# SERIES NUMERIQUES

## A. DEFINITION

La série de terme général $u_n$ ( $u_n \in \mathbb{R}$ ou $u_n \in \mathbb{C}$), série notée $\sum u_n$, est dite **convergente** si les sommes partielles $s_n$ définies par :

$$s_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n$$

admettent une limite dans $\mathbb{R}$ ou dans $\mathbb{C}$. On pose alors :

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{n \to +\infty} s_n = \lim_{N \to +\infty} \sum_{k=0}^{k=N} u_k}$$

Lorsqu'une série **converge,** son terme général tend vers 0 ( $\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$). La réciproque de cette propriété est fausse.

Lorsque une série **ne converge pas**, elle est dite **divergente**.

## B. SERIES A TERMES POSITIFS ($u_n \geq 0$)

### 1. COMPARAISON PAR MAJORATION.

| |
|---|
| On suppose que, quel que soit l'entier $n$, $0 \leq u_n \leq v_n$ |
| Si la série $\sum v_n$ converge, alors la série $\sum u_n$ converge<br>Si la série $\sum u_n$ diverge, alors la série $\sum v_n$ diverge |

## 2. COMPARAISON PAR EQUIVALENCE.

Si $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$, c'est à dire si $v_n = u_n(1+\varepsilon(n))$ avec $\lim\limits_{n\to+\infty} \varepsilon(n) = 0$

**alors** les deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature

## 3. REGLE DE CAUCHY.

On suppose que $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n}$ existe dans $\mathbb{R}$.

Soit : $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = l$ ($l$ réel)

Si, $l < 1$ **alors** la série $\sum u_n$ converge.

Si, $l > 1$ **alors** la série $\sum u_n$ diverge.

**Remarque** : dans le cas $l = 1$, la règle précédente est inopérante.

## 4. REGLE DE D'ALEMBERT.

On suppose que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ existe dans $\mathbb{R}$.

Soit : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = l'$ ($l'$ réel)

Si, $l' < 1$ **alors** la série $\sum u_n$ converge.

Si, $l' > 1$ **alors** la série $\sum u_n$ diverge.

**Remarque** : dans le cas $l' = 1$, la règle précédente est inopérante.

## 5. COMPARAISON AVEC UNE INTEGRALE.

Si le terme général de la série est de la forme $u_n = f(n)$ où $f$ est une fonction définie sur $[a, +\infty[$, à valeurs positives et décroissante

**alors** la série $\sum u_n = \sum f(n)$ et l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ sont de même nature.

Pour la notion de convergence ou de divergence de l'intégrale, voir l'annexe 5.

## 1. ABSOLUE CONVERGENCE.

**Si** la série $\sum |u_n|$ est convergente, **alors** la série $\sum u_n$ est convergente. Dans ce cas, on dit que la série $\sum u_n$ est **absolument convergente**

**ATTENTION** : la réciproque de ce théorème est fausse.

## 2. CRITERE SPECIAL POUR LES SERIES ALTERNEES

**Définition** :

Une série $\sum u_n$ est dite **alternée** si les valeurs de $u_n$ sont alternativement positives et négatives.

Par exemple, la série $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ est une série alternée car ses termes de rang pair sont positifs, alors que ses termes de rang impair sont négatifs.
Le critère de convergence de ces séries est le suivant :

**Si** $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$ et si la **suite** $|u_n|$ est **décroissante**

**alors** la série $\sum u_n$ est convergente (la réciproque est fausse).

## 3. EXEMPLES FONDAMENTAUX.

**Série géométrique** :

$\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a^n$ converge si et seulement si $|a| < 1$, et dans ce cas $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a^n = \frac{1}{1-a}$

**Série de Riemann** :
$\alpha$ est un réel donné strictement positif.

$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$

**Série harmonique :**

La série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ est divergente

**Série harmonique alternée :**

La série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ est convergente

On remarquera que la série harmonique alternée n'est pas absolument convergente.

**Serie de type trigonométrique :**

Les séries $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n^\alpha}$ convergent pour tout nombre $\alpha > 0$.
La convergence est absolue si $\alpha > 1$.

