25/04/17

Correction DS
Analyse des Signaux et des images

total sur 21

on peut descendre jusqu'au $\frac{1}{2}$ pt mais pas au $\frac{1}{4}$ pt !

Exercice 1

$$x(t) = \sin(2\pi t) + \cos\left(2\pi t + \frac{\pi}{4}\right)$$

① Plusieurs approches sont possibles pour le cosinus (formule trigo, propriété du retard ...).

Je vais utiliser celle du retard

$$x(t) = \sin(2\pi t) + \cos\left(2\pi\left(t + \frac{1}{8}\right)\right)$$

TF

$$X(f) = \frac{j}{2}\left[\delta(f+1) - \delta(f-1)\right] + \frac{1}{2}\left[\delta(f+1) + \delta(f-1)\right]e^{-2\pi j f \frac{1}{8}}$$

$$X(f) = \frac{j}{2}\left[\delta(f+1) - \delta(f-1)\right] + \frac{1}{2}\delta(f+1)e^{2\pi j 1/8}$$

$$+ \frac{1}{2}\delta(f-1)e^{-2\pi j 1/8}$$

$$= \left[\frac{j}{2} + \frac{1}{2}e^{\pi j/4}\right]\delta(f+1) +$$

2 pts

$$\left[-\frac{j}{2} + \frac{1}{2}e^{-\pi j/4}\right]\delta(f-1)$$

spectre d'amplitude

il faut determiner les module de chaque coef

$$j/2 + \frac{1}{2}e^{\pi j/4} = \frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{4} + j\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{4} + j\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4}\right)$$

$$\left|\frac{j}{2}+\frac{1}{2}e^{\pi j/4}\right| = \sqrt{\frac{2}{16}+\frac{1}{4}+\frac{2}{16}+\frac{\sqrt{2}}{4}}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{4}}$$

$$= \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$$

0,5pt

$$\left(-\frac{j}{2}+\frac{1}{2}e^{-\pi j/4}\right) = \frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{4} - j\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

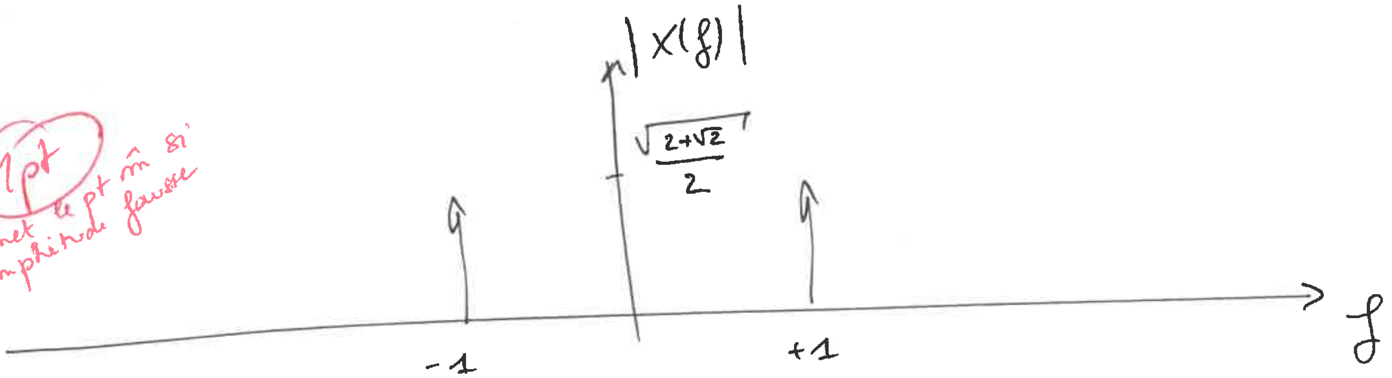
$$= \frac{\sqrt{2}}{4} - j\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$$

