



Institut Supérieur de l'Electronique et du Numérique

Notions de base pour l'Automatique

Cours

Nicolas ZIMMERMANN

ISEN
41 Boulevard Vauban
59800 Lille

Année 2020-2021

Sommaire

1- Notions de systèmes asservis	5
1.1 - Définitions	5
1.2 - Définition d'un système	5
1.2.1 - Systèmes mono et multi-variables	7
1.2.2 - Définitions des systèmes	8
1.3 - Représentation des systèmes asservis	8
2 - Modélisation mathématique des systèmes asservis	9
2.1 - Modélisation par les équations différentielles	9
2.2 - Modélisation par les transformées de Laplace	10
2.2.1 - Définition	10
2.2.2 - Propriétés	11
2.3 - Fonction de transfert	12
2.3.1 - Définition	12
2.3.2 - Fonctions de transfert par schéma bloc	13
a) Systèmes en série	13
b) Systèmes en parallèle	13
c) Calcul de la fonction de transfert en boucle fermée d'un système avec une boucle de retour	15
d) Cas particulier de l'asservissement avec retour unitaire ($H(p) = 1$)	15
e) Calcul de la fonction de transfert en boucle ouverte à partir de la boucle fermée	16
2.4 - Asservissement/Régulation	16
2.4.1 - Asservissement	17
2.4.2 - Régulation	17
2.4.3 - Calcul de fonction de transfert en asservissement et en régulation	17
a) Calcul de la fonction de transfert en boucle fermée en asservissement	18
b) Calcul de la fonction de transfert en boucle fermée en régulation	19
3 - Dynamique des systèmes asservis	21
3.1 - Introduction	21
3.2 - Réponse à des entrées typiques	21
3.2.1 - Impulsion de Dirac $\delta(t)$	21
3.2.2 - Échelon	22
3.2.3 - Rampe (Entrée de vitesse)	23
3.2.4 - Excitation harmonique	24
3.3 - Réponses d'un système asservi	24
3.4 - Performances d'un système asservi	26
3.4.1 - La rapidité	26
3.4.2 - La stabilité	27
3.4.3 - La précision	28
a) Erreur en asservissement : $Z(p) = 0$ et $E(p) \neq 0$	29
b) Erreur de régulation : $Z(p) \neq 0$ et $E(p) = 0$	31
4 - Analyse fréquentielle des systèmes	32
4.1 - Introduction	32
4.2 - Analyse fréquentielle	32
4.3 - Calcul du gain et de la phase	33
4.4 - Retard pur	34

4.5 - Représentation du lieu de transfert	35
4.5.1 – Représentation du lieu de NYQUIST	35
4.5.2 – Représentation du lieu de BODE	37
4.5.2 – Représentation du lieu de BLACK-NICHOLS	37
5 - Analyse des systèmes linéaires types	43
5.1 - Définition de l'ordre d'un système	43
5.2 - Système du premier ordre	43
5.2.1 – Définitions	43
5.2.2 – Réponses aux différentes entrées	44
a) Réponse à une impulsion	44
b) Réponse à un échelon	44
c) Réponse à une rampe	46
d) Réponses harmoniques	46
5.3 - Système du second ordre	48
5.3.1 – Définitions	49
5.3.2 – Réponse indicielle	50
a) Amortissement $\xi > 1$	50
b) Amortissement $\xi = 1$	51
c) Amortissement $\xi < 1$	51
5.3.3 – Étude fréquentielle	53
a) Lieu de NYQUIST	54
b) Lieu de BODE	55
b) Lieu de BLACK	55
5.4 – Résumé	56
6 -Stabilité des systèmes asservis	59
6.1 - Définitions	59
6.2 - Critère des pôles	59
6.3 - Critère algébrique de Routh-Hurwitz	60
6.4 - Critère de Nyquist simplifié ou critère du revers	62
6.4.1 – Énoncé du critère de Nyquist simplifié	62
6.4.2 – Application au plan de Bode	63
6.4.3 – Application au plan de Black	64
6.5 - Marge de phase, marge de gain et robustesse d'un système	64
6.5.1 – Définitions	64
a) Marge de gain	64
b) Marge de phase	64
c) Robustesse d'un système	65
6.5.2 – Lectures graphiques de ces marges	65
a) Lieu de Black	65
b) Lieu de Bode	66
c) Lieu de Nyquist	66
7 -Identification des processus	67
7.1 - Introduction	67
7.2 - Les méthodes graphiques	67
7.3 - Identification d'un système dont la réponse possède des oscillations	68
7.4 - Identification des systèmes stables du premier ordre	69
7.4.1 - Modèle du premier ordre	69
7.4.2 - Modèle de Broïda	70

7.5 - Identification des systèmes non évolutifs d'ordre supérieur : méthode de Strejc-Quentin	71
7.6 - Identification des systèmes évolutifs	73
7.6.1 - Systèmes de type intégrateur	73
7.6.2 - Systèmes de type premier ordre avec intégrateur	74
7.6.3 - Systèmes du type $n^{\text{ème}}$ ordre avec intégrateur (systèmes évolutifs)	75
8 - Correction des systèmes	77
8.1 - Introduction	77
8.2 - Utilisation des correcteurs	77
8.2.1 - Définition	77
8.2.2 - Différents types de correcteurs	78
a) Correcteur série	79
b) Correcteur par anticipation	79
c) Correction dans la boucle de retour ou correcteur parallèle	79
8.3 - Études des différents régulateurs	79
8.3.1 - Action Proportionnelle	80
8.3.2 - Action Intégrale	80
8.3.3 - Action Dérivée	81
8.3.4 - Association des différentes actions	82
a) Correcteur PI série	82
b) Correcteur PI parallèle	82
c) Correcteur PID série	83
d) Correcteur PID parallèle	83
e) Rôle des différentes actions	83
8.3.5 - Exemple d'amélioration des marges	83
8.4 - Méthodes pratiques	84
8.4.1 - Choix du mode de réglage dans le cas d'un système non évolutif	85
8.4.2 - Choix du mode de réglage dans le cas d'un système évolutif	86
8.4.3 - Méthode de Ziegler–Nichols en boucle fermée	87
9 – Table des figures	91
10 – Annexe	94

Chapitre 1

1- Notions de systèmes asservis

1.1 - Définitions

L'Automatique permet d'étudier les systèmes dynamiques à des fins de commande ou de prise de décision. La maîtrise des processus industriels (conduite, optimisation,...) doit, pour être menée à bien, procéder d'une approche pluridisciplinaire intégrant les méthodes de l'automatique (modélisation, identification, commande ...) et de l'informatique (traitement de l'information, génie logiciel, architectures...). L'approche "systèmes", qui est à la base de la culture automatique, permet de traiter dans une grande généralité, des objectifs multi-niveaux, allant de la simple régulation (d'un profil de température dans une pièce, par ex.) à l'organisation ou la supervision d'un grand système (une unité complexe de production, par ex.).

L'Automatique revêt de ce fait un caractère multidisciplinaire certain et recouvre des matières très différentes allant des mathématiques appliquées à l'automatisation, qui caractérise la mise en œuvre de la théorie en s'appuyant sur l'instrumentation et de plus en plus sur l'informatique.

Nous sommes entourés d'un grand nombre de systèmes automatiques comme la machine à laver, l'ascenseur, le distributeur de boisson, un robot de soudure ou de peinture, le régulateur de vitesse,... L'objet de l'automatique est de remplacer l'homme dans la plupart des tâches (tâches répétitives, pénible, dangereuses, trop précises, trop rapides) qu'il réalise dans de nombreux domaines.

Il existe alors deux grandes familles de systèmes automatiques suivant les données que traitent ces systèmes : les systèmes logiques (voir cours d'automatique séquentielle) ou les systèmes asservis. Un système asservi est un système qui prend en compte durant son fonctionnement l'évolution de ses sorties pour les modifier et les maintenir conforme à une consigne. C'est ce que nous allons étudier dans ce cours !

1.2 - Définition d'un système

Un système se définit comme une entité relativement individualisable, qui se détache de son contexte ou de son milieu tout en procédant à des échanges avec son environnement. Ces échanges concernent les entrées intervenant sur le système et les sorties qui en découlent.

Nous pouvons distinguer différents types de systèmes :

- Petits systèmes : ils se limitent à un processus type unique (réacteur, vanne etc.).
- Grands systèmes : ensemble de petits systèmes (usine chimique, colonne de distillation, pilote automatique, four ou systèmes de chauffage, robotique, etc.)

L'ensemble du contrôle des systèmes et des différents éléments les constituant se fait via un signal. Ce signal est une grandeur physique générée par un appareil ou traduite par un capteur (température, débit etc.). Cette quantité est susceptible de changer de valeur. Elle est associée à la grandeur physique qu'elle représente à un instant donné dans un système.

Nous distinguons :

- Signal d'entrée : indépendant du système et donné par des actionneurs,
- Signal de sortie : dépendant du système et du signal d'entrée.

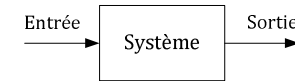


Figure 1. Schéma d'un système

Le système est composé d'une partie de commande et d'une partie à commander. En effet, le but d'un système asservi est de pouvoir contrôler le signal de sortie suivant les signaux reçus en entrée. La notion de commande est de permettre à un système d'atteindre un but fixé. Le système à commander est le système sujet à la commande (four, moteur, réacteur...).

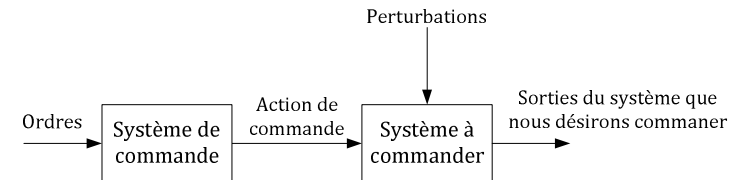


Figure 2. Schéma d'un système de commande

Le schéma précédent permet de définir :

- Ordres : consigne ou le but fixé (exemple : fixer une température à 37 °C ou maintenir une trajectoire donnée).
- Action de commande : action susceptible de changer l'état du système à commander. Elle est élaborée en fonction des ordres.
- Perturbation : variable aléatoire dont nous ne connaissons pas l'origine et qui s'applique sur le système. Par exemple, une perturbation peut augmenter ou diminuer la température d'une pièce sans que le système de chauffage ne réagisse.

Le système précédent est en **BOUCLE OUVERTE** où il n'y a aucune interaction entre l'action de commande et la sortie du système (ex : chauffer une pièce sans contrôler la température, conduire sans regarder la route, etc.).

Nous devons donc prendre en considération la sortie du système et la réintroduire dans le système de commande. Le schéma ci-dessous illustre cela.

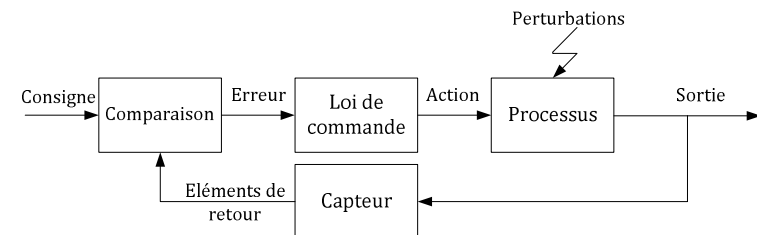


Figure 3. Schéma d'un système asservi

Cette représentation d'un système asservi est un système bouclé, possédant une rétroaction de la sortie sur l'entrée ("feed-back" en anglais). Les signaux de sortie sont alors pris en considération afin de mieux régler l'entrée. Les écarts entre la consigne et la ou les sorties sont limités, comme les effets des perturbations.

Nous pouvons ainsi chauffer une pièce plus ou moins fort selon ce que nous demandons (la consigne) et ce que nous obtenons (la sortie). Nous devons bien évidemment chauffer plus fort si l'écart entre les deux est important et de moins en moins chauffer au fur et à mesure que la température de la pièce se rapproche de la température fixée.

1.2.1 -Systèmes mono et multi-variables

Un système peut se présenter sous différentes configurations :

- Système monovariante :

Pour un système monovariante, il n'y a qu'une seule entrée de commande et qu'une seule sortie. Nous parlons aussi de système *SISO* : Single Input – Single Output

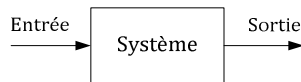


Figure4.Schémad'un système SISO

- Système multi-variables :

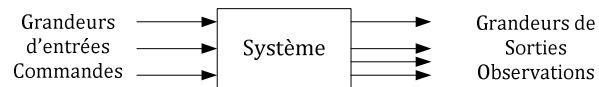


Figure5.Schémad'un système MIMO

Il peut y avoir plusieurs entrées commandant plusieurs sorties : c'est le cas du multi-variable. Nous pouvons distinguer les systèmes :

- *SIMO* : Single Input – Multiple Output
- *MISO* : Multiple Input – Single Output
- *MIMO* : Multiple Input – Multiple Output

Dans le cadre de ce cours d'automatique continue, nous nous intéresserons uniquement aux systèmes SISO.

1.2.2 - Définitions des systèmes

Nous pouvons définir un système :

- Un système est **causal** si la valeur de $s(t)$ à un instant t_0 ne dépend pas des valeurs de $e(t)$ pour $t > t_0$. C'est le cas de tous les systèmes physiques.
- Un système est **déterministe** si pour chaque valeur d'entrée $e(t)$, il n'existe qu'une seule valeur de sortie $s(t)$ possible. Dans le cas contraire, le système est dit **stochastique** (ou aléatoire). Chaque sortie possible est alors affectée d'une probabilité.
- Un système est **continu** si les variables en question sont en fonction d'une variable continue ou analogique. Sinon le système est dit **discret** (ou échantillonné), et le signal n'est disponible qu'à certains instants, appelés instants d'échantillonnage.
- Un système est dit **stationnaire** (ou **invariant**) si les relations entre l'entrée et la sortie sont indépendantes du temps. Les caractéristiques du système sont ainsi invariantes dans le temps.
- Un **système asservi** est un dispositif en boucle fermée qui permet d'asservir la sortie suivant une consigne donnée. La **consigne** est appelée la grandeur réglante et la **sortie** est appelée la grandeur réglée ou observée.
- Un système est **linéaire** s'il est régi par une équation différentielle à coefficients constants.

1.3 - Représentation des systèmes asservis

Les différents éléments composants l'asservissement d'un système se représentent de la manière suivante :

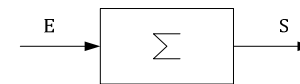


Figure6.Schéma bloc d'un système

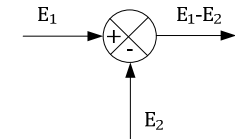


Figure7.Schémad'un comparateur

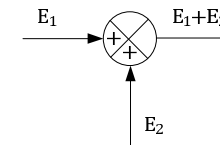


Figure8.Schémad'un sommateur

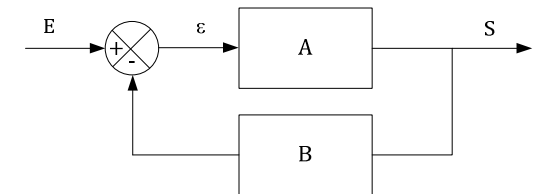


Figure9.Schémad'un système en boucle fermée

Le système asservi est constitué d'une chaîne directe ou d'action (A) et d'une chaîne de retour ou d'une chaîne de contre réaction ou d'observation (B).

Chapitre 2

2 - Modélisation mathématique des systèmes asservis

2.1 - Modélisation par les équations différentielles

Nous nous limitons aux systèmes monovariabiles (1 entrée et 1 sortie) :

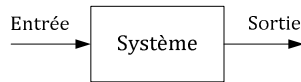


Figure 10 . Schéma d'un système SISO

Nous cherchons à déterminer une relation entre l'entrée et la sortie telle que :

$$f\left(e(t), s(t), \frac{de(t)}{dt}, \frac{ds(t)}{dt}, \dots\right) = 0$$

Nous recherchons un modèle simplifié. Un modèle d'équation différentielle linéaire à coefficients constants est de la forme :

$$\sum_{i=0}^n a_i \frac{d^i s(t)}{dt^i} = \sum_{j=0}^m b_j \frac{d^j e(t)}{dt^j}$$

C'est un système d'ordre n (ordre = plus grande dérivée de la sortie). Dans un système physique, nous avons $n > m$.

Dans de nombreux cas, il est difficile d'extraire et de résoudre les équations différentielles.

Nous allons donc utiliser la transformée de Laplace. C'est l'outil mathématique le plus important en automatique.

Le but de la modélisation mathématique est de déterminer les équations de fonctionnement ou de comportement de notre système.

TOUT SYSTEME PEUT ETRE DECRIT PAR DES EQUATIONS DIFFERENTIELLES !

Exemple : schéma électrique

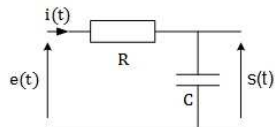


Figure11.Schémad'un circuit RC

$$s(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i(\alpha) d\alpha$$

$$e(t) = R \cdot i(t) + s(t)$$

Exemple : système mécanique

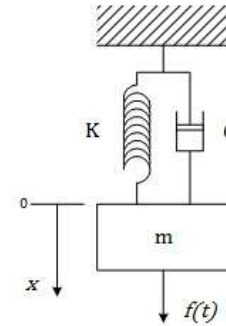


Figure12. Système masse-ressort amorti

$$m \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + c \frac{dx(t)}{dt} + kx(t) = f(t)$$

Exemple : moteur à courant continu entraînant une charge

$$\begin{aligned} (1) \quad & \Gamma_m(t) = ki(t) \\ (2) \quad & e(t) = k\Omega(t) \\ (3) \quad & u(t) = Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} + e(t) \\ (4) \quad & \Gamma_m(t) = J \frac{d\Omega(t)}{dt} + \Gamma_r(t) + f\Omega(t) \end{aligned}$$

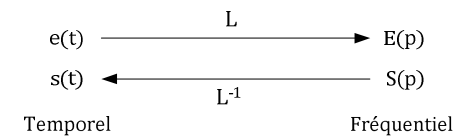
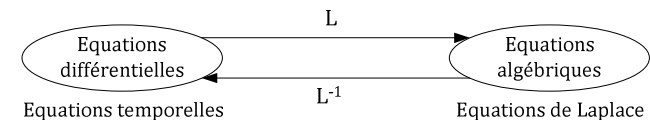
2.2 - Modélisation par les transformées de Laplace

2.2.1 -Définition

A toute fonction du temps $f(t)$, nulle pour $t < 0$ (système causal), nous faisons correspondre une fonction $F(p)$ de variable complexe p , que nous appelons la transformée de Laplace de $f(t)$.

Cette transformée est définie par :

$$F(p) = L(f(t)) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt$$



2.2.2 -Propriétés

- **Linéarité** : soit $f(t)$ et $g(t)$ deux fonctions du temps ayant respectivement $F(p)$ et $G(p)$ comme transformées de Laplace et λ et μ deux constantes. Nous avons :

$$L(\lambda f(t) + \mu g(t)) = \lambda F(p) + \mu G(p),$$

- **Retard** : soit τ un retard associé à une fonction :

$$L(f(t - \tau)) = F(p)e^{-p\tau},$$

- **Dérivation** : $L\left(\frac{df^n(t)}{dt^n}\right) = p^n F(p) - p^{n-1}f(0) - \dots - f(0)$, (dans la suite du cours nous considérons que les conditions initiales sont nulles)

- **Dérivation 1^{ère}** : $L\left(\frac{df(t)}{dt}\right) = pF(p)$ (Condition initiale nulle),

- **Intégration** : $L\left(\int_0^t f(\alpha) d\alpha\right) = \frac{1}{p}F(p)$,

- **Valeur finale** : $f(\infty) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot F(p)$,

- **Avance** : $L(f(t)e^{-\alpha t}) = F(p + \alpha)$,

$f(t)$: domaine temporel	$F(p)$: domaine fréquentiel
E_0	$\frac{E_0}{p}$
$E_0 t$	$\frac{E_0}{p^2}$
$E_0 e^{-at}$	$\frac{E_0}{p + a}$
$E_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$	$\frac{E_0}{p(Tp + 1)}$
$\frac{t^{n-1} e^{-\frac{t}{T}}}{T^n (n-1)!}$	$\frac{1}{(Tp + 1)^n}$
$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$
$\cos(\omega t)$	$\frac{p}{p^2 + \omega^2}$
$1 - \cos(\omega t)$	$\frac{1}{p\left(\frac{p^2}{\omega^2} + 1\right)}$
$\frac{1}{T_1 - T_2} \left(e^{-\frac{t}{T_1}} - e^{-\frac{t}{T_2}}\right)$	$\frac{1}{(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)}$
$1 + \frac{1}{T_2 - T_1} \left(T_1 e^{-\frac{t}{T_1}} - T_2 e^{-\frac{t}{T_2}}\right)$	$\frac{1}{p(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)}$
$1 - \frac{1}{\sqrt{1 - \xi^2}} e^{-\xi \omega_0 t} \cdot \left(\sin\left(\omega_0 \sqrt{1 - \xi^2} \cdot t - \varphi\right)\right)$ avec $\varphi = \arctan\left(\frac{\sqrt{1 - \xi^2}}{-\xi}\right)$	$\frac{1}{p \cdot \left(1 + 2\xi \frac{p}{\omega_0} + \frac{p^2}{\omega_0^2}\right)}$ avec $\xi < 1$
$\frac{1}{\sqrt{1 - \xi^2}} e^{-\xi \omega_0 t} \cdot \left(\sin\left(\omega_0 \sqrt{1 - \xi^2} \cdot t\right)\right)$	$\frac{1}{(1 + 2\xi \frac{p}{\omega_0} + \frac{p^2}{\omega_0^2})}$ avec $\xi < 1$

Exercice C-1 : Donner la transformée de Laplace de l'équation différentielle ci-dessous.

$$m \cdot \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + c \cdot \frac{dx(t)}{dt} + k \cdot x(t) = f(t)$$

Exercice C-2 : Donner la transformée de Laplace des équations différentielles régissant un moteur à courant continu :

$$(1) \quad \Gamma_m(t) = ki(t)$$

$$(2) \quad e(t) = k\Omega(t)$$

$$(3) \quad u(t) = Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} + e(t)$$

$$(4) \quad \Gamma_m(t) = J \frac{d\Omega(t)}{dt} + \Gamma_r(t) + f\Omega(t)$$

2.3 - Fonction de transfert

2.3.1 -Définition

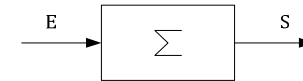


Figure 13. Schéma bloc d'un système

Soit le système Σ régi par l'équation suivante : $\sum_{i=0}^n a_i \frac{d^i s(t)}{dt^i} = \sum_{j=0}^m b_j \frac{d^j e(t)}{dt^j}$ avec des **conditions initiales nulles**, nous obtenons comme transformée de Laplace :

$$S(p) = \frac{\sum_{j=0}^m b_j p^j}{\sum_{i=0}^n a_i p^i} \cdot E(p) \text{ avec } m < n$$

Nous définissons alors la fonction de transfert $G(p)$ caractéristique du système par :

$$S(p) = G(p) \cdot E(p) \text{ avec } G(p) = \frac{\sum_{j=0}^m b_j p^j}{\sum_{i=0}^n a_i p^i}$$

Nous appellerons l'**ordre** d'une fonction de transfert, le degré du dénominateur obtenu après simplification.

Nous appellerons la **classe** d'une fonction de transfert la valeur de la puissance de p mise en facteur au dénominateur.

Exemple : soit $G(p) = \frac{K}{p(p^2 + p + 3)}$.

La fonction de transfert $G(p)$ est une fonction d'ordre 3 et de classe 1.

2.3.2 -Fonctions de transfert par schéma bloc

a) Systèmes en série

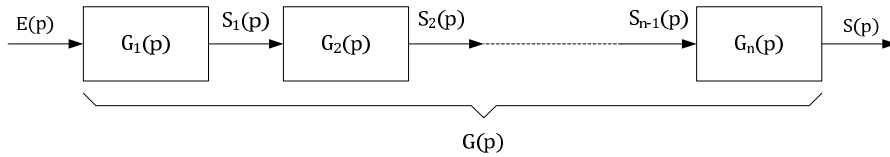


Figure14.Schéma bloc d'un système en série

Nous avons alors :

$$G(p) = G_1(p) \cdot G_2(p) \cdot G_3(p) \cdot \dots \cdot G_n(p) = \prod_{i=1}^n G_i(p)$$

Dans ce cas, la sortie est égale à :

$$S(p) = \left(\prod_{i=1}^n G_i(p) \right) \cdot E(p) = G(p) \cdot E(p)$$

b) Systèmes en parallèle

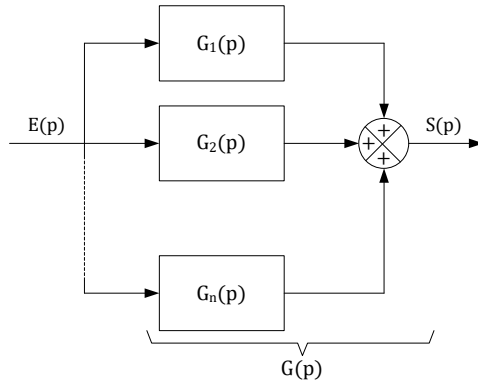


Figure15.Schéma bloc d'un système en parallèle

Nous avons alors :

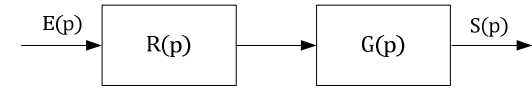
$$G(p) = G_1(p) + G_2(p) + G_3(p) + \dots + G_n(p) = \sum_{i=1}^n G_i(p)$$

Dans ce cas, la sortie est égale à :

$$S(p) = \left(\sum_{i=1}^n G_i(p) \right) \cdot E(p) = G(p) \cdot E(p)$$

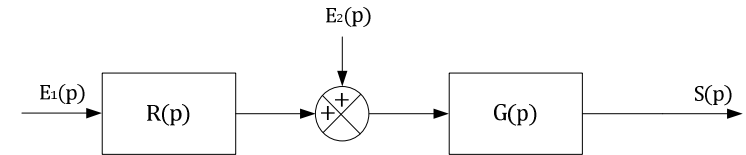
Exercice C-3 : Soit le schéma bloc suivant :

1^{ère} partie :



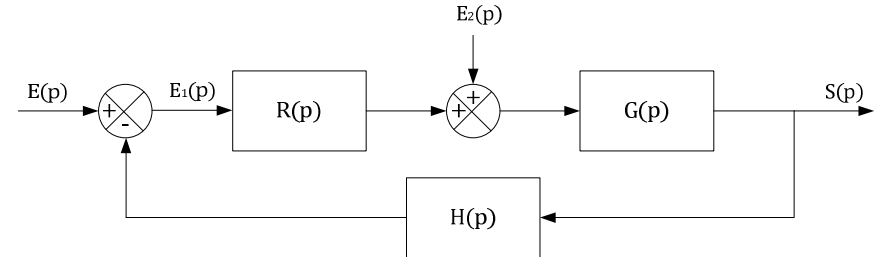
Exprimer la sortie S(p) en fonction de l'entrée E(p).

2^{ème} partie :



Exprimer la sortie S(p) en fonction de E1(p) et E2(p).

Exercice C-4 : Soit le schéma bloc suivant :



1 - Exprimer la sortie S(p) en fonction de E1(p) et E2(p).

2 - Exprimer E1(p) en fonction de E(p) et S(p)

3 - Exprimer S(p) en fonction de E(p) et E2(p).

