Chapitre 2

Équations différentielles linéaires

2.1 Introduction

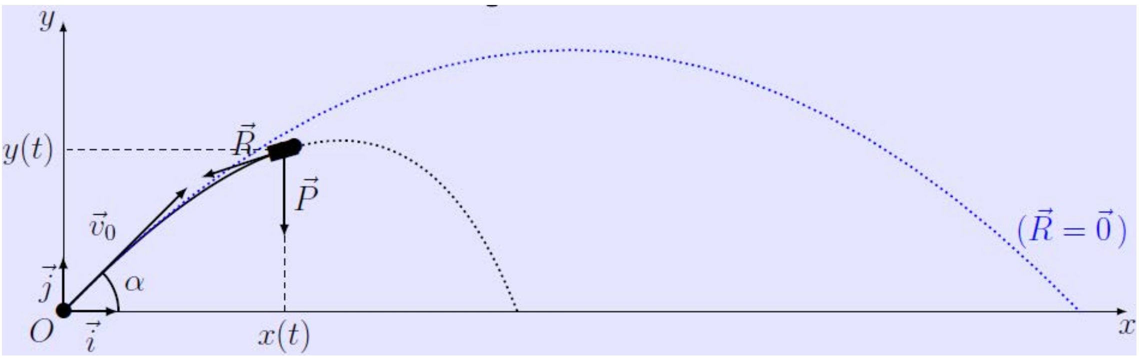
De nombreux phénomènes physiques, mécaniques, chimiques, biologiques, économiques, etc sont régis par des équations différentielles ou des systèmes différentiels. On peut citer plusieurs problèmes conduisant à de telles équations :

1. un problème de cinématique : trajectoire balistique
2. un problème de rhéologie : système visco-élastique
3. circuit RLC série
4. système visco-élastique : masse attachée à un ressort
5. demi-vie : vitesse de désintégration des noyaux radioactifs
6. modèles d'évolutions en biologie

Voir par exemple https ://www.youtube.com/watch ?v=hcZPh8NbTmw d'Arnaud Bodin (Exo7Math) pour plus de détails.

2.1.1 Un problème de cinématique : trajectoire balistique

Mise en équation du mouvement d'un projectile de masse m, celui-ci étant propulsé dans l'air à une vitesse initiale $\overrightarrow{v_0}$ sous un angle de tir α.



Le bilan des forces s'exerçant sur le projectile donne $\overrightarrow{F} = \overrightarrow{P} + \overrightarrow{R}$, où :
• $\overrightarrow{P}$ est le poids du projectile d'intensité mg : $\overrightarrow{P} = m\overrightarrow{g}$, avec m : masse de projectile, g : accélération de la pesanteur terrestre ($g = 9,81\ m/s^2$) ;
• $\overrightarrow{R}$ la résistance de l'air proportionnelle à la vitesse : $\overrightarrow{R} = -k\overrightarrow{v}$, k étant le coefficient de frottement de l'air, $\overrightarrow{v}$ le vecteur-vitesse du projectile ($\overrightarrow{R} = x'(t)\overrightarrow{i} + y'(t)\overrightarrow{i}$).
Le principe fondamental de la dynamique $\overrightarrow{F} = m\overrightarrow{a}$ fournit le système ci-dessous ($\overrightarrow{a}$ étant le vecteur-

accélération : $\overrightarrow{a} = x''(t)\overrightarrow{i} + y''(t)\overrightarrow{i}$), en posant $\kappa = \frac{k}{m}$:

