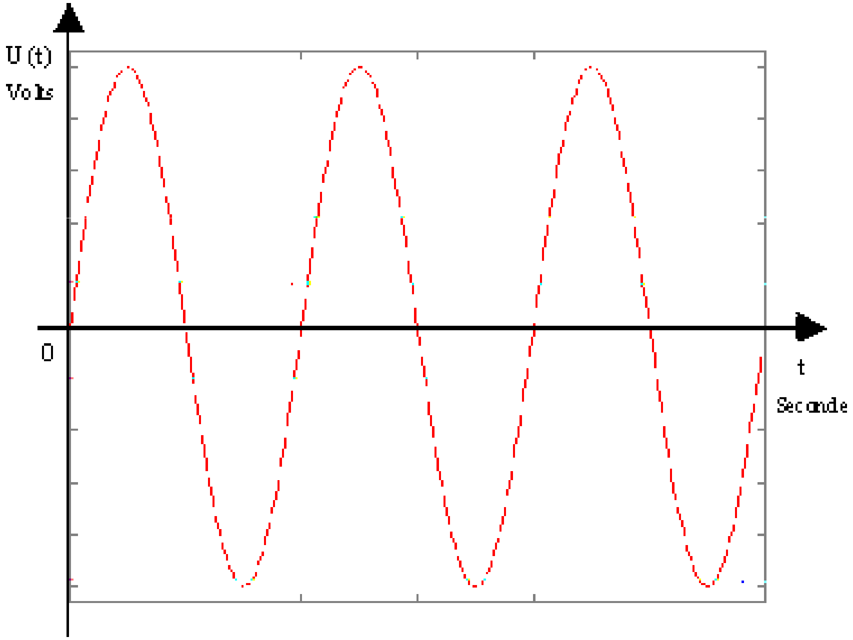
- Signaux d'entrée:
  - Entrée de vitesse (rampe) :



$$TL(e(t)) = k/p^2$$

Dynamique des Systèmes Asservis

- Signaux d'entrée :
  - Excitation harmonique

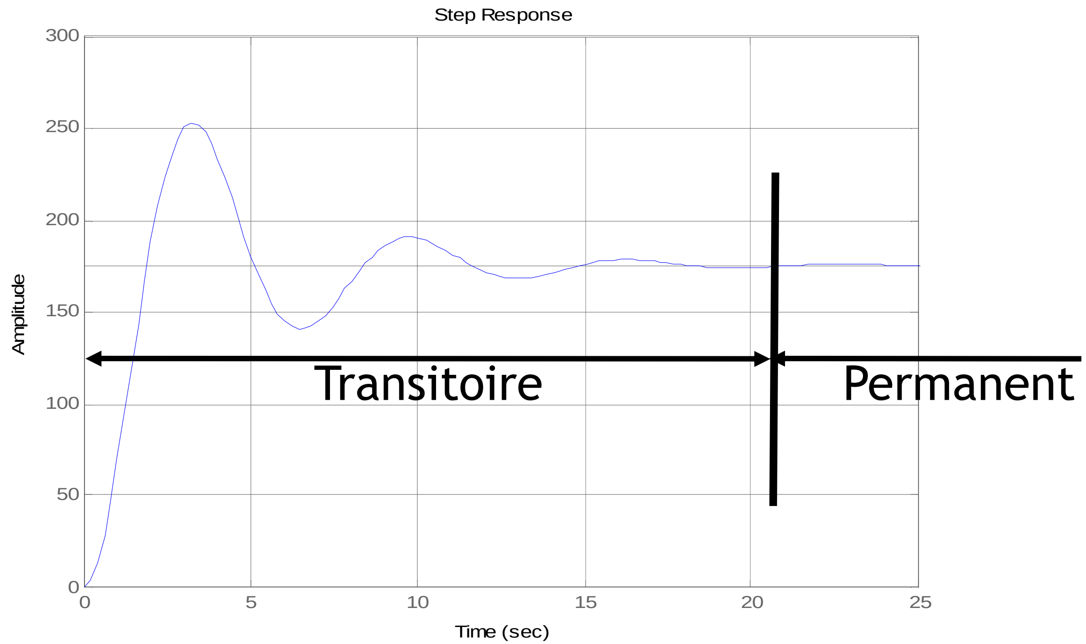


$$TL\left(A_0 \sin \omega t\right) = \frac{A_0 . \omega}{p^2 + \omega^2}$$

REPONSE HARMONIQUE

Dynamique des Systèmes Asservis

- Réponses d'un système asservi



Régime transitoire : réaction d'un système au repos lorsque nous appliquons un signal d'entrée, ou lorsque le signal d'entrée est modifié.

Régime permanent : se met en place à la fin du régime transitoire lorsque le signal de sortie est constant.

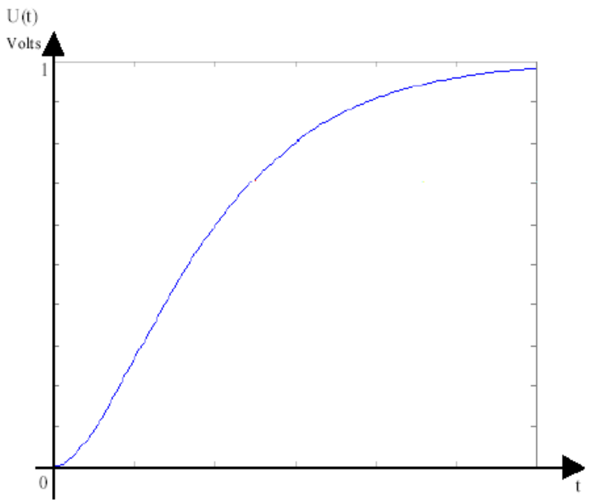
Dynamique des Systèmes Asservis

• Réponses d'un système asservi

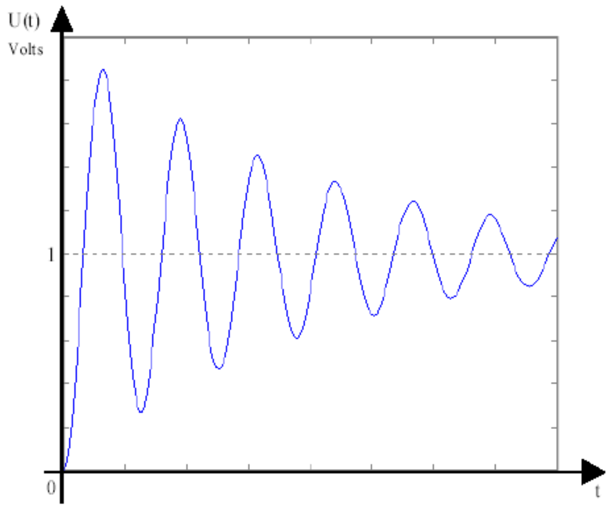
Il faut donc un certain temps à un système pour atteindre son régime permanent.

La période entre t=0 et ce régime correspond au régime <u>transitoire</u>.

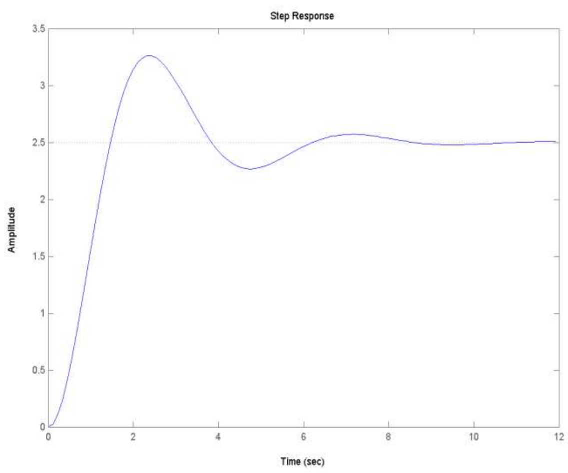
Ce temps permet de définir différents types d 'asservissements :



Asservissement « mou »



Asservissement trop peu amorti



Bon asservissement

Dynamique des Systèmes Asservis

- Performances des SA :

L'asservissement d'un système est caractérisé par 3 grandeurs :

- sa rapidité,
- sa stabilité,
- sa précision.

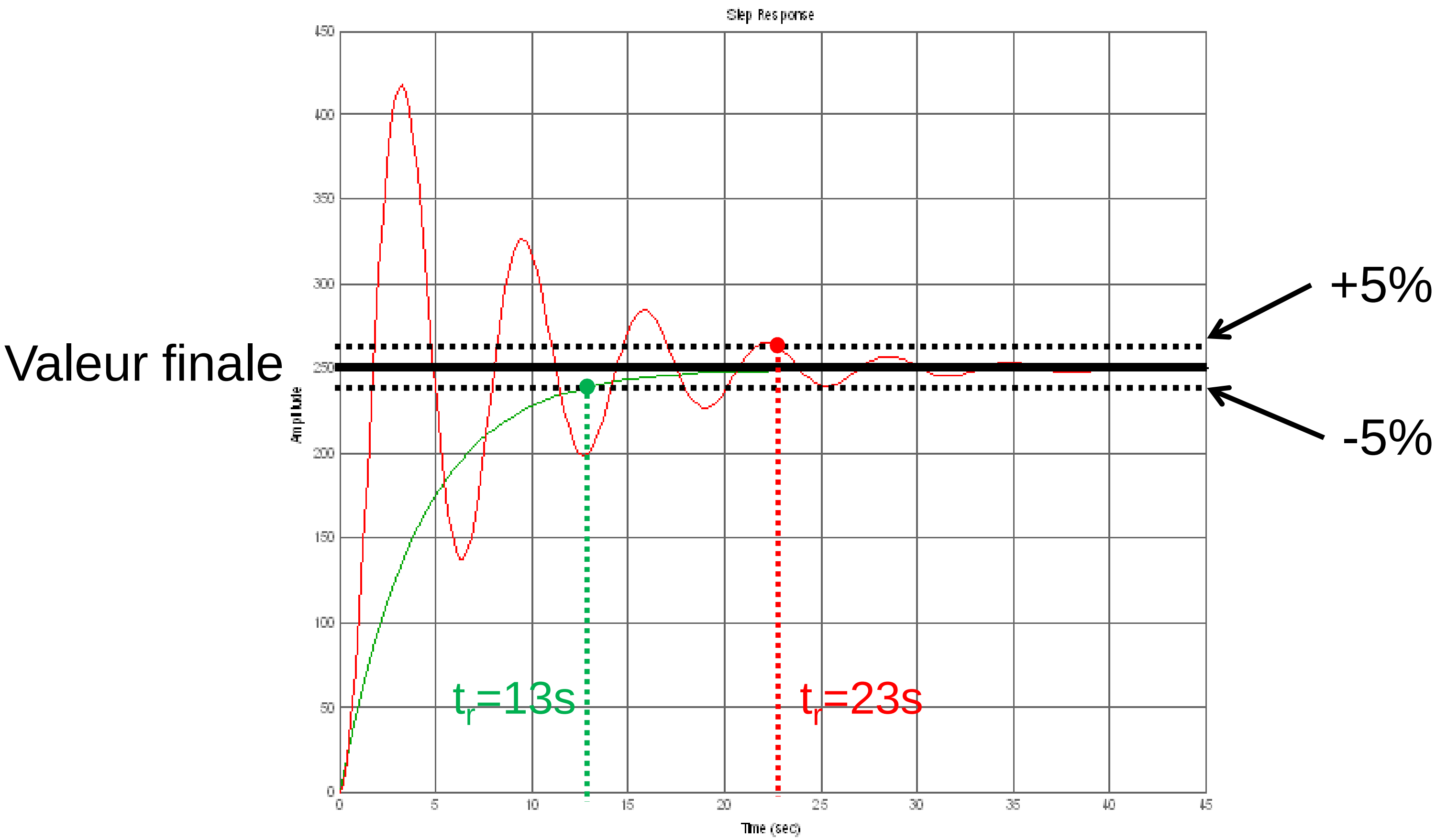
Entrée du four : 250°C

$$E(p) \longrightarrow \boxed{G(p)} \longrightarrow S(p)$$

Dynamique des Systèmes Asservis

▪ Rapidité

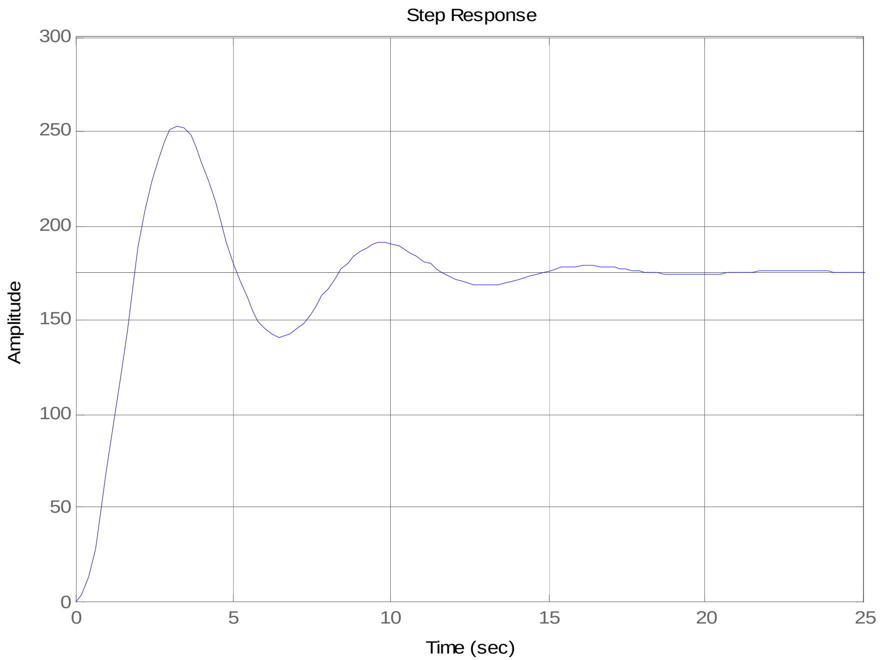
La rapidité est donnée par le temps de réponse : temps pour arriver à ± x % de la valeur finale (généralement x = 5).

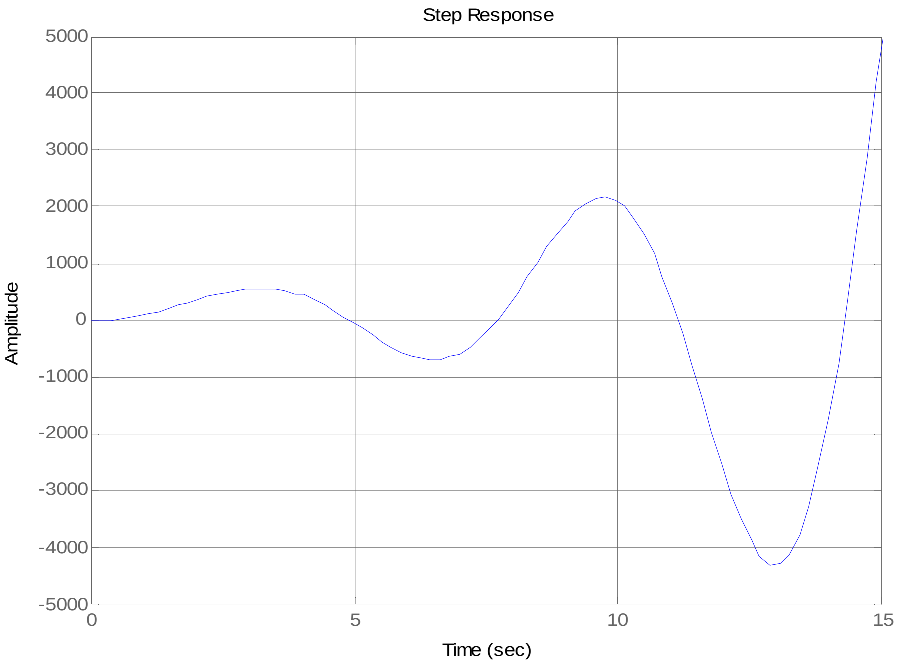


Dynamique des Systèmes Asservis

- Stabilité :

Un système est dit stable si sa sortie tend vers une constante pour une entrée constante. L'instabilité est un problème majeur à régler dans le cadre des systèmes asservis.

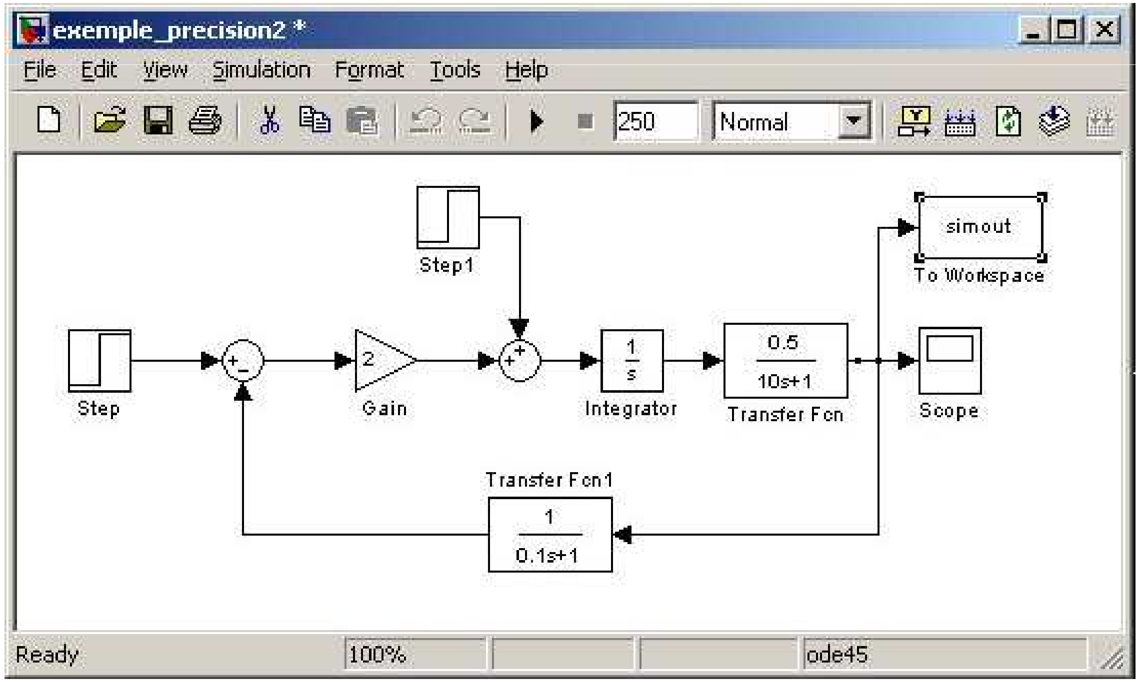




Dynamique des Systèmes Asservis

▪ Précision

Un système est précis si la sortie suit la consigne en toute circonstance (asservissement et régulation) et retourne à la valeur de consigne après une perturbation.