Exercice C-5 : Donner le schéma bloc du système suivant :

$S(p)$: Sortie

$E(p)$: Entrée

$$(1) \quad i(t) = \frac{k}{\pi} \cdot (e(t) - s(t))$$

$$(2) \quad \frac{dn(t)}{dt} + 100 \cdot n(t) = 100 \cdot i(t)$$

$$(3) \quad \frac{d^2s(t)}{dt^2} + 1,7 \cdot \frac{ds(t)}{dt} = 0,2 \cdot n(t)$$

Exercice C-6 : Donner le schéma bloc du moteur à courant continu :

$\Omega(p)$: Sortie et $U(p)$: Entrée

$$(1) \Gamma_m(t) = ki(t)$$

$$(2) e(t) = k\Omega(t)$$

$$(3) u(t) = Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} + e(t)$$

$$(4) \Gamma_m(t) = J \frac{d\Omega(t)}{dt} + \Gamma_r(t) + f\Omega(t)$$

c) Calcul de la fonction de transfert en boucle fermée d'un système avec une boucle de retour

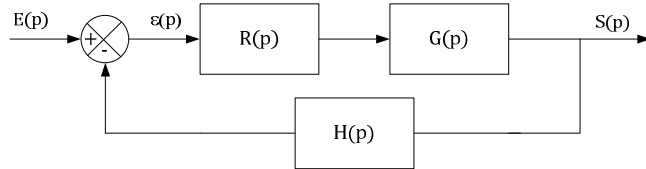


Figure16.Fonction de transfert en boucle fermée avec correcteur et boucle de retour

La fonction de transfert en boucle fermée est donnée par :

$$H_{BF}(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{R(p) \cdot G(p)}{1 + R(p) \cdot G(p) \cdot H(p)}$$

d) Cas particulier de l'asservissement avec retour unitaire ($H(p) = 1$)

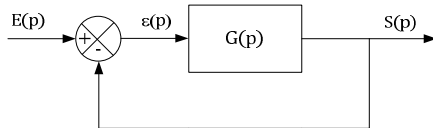


Figure17.Fonction de transfert en boucle fermée par retour unitaire

Ce cas est souvent utilisé après l'étude de la boucle ouverte. La fonction de transfert en boucle fermée est donnée par :

$$H_{BF}(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{G(p)}{1 + G(p)}$$

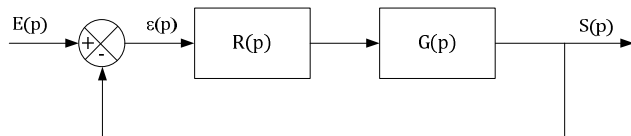


Figure18.Fonction de transfert en boucle fermée avec correcteur et retour unitaire

La fonction de transfert en boucle fermée est donnée par :

$$H_{BF}(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{R(p) \cdot G(p)}{1 + R(p) \cdot G(p)}$$

e) Calcul de la fonction de transfert en boucle ouverte à partir de la boucle fermée

Pour obtenir la fonction de transfert en boucle ouverte, il suffit de "débrancher l'entrée" du comparateur et nous obtenons le schéma suivant :

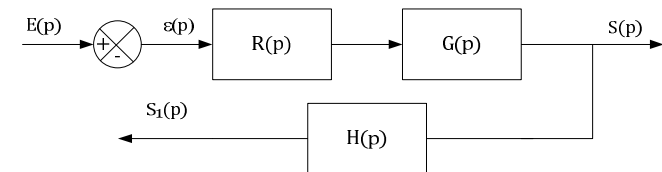


Figure19.Fonction de transfert en boucle ouverte

La fonction de transfert en boucle ouverte a pour équation la relation suivante :

$$H_{BO}(p) = \frac{S_1(p)}{E(p)} = R(p) \cdot G(p) \cdot H(p)$$

Nous pouvons alors réécrire les différentes fonctions de transfert déterminées précédemment.

Fonction de transfert en boucle fermée :

$$H_{BF}(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{R(p) \cdot G(p)}{1 + H_{BO}(p)}$$

Fonction de transfert en boucle fermée **à retour unitaire ($H(p) = 1$)** :

$$H_{BF}(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{H_{BO}(p)}{1 + H_{BO}(p)}$$

2.4 - Asservissement/Régulation

Un système de commande en boucle fermée permet de compenser des perturbations externes, de compenser des incertitudes internes au processus (ex : moteur qui chauffe) et de garantir la stabilité du système.

Par conséquent nous pouvons définir deux notions :

1. Asservissement,
2. Régulation.

2.4.1 -Asservissement

L'asservissement est la poursuite par la sortie d'une consigne qui peut être variable au cours du temps. Si la consigne varie, la perturbation est supposée constante (variation de la perturbation nulle). Nous souhaitons avoir dans ce cas une erreur nulle.

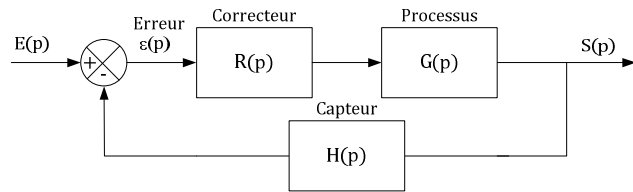


Figure20. Asservissement en boucle fermée avec correcteur et boucle de retour

2.4.2 -Régulation

La régulation est la compensation des perturbations variables sur la sortie pour une consigne constante (variation nulle). Dans le cadre de la régulation, nous annulons la variation de l'entrée pour ne nous occuper que des perturbations.

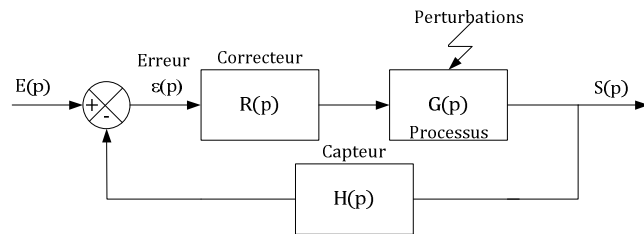


Figure21. Régulation en boucle fermée avec correcteur et boucle de retour

2.4.3-Calcul de fonction de transfert en asservissement et en régulation

La forme générale pour une boucle de régulation et d'asservissement est donnée par le schéma ci-dessous :

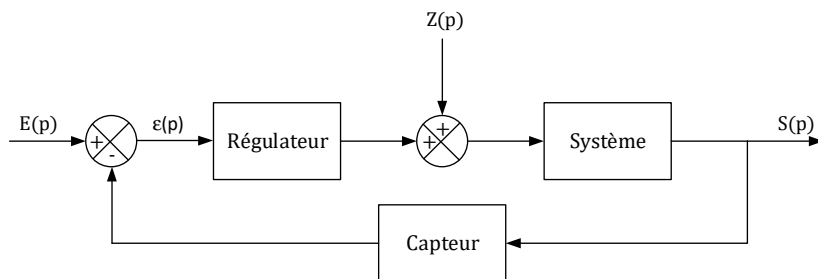


Figure22. Boucle de régulation et asservissement

Comme nous l'avons vu précédemment, l'asservissement ne prend pas en compte les perturbations $Z(p)$ nous considérons dans ce cas $Z(p)=0$ et corrige la sortie $S(p)$ en fonction de la consigne $E(p)$. A l'inverse, en régulation, nous considérons l'entrée $E(p)$ nulle afin de ne s'intéresser qu'à la correction des écarts provoqués par les perturbations. En général, $G(p)$ représente la fonction de transfert du système, $R(p)$ la fonction de transfert du correcteur (ou régulateur) et $H(p)$ représente généralement la fonction de transfert du capteur pour mesurer la sortie ou bien la mise en cascade de plusieurs éléments.

En asservissement comme en régulation deux concepts sont très importants : la fonction de transfert en boucle ouverte $H_{BO}(p)$ et la fonction de transfert en boucle fermée $H_{BF}(p)$.

Dans la suite, nous allons prendre le schéma général suivant :

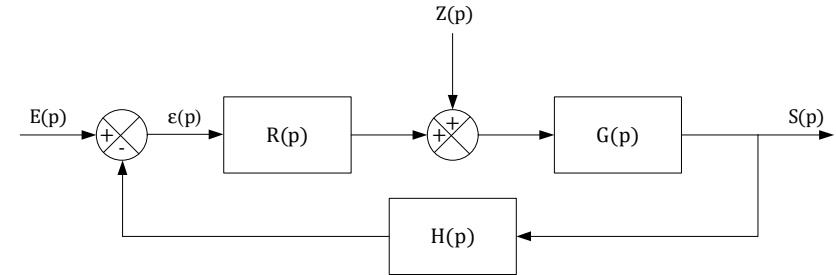


Figure23. Schéma général de régulation et asservissement

a) Calcul de la fonction de transfert en boucle fermée en asservissement

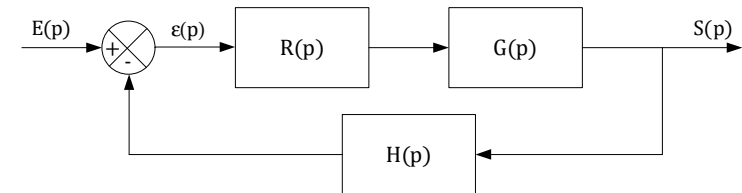


Figure24. Fonction de transfert en boucle fermée en asservissement

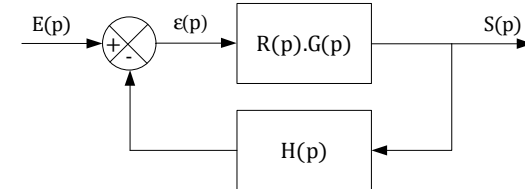


Figure25. Modification du schéma bloc

Pour calculer la fonction de transfert en boucle fermée nous calculons les mailles suivantes :

- (1) $\varepsilon(p) = E(p) - H(p) \cdot S(p)$
- (2) $S(p) = R(p) \cdot G(p) \cdot \varepsilon(p)$

De l'équation n°2 nous en déduisons la valeur de l'erreur que nous remplaçons dans l'équation n°1 :

$$(3) \quad \varepsilon(p) = \frac{S(p)}{R(p) \cdot G(p)}$$

$$(3) \rightarrow (1) \quad \frac{S(p)}{R(p) \cdot G(p)} = E(p) - H(p) \cdot S(p)$$

$$\frac{S(p)}{R(p) \cdot G(p)} + H(p) \cdot S(p) = E(p)$$

$$S(p) \cdot \left(\frac{1}{R(p) \cdot G(p)} + H(p) \right) = E(p)$$

$$S(p) \cdot \left(\frac{1 + H(p) \cdot R(p) \cdot G(p)}{R(p) \cdot G(p)} \right) = E(p)$$

$$S(p) = \left(\frac{R(p) \cdot G(p)}{1 + H(p) \cdot R(p) \cdot G(p)} \right) \cdot E(p)$$

Nous en déduisons :

$$H_{BF}(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{G(p) \cdot R(p)}{1 + G(p) \cdot R(p) \cdot H(p)}$$

b) Calcul de la fonction de transfert en boucle fermée en régulation

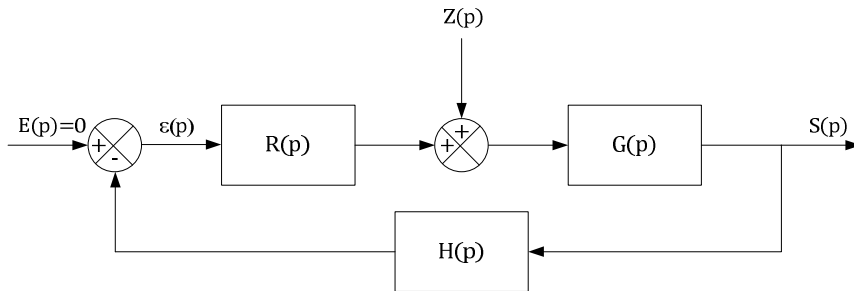


Figure26.Fonction de transfert en boucle fermée en régulation

Dans le cadre de la régulation, nous considérons $E(p)=0$. Nous allons chercher l'équation de la sortie en fonction des entrées $Z(p)$. Nous obtenons alors:

$$H_{BF}(p) = \frac{S(p)}{Z(p)} = \frac{G(p)}{1 + G(p) \cdot R(p) \cdot H(p)}$$

Exercice C-7 : Soit un moteur à courant continu entraînant une charge. L'entrée est la tension d'induit appliquée au moteur $u(t)$ et la sortie est la vitesse de rotation de la charge $\Omega(t)$. A noter que

$$(1) \quad \Gamma_m(t) = ki(t)$$

$$(2) \quad e(t) = k\Omega(t)$$

$$(3) \quad u(t) = Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} + e(t)$$

$$(4) \quad \Gamma_m(t) = J \frac{d\Omega(t)}{dt} + \Gamma_r(t) + f\Omega(t)$$

Question 1 : Reprenez les schémas blocs de l'exercice C-6, et donnez la fonction de transfert de ce MCC en asservissement et en régulation.

Question 2 : Déterminer les expressions des erreurs en asservissement $\varepsilon_{ass}(p)$ et l'expression de l'erreur en régulation $\varepsilon_{reg}(p)$

Chapitre 3

3 - Dynamique des systèmes asservis

3.1 - Introduction

Les objectifs de l'analyse des systèmes est de comparer les performances des différents systèmes étudiés afin de prendre celui qui nous convient le mieux. C'est aussi une étape préliminaire avant la réalisation d'un système de commande. En effet, nous pouvons connaître les comportements du système et ainsi décider des corrections à apporter. L'étude de la dynamique des systèmes asservis permet cette analyse des systèmes.

Une analyse temporelle permettra d'appréhender la rapidité, la stabilité et la précision alors qu'une analyse fréquentielle apportera des informations sur la stabilité et le déphasage observé sur ces systèmes (chapitre 4).

3.2 - Réponse à des entrées typiques

Différents signaux typiques vont être appliqués à l'entrée de notre système pour :

- faciliter la résolution des équations différentielles,
- pouvoir attaquer un régime plus difficile,
- permettre des comparaisons entre différents systèmes.

3.2.1 - Impulsion de Dirac $\delta(t)$

C'est la limite d'une fonction nulle en dehors d'un petit intervalle de temps :

$$\delta(t) = \lim_{t \rightarrow 0} E(t)$$

$\delta(t)$ est appelée impulsion de Dirac et est représentée en temporelle de la manière suivante :

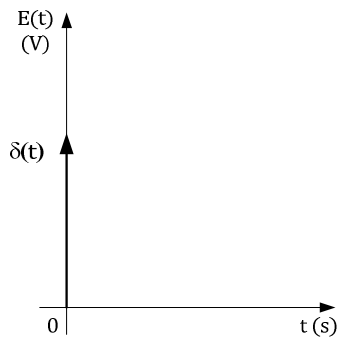


Figure27. Impulsion de Dirac

Si l'entrée est une impulsion de Dirac, nous parlons de réponse impulsionnelle.

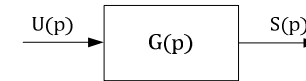


Figure28. Réponse à une impulsion de Dirac

Comme la transformée de Laplace d'une impulsion de Dirac est égale :

$$L(\delta(t)) = 1$$

Sur la figure ci-dessus, nous avons $U(p) = 1$ et donc $S(p) = G(p)$.

La fonction de transfert d'un système peut donc être directement donnée par sa réponse impulsionnelle.

3.2.2 - Échelon

La Figure29 représente un échelon d'amplitude k.

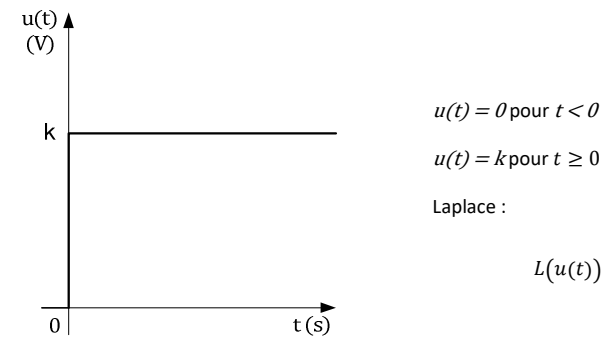


Figure29. Echelon unitaire

La réponse à un échelon est appelé réponse indicielle. Un échelon est dit unitaire si $k=1$.

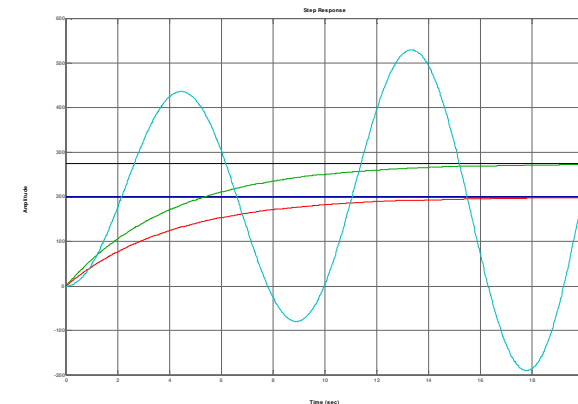


Figure30. Réponse à un échelon d'amplitude k

3.2.3 – Rampe (Entrée de vitesse)

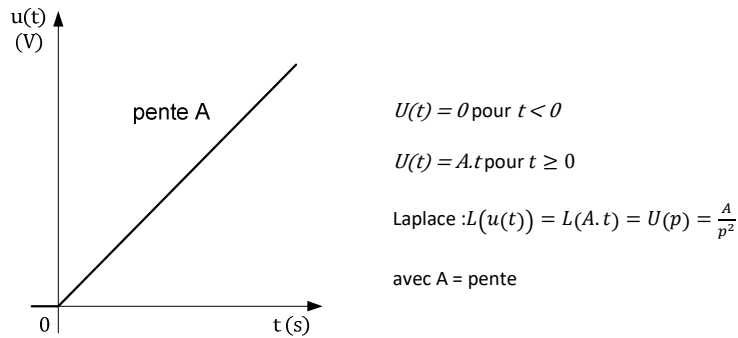


Figure31. Rampe de vitesse

Des exemples de réponse de systèmes soumis à une entrée de type rampe sont représentés sur la Figure32.

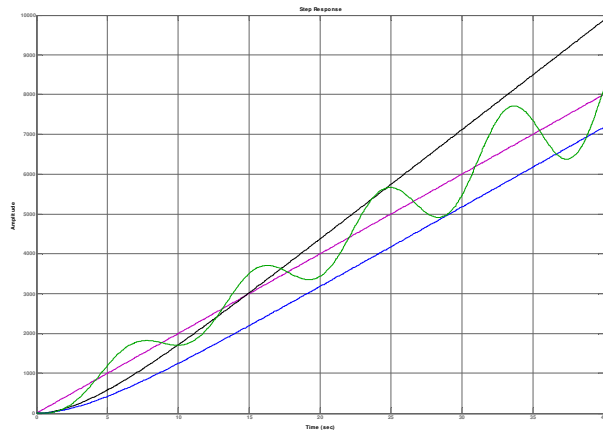


Figure32. Réponse en vitesse

3.2.4 – Excitation harmonique

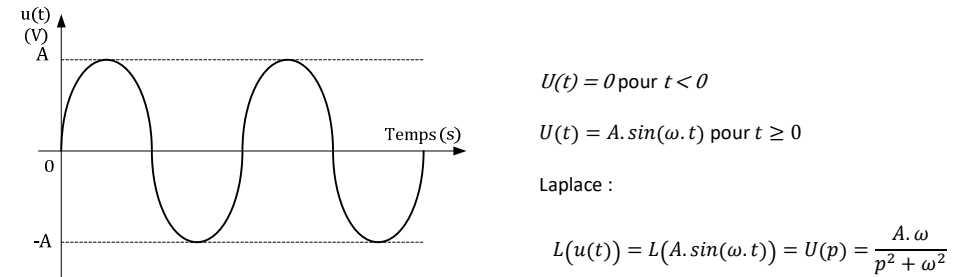


Figure33. Excitation harmonique

La réponse à l'excitation harmonique est appelée **réponse harmonique**. Pour cette réponse, le régime permanent est une sinusoïde de même fréquence que l'entrée mais qui diffère par l'amplitude et la phase. Si $u(t) = A \sin(\omega. t)$ alors $s(t) = A' \sin(\omega. t + \varphi)$

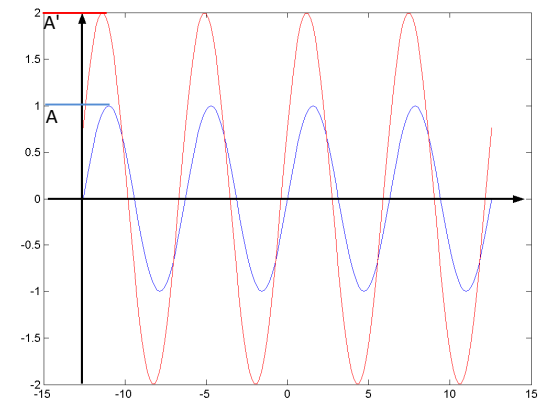


Figure34. Réponse harmonique

Nous définissons alors $\frac{A'}{A}$ comme le **gain** du système (même définition qu'en électronique) et φ comme **phase** (ou déphasage).

3.3–Réponses d'un système asservi

Si nous soumettons un système à une de ces entrées, dans la plupart des cas la sortie finira par avoir la même forme que l'entrée. A ce moment-là, nous dirons que le système a atteint son régime **permanent**.

Il faut un certain temps à un système pour atteindre son régime permanent. La période entre 0 et le régime permanent est appelée régime **transitoire**.

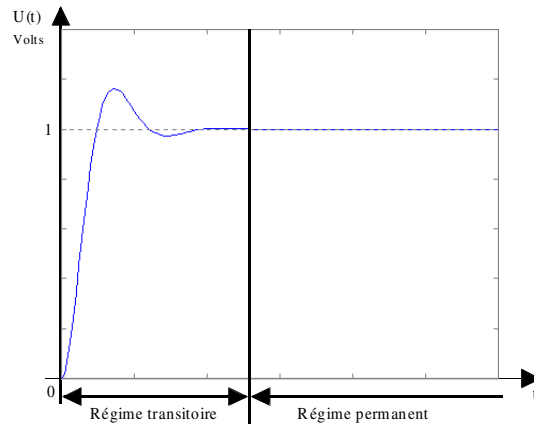


Figure35. Régime Transitoire/Permanent

Le temps que met le système à atteindre son régime permanent permet de définir différents types d'asservissements.

Par exemple, si nous étudions la réponse indicielle d'un système, nous pouvons définir si l'asservissement est trop "mou", trop ou pas assez amorti, etc. (voir Figure 36, Figure 37, Figure 38 et Figure 39).

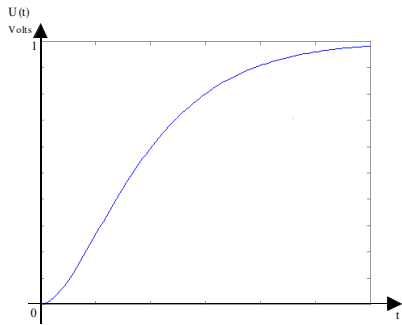


Figure36.Asservissement "mou" et régime transitoire apériodique

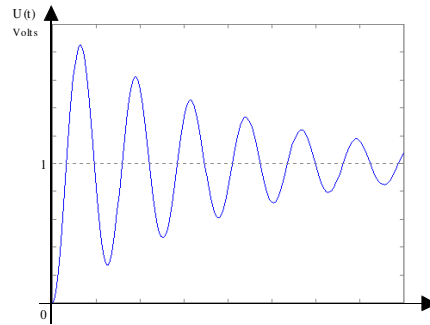


Figure37.Transitoire Trop lent et trop peu amorti

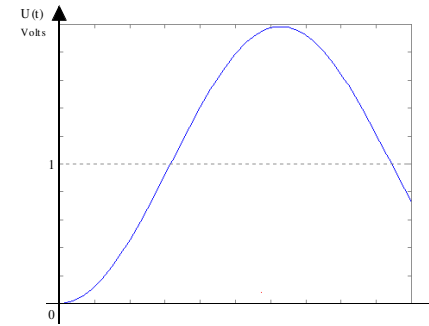


Figure38.Trop peu amorti trop lent

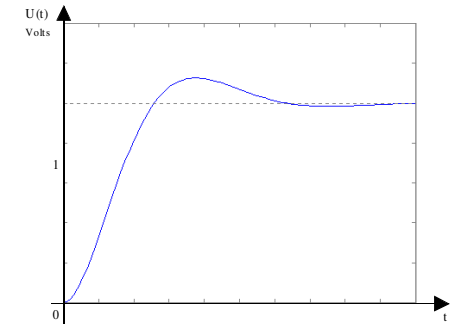


Figure39.Bon asservissement: régime transitoire rapide et bien amorti avec un seul dépassement

3.4 - Performances d'un système asservi

Un asservissement est caractérisé par trois facteurs révélateurs de ses performances :

- rapidité,
- stabilité,
- précision.

3.4.1 - La rapidité

Un système est dit rapide s'il se stabilise à un niveau constant en un temps satisfaisant et fixé par l'utilisateur.

La rapidité est caractérisée par le **temps de réponse**.

Le temps de réponse t_r à $n\%$ est le temps au bout duquel la réponse du système ne s'écarte pas de $+n\%$ ou $-n\%$ de la valeur finale (100% son état permanent). Généralement en France, nous prendrons $n = 5$ comme le montre la figure ci-dessous.

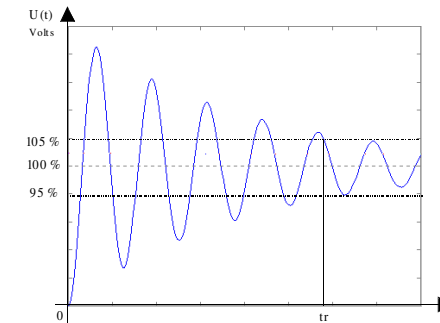


Figure40.Temps de réponse du système

Une indication supplémentaire sur la rapidité peut être donnée, en prenant en compte le temps de montée : temps pour passer de 10 % à 90 % de la valeur finale. Ceci n'est qu'une indication !

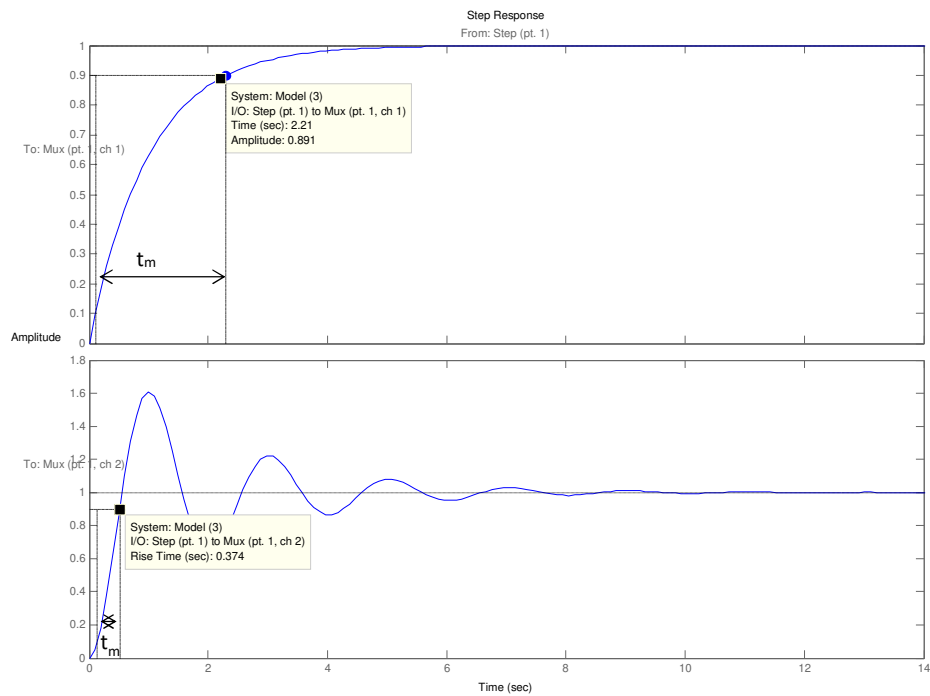


Figure41. Temps de montée

3.4.2 - La stabilité

Un système est dit stable si sa sortie tend vers une constante pour une entrée constante. L'instabilité est l'un des problèmes majeurs à régler dans le cadre des systèmes asservis.