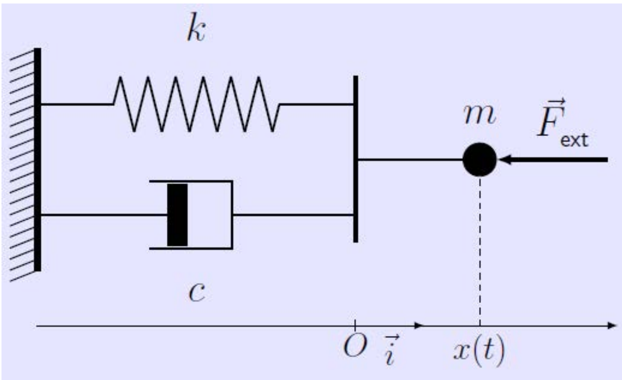
$$\begin{cases} x''(t) = -\kappa x'(t) \\ y''(t) = -\kappa y'(t) - g \\ x(0) = y(0) = 0,\ x'(0) = v_0\cos(\alpha),\ y'(0) = v_0\sin(\alpha). \end{cases}$$

Il s'agit d'un système d'équations différentielles linéaire du 2^{nd} ordre avec conditions initiales.

2.1.2 Un problème de rhéologie : système visco-élastique

Il s'agit d'étudier le mouvement d'un solide de masse m accroché à un ressort de raideur k couplé avec un piston de coefficient c montés en parallèle, sollicité par une force externe.

— $\overrightarrow{F}_k$: force de rappel exercée par le ressort
— $\overrightarrow{F}_c$: force de friction du piston
— $\overrightarrow{F}_{ext}$: force externe
— x : déplacement rectiligne du mobile par rapport à sa position d'équilibre O.



Les lois de Hooke et de Reynolds s'écrivent : $F_k(t) = -kx''(t)$, $F_c(t) = -cx'(t)$.
Le bilan des forces s'exerçant sur le solide donne $\overrightarrow{F} = \overrightarrow{F}_k + \overrightarrow{F}_c + \overrightarrow{F}_{ext}$ et le principe fondamental de la dynamique $\overrightarrow{F} = m\overrightarrow{a}$ (avec $\overrightarrow{a} = x''\overrightarrow{i}$) fournit l'**équation différentielle linéaire du 2$^{\text{nd}}$ ordre** :

$$mx''(t) + cx'(t) + kx(t) = F_{ext}(t)$$

avec conditions initiales $x(0) = x'(0) = 0$ pour un mobile initialement au repos.

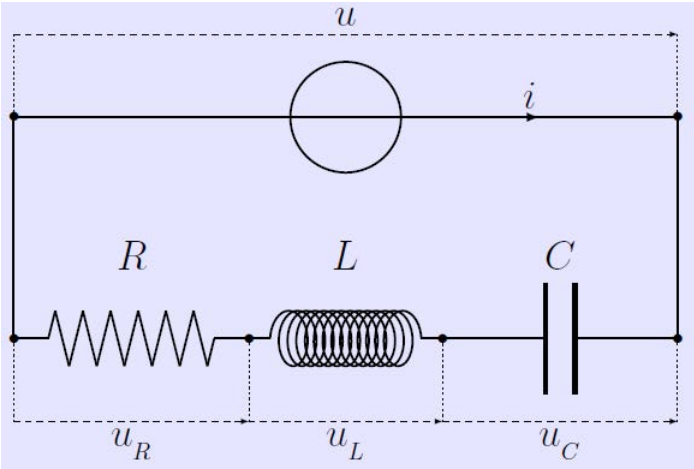
2.1.3 Un problème d'électrocinétique : circuit RLC série

On dispose d'un résistor de résistance R, d'une bobine d'inductance L et d'un condensateur de capacité C montés en série et alimentés par un générateur délivrant une tension u.

