• Série de Fourier
• Transformée de Fourier
• Transformée de Laplace

Professeur : Lahcen Kaddouri

ISEN

2021/2022

Table des matières

Chapitre 1

Série de Fourier

1.1 Introduction

Dans de nombreux domaines de la physique on rencontre l'étude de systèmes que l'on peut modéliser de la manière suivante (figure 1) :

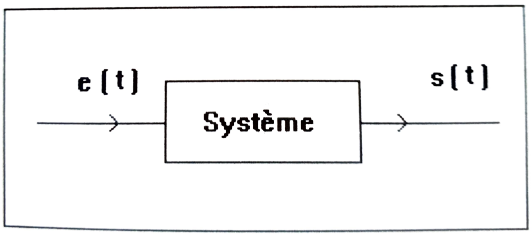


Figure 1.1 – Etude d'un système

Une modélisation plus poussée conduit à envisager des systèmes dits « linéaires » qui ont entre autres propriétés celle de *superposition*, c'est-à-dire que le signal de sortie $s(t)$ dû à l'existence de plusieurs signaux d'entrées est égal à la somme des signaux de sorties dus à chacun des signaux d'entrées pris isolément. La figure 2 illustre cette propriété.

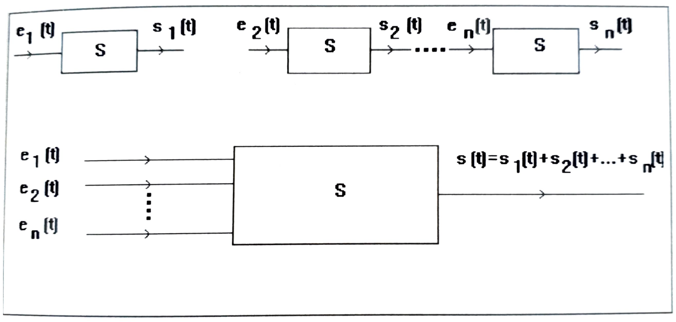


Figure 1.2 – Etude de plusieurs systèmes

D'un point de vue mathématique, on maîtrise bien la recherche du signal de sortie à condition que le signal d'entrée soit représenté par une fonction constante ou une fonction sinusoïdale.
Dans la pratique, un signal d'entrée est le plus souvent modélisé par une fonction périodique de période T, mais non nécessairement sinusoïdale, comme par exemple le signal représenté par la figure 3.
Ainsi a-t-on cherché à décomposer une fonction quelconque, périodique, de période T en somme d'une fonction constante et de fonctions sinusoïdales.
Le graphique de la figure 3, a été obtenu en faisant la somme des fonctions :
$t \longmapsto 1,\ t \longmapsto \sin(2t),\ t \longmapsto \frac{1}{2}\sin(5t)$.

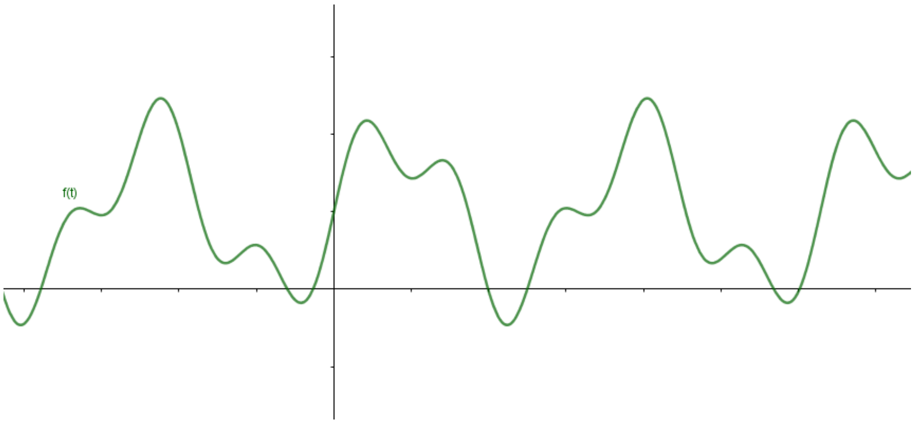


FIGURE 1.3 – Etude d'un signal

1.2 Séries trigonométriques

Les fonctions considérées sont à valeurs réelles. Si une fonction était à valeurs complexes, on pourrait appliquer ce qui va suivre à la partie réelle et à la partie imaginaire.

1.2.1 Définition

On appelle série trigonométrique, toute série de fonctions $\sum f_n$ dont le terme général f_n est une fonction réelle définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_n(t) = a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)$. Les nombres a_n et b_n sont des nombres réels indépendants de t, ω est un réel positif donné et n un entier naturel.

1.2.2 Cas particulier : Fonction périodique de période 2π

On se place dans le cas $\omega = 1$.

Propriétés de périodicité
$t \longmapsto f_n(t) = a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)$ sont périodiques, de période 2π, car pour tout n dans $\mathbb{N}$,
$f_n(t + 2\pi) = f_n(t)$.
Il en résulte qu'en cas de convergence simple sur $\mathbb{R}$ de la série $\sum f_n$, la fonction somme de cette série :

$$t \longmapsto \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{N} f_n(t)$$

est une fonction périodique, de période 2π.
Dans la suite du cours, l'expression « la série de fonction $\sum f_n$ est convergente sur I » voudra dire que la série de fonctions converge simplement sur I. A ce propos, remarquons que les fonctions f_n, sont définies, continues et à dérivées continues sur $\mathbb{R}$.

Calcul des coefficients a_n et b_n $(n \in \mathbb{N})$
Considérons une série trigonométrique $\sum f_n$ et supposons qu'elle converge sur $\mathbb{R}$. La fonction somme f est alors définie pour tout t dans $\mathbb{R}$ par :

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \Big(a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)\Big) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \Big(a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)\Big) \tag{1.1}$$

Remarquons que le coefficient b_0, n'intervient pas dans l'écriture de $f(t)$. Par convention, on pose $b_0 = 0$.

Proposition 1.1
On montre que les coefficients $a_0,\ b_0,\ a_n,\ b_n$ sont donnés par les formules :

$$\boxed{a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)dt\ ;\ b_0 = 0\ ;\ a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos(nt)dt\ ;\ b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin(nt)dt \quad (n \in \mathbb{N}^*)}$$

Remarque 1.1
Puisque la fonction f somme d'une série trigonométrique, est périodique de période 2π, il en est de même pour les fonctions $t \longmapsto f(t)\cos(nt)$ et $t \longmapsto f(t)\sin(nt)$. L'intervalle d'intégration qui a servi à calculer a_0, a_n, b_n peut être remplacé par un intervalle quelconque $[\alpha, \alpha + 2\pi[$ d'amplitude ou de longueur 2π avec α un réel quelconque, par exemple pour $\alpha = -\pi$ l'intervalle d'intégration est $[-\pi, \pi[$...

Proposition 1.2

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} f(t)dt \; ; \quad b_0 = 0 \; ; \quad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} f(t)\cos(nt)dt \; ; \; b_n = \frac{1}{\pi}\int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} f(t)\sin(nt)dt \quad (n \in \mathbb{N}^*)$$

1.2.3 Cas général : Fonction périodique de période T $(T \in \mathbb{R}^{+*})$

Soit f une fonction périodique de période T $(T \in \mathbb{R}^{+*})$. Les résultats du paragraphe précédent s'étendent à ce type de fonctions en considérant la fonction g, définie par $g(u) = f\left(\frac{T}{2\pi}u\right)$ et en posant $\omega = \frac{2\pi}{T}$.
La fonction g étant périodique de période 2π, les coefficients a_0, b_0, a_n, b_n sont :

$$\boxed{a_0 = \frac{1}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T} f(t)dt \; ; \quad b_0 = 0 \; ; \quad a_n = \frac{2}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T} f(t)\cos(n\omega t)dt \; ; \quad b_n = \frac{2}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T} f(t)\sin(n\omega t)dt \quad (n \in \mathbb{N}^*)}$$

Si $T = 2\pi$, alors $\omega = 1$ et on retrouve les formules de la proposition 1.2.

1.3 Développement en série de Fourier

1.3.1 Fonctions périodiques de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$

A. Discontinuité de première espèce

Considérons une fonction g sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ sauf peut-être en un point t_0 de I.
On dit que g possède une discontinuité de première espèce en t_0, si g possède une limite finie à droite et une limite finie à gauche en t_0 et ces deux limites ne sont pas égales (voir figure 1.4).
On notera dans ce cas

$$g(t_0^+) = \lim_{t \mapsto t_0^+} g(t) \; ; \; g(t_0^-) = \lim_{t \mapsto t_0^-} g(t).$$

Évidemment si les deux limites sont égales à $g(t_0)$ alors la fonction g est continue en t_0.