0,5+0,5 = 1pt

$$\left|-\frac{j}{2}+\frac{1}{2}e^{-\pi j/4}\right| = \sqrt{\frac{2}{16}+\frac{1}{4}+\frac{2}{16}+\frac{\sqrt{2}}{4}}$$

$$= \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$$

0,5pt



1pt
on met le pt m̂ si amplitude fausse

Spectre de phase

il faut déterminer l'argument de chaque coef

$$\mathrm{Ang}\left(j/2+1/2\,e^{\pi j/4}\right) = \mathrm{Ang}\left(\frac{\sqrt{2}}{4}+j\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{4}\right)\right)$$

$$= \mathrm{Arctan}\,\frac{1/2+\sqrt{2}/4}{\sqrt{2}/4}$$

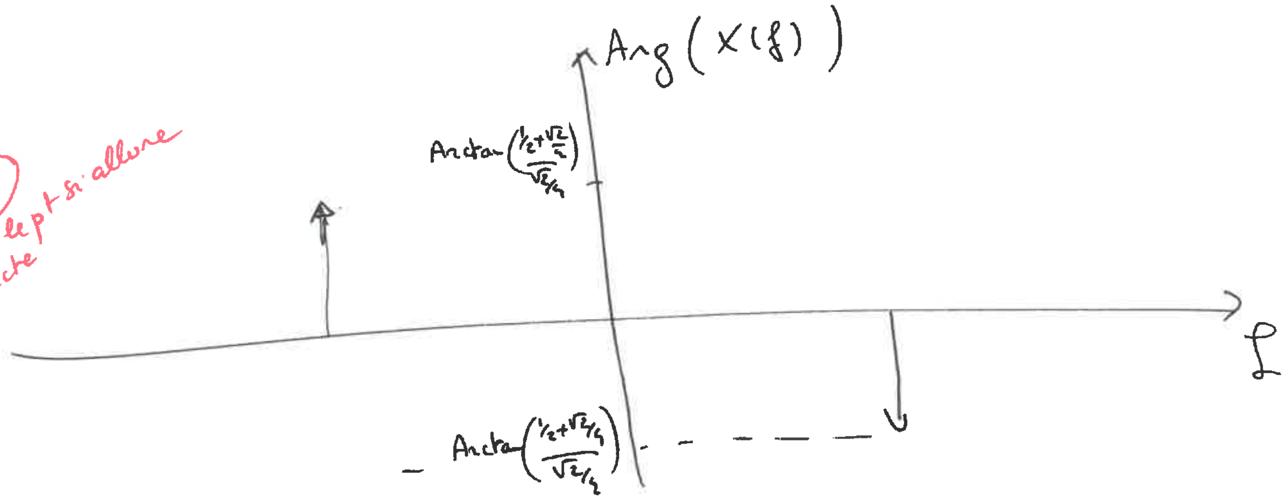
0,5pt

$$Arg\left(-j/2 + \frac{1}{2}e^{-\pi j/4}\right) = Arctan\left(-\frac{1/2 + \sqrt{2}/4}{\sqrt{2}/4}\right)$$

0,5pt

$$= -Arctan\left(\frac{1/2 + \sqrt{2}/4}{\sqrt{2}/4}\right)$$

1pt on met le pt si allure correcte



2) $X(f)$ est supposée connue

1pt

$$y(t) = 2x(t+1) + x\left(1-\frac{t}{2}\right)$$
$$= 2x(t+1) + x\left(-\frac{1}{2}(t-2)\right)$$

on utilise alors les propriétés de la transformée de Fourier.

1pt

$$Y(f) = 2X(f)e^{+2\pi jf} + 2X(-2f)e^{-2\pi jf\times(2)}$$
$$= 2X(f)e^{2\pi jf} + 2X(-2f)e^{-4\pi jf}$$

1pt

$$z(t) = y(t-2)$$
$$\hookrightarrow Z(f) = Y(f)e^{-2\pi jf\times 2}$$
$$= 2X(f)e^{+2\pi jf}e^{-4\pi jf} + 2X(-2f)e^{-4\pi jf}e^{-4\pi jf}$$

1pt

$$= 2X(f)e^{-2\pi jf} + 2X(2f)e^{-8\pi jf}$$

(4)

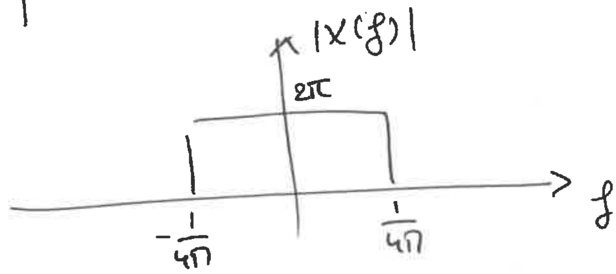
③ Pour calculer l'énergie de $x(t)$ il faut utiliser le théorème de Parseval

1pt

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df$$

$X(f)$ est une porte de largeur $\frac{1}{2\pi}$ et d'amplitude 2π.