Dynamique des Systèmes Asservis

- Précision

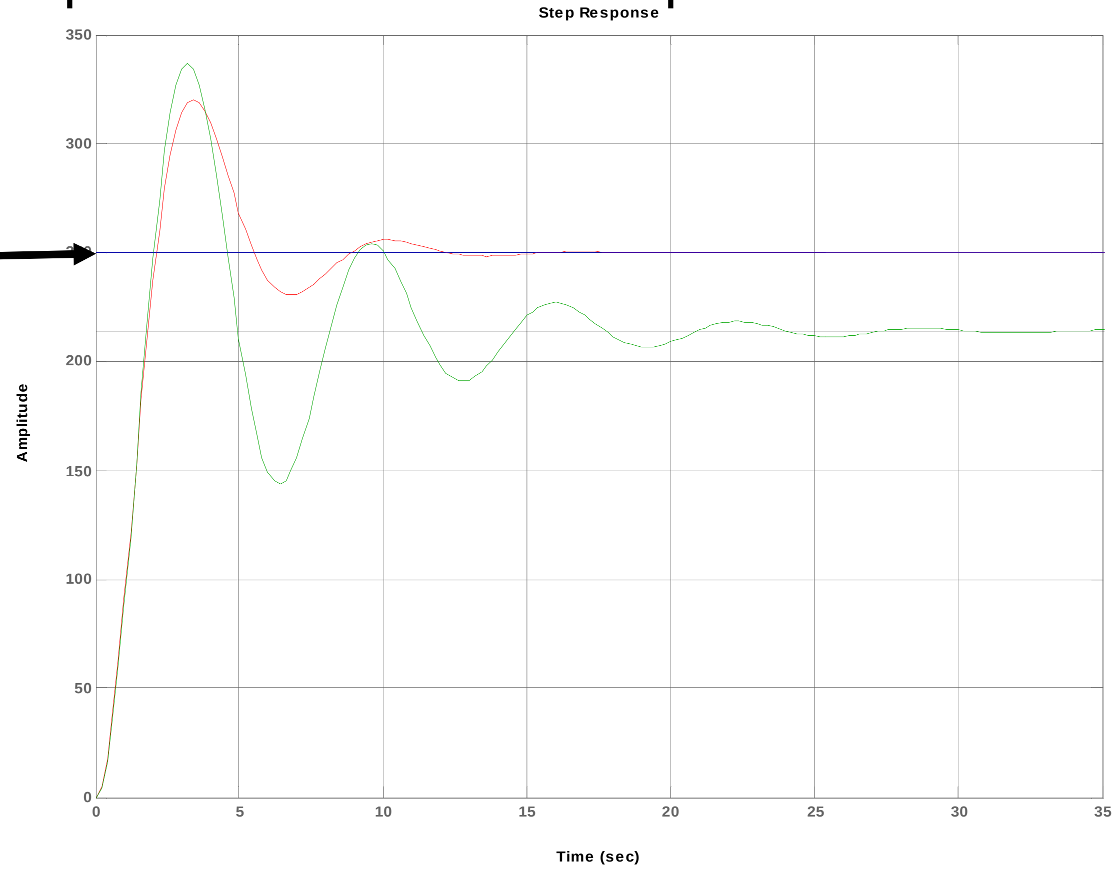
Dynamique des Systèmes Asservis

- Précision:

  Elle se détermine en régime permanent

  - **Exemple de réponses à un échelon :** l'erreur permanente s'appelle erreur de position ou erreur statique

Entrée de 250° :



Dynamique des Systèmes Asservis

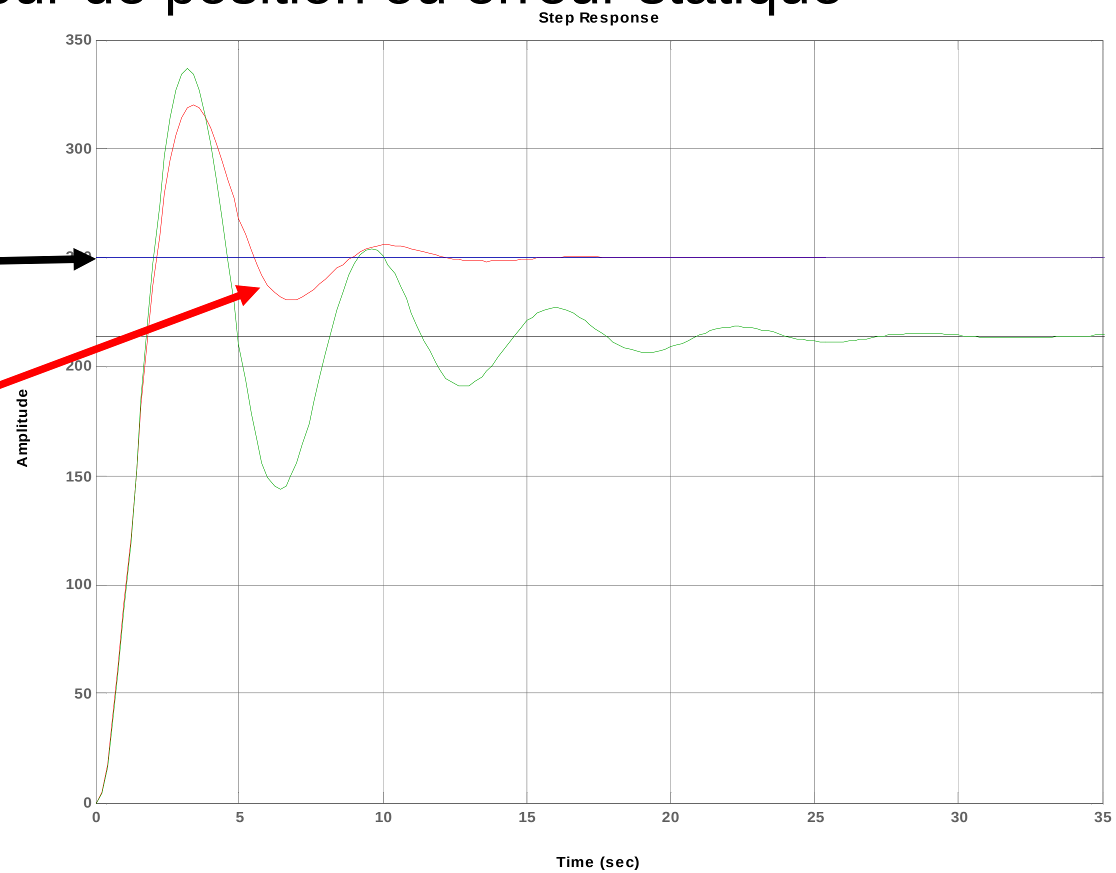
- Précision:

  Elle se détermine en régime permanent

  - **Exemple de réponses à un échelon :** l'erreur permanente s'appelle erreur de position ou erreur statique

Entrée de 250° :

Réponse système 1 :



Dynamique des Systèmes Asservis

- Précision:

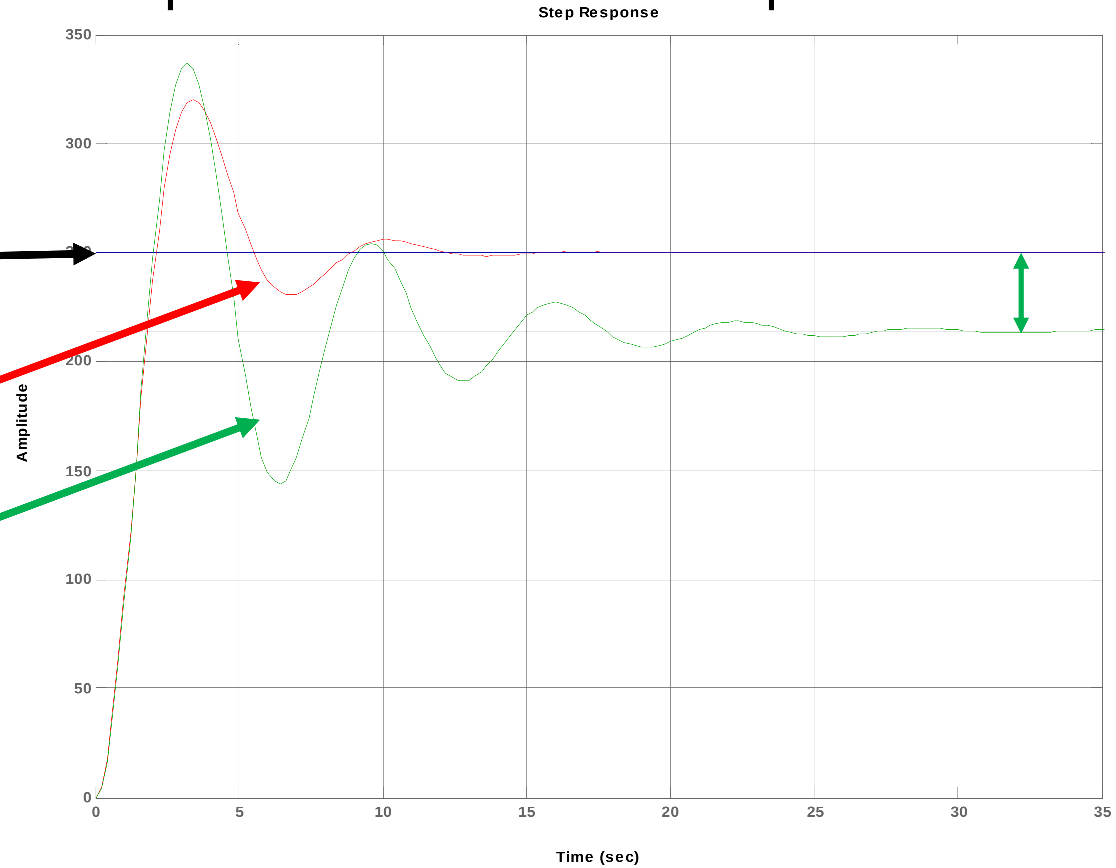
Elle se détermine en régime permanent

- **Exemple de réponses à un échelon :** l'erreur permanente s'appelle erreur de position ou erreur statique

Entrée de 250° :

Réponse système 1 :

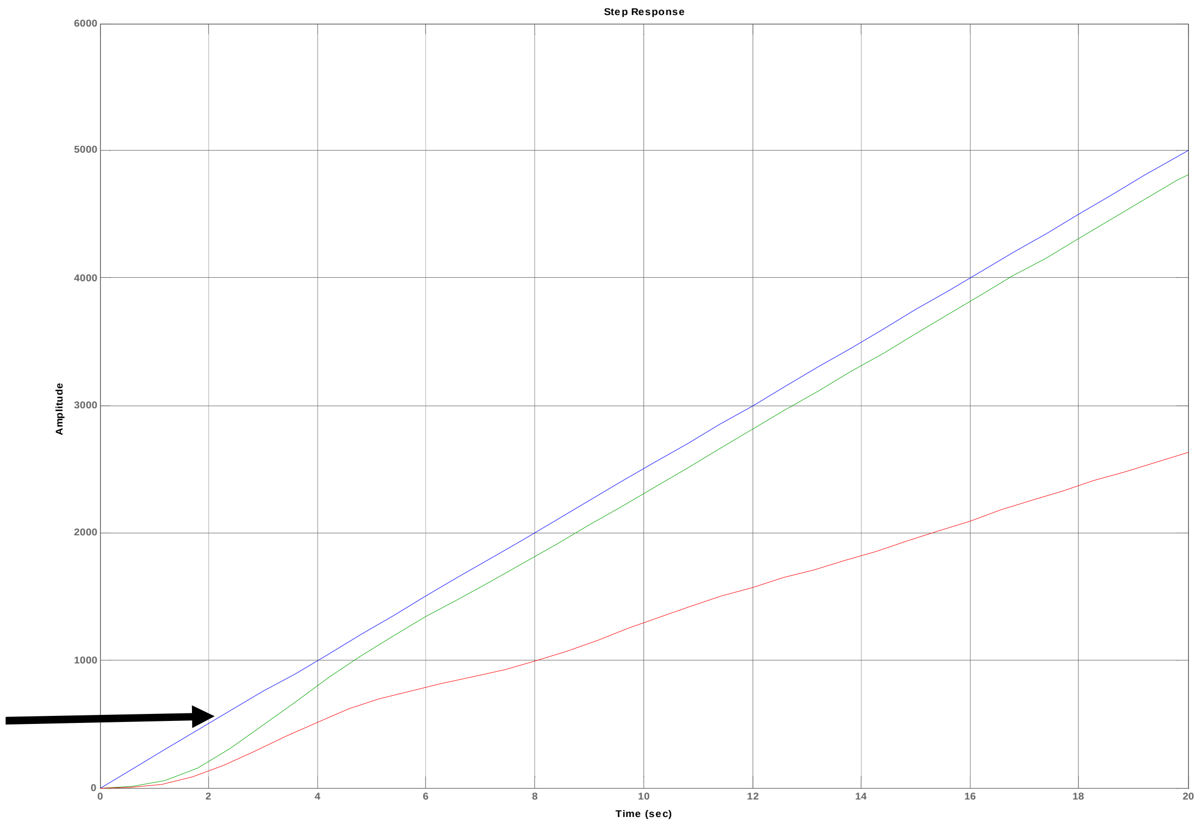
Réponse système 2 :



Dynamique des Systèmes Asservis

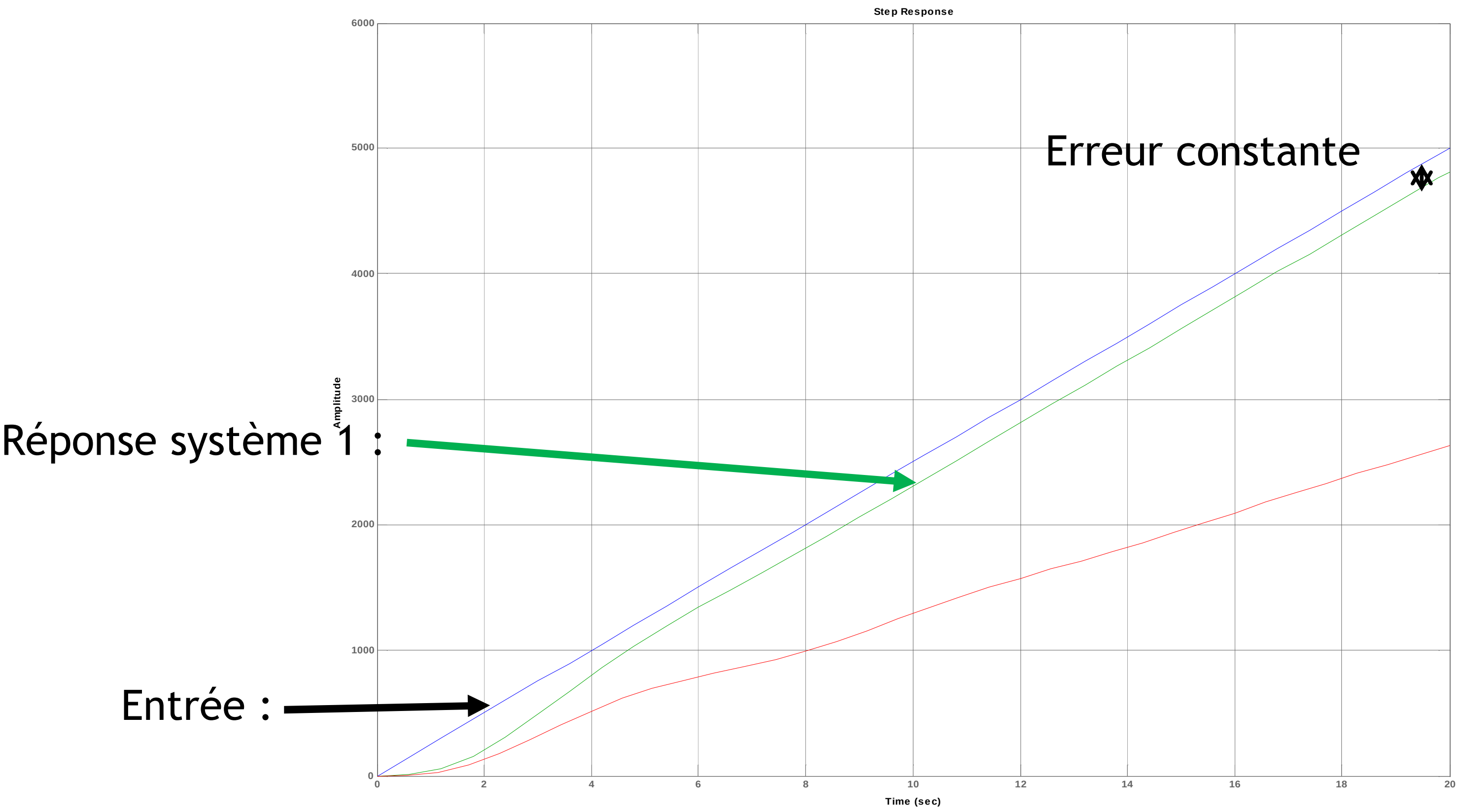
- Précision:
  - **Exemple de réponses à une rampe :** l’erreur permanente s’appelle erreur de trainage ou erreur de vitesse

Entrée :



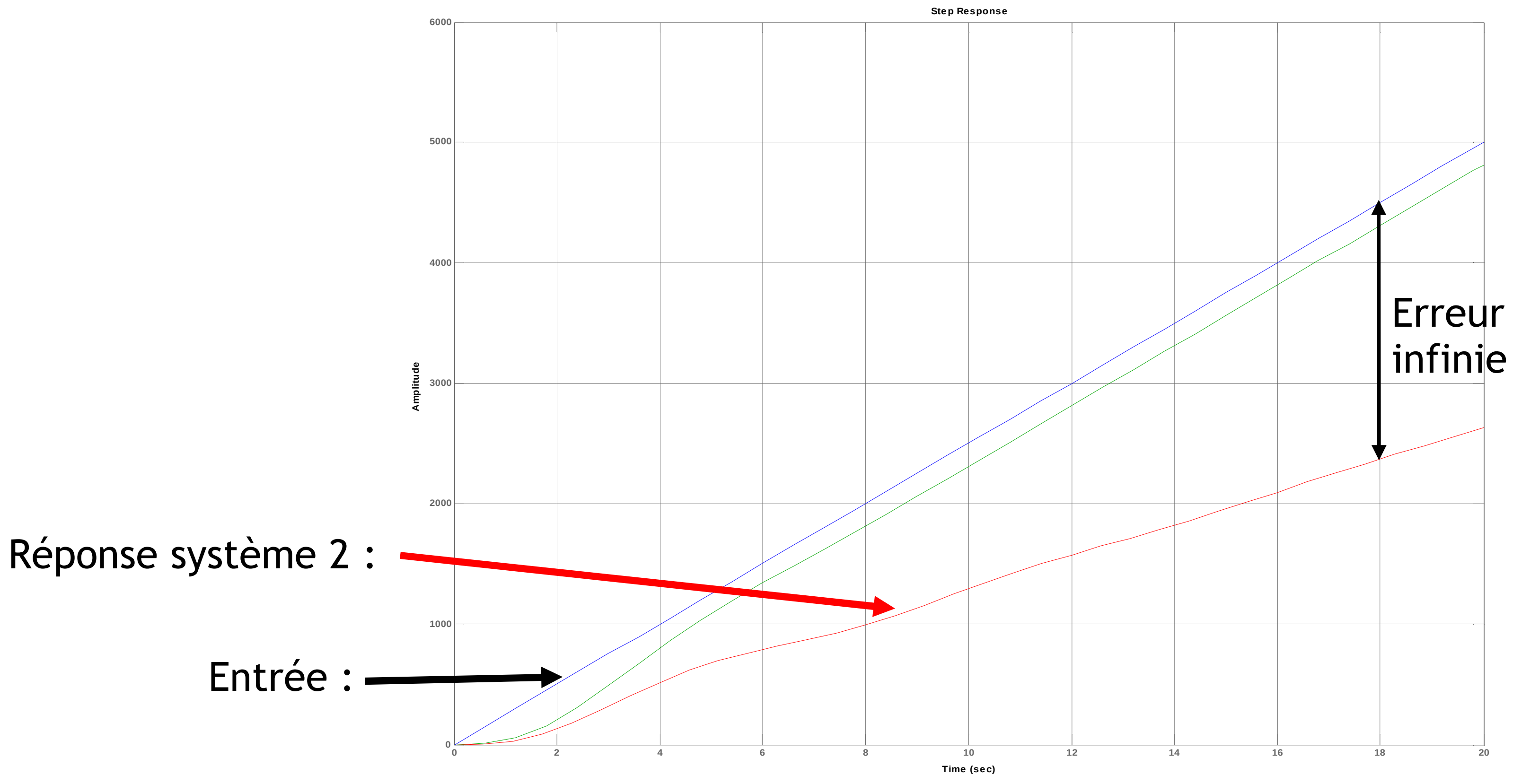
Dynamique des Systèmes Asservis

- Précision:
  - **Exemple de réponses à une rampe :** l'erreur permanente s'appelle erreur de trainage ou erreur de vitesse