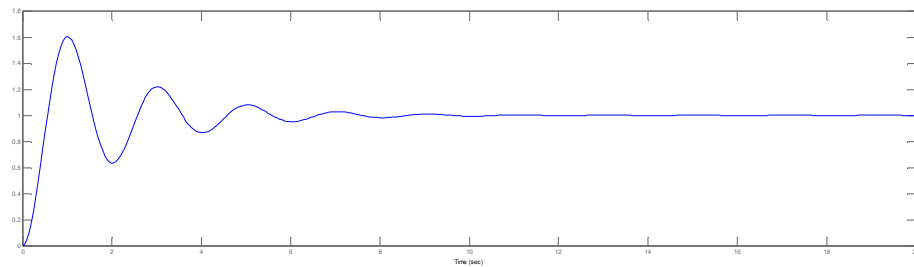


Figure42.Système stable

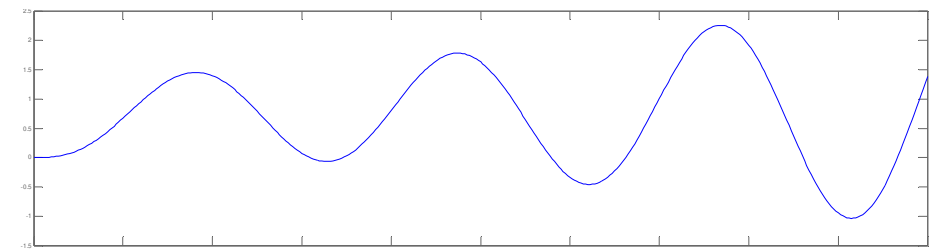


Figure43.Système instable

3.4.3 - La précision

Un système est précis si la sortie suit la consigne en toute circonstance (perturbations) et retourne à la valeur de consigne après une perturbation.

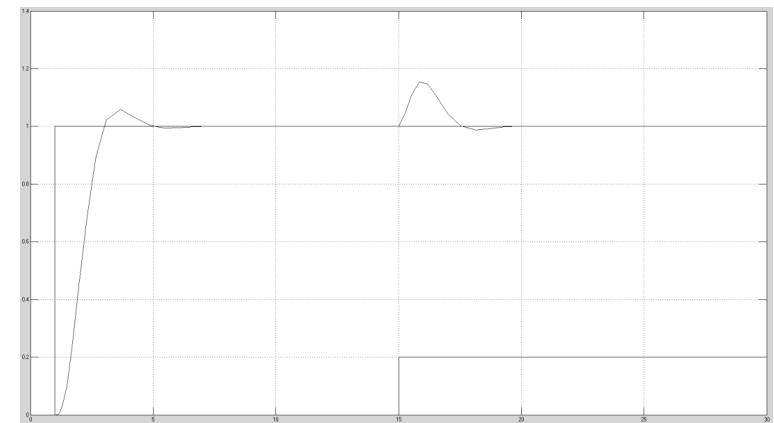


Figure44.Système précis

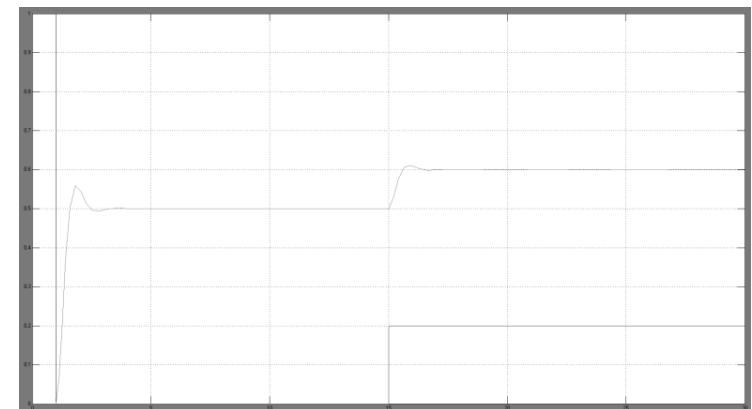


Figure45.Système avec erreur

Le schéma complet d'un système asservi est le suivant :

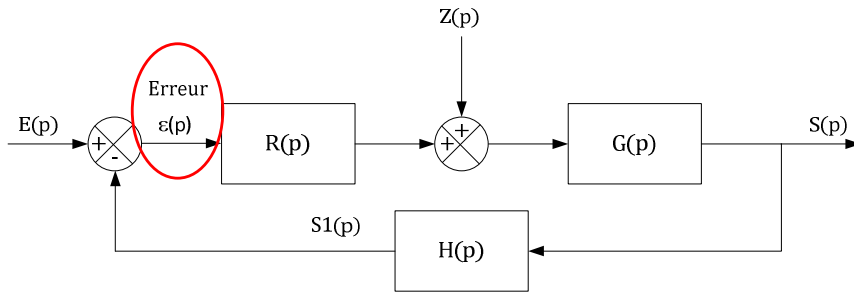


Figure 46. Schéma complet de régulation

L'erreur (asservissement et régulation) est égale à : $\varepsilon(p) = E(p) - S1(p)$

a) Erreur en asservissement : $Z(p) = 0$ et $E(p) \neq 0$

La valeur finale de l'erreur d'un système asservi se détermine en régime permanent et est donc définie par :

$$\varepsilon_f = \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t)$$

Si nous appliquons le **théorème de la valeur finale** nous obtenons l'équation suivante :

$$\varepsilon_f = \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \varepsilon(p)$$

Pour calculer cette valeur finale, il faut tout d'abord déterminer l'expression de $\varepsilon(p)$.

Pour cela, nous lisons sur le schéma bloc :

$$\varepsilon(p) = E(p) - S(p) \cdot H(p) \text{ avec } S(p) = R(p) \cdot G(p) \cdot \varepsilon(p)$$

Entrée en échelon :

L'erreur permanente s'appelle **erreur de position** ou **erreur statique**.

Dans ce cas : $E(p) = \frac{k}{p}$ avec k amplitude de l'échelon d'entrée.

Entrée en rampe :

L'erreur permanente s'appelle l'**erreur de traînage** ou l'**erreur de vitesse**.

Dans ce cas : $E(p) = \frac{E_0}{p^2}$

Cas particulier : Etude d'un système de fonction de transfert $F(p)$ inséré dans une boucle d'asservissement à retour unitaire

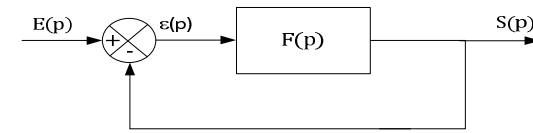


Figure 47 : système de fonction de transfert $F(p)$ insérée dans une boucle d'asservissement à retour unitaire

Dans ce cas, l'expression de l'erreur d'asservissement est :

$$\varepsilon(p) = \frac{1}{1 + F(p)} E(p)$$

Avec

$$F(p) = \frac{K(1 + b_1 \cdot p + b_2 \cdot p^2 + \dots + b_k \cdot p^k)}{p^\alpha \cdot (1 + a_1 \cdot p + a_2 \cdot p^2 + \dots + a_n \cdot p^n)}$$

La valeur finale de l'erreur d'asservissement est donc :

$$\varepsilon_f = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \varepsilon(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot E(p) \cdot \frac{1}{1 + \frac{K(1 + b_1 \cdot p + b_2 \cdot p^2 + \dots + b_k \cdot p^k)}{p^\alpha \cdot (1 + a_1 \cdot p + a_2 \cdot p^2 + \dots + a_n \cdot p^n)}}$$

Nous pouvons dire que :

Si $E(p)$ est un échelon d'amplitude E_0 , et si le système est de classe 0 alors:

$$\varepsilon_f = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \frac{E_0}{p} \cdot \frac{1}{1 + \frac{K(1 + b_1 \cdot p + b_2 \cdot p^2 + \dots + b_k \cdot p^k)}{(1 + a_1 \cdot p + a_2 \cdot p^2 + \dots + a_n \cdot p^n)}} = \frac{E_0}{1 + K}$$

Si $E(p)$ est un échelon d'amplitude E_0 , et si le système est de classe 1 ou plus alors $\varepsilon_f = 0$.

Nous pouvons appliquer le même raisonnement dans le cas où l'entrée est une rampe de pente A.

Nous avons rassemblé les différentes valeurs de l'erreur finale d'asservissement dans le cas d'un système $F(p)$ inséré dans une boucle asservissement à retour unitaire en fonction du type d'entrée et de la classe du système $F(p)$ dans le Tableau 1.

Classe Entrée	Classe 0	Classe 1	Classe 2
Echelon d'amplitude E_0	$\frac{E_0}{1 + K}$	0	0
Rampe d'amplitude A	∞	$\frac{A}{K}$	0

Tableau 1 : Valeur de l'erreur finale d'asservissement pour un système inséré dans une boucle d'asservissement à retour unitaire en fonction de l'entrée et de la classe du système

b) Erreur de régulation : $Z(p) \neq 0$ et $E(p) = 0$

Il faut tout d'abord déterminer l'expression de l'erreur de régulation en lisant sur le schéma bloc de la Figure 47 :

$$\varepsilon(p) = -S(p) \cdot H(p) \text{ avec } S(p) = G(p) \cdot (R(p) \cdot \varepsilon(p) + Z(p))$$

Ensuite il faut calculer la valeur finale de l'erreur en utilisant le théorème de la valeur finale.

Chapitre 4

4 - Analyse fréquentielle des systèmes

4.1 - Introduction

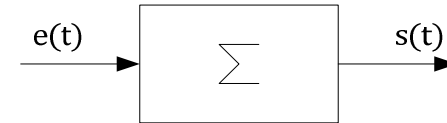


Figure48. Analyse fréquentielle d'un système

Pour déterminer la fonction de transfert d'un système, l'idéal serait d'appliquer l'impulsion de Dirac $\delta(t)$ en $e(t)$. En effet, nous avons vu que dans ce cas $S(p) = G(p)$. Mais $\delta(t)$ est un signal théorique impossible à réaliser.

Nous pouvons aussi utiliser une excitation harmonique $e(t) = A \cdot \sin(\omega t)$. Nous balayons ainsi en fréquence et nous observons la sortie du processus. Nyquist a montré que ce protocole permet de caractériser le système.

4.2 - Analyse fréquentielle

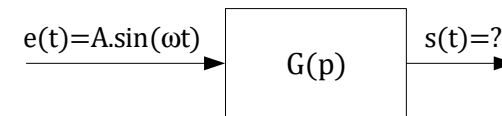


Figure49. Analyse fréquentielle d'un système

Nous aurons alors en sortie

$$s(t) = G(\omega) \cdot A \cdot \sin(\omega t + \varphi(\omega))$$

Le passage d'une écriture de Laplace à une étude fréquentielle se fait en remplaçant tout simplement p par $j\omega$. Nous pouvons alors définir $G(j\omega)$ comme la fonction de transfert harmonique.

L'analyse fréquentielle est l'étude du gain et de la phase de cette fonction avec $e(t) = A \cdot \sin(\omega t)$ et $s(t) = A' \cdot \sin(\omega t + \varphi)$.

Nous définissons :

$$G(j\omega) = \Re(\omega) + j \cdot \Im(\omega)$$

Le module :

$$G(\omega) = |G(j\omega)| = \frac{A'}{A} \text{ et } G(\omega) = |G(j\omega)| = \sqrt{\Re(\omega)^2 + \Im(\omega)^2}$$

La phase :

$$\varphi(\omega) = \text{Arg}(G(j\omega)) \text{ et } \varphi(\omega) = \arctan \frac{\Im(\omega)}{\Re(\omega)}$$

Et donc : $G(j\omega) = |G(j\omega)| \cdot e^{j \cdot \varphi(\omega)} = G(\omega) \cdot e^{j \varphi(\omega)}$

4.3 - Calcul du gain et de la phase

Les systèmes pris en compte dans la suite sont écrit en Laplace "p", mais l'étude se fait en fréquentielle "jω".

Pour le système $G_1(p)$ nous avons :

$$G_1(\omega) = |G_1(j\omega)|$$

$$\varphi_1(\omega) = \text{Arg}(G_1(j\omega))$$

Pour le système $G_2(p)$ nous avons :

$$G_2(\omega) = |G_2(j\omega)|$$

$$\varphi_2(\omega) = \text{Arg}(G_2(j\omega))$$

- Propriété n°1 :

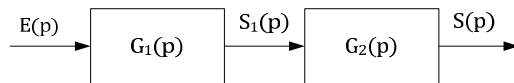


Figure50. Système en cascade

$$G(\omega) = G_1(\omega) \cdot G_2(\omega)$$

$$\varphi(\omega) = \varphi_1(\omega) + \varphi_2(\omega)$$

- Propriété n°2 :

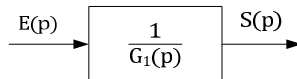


Figure51. Système avec l'inverse d'une fonction

$$G(\omega) = \frac{1}{G_1(\omega)}$$

$$\varphi(\omega) = -\varphi_1(\omega)$$

- Propriété n°3 :

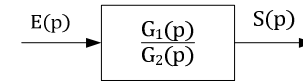


Figure52. Système avec division de fonctions

$$G(\omega) = \frac{G_1(\omega)}{G_2(\omega)}$$

$$\varphi(\omega) = \varphi_1(\omega) - \varphi_2(\omega)$$

4.4 - Retard pur

Un système linéaire est dit avec retard pur si le signal de sortie est décalé par rapport à celui d'entrée d'un temps τ .

En pratique le retard pur τ est provoqué par l'inertie thermique, le jeu mécanique, etc.

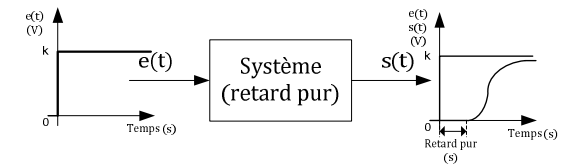


Figure53. Système avec un retard pur

Exemple :

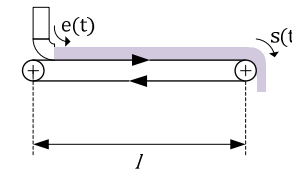


Figure54. Un tapis roulant

La fonction de transfert d'un retard pur est :

$$G(p) = e^{-\tau \cdot p}$$

La fonction de transfert d'un système muni d'un retard pur est :

$$G(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = G_0(p) \cdot e^{-\tau \cdot p}$$

En fréquentiel, pour le calcul du gain et de la phase, nous écrivons l'expression du retard pur sous la forme :

$$G(j\omega) = e^{-\tau.j.\omega} = \cos(\omega.\tau) - j.\sin(\omega.\tau)$$

Nous en déduisons :

- le module :

$$G(\omega) = \sqrt{(\cos(\omega.\tau))^2 + (\sin(\omega.\tau))^2} = 1$$

- la phase :

$$\varphi(\omega) = -\arctan\left(\frac{\sin(\omega.\tau)}{\cos(\omega.\tau)}\right) = -\omega.\tau$$

Dans le domaine temporel, les systèmes avec retard pur répondent après un certain délai. Dans le domaine fréquentiel, ces systèmes sont excités par un signal sinusoïdal, les amplitudes se reproduisent sans distorsion tandis que la phase croît proportionnellement à la fréquence. C'est justement ce déphasage qui rend les systèmes à retard pur indésirable lorsqu'ils sont insérés dans une boucle de régulation.

Exercice C-8 : Calculer le module et l'argument de :

1. $H_1(p) = \frac{1}{(1+p)^3}$
2. $H_2(p) = \frac{1}{p.(p+1).(p+2)}$
3. $H_3(p) = \frac{K.e^{-\tau.p}}{(1+T.p)}$
4. $H_4(p) = \frac{1-2.p}{(p+1)^2.(1+2.p)}$

4.5 - Représentation du lieu de transfert

4.5.1 - Représentation du lieu de NYQUIST

Le lieu de Nyquist d'une fonction de transfert $G(j\omega)$ est la représentation graphique de $G(j\omega)$ dans le plan complexe pour ω variant de 0 à $+\infty$.

Le module est représenté par la distance entre l'origine et l'extrémité du vecteur image $G(j\omega)$ lorsque ω varie de 0 à $+\infty$. La phase est représentée par l'angle fait entre l'axe des abscisses et le vecteur image.

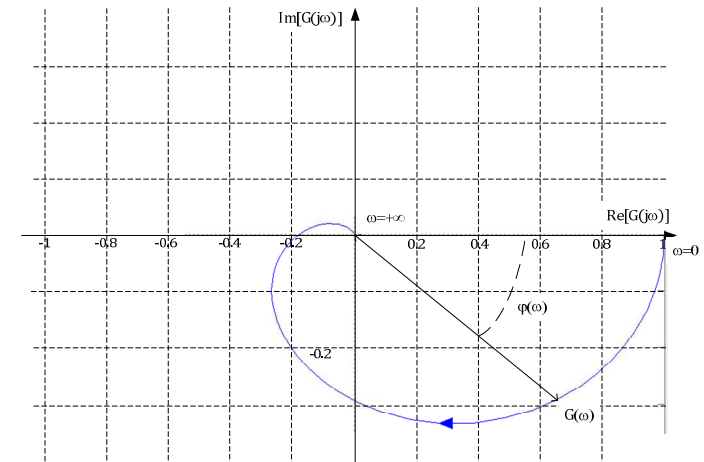


Figure55. Diagramme de Nyquist

Un retard pur est décrit par un terme situé au numérateur. Dans un système à retard pur, le déphasage est d'autant plus important que la fréquence du signal est élevée. Nous avons donc un lieu de Nyquist qui s'enroule autour de l'origine.

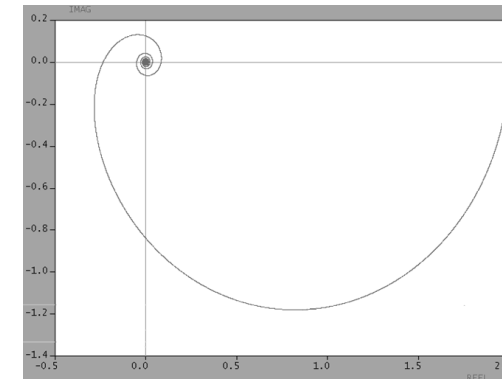


Figure56. Diagramme de Nyquist d'un système avec retard pur

Exercice C-9 : Représentez le lieu de Nyquist de :

$$H_1(p) = \frac{1}{(1+p)^3}$$

4.5.2 – Représentation du lieu de BODE

Un lieu de Bode est la représentation séparée du gain et de la phase en fonction de la fréquence. La fréquence est représentée en échelle logarithmique et le gain est exprimé en dB.

$$|G(j\omega)|_{dB} = 20 \cdot \log G(\omega)$$

$$\varphi(\omega) = \text{Arg}(G(j\omega)) \text{ en degré}$$

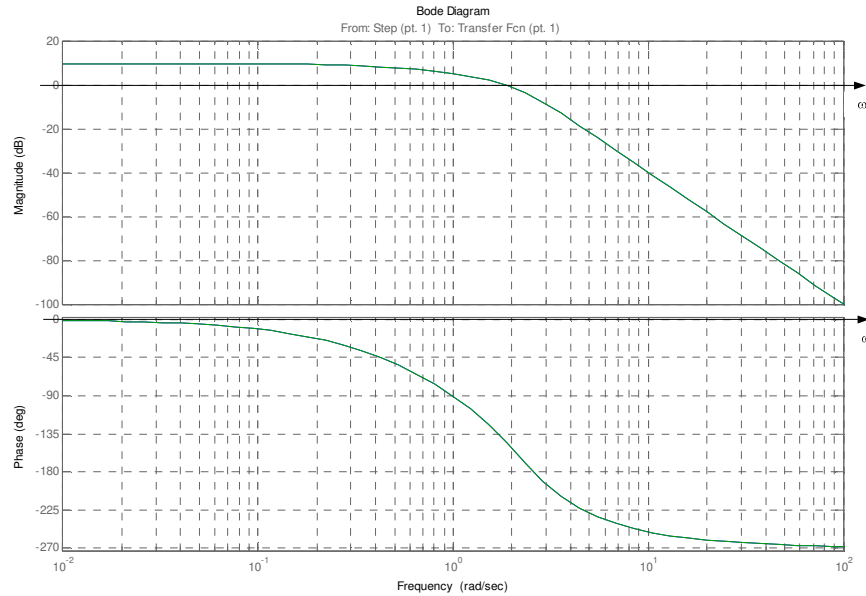


Figure57. Lieu de Bode d'un système

4.5.2 – Représentation du lieu de BLACK-NICHOLS

Il s'agit d'une représentation du gain en dB en fonction de la phase. Sur un lieu de Black, nous représentons toujours la fonction de transfert en **boucle ouverte**. Ceci simplifie généralement les calculs et nous verrons par la suite que c'est intéressant pour, entre autres, déterminer la stabilité ou non du système.

Un lieu de Black comporte les représentations des isophases et des isogains correspondants aux fonctions de transfert en boucle fermée. A partir de ces isophases et isogains, il est possible de déduire les caractéristiques en boucle fermée d'une fonction de transfert en boucle ouverte pour une valeur ω .

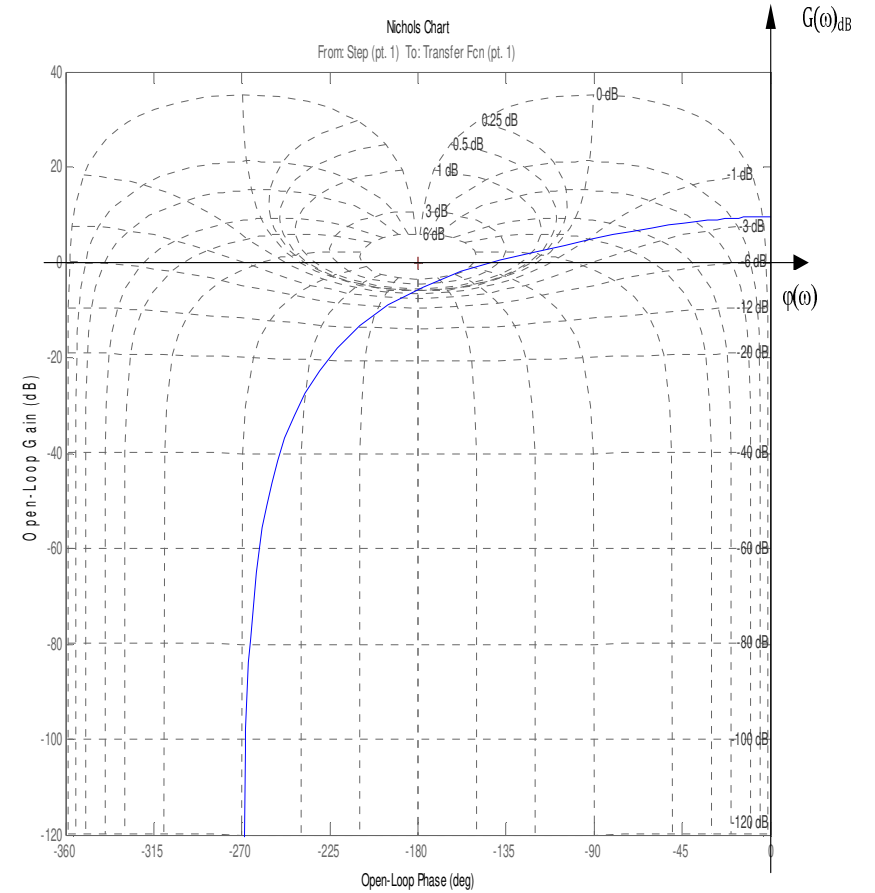


Figure58. Lieu de Black d'un système

Remarque : L'avantage du lieu de Black est qu'il est très simple de passer de lieu de Black de $G(p)$ au lieu de Black de $K \cdot G(p)$ (insertion d'un gain K dans la chaîne directe de la boucle d'asservissement).

En effet, le lieu de Black de $K \cdot G(p)$ s'obtient à partir du lieu de $G(p)$ en le translatant de $20 \log(K)$ suivant l'axe y du gain. En effet : $|K \cdot G(j\omega)|_{dB} = 20 \log(K) + 20 \cdot \log G(\omega)$

PLUSIEURS ABAQUES DE BLACK-NICHOLS SONT SITUÉES A LA FIN DE CE DOCUMENT.

Exercice C-10 : Représentez les lieux de Black de la fonction de transfert en boucle ouverte:

$$H_1(p) = \frac{1}{(1+p)^3}$$

Puis, effectuez la représentation de $H_2(p)$ en boucle ouverte avec :

$$H_5(p) = \frac{5}{(1+p)^3}$$

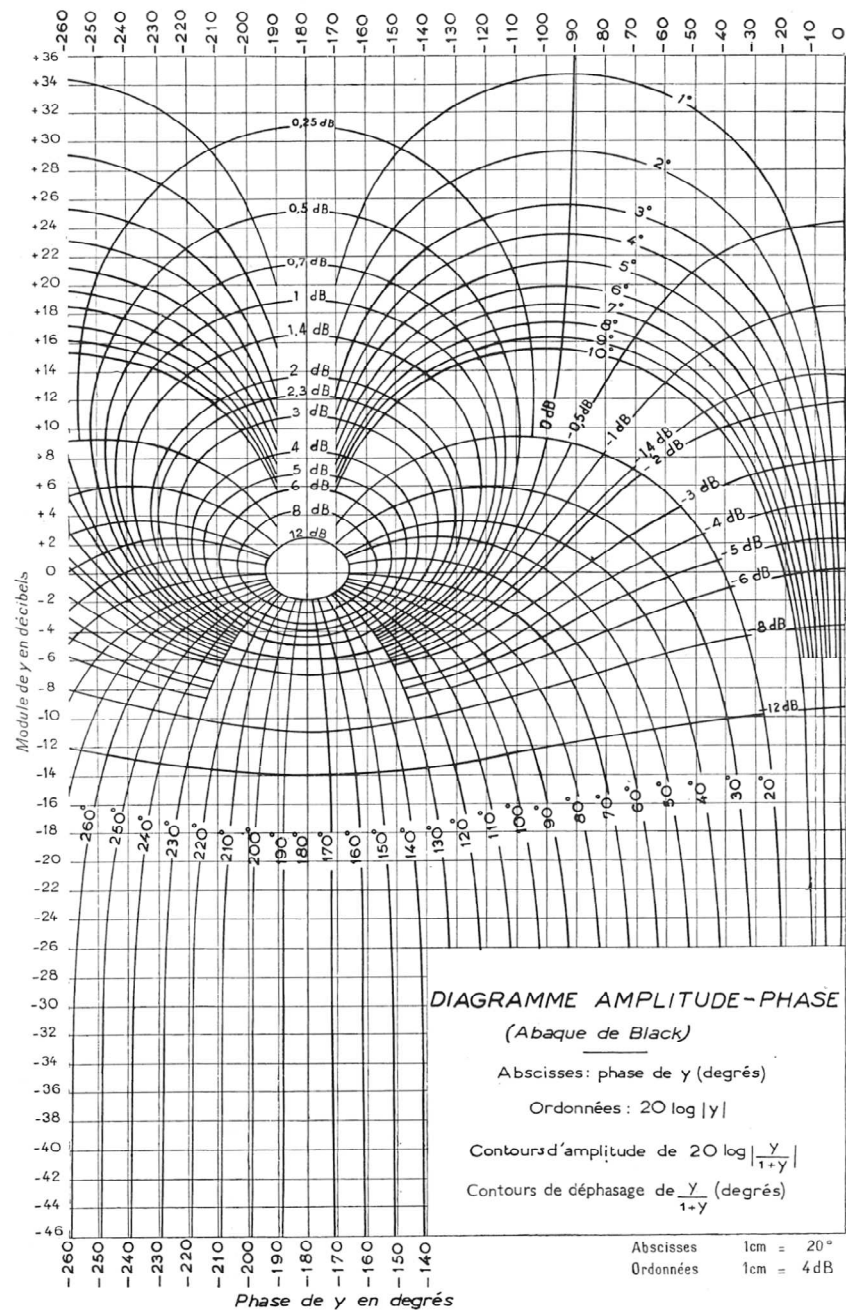


Figure59. Abaque de Black

Chapitre 5

5 - Analyse des systèmes linéaires types

5.1 - Définition de l'ordre d'un système

Un système est dit du $n^{\text{ème}}$ ordre si l'équation différentielle qui régit ses paramètres est de degré n . Cependant, de nombreux systèmes physiques sont du premier ou du second ordre. Les systèmes plus complexes sont décomposés en plusieurs petits systèmes ou sont assimilés à des systèmes du 1^{er} ou 2nd ordre. Il faut donc bien connaître ces deux types de systèmes.