- u_R : tension aux bornes du résistor
- u_L : tension aux bornes de la bobine
- u_C : tension aux bornes du condensateur
- u : tension délivrée par le générateur
- i : courant traversant le circuit

q : quantité d'électricité correspondante ($\frac{dq}{dt}(t) = i(t)$)

Les lois d'Ohm, de Faraday et de Kirchhoff s'écrivent
• $u(t) = u_R(t) + u_c(t) + u_L(t)$;



• $u_R(t) = R \cdot i(t), \quad u_L(t) = L\frac{di}{dt}(t), \quad q(t) = C \cdot u_c(t).$
Elles conduisent à l'**équation différentielle linéaire du 2nd ordre**

$$Lu_C''(t) + Ru_C'(t) + \frac{1}{C}u_C(t) = \frac{1}{C}u(t)$$

avec conditions initiales $u_C(0) = u_C'(0) = 0$ pour un condensateur initialement déchargé.

2.2 Équations différentielles linéaires du 1er ordre

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désigne indifféremment les ensembles $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

2.2.1 Définitions

Définition 2.1
Une équation différentielle linéaire (EDL) du premier ordre à coefficients constants est une équation de la forme :

$$u'(t) + a \cdot u(t) = \varphi(t) \qquad (E)$$

où

- *a est une **constante** fixée (un élément de $\mathbb{K}$)*
- *$\varphi : I \to \mathbb{K}$ est une application fixée continue sur un intervalle I , appelée second membre de l'équation,*
- *u est une fonction inconnue dérivable sur I.*

On rencontre aussi les notations $u'(t) = \frac{du}{dt}(t) = \dot{u}(t)$: notations de Lagrange/Leibniz/Newton, utilisées notamment en physique.

Définition 2.2
Résoudre l'équation (E), c'est trouver toutes les fonctions $u : I \to \mathbb{K}$ dérivables sur I qui vérifient (E).
Une telle fonction est alors appelée une solution de (E) sur l'intervalle I.

2.2.2 Solution générale

Définition 2.3
On appelle équation homogène (ou équation sans second membre) associée à (E) l'équation suivante :

$$u'(t) + a \cdot u(t) = 0. \qquad (E_0)$$

Théorème 2.1
L'ensemble des solutions de l'équation homogène (E_0) est constitué des fonctions $u_h :\to \mathbb{K}$ de la forme

$$u_h : t \mapsto \lambda e^{-at} \quad \text{avec } \lambda \in \mathbb{K}(\text{ constante arbitraire}).$$

*On dit que u_h (dépendant du paramètre λ) est la **solution générale** de (E_0).*

Preuve :

Exemple 2.1
Résoudre l'équation suivante : $3u'(t) - 5u(t) = 0$.
On montre que $u(t) = \lambda e^{\frac{5}{3}t}$ *où* λ *est une constante de* $\mathbb{K}$.

Proposition 2.1
Soit $u_p : I \to \mathbb{K}$ *une solution* ***particulière*** *de l'équation* (E) *sur* I.
Soit $u : I \to \mathbb{K}$ *une fonction dérivable. Alors :*

$$\boxed{u \text{ est une } \textbf{solution de } (E) \text{ ssi } (u - u_p) \text{ est } \textbf{une solution de } (E_0).}$$

Par la suite, l'ensemble des solutions de (E) *sur* I *est constitué des applications de la forme* $u = u_h + u_p$ *où* u_h *est une solution* ***quelconque*** *de l'équation homogène associée* (E_0).

2.2.3 Problème de Cauchy

On admet que lorsque φ est continue, l'équation (E) admet toujours au moins une solution sur I. En fait (E) admet **une infinité de solutions** (une pour chaque valeur de la constante λ dans le théorème 2.1).

Définition 2.4
Soit $t_0 \in I$ *et* $u_0 \in \mathbb{K}$ *fixés. Une équation différentielle du premier ordre sur* I *de fonction inconnue* u *vérifiant la* ***condition initiale*** $u(t_0) = u_0$ *est appelée un* ***problème de Cauchy***.