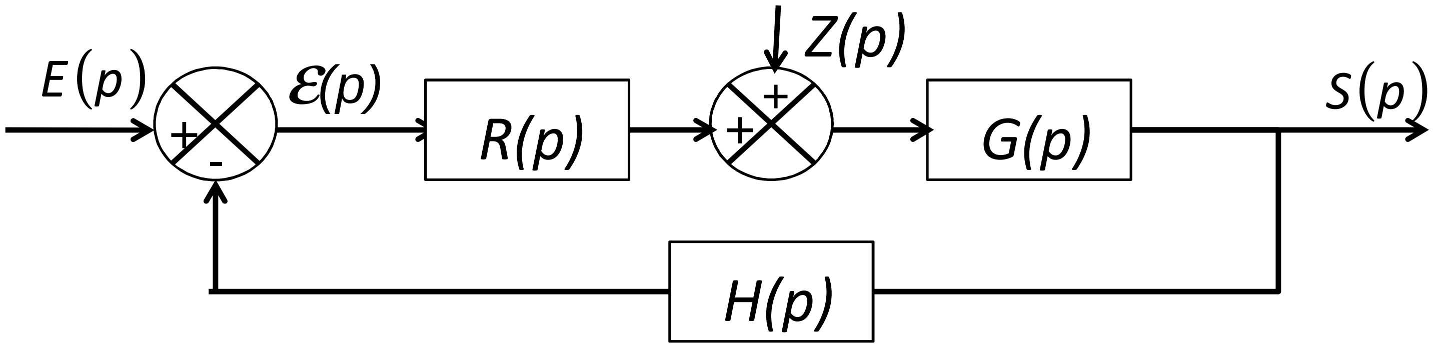
Dynamique des Systèmes Asservis

- Précision:
  - **Exemple de réponses à une rampe :** l’erreur permanente s’appelle erreur de trainage ou erreur de vitesse



Dynamique des Systèmes Asservis

- Calculs des erreurs d'un système asservi :

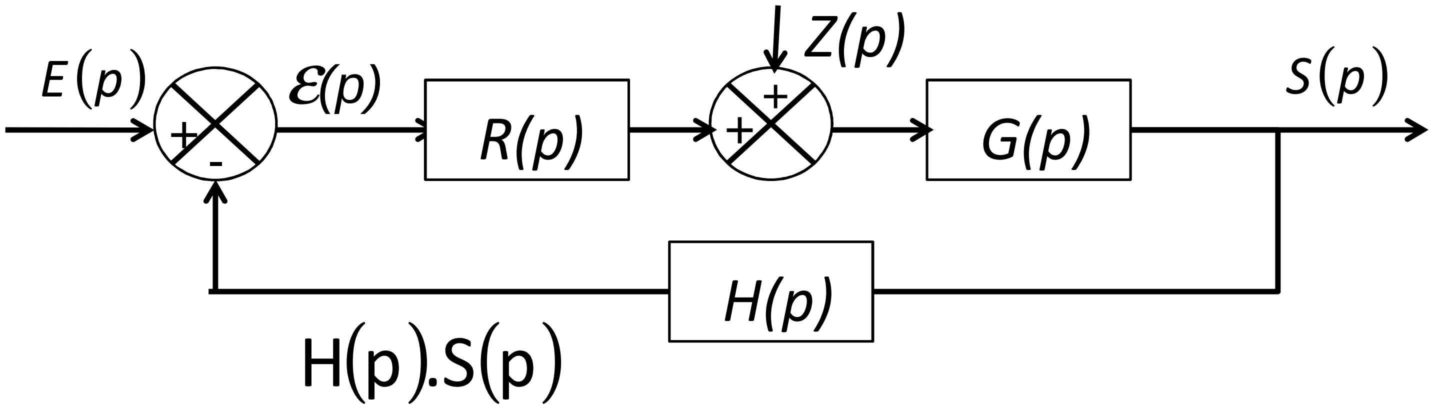


Erreur en asservissement : Z(p) = 0

l'erreur est définie par : $\varepsilon_{ass_0} = \lim_{t \to \infty} \varepsilon_{ass}(t) = \lim_{p \to 0} p.\varepsilon_{ass}(p)$

Dynamique des Systèmes Asservis

- Calculs des erreurs d'un système asservi :



<u>Erreur en asservissement</u> : Z(p) = 0

Donc : $\varepsilon(p) = \dfrac{E(p)}{1 + H(p).G(p).R(p)} = \dfrac{E(p)}{1 + FT_{BO}(p)}$

Dynamique des Systèmes Asservis

- Calculs des erreurs d'un système asservi :

<u>Erreur statique en asservissement :</u> Z(p) = 0 et E(p)= Eo / p

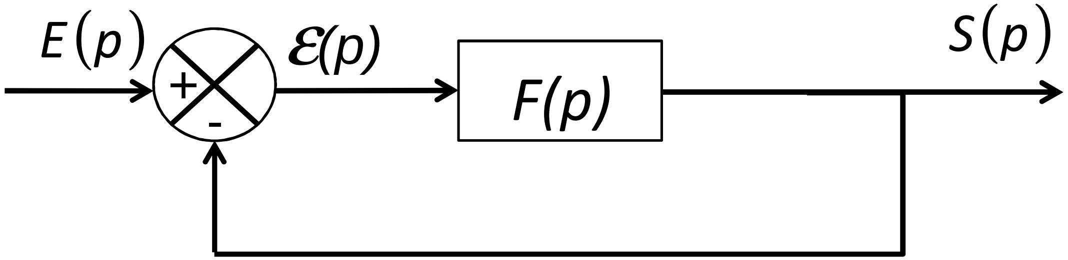
$$\varepsilon_{ass_0} = \lim_{p \to 0} p \frac{E_0}{p} \frac{1}{1 + H(p).G(p).R(p)} = \frac{E_0}{1 + H_0.G_0.R_0}$$

<u>Erreur de traînage : E(p)= Eo / p²</u>

$$\varepsilon_{ass_0} = \lim_{p \to 0} p.\frac{E_0}{p^2} \frac{1}{1 + H(p).G(p).R(p)} = \lim_{p \to 0} \frac{E_0}{p} \frac{1}{1 + H(p).G(p).R(p)}$$

Dynamique des Systèmes Asservis

- <u>Cas particulier</u> : Etude d'un système de fonction de transfert F(p) inséré dans une boucle d'asservissement à retour unitaire.



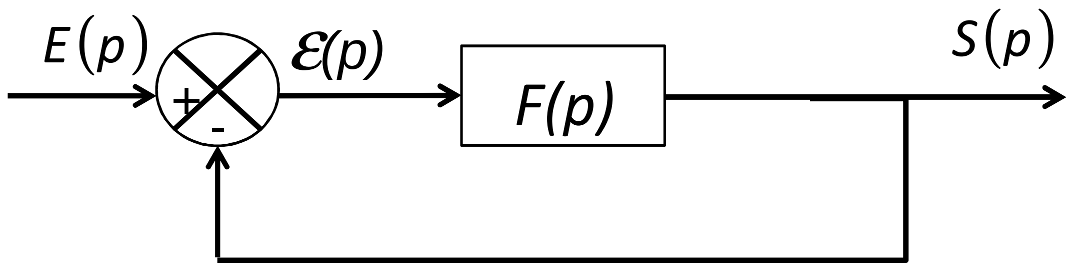
<u>Erreur d'asservissement</u> : $\varepsilon_{ass}(p) = \dfrac{1}{1+F(p)} E(p)$

avec

$$F(p) = \frac{K(1+b_1.p+\ldots+b_m.p^m)}{p^\alpha(1+a_1.p+\ldots+a_n.p^n)}$$

Dynamique des Systèmes Asservis

- Cas particulier : Etude d'un système de fonction de transfert F(p) inséré dans une boucle d'asservissement à retour unitaire.

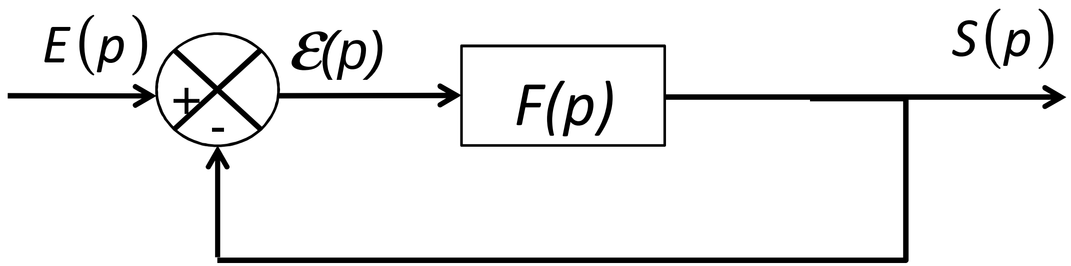


Erreur d'asservissement : si E(p) est un échelon et que le système est de classe 0 alors :

$$\varepsilon_f = \lim_{p\to 0} p.\varepsilon(p) = \lim p.\frac{E_0}{p}\frac{1}{1+\frac{K\left(1+b_1.p+\ldots+b_m.p^m\right)}{\left(1+a_1.p+\ldots+a_n.p^n\right)}} = \frac{E_0}{1+K}$$

Dynamique des Systèmes Asservis

- Cas particulier : Etude d'un système de fonction de transfert F(p) inséré dans une boucle d'asservissement à retour unitaire.

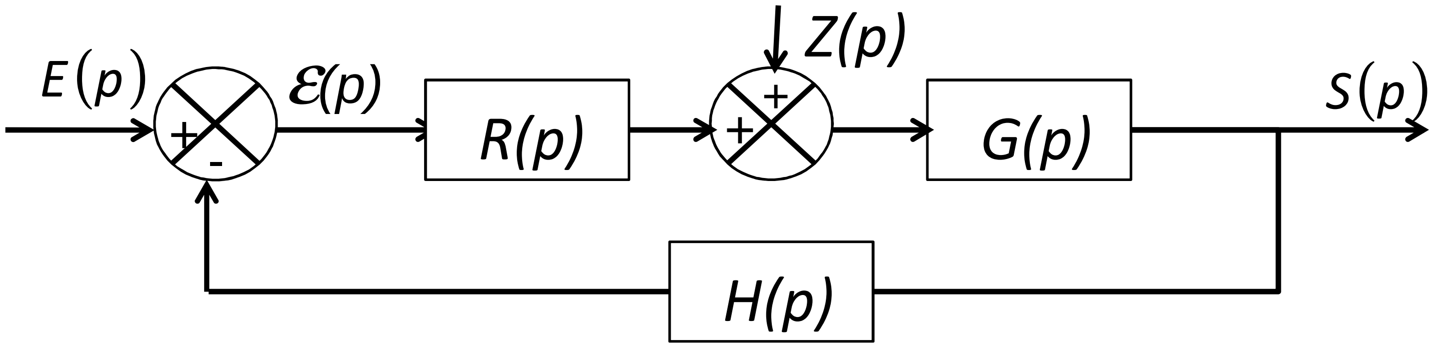


Erreur d'asservissement : En résumé :

Entrée \ Classe	Classe 0	Classe 1	Classe 2
Echelon d'amplitude E_0	$\frac{E_0}{1+K}$	0	0
Rampe d'amplitude A	∞	$\frac{A}{K}$	0

Dynamique des Systèmes Asservis

- Calculs des erreurs d'un système asservi :

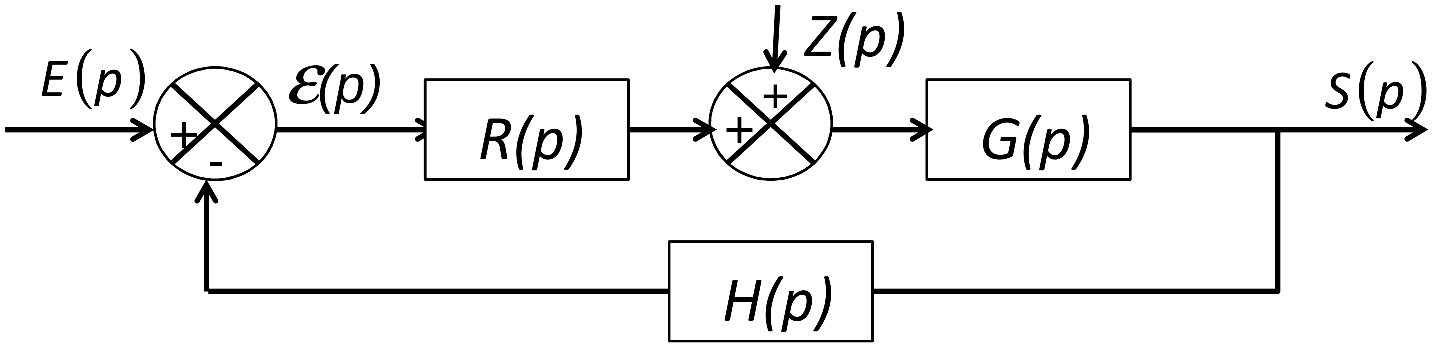


<u>Erreur en régulation</u> : E(p) = 0

$$\varepsilon_{reg\,0} = \lim_{t \to \infty} \varepsilon_{reg}(t) = \lim_{p \to 0} p.\varepsilon_{reg}(p)$$

Dynamique des Systèmes Asservis

- Calculs des erreurs d'un système asservi :



<u>Erreur en régulation</u> : E(p) = 0

D'où l'erreur définie par: $$\varepsilon_{reg}(p) = \frac{-H(p).G(p)}{1+H(p).G(p).R(p)} Z(p)$$

CHAPITRE 4

Analyse Fréquentielle des Systèmes

Analyse Fréquentielle des Systèmes

- Introduction :

  - Dans la pratique, les performances d'un système asservi sont souvent jugées sur sa réponse temporelle.

  - Pour des ordres élevés de système, ou pour définir d'autres performances, l'analyse fréquentielle est utilisée : on applique un signal sinusoïdal en entrée.

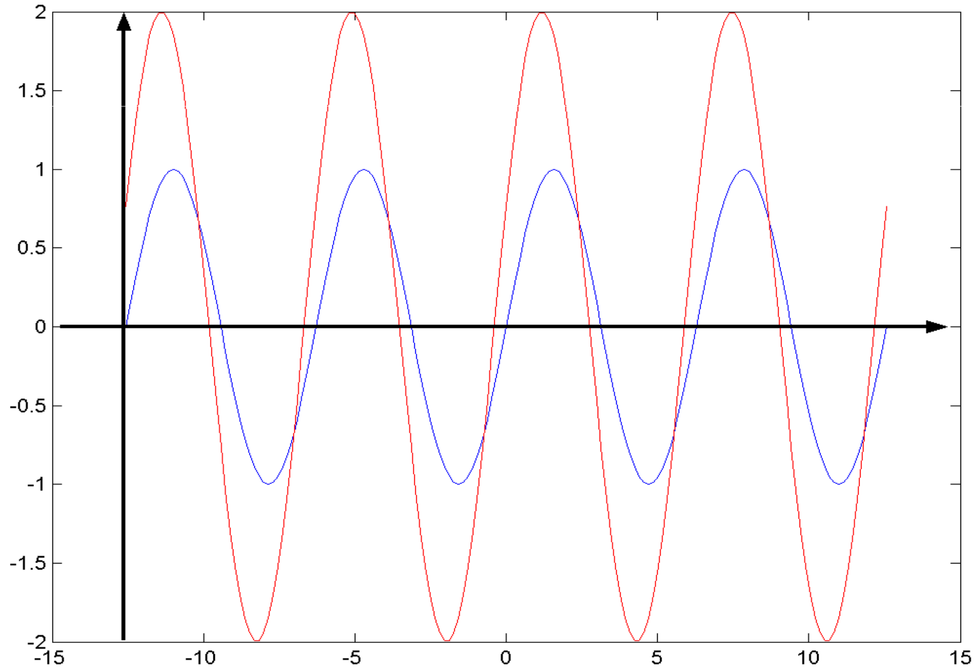
  - L'analyse fréquentielle des systèmes se fait **en boucle ouverte.**

  - Nous balayons le comportement du système en fréquence et nous observons le signal de sortie.

Analyse Fréquentielle des Systèmes

- Réponse harmonique

Dans le cas d'une entrée harmonique, le régime permanent est une sinusoïde de <u>même fréquence</u> que l'entrée, mais qui diffère en amplitude et en phase.