5.2 - Système du premier ordre

Exercice C-11 : Déterminer la fonction de transfert du système ci-dessous. Calculer la réponse impulsionnelle et la tracer. Calculer la réponse indicielle et la tracer.

Nous prendrons comme valeurs $R=20\ \Omega$ et $C = 0,15\ F$

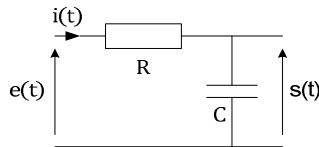


Figure60. Circuit RC

5.2.1 - Définitions

Un système d'entrée $u(t)$ et de sortie $s(t)$ est dit du premier ordre s'il est régi par une équation différentielle du type :

$$T \cdot \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = K \cdot e(t)$$

Après transformation de Laplace, le système du premier ordre est de la forme :

$$G(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{1 + T \cdot p}$$

K est appelé gain statique du système et T est appelé constante de temps du système. Le pôle de la fonction ou racine du dénominateur est $-\frac{1}{T}$.

5.2.2 - Réponses aux différentes entrées

a) Réponse à une impulsion

Dans le cas de la réponse d'un système du premier ordre de fonction de transfert $G(p)$ à une impulsion, nous avons alors $G(p) = \frac{K}{1+T \cdot p}$ et $E(p) = 1$ d'où une valeur de sortie :

$$S(p) = G(p) \cdot E(p) = \frac{K}{1 + T \cdot p}$$

En effectuant la transformée de Laplace inverse nous obtenons $s(t) = \frac{K}{T} \cdot e^{-\frac{t}{T}}$. La réponse impulsionnelle de notre système est représentée par :

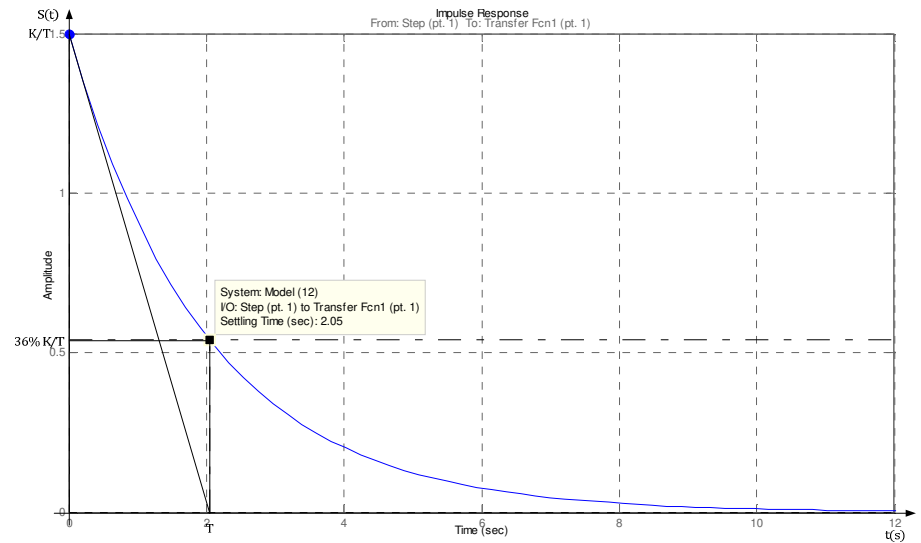


Figure61. Réponse impulsionnelle

T est l'intersection de l'axe des abscisses avec la tangente à la réponse en $t=0$.

b) Réponse à un échelon

Dans le cas de la réponse à un échelon d'amplitude E_0 , nous avons :

$$G(p) = \frac{K}{1 + T \cdot p}$$

$$E(p) = \frac{E_0}{p}$$

Nous pouvons en déduire la sortie :

$$S(p) = G(p) \cdot E(p) = \frac{K \cdot E_0}{p \cdot (1 + T \cdot p)}$$

En effectuant la transformée de Laplace inverse, nous obtenons :

$$s(t) = K \cdot E_0 \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{T}}\right)$$

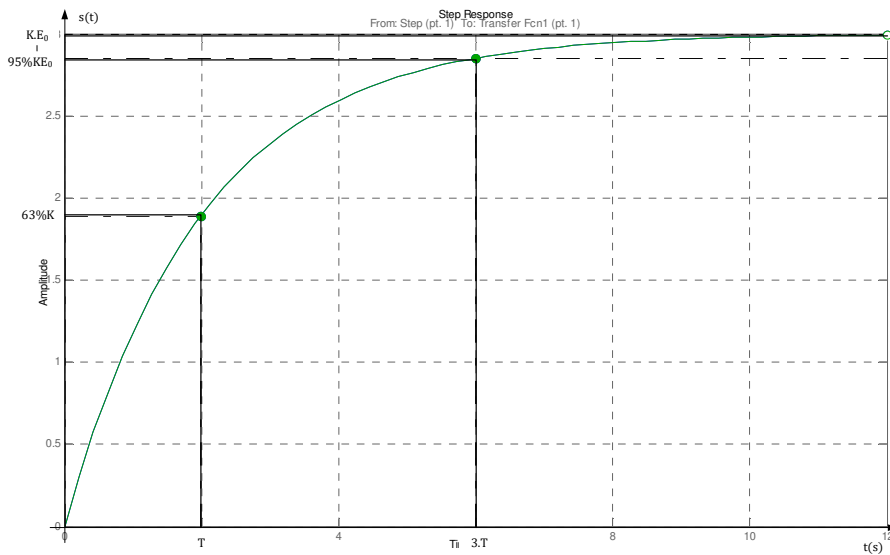


Figure62. Réponse à un échelon d'amplitude E_0

La valeur finale de la sortie vaut alors:

$$s_f = \lim_{t \rightarrow \infty} K \cdot E_0 \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{T}}\right) = K \cdot E_0$$

La constante de temps est donnée par :

$$s(T) = K \cdot E_0 \cdot \left(1 - e^{-\frac{T}{T}}\right) = K \cdot E_0 \cdot \left(1 - \frac{1}{e}\right) \approx 0.63 \cdot K \cdot E_0$$

Le temps de réponse à 5 % (temps au bout duquel le système atteint 95% de sa valeur finale de la sortie) :

$$0.95 \cdot K \cdot E_0 = K \cdot E_0 \cdot \left(1 - e^{-\frac{t_r}{T}}\right) \text{ d'où } t_r = 3 \cdot T$$

c) Réponse à une rampe

Pour la réponse à une rampe, nous avons $G(p) = \frac{K}{1+T \cdot p}$ et $E(p) = \frac{E_0}{p^2}$.

$$\text{D'où : } S(p) = G(p) \cdot E(p) = \frac{K}{p^2 \cdot (1+T \cdot p)} = K \cdot \left(\frac{1}{p^2} - \frac{T}{p} + \frac{T^2}{1+T \cdot p}\right)$$

En effectuant la transformée de Laplace inverse nous obtenons :

$$s(t) = K \cdot \left(t - T + T \cdot e^{-\frac{t}{T}}\right)$$

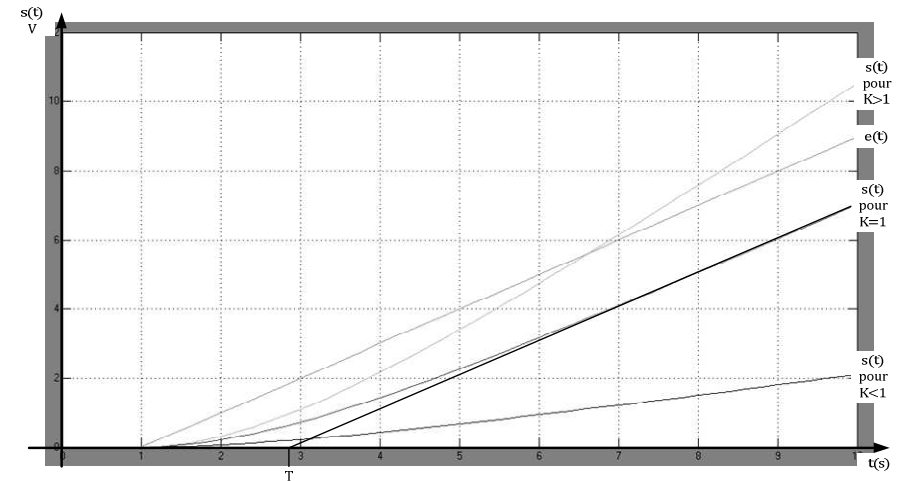


Figure63. Réponse en vitesse

d) Réponses harmoniques

A partir du calcul du gain et de la phase du système du premier ordre, nous allons déterminer les différentes représentations de la réponse harmonique. Nous remplaçons $p \Rightarrow j\omega$.

$$G(j\omega) = \frac{K}{1 + T \cdot j \cdot \omega}$$

$$G(\omega) = \frac{K}{\sqrt{1 + T^2 \cdot \omega^2}}$$

$$\varphi(\omega) = -\arctan(T \cdot \omega) \text{ en radians}$$

- Lieu de NYQUIST

Le lieu de transfert d'un premier ordre est entièrement contenu dans le "premier quadrant" (espace des phases compris entre 0 et $-\pi/2$) et est formé d'un demi-cercle.

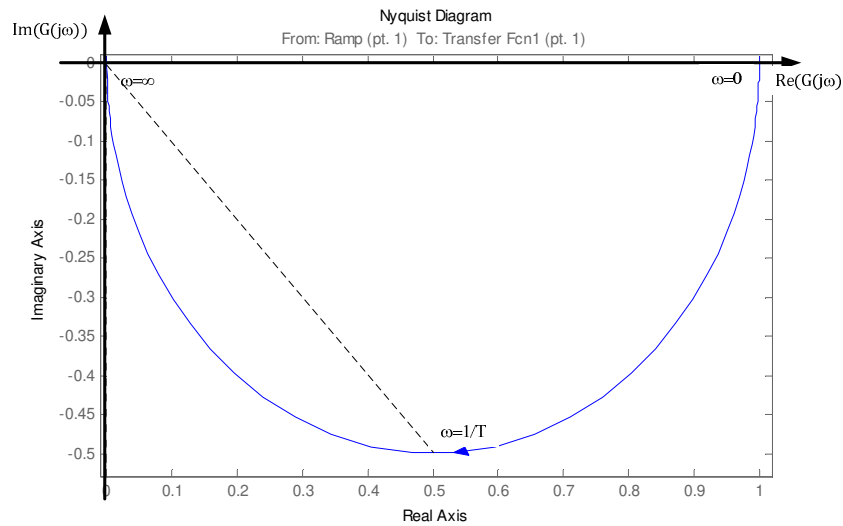


Figure64. Lieu de Nyquist

- Lieu de BODE

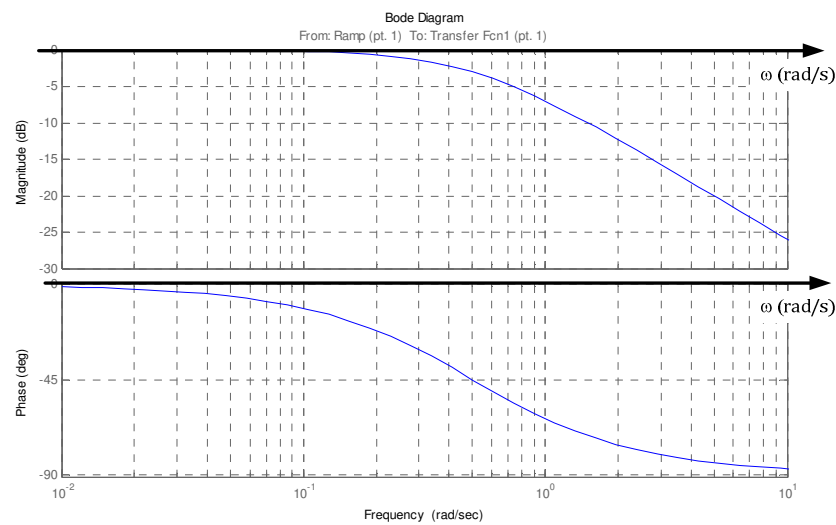


Figure65. Lieu de Bode

- Lieu de BLACK

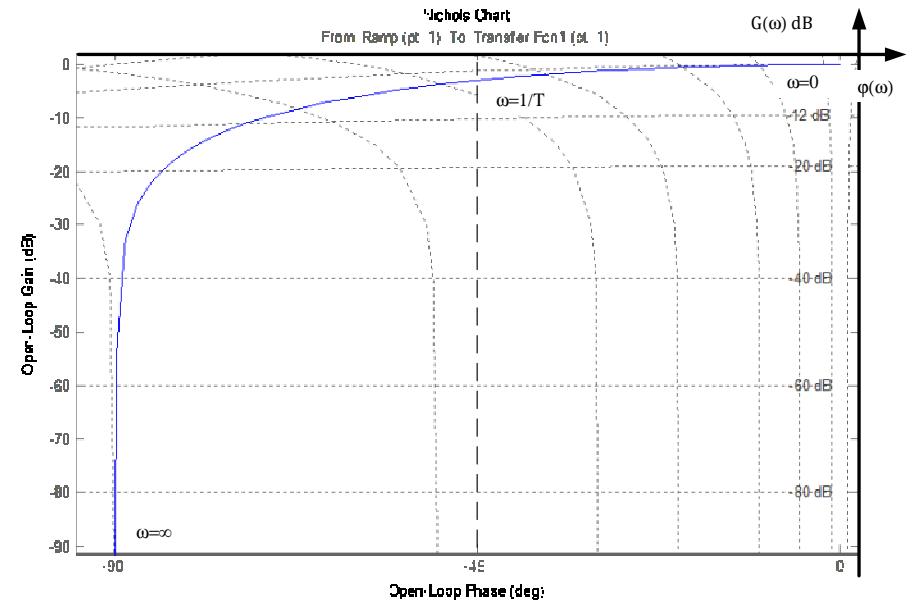


Figure66. Lieu de Black-Nichols

5.3 - Système du second ordre

Exercice C-12 : Déterminer la fonction de transfert du système ci-dessous où $f(t)$ est l'entrée et $x(t)$ la sortie. Déterminer également la réponse indicielle de ce système. Nous prendrons comme valeurs $m=100g$, $k=2 N/m$ et $c=4 kg/s$

$$m \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + c \frac{dx(t)}{dt} + kx(t) = f(t)$$

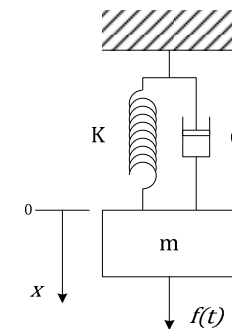


Figure67. Système masse-ressort amorti

5.3.1 – Définitions

Un système d'entrée $e(t)$ et de sortie $s(t)$ est dit du second ordre s'il est régi par une équation différentielle du type :

$$b_2 \cdot \frac{d^2 s(t)}{dt^2} + b_1 \cdot \frac{ds(t)}{dt} + b_0 \cdot s(t) = a_0 \cdot e(t)$$

En appliquant la transformée de Laplace, nous obtenons :

$$\frac{S(p)}{E(p)} = \frac{a_0}{b_2 \cdot p^2 + b_1 \cdot p + b_0} = \frac{\frac{a_0}{b_0}}{\frac{b_2}{b_0} \cdot p^2 + \frac{b_1}{b_0} \cdot p + 1}$$

La forme généralisée des systèmes du second ordre est donc :

$$\frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{\frac{1}{\omega_0^2} \cdot p^2 + \frac{2\xi}{\omega_0} \cdot p + 1}$$

Où :

- K est appelé le gain statique,
- ω_0 est la pulsation propre non amortie ou pulsation naturelle,
- ξ est le facteur d'amortissement du système.

Exemple:

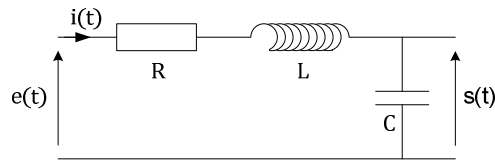


Figure68. Circuit RLC

$$e(t) = RC \frac{ds(t)}{dt} + LC \frac{d^2 s(t)}{dt^2} + s(t)$$

Et dans ce cas :

$$G(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{\frac{1}{LC}}{p^2 + \frac{R}{C} \cdot p + \frac{1}{LC}} = \frac{1}{L \cdot C \cdot p^2 + RL \cdot p + 1}$$

Donc :

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}}$$

$$\xi = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{L}{C}} \text{ et } K = 1$$

5.3.2 – Réponse indicielle

L'analyse de la réponse à un échelon ($E(p) = \frac{E_0}{p}$) repose sur la valeur de ξ , comme pour l'analyse fréquentielle (que nous verrons par la suite). Il faut donc, dans le cas de la réponse à un échelon, considérer le cas où $\xi > 1$, puis $\xi = 1$ et enfin $\xi < 1$.

a) Amortissement $\xi > 1$

Nous avons une réponse apériodique (2 pôles réels et 2 constantes de temps). Dans ce cas, la fonction de transfert du deuxième ordre peut se mettre sous la forme :

$$G(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{\frac{1}{\omega_0^2} \cdot p^2 + \frac{2\xi}{\omega_0} \cdot p + 1} = \frac{K}{(1 + T_1 \cdot p) \cdot (1 + T_2 \cdot p)}$$

Nous en déduisons, par transformée de Laplace inverse :

$$s(t) = K \cdot E_0 \cdot \left(1 + \frac{T_1}{T_2 - T_1} \cdot e^{-\frac{t}{T_1}} - \frac{T_2}{T_2 - T_1} \cdot e^{-\frac{t}{T_2}} \right)$$

La valeur finale de cette réponse apériodique est :

$$s_f = \lim_{t \rightarrow \infty} s(t) = K \cdot E_0.$$

Nous en déduisons la courbe ci-dessous :

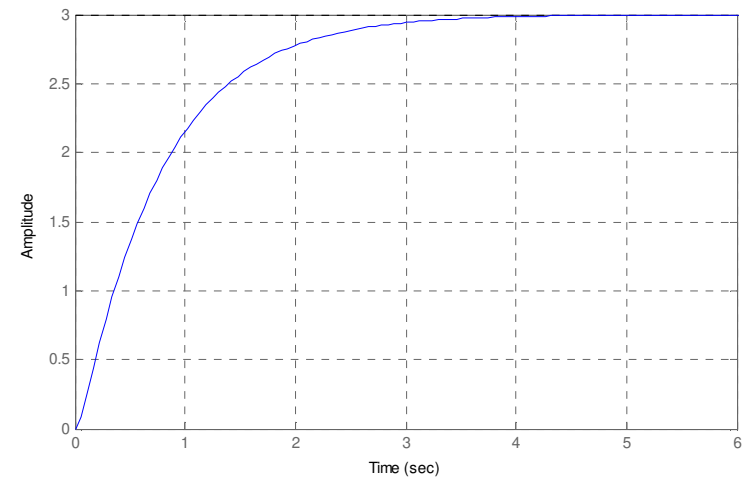


Figure69. Réponse indicielle pour $\xi > 1$

b) Amortissement $\xi=1$

Nous obtenons une réponse apériodique critique. La valeur finale de cette réponse apériodique critique est :

$$s_f = \lim_{t \rightarrow \infty} s(t) = K \cdot E_0.$$

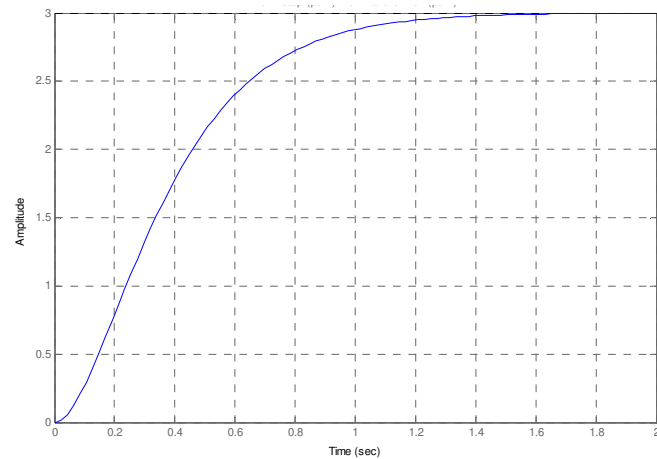


Figure70. Réponse indicielle pour $\xi = 1$

c) Amortissement $\xi < 1$

Nous avons une réponse sinusoïdale périodique amortie de pulsation $\omega_p = \omega_0 \cdot \sqrt{1 - \xi^2}$. Les oscillations ont donc une pseudo-période $T_p = \frac{2\pi}{\omega_0 \cdot \sqrt{1 - \xi^2}}$

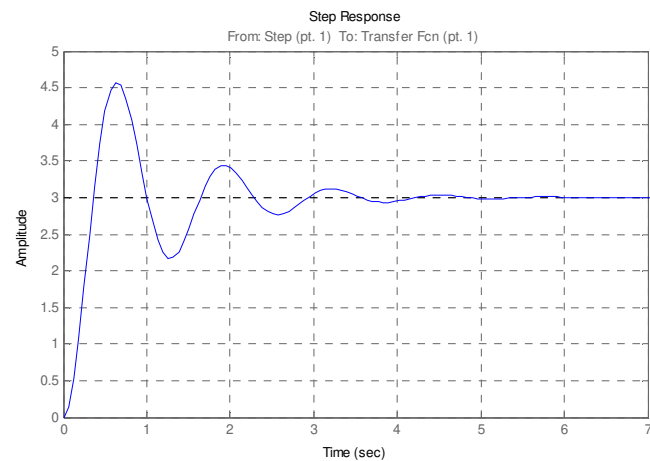


Figure 71 . Réponse indicielle pour $\xi < 1$

La valeur finale de cette réponse sinusoïdale périodique amortie est :

$$s_f = \lim_{t \rightarrow \infty} s(t) = K \cdot E_0.$$

Nous pouvons aussi déterminer le temps de réponse à 5 % :

$$t_r = \frac{3}{\xi \cdot \omega_0}$$

Ceci est aussi valable pour les autres valeurs de ξ .

Dans le cas de réponse périodique amortie, nous pouvons déterminer les différents dépassements de la réponse par rapport à la consigne. Ces dépassements se caractérisent par :

$$\frac{ds(t)}{dt} = 0$$

La valeur du premier dépassement vaut :

$$D_1 = e^{\frac{-\pi \xi}{\sqrt{1 - \xi^2}}}$$

Cette valeur est généralement donnée en pourcentage :

$$D_1(\%) = 100 \cdot e^{\frac{-\pi \xi}{\sqrt{1 - \xi^2}}}$$

L'instant où se produit ce premier dépassement est appelé temps de pic :

$$t_{pic} = \frac{\pi}{\omega_0 \cdot \sqrt{1 - \xi^2}}$$

En résumé, pour un système du 2^{ème} ordre dont le facteur d'amortissement est inférieur à 1, nous pouvons déterminer les grandeurs suivantes :

Gain statique : K

Pulsation propre non amortie ou pulsation naturelle : ω_0

Facteur d'amortissement : ξ

Pseudo-pulsation : $\omega_p = \omega_0 \cdot \sqrt{1 - \xi^2}$

Pseudo-période : $T_p = \frac{2\pi}{\omega_0 \cdot \sqrt{1 - \xi^2}}$

Valeur finale : $s_f = \lim_{t \rightarrow \infty} s(t) = K \cdot E_0$

Temps de réponse : $t_r = \frac{3}{\xi \cdot \omega_0}$

1^{er} dépassement en % : $D_1(\%) = 100 \cdot e^{\frac{-\pi \cdot \xi}{\sqrt{1 - \xi^2}}}$

1^{er} temps de pic : $t_{pic} = \frac{\pi}{\omega_0 \cdot \sqrt{1 - \xi^2}}$

5.3.3 – Étude fréquentielle

Nous avons par définition :

$$G(j \cdot \omega) = \frac{K}{\frac{1}{\omega_0^2} \cdot (j\omega)^2 + \frac{2\xi}{\omega_0} \cdot j\omega + 1}$$

Nous pouvons en déduire la valeur du gain et de la phase :

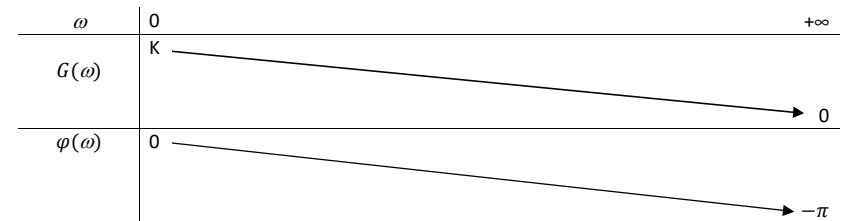
$$G(\omega) = \frac{K}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \frac{4\xi^2 \cdot \omega^2}{\omega_0^2}}}$$

$$\varphi(\omega) = -\arctan\left(\frac{\frac{2\xi \cdot \omega}{\omega_0}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}\right)$$

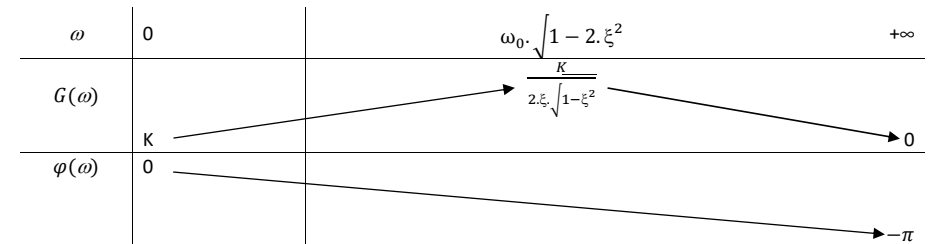
En développant le gain, nous obtenons deux cas possibles :

- $2 \cdot \xi^2 - 1 \geq 0$ d'où $\xi \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$
- $2 \cdot \xi^2 - 1 < 0$ d'où $\xi < \frac{1}{\sqrt{2}}$

Si $\xi \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$:



Si $\xi < \frac{1}{\sqrt{2}}$:



Le terme $\frac{K}{2 \cdot \xi \cdot \sqrt{1 - \xi^2}}$ correspond au coefficient de surtension.

a) Lieu de NYQUIST

Puisque nous avons un système du 2nd ordre et de classe 0, le lieu sera situé dans le 1^{er} et le 2nd quadrant.