2pt



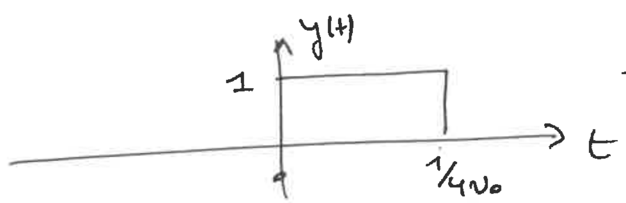
1pt

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df = \int_{-\frac{1}{4\pi}}^{\frac{1}{4\pi}} (4\pi^2)\, df$$

$$= 4\pi^2 \left[\frac{1}{4\pi} + \frac{1}{4\pi} \right] = \frac{4\pi^2}{2\pi} = \underline{\underline{2\pi}}$$

Exercice 2

① $y(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [0 ; \frac{1}{4\nu_0}] \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$



→ c'est une porte de largeur $\frac{1}{4\nu_0}$ décalée de $1/8\nu_0$

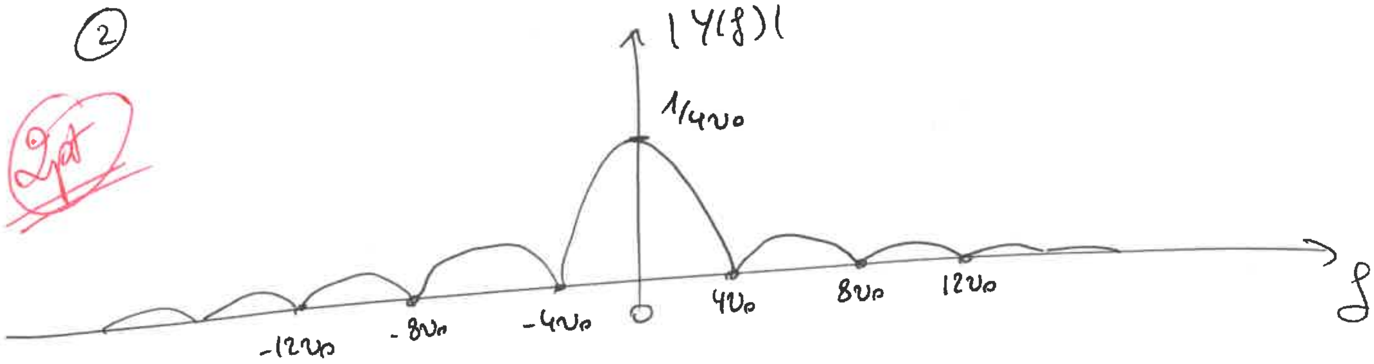
$$Y(f) = \frac{1}{4\nu_0} \operatorname{sinc}\left(\pi \times f \times \frac{1}{4\nu_0}\right) e^{-2\pi j f \frac{1}{8\nu_0}}$$

2pt

$$Y(f) = \frac{1}{4\nu_0} \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi f}{4\nu_0}\right) e^{-\pi j f / 4\nu_0}$$

(2)

2pt



(3) $$z(t) = y(t) * \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\left(t - \frac{k}{2\nu_0}\right)$$

$z(t)$ est donc $y(t)$ périodisé tous les $1/2\nu_0$

1pt

$$Z(f) = Y(f) \cdot 2\nu_0 \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(f - k2\nu_0)$$

$Z(f)$ est donc $Y(f)$ échantillonné tous les $2\nu_0$ avec 1 coef multiplicateur $(2\nu_0)$

2pt