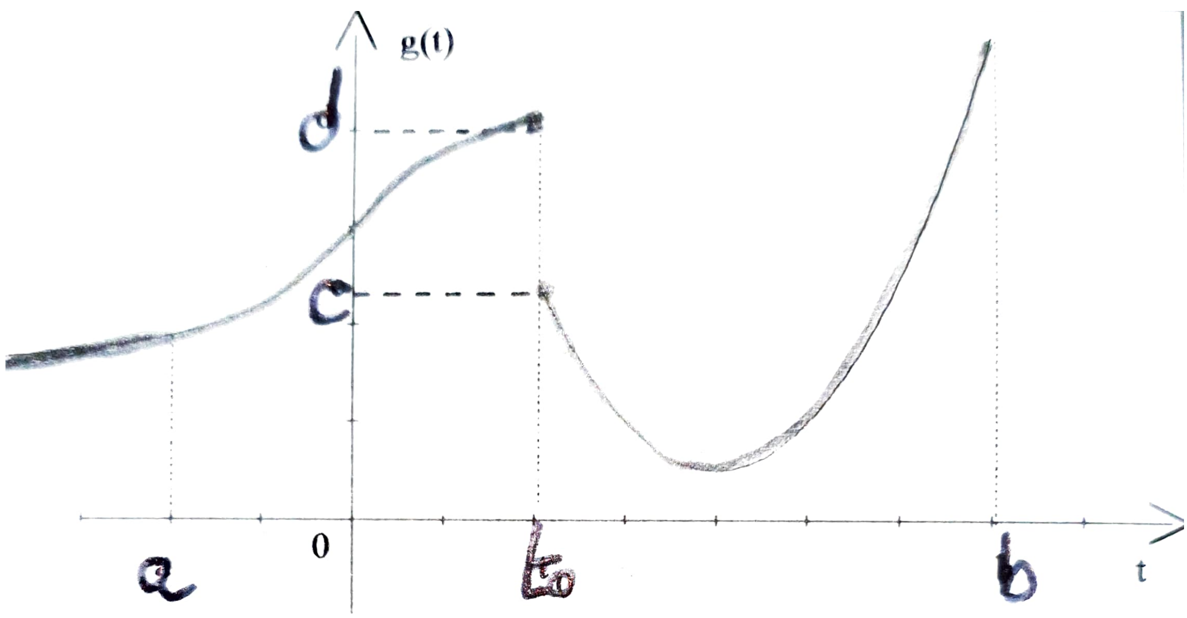


FIGURE 1.4 – Discontinuité de première espèce

B. Fonction de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$

Définition 1.1

Soit f une fonction à valeurs réelles et $I = [a, b]$ un intervalle fermé de $\mathbb{R}$.
On dit que f est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur I si les trois conditions suivantes sont réalisées :

1. *La fonction f est définie, continue, dérivable et à dérivée continue en tous points de l'intervalle I, **sauf** peut-être en un nombre **fini** de points t_i de I (éventuellement $t_i = a$ ou/et $t_i = b$).*
2. *En chacun des points t_i $(t_i \neq a$ et $t_i \neq b)$: $f(t_i^+)$ et $f(t_i^-)$ existent dans $\mathbb{R}$.*
   Si $t_i = a$ (respectivement $t_i = b$), $f(a^+)$ (respectivement $f(b^-)$) existe dans $\mathbb{R}$.
3. *En chacun des points t_i $(t_i \neq a$ et $t_i \neq b)$: $f'(t_i^+)$ et $f'(t_i^-)$ existent dans $\mathbb{R}$.*
   Si $t_i = a$ (respectivement $t_i = b$), $f'(a^+)$ (respectivement $f'(b^-)$) existe dans $\mathbb{R}$.

Exemple 1.1

Soit f la fonction définie par $f(t) = \begin{cases} t & si\ t \in [0, 1[\\ t^2 - 2t & si\ t \in]1, 3[\end{cases}$

On remarquera que la fonction f n'est pas définie en $t_0 = 1$.

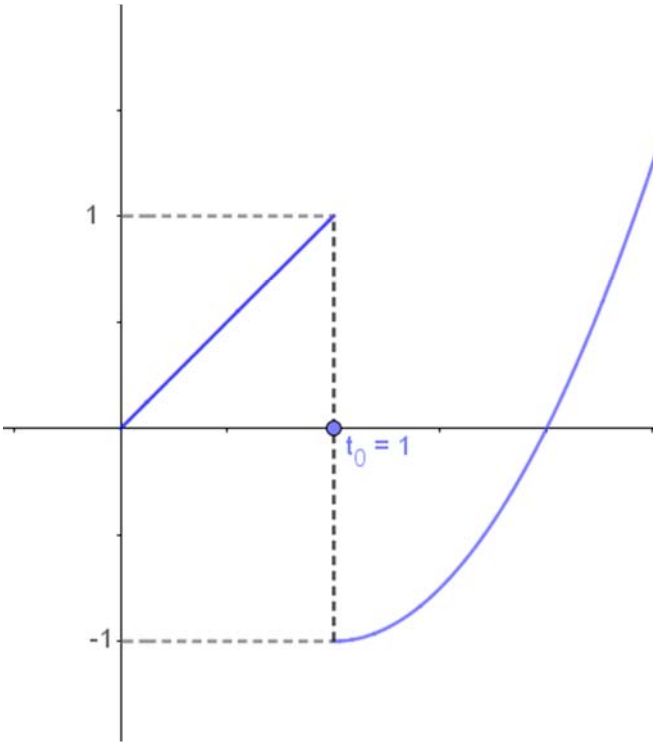


FIGURE 1.5 – Exemple 1.1

Exemple 1.2

Soit g la fonction définie par $g(t) = \begin{cases} t & \text{si } t \in [0, \pi] \\ 2\pi - t & \text{si } t \in]\pi, 2\pi[\end{cases}$

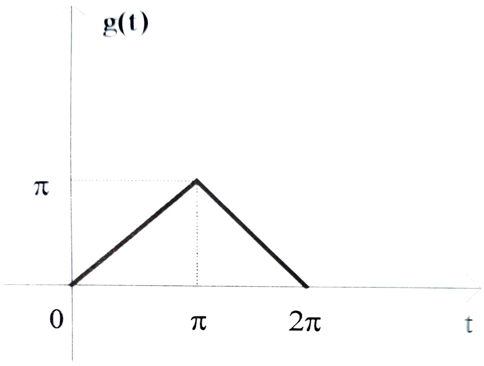


FIGURE 1.6 – Exemple 1.2

C. Fonction périodique de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$

Définition 1.2
Une fonction f périodique, de période T, est dite de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$ si f est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur un intervalle $[\alpha, \alpha + T[$, $(\alpha \in \mathbb{R})$.

Dans la pratique, une fonction f périodique, de période T sera définie par sa restriction à $[0, T[$ ou $[-\frac{T}{2}, +\frac{T}{2}[$ voire $[0, +\frac{T}{2}[$ si f est une fonction paire ou impaire. On se contentera alors de vérifier que f est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur l'intervalle concerné.

1.3.2 Développement en série de Fourier d'une fonction périodique de période 2π

Étant donnée une fonction f, périodique de période 2π, peut-on considérer f comme la somme d'une série trigonométrique sur certains intervalles de $\mathbb{R}$? Si oui, nous aurons alors sur ces intervalles :

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \Big(a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt) \Big)$$

Dans tout ce qui suit, on suppose que les réels a_n et b_n trouvés au paragraphes précédents existent (et que l'on peut effectivement les calculer).

Définition 1.3

Étant donnée une fonction f périodique, de période 2π, on appelle ***série de Fourier*** *associée à f, la série de fonctions $\sum f_n$ dont le terme général est la fonction f_n définie par : $f_n(t) = a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)$ avec*

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} f(t)dt \ ; \quad b_0 = 0 \ ; \quad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} f(t)\cos(nt)dt \ ; \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} f(t)\sin(nt)dt \quad (n \in \mathbb{N}^*)$$

et α un réel quelconque.
Les nombres a_n et b_n sont les ***coefficients de Fourier*** *associés à f.*

— **Cas où la fonction présente une discontinuité de première espèce :**
La valeur de la fonction f aux points de discontinuité n'intervient pas dans la définition des intégrales permettant de calculer les coefficients a_n et b_n.

Exemple 1.3

Soit f la fonction périodique, de période 2π définie par $f(t) = \begin{cases} t & \text{si } t \in [0,1[\\ 3 & \text{si } t = 1 \\ t^2 - 2t & \text{si } t \in]1, 2\pi[\end{cases}$

— **Cas d'une fonction paire ou impaire**

__Rappel :__
- Si f est impaire $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(t)dt = 0 \quad \forall a \in \mathbb{R}$.
- Si f est paire $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(t)dt = 2\int_{0}^{a} f(t)dt \quad \forall a \in \mathbb{R}$.

Dans le cas où la fonction f est **paire ou impaire**, donc définie sur $\mathbb{R}$ tout entier, il est judicieux de choisir l'intervalle $[-\pi, +\pi]$ comme intervalle d'intégration pour calculer les coefficients de Fourier associés à f.

• Si f est une fonction **paire** :
La fonction $t \longmapsto f(t)\sin(nt)$ est alors une fonction impaire et son intégrale entre $-\pi$ et $+\pi$ est nulle, donc $b_n = 0 \ \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Ainsi, la série de Fourier associée à une fonction paire est une « **série de cosinus** » $\displaystyle\Big(a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nt)\Big)$.

• Si f est une fonction **impaire** :
La fonction $t \longmapsto f(t)\cos(nt)$ est alors une fonction impaire et son intégrale entre $-\pi$ et $+\pi$ est nulle, donc $a_n = 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$ (y compris le terme a_0).