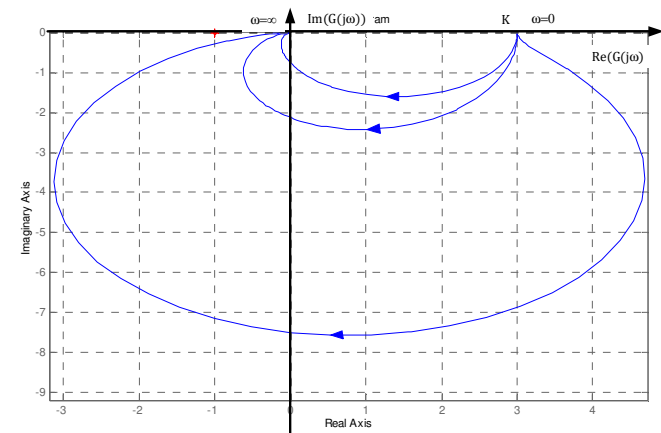


Figure 72 . Lieu de Nyquist

Avec de bas en haut : $\xi < \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\xi = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et $\xi > \frac{1}{\sqrt{2}}$

b) Lieu de BODE

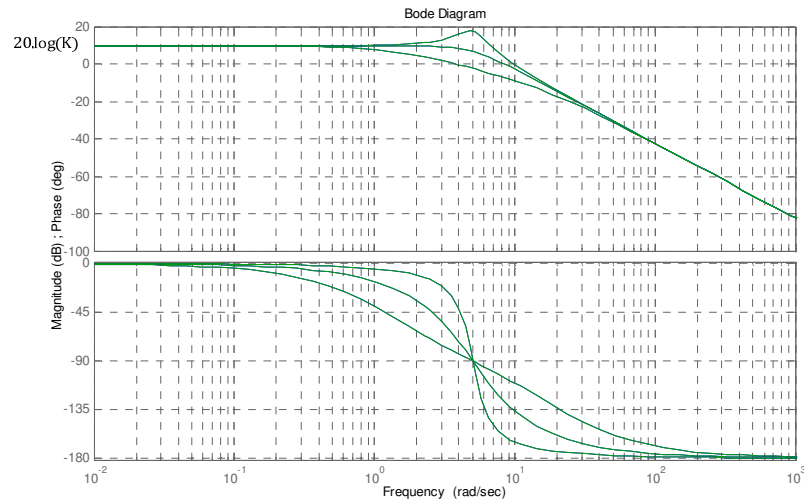


Figure 73 . Lieu de Bode

Avec de bas en haut : $\xi > \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\xi = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et $\xi < \frac{1}{\sqrt{2}}$

b) Lieu de BLACK

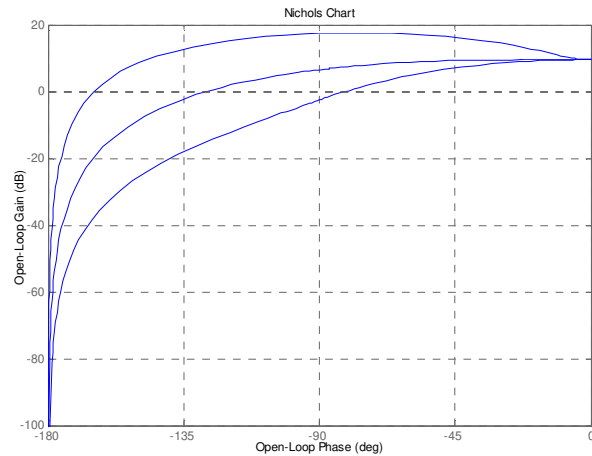


Figure 74 . Lieu de Black

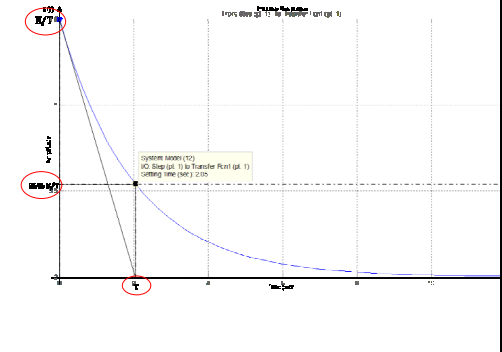
Avec de bas en haut : $\xi > \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\xi = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et $\xi < \frac{1}{\sqrt{2}}$

5.4 - Résumé

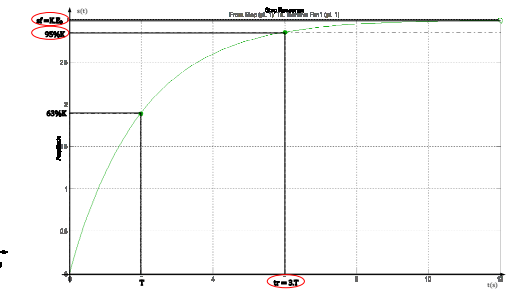
Système du 1^{er} ordre $G(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{1+T.p}$

- Réponse temporelle

Réponse impulsionnelle : $S(p) = G(p) \cdot E(p) = \frac{K}{1+T.p}$

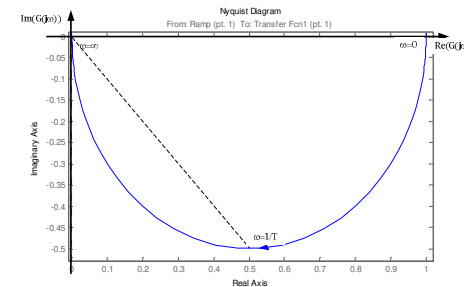


Réponse à un échelon d'amplitude E_0 : $S(p) = G(p) \cdot E(p) = \frac{K.E_0}{p.(1+T.p)}$

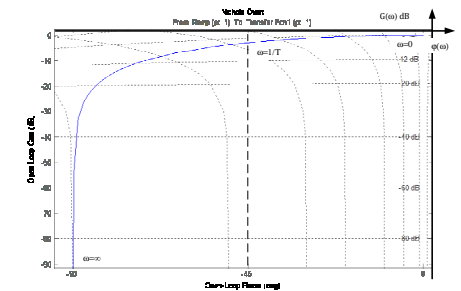


- Réponse fréquentielle $G(j\omega) = \frac{K}{1+T.j.\omega}$

Lieu de Nyquist



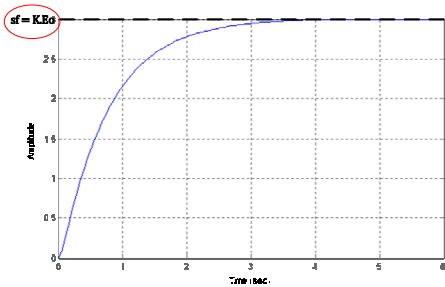
Lieu de BLACK



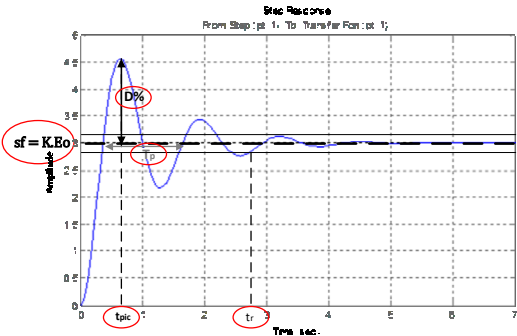
Système du 2^{ème} ordre $G(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{\frac{1}{\omega_0^2} p^2 + \frac{2\xi}{\omega_0} p + 1}$

- Réponse à un échelon d'amplitude E_0

$\xi \geq 1$ Réponse apériodique (critique si $\xi = 1$)

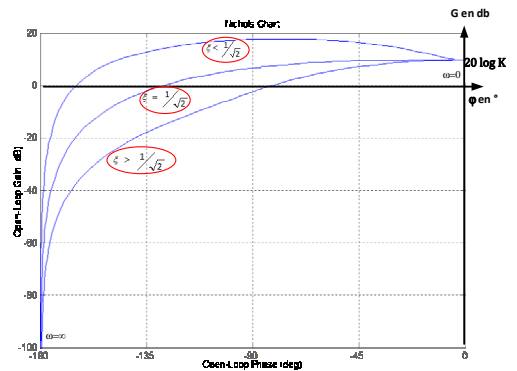
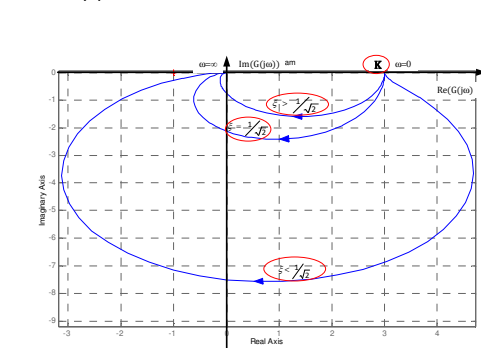


$\xi < 1$ Réponse oscillatoire amortie



- Réponse fréquentielle $G(j.\omega) = \frac{K}{\frac{1}{\omega_0^2} (j\omega)^2 + \frac{2\xi}{\omega_0} j\omega + 1}$

Lieu de Nyquist



Lieu de Black

Chapitre 6

6 -Stabilité des systèmes asservis

6.1 - Définitions

La stabilité est la propriété principale exigée pour un système asservi. En effet, si ce dernier est instable, il est inutilisable. Dans de nombreux cas, le système est stable en boucle ouverte mais il ne l'est plus en boucle fermée. Il est donc indispensable de bien connaître les conditions d'une bonne stabilité.

- **Définition n°1** : un système est dit stable si lorsqu'on lui applique une entrée limitée, sa sortie est également limitée.
- **Définition n°2** : nous indiquons qu'un système est stable quand il tend à revenir à un état permanent après une perturbation. Il est instable s'il tend à s'en éloigner vers +/- l'infini.
- **Définition n° 3** : un système est stable si sa réponse impulsionnelle tend vers une constante lorsque $t \rightarrow \infty$.

6.2 - Critère des pôles

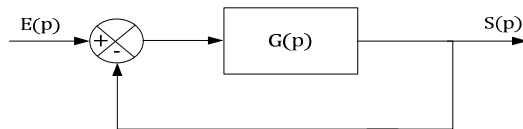


Figure75. Stabilité du système G(p)

Dans un système linéaire, G(p) est de la forme :

$$G(p) = \frac{\sum_{j=0}^m b_j \cdot p^j}{\sum_{i=0}^n a_i \cdot p^i}$$

Nous calculons la fonction de transfert du système en boucle fermée que nous mettons sous la forme :

$$\frac{N(p)}{D(p)} = \sum_{i=1}^n \frac{A_i}{(p - p_i)}$$

où p_i sont les pôles de G(p) soit les racines (les zéros) du dénominateur $D(p)$ avec $n > m$. La stabilité du système dépend de la nature des pôles de la fonction de transfert en boucle fermée.

Un système en boucle fermée de fonction de transfert de la forme $\frac{N(p)}{D(p)}$ est stable si tous les pôles de la fonction de transfert sont à partie réelle strictement négative.

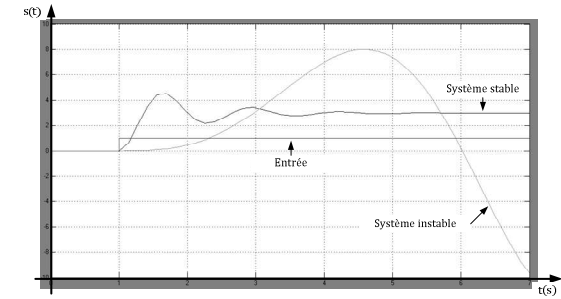


Figure 76 . Différence entre un système stable et un système instable sur une réponse temporelle

Théorème : un système linéaire en boucle fermée invariant est stable si tous ses pôles sont à partie réelle strictement négative.

Exercice C-13 : Étudier la stabilité du système ci-dessous en fonction de K (K>0) :

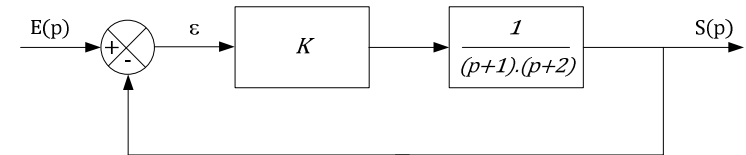


Figure77. Schéma bloc du système de l'exercice C-11

6.3 - Critère algébrique de Routh-Hurwitz

Le critère de Routh-Hurwitz permet la détermination de la stabilité du système sans connaître la valeur des pôles. Pour l'énoncé de ce critère, la fonction $G(p) = \frac{N(p)}{D(p)}$ correspond à la fonction de transfert en boucle fermée de notre système.

Soit le polynôme $D(p)$ écrit sous la forme :

$$D(p) = a_n \cdot p^n + a_{n-1} \cdot p^{n-1} + a_{n-2} \cdot p^{n-2} + \dots + a_2 \cdot p^2 + a_1 \cdot p + a_0$$

Pour appliquer le critère algébrique de Routh-Hurwitz, $D(p)$ doit répondre aux **conditions nécessaires** suivantes :

- tous les a_i existent ($\neq 0$)
- tous les a_i sont de même signe.

Nous pouvons alors écrire le tableau de Routh qui nous permet de déterminer les conditions **nécessaires et suffisantes** à la stabilité du système.

a_n	a_{n-2}	a_{n-4}	...	0
a_{n-1}	a_{n-3}	a_{n-5}	...	0
A_1	A_2	A_3	...	0
B_1	B_2	B_3	...	0
\vdots				
0				

Nous calculons les termes :

$$A_1 = \frac{a_{n-1} \cdot a_{n-2} - a_n \cdot a_{n-3}}{a_{n-1}}, A_2 = \frac{a_{n-1} \cdot a_{n-4} - a_n \cdot a_{n-5}}{a_{n-1}}, \dots$$

$$B_1 = \frac{A_1 \cdot a_{n-3} - a_{n-1} \cdot A_2}{A_1}, B_2 = \frac{A_1 \cdot a_{n-5} - a_{n-1} \cdot A_3}{A_1}, \dots$$

Jusqu'à l'obtention d'un 0 sur la première colonne.

Les conditions nécessaires et suffisantes pour la stabilité du système sont données par l'analyse de la première colonne : le système est stable si et seulement si tous les éléments de la première colonne sont de même signe.

Le nombre de changement de signe dans cette colonne donne le nombre de pôles à partie réelle positive.

Exercice C-14: Soit $G(p)$ une fonction de transfert en boucle fermée. Etudiez la stabilité du système décrit par cette fonction de transfert

$$G(p) = \frac{p+1}{p^5 + 4 \cdot p^4 + 3 \cdot p^3 + 2 \cdot p^2 + p + 2}$$

6.4 - Critère de Nyquist simplifié ou critère du revers

Ce critère ne s'applique que pour les systèmes asservis à retour unitaire. Le critère conclut à la stabilité de la boucle fermée par examen du lieu de Nyquist de la boucle ouverte. Comme sur la figure ci-dessous, nous pouvons toujours ramener un système asservi à un système asservi à retour unitaire.

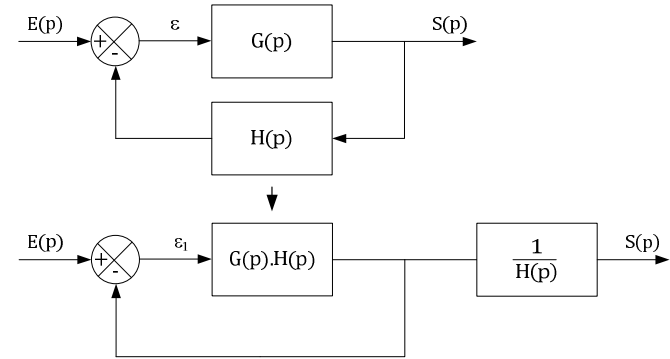


Figure 78 . Passage d'un système asservi à un système asservi à retour unitaire

6.4.1 – Énoncé du critère de Nyquist simplifié

Un système asservi linéaire est stable si, en décrivant le lieu de transfert de Nyquist en boucle ouverte dans le sens des fréquences croissantes, nous laissons le point dit "critique" $(-1, 0)$ à gauche. En effet, il a été démontré que si nous laissons le point $(-1, 0)$ à gauche, les pôles de $G(p)$ sont à partie réelle négative, il y a donc stabilité.

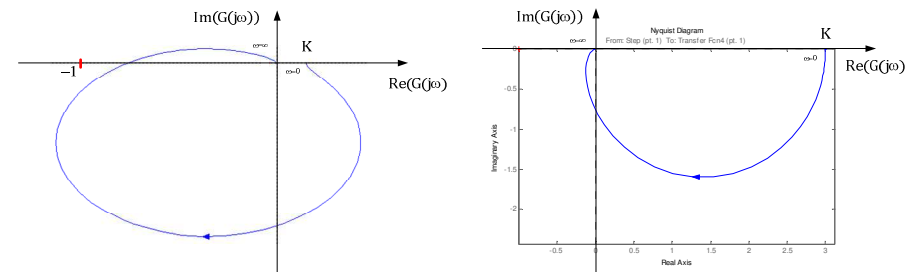


Figure 79 . Lieu de Nyquist d'un système stable

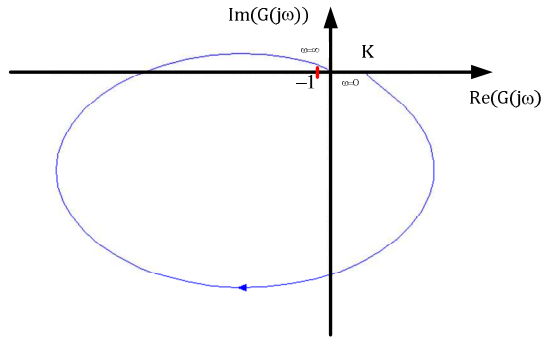


Figure 80 . Lieu de Nyquist d'un système instable

Etudier la stabilité d'un système asservi (à retour unitaire) par analyse fréquentielle consiste donc à étudier le module de la fonction transfert en boucle ouverte de ce système à la pulsation provoquant un déphasage de $-\pi$. Ainsi, ce système asservi est donc stable si le module de la fonction de transfert en boucle ouverte à la pulsation provoquant un déphasage de $-\pi$ est inférieur à 1 soit :

$$H_{BO}(\omega_\pi) \leq 1 \text{ avec } \omega_\pi \text{ tel que } \varphi_{H_{BO}}(\omega_\pi) = -\pi.$$

6.4.2 – Application au plan de Bode

Si dans le plan de Nyquist le point critique est $(-1, 0)$, il correspond à $G(\omega) = 1$ et $\varphi(\omega) = -180^\circ$. Cela nous donne pour : $G(\omega)_{dB} = 20 \cdot \log(1) = 0_{dB}$

Le système sera donc stable si, pour la pulsation ω_π (qui correspond à $\varphi(\omega) = -180^\circ$), la courbe d'amplitude passe en dessous du niveau 0 dB.

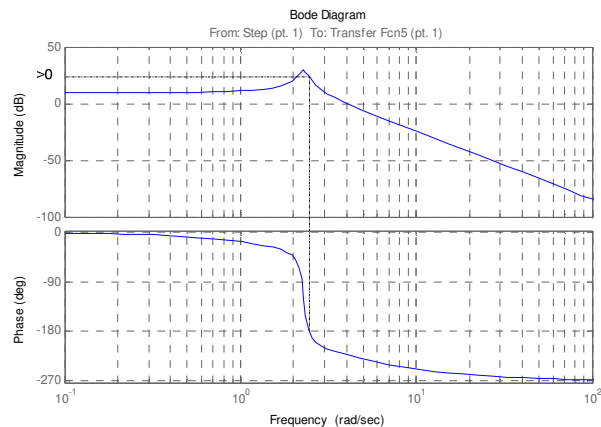


Figure 81 . Lieu de Bode d'un système instable

6.4.3 – Application au plan de Black

Le point critique $(-1, 0)$ du lieu de Nyquist est l'équivalent du point 0dB, -180° . D'où le critère du revers appliqué au plan de Black : un système asservi linéaire est stable si, en décrivant le lieu de transfert de Black en boucle ouverte dans le sens des fréquences croissantes, nous laissons le point critique (0dB, -180°) à **droite**.

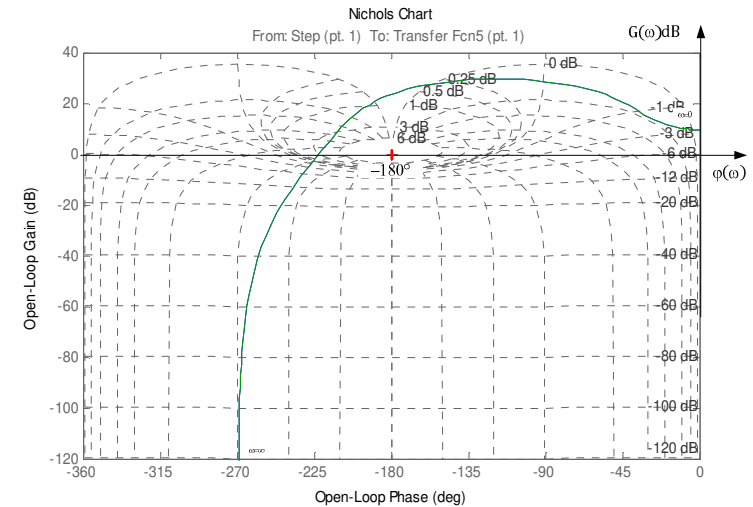


Figure 82 . Lieu de Black d'un système instable

6.5 - Marge de phase, marge de gain et robustesse d'un système

La stabilité est définie mathématiquement mais cette stabilité mathématique n'est pas forcément synonyme d'un bon comportement du système. En effet, il faut que la stabilité soit "suffisante". Un système sera d'autant plus stable que son lieu de transfert en boucle ouverte sera éloigné du point critique. Si ce dernier est trop proche de ce point, une faible modification du gain ou de la phase peuvent déstabiliser ce système.

6.5.1 – Définitions

a) Marge de gain

C'est le gain minimum qu'il faut ajouter pour rendre le système instable, c'est à dire pour passer au point $[-1,0]$. La marge de gain nous montre de quelle valeur nous pouvons augmenter le gain du système asservi en boucle ouverte pour atteindre la limite de stabilité. La marge de gain est une garantie que la stabilité persistera malgré des variations imprévues du gain en B.O. Nous exprimerons la marge de gain en décibels.

$$Mg = -20 \cdot \log(H_{BO}(\omega_\pi)) \text{ avec la pulsation } \omega_\pi \text{ telle que } \varphi_{H_{BO}}(\omega_\pi) = -\pi$$

b) Marge de phase

C'est la phase minimale que nous pouvons ajouter pour rendre le système instable, c'est à dire la phase qu'il faut ajouter pour passer au point $(-1,0)$. La marge de phase est une garantie que la stabilité persistera malgré l'existence de retards parasites dont nous n'avons pas tenu compte dans le réglage de l'asservissement. Nous exprimerons la marge de phase en degrés.

$$M\varphi = 180^\circ + \varphi_{H_{BO}}(\omega_1) \text{ avec la pulsation } \omega_1 \text{ telle que } H_{BO}(\omega_1) = 1$$

c) Robustesse d'un système

La robustesse d'un système bouclé est la capacité de celui-ci de rester stable (voir de conserver des performances suffisantes) en présence d'erreurs ou de perturbations.

Un système peut être stable d'un point de vue "critères de stabilité" mais pas suffisamment stable pour être robuste. Nous allons donc considérer qu'un système en boucle fermée est robuste si celui-ci possède en boucle ouverte une marge de gain et une marge de phase suffisante soit $M_g \geq 10\text{dB}$ et $M_\varphi \geq 45^\circ$.

6.5.2 – Lectures graphiques de ces marges

a) Lieu de Black

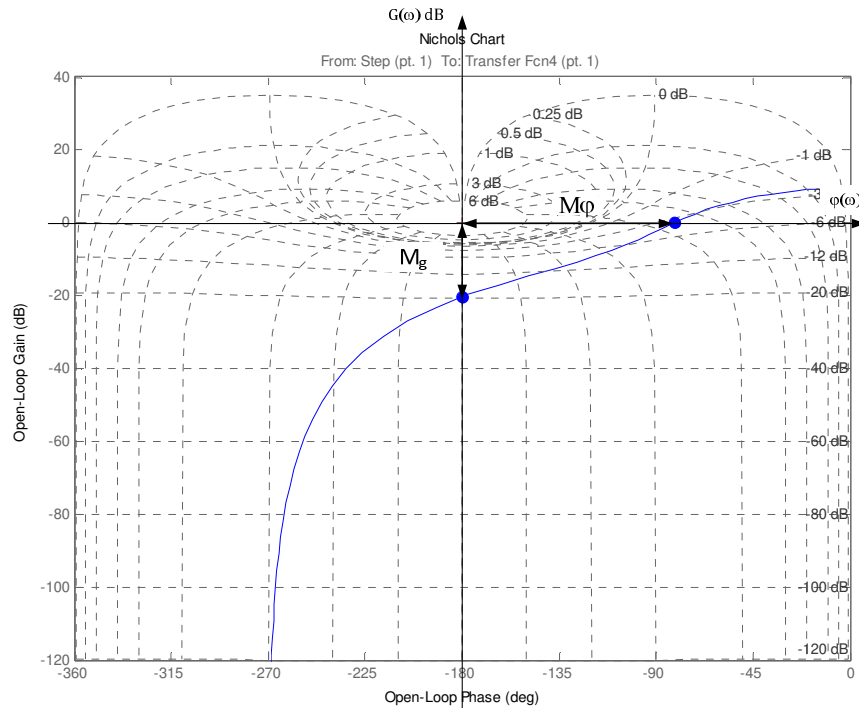


Figure 83 . Marge de gain et marge de phase sur le lieu de Black

Dans l'exemple précédent, nous avons : $M_g = 20.3\text{ dB}$ et $M_\varphi = 98.2^\circ$, donc le système représenté est robuste.

b) Lieu de Bode

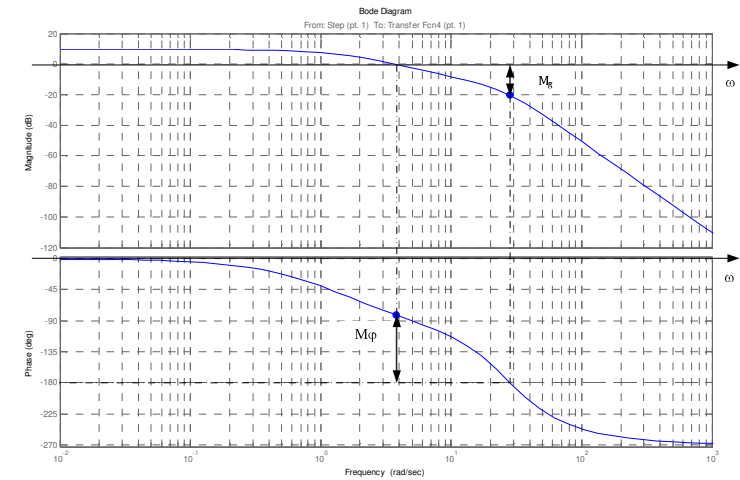


Figure 84 . Marge de gain et marge de phase sur le lieu de Bode

c) Lieu de Nyquist

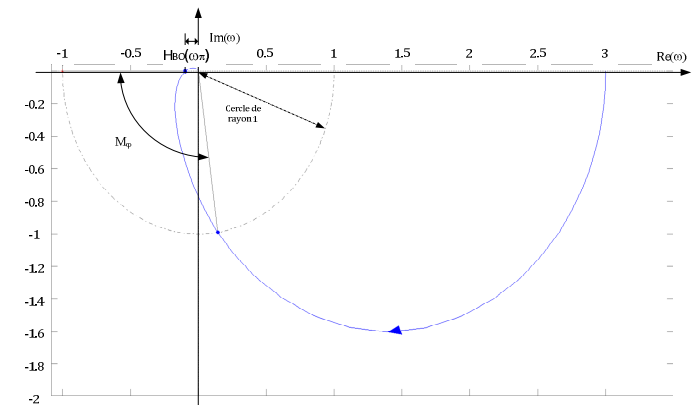


Figure 85 . Marge de gain et marge de phase sur le lieu de Nyquist

Avec $M_g = -20. \log (H_{BO}(\omega_\pi))$

Exercice C-15 : Calculer la marge de gain et la marge de phase pour le système suivant, s'il est stable :

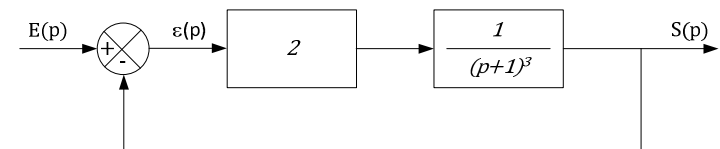


Figure 86. Schéma bloc du système de l'exercice C-13

Chapitre 7

7 - Identification des processus

7.1 - Introduction

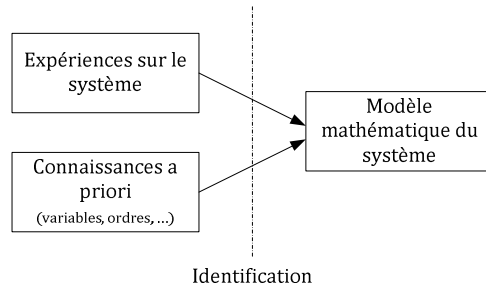


Figure 87 . Identification

Jusqu'à maintenant, nous connaissons la fonction de transfert de notre système. Cependant, en pratique, cette fonction est rarement connue. L'identification consiste alors à mettre en œuvre des méthodes permettant de définir la fonction de transfert du système à identifier par expérimentations.