$e(t)=A \sin\omega t$

$s(t)= A' \sin(\omega t+\varphi)$

Analyse Fréquentielle des Systèmes

- Analyse fréquentielle:
  - L'écriture en Laplace est une écriture fréquentielle. Cependant, pour notre analyse, nous remplaçons tout simplement :

p par **jω**

$e(t)=A \sin\omega t$

$s(t)= A' \sin(\omega t+\varphi)$

  - Nous pouvons définir :

- La fonction de transfert harmonique : $G(j\omega)$
- Le gain : $G(\omega)=|G(j\omega)|=\dfrac{A'}{A}$
- La phase : $\varphi_G(\omega)=\arg(G(j\omega))$

$$G(j\omega)=|G(j\omega)|e^{j\varphi_G(\omega)}$$

Analyse Fréquentielle des Systèmes

- Analyse fréquentielle :

$$G(j\omega)=Re(\omega)+j.Im(\omega)$$

  - Calcul du gain :

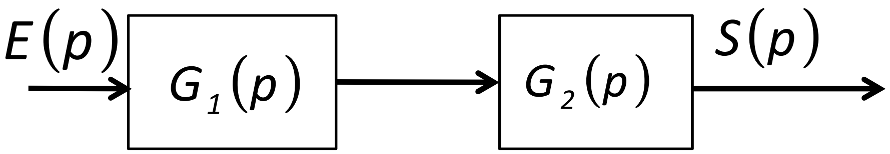
$$G(\omega) = \left| G(j\omega) \right| = \sqrt{\mathrm{Re}(\omega)^2 + \mathrm{Im}(\omega)^2}$$

  - Calcul de la phase :

$$\varphi_G(\omega) = Arg\ \left(G(j\omega)\right) = \arctan \frac{\mathrm{Im}(\omega)}{\mathrm{Re}(\omega)}$$

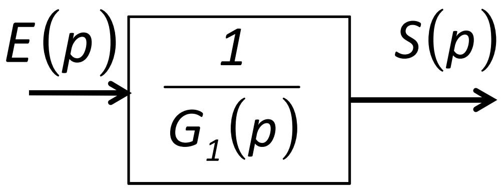
Analyse Fréquentielle des Systèmes

- Propriétés - Calcul du gain et de la phase



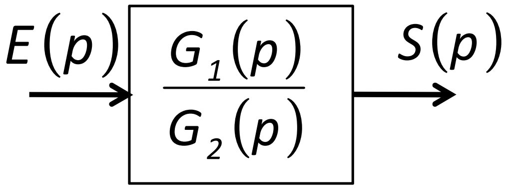
$$G(\omega)=G_1(\omega).G_2(\omega)$$

$$\varphi_G(\omega)=\varphi_{G_1}(\omega)+\varphi_{G_2}(\omega)$$



$$G(\omega)=\frac{1}{G_1(\omega)}$$

$$\varphi_G(\omega)=-\varphi_{G_1}(\omega)$$



$$G(\omega)=\frac{G_1(\omega)}{G_2(\omega)}$$

$$\varphi_G(\omega)=\varphi_{G_1}(\omega)-\varphi_{G_2}(\omega)$$

Analyse Fréquentielle des Systèmes

- <u>Exercice C-8</u> : calculer le module et l'argument de :

$$H_1(p) = \frac{1}{(1+p)^3}$$

$$H_2(p) = \frac{1}{p(p+1)(p+2)}$$

$$H_3(p) = \frac{K\,e^{-\tau p}}{1+Tp}$$

$$H_4(p) = \frac{1-2p}{(1+p)^2(1+2p)}$$

$$H_1(p) = \frac{1}{(1+p)^3}$$

$$H_2(p) = \frac{1}{p(p+1)(p+2)}$$

$$H_3(p) = \frac{K e^{-\tau p}}{1 + Tp}$$

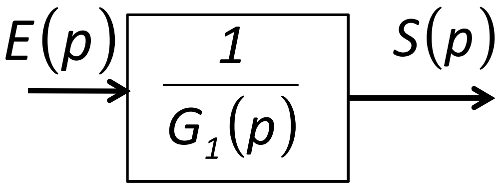
$$H_4(p) = \frac{1-2p}{(1+p)^2(1+2p)}$$

Analyse Fréquentielle des Systèmes

- *Exercice C-8* : calculer le module et l'argument de :

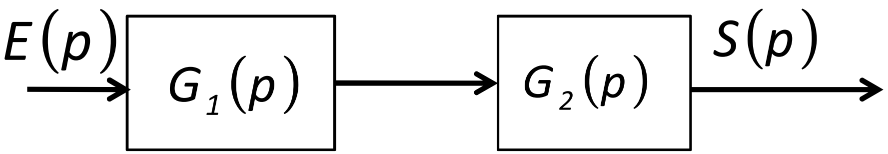
$$H_1(p) = \frac{1}{(1+p)^3}$$ Passage en fréquentielle $$H_1(j\omega) = \frac{1}{(1+j\omega)^3}$$

Nous allons utiliser deux propriétés :



$$G(\omega) = \frac{1}{G_1(\omega)}$$

$$\varphi_G(\omega) = -\varphi_{G_1}(\omega)$$



$$G(\omega) = G_1(\omega).G_2(\omega)$$

$$\varphi_G(\omega) = \varphi_{G_1}(\omega) + \varphi_{G_2}(\omega)$$

Analyse Fréquentielle des Systèmes

- Nous allons calculer le module et l'argument de :

$$G1(j\omega) = 1 + j\omega$$

- Module :

$$G1(\omega) = \sqrt{1^2 + \omega^2} = \sqrt{1 + \omega^2}$$

- Argument :

$$\varphi_{G1}(\omega) = \arctan \frac{\omega}{1} = \arctan \omega$$

Analyse Fréquentielle des Systèmes

Nous allons utilisons la première propriété

$$E(p) \longrightarrow \boxed{\dfrac{1}{G_1(p)}} \longrightarrow S(p)$$

$$G(\omega) = \frac{1}{G_1(\omega)}$$

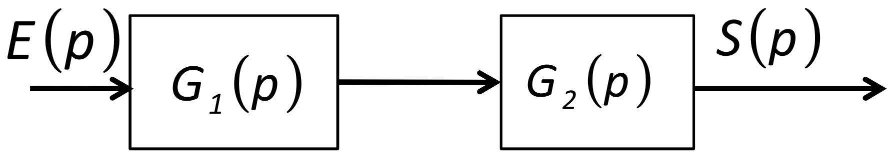
$$\varphi_G(\omega) = -\varphi_{G_1}(\omega)$$

$$G(\omega) = \frac{1}{G1(\omega)} = \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2}}$$

$$\varphi_G(\omega) = -\varphi_{G1}(\omega) = -\arctan \omega$$

Analyse Fréquentielle des Systèmes

Nous allons utilisons la deuxième propriété



$$G(\omega) = G_1(\omega).G_2(\omega)$$

$$\varphi_{G}(\omega) = \varphi_{G_1}(\omega) + \varphi_{G_2}(\omega)$$

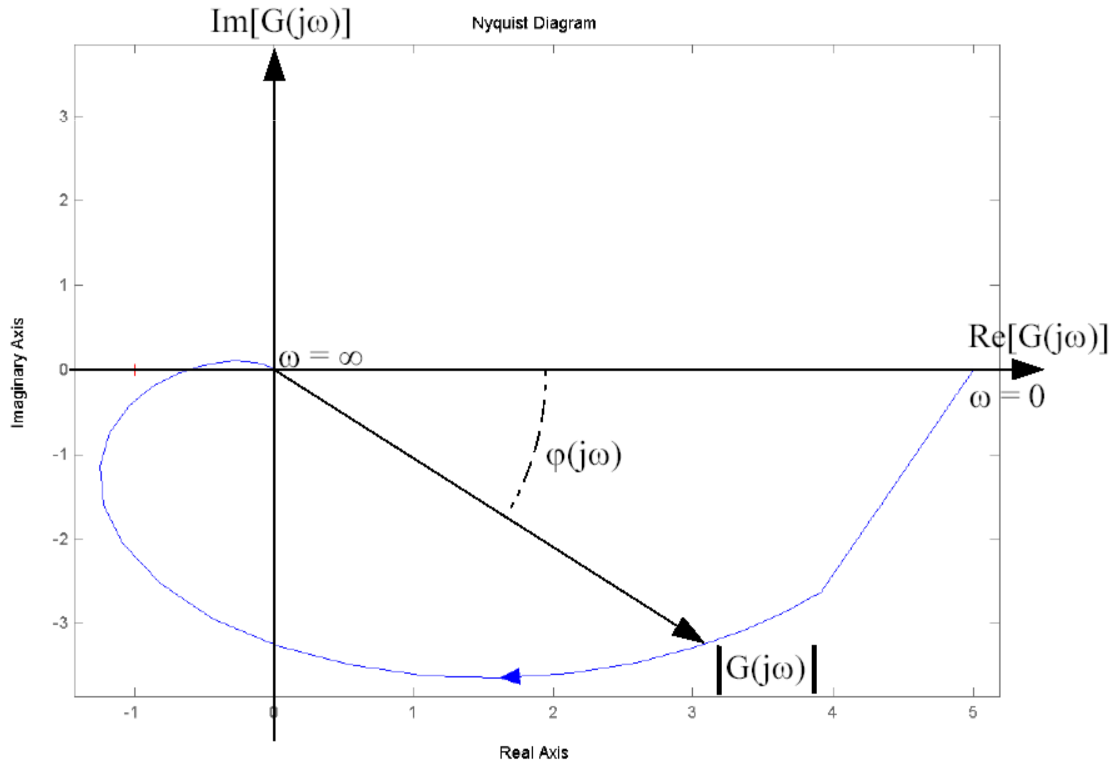
$$\mathrm{H1}(\omega) = \mathrm{G}(\omega) * \mathrm{G}(\omega) * \mathrm{G}(\omega) = \frac{1}{\left(1+\omega^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \left(1+\omega^2\right)^{-\frac{3}{2}}$$

$$\varphi_{H1}(\omega) = \varphi_G(\omega) + \varphi_G(\omega) + \varphi_G(\omega) = -3 * \arctan\,\omega$$

Analyse Fréquentielle des Systèmes

- Lieu de Nyquist :

C'est la représentation dans le plan complexe de l'<u>extrémité</u> du vecteur image *G(jω)* lorsque *ω* varie de 0 à l'infini.



L'étude se fait en **boucle ouverte**

Analyse Fréquentielle des Systèmes

- *<u>Exercice C-9</u> : représentez sur le lieu de Nyquist la fonction H1(p) calculée précédemment.*

$$H_1(p) = \frac{1}{(1+p)^3}$$

Le tableau de valeurs est le suivant :

ω	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1	2
$H(\omega)$							
$\varphi(\omega)$							

Calculatrice mise en RADIANS
PUIS
Calcul en DEGRES

Analyse Fréquentielle des Systèmes

- *<u>Exercice C-9</u> : Représentez sur le lieu de Nyquist la fonction H1(p) calculée précédemment.*

Le tableau de valeurs est le suivant :

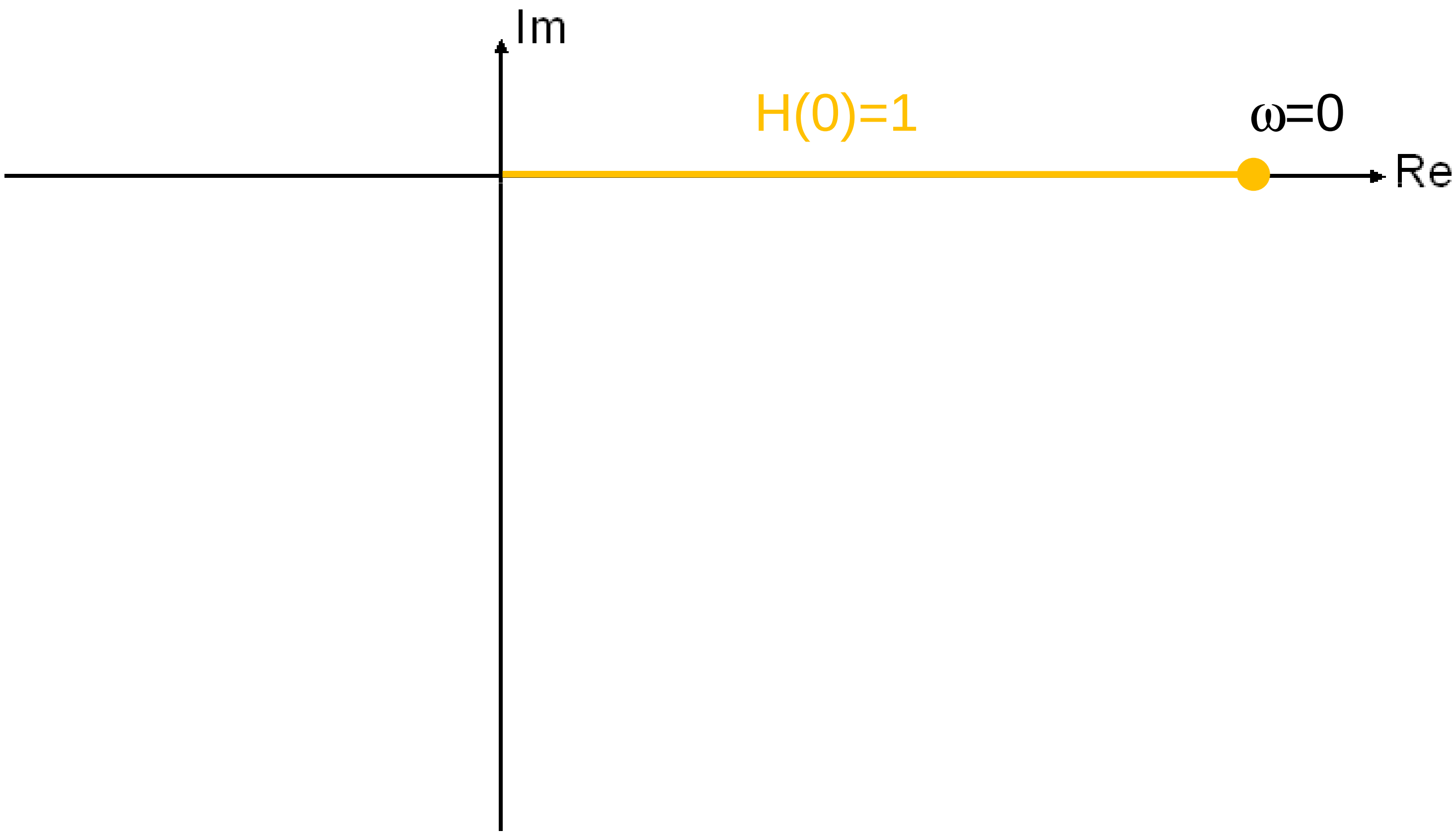
$$H_1(p) = \frac{1}{(1+p)^3}$$

ω	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1	2
$H(\omega)$	1	0.942	0.8	0.630	0.476	0.353	0.089
$\varphi(\omega)$	0	-33.9	-65.4	-92.9	-115.9	-135	-190

Calculatrice mise en RADIANS
PUIS
Calcul en DEGRES

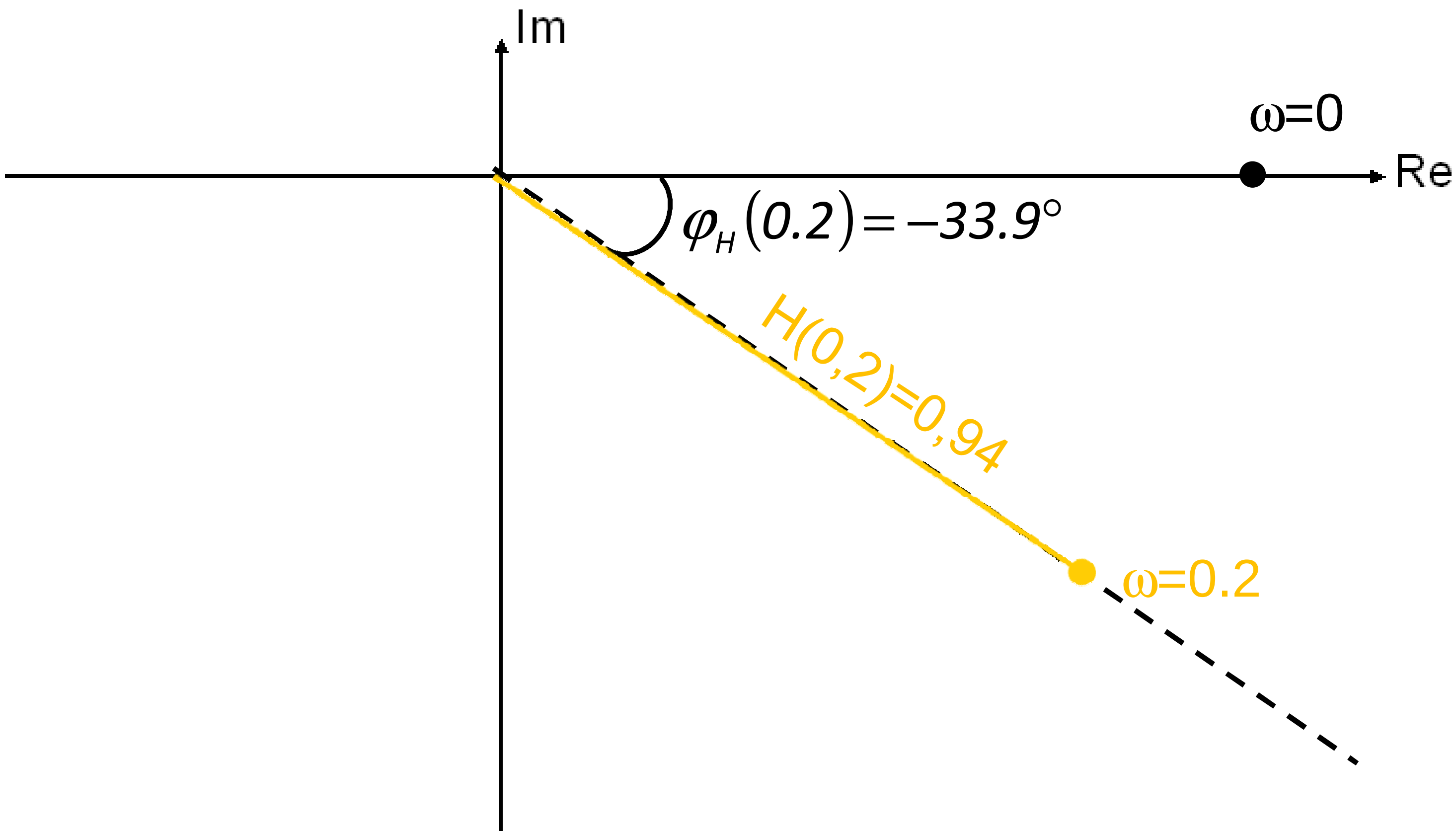
Analyse Fréquentielle des Systèmes

ω	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1	2
$H(\omega)$	1	0.942	0.8	0.630	0.476	0.353	0.089
$\varphi(\omega)$	0	-33.9	-65.4	-92.9	-115.9	-135	-190