**Séries de Bertrand :**

Les séries $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha (\ln(n))^\beta}$

convergent si $\alpha > 1$, quelle que soit la valeur de $\beta$.
divergent si $\alpha < 1$, quelle que soit la valeur de $\beta$.
Lorsque $\alpha = 1$, elles convergent pour $\beta > 1$ et divergent pour $\beta \leq 1$.

# SUITES ET SERIES DE FONCTIONS

## 1. SUITES DE FONCTIONS, CONVERGENCE SIMPLE ET UNIFORME.

### 1.1 DEFINITION.

On appelle **suite de fonctions**, toute application de l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels dans l'ensemble des fonctions réelles de la variable réelle définies sur un même intervalle $I$ de $\mathbb{R}$. On note $f_n$ la fonction associée à l'entier $n$.

$$n \longrightarrow f_n \text{ telle que : } \forall x \in I \; ; \; x \xrightarrow{f_n} f_n(x)$$

La suite, dite de terme général $f_n$ , est notée : $(f_n)$.

### 1.2 CONVERGENCE SIMPLE ET UNIFORME.

On dit que la suite $(f_n)$ **converge** sur $I$ si, pour tout $x$ de $I$, la **suite numérique** $(f_n(x))$ est convergente.

La fonction $f$ définie sur $I$ par $f(x) = \lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x)$ est dite limite de la suite $(f_n)$.

Nous avons donc :

> Pour tout $x \in I$ et pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver un entier naturel $N$ tel que, pour $n \geq N$, on ait : $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.
>
> Deux cas sont à envisager.

Premier cas :

Si l'entier $N$ **dépend à la fois de $x$ et de $\varepsilon$, on dit que la** suite $(f_n)$ **converge simplement** sur $I$ vers la fonction $f$ ( ou que $f$ est **limite simple** de la suite $(f_n)$ )

Deuxième cas :

Si l'entier $N$ **ne dépend que de $\varepsilon$ et non de $x$, on dit que la** suite $(f_n)$ **converge uniformément** sur $I$ vers la fonction $f$ ( ou que $f$ est **limite uniforme** de la suite $(f_n)$ )

## 2. SERIES DE FONCTIONS

### 2.1 DEFINITION, CONVERGENCE SIMPLE ET UNIFORME

Etant donnée une suite $(f_n)$ de fonctions définies sur un intervalle $I$ de $\mathbb{R}$, la série de terme général $f_n(x)$, série notée $\sum f_n$, est dite convergente si la suite $(S_n)$ des sommes partielles définie par :

$$\forall x \in I \ ; \ S_n(x) = f_0(x) + f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x)$$

est convergente. La fonction $f$, définie sur $I$ par : $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n(x) = f(x)$, est appelée somme de la série, et on note :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$$

Si la suite $(S_n)$ **converge simplement** sur $I$ vers la fonction $f$, on dit que la série de fonctions $\sum f_n$ , de terme général $(f_n)$ est **simplement convergente** sur $I$ vers la fonction $f$.

Si la suite $(S_n)$ **converge uniformément** sur $I$ vers la fonction $f$, on dit que la série de fonctions $\sum f_n$ , de terme général $(f_n)$ est **uniformément convergente** sur $I$ vers la fonction $f$.

## 2.2 PROPRIETES DES SERIES UNIFORMEMENT CONVERGENTES

**Théorème 1**

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions toutes **continues** sur un même intervalle $I$ de $\mathbb{R}$.

Si la série $\sum f_n$ est **uniformément convergente** sur $I$ ,**alors** sa somme $f$ est une fonction **continue** sur $I$.

**Théorème 2**

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions toutes **continues** sur un intervalle $[a,b]$ de $\mathbb{R}$.

Si la série $\sum f_n$ est **uniformément convergente** sur $[a,b]$ **alors** elle est "**intégrable terme à terme**", c'est-à-dire que l'on a :

$$\boxed{\forall x \in [a,b] \ , \ \int_a^x \left( \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) \right) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \left( \int_a^x f_n(t)dt \right)}$$

( en cas de convergence uniforme on peut " intervertir" le signe $\int$ et le signe $\sum$ )

**Téorème 3**

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions définies sur un intervalle $[a,b]$ de $\mathbb{R}$ et admettant sur cet intervalle des **dérivées continues**.