Ainsi, la série de Fourier associée à une fonction impaire est une « **série de sinus** » $\displaystyle\Big(\sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin(nt)\Big)$.

Théorème 1.1 ***Théorème de Dirichlet***

Si *f est une fonction périodique, de période 2π, de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$,* ***alors*** *la série de Fourier associée à f est convergente pour toute valeur de t et on a, pour tout t dans $\mathbb{R}$:*

$$\frac{1}{2}\Big[f(t^+)+f(t^-)\Big] = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\Big(a_n\cos(nt)+b_n\sin(nt)\Big)$$

En particulier, en tout point t_0, où f est ***continue****, la somme de la série de Fourier associée à f est égale à $f(t_0)$:*

$$f(t_0) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\Big(a_n\cos(nt_0)+b_n\sin(nt_0)\Big)$$

Exemple 1.4

Soit f une fonction périodique, de période 2π définie par $f(t)=t$ si $t\in[0;2\pi[$.

1. *Tracer dans un repère orthogonal la courbe représentative de la restriction de la fonction f à l'intervalle $[-4\pi,+4\pi[$.*
2. *Montrer que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$ (vérifier les conditions d'application du théorème de Dirichlet).*
3. *Calculer les coefficients de Fourier associés à la fonction f.*
4. *En déduire le développement en série de Fourier de la fonction f (en tout point où elle est continue ou pas).*

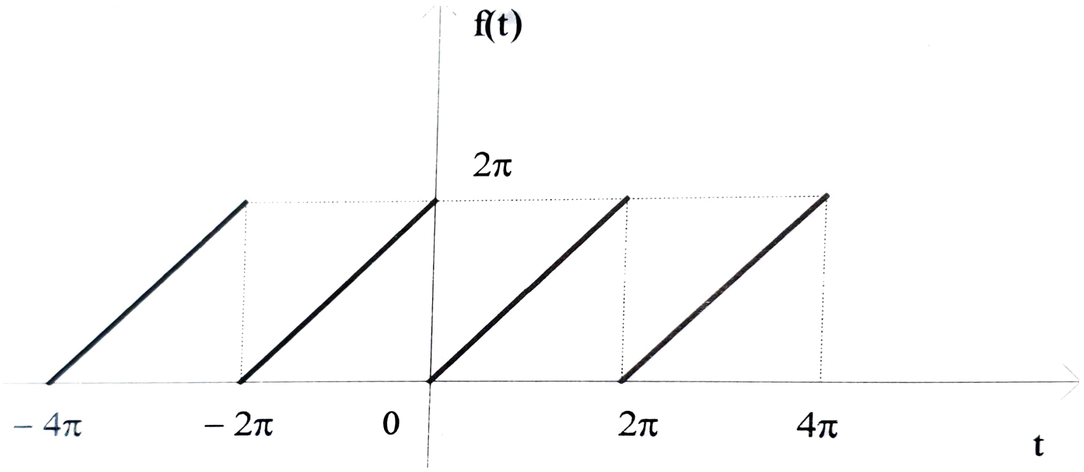


FIGURE 1.7 – Exemple 1.4

Vocabulaire spécifique à la physique :

Si une fonction f, périodique, de période 2π, est développable en série de Fourier, nous avons :
$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \Big(a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)\Big)$ (dans le cas où f est continue en t).

- $a_0 = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} f(t)dt$ représente la **valeur moyenne** de la fonction f sur un intervalle quelconque de longueur 2π.
- Les termes $\Big(a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)\Big)$ pour $n \geqslant 1$ sont appelés : **harmoniques de rang n**.
- **L'harmonique de rang 1**, $\Big(a_1 \cos(t) + b_1 \sin(t)\Big)$, est appelé le **fondamental**.

  Remarque 1.2
  Une transformation trigonométrique simple donne :

  $$a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt) = A_n \cos(nt - \phi_n)$$

  avec si $a_n \neq 0,\ A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ *et* $\tan(\phi_n) = \frac{a_n}{b_n}$ $(\phi_n \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[)$
  et si $a_n = 0,\ A_n = |b_n|$ *et* $\phi_n = 0$.
  Le nombre A_n *s'appelle* ***l'amplitude*** *et* ϕ_n ***la phase*** *de l'harmonique de rang* n.

- On appelle **spectre de fréquence** du signal la représentation graphique de la fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $n \longmapsto A_n$. Cette représentation graphique est un diagramme en bâtons. La figure 1.8 donne le spectre de fréquence du signal donné dans l'exemple 1.4 :
  Nous avons : $A_0 = \pi$ et $A_n = \sqrt{\dfrac{4}{n^2} + 0} = \dfrac{2}{n}$.

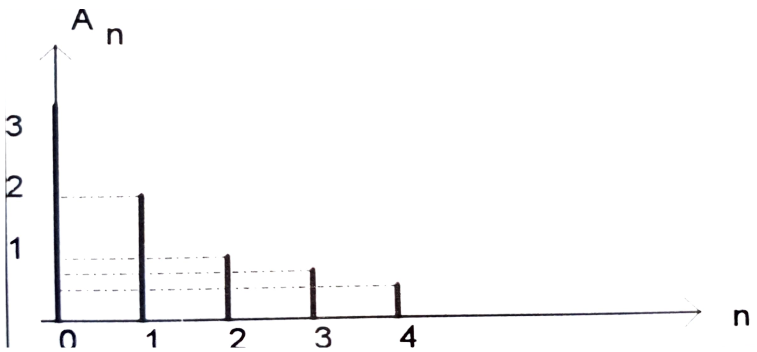


FIGURE 1.8 – Spectre de fréquence

1.3.3 Développement en série de Fourier d'une fonction périodique de période T

- La série de Fourier associée à la fonction f est :

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \Big(a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)\Big)$$

- Le théorème de Dirichlet sur la convergence de la série de Fourier associée à f reste valable en remplaçant « f fonction périodique de période 2π » par « f fonction périodique de période T ($\omega = \frac{2\pi}{T}$) ».

Définition 1.4

Étant donnée une fonction f périodique, de période T, on appelle ***série de Fourier*** *associée à f, la série de fonctions $\sum f_n$ dont le terme général est la fonction f_n définie par : $f_n(t) = a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)$ avec*

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T} f(t)dt \; ; \quad b_0 = 0 \; ; \quad a_n = \frac{2}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T} f(t)\cos(n\omega t)dt \; ; \quad b_n = \frac{2}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T} f(t)\sin(n\omega t)dt \quad (n \in \mathbb{N}^*)$$

et α un réel quelconque.
Les nombres a_n et b_n sont les ***coefficients de Fourier*** *associés à f.*

Théorème 1.2 ***Théorème de Dirichlet*** *(cas général)*

Si *f est une fonction périodique, de période T, de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$,* ***alors*** *la série de Fourier associée à f est convergente pour toute valeur de t et on a, pour tout t dans $\mathbb{R}$:*

$$\frac{1}{2}\Big[f(t^+) + f(t^-)\Big] = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\Big(a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)\Big)$$

En particulier, en tout point t_0, où f est ***continue****, la somme de la série de Fourier associée à f est égale à $f(t_0)$:*

$$f(t_0) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\Big(a_n \cos(n\omega t_0) + b_n \sin(n\omega t_0)\Big)$$

Remarque 1.3
L'intervalle d'intégration de longueur T sera choisi de manière à faciliter le calcul des coefficients de Fourier. Le plus souvent on choisira : $[0, T]$ ou $[-\frac{T}{2}, +\frac{T}{2}]$:

- *Si la fonction f est paire, on a pour tout n dans $\mathbb{N}$: $b_n = 0$.*
- *Si la fonction f est impaire, on a pour tout n dans $\mathbb{N}$: $a_n = 0$.*

Exemple 1.5
Soit la fonction f périodique, de période $T = 4$ définie par :

$$f(t) = \begin{cases} 0 & si\ t \in [-2, -1[\\ 1+t & si\ t \in [-1, 0[\\ 1-t & si\ t \in [0, 1[\\ 0 & si\ t \in]1, 2[\end{cases}$$

1. *Tracer dans un repère orthogonal la courbe représentative de la restriction de la fonction f à l'intervalle $[-5, +5[$. On constatera sur le graphique que la fonction f est une fonction paire.*
2. *Calculer les coefficients de Fourier associés à la fonction f.*
3. *Montrer que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$ (vérifier les conditions d'application du théorème de Dirichlet).*
4. *En déduire le développement en série de Fourier de la fonction f sur l'intervalle $[-2, +2[$.*

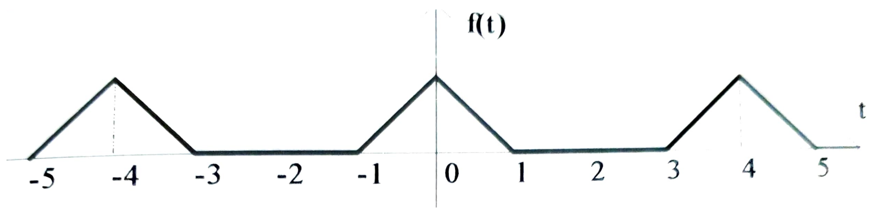


FIGURE 1.9 – Exemple 1.5

1.4 Forme complexe de la série de Fourier

Rappel : Formules d'Euler : $\boxed{\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \; ; \; \sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.}$