Elle se fait alors en plusieurs phases :

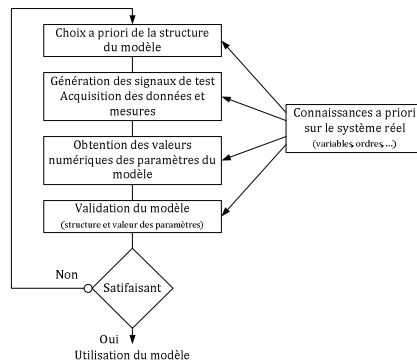


Figure 88 . Phases de l'identification

7.2 - Les méthodes graphiques

Les méthodes graphiques ont l'inconvénient d'être imprécises. Cependant étant donné que les modèles proposés ne correspondent pas exactement à la complexité des processus, ces méthodes sont valables. Elles consistent à étudier la réponse indicielle ou impulsionnelle d'un système inconnu pour déterminer ses paramètres.

Nous pouvons donc envisager deux cas :

- Le système possède une intégration (=réponse variable à une entrée constante). C'est un système dit **évolutif**.
- Le système ne possède pas d'intégration (=réponse constante à une entrée constante). C'est un système dit **non évolutif**.

Nous pouvons alors réaliser un essai soit en boucle ouverte, soit en boucle fermée. La démarche générale d'identification d'un système à partir de la réponse indicielle est la suivante :

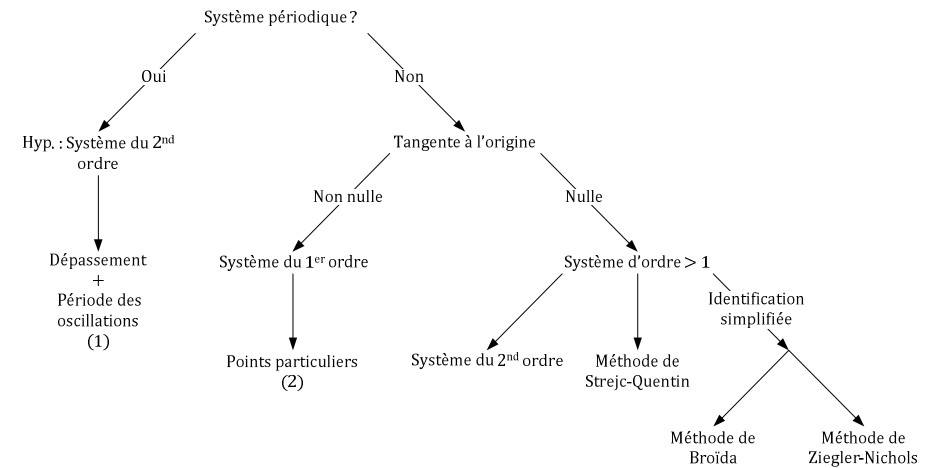


Figure 89 . Démarche générale de l'identification

7.3 - Identification d'un système dont la réponse possède des oscillations

Si nous nous trouvons dans le cas (1) de la figure ci-dessus, à partir de l'observation des oscillations de la réponse indicielle nous pouvons calculer :

- ξ à partir du premier dépassement :

$$D_1 = e^{\frac{-\pi \xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$$

- ω_0 à partir de la pseudo-période des oscillations

$$T_p = \frac{2\pi}{\omega_0 \sqrt{1-\xi^2}}$$

De l'écriture généralisée d'un système du deuxième ordre, nous pouvons en déduire l'écriture de la fonction de transfert du système. Il "suffira" ensuite de valider les valeurs obtenues.

7.4 - Identification des systèmes stables du premier ordre

Nous étudions la réponse du système à un échelon.

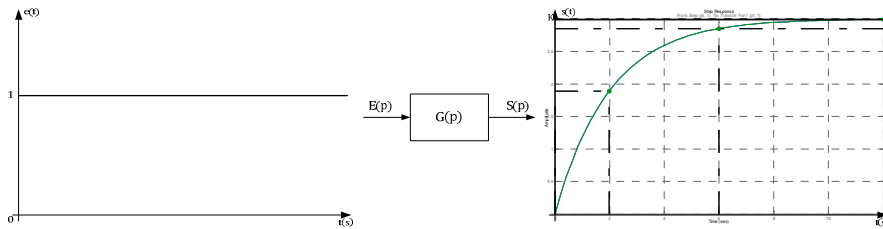


Figure 90 . Identification d'un système du premier ordre

Suivant la forme de la réponse indicielle obtenue en sortie, nous recherchons le modèle qui s'en approche le plus.

7.4.1 - Modèle du premier ordre

Nous injectons dans le système en boucle ouverte un échelon d'amplitude E_0 et nous relevons la sortie ci-dessous.

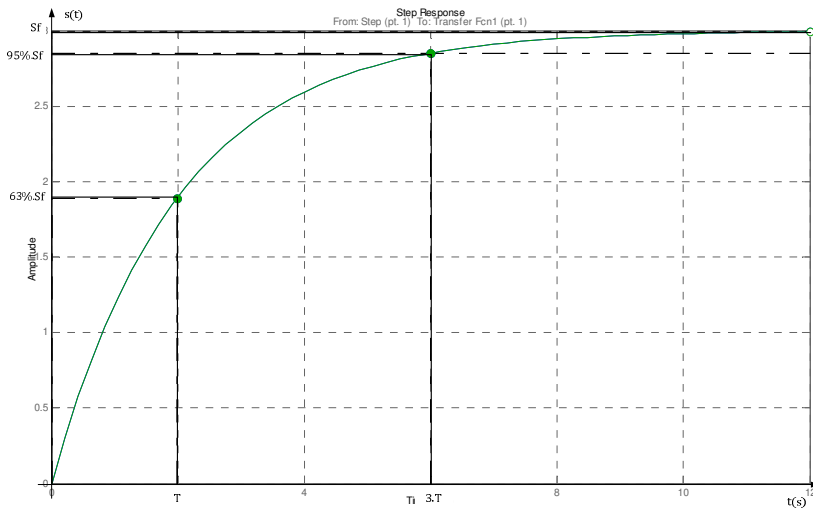


Figure 91 . Réponse d'un système du premier ordre

A partir de cette réponse, nous prenons comme modèle de fonction de transfert de ce système, l'expression :

$$G(p) = \frac{K}{1 + T \cdot p}$$

Or, comme $e(p) = \frac{E_0}{p}$, nous obtenons $S(p) = \frac{E_0}{p} \cdot \frac{K}{1 + T \cdot p}$.

De la transformée de Laplace inverse, nous en déduisons :

$$s(t) = K \cdot E_0 \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{T}}\right)$$

Nous pouvons alors déterminer les valeurs du modèle :

- Gain : $K = \frac{Sf}{E_0}$
- La constante de temps peut se calculer à partir de : $s(T) = K \cdot E_0 \cdot \left(1 - e^{-\frac{T}{T}}\right) = K \cdot E_0 \cdot \left(1 - \frac{1}{e}\right) = 0,63 \cdot K \cdot E_0 = 0,63 \cdot Sf$ ou bien en utilisant : $s(3 \cdot T) = 0,95 \cdot Sf$

7.4.2 - Modèle de Broïda

Si la réponse à un échelon du système en boucle ouverte se présente comme sur la figure ci-dessous, nous devons prendre le modèle suivant : $G(p) = \frac{K \cdot e^{-\tau \cdot p}}{1 + T \cdot p}$.

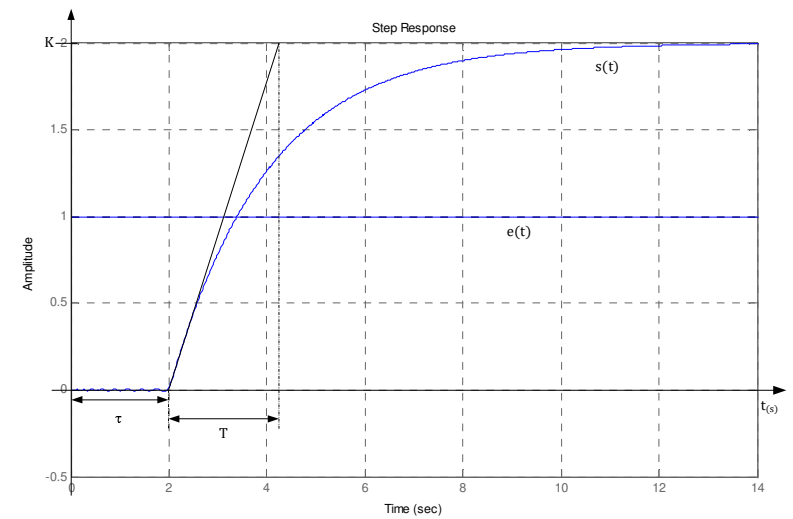


Figure 92 . Réponse d'un système du premier ordre avec retard pur

Ce modèle permet de déterminer le gain statique K , la constante de temps T ainsi que le retard pur τ global.

Cependant, de manière expérimentale, la réponse à un échelon de notre système en boucle ouverte sera plutôt une réponse qui ressemblera à :

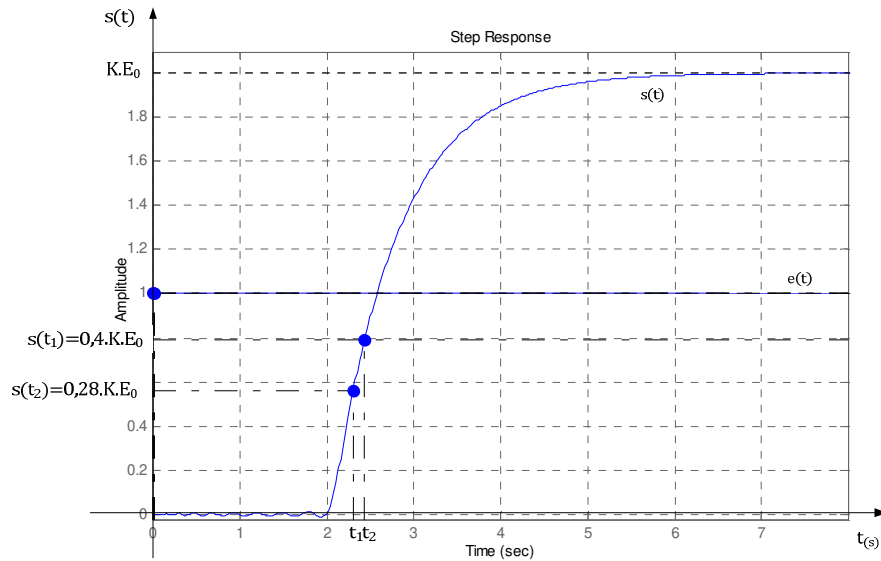


Figure 93 . Réponse d'un système avec retard pur

Nous injectons dans le système en boucle ouverte un échelon d'amplitude E_0 et nous relevons la sortie ci-dessus.

Nous calculons alors les deux temps t_1 et t_2 à partir des autres points particuliers donnés par Broïda :

$$s(t_1) = 0,28. K. E_0$$

$$s(t_2) = 0,4. K. E_0$$

Nous en déduisons les valeurs :

$$T = 5,5. (t_2 - t_1)$$

$$\tau = 2,8. t_1 - 1,8. t_2$$

La valeur de K se calcule de la même manière que précédemment.

7.5 - Identification des systèmes non évolutifs d'ordre supérieur : méthode de Strejc-Quentin

Dans le cadre de système ayant un ordre supérieur à 1 mais ne présentant pas d'oscillation, nous identifions ces systèmes par un modèle du type :

$$G(p) = \frac{K. e^{-\tau.p}}{(1 + T. p)^n}$$

Cette méthode ne s'applique que si la réponse du système est apériodique (pas d'oscillation), d'asymptote horizontale et ne comportant qu'un seul point d'inflexion. Ce modèle est justifié dans le cas d'un système ayant des constantes de temps proches les unes des autres. Pour ce modèle, nous définissons :

- K : gain statique,
- τ : retard pur,
- T : constante de temps du système,
- n : ordre du système.

La réponse du système aura alors la forme suivante :

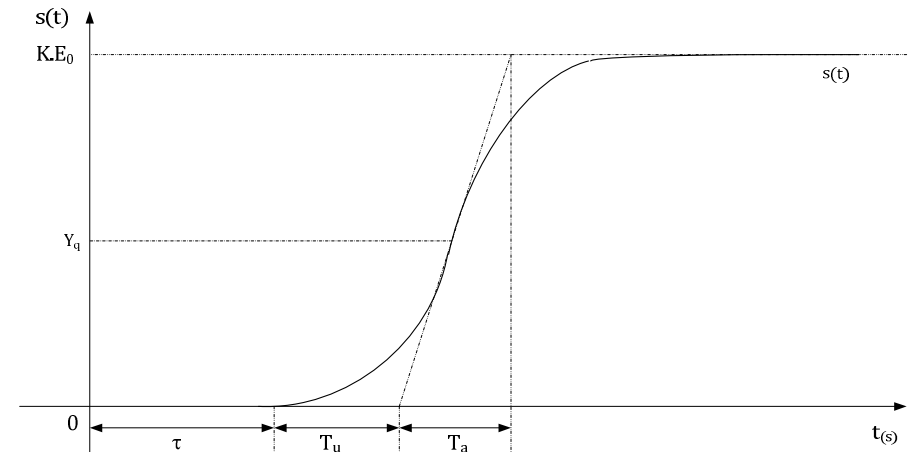


Figure 94 . Réponse d'un système avec retard pur (τ) à un échelon

L'identification d'un processus par la méthode de Strejc-Quentin se fait de la manière suivante :

- Déterminer le gain : $K = \frac{s(+\infty)}{E_0}$,
- Recherche du point d'inflexion Y_q (méthode des tangentes)
- Tracé la tangente en Y_q : cette tangente coupe l'axe de démarrage de $s(t)$ (généralement l'axe des abscisses) et l'asymptote KE_0 comme l'illustre la courbe ci-dessus. Ces deux points déterminent le temps T_a . Le plus grand soin doit être apporté aux tracés amenant à la valeur de T_a .
- Détermination du retard τ : défini entre $t=0$ et l'instant où la sortie $s(t)$ "démarré",
- Le temps T_u est alors défini entre le retard τ et T_a ,
- Avec les valeurs de T_u et T_a , nous calculons le rapport : $\frac{T_u}{T_a}$,
- Du résultat rapporté dans la colonne de droite du tableau ci-dessous, nous déduisons l'ordre n . Pour déterminer la valeur de l'ordre de notre système, dans le cas où nous n'obtenons pas une valeur contenue dans le tableau de la page précédente, nous choisissons la valeur de l'ordre le plus faible.

n	$\frac{T_a}{T}$	$\frac{T'_u}{T}$	$\frac{T_u}{T_a}$
1	1	0	0
2	2.718	0.282	0.104
3	3.695	0.805	0.218
4	4.463	1.425	0.319
5	5.119	2.100	0.410
6	5.7	2.81	0.49
7	6.2	3.55	0.57
8	6.7	4.31	0.64
9	7.2	5.08	0.71
10	7.6	5.87	0.77

- Connaissant l'ordre de notre système et la valeur de T_a déterminer avec la plus grande précision possible, nous pouvons calculer la valeur de T à partir de la première colonne.

La méthode de Strejc-Quentin repose essentiellement sur le calcul et l'élaboration de la tangente au point d'inflexion. Lors de la détermination des paramètres du modèle, il faut donc le déterminer avec la plus grande précision possible.

La colonne $\frac{T_u}{T_a}$ représente le rapport des 2 colonnes précédentes. En pratique, $\frac{T_u}{T_a}$ mesuré est souvent compris entre deux valeurs du tableau. Nous nous plaçons alors sur la valeur de n inférieur du tableau et nous déterminons grâce à la colonne $\frac{T'_u}{T}$ une valeur de T'_u . Nous devons alors prendre cette nouvelle valeur en compte pour rectifier la valeur du retard pur. Dans ce cas : $\tau' = \tau + (T_{u(\text{mesuré})} - T'_{u(\text{théorique})})$ la nouvelle valeur du retard pur. La valeur de $T_u - T'_u$ est alors assimilé à un retard pur.

Finalement, nous obtenons le modèle :

$$G(p) = \frac{K \cdot e^{-\tau' \cdot p}}{(1 + T \cdot p)^n}$$

Ensuite, il reste à valider les valeurs de ce modèle afin que la courbe réalisée par l'essai en boucle ouverte et la courbe théorique se superposent.

Exercice C-16 : Nous mesurons $K = 5$, $T_u = 10.5$ s, $T_a = 30$ s et $\tau = 0$ s. Donner le modèle de $G(p)$.

7.6 - Identification des systèmes évolutifs

7.6.1 - Systèmes de type intégrateur

La fonction de transfert est du type : $G(p) = \frac{K}{p}$.

L'entrée est donnée par : $e(t) = E_0$.

Nous avons donc la sortie de la forme : $s(t) = K \cdot E_0 \cdot t$.

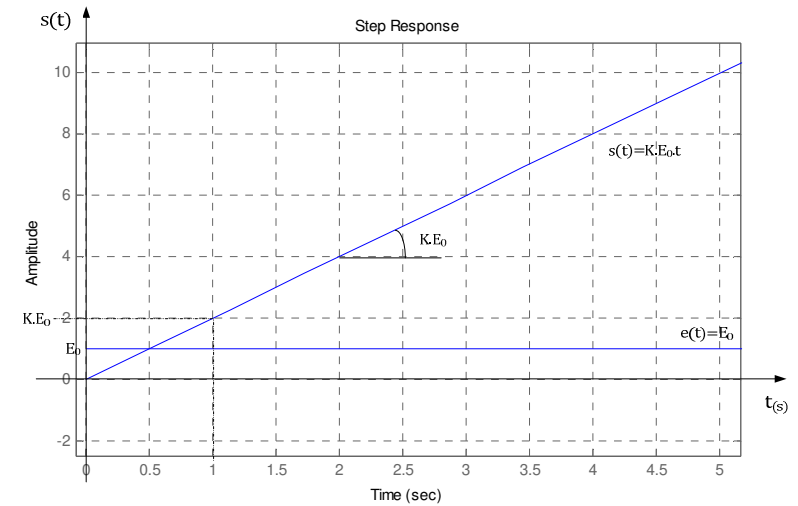


Figure 95 . Réponse indiciale d'un système intégrateur

Nous identifions K en déterminant la pente de la sortie.

7.6.2 - Systèmes de type premier ordre avec intégrateur

Ce sont des systèmes du type : $G(p) = \frac{K}{p \cdot (1 + T \cdot p)}$

La réponse indiciale d'un système de ce type est de la forme :

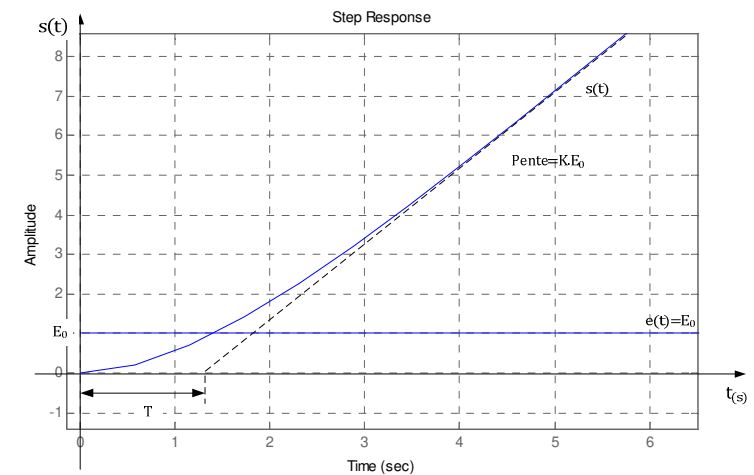


Figure 96 . Réponse indiciale d'un système du premier ordre avec intégrateur

Avec $E(p) = \frac{E_0}{p}$ et $G(p) = \frac{K}{p \cdot (1+T \cdot p)}$, nous avons $S(p) = \frac{K}{p^2 \cdot (1+T \cdot p)}$ et donc $s(t) = K \cdot E_0 \cdot \left(t - T + T \cdot e^{-\frac{t}{T}} \right)$

L'asymptote a pour équation $s(t) = K \cdot E_0 \cdot (t - T)$. Nous avons K déterminé par la pente de la droite et T qui est l'intersection de la droite avec l'axe des abscisses.

7.6.3 - Systèmes du type n^{ième} ordre avec intégrateur (systèmes évolutifs)

Ce sont des systèmes du type : $G(p) = \frac{K}{p \cdot (1+T \cdot p)^n}$

La réponse indicielle est de la forme (attention ici le processus n'a pas de retard pur):

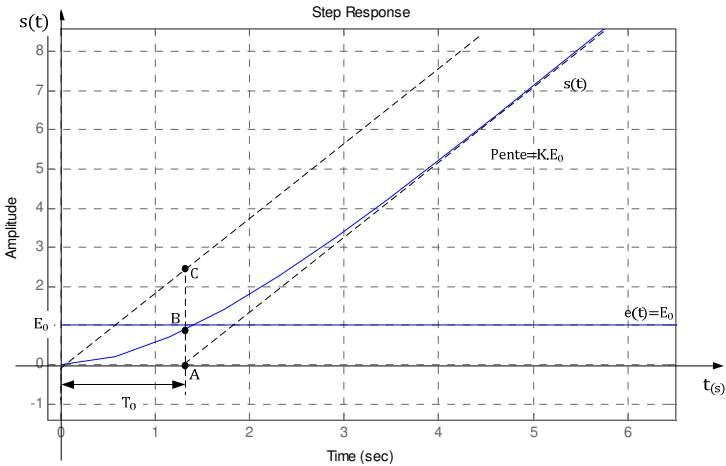


Figure 97 . Réponse indicielle d'un système du n^{ième} ordre avec intégrateur

La méthode est alors :

- tracer l'asymptote à $s(t)$ qui coupe l'axe des abscisses au point A . La constante T_0 est alors définie,
- tracer la parallèle à cette asymptote passant par l'origine,
- tracer la perpendiculaire à l'axe des abscisses passant par A . Cette droite coupe la courbe au point B et la parallèle à l'asymptote au point C ,
- l'identification se fait alors en calculant le rapport $\frac{AB}{AC}$.

Le rapport $\frac{AB}{AC}$ donne l'ordre du système suivant le tableau ci-dessous :

n	$\frac{AB}{AC}$
1	0.368
2	0.271
3	0.224
4	0.195
5	0.175

- le gain K est donné par la pente de l'asymptote,
- l'ordre n est donné par le tableau,
- $T = \frac{T_0}{n}$

Nous avons présenté quelques méthodes d'identification très simple à mettre en œuvre, basée sur des méthodes graphiques, et donnant souvent de bons résultats. Une fois que notre modèle est trouvé, nous simulons une réponse indicielle avec ce modèle que nous comparons à l'essai fait dans la pratique afin de valider les valeurs du modèle obtenues.

Exercice C-17 : Nous considérons des générateurs de vapeur où y est la hauteur d'eau dans le ballon et Q_e le débit d'eau en entrée.

1. Un premier essai d'identification (essai réalisé avec en entrée un échelon unitaire) nous donne la réponse suivante :

t	0	0,5	0,75	1	1,1	1,5	2	2,5	3	4	6
h(t)	0	0,06	0,15	0,25	0,3	0,47	0,65	0,77	0,86	0,95	0,99

- Tracer la réponse,
 - Donner le modèle de la fonction de transfert,
 - Identifier par la méthode de Strejc-Quentin.
2. Nous mettons un autre générateur de vapeur et nous effectuons un nouvel essai d'identification (essai réalisé avec en entrée un échelon unitaire) qui nous donne la réponse suivante :

t	0	0,5	0,75	1	1,1	1,5	2	2,5	3	4	6
h(t)	0	0,01	0,03	0,08	0,12	0,27	0,55	0,9	1,31	2,21	4,17

- Tracer la réponse,
- Identifier avec le modèle adéquat.

Chapitre 8

8 - Correction des systèmes

8.1 - Introduction

Un processus à commander possède des caractéristiques propres qui ne peuvent être modifiées et qui peuvent présenter des défauts par rapport aux objectifs à atteindre. Ces défauts peuvent être compensés en rajoutant un correcteur ou un régulateur avant le système et qui devra permettre d'envoyer au processus un signal de commande approprié et destiné à corriger les réactions indésirables du système (comme l'instabilité) ou améliorer les performances (rapidité, ...).

Le but de ce chapitre est d'améliorer les performances du système asservi, en modifiant certains paramètres du régulateur. Ceci peut se faire en choisissant une structure précise de correcteur, en travaillant généralement dans le domaine temporel et dans le domaine fréquentiel ou en employant une méthode de synthèse.

L'amélioration des performances d'un système consiste à modifier les caractéristiques suivantes :

- le temps de montée,
- l'amplitude du premier dépassement,
- l'erreur statique,
- la marge de gain ou de phase.

Néanmoins, nous nous retrouverons devant le dilemme **stabilité-précision-rapidité** car une augmentation de la rapidité peut provoquer l'instabilité et diminuer la précision, etc.