Théorème 2.2 ***(Théorème de Cauchy-Lipschitz)***
*L'équation (E) admet une **unique solution** u sur I qui vérifie la condition initiale $u(t_0) = u_0$.*
*En particulier, l'équation **homogène** (E_0) admet une **unique solution** u sur I qui vérifie la condition initiale $u(t_0) = u_0$: elle est donnée par $u : t \mapsto u_0 e^{-a(t-t_0)}$.*
Autrement dit, rajouter une condition initiale permet de fixer la valeur de la constante λ dans le théorème 2.1.

2.2.4 Principe de superposition

Proposition 2.2
Soit $a \in K$, $(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{K}^2$ et φ_1, φ_2 deux applications continues de I dans $\mathbb{K}$.
Supposons avoir trouvé deux fonctions particulières u_1 et u_2 telles que :

- *u_1 est une solution de l'équation $u'(t) + au(t) = \varphi_1(t)$ sur I ;*
- *u_2 est une solution de l'équation $u'(t) + au(t) = \varphi_2(t)$ sur I.*

Alors la fonction $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2$ est une solution de l'équation $u'(t) + au(t) = \alpha_1\varphi_1(t) + \alpha_2\varphi_2(t)$.

Ce principe de superposition est très utile pour trouver des solutions particulières dans le cas où le second membre de l'équation (E) s'écrit comme somme de fonctions élémentaires. Cela permet de décomposer un problème compliqué en plusieurs problèmes plus simples. Il faut toutefois faire attention à appliquer ce principe uniquement aux équations différentielles **linéaires**.

Exemple 2.2 ***Loi de désintégration radioactive***
La réduction du nombre de noyaux radioactifs (instables) dans un échantillon est proportionnelle au nombre de noyaux restants. Ce phénomène peut se modéliser, en notant $N(t)$ le nombre moyen de noyaux restants à l'instant t, N_0 le nombre de noyaux initialement présents et λ le taux moyen de désintégration, par l'équation $N'(t) = -\lambda N(t)$ avec $N(0) = N_0$.

La solution est donnée évidemment par $N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$, $t \in \mathbb{R}^+$.

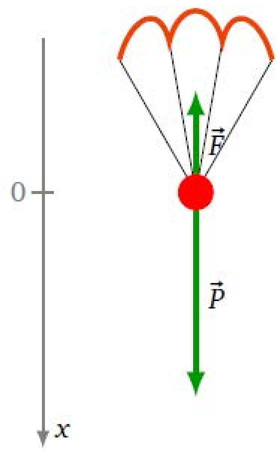
2.2.5 Second membre polynômial

Proposition 2.3
Si le second membre φ de (E) est une fonction polynôme P non nulle de degré d :

- *si $a \neq 0$, alors il existe une solution polynômiale de degré d ;*
- *si $a = 0$, alors il existe une solution polynômiale de degré $d + 1$.*

Exemple 2.3
Résoudre l'équation suivante : $u'(t) - 3u(t) = t^2 - 2t + 5$.
On montre que la solution est $u(t) = \lambda e^{3t} - \frac{1}{3}t^2 + \frac{4}{9}t - \frac{41}{27}$ où λ est une constante de $\mathbb{K}$.

Exemple 2.4 *(mouvement d'un parachutiste)*
On étudie le mouvement d'un mobile constitué d'un parachutiste équipé de son parachute, dans le référentiel terrestre. La masse du mobile vaut m . Pour simplifier, on supposera qu'il n'y a pas de vent et que la trajectoire est rigoureusement verticale. ***L'objectif est de trouver la position du parachutiste.***