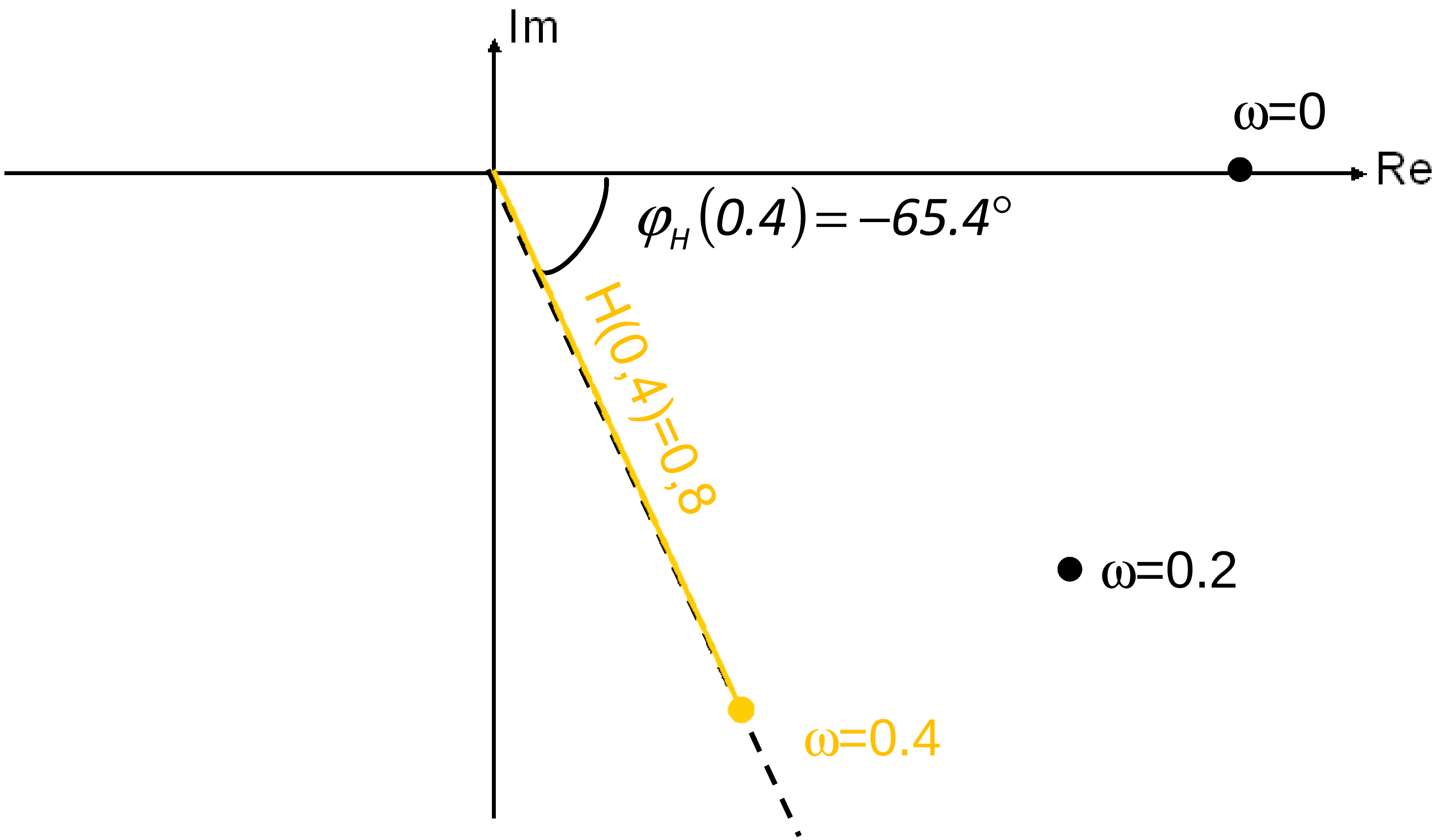
Analyse Fréquentielle des Systèmes

ω	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1	2
$H(\omega)$	1	0.942	0.8	0.630	0.476	0.353	0.089
$\varphi(\omega)$	0	-33.9	-65.4	-92.9	-115.9	-135	-190



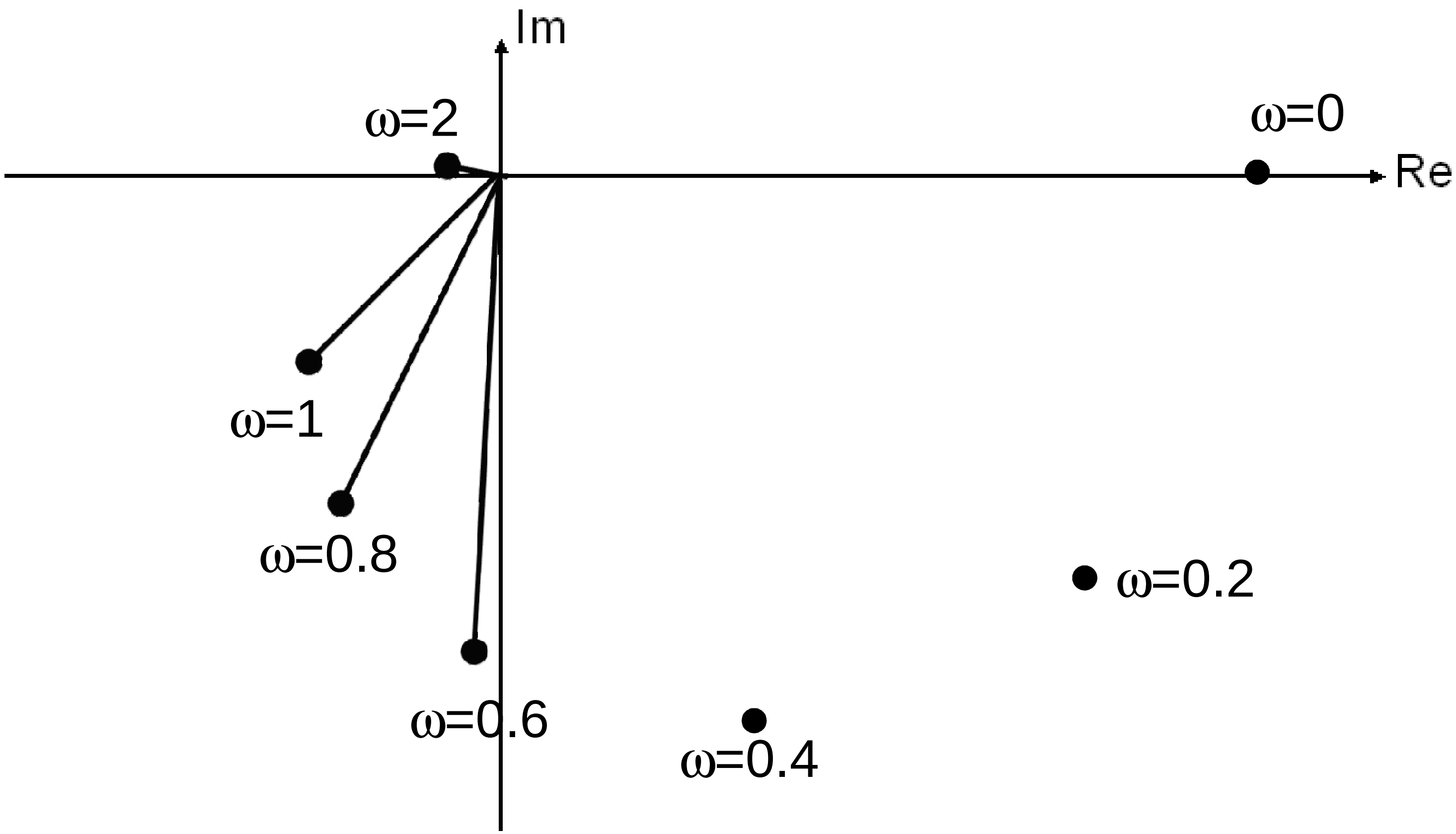
Analyse Fréquentielle des Systèmes

ω	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1	2
$H(\omega)$	1	0.942	0.8	0.630	0.476	0.353	0.089
$\varphi(\omega)$	0	-33.9	-65.4	-92.9	-115.9	-135	-190



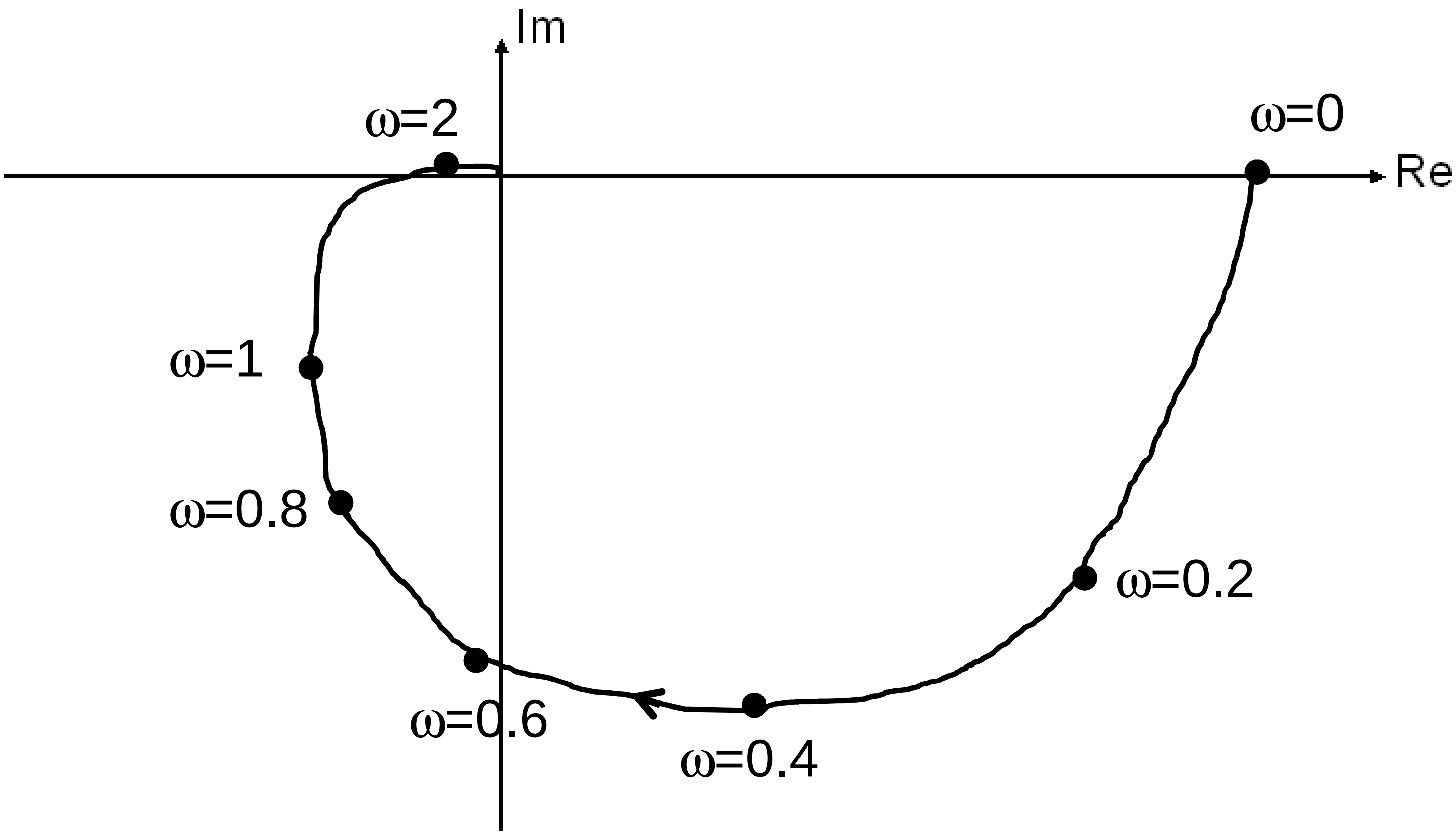
Analyse Fréquentielle des Systèmes

ω	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1	2
$H(\omega)$	1	0.942	0.8	0.630	0.476	0.353	0.089
$\varphi(\omega)$	0	-33.9	-65.4	-92.9	-115.9	-135	-190



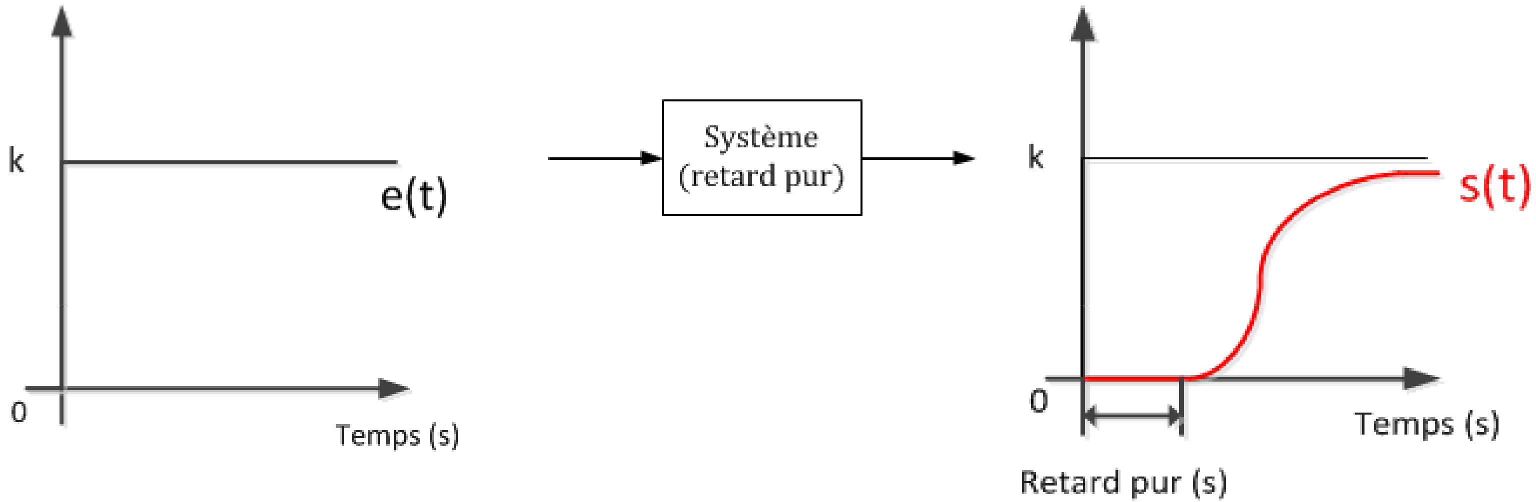
Analyse Fréquentielle des Systèmes

ω	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1	2
$H(\omega)$	1	0.942	0.8	0.630	0.476	0.353	0.089
$\varphi(\omega)$	0	-33.9	-65.4	-92.9	-115.9	-135	-190



Analyse Fréquentielle des Systèmes

- Retard pur:



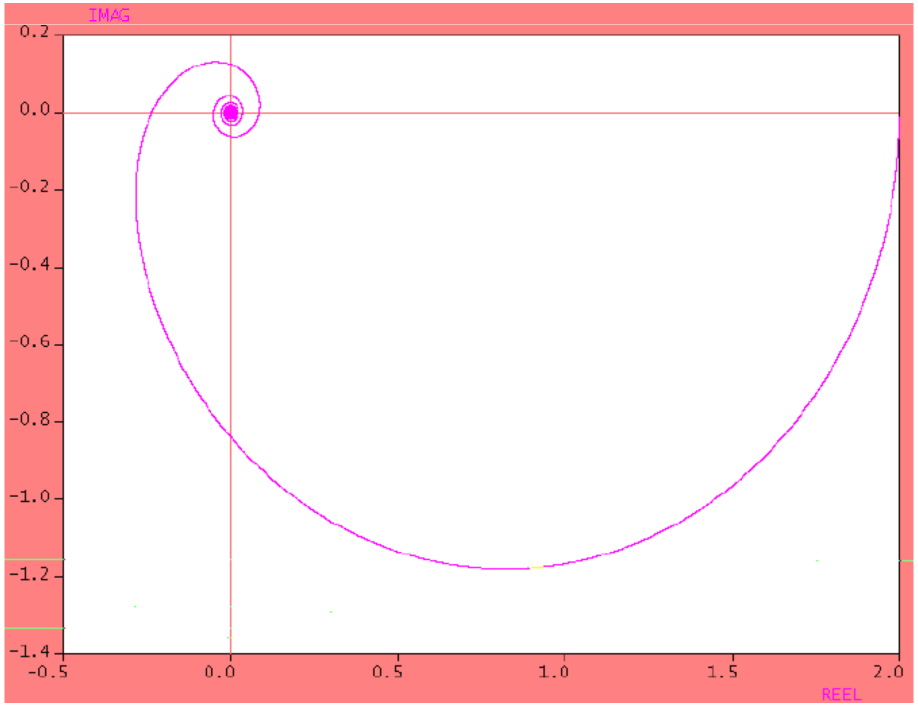
La fonction de transfert d'un retard pur est :

$$G(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = e^{-\tau . p}$$

Analyse Fréquentielle des Systèmes

- Cas de systèmes à retard : $G(p) = \dfrac{e^{-\tau p}}{1+p}$

$$\left|G(j\omega)\right| = \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2}} \quad \text{et} \quad \varphi_G(j\omega) = -\tau\omega - \arctan\ \omega$$



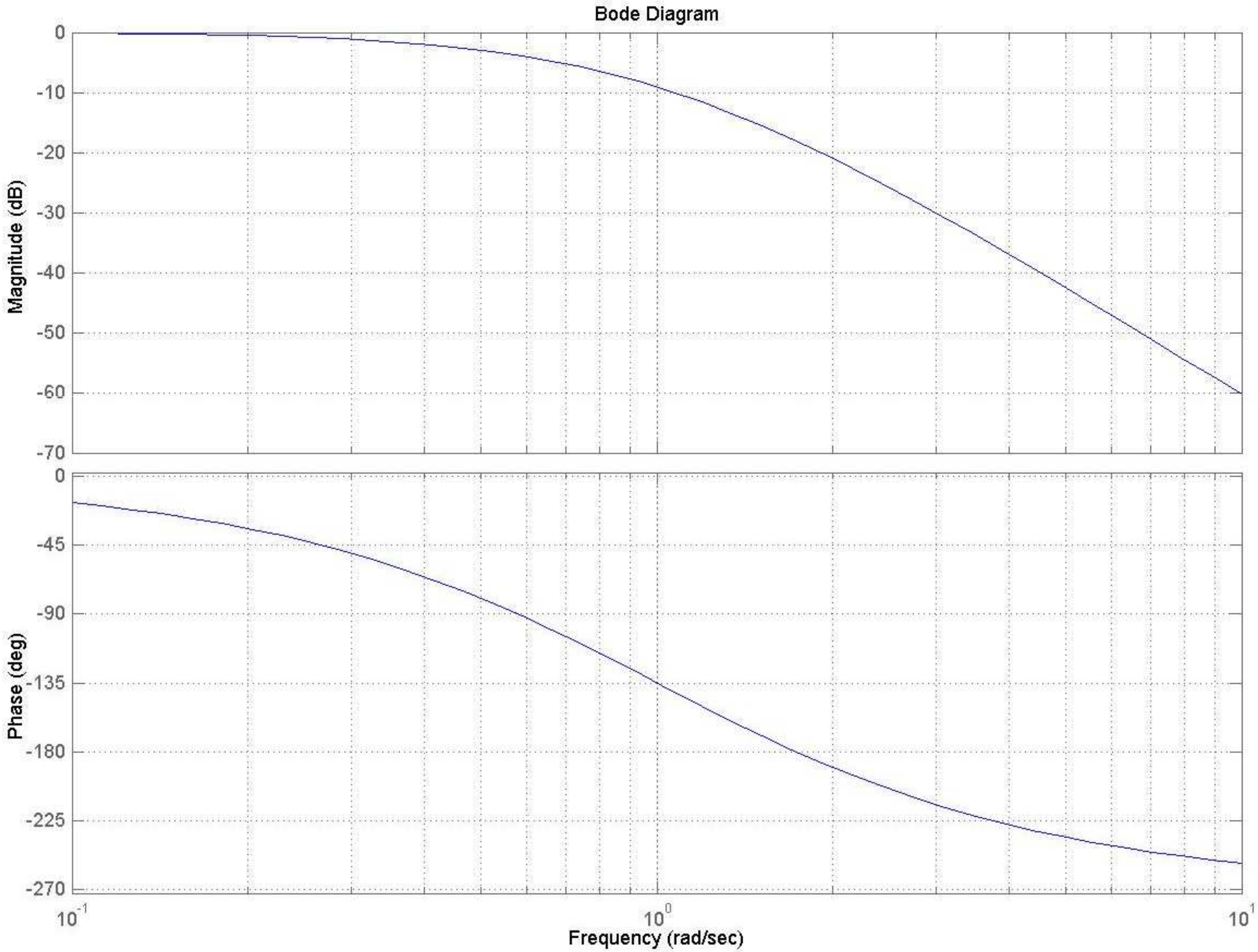
Analyse Fréquentielle des Systèmes

- Lieu de Bode :

Pour cette représentation, le gain et la phase sont séparés et dépendent de la pulsation ω.