8.2 - Utilisation des correcteurs

8.2.1 - Définition

Un processus commandé est de la forme :

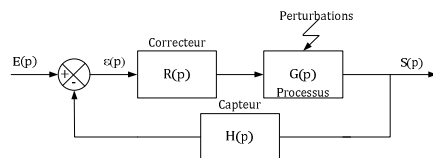


Figure 98 . Commande d'un processus

Pour améliorer ce système, nous procédons à l'étude suivante :

- Trouver un modèle pour le système.
- Identifier les paramètres du modèle.
- Calculer les constantes d'erreur (erreur de position, ...).
- Étudier la stabilité (marge de gain et marge de phase).

L'objectif à atteindre est l'amélioration des performances du système en insérant des correcteurs pour modifier la loi de commande.

8.2.2 - Différents types de correcteurs

Les correcteurs les plus souvent utilisés sont :

- Correcteur P :

$$R(p) = K$$

- Correcteur PI :

$$R(p) = K + \frac{1}{T_i \cdot p}$$

- Correcteur PD :

$$R(p) = K + T_d \cdot p$$

- Correcteur PID :

$$R(p) = K + T_d \cdot p + \frac{1}{T_i \cdot p}$$

- Correcteur à avance de phase :

$$R(p) = K \cdot \frac{1 + a \cdot T \cdot p}{1 + T \cdot p} \text{ avec } a > 1$$

Le correcteur à avance de phase est une forme approchée du correcteur PD qui est physiquement irréalisable (condition de causalité non vérifiée).

- Correcteur à retard de phase :

$$R(p) = K \cdot \frac{1 + T \cdot p}{1 + b \cdot T \cdot p} \text{ avec } b > 1$$

En pratique, nous choisissons $K = b$. Le correcteur à retard de phase est une forme approchée du correcteur PI. Il réalise une action intégrale (augmentation du gain en basses fréquences) sans introduire d'intégrateur.

- Correcteur flou

Ces correcteurs peuvent se placer soit en série, soit en parallèle, soit par anticipation, etc.

a) Correcteur série

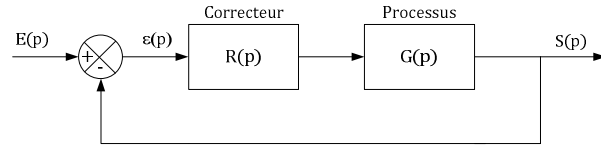


Figure 99 . Correcteur série

b) Correcteur par anticipation

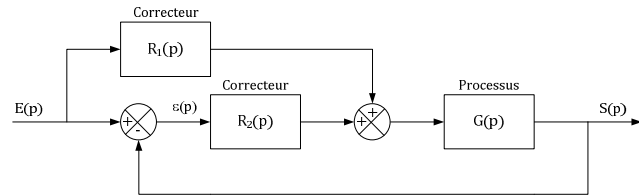


Figure 100 . Correcteur par anticipation

c) Correction dans la boucle de retour ou correcteur parallèle

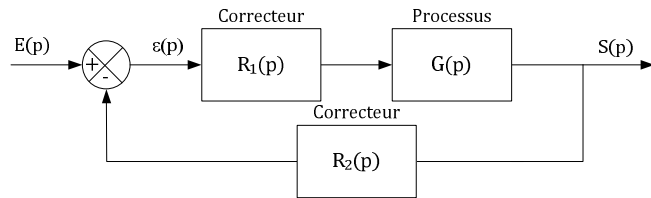


Figure 101 . Correcteur dans la boucle de retour

Dans tous les cas, le problème consiste à calculer *le ou les correcteurs* pour arriver aux performances voulues.

8.3 - Études des différents régulateurs

La structure générale d'une boucle avec un correcteur est la suivante :

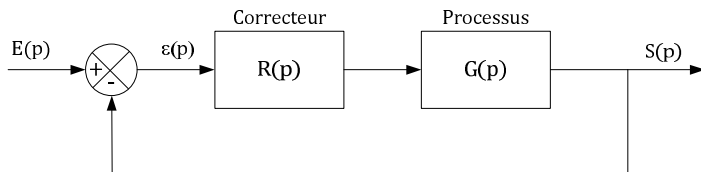


Figure 102 . Structure d'une boucle de commande

8.3.1 - Action Proportionnelle

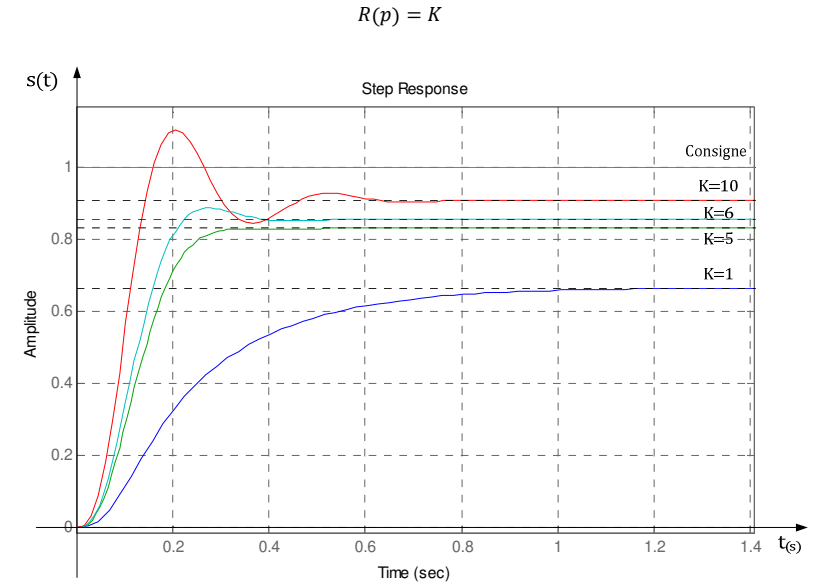


Figure 103 . Réponse d'un système avec régulateur proportionnel

En augmentant la valeur de K , nous augmentons la rapidité du système avec un temps de montée de plus en plus rapide et nous diminuons l'erreur statique. Par contre, si nous continuons à augmenter K , nous risquons d'avoir une instabilité puisque nous rapprochons la courbe dans le lieu de Black (par exemple) du point critique.

Le réglage du gain peut donc se faire avec les marges de gain et de phase. Généralement, la valeur de K permettant d'avoir un bon asservissement est déterminée pour obtenir une marge de gain : $G_m = 10 \text{ dB}$ et une marge de phase de : $\varphi_m = 45^\circ$

8.3.2 - Action Intégrale

$$R(p) = \frac{1}{T_i \cdot p}$$

L'action intégrale permet d'apporter de la précision en éliminant l'erreur statique due aux perturbations d'un système naturellement stable sans intégrateur mais risque de déstabiliser le système lorsqu'elle est trop forte (T_i faible).

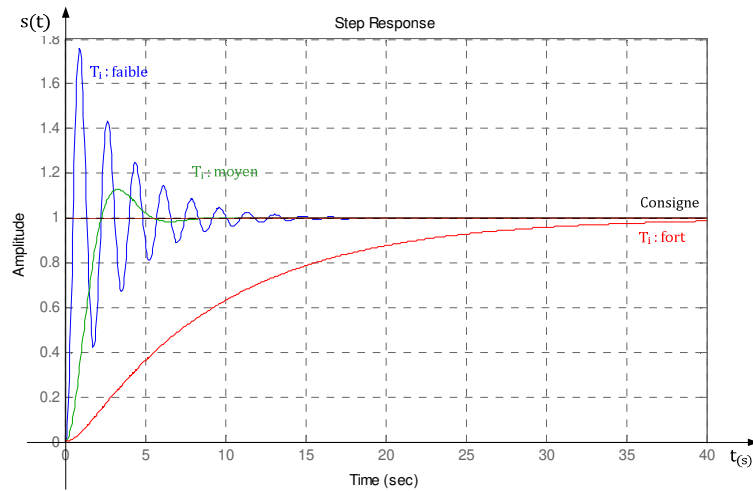


Figure 104 . Réponse d'un système avec régulateur intégral

Le correcteur $R(p)$ amplifie les basses fréquences sans en modifier les hautes. La rapidité et la précision est alors améliorée. Mais il y a aussi l'ajout de $-\frac{\pi}{2}$ sur la phase, pouvant facilement entraîner l'instabilité.

8.3.3 - Action Dérivée

$$R(p) = T_d \cdot p$$

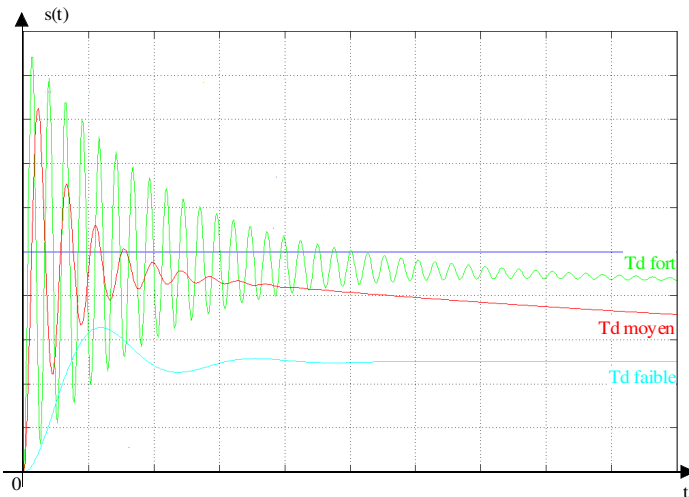


Figure 105 . Réponse d'un système avec régulateur dérivé

Ce correcteur modifie le comportement du système aux alentours de la pulsation critique. Ceci permet de stabiliser un système ne possédant pas une marge de gain suffisante. Ceci permet alors l'augmentation du gain.

Mais l'action dérivée amplifie le bruit parasite des signaux et pose des problèmes lorsque l'on a une brusque variation de la consigne. Pour remédier à cela, son action dérivée est filtrée et souvent appliquée à la sortie seule.

8.3.4 - Association des différentes actions

Il y a possibilité d'associer les différentes actions afin de créer des régulateurs qui peuvent être de différents types :

- PI (Proportionnel - Intégral),
- PD (Proportionnel - Dérivé),
- PID (Proportionnel - Intégral - Dérivé).

a) Correcteur PI série

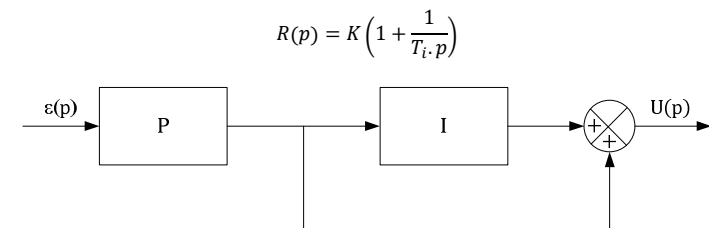


Figure 106 . Correcteur PI Série

b) Correcteur PI parallèle

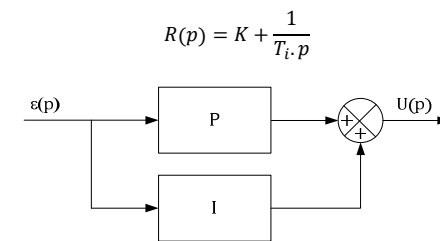


Figure 107 . Correcteur PI parallèle

c) Correcteur PID série

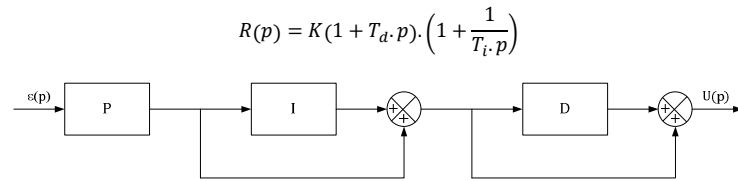


Figure 108 . Correcteur PID Série

d) Correcteur PID parallèle

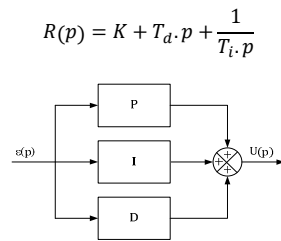


Figure 109 . Correcteur PID Parallèle

e) Rôle des différentes actions

Les rôles des différentes actions sont :

- **P** : augmentation du gain d'où une diminution du temps de réponse et de l'erreur statique mais augmentation du dépassement. Cette action maintient toujours un écart plus faible entre la consigne et la mesure.
- **I** : annule l'erreur statique en régime permanent (apport de précision).
- **D** : accélère la réponse du système et améliore la stabilité.
- **PI** : annule l'erreur statique.
- **PID** : diminue le temps de réponse avec une erreur statique nulle. C'est l'action la plus couramment utilisée

8.3.5 - Exemple d'amélioration des marges

Le but est de trouver un compromis entre stabilité, rapidité et précision. Si la stabilité est importante, alors les marges de gain et de phase sont importantes et la rapidité et la précision sont faibles.

Un correcteur qui permet de modifier la marge de gain et de phase comme une action proportionnelle améliore la rapidité et la précision mais tend à rendre le système instable comme le montre la figure suivante. En effet, l'augmentation du gain diminue les marges de gain et de phase. Il faut alors disposer d'un correcteur qui modifie la marge de gain et de phase dans une plage de fréquence évitant l'instabilité.

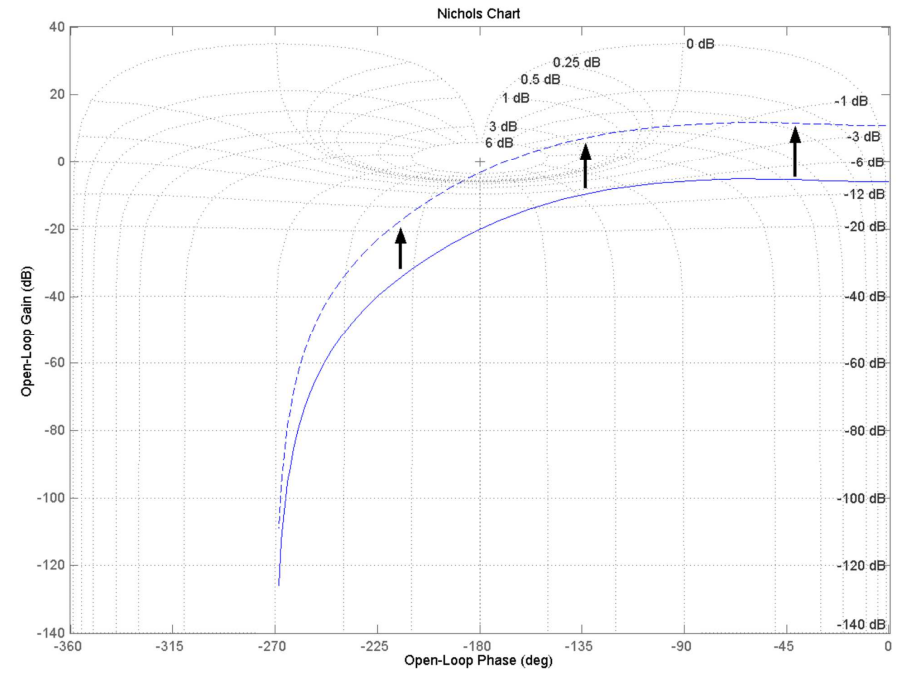


Figure 110 . Exemple de l'effet d'un correcteur sur la marge de gain et la marge de phase

Par exemple, la fonction $G(p) = \frac{0,5}{p^3 + 3 \cdot p^2 + 2 \cdot p + 1}$ est représentée sur la figure ci-dessus en trait plein. En pointillé, nous retrouvons cette même fonction avec un correcteur $R(p) = 7$.

8.4 - Méthodes pratiques

En pratique, quelles valeurs de K , T_i et T_d devons-nous prendre pour avoir les meilleures performances du système asservi ?

Pour cela, nous utilisons des méthodes pratiques à partir de la réponse indicielle du système en boucle ouverte. Nous avons alors trois types de réponses à analyser :

- une réponse dite "stable",
- une réponse "évolutive",
- une réponse "instable" (non traité par des méthodes pratiques).

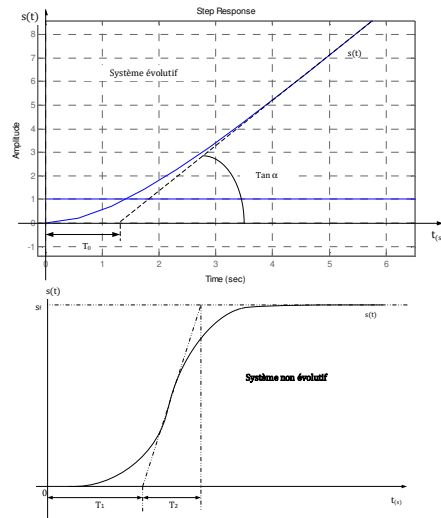
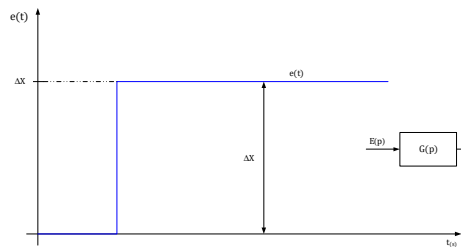


Figure 111 . Forme des réponses d'un système

Dans les deux cas (non évolutif et évolutif), l'entrée est définie par sa variation ΔX ou E_0 .

Nous déduisons :

- le gain statique $K_s = \frac{sf}{\Delta X}$ du système stable en boucle ouverte,
- $\tan \alpha = \frac{\Delta Y}{\Delta t}$ puis $K_i = \frac{\tan \alpha}{\Delta X} = \frac{\Delta Y}{\Delta t \cdot \Delta X}$ le gain statique du système évolutif en boucle ouverte.

Des valeurs de K_s ou K_i selon la réponse obtenue, nous pouvons déterminer le type de régulateur à utiliser et la valeur des paramètres le composant.

8.4.1 - Choix du mode de réglage dans le cas d'un système non évolutif

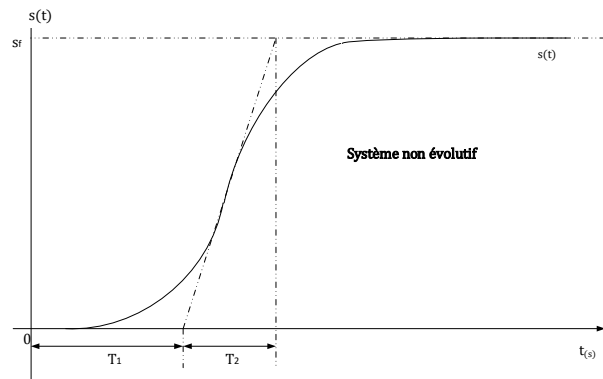


Figure 112 . Réponse d'un système stable

Nous calculons la "réglabilité" du système, soit le rapport $\frac{T_2}{T_1}$ (cf. figure ci-dessus) :

Choix du type de régulateur en fonction de la "réglabilité"					
"Réglabilité" : $\frac{T_2}{T_1}$	<2	2 à 5	5 à 10	10 à 20	>20
Régulateur	Limite du PID	PID	PI	P	Tout ou rien

En fonction du choix du régulateur, les valeurs des différentes actions dans le cas d'un système stable sont :

Calcul des actions P, I et D pour les systèmes non évolutifs						
Modes / Action	P	PI série	PI parallèle	PID série	PID parallèle	PID mixte
K	$\frac{0,8 \cdot T_2}{K_s \cdot T_1}$	$\frac{0,8 \cdot T_2}{K_s \cdot T_1}$	$\frac{0,8 \cdot T_2}{K_s \cdot T_1}$	$\frac{0,85 \cdot T_2}{K_s \cdot T_1}$	$\frac{T_2}{T_1} + 0,4$ $\frac{1,2 \cdot K_s}{1,2 \cdot K_s}$	$\frac{T_2}{T_1} + 0,4$ $\frac{1,2 \cdot K_s}{1,2 \cdot K_s}$
T_i	Maxi.	T_2	$\frac{K_s \cdot T_1}{0,8}$	T_2	$\frac{K_s \cdot T_1}{0,75}$	$T_2 + 0,4 \cdot T_1$
T_d	0	0	0	$0,4 \cdot T_1$	$\frac{0,35 \cdot T_2}{K_s}$	$\frac{T_2 \cdot T_1}{T_1 + 2,5 \cdot T_2}$

K_s : doit être sans unité.

8.4.2 - Choix du mode de réglage dans le cas d'un système évolutif

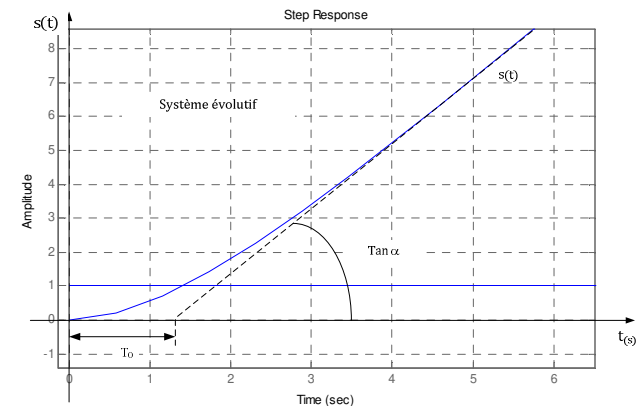


Figure 113 . Réponse d'un système évolutif

Dans ce cas, le choix du régulateur dépend de la valeur de K_i définie précédemment :

Choix du type de régulateur en fonction de la "réglabilité"					
"Réglabilité" : $K_i \cdot T_0$	>0,5	0,2 à 0,5	0,1 à 0,2	0,05 à 0,1	0,05 >
Régulateur	Limite du PID	PID	PI	P	Tout ou rien

En fonction du choix du régulateur, les valeurs des différentes actions dans le cas d'un système évolutif sont :

Calcul des actions P, I et D pour les systèmes évolutifs						
Modes \ Action	P	PI série	PI parallèle	PID série	PID parallèle	PID mixte
K	$\frac{0,8}{K_i \cdot T_0}$	$\frac{0,8}{K_i \cdot T_0}$	$\frac{0,8}{K_i \cdot T_0}$	$\frac{0,85}{K_i \cdot T_0}$	$\frac{0,9}{K_i \cdot T_0}$	$\frac{0,9}{K_i \cdot T_0}$
T_i	$Maxi.$	$5 \cdot T_0$	$\frac{K_i \cdot T_0^2}{0,15}$	$4,8 \cdot T_0$	$\frac{K_i \cdot T_0^2}{0,15}$	$5,2 \cdot T_0$
T_d	0	0	0	0	$\frac{0,35}{K_i}$	$0,4 \cdot T_0$

Si nous sommes en limite du PID, nous devons utiliser des boucles multiples en cascade ou un régulateur numérique.

8.4.3 - Méthode de Ziegler-Nichols en boucle fermée

La méthode de Ziegler-Nichols permet de régler les paramètres des correcteurs en faisant des essais en boucle fermée.

La méthode est la suivante :

- Attendre que le système soit complètement stabilisé,
- Afficher $T_d = 0$ et mettre l'action intégrale au minimale (afficher T_i maximal),
- Afficher un gain K au minimum,
- Augmenter doucement le gain K jusqu'à l'apparition de pompage (oscillations non amorties). Fixer alors à cet instant le gain critique K_{cr} et la période des oscillations T comme illustré sur la figure.

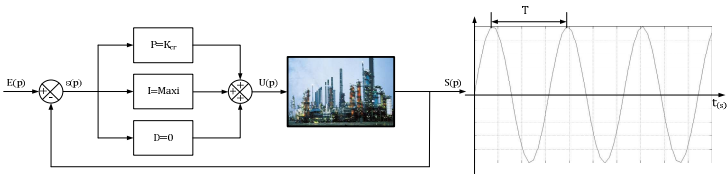


Figure 114 . Réglage du système à la limite de stabilité

Afficher alors les paramètres du régulateur selon le tableau ci-dessous

Méthodes pratiques d'ajustement des régulateurs pour les systèmes évolutifs et non évolutifs						
Modes \ Action	P	PI série	PI parallèle	PID série	PID parallèle	PID mixte
K	$\frac{K_{cr}}{2}$	$\frac{K_{cr}}{2,2}$	$\frac{K_{cr}}{2,2}$	$\frac{K_{cr}}{3,3}$	$\frac{K_{cr}}{1,7}$	$\frac{K_{cr}}{1,7}$
T_i	$Maxi.$	$\frac{T}{1,2}$	$\frac{2 \cdot T}{K_{cr}}$	$\frac{T}{4}$	$\frac{0,85 \cdot T}{K_{cr}}$	$\frac{T}{2}$
T_d	0	0	0	$\frac{T}{4}$	$\frac{K_{cr} \cdot T}{13,3}$	$\frac{T}{8}$

Exercice C-18: Soit unsystème inséré dans une boucle d'asservissement à retour unitaire.

La Figure 115 représente la réponse à un échelon unitaire de ce système en BO.

La Figure 116 représente la réponse à un échelon unitaire de ce système en BF.

Question 1 : A l'aide du tracé de ces réponses, déterminer le correcteur le plus adapté.

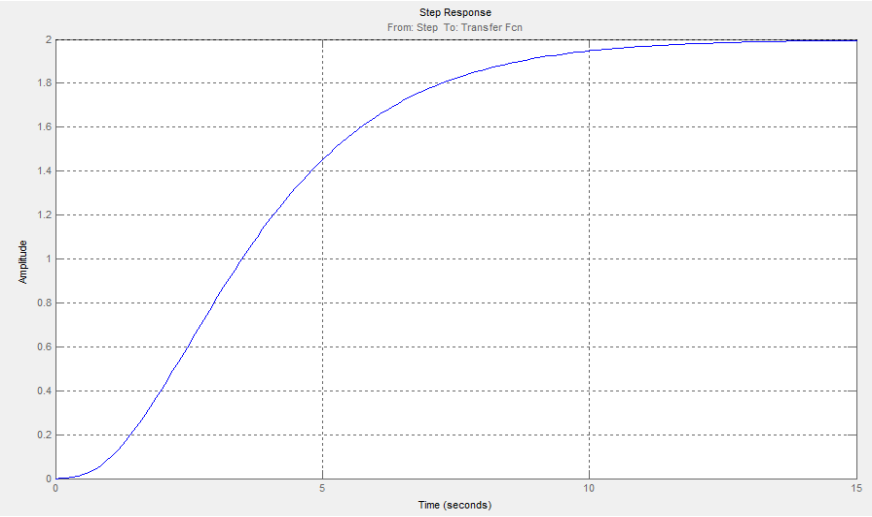


Figure 115 : Réponse du système en BO soumis à un échelon unitaire.

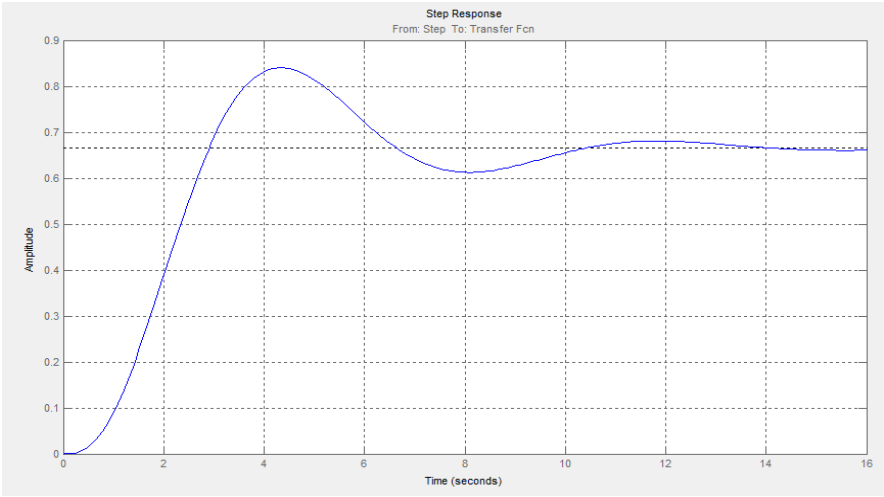


Figure 116 : Réponse du système en BF soumis à un échelon unitaire

Question 2 : A l'aide des réponses obtenues, déterminer la valeur de l'erreur finale et le temps de réponse à 5% de ce système ainsi asservi.