Soit f une fonction réelle périodique, de période T, de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur tout intervalle $[\alpha, \alpha+T[$ ($\alpha \in \mathbb{R}$) de longueur T. Le terme général de la série de Fourier associée à f est $u_n = a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)$. En utilisant les formules d'Euler, nous obtenons :

$$u_n = a_n \frac{e^{in\omega t} + e^{-in\omega t}}{2} + b_n \frac{e^{in\omega t} - e^{-in\omega t}}{2i}$$

Transformons l'écriture de u_n. Nous obtenons :

$$u_n = \frac{a_n - ib_n}{2} e^{in\omega t} + \frac{a_n + ib_n}{2} e^{-in\omega t}$$

Posons : $c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}$, alors le conjugué de c_n est : $\bar{c}_n = \frac{a_n + ib_n}{2}$ (car a_n et b_n sont des nombres réels) et l'expression de u_n devient :

$$u_n = c_n e^{in\omega t} + \bar{c}_n e^{-in\omega t} \tag{1.2}$$

En utilisant les expressions intégrales de a_n et de b_n, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
c_n &= \frac{1}{2}\Big[\frac{2}{T}\int_\alpha^{\alpha+T} f(t)\cos(n\omega t)dt - i\frac{2}{T}\int_\alpha^{\alpha+T} f(t)\sin(n\omega t)dt\Big] \\
c_n &= \frac{1}{T}\int_\alpha^{\alpha+T} f(t)\Big(\cos(n\omega t) - i\sin(n\omega t)dt\Big)dt \\
c_n &= \frac{1}{T}\int_\alpha^{\alpha+T} f(t)e^{-in\omega t}dt
\end{aligned}$$

or d'après la formule : $\overline{\int_a^b g(t)dt} = \int_a^b \overline{g(t)}dt$,

nous avons donc $\bar{c}_n = \frac{1}{T}\int_\alpha^{\alpha+T} f(t)e^{in\omega t}dt$ car $f(t)$ est une fonction réelle.

On a donc $\bar{c}_n = c_{-n}$.

Ainsi $u_n = c_n e^{in\omega t} + c_{-n}e^{-in\omega t}$

Si l'on remarque que $c_0 = \frac{1}{T}\int_\alpha^{\alpha+T} f(t)dt = a_0$, le développement de la fonction f en série de Fourier est :

$$a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty}\Big[c_n e^{in\omega t} + c_{-n}e^{-in\omega t}\Big] = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\omega t}$$

En conclusion, nous retiendrons donc les résultats suivants :

La forme complexe du développement en série de Fourier d'une fonction f réelle, périodique de période T, de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$ est en tout point $t \in \mathbb{R}$:

$$\frac{1}{2}\Big(f(t^+) + f(t^-)\Big) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\omega t} \quad \text{avec : } c_n = \frac{1}{T}\int_\alpha^{\alpha+T} f(t)e^{-in\omega t}dt \quad (n \in \mathbb{Z})$$

Les coefficients de Fourier complexes c_n sont liés aux coefficients de Fourier réels a_n et b_n par les relations suivantes :

$$c_0 = a_0 \; ; \; c_n = \frac{a_n - ib_n}{2} \quad (n \in \mathbb{N}^*) \text{ et } c_{-n} = \bar{c}_n$$

Remarque 1.4

Si f est une fonction à valeurs complexes, la formule du développement est toujours valable avec c_n défini par la ***seule*** *formule :* $c_n = \frac{1}{T}\int_\alpha^{\alpha+T} f(t)e^{-in\omega t}dt \quad (n \in \mathbb{Z})$.

Exemple 1.6

Soit f une fonction périodique, de période $T = 1$, définie par $f(t) = e^{-t}$ si $t \in [0; 1[$.

1. *Tracer dans un repère orthogonal la courbe représentative de la restriction de la fonction f à l'intervalle $[-3, +3[$.*
2. *Montrer que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$ (vérifier les conditions d'application du théorème de Dirichlet).*
3. *Calculer les coefficients de Fourier complexes associés à la fonction f.*
4. *En déduire le développement en série de Fourier de la fonction f sur l'intervalle $]0, 1[$.*

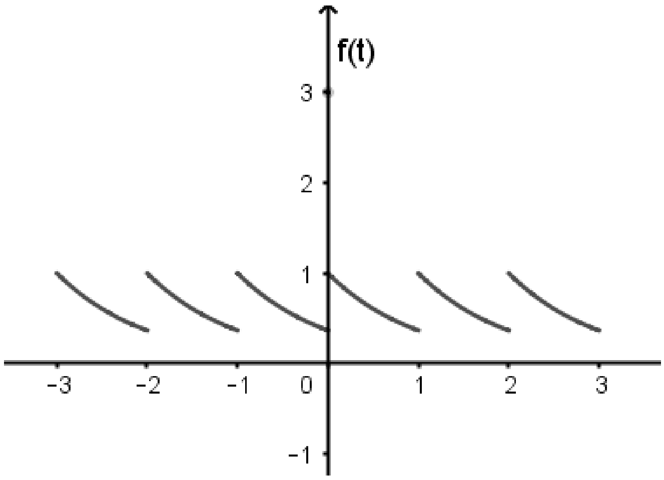


FIGURE 1.10 – Exemple 1.6

1.5 Formule de Parseval

Soit f une fonction, périodique, de période T, vérifiant les conditions d'application du théorème de Dirichlet. On démontre, et nous l'admettrons, la formule suivante, dite **formule de Parseval** :

$$\boxed{\frac{1}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T}\Big[f(t)\Big]^2 dt = a_0^2 + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n^2+b_n^2}{2}} \quad (\alpha \in \mathbb{R})$$

Cette formule est valable dans le cas d'une fonction à valeurs réelles.

- Si la série de Fourier est donnée sous la forme $a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \cos(n\omega t + \phi)$ avec $A_n = \sqrt{a_n^2+b_n^2}$, la formule de Parseval s'écrit
$$\frac{1}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T}\Big[f(t)\Big]^2 dt = a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} A_n^2 \quad (\alpha \in \mathbb{R})$$
- Si la série de Fourier est donnée sous forme complexe par $\sum_{-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\omega t}$, la formule de Parseval s'écrit
  1. si la fonction f est à valeurs réelles
$$\boxed{\frac{1}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T}\Big(f(t)\Big)^2 dt = \sum_{-\infty}^{+\infty}|c_n|^2 = \sum_{-\infty}^{-1}|c_n|^2 + |c_0|^2 + \sum_{+1}^{+\infty}|c_n|^2} \quad (\alpha \in \mathbb{R})$$
  2. si la fonction f est à valeurs complexes
$$\boxed{\frac{1}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T}\Big|f(t)\Big|^2 dt = \sum_{-\infty}^{+\infty}|c_n|^2 = \sum_{-\infty}^{-1}|c_n|^2 + |c_0|^2 + \sum_{+1}^{+\infty}|c_n|^2} \quad (\alpha \in \mathbb{R})$$

Interprétation physique de la formule de Parseval
Si la fonction f est la modélisation d'un signal électrique, périodique, de période T, on sait qu'en choisissant des unités convenables la puissance P du signal est : $P = \frac{1}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T}\Big|f(t)\Big|^2 dt$.
La formule de Parseval indique donc que la puissance du signal peut se calculer à l'aide des coefficients du développement en série de Fourier de ce signal.
Plus précisément, cherchons la puissance du signal $t \mapsto a_0$ et celle du signal $t \mapsto a_n\cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)$ ($n^{\text{ième}}$ harmonique). Nous obtenons très facilement : $P_0 = a_0^2$; $P_n = \frac{1}{2}(a_n^2 + b_n^2)$.
La puissance totale P du signal est donc :

$$\boxed{P = P_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} P_n = a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n^2+b_n^2) = a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} A_n^2}$$

Nous obtenons le résultat suivant : **la puissance d'un signal modélisé par une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$ est égale à la somme de la puissance du signal $t \mapsto a_0$ et de celle de tous les harmoniques (c'est le principe de la conservation de la puissance).**

Exemple 1.7
Utiliser la formule de Parseval pour l'exemple 1.4.

1.6 Feuille d'exercices : Série de Fourier

Exercice 1.1 Quelques décompositions en série de Fourier d'un signal de l'électronique. Spectre de fréquence.
Soient les fonctions suivantes modélisant quelques signaux, 2π-périodique, définies sur $\mathbb{R}$ par :

- *la fonction créneau :* $f_1(t) = \begin{cases} 1 & si\ t \in [0, \pi[\\ -1 & si\ t \in [-\pi, 0[\end{cases}$
- $f_2(t) = t$ *si* $-\pi \leqslant t < \pi$.
- $f_3(t) = t^2$ *si* $t \in [-\pi, \pi[$.