Le gain est exprimé en dB !

Analyse Fréquentielle des Systèmes



Analyse Fréquentielle des Systèmes

- Lieu de Black :

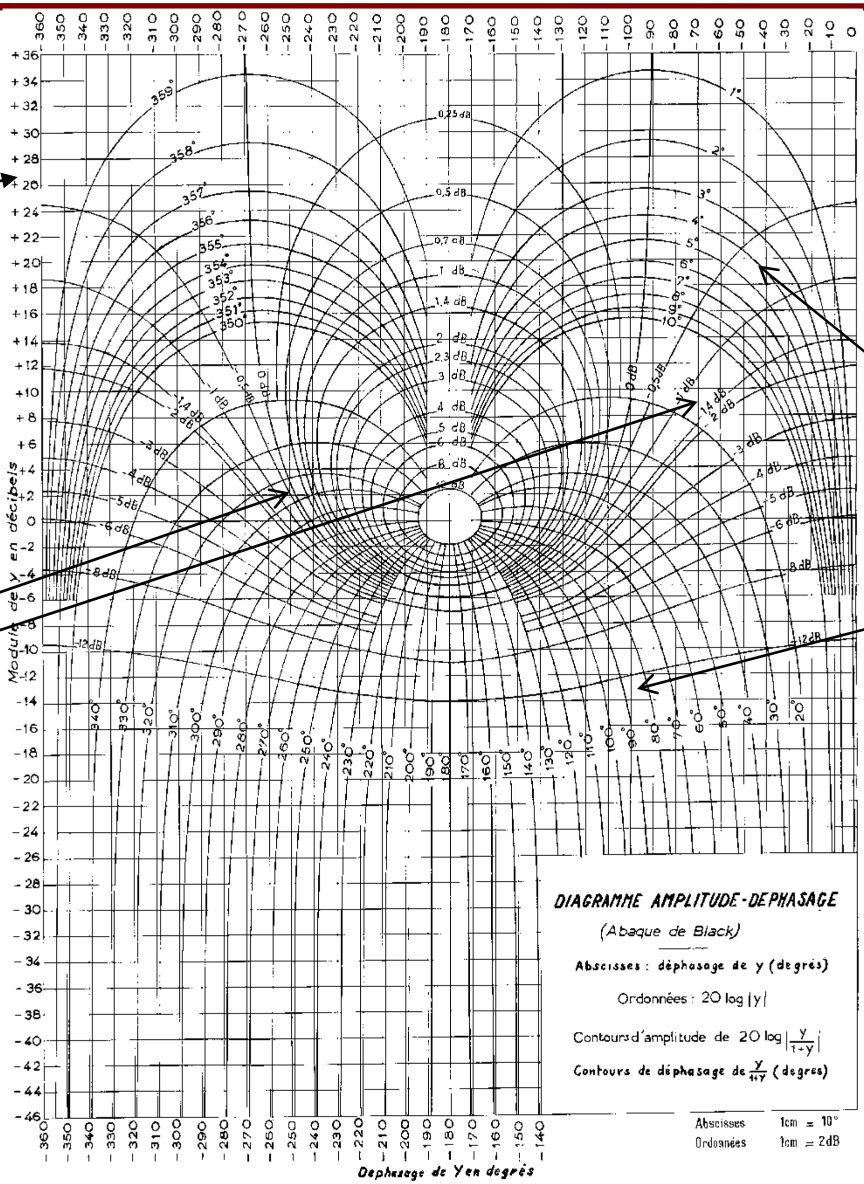
Il s'agit d'une représentation du **gain en dB** et de la phase, sur le même lieu. Comme Nyquist, **ce lieu est gradué en ω.**

L'étude se fait en **boucle ouverte** pour le lieu de Black.

Analyse Fréquentielle des Systèmes

Gain :
de 36 dB
à -46 dB

Phase :
de 0° à -360°

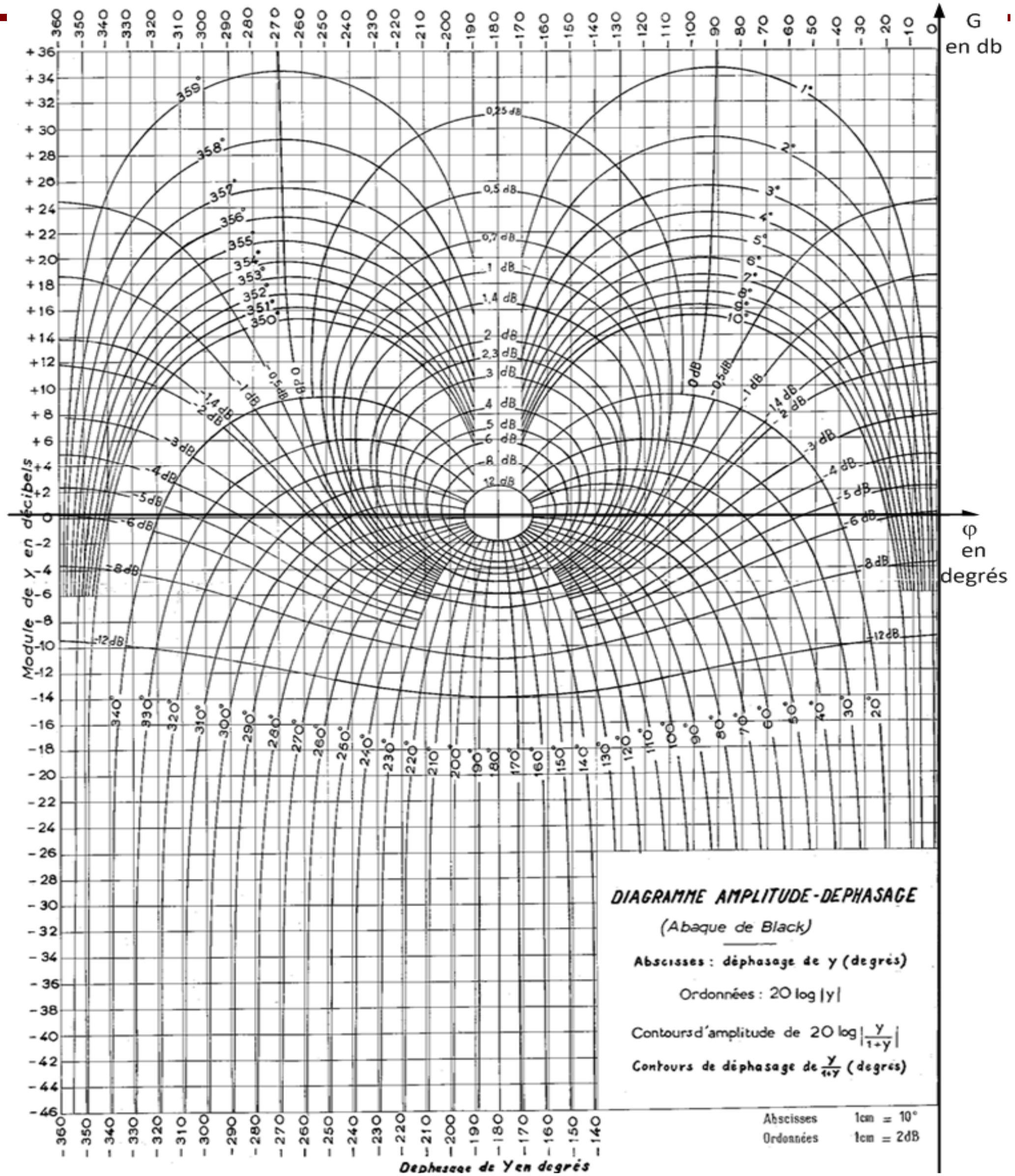


Courbes d’isophase

Courbes d’isogain

Analyse Fréquentielle des Systèmes

Exemple :

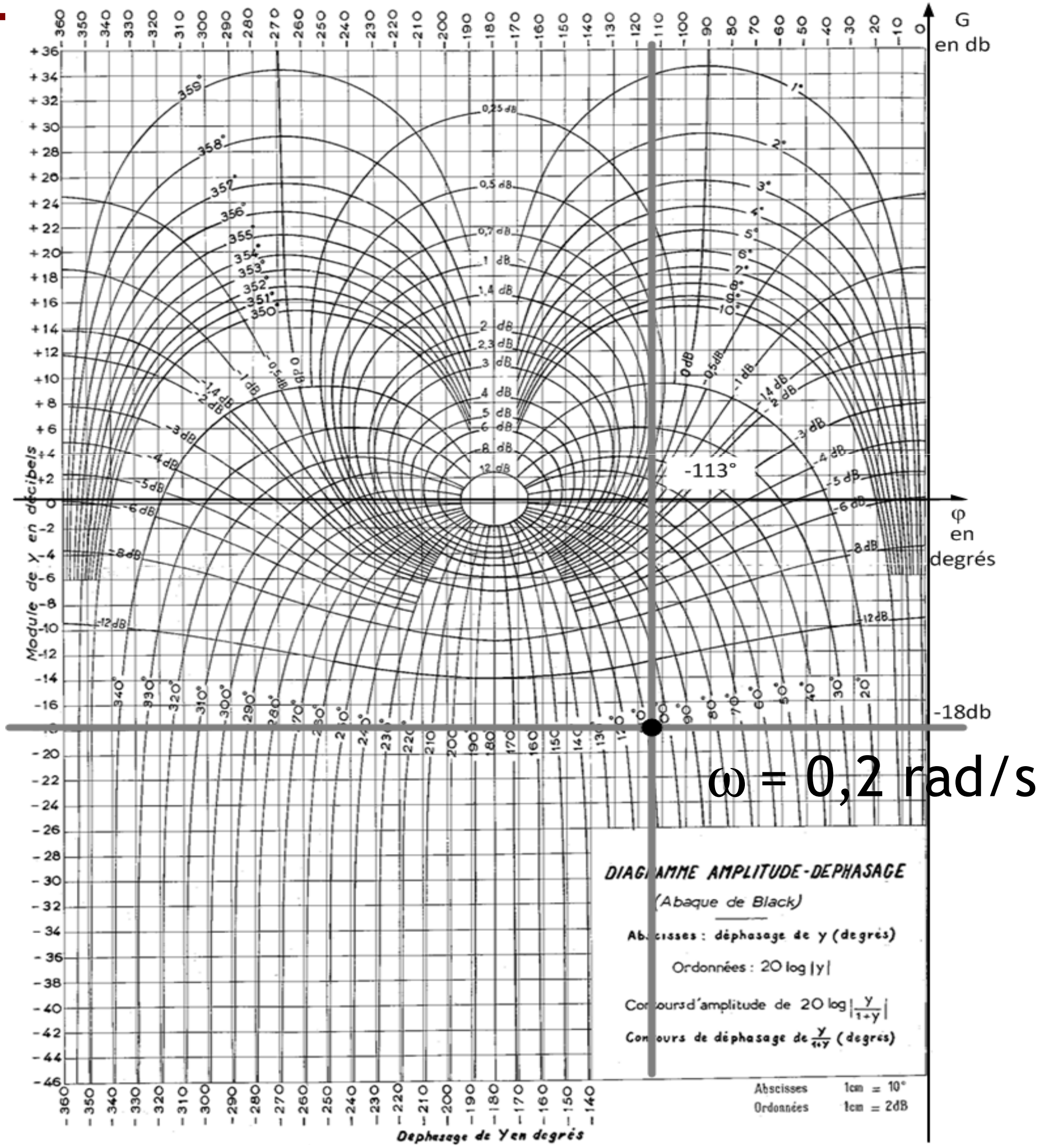


Analyse Fréquentielle des Systèmes

Exemple :

ω = 0,2 rad/s

Gain = -18 dB
Phase : -113°



Analyse Fréquentielle des Systèmes

- *Exercice C-8* :

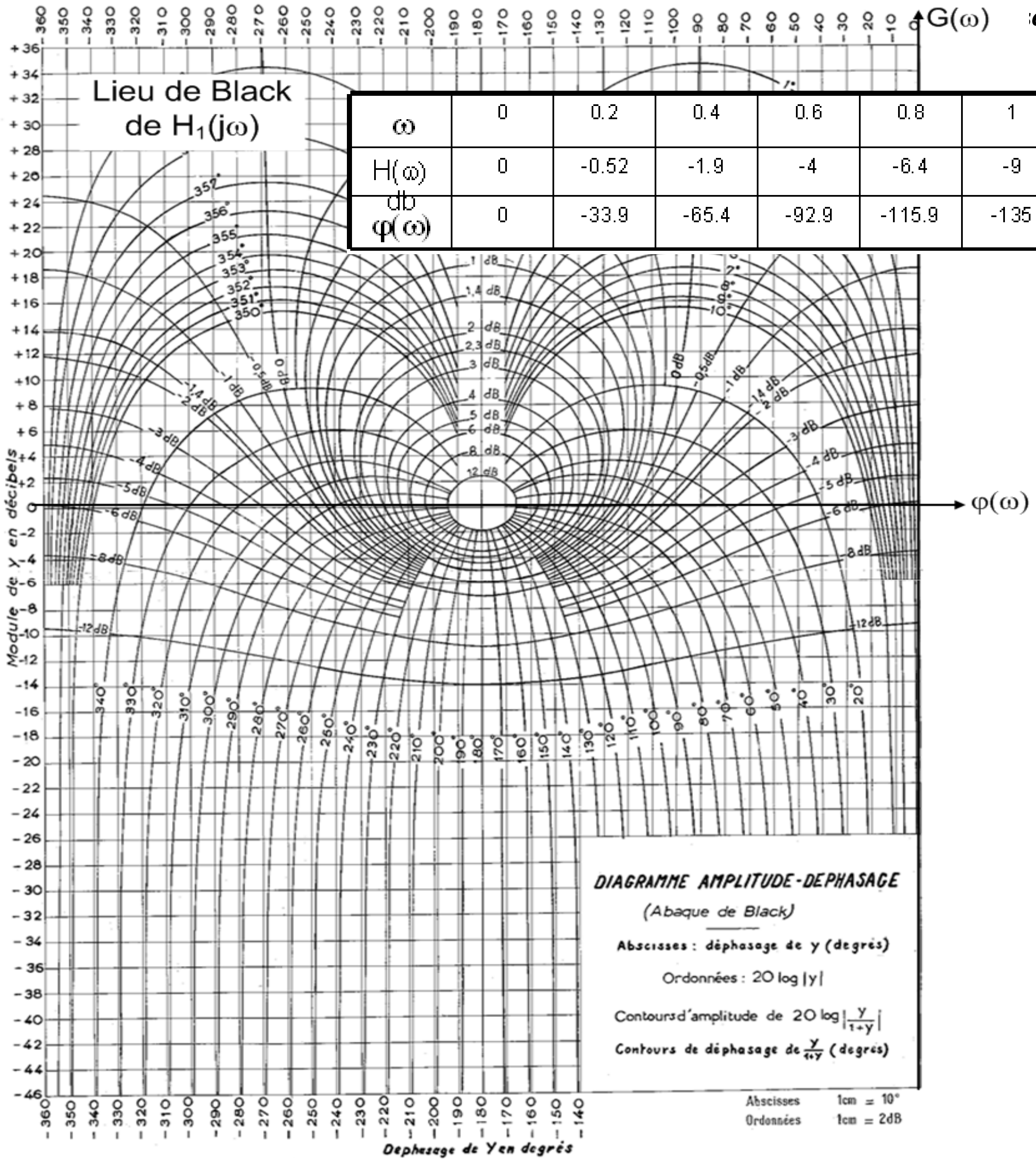
ω	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1	2
$H(\omega)$	1	0.942	0.8	0.630	0.476	0.353	0.089
$\varphi(\omega)$	0	-33.9	-65.4	-92.9	-115.9	-135	-190