Le parachute fait subir une force de frottement opposée à sa vitesse. On suppose que le frottement est proportionnel à la vitesse : $F = -fmv$ (f est le coefficient de frottement). Ainsi le principe fondamental de la mécanique devient $mg - fmv = m\frac{dv}{dt}$ où g est la constante de gravitation. Ce qui conduit à la relation : $\frac{dv}{dt}(t) = g - f \cdot v(t)$ avec $v(0) = 0$ (le parachute se lance avec une vitesse nulle).
On obtient l'équation différentielle suivante :

$$\frac{dv}{dt}(t) + f \cdot v(t) = g \qquad (E) \qquad \text{avec } v(0) = 0.$$

Résolution de l'équation homogène associée à (E) :
On utilise la même technique que précédemment, on trouve $v_h(t) = \lambda e^{-ft},\ \lambda \in \mathbb{R}$.
Recherche d'une solution particulière de (E) sous la forme de $v_p(t) = B$ où B est une constante réelle (car g est une constante).
On a $v_p'(t) = 0$, d'où $fB = g$ ce qui donne $B = \frac{g}{f}$ et par conséquent $v_p(t) = \frac{g}{f}$.
Donc $v(t) = \lambda e^{-ft} + \frac{g}{f},\ \lambda \in \mathbb{R}$.
Condition initiale : $v(0) = 0$ donne $\lambda = -\frac{g}{f}$ et ensuite $v(t) = \frac{g}{f} - \frac{g}{f}e^{-ft}$.
Réponse au problème initiale :

- **Vitesse limite :** Lorsque $t \to \infty,\ v(t) \to v_\infty = \frac{g}{f}$ qui représente la vitesse limite que le parachutiste ne peut dépasser. Expérimentalement, on mesure que v_∞ vaut environ $5m/s$ (soit environ $20km/h$), et comme $g \approx 9,81m/s^2$, cela permet de calculer le coefficient de frottement f.
- **Position :** Comme $v(t) = \frac{dx}{dt}(t)$, trouver la position $x(t)$ revient à trouver une primitive de $v(t)$: $x(t) = \frac{g}{f}t + \frac{g}{f^2}\left(e^{-ft} - 1\right)$ en prenant comme convention $x(0) = 0$.

2.2.6 Second membre exponentiel

Proposition 2.4
Si le second membre φ de (E) est une fonction de la forme $t \mapsto Ae^{\alpha t}$ avec $(\alpha, A) \in \mathbb{K}^2$:

- *si $\alpha \neq -a$, alors la fonction $u_p : t \mapsto \dfrac{A}{\alpha + a} e^{\alpha t}$ est une solution particulière de (E) ;*
- *si $\alpha = -a$, alors la fonction $u_p : t \mapsto Ate^{\alpha t}$ est une solution particulière de (E).*

Remarque 2.1 *(Méthode pratique)*
En pratique, dans le cas où $\alpha \neq -a$, on recherche une solution particulière de la forme $u_p : t \mapsto Be^{\alpha t}$ avec $B \in \mathbb{K}$ que l'on reporte dans (E) pour en tirer une équation sur B.

Exemple 2.5
Résoudre les équations différentielles suivantes :
(a) $u'(t) + u(t) = e^t$; *(b)* $u'(t) + u(t) = e^{-t}$.
Montrer que pour (a) $u(t) = \lambda e^{-t} + \frac{1}{2}e^t$ et pour (b) $u(t) = (\lambda + t)e^{-t}$ où λ est une constante de $\mathbb{K}$.

2.2.7 Second membre trigonométrique

On suppose ici que dans l'équation différentielle (E), la constante a est **réelle**.

Proposition 2.5
Si le second membre φ de (E) est défini par $\varphi(t) = A\cos(\omega t)$ ou $A\sin(\omega t)$ avec $\omega > 0$ et $A \in \mathbb{R}^*$, voici deux méthodes pour déterminer une solution particulière de (E) reposant sur le fait que $A\cos(\omega t) = \mathfrak{Re}(Ae^{i\omega t})$ et $A\sin(\omega t) = \mathfrak{Im}(Ae^{i\omega t})$ où $\mathfrak{Re}(z)$ et $\mathfrak{Im}(z)$ désignent respectivement la partie réelle et la partie imaginaire du complexe z.