Si

1°) La série des dérivées $\sum f_n{}'$ **converge uniformément** sur $[a,b]$

2°) Il existe un $x_0 \in [a,b]$ tel que la série **numérique** $\sum f_n(x_0)$ converge

**Alors**

la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur $[a,b]$ vers une fonction dérivable et la série est "**dérivable terme à terme**".

$$\boxed{\forall x \in [a,b] \ , \ \frac{d}{dx}\left[ \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \right] = \sum_{n=0}^{+\infty} \left[ \frac{d}{dx} f_n(x) \right]}$$

(on intervertit, ici, la dérivation et la sommation).

# ANNEXE 4

## SERIES ENTIERES

### A. DEFINITIONS ET PROPRIETES

**Définition**

Une série de terme général $u_n = a_n z^n$, où les $a_n$ sont des nombres réels ou complexes donnés et $z$ une variable réelle ou complexe, est dite **série entière**. On la note $\sum a_n z^n$.

**Propriétés**

**1°) Somme.**

Suivant les valeurs données à $z$, la série de terme général $u_n = a_n z^n$ peut-être convergente ou divergente et, dans le cas de convergence, on définit la fonction somme $f$ de la série par :

$$\boxed{f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n}$$

Pour des séries de fonctions à valeurs complexes, la variable étant elle même complexe, les définitions et le propriétés donnant l'uniforme convergence notament sont développées de façon analogue à ce qui est dit en l'annexe 3.

**2°) Rayon de convergence.**

Pour savoir si une série èntière converge, on utilise souvent la règle de d'Alembert. Cela exige ici que $\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ existe ( on la note $l$). Alors $\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}z^{n+1}}{a_n z^n}\right| = l|z|$.

- **Si** $l = 0$ **alors** la série entière converge absolument pour tout $z$ dans $\mathbb{C}$.

- **Si** $l \neq 0$ **alors** la série entière converge absolument pour tout $z$ vérifiant $|z| < \frac{1}{l}$.
- **Si** $\lim_{n \to +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = +\infty$ **alors** la série entière ne converge que pour $z = 0$.

**Théorème**

Ce qui vient d'être obtenu ici par la règle de d'Alembert représente la situation générale. Pour toute série entière, ou bien la série converge pour tout $z$, ou bien il existe $R \geq 0$ tel que

$$\begin{cases} |z| < R \Rightarrow \sum |a_n z^n| \text{ } converge \\ |z| > R \Rightarrow \sum |a_n z^n| \text{ } diverge \end{cases}$$

Le réel $R$ est appelé **rayon de convergence** de la série entière et l'intervalle $]-R, +R[$ est dit **intervalle de convergence**. Dans le cas ou la série converge partout, on convient d'écrire $R = +\infty$. Dans le cas où on utilise la règle de d'Alembert, $R = \frac{1}{l}$

**3°) Propriétés de la fonction somme (la variable étant réelle).**

Soit $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. Pour tout $x$ appartenant à l'intervalle de convergence $]-R, +R[$, on a :

a) la fonction $f$ est indéfiniment dérivable sur $]-R, +R[$ et on peut "**dériver la série terme à terme**" a savoir :

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$$

$\forall x \in ]-R, +R[$

$$f''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

et de même pour les autres dérivées.

b) Si la fonction $f$ est identiquement nulle sur un intervalle $]-r, +r[$ où $r < R$, alors tous les coefficients $a_n$ sont nuls (cette propriété généralise la propriété du même type pour les polynômes)

## B. FONCTIONS DEVELOPPABLES EN SERIES ENTIERES

Pour certaines séries entières, les fonctions sommes sont bien connues. Voici quelques développement utiles.

Développements valables pour tout $x$ dans $]-1, +1[$ :

$$(1+x)^{\alpha} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n \quad , (\alpha \text{ réel quelconque})$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

Développements valables pour tout $x$ réel :

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$\mathrm{sh}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$ch(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$