Pour chacune de ces trois fonctions $f = f_i;\ i = 1, 2, 3$

1. *Tracer dans un repère orthogonal la courbe représentative de la restriction de la fonction f à l'intervalle $[-3\pi, +3\pi[$.*
2. *Montrer que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$ (vérifier les conditions d'application du théorème de Dirichlet).*
3. *Calculer les coefficients de Fourier associés à la fonction f.*
4. *En déduire le développement en série de Fourier de la fonction f en tout point où elle est continue.*
5. *Examiner le cas $t = t_k = k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$, les points où la fonction est discontinue.*
6. *Tracer le spectre de fréquence associé à f_1 et à f_2.*
7. *Utiliser la formule de Parseval (pour f_1 et f_2 : en déduire $\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^2}$).*

Exercice 1.2 Coefficients de Fourier complexes
Un signal est modélisé par la fonction f, 2π-périodique, définie par :

$$f(t) = \begin{cases} \sin(t) & si\ t \in [0, \pi[\\ 0 & si\ t \in [\pi, 2\pi[\end{cases}$$

1. *Tracer dans un repère orthogonal $\mathcal{C}_f$, la courbe représentative de la restriction de la fonction f à l'intervalle $[-3\pi, +3\pi[$.*
2. *Montrer que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$ (vérifier les conditions d'application du théorème de Dirichlet).*
3. *Calculer les coefficients de Fourier complexes associés à la fonction f et en déduire les coefficients de Fourier réels.*
4. *Montrer qu'en tout point de $\mathbb{R}$, la somme de la série de Fourier associée à f est égale à $f(t)$. Écrire alors le développement en série de Fourier complexe, puis celui en série de Fourier réelle de la fonction f.*
5. *En choisissant une valeur particulière de t, montrer que :*

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} + \sum_{p \geqslant 1} \frac{(-1)^p}{1 - 4p^2}$$

6. *En utilisant la formule de Parseval, montrer que*

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\pi^2}{8} - 1\right) = +\sum_{p \geqslant 1} \frac{1}{(1 - 4p^2)^2}$$

Exercice 1.3
Un signal est modélisé par la fonction f, périodique, de période $T = \pi$, définie par :

$$f(t) = \begin{cases} t & si\ t \in [0, \frac{\pi}{2}] \\ \frac{\pi}{2} & si\ t \in]\frac{\pi}{2}, \pi[\end{cases}$$

1. *Tracer dans un repère orthogonal* $\mathcal{C}_f$*, la courbe représentative de la restriction de la fonction* f *à l'intervalle* $[-2\pi, +2\pi[$.
2. *Montrer que la fonction* f *est de classe* $\mathcal{C}^1$ *par morceaux sur* $\mathbb{R}$ *(vérifier les conditions d'application du théorème de Dirichlet).*
3. *Calculer les coefficients de Fourier associés à la fonction* f.
4. *En déduire le développement en série de Fourier de la fonction* f.
5. *Examiner les cas* $t = k\pi$ *et* $t = \frac{\pi}{2} + k\pi$.
6. *Utiliser la formule de Parseval.*

Exercice 1.4

Soit f *la fonction définie sur* $\mathbb{R}$*, de période* $T = 4$*, telle que :*

$$f(t) = \begin{cases} t & \text{si } t \in [0, 1[\\ 1 & \text{si } t \in [1, 3[\\ 4 - t & \text{si } t \in [3, 4[\end{cases}$$

1. *Tracer dans un repère orthogonal* $\mathcal{C}_f$*, la courbe représentative de la restriction de la fonction* f *à l'intervalle* $[-6, +6]$ *et montrer qu'elle est paire.*
2. *Montrer que la fonction* f *est de classe* $\mathcal{C}^1$ *par morceaux sur* $\mathbb{R}$ *(vérifier les conditions d'application du théorème de Dirichlet).*
3. *Calculer les coefficients de Fourier associés à la fonction* f *(montrer que* $a_0 = \frac{3}{4}$ *et* $a_n = \frac{4}{n^2\pi^2}\left(\cos(n\frac{\pi}{2}) - 1\right)$ *pour* $n > 0$*).*
4. *En déduire le développement en série de Fourier de la fonction* f.
5. *En choisissant une valeur particulière de* t*, calculer :*

$$\sum_{p \geqslant 1} \frac{1}{(1 + 2p)^2}$$

6. *Utiliser la formule de Parseval.*

Chapitre 2

Transformée de Fourier

2.1 Intégrale généralisée sur $[a, +\infty[$ ou sur $]-\infty, a]$

2.1.1 Définition

Soit f une fonction à valeurs réelles ou complexes, continue ou continue par morceaux sur $[a, +\infty[$.
L'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ est bien définie quel que soit $b > a$.
On dit que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)dt$ est convergente si la limite : $\displaystyle\lim_{b\to+\infty}\left(\int_a^b f(t)dt\right)$ existe (dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) et on note dans ce cas :

$$\boxed{\int_a^{+\infty} f(t)dt = \lim_{b\to+\infty}\left(\int_a^b f(t)dt\right)}$$

2.1.2 Critère de convergence

Dans ce qui suit, les fonctions considérées sont continues ou continues par morceaux sur $[a, +\infty[$.

a. Comparaison par majoration
Soient f et g deux fonctions toutes deux **positives** sur $[a, +\infty[$ et telles que quel que soit $t \geqslant a$ (ou pour t assez grand), on ait : $f(t) \leqslant g(t)$, alors

Si $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(t)dt$ converge, **alors** $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)dt$ converge.
Si $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)dt$ diverge, **alors** $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(t)dt$ diverge.

b. Comparaison par équivalence
Soient f et g deux fonctions toutes deux **positives** sur $[a, +\infty[$.

Rappel :
On dit que $f \underbrace{\simeq}_{+\infty} g$ (on lit f équivalente à g) au voisinage de $+\infty$, signifie que l'on ait :
$f(t) = g(t) + \varepsilon(x)$ avec $\displaystyle\lim_{t\to+\infty}\varepsilon(t) = 0$.
On a alors la propriété suivante :

Si $f \underbrace{\simeq}_{+\infty} g$ **alors** $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)dt$ et $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(t)dt$ sont de même nature.

2.1.3 Critère de convergence pour des fonctions quelconques

a. Absolue convergence

Définition 2.1
On dit que l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ *est absolument convergente, si l'intégrale* $\int_a^{+\infty} |f(t)|dt$ *est convergente.*
On a alors le résultat suivant :

$$\boxed{\textit{Si} \int_a^{+\infty} |f(t)|dt \textit{ converge } \textbf{alors} \int_a^{+\infty} f(t)dt \textit{ converge.}}$$

Dans ce cas on dit que la fonction est ***sommable*** *au voisinage de* $+\infty$.

Notons que la **réciproque de cette propriété est fausse**.

b. Autre méthode Pour des fonctions réelles qui changent de signe une infinité de fois sur $[a, +\infty[$, des critères de convergence existent mais, dans beaucoup de cas, une intégration par parties, suivie d'un passage à la limite, permet d'étudier la convergence.

Remarque 2.1 ***Intégrale généralisée sur*** $]-\infty, a]$
La définition des critères de convergence précédents sont facilement adaptables. En effet par le changement de variable $t = -u$, *on ramène le cas des intégrales généralisées sur* $]-\infty, a]$ *aux intégrales généralisées sur* $[-a, +\infty[$ *étudiées précédemment.*

Si l'intégrale sur tout $\mathbb{R}$ de f est **absolument convergente**, la fonction f appartient à un espace de fonctions numériques, noté $\mathbb{L}^1$.

$$\boxed{\mathbb{L}^1 = \left\{ f \text{ fonction numérique quelconque } \Big/ \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|dt \text{ converge} \right\}}$$

Exemples fondamentaux

$$\boxed{\begin{array}{l} \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-pt}dt \text{ converge } \textbf{si et seulement si } \ p > 0 \\ \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha} \text{ converge } \textbf{si et seulement si } \ \alpha > 1 \end{array}}$$

2.1.4 Intégrale généralisée sur $]a, b]$ ou sur $[a, b[$

Si la fonction f n'a pas de limite finie, soit en a, soit en b, l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ ne peut exister au sens habituel, d'où encore une nécessité d'extension.

Définition 2.2 ***Singularité en b***
Soit f *une fonction continue par morceaux sur tout intervalle* $[a, c]$ *inclus dans* $[a, b[$*.la fonction n'ayant pas de limite finie au point* b.
On dit que l'intégrale généralisée $\int_a^b |f(t)|dt$ *est* ***convergente*** *si lorsque* c *tend vers* b *l'intégrale* $\int_a^c |f(t)|dt$ *admet une limite dans* $\mathbb{R}$ *ou dans* $\mathbb{C}$.
On pose alors :

$$\boxed{\int_a^b f(t)dt = \lim_{c \to b} \left(\int_a^c f(t)dt \right)}$$

Idem si la singularité est en a :

$$\boxed{\int_a^b f(t)dt = \lim_{c\to a}\Big(\int_c^b f(t)dt\Big)}$$

Critères de convergence :
Ils sont du même type que pour les intégrales généralisées sur $[a,+\infty[$, les majorations, les équivalences ayant lieu, cette foius, au voisinage de la singularité (a ou b).
Exemples fondamentaux

$$\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha} \text{ converge } \textbf{si et seulement si } \alpha < 1$$

$$\int_0^1 \frac{dt}{(b-t)^\alpha} \text{ converge } \textbf{si et seulement si } \alpha < 1$$

$$\int_0^1 \ln(t)dt \text{ converge.}$$

2.2 Transformation de Fourier

2.2.1 Définitions

Dans ce qui suit, f est une fonction à valeurs réelles ou complexes. On la supposera **sommable**, c'est-à-dire appartenant à l'ensemble $\mathbb{L}^1$.
Pour tout réel λ, on a l'égalité des modules $|f(t)e^{-2i\pi\lambda t}| = |f(t)|$ (car $|e^{i\theta}| = 1, \forall\theta\in\mathbb{R}$).
Les deux fonctions donnent donc des intégrales simultanément convergents. Donc, si f est un élément de l'espace $\mathbb{L}^1$, on peut définir, pour toute valeur de λ, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-2i\pi\lambda t}dt$, puisqu'elle est absolument convergente.