Question3 : Le tableau ci-dessous représente les valeurs du gain et de la phase de ce système en BO pour différentes valeurs de ω . En utilisant ces valeurs, tracer le lieu de black de ce système en boucle ouverte.

ω (rad/s)	0	0.5	0.75	1	1.5	2.5
Gain en db	6	1	-3	-7	-14	-25
Phase en °	0	-98	-130	-154	-184	-215

Question 4 : Nous allons maintenant insérer un correcteur proportionnel $K=3.5$. Tracer le lieu de black en Boucle ouverte de ce système ainsi corrigé. En étudiant également la réponse indicielle de ce système (voir Figure 117), déterminer la valeur de l'erreur finale et le temps de réponse du système corrigé. Qu'en déduisez-vous pour ce correcteur?

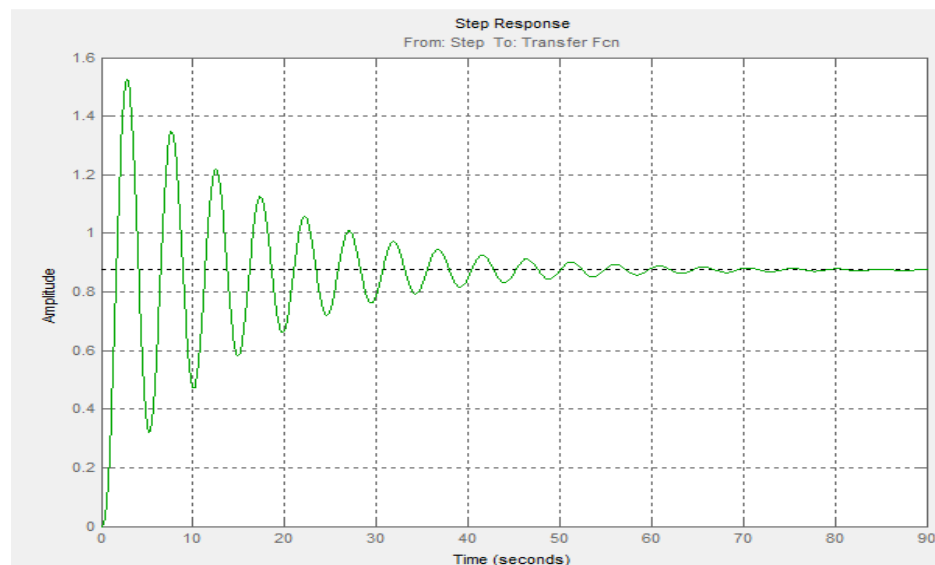


Figure 117 : Réponse indicielle du système corrigé avec un correcteur proportionnel ($k=3.5$)

Question 5 : Nous allons insérer dans la boucle d'asservissement le correcteur PI série suivant :

$$R(p) = 2 \left(1 + \frac{1}{5.p} \right)$$

Tracer le lieu de black en boucle ouverte de ce système ainsi corrigé. En étudiant également la réponse indicielle de ce système (voir Figure 118), déterminer la valeur de l'erreur finale et le temps de réponse du système ainsi corrigé. Qu'en déduisez-vous sur ce correcteur?

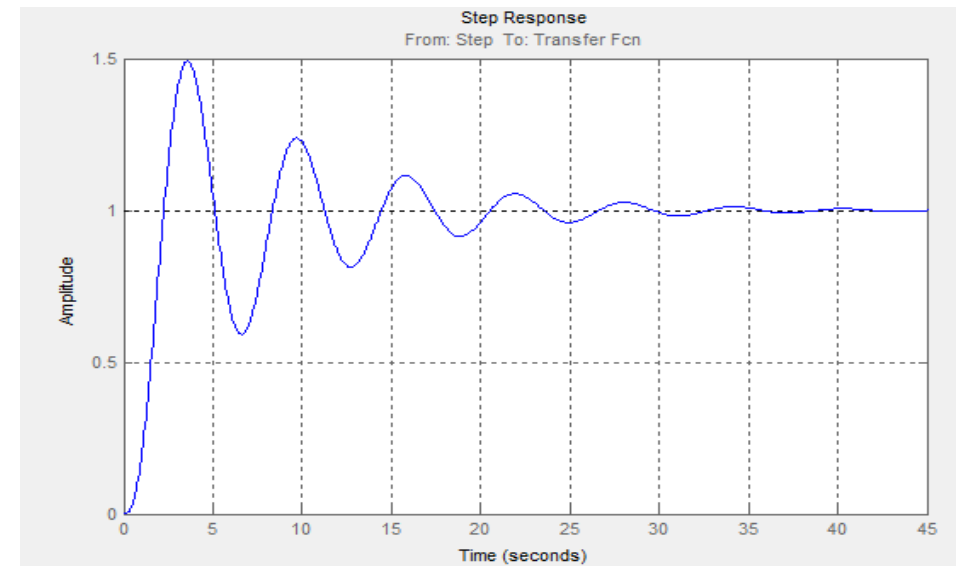


Figure 118 : Réponse indicielle du système corrigé avec le correcteur proportionnel intégral

Chapitre 9

9 – Table des figures

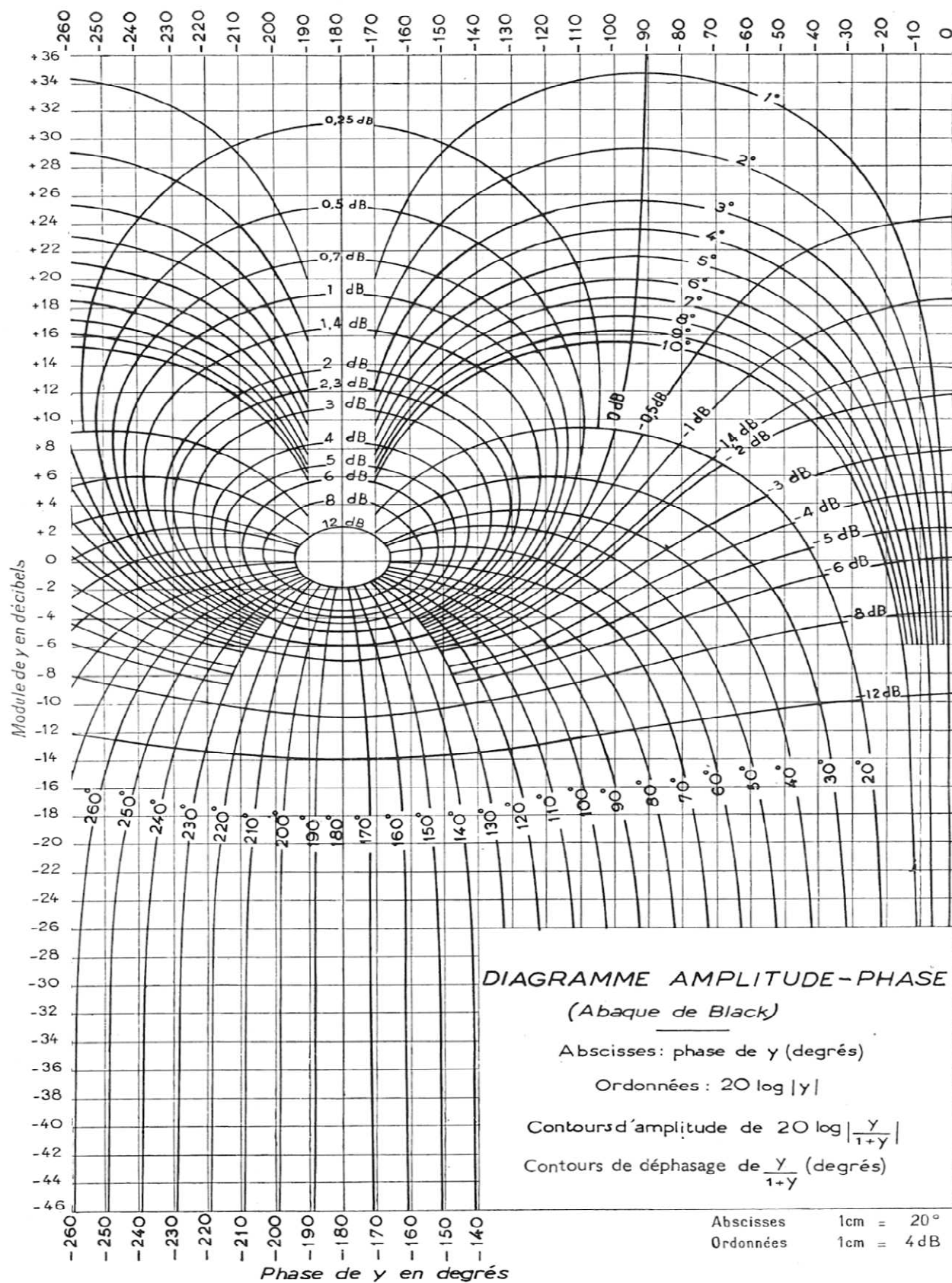
Figure1.Schéma d'un système	6
Figure2.Schéma d'un système de commande	6
Figure3.Schéma d'un système asservi	6
Figure4.Schéma d'un système SISO	7
Figure5.Schéma d'un système MIMO	7
Figure6.Schéma bloc d'un système	8
Figure7.Schéma d'un comparateur	8
Figure8.Schéma d'un sommateur	8
Figure9.Schéma d'un système en boucle fermée	8
Figure 10 . Schéma d'un système SISO	9
Figure11.Schéma d'un circuit RC	9
Figure12. Système masse-ressort amorti	10
Figure13.Schéma bloc d'un système	12
Figure14.Schéma bloc d'un système en série	13
Figure15.Schéma bloc d'un système en parallèle	13
Figure16.Fonction de transfert en boucle fermée avec correcteur et boucle de retour	15
Figure17.Fonction de transfert en boucle fermée par retour unitaire	15
Figure18.Fonction de transfert en boucle fermée avec correcteur et retour unitaire	15
Figure19.Fonction de transfert en boucle ouverte	16
Figure20. Asservissement en boucle fermée avec correcteur et boucle de retour	17
Figure21. Régulation en boucle fermée avec correcteur et boucle de retour	17
Figure22. Boucle de régulation et asservissement	17
Figure23. Schéma général de régulation et asservissement	18
Figure24.Fonction de transfert en boucle fermée en asservissement	18
Figure25. Modification du schéma bloc	18
Figure26.Fonction de transfert en boucle fermée en régulation	19
Figure27. Impulsion de Dirac	21
Figure28. Réponse à une impulsion de Dirac	22
Figure29. Echelon unitaire	22
Figure30. Réponse à un échelon d'amplitude k	22
Figure31. Rampe de vitesse	23
Figure32. Réponse en vitesse	23
Figure33.Excitation harmonique	24
Figure34. Réponse harmonique	24
Figure35. Régime Transitoire/Permanent	25
Figure36.Asservissement "mou" et régime transitoire apériodique	25
Figure37.Transitoire Trop lent et trop peu amorti	25
Figure38.Trop peu amorti trop lent	26
Figure39.Bon asservissement: régime transitoire rapide et bien amorti avec un seul dépassement	26
Figure40.Temps de réponse du système	26
Figure41. Temps de montée	27
Figure42.Système stable	27
Figure43.Système instable	28
Figure44.Système précis	28
Figure45.Système avec erreur	28

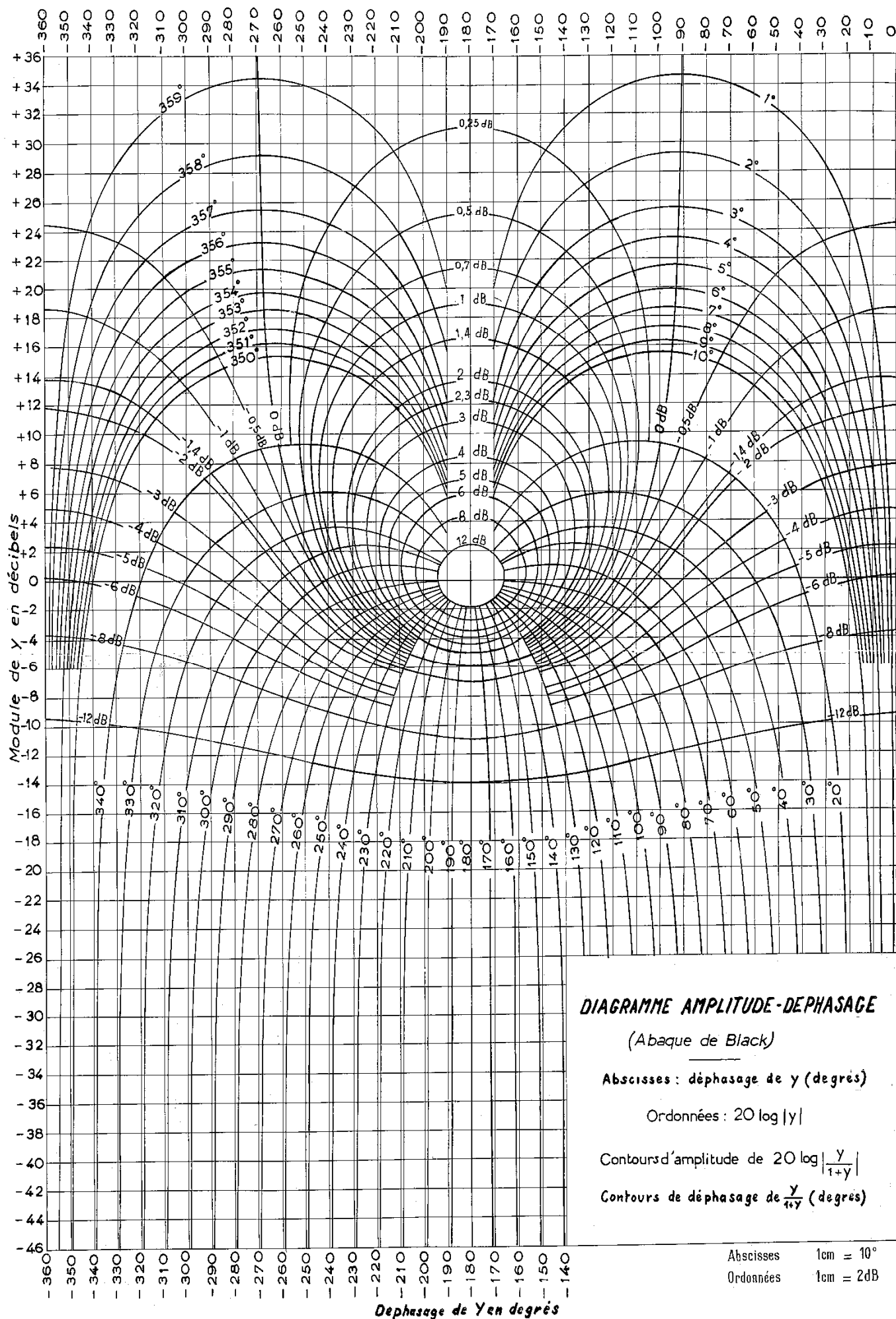
Figure46. Schéma complet de régulation	29
Figure 47 : système de fonction de transfert $F(p)$ insérée dans une boucle d'asservissement à retour unitaire	30
Figure48. Analyse fréquentielle d'un système	32
Figure49. Analyse fréquentielle d'un système	32
Figure50. Système en cascade	33
Figure51. Système avec l'inverse d'une fonction	33
Figure52. Système avec division de fonctions	34
Figure53. Système avec un retard pur	34
Figure54. Un tapis roulant	34
Figure55. Diagramme de Nyquist	36
Figure56. Diagramme de Nyquist d'un système avec retard pur	36
Figure57. Lieu de Bode d'un système	37
Figure58. Lieu de Black d'un système	38
Figure59. Abaque de Black	41
Figure60. Circuit RC	43
Figure61. Réponse impulsionnelle	44
Figure62. Réponse à un échelon d'amplitude E_0	45
Figure63. Réponse en vitesse	46
Figure64. Lieu de Nyquist	47
Figure65. Lieu de Bode	47
Figure66. Lieu de Black-Nichols	48
Figure67. Système masse-ressort amorti	48
Figure68. Circuit RLC	49
Figure69. Réponse indicielle pour $\xi > 1$	50
Figure70. Réponse indicielle pour $\xi = 1$	51
Figure 71 . Réponse indicielle pour $\xi < 1$	51
Figure 72 . Lieu de Nyquist	54
Figure 73 . Lieu de Bode	55
Figure 74 . Lieu de Black	55
Figure75. Stabilité du système $G(p)$	59
Figure 76 . Différence entre un système stable et un système instable sur une réponse temporelle	60
Figure77. Schéma bloc du système de l'exercice C-11	60
Figure 78 . Passage d'un système asservi à un système asservi à retour unitaire	62
Figure 79 . Lieu de Nyquist d'un système stable	62
Figure 80 . Lieu de Nyquist d'un système instable	63
Figure 81 . Lieu de Bode d'un système instable	63
Figure 82 . Lieu de Black d'un système instable	64
Figure 83 . Marge de gain et marge de phase sur le lieu de Black	65
Figure 84 . Marge de gain et marge de phase sur le lieu de Bode	66
Figure 85 . Marge de gain et marge de phase sur le lieu de Nyquist	66
Figure86. Schéma bloc du système de l'exercice C-13	66
Figure 87 . Identification	67
Figure 88 . Phases de l'identification	67
Figure 89 . Démarche générale de l'identification	68
Figure 90 . Identification d'un système du premier ordre	69
Figure 91 . Réponse d'un système du premier ordre	69
Figure 92 . Réponse d'un système du premier ordre avec retard pur	70
Figure 93 . Réponse d'un système avec retard pur	71
Figure 94 . Réponse d'un système avec retard pur (τ) à un échelon	72
Figure 95 . Réponse indicielle d'un système intégrateur	74
Figure 96 . Réponse indicielle d'un système du premier ordre avec intégrateur	74

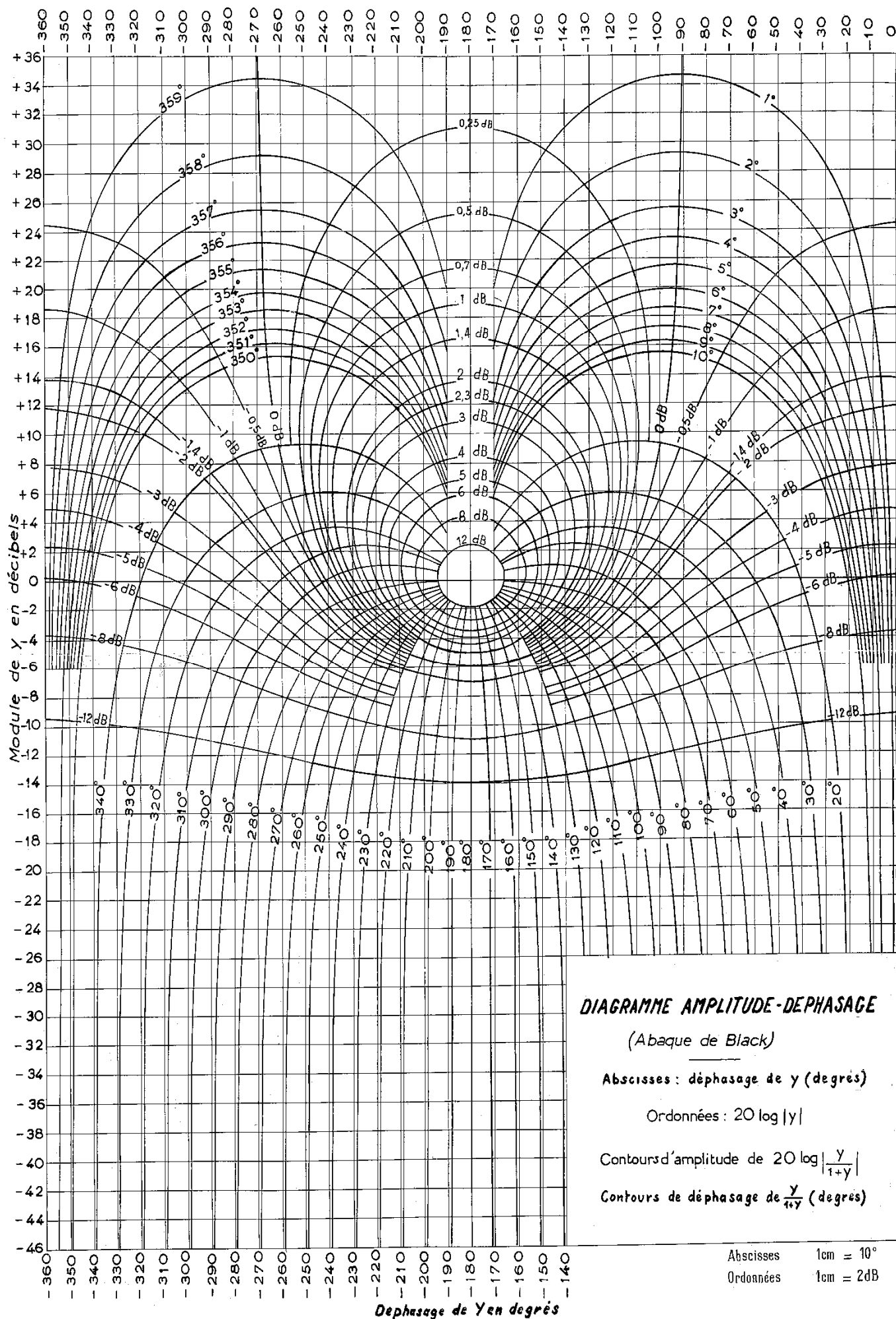
Figure 97 . Réponse indicielle d'un système du $n^{\text{ème}}$ ordre avec intégrateur	75
Figure 98 . Commande d'un processus	77
Figure 99 . Correcteur série	79
Figure 100 . Correcteur par anticipation	79
Figure 101 . Correcteur dans la boucle de retour	79
Figure 102 . Structure d'une boucle de commande	79
Figure 103 . Réponse d'un système avec régulateur proportionnel	80
Figure 104 . Réponse d'un système avec régulateur intégral	81
Figure 105 . Réponse d'un système avec régulateur dérivé	81
Figure 106 . Correcteur PI Série	82
Figure 107 . Correcteur PI parallèle	82
Figure 108 . Correcteur PID Série	83
Figure 109 . Correcteur PID Parallèle	83
Figure 110 . Exemple de l'effet d'un correcteur sur la marge de gain et la marge de phase	84
Figure 111 . Forme des réponses d'un système	85
Figure 112 . Réponse d'un système stable	85
Figure 113 . Réponse d'un système évolutif	86
Figure 114 . Réglage du système à la limite de stabilité	87
Figure 115 : Réponse du système en BO soumis à un échelon unitaire.	88
Figure 116 : Réponse du système en BF soumis à un échelon unitaire	88
Figure 117 : Réponse indicielle du système corrigé avec un correcteur proportionnel ($k=3.5$)	89
Figure 118 : Réponse indicielle du système corrigé avec le correcteur proportionnel intégral	90

Chapitre 10

10 - Annexe







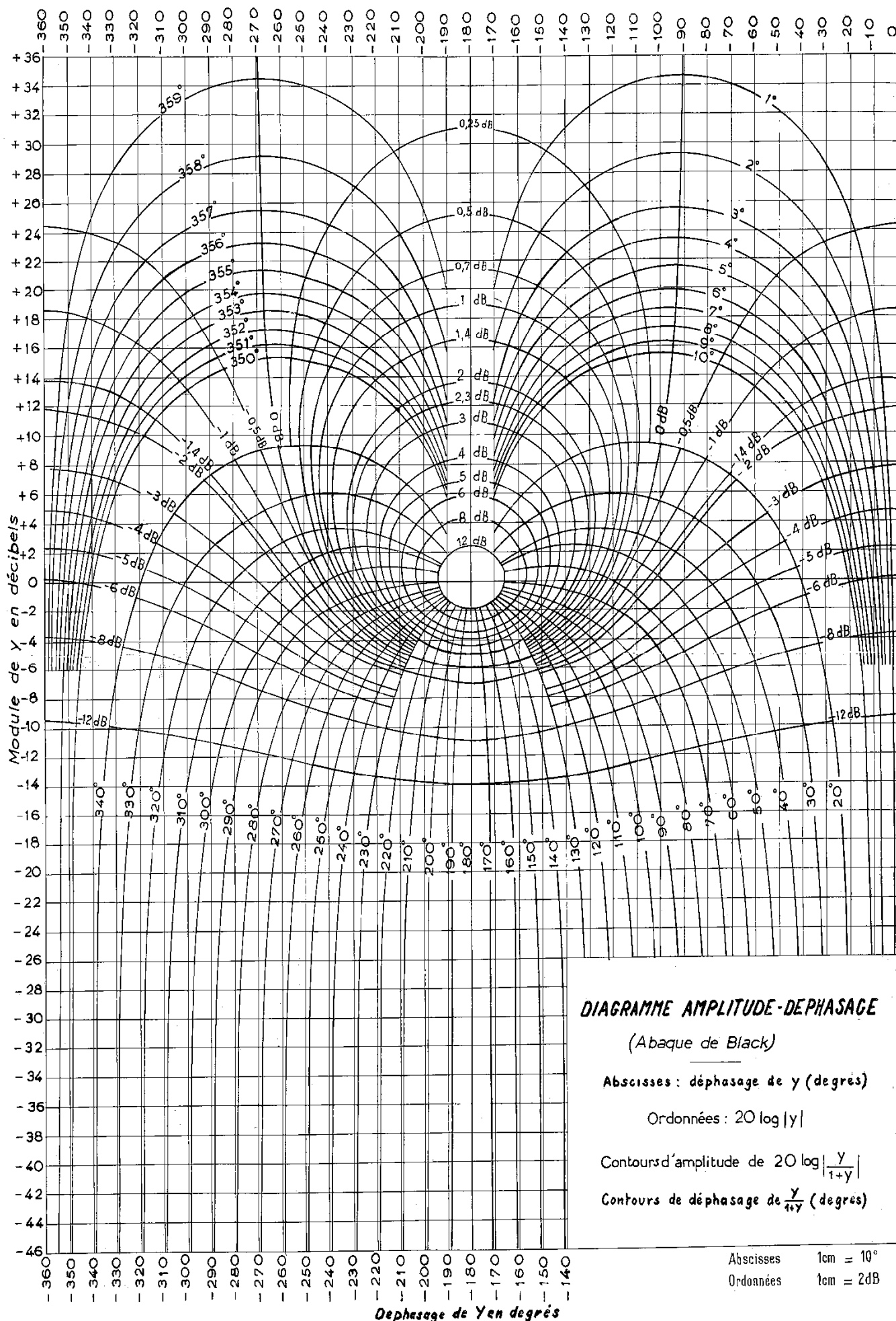


DIAGRAMME AMPLITUDE-DEPHASAGE
(Abaque de Black)

Abscisses : déphasage de y (degrés)

Ordonnées : $20 \log |y|$

Contours d'amplitude de $20 \log \left| \frac{y}{1+y} \right|$

Contours de déphasage de $\frac{y}{1+y}$ (degrés)

Abscisses 1cm = 10°
Ordonnées 1cm = 2dB

Déphasage de Y en degrés