- ***Méthode 1*** *(utilisée en physique)*

  1. *On cherche une solution particulière* ***complexe*** *de l'équation « complexifiée » :*

  $$z'(t) + az(t) = Ae^{iwt}$$

     de la forme $z_p : t \mapsto Be^{iwt}$ avec $B \in \mathbb{C}$ (en physique, on recherche souvent B sous la forme $Re^{i\psi}$ avec $R > 0$ et $\psi \in R$, donc z_p est de la forme $t \mapsto Re^{i(\omega t+\psi)}$).
  2. *Si $\varphi(t) = \cos(\omega t)$ (resp. $\sin(\omega t)$) on prend la partie réelle (resp. imaginaire) de z_p, et l'on obtient une solution particulière* ***réelle*** *$u_p : I \mapsto \mathbb{R}$ de l'équation (E).*
- ***Méthode 2*** *(méthode directe)*
  On recherche directement une solution particulière réelle de (E) sous la forme $t \mapsto \mu\cos(\omega t) + \nu\sin(\omega t)$ avec $(\mu, \nu) \in \mathbb{R}^2$ (ou sous la forme $t \mapsto R\cos(\omega t + \psi)$ avec $R > 0$ et $\psi \in \mathbb{R}$).

Exemple 2.6
Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation différentielle : $u'(t) + 3u(t) = 4e^{-t} - 5e^{-3t} + 13\sin(2t) \qquad (E)$.

Montrer que :

1. $u_h(t) = \lambda e^{-3t},\ \lambda \in \mathbb{R}$: solution générale de l'équation homogène associée $u_h'(t) + 3u_h(t) = 0$.
2. $u_p(t) = 2e^{-t} - 5te^{-3t} - 2\cos(2t) + 3\sin(2t)$: solution particulière de (E).
   Indication : poser $u_p = B_1e^{-t} + B_2te^{-3t} + \mu\cos(2t) + \nu\sin(2t)$ avec $B_1,\ B_2,\ \mu$ et ν constantes réelles à déterminer.

Remarque 2.2 ***Approche complexe***
Pour trouver une solution particulière de l'équation (E') : $u_3'(t) + 3u_3(t) = \sin(2t)$, *on peut aussi utiliser la méthode des complexes.*
On introduit l'équation complexifiée : $z'(t) + 3z(t) = e^{2it}$.
On cherche une solution particulière de la forme $z_p(t) = Be^{2it}$ *avec* $B \in \mathbb{C}$.
En reportant dans (E'), *on trouve* $B = \dfrac{1}{3+2i} = \dfrac{1}{13}(3-2i)$.
D'où

$$\begin{aligned} z_p(t) &= \frac{1}{13}(3-2i)\left(\cos(2t) + i\sin(2t)\right) \\ &= \frac{1}{13}\Big(\left(3\cos(2t) + 2\sin(2t)\right) + i\left(-2\cos(2t) + 3\sin(2t)\right) \Big) \end{aligned}$$

et comme le second membre est un sinus on a donc $u_p(t) = \mathfrak{Im}(z_p(t)) = \dfrac{1}{13}\left(-2\cos(2t) + 3\sin(2t)\right)$.

On retrouve la même solution particulière pour le troisième terme du second membre de l'équation (E).

2.3 Équations différentielles linéaires du 2nd ordre

2.3.1 Définitions

Définition 2.5
Une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants est une équation de la forme :

$$u''(t) + a \cdot u'(t) + b \cdot u(t) = \varphi(t) \qquad (E)$$

où

- a *et* b *sont des* ***constantes réelles*** *fixées, appelées* ***coefficients*** *de l'équation*
- $\varphi : I \to \mathbb{K}$ *est une application fixée continue sur un intervalle* I *, appelée* ***second membre*** *de l'équation,*
- u *est une fonction inconnue 2 fois dérivables sur* I.

On rencontre aussi (notamment en physique) les notations $u'(t) = \dfrac{du}{dt}(t) = \dot{u}(t)$ et $u''(t) = \dfrac{d^2u}{dt^2}(t) = \ddot{u}(t)$ (Notations de Lagrange/Leibniz/Newton.)