Définition 2.3

*Pour toute fonction f de l'espace $\mathbb{L}^1$, on appelle **transformée de Fourier** de f la fonction $\lambda \mapsto \widehat{f}(\lambda)$ définie sur $\mathbb{R}$ par :*

$$\boxed{\widehat{f}(\lambda) \;=\; \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-2i\pi\lambda t}dt}$$

λ s'appelle la fréquence.

Cette transformée sera notée $\mathcal{F}(f)$ et on utilisera quelquefois la notation abusive

$$\boxed{\mathcal{F}\Big(f(t)\Big)(\lambda) = \mathcal{F}(f)(\lambda) = \widehat{f}(\lambda)}$$

Conséquences :
• La fonction $\widehat{f}$ est définie sur tout l'axe des réels.
• $\widehat{f}$ est bornée par l'intégrale du module de f : $\boxed{\widehat{f}(\lambda) \leqslant \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|dt}$.

2.2.2 Terminologie en physique

Du point de vue de la physique, on dit que f dépend du temps alors que $\widehat{f}$ dépend de la fréquence.
On dit aussi parfois que f est définie dans le domaine temporel et que $\widehat{f}$ l'est dans le domaine fréquentiel.
Puisque $t \to e^{-2i\pi\lambda t}$ est une fonction à valeurs complexes, $\widehat{f}$ est en général aussi à valeurs complexes, donc $\widehat{f} : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}$. f se scinde donc en une partie réelle et une partie imaginaire.
On étudie aussi parfois le spectre d'amplitude $|\widehat{f}(\lambda)|$ de f et son spectre de phase $\arg\Big(\widehat{f}(\lambda)\Big)$.
Enfin en analyse du signal la quantité $|\widehat{f}(\lambda)|^2$ s'appelle la densité spectrale d'énergie.

Remarque 2.2
Certains auteurs notent la transformée de Fourier

$$\widetilde{f}(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\lambda t}dt$$

c'est-à-dire $\widetilde{f}(2\pi\lambda) = \widehat{f}(\lambda)$. *On pose* $\omega = 2\pi\lambda$ *et donc* $\widetilde{f}(\omega) = \widehat{f}\Big(\frac{\omega}{2\pi}\Big)$.

2.2.3 Premiers exemples de calcul

Exemple 2.1 ***fonction porte***
Soit la fonction porte notée $\prod$ *définie par :*

$$\prod(t) = \begin{cases} 1 & si\ t \in [-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}] \\ 0 & sinon \end{cases}$$

1. *Tracer dans un repère orthogonal la courbe représentative de la fonction* $\prod(t)$.
2. *Montrer que la fonction* $\prod$ *est de classe* $\mathcal{C}^1$ *par morceaux sur* $\mathbb{R}$ *et que son intégrale est absolument convergente.*
3. *Calculer la transformée de Fourier de la fonction* $\prod$ *notée* $\widehat{f} = \mathcal{F}(\prod)$.

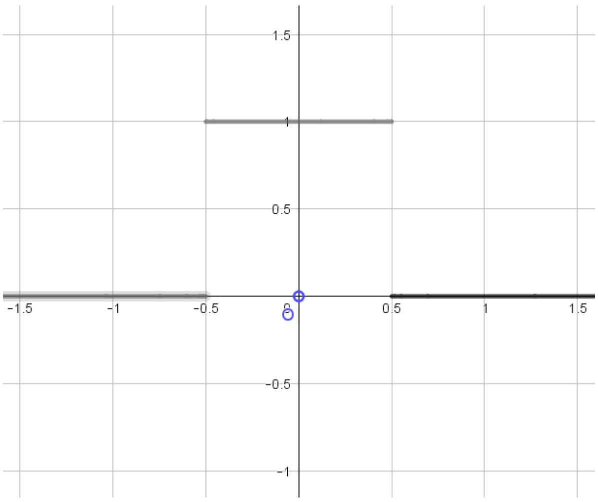


FIGURE 2.1 – Fonction porte

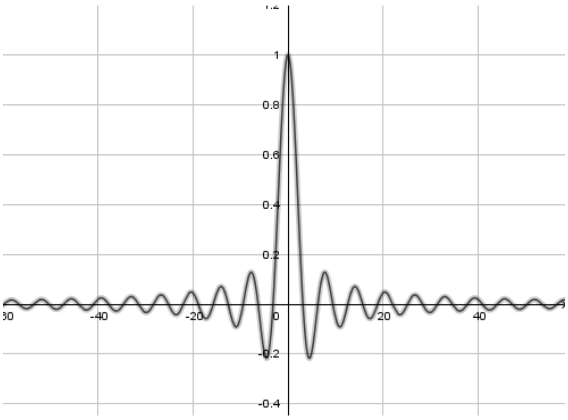
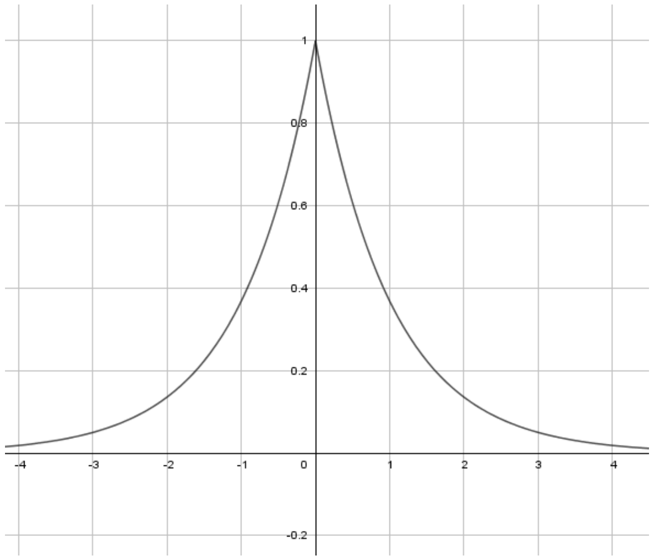
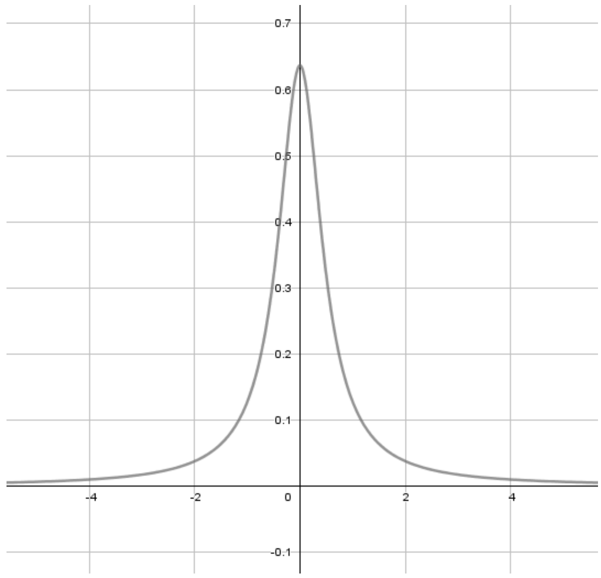


Figure 2.2 – TF fonction porte

Exemple 2.2
Soit g la fonction définie par $g(t) = e^{-\pi|t|}$.

1. *Montrer que la fonction g est de classe $\mathcal{C}^1$ et qu'elle appartient à l'espace $\mathbb{L}^1$.*
2. *Calculer la transformée de Fourier de la fonction g notée $\widehat{g} = \mathcal{F}(g)$.*





Exemple 2.3 ***Contre Exemple***
Soit la fonction $\mathcal{U}$ *échelon unité de Heaviside valant* 1 *sur* $[0,+\infty[$ *et* 0 *partout ailleurs :*

$$\mathcal{U}(t)=\begin{cases} 1 & si\ t\in[0,+\infty[\\ 0 & si\ t\in]-\infty,0[\end{cases}$$

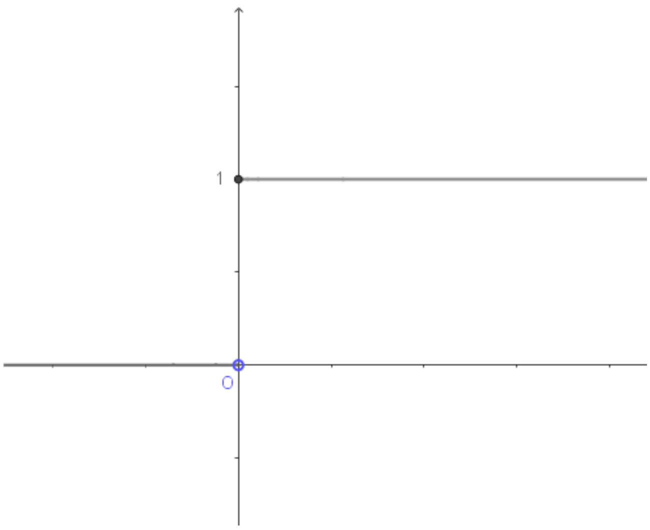


FIGURE 2.3 – Fonction de Heaviside

2.2.4 Propriétés de $\mathcal{F}$ et des transformées de Fourier

Par définition, la fonction $\widehat{f}$ est partout définie sur $\mathbb{R}$. On admettra les propriétés suivantes :
• $\widehat{f}$ est continue sur $\mathbb{R}$.
• $\widehat{f}$ tend vers 0 lorsque λ tend vers $\pm\infty$.