- *Représentez sur le lieu de Black la fonction de transfert :*

$$H_1(p) = \frac{1}{(1+p)^3}$$

- *Puis effectuez la représentation de :*

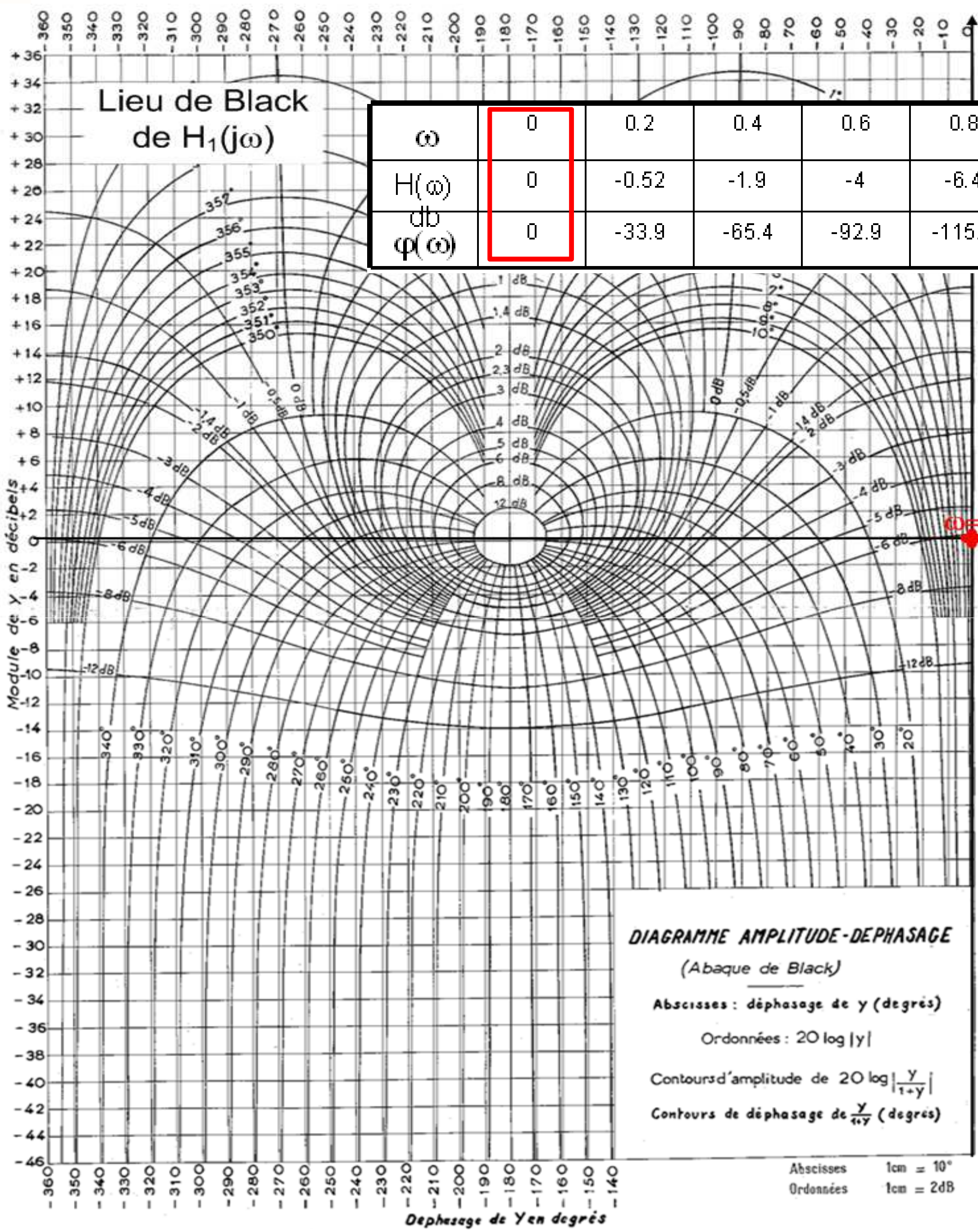
$$H_2(p) = \frac{5}{(1+p)^3}$$

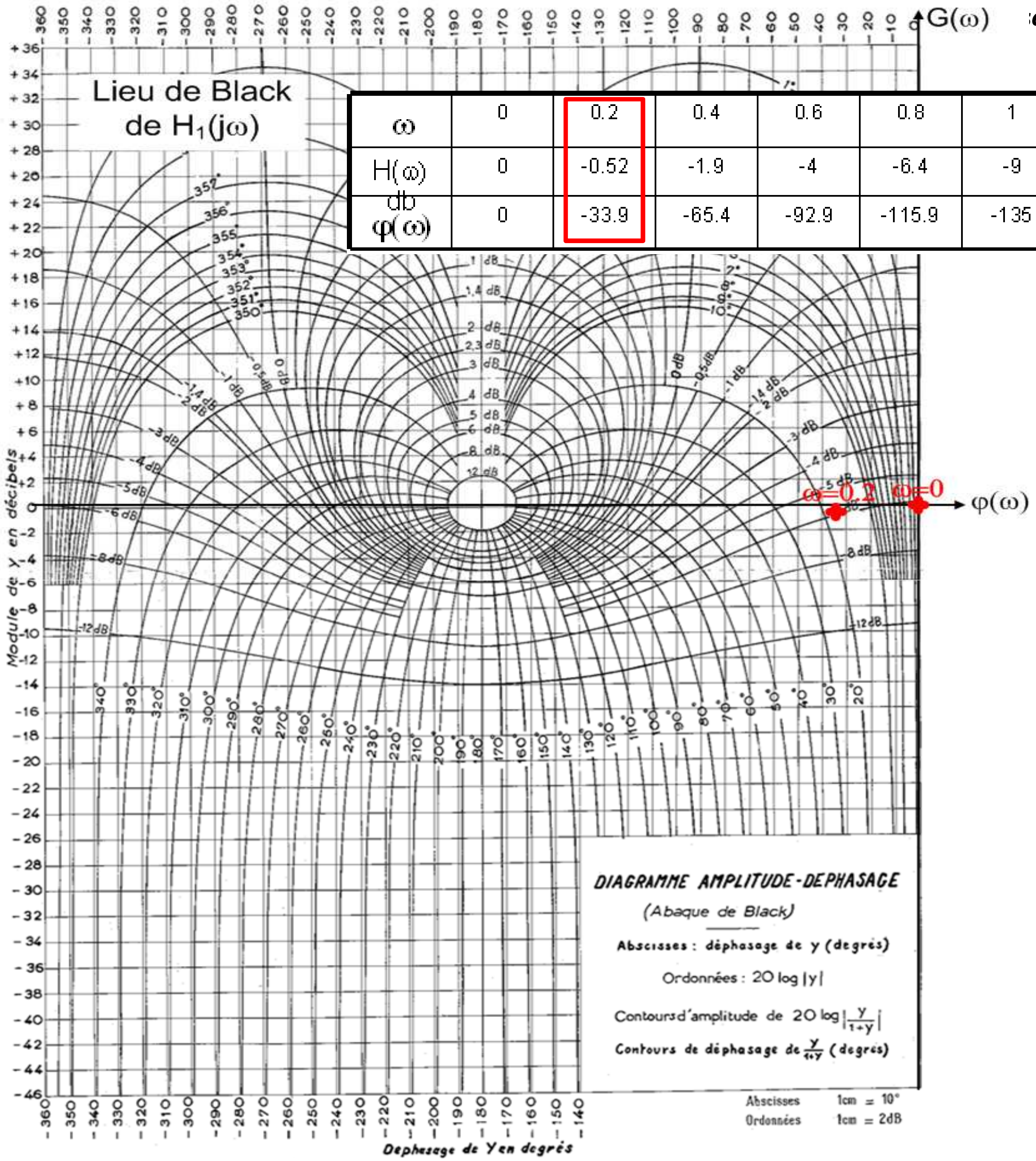


ω	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1	2
H(ω) db	0	-0.52	-1.9	-4	-6.4	-9	-21
φ(ω)	0	-33.9	-65.4	-92.9	-115.9	-135	-190

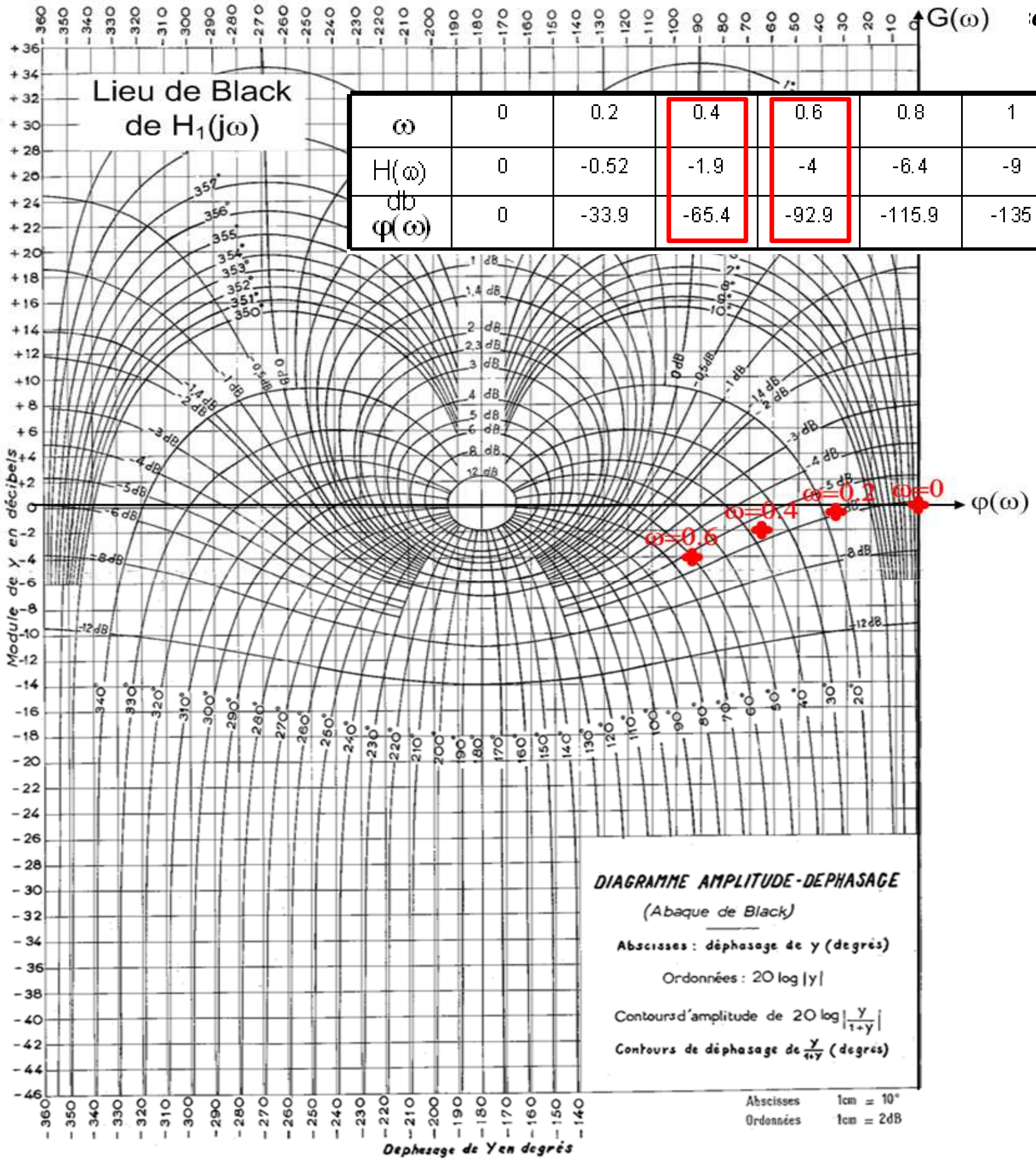
Lieu de Black de $H_1(j\omega)$

ω	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1	2
$H(\omega)$ db	0	-0.52	-1.9	-4	-6.4	-9	-21
$\varphi(\omega)$	0	-33.9	-65.4	-92.9	-115.9	-135	-190

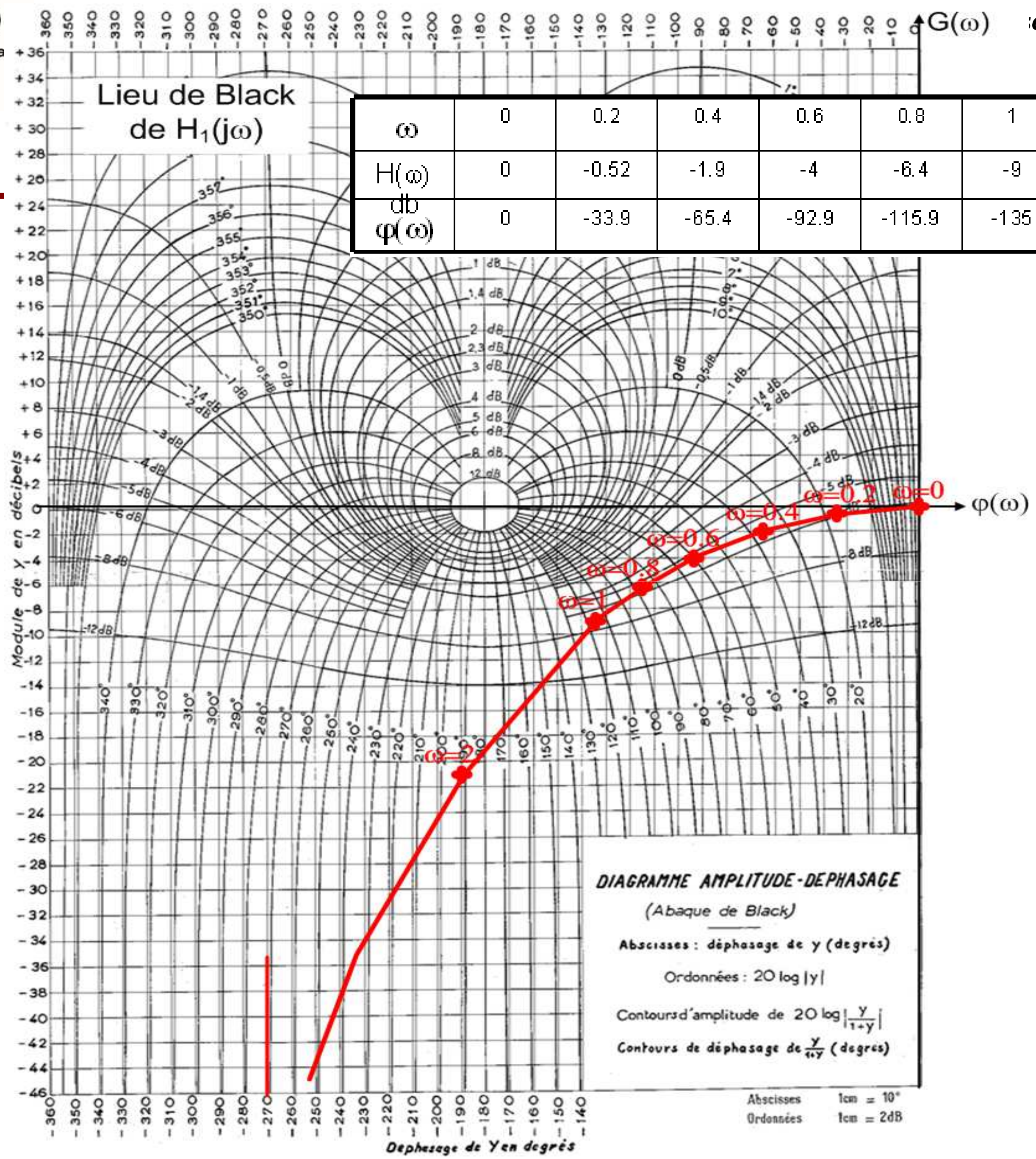




ω	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1	2
$H(\omega)$ db	0	-0.52	-1.9	-4	-6.4	-9	-21
$\varphi(\omega)$	0	-33.9	-65.4	-92.9	-115.9	-135	-190



ω	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1	2
$H(\omega)$ db	0	-0.52	-1.9	-4	-6.4	-9	-21
$\varphi(\omega)$	0	-33.9	-65.4	-92.9	-115.9	-135	-190



ω	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1	2
H(ω) db	0	-0.52	-1.9	-4	-6.4	-9	-21
φ(ω)	0	-33.9	-65.4	-92.9	-115.9	-135	-190

Analyse Fréquentielle des Systèmes

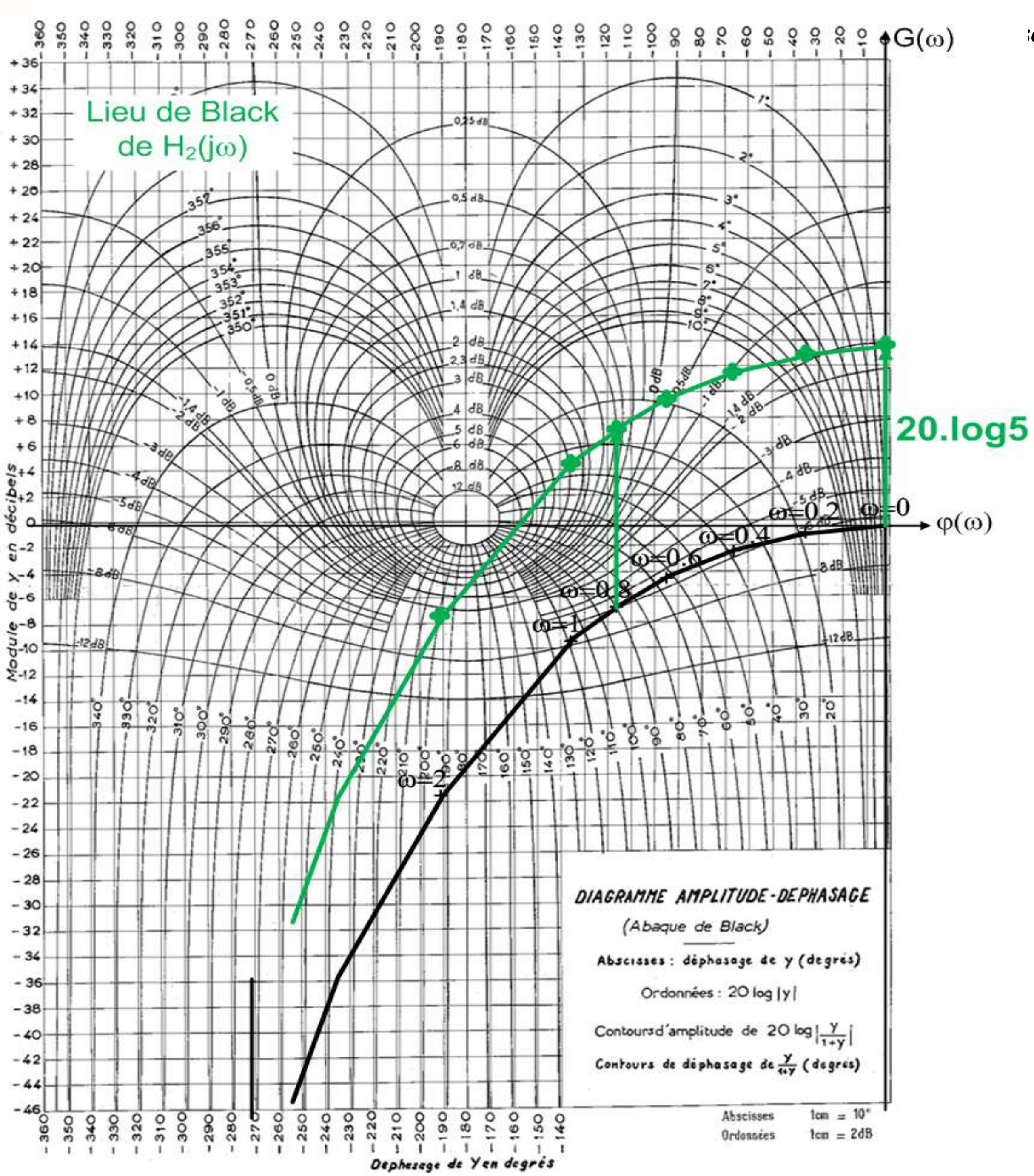
- *Puis effectuez la représentation de :*

$$H_2(p) = \frac{5}{(1+p)^3} \quad \Longrightarrow \quad H_2(j\omega) = 5.H_1(j\omega)$$

Avec pour le gain : $H_2(\omega) = 5.H_1(\omega)$

donc en db $H_2(\omega)_{db} = 20.\log H_2(\omega) = 20.\log 5 + 20\log H_1(\omega)$

Avec pour la phase : $\varphi_{H_2}(\omega) = \varphi_{H_1}(\omega)$


Lieu de Black
de H2(jω)
20.log5
G(ω)
φ(ω)
ω=0
ω=0.2
ω=0.4
ω=0.6
ω=0.8
ω=1
ω=2
DIAGRAMME AMPLITUDE-DEPHASAGE
(Abaque de Black)
Abscisses : déphasage de y (degrés)
Ordonnées : 20 log |y|
Contours d'amplitude de 20 log |y/(1+y)|
Contours de déphasage de y/(1+y) (degrés)
Abscisses 1cm = 10°
Ordonnées 1cm = 2dB
Dephasage de Y en degrés
Module de Y en décibels

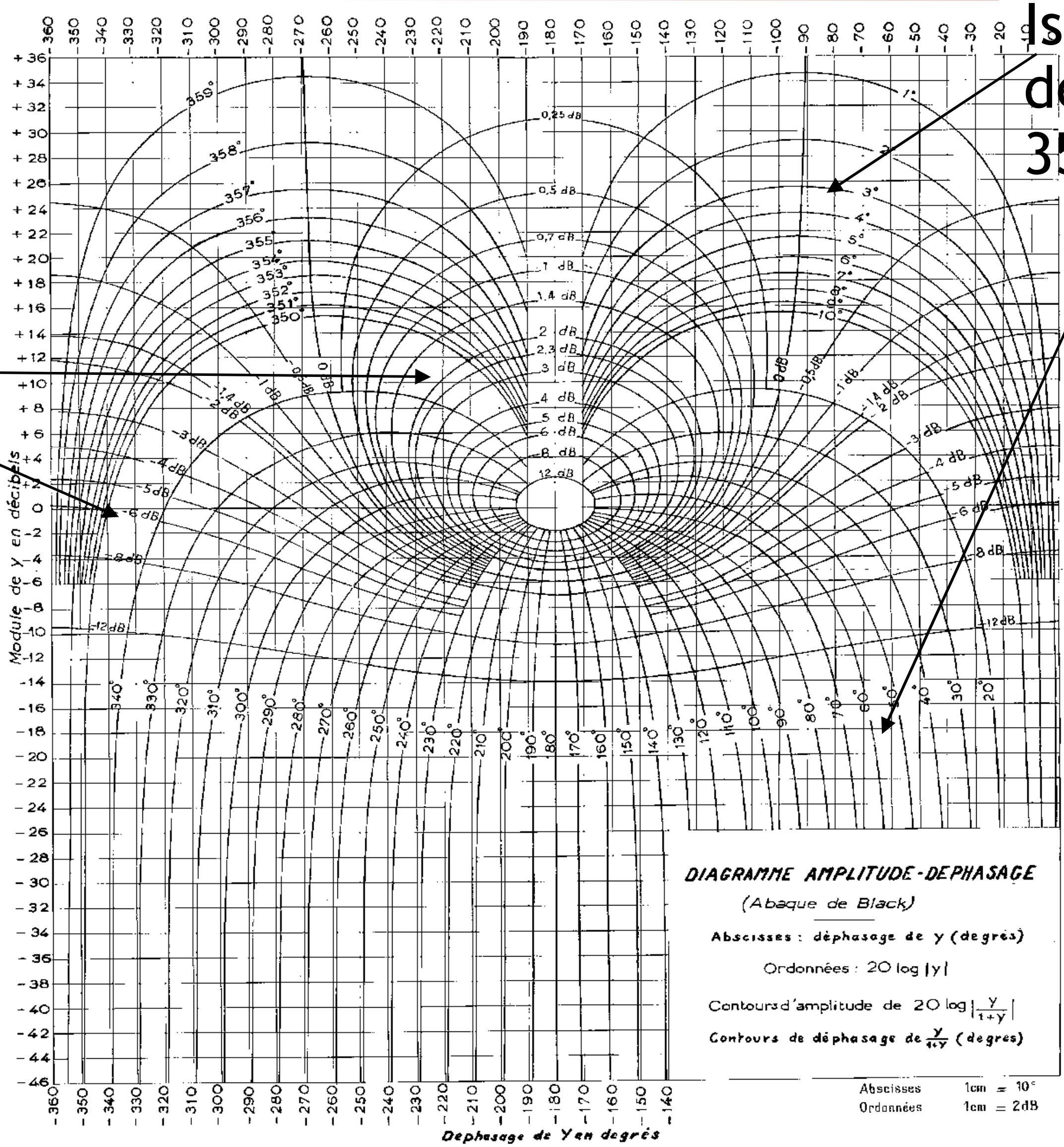
Analyse Fréquentielle des Systèmes

- Lieu de Black – courbes isophases - isogains:

  Le lieu de black permet de connaître la représentation en BO du système en traçant le gain et la phase de ce système en BF.