Propriété 2.1 ***fonction conjuguée***
Soit f une fonction admettant une transformée de Fourier. Alors $\overline{f} : t \mapsto \overline{f(t)}$ admet également une transformée de Fourier et on a

$$\boxed{\widehat{\overline{f}}(\lambda) = \overline{\widehat{f}(-\lambda)}}$$

Il suffit d'utiliser la propriété des intégrales : conjugué d'une intégrale est l'intégrale du conjugué. En effet :

$$\widehat{\overline{f}}(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{f(t)}e^{-2i\pi\lambda t}dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{f(t)e^{+2i\pi\lambda t}}dt = \overline{\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{+2i\pi\lambda t}dt} = \overline{\widehat{f}(-\lambda)}.$$

Propriété 2.2 ***Multiplication par une exponentielle***
Soit f une fonction admettant une transformée de Fourier notée $\widehat{f}$. Alors la fonction $g : t \mapsto f(t)e^{2i\pi at}$, où a est un réel donné, admet une transformée de Fourier et on a :

$$\boxed{\widehat{g}(\lambda) = \widehat{f}(\lambda - a) \text{ ou encore } \mathcal{F}\Big(f(t)e^{2i\pi at}\Big)(\lambda) = \mathcal{F}\big(f\big)(\lambda - a)}$$

En effet $\widehat{g}(\lambda) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{2i\pi at}\, e^{-2i\pi\lambda t}dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-2i\pi(\lambda-a)t}dt = \widehat{f}(\lambda - a).$
Conséquence : La multiplication d'un signal par une fonction exponentielle complexe de fréquence a ne modifie pas l'allure des spectres d'amplitude et de phase du signal ; ceux-ci sont simplement translatés de a sur l'axe des fréquences.

Exemple 2.4
Soit la fonction $f(t) = \prod(t)e^{2i\pi at}$ où $\prod(t)$ est la fonction porte et a est un réel donné.
On sait que $\widehat{\prod}(\lambda) = \dfrac{\sin(\pi\lambda)}{\pi\lambda}$ *donc* $\widehat{f}(\lambda) = \widehat{\prod}(\lambda - a) = \dfrac{\sin\Big(\pi(\lambda - a)\Big)}{\pi\big(\lambda - a\big)}$ *pour tout $\lambda \neq a$.*

Propriété 2.3 ***Transformée d'une translatée***
Soit f une fonction admettant une transformée de Fourier et soit la fonction translatée de f, notée f_a définie par $f_a(t) = f(t-a)$.
en faisant un changement de variable $t - a = x$ dans l'intégrale exprimant la transformée de la translatée f_a, nous avons le résultat suivant :

$$\widehat{f_a}(\lambda) \;=\; \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-a)e^{-2i\pi\lambda t}dt \;=\; \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-2i\pi\lambda(x+a)}dx \;=\; e^{-2i\pi a\lambda}\widehat{f}(\lambda)$$

$$\boxed{\mathcal{F}\big(f_a\big)(\lambda) = e^{-2i\pi a\lambda}\widehat{f}(\lambda)}$$

Remarque 2.3
• *D'après les deux dernières propriétés nous avons un* ***échange de la translation avec la multiplication par une exponentielle*** (attention cependant aux signes dans les exposants).
• *Le facteur $e^{-2i\pi a\lambda}$ est appelé facteur de phase.*

Exemple 2.5
Calculer la transformée de la fonction translatée de la fonction porte $\prod(t)$ avec $a = \frac{1}{2}$ (voir exemple 2.1) :

$$f(t) = \begin{cases} 1 & si\ t \in [0,1] \\ 0 & sinon \end{cases}$$

Théorème 2.1 ***Théorème de modulation***
Soit f une fonction admettant une transformée de Fourier, et posons $h(t) = f(t)\cos(2\pi a t)$, $a \in \mathbb{R}$. Alors

$$\boxed{\widehat{h}(\lambda) = \frac{\widehat{f}(\lambda - a) + \widehat{f}(\lambda + a)}{2}}$$

Puisque $\cos(2\pi a t) = \frac{1}{2}\left(e^{2i\pi a t} + e^{-2i\pi a t}\right)$, il vient (en utilisant la propriété de décalage dans le domaine fréquentiel, et en gardant les mêmes notations)

$$\widehat{h}(\lambda) = \frac{1}{2}\Big(\widehat{f_a}(\lambda) + \widehat{f_{-a}}(\lambda)\Big) = \frac{1}{2}\Big(\widehat{f}(\lambda - a) + \widehat{f}(\lambda + a)\Big).$$

Exemple 2.6
Soit la fonction $g(t) = \prod(t)\cos(2\pi t)$. Calculer la transformée de Fourier de g en utilisant :

1. *le théorème de modulation,*
2. *la définition (calcul direct).*

Propriété 2.4 ***Transformée d'une dilatée***
Soit f une fonction admettant une transformée de Fourier et soit la fonction dite dilatée de f d'indice k (réel non nul), notée g définie par $g(t) = f(kt)$.
en faisant un changement de variable $kt = x$ dans l'intégrale exprimant la transformée de la translatée g, nous avons le résultat suivant :

$$\widehat{g}(\lambda) \;=\; \int_{-\infty}^{+\infty} f(kt)e^{-2i\pi\lambda t}dt \;=\; \left|\frac{1}{k}\right|\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{\left(-2i\pi\frac{\lambda}{k}\right)}dx \;=\; \left|\frac{1}{k}\right|\widehat{f}(\frac{\lambda}{k})$$

$$\boxed{\mathcal{F}\big(f(kt)\big)(\lambda) = \left|\frac{1}{k}\right|\widehat{f}(\frac{\lambda}{k})}$$

Exemple 2.7
En utilisant la formule de la transformée de Fourier de la fonction porte, calculer les transformées de Fourier des fonctions suivantes :
- ***Compression*** *:* $f(t) = \prod(2t)$
- ***Dilatation*** *:* $f(t) = \prod\left(\frac{t}{2}\right)$.

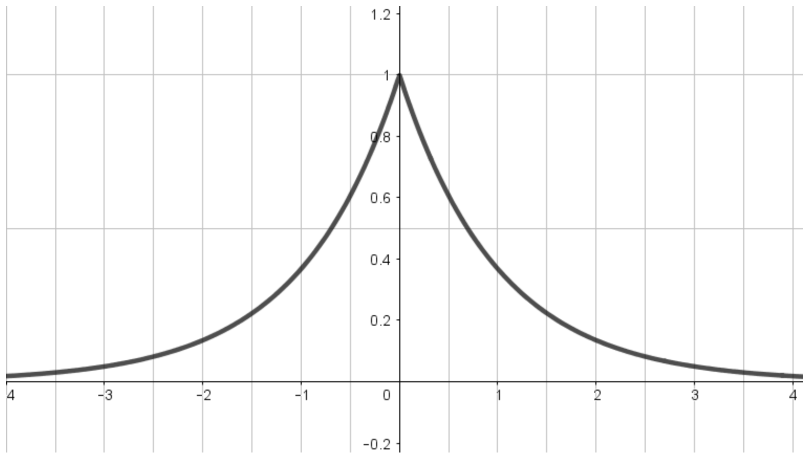
Propriété 2.5 ***Fonctions paires et impaires***

- *Si f est paire alors $\widehat{f}$ est paire et si f est impaire alors $\widehat{f}$ est impaire.*
- *Soit f une fonction paire admettant une transformée de Fourier. Alors* $\widehat{f}(\lambda) = 2\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\cos(2\pi\lambda t)dt.$
- *Soit f une fonction impaire admettant une transformée de Fourier. Alors* $\widehat{f}(\lambda) = -2i\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\sin(2\pi\lambda t)dt.$

Exemple 2.8

Soit la fonction f définie par $f(t) = e^{-|t|}$.

1. *Tracer dans un repère orthogonal la courbe représentative de la fonction $f(t)$.*
2. *Montrer que la fonction $f(t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et qu'elle appartient à $\mathbb{L}^1$.*
3. *Calculer la transformée de Fourier de la fonction f.*



Propriété 2.6 ***Dérivation dans le domaine temporel***
Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sauf peut-être en certains points et admettant une transformée de Fourier. Supposons de plus que $\lim\limits_{t\to\pm\infty} f(t)=0$. Alors la dérivée f' de f admet une transformée de Fourier et

$$\boxed{\widehat{f'}(\lambda)=2i\pi\lambda\widehat{f}(\lambda) \text{ ou encore } \mathcal{F}\big(f'\big)(\lambda)=2i\pi\lambda\mathcal{F}\big(f\big)(\lambda)}$$

Il suffit d'utiliser une intégration par parties et d'utiliser les hypothèses envisagées (bon exercice sur le calcul des intégrales généralisées et les IPP).

Exemple 2.9 ***Fonction triangle***
(voir Exercice 2.3 en utilisant la méthode directe).
Soit le signal définie par la fonction triangle :

$$\Lambda(t)=\begin{cases} t+1 & si\ t\in[-1,0] \\ -t+1 & si\ t\in[0,1] \\ 0 & sinon \end{cases}$$

1. *Tracer dans un repère orthogonal la courbe représentative de la fonction $f(t)$.*
2. *Montrer que la fonction $f(t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et qu'elle appartient à $\mathbb{L}^1$.*
3. *Calculer la transformée de Fourier de la fonction Λ en remarquant que $\Lambda'(t)=\prod\left(t+\frac{1}{2}\right)-\prod\left(t-\frac{1}{2}\right)$.*

Corollaire 2.1 ***Généralisation : transformée de fourier de la dérivée n^{ieme}***
Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ sauf peut-être en certains points et admettant une transformée de Fourier. Supposons que $\lim\limits_{t\to\pm\infty} f^{(k)}(t) = 0$ pour $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Alors

$$\boxed{\widehat{f^{(n)}}(\lambda) = \big(2i\pi\lambda\big)^n \widehat{f}(\lambda)}$$

Propriété 2.7 ***Intégration***
Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux et appartenant à l'espace $\mathbb{L}^1$.
On note $F(t) = \displaystyle\int_{-\infty}^{t} f(x)dx$ (primitive de f « s'annulant » en $-\infty$).
On suppose que $\lim\limits_{t\to+\infty} F(t) = 0$.
Alors, pour $\lambda \neq 0$:

$$\boxed{\widehat{F}(\lambda) = \frac{\widehat{f}(\lambda)}{2i\pi\lambda}}$$

Propriété 2.8 ***Dérivation dans le domaine fréquentiel***
Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sauf peut-être en certains points et admettant une transformée de Fourier (appartenant à l'espace $\mathbb{L}^1$) et soit la fonction $g : t \mapsto tf(t)$. On suppose que $g \in \mathbb{L}^1$.
Alors la transformée de Fourier $\widehat{f}$ de f est dérivable et

$$\boxed{\widehat{f}'(\lambda) = -2i\pi\widehat{g}(\lambda) \text{ ou encore } \frac{d}{d\lambda}\Big(\mathcal{F}(f)\Big)(\lambda) = \mathcal{F}\big(-2i\pi t f(t)\big)(\lambda)}$$

Corollaire 2.2 ***Généralisation : dérivée $n^{ième}$ de la transformée de fourier***
Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sauf peut-être en certains points et admettant une transformée de Fourier. et soit les fonctions $g_k : t \mapsto t^k f(t)$ pour $k = 1, 2, \ldots, n$. On suppose que $g_k \in \mathbb{L}^1$ pour tout $k \leqslant n$.
Alors la transformée de Fourier $\widehat{f}$ de f est n fois dérivable et

$$\boxed{\widehat{f}^{(n)}(\lambda) = (-2i\pi)^n \widehat{g_n}(\lambda)}$$

Définition 2.4 ***Produit de convolution***
Soient f et g deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux et appartenant à l'espace $\mathbb{L}^1$.
On appelle produit de convolution de f et g la fonction notée $f * g$ définie pour tout $t \in \mathbb{R}$ par :

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-x)g(x)dx$$

Propriété 2.9
Soient f et g deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux et appartenant à l'espace $\mathbb{L}^1$.
Alors le produit de convolution $f * g$ de f et g est aussi de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux et appartient à l'espace $\mathbb{L}^1$ et on a

$$\boxed{\widehat{f * g}(\lambda) = \widehat{f}(\lambda) \times \widehat{g}(\lambda)}$$

Exemple 2.10
Soient f la fonction définie par $f(t) = e^{-t}\mathcal{U}(t)$ où $\mathcal{U}(t)$ est la fonction de Heaviside et soit g la fonction définie par $g(t) = te^{-t}\mathcal{U}(t)$.

1. *Montrer que $\widehat{f}(\lambda) = \dfrac{1}{1 + i2\pi\lambda}$.*
2. *Montrer que $g = f * f$.*
3. *En déduire la transformée de Fourier de la fonction g en utilisant la propriété du produit de convolution.*
4. *(en exercice) Retrouver ce résultat en calculant directement transformée de Fourier de la fonction g.*

2.2.5 Formule de Plancherel-Parseval

Soient f et g 2 fonctions $\mathcal{C}^1$ par morceaux et appartenant à l'espace $\mathbb{L}^1$.
Alors

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\overline{g(t)}dt \;=\; \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(\lambda)\overline{\widehat{g}(\lambda)}d\lambda$$

En particulier pour $g = f$:

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt \;=\; \int_{-\infty}^{+\infty} |\widehat{f}(\lambda)|^2 d\lambda}$$

La dernière égalité (Égalité de Parseval) signifiant que **les énergies du signal f et de sa transformée de Fourier sont égales.**

2.3 Feuille d'exercices : Transformée de Fourier

Exercice 2.1 ***Transformation de Fourier d'une fonction impaire***
Soit T un nombre réel strictement positif, $a \in \mathbb{R}$ et soit le signal ρ_a défini par :

$$\rho_a(t) = \begin{cases} -a & si\ t \in]-\frac{T}{2}, 0[\\ a & si\ t \in]0, +\frac{T}{2}[\\ 0 & sinon \end{cases}$$

1. *Tracer dans un repère orthogonal la courbe représentative de la fonction $\rho_a(t)$.*
2. *Montrer que la fonction ρ_a est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$ et que $\rho_a \in \mathbb{L}^1$.*
3. *Calculer la transformée de Fourier de la fonction ρ_a notée $\widehat{\rho_a}$.*

Exercice 2.2 ***Transformation de Fourier d'une fonction impulsion***
Soit a un nombre réel strictement positif et soit la fonction impulsion notée $\prod_a$ définie par :

$$\prod\nolimits_a(t) = \begin{cases} \frac{1}{a} & si\ t \in]-\frac{a}{2}, +\frac{a}{2}[\\ 0 & sinon \end{cases}$$

1. *Tracer dans un repère orthogonal la courbe représentative de la fonction $\prod_a(t)$.*
2. *Montrer que la fonction $\prod_a$ est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$ et que $\prod_a \in \mathbb{L}^1$.*
3. *Calculer la transformée de Fourier de la fonction $\prod_a$ notée $\widehat{f_a} = \mathcal{F}(\prod_a)$.*
   On admet que lorsque $a \to 0$ la fonction $\prod_a(t)$ tend vers une limite, qui n'est pas une fonction et qui est appelée ***Distribution de Dirac*** *et qui sera notée $\boldsymbol{\delta}$.*
4. *Montrer alors que la transformée de fourier de δ est la fonction identité c'est-à-dire $\mathcal{F}(\delta) = 1$ ou encore $\widehat{\prod_a} \equiv 1$.*
5. *En utilisant la formule de réciprocité, calculer l'intégrale :*

$$I(a,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(a\pi\lambda)\cos(2\pi t\lambda))}{a\pi\lambda} d\lambda$$

6. *En déduire $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx$.*
7. *Utiliser la formule de Parseval pour calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^2 dx$.*

Exercice 2.3 ***Transformation de Fourier d'une fonction paire, fonction triangle***
Soit le signal défini par :

$$\Lambda(t) = \begin{cases} 1+t & si\ t \in [-1, 0] \\ 1-t & si\ t \in [0, 1] \\ 0 & sinon \end{cases}$$

1. *Tracer dans un repère orthogonal la courbe représentative de la fonction $\Lambda(t)$.*
2. *Montrer que la fonction $\Lambda(t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$ et que $\Lambda \in \mathbb{L}^1$.*
3. *Calculer la transformée de Fourier de la fonction f notée $\widehat{\Lambda}$.*
4. *En utilisant la formule de réciprocité, calculer l'intégrale : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^2 dx$*
5. *Utiliser la formule de Parseval pour calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^4 dx$.*

Exercice 2.4 ***Transformation de Fourier de la fonction trapèze***

Soit le signal défini par :

$$f(t) = \begin{cases} 2 - |t| & si\ |t| \in [1, 2] \\ 1 & si\ |t| \in [0, 1] \\ 0 & sinon \end{cases}$$

1. *Tracer dans un repère orthogonal la courbe représentative de la fonction $f(t)$.*
2. *Montrer que la fonction $f(t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$ et que $f \in \mathbb{L}^1$.*
3. *Calculer $\widehat{f}$ la transformée de Fourier de la fonction f en utilisant les 2 méthodes suivantes :*
   (a) *en passant par la définition (calcul direct).*
   (b) *en remarquant que $f(t) = \Lambda(t+1) + \Lambda(t) + \Lambda(t-1)$ où la fonction $\Lambda(t)$ est la fonction triangle définie dans l'exercice 2.3.*