Analyse Fréquentielle des Systèmes

Isogain : de 12 dB à -12 dB



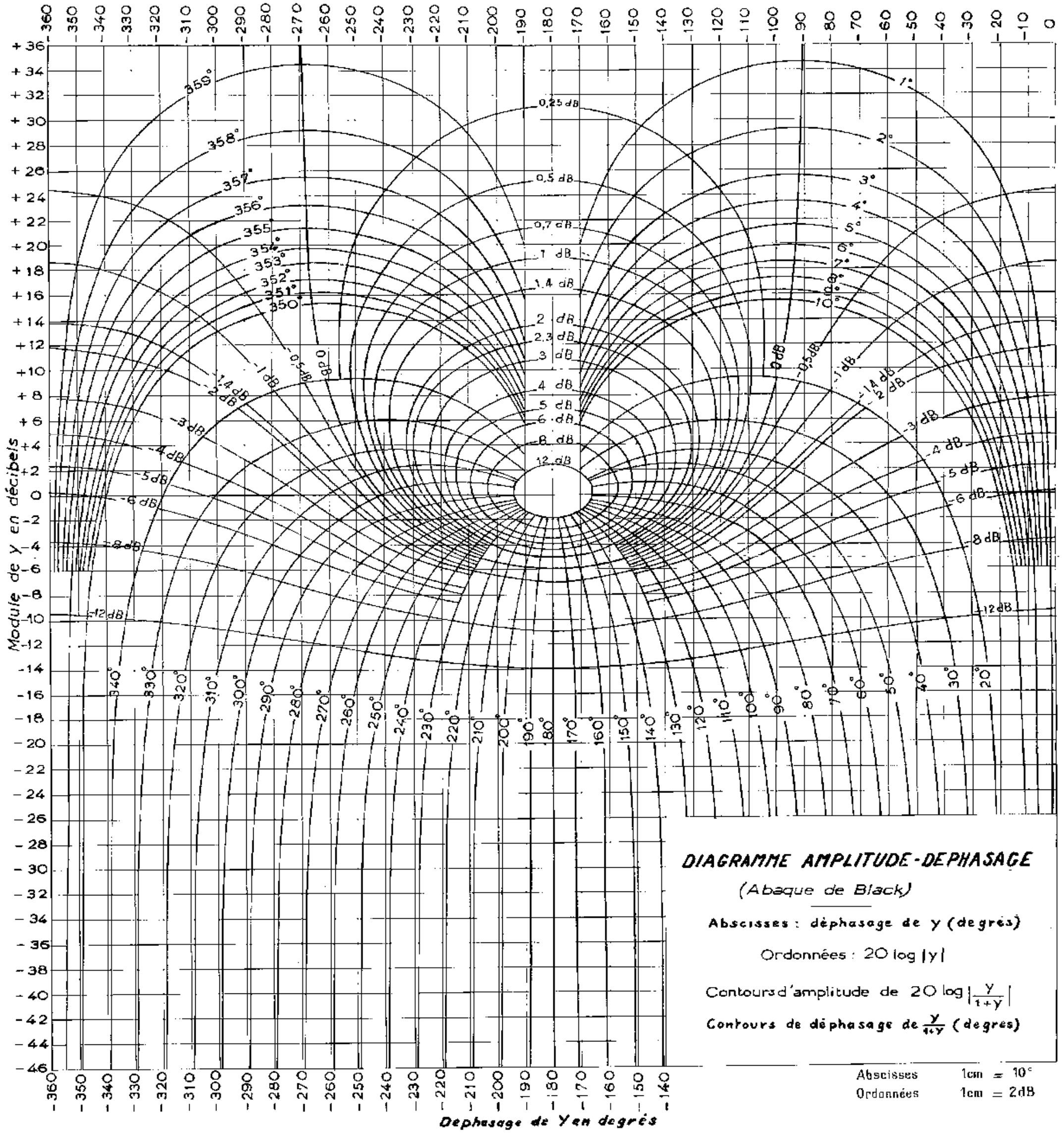
Isophase : de -1° à -359°

Analyse Fréquentielle des Systèmes

Exemple en boucle fermée :

ω = 0,5 rad/s

Gain = -2,9 dB
Phase : -30°

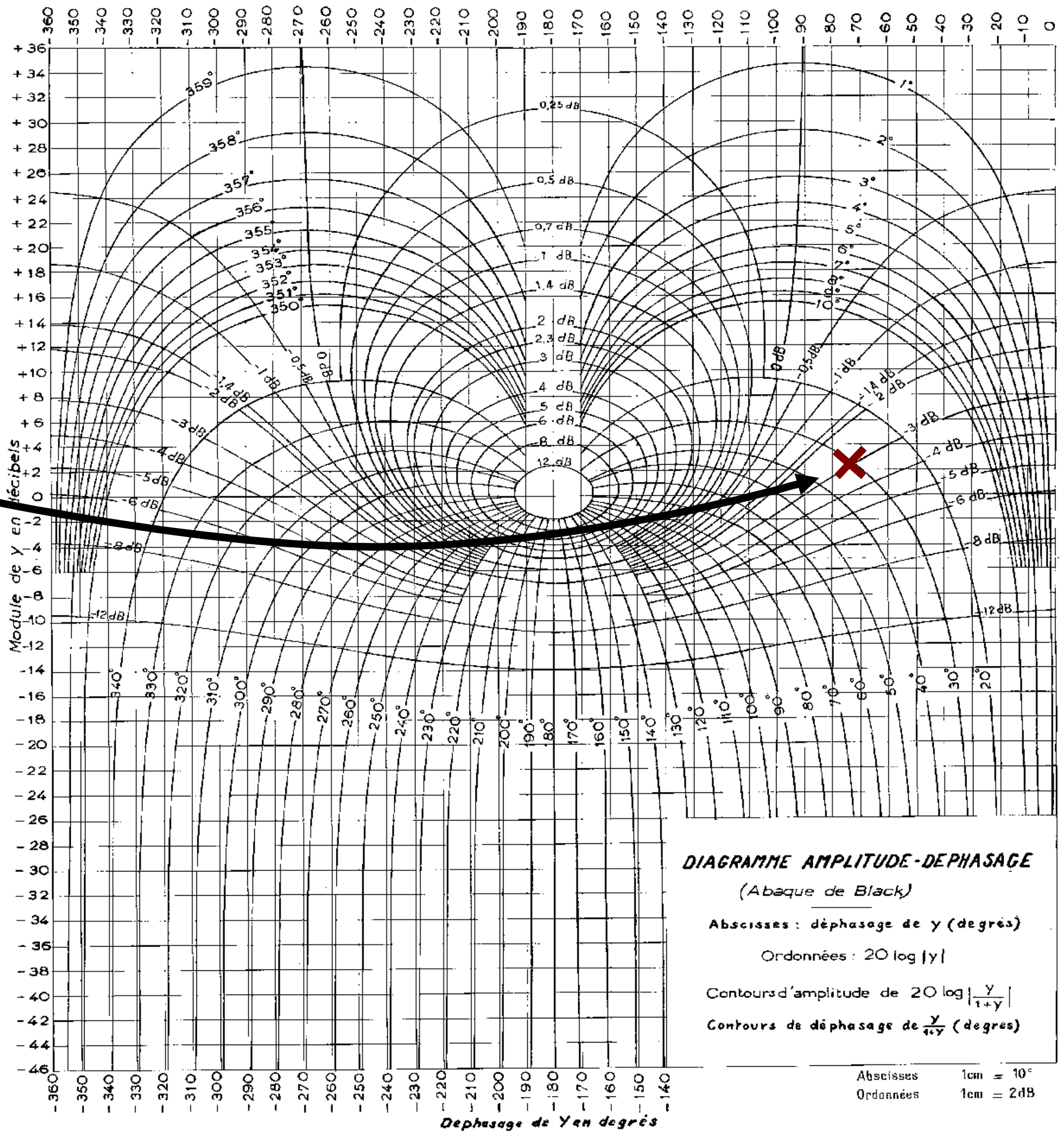


Analyse Fréquentielle des Systèmes

Exemple en boucle fermée :

ω = 0,5 rad/s

Gain = -2,9 dB
Phase : -30°

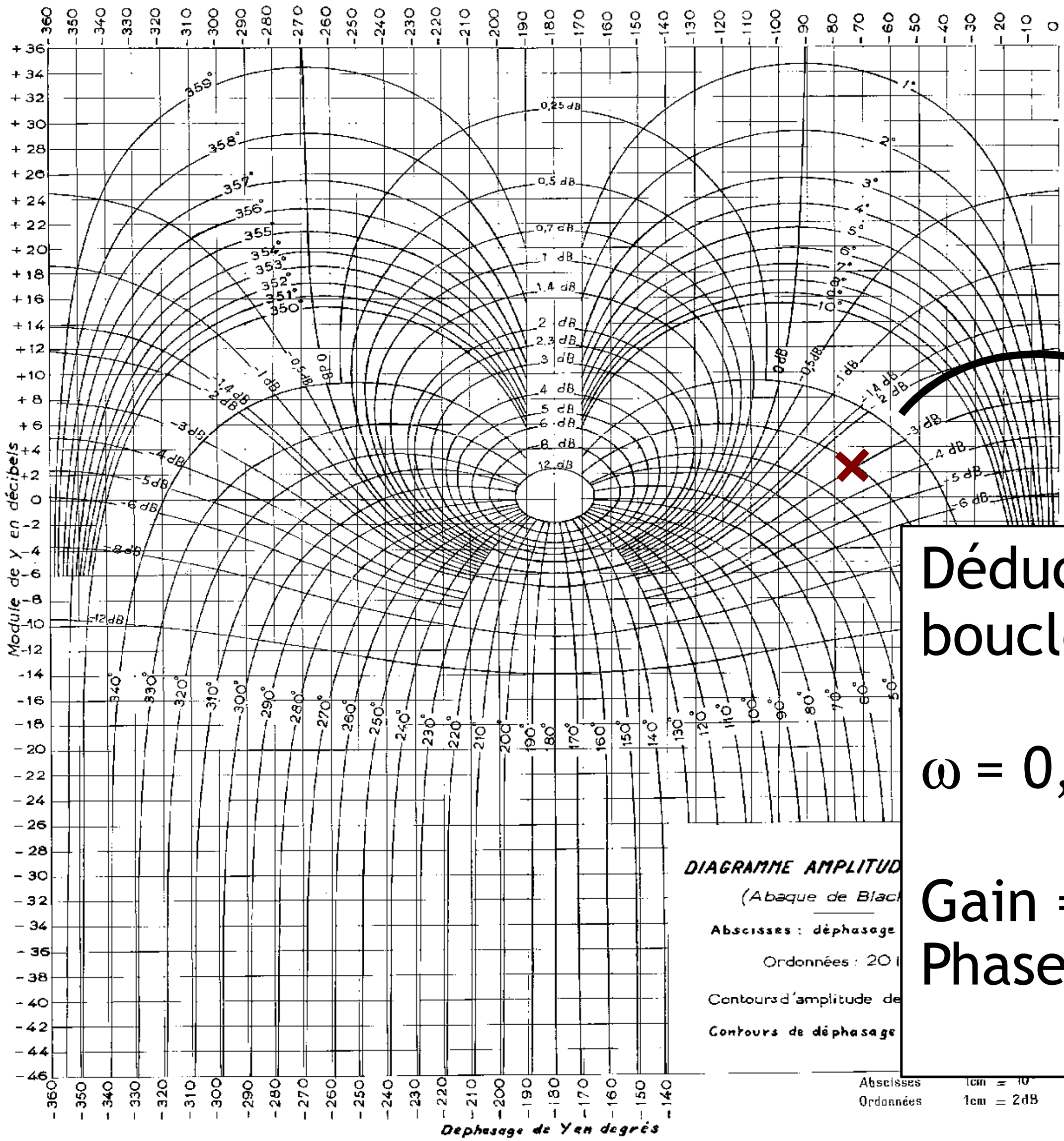


Analyse Fréquentielle des Systèmes

Exemple en boucle fermée :

ω = 0,5 rad/s

Gain = -2,9 dB
Phase : -30°

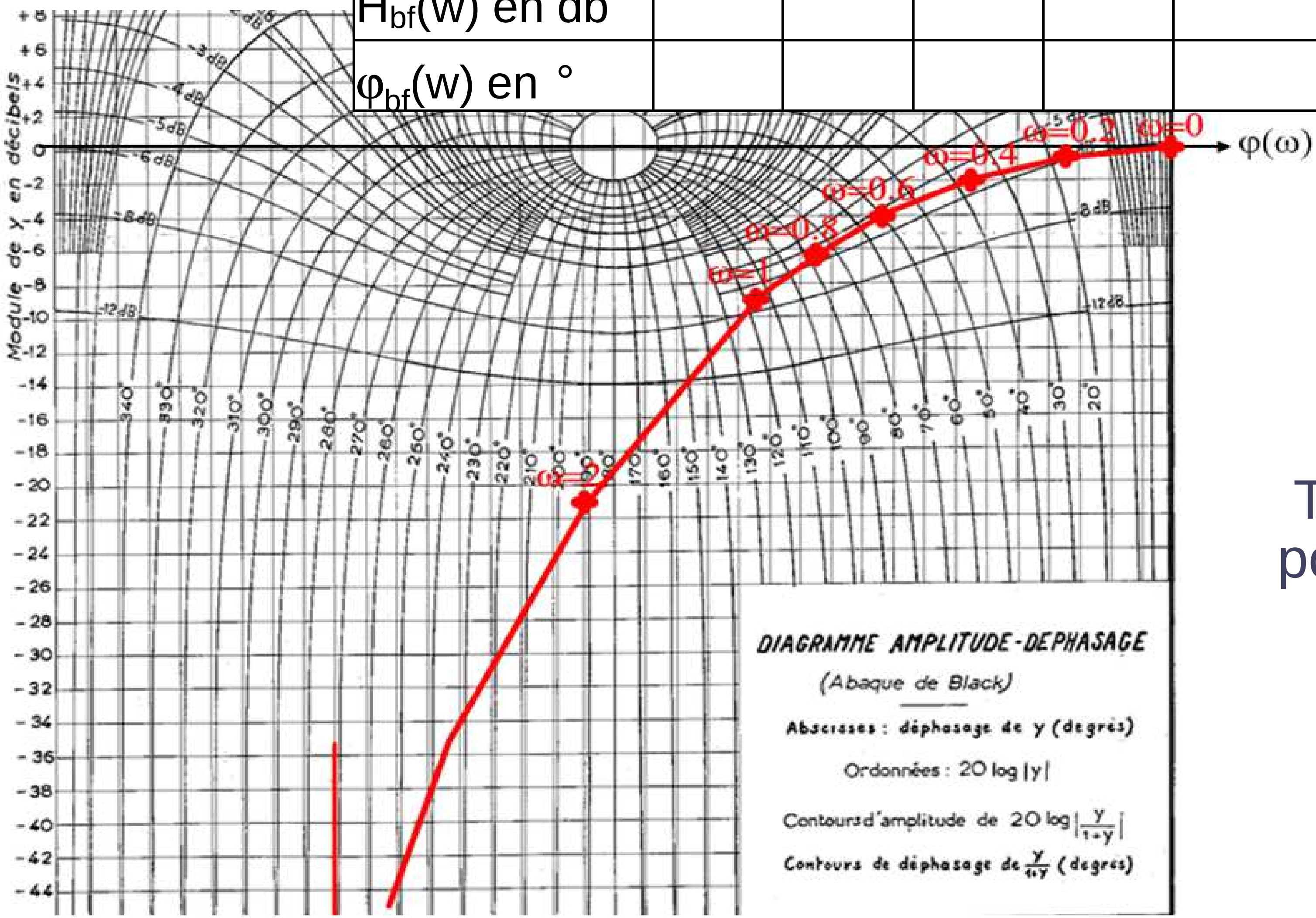


Déduction en boucle ouverte :

ω = 0,5 rad/s

Gain = +3 dB
Phase : -72°

ω	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1	2
$H_{bo}(w)$ en db	0	-0,5	-1,9	-4,0	-6,4	-9,0	-21,0
$\varphi_{bo}(w)$ en °	0	-34	-65	-93	-116	-135	-190
$H_{bf}(w)$ en db							
$\varphi_{bf}(w)$ en °							



Trouver les points $H_{bf}(\omega)$

ω	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1	2
$H_{bo}(w)$ en db	0	-0,5	-1,9	-4,0	-6,4	-9,0	-21,0
$\varphi_{bo}(w)$ en °	0	-34	-65	-93	-116	-135	-190
$H_{bf}(w)$ en db	-6	-6	-5,5	-5,4	-5,8	-7,5	<-12
$\varphi_{bf}(w)$ en °	0	-18	-35	-59	-85	-116	-191