Définition 2.6
Résoudre l'équation (E), *c'est trouver toutes les fonctions* $u : I \to \mathbb{K}$ *2 fois dérivables sur* I *qui vérifient* (E).
Une telle fonction est alors appelée une solution de (E) *sur l'intervalle* I.

2.3.2 Solution générale

Définition 2.7
On appelle ***équation homogène*** *(ou équation sans second membre)* ***associée à*** $(\boldsymbol{E})$ *l'équation suivante :*

$$u''(t) + a \cdot u'(t) + b \cdot u(t) = 0. \qquad (E_0)$$

Définition 2.8
On appelle ***équation caractéristique associée à*** $(\boldsymbol{E})$ *l'équation suivante :*

$$r^2 + ar + b = 0. \qquad (EC)$$

Remarque 2.3
Une fonction exponentielle $t \mapsto e^{rt}$ *est solution de* (E_0) *ssi* r *est racine de* (EC).
En effet $\left(e^{rt}\right)' = re^{rt}$, $\left(e^{rt}\right)'' = r^2e^{rt}$. *Il suffit ensuite de remplacer ces expressions dans* (E_0) *et de simplifier par* e^{rt} *pour trouver l'équation* (EC).

2.3.3 Solution de l'équation homogène

Théorème 2.3

On note Δ le discriminant de l'équation caractéristique (EC).
On note $\mathcal{S}_{h,\mathbb{C}}$ l'ensemble des solutions à valeurs ***complexes*** *et $\mathcal{S}_{h,\mathbb{R}}$ l'ensemble des solutions à valeurs* ***réelles*** *de l'équation homogène (E_0). Bien sûr $\mathcal{S}_{h,\mathbb{R}} \subset \mathcal{S}_{h,\mathbb{C}}$.*

- *Si $\Delta > 0$: l'équation (EC) a deux racines* ***réelles distinctes*** *r_1 et r_2 et :*

$$\mathcal{S}_{h,\mathbb{C}} = \{t \mapsto \lambda_1 e^{r_1 t} + \lambda_2 e^{r_2 t}, (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^2\};$$

$$\mathcal{S}_{h,\mathbb{R}} = \{t \mapsto \lambda_1 e^{r_1 t} + \lambda_2 e^{r_2 t}, (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2\}.$$

- *Si $\Delta = 0$: l'équation (EC) a une racine* ***réelle double*** *r_0 et :*

$$\mathcal{S}_{h,\mathbb{C}} = \{t \mapsto (\lambda_1 t + \lambda_2)\, e^{r_0 t}, (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^2\};$$

$$\mathcal{S}_{h,\mathbb{R}} = \{t \mapsto (\lambda_1 t + \lambda_2)\, e^{r_0 t}, (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2\}.$$

- *Si $\Delta < 0$: l'équation (EC) a deux racines* ***complexes non réelles conjuguées*** *$r_1 = \delta + i\omega$ et $r_2 = \delta - i\omega$ $(\delta \in \mathbb{R},\ \omega \in \mathbb{R}^*)$, et :*

$$\mathcal{S}_{h,\mathbb{C}} = \{t \mapsto \lambda_1 e^{r_1 t} + \lambda_2 e^{r_2 t}, (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^2\};$$

$$\mathcal{S}_{h,\mathbb{R}} = \{t \mapsto e^{\delta t}\left(\lambda \cos(\omega t) + \mu \sin(\omega t)\right),\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}.$$

Exemple 2.7

Résoudre les équations différentielles homogènes suivantes :

1. $u'' - u' - 2u = 0$
2. $u'' - 4u' + 4u = 0$
3. $u'' - 2u' + 5u = 0$

Exemple 2.8 ***(Oscillateur harmonique libre)***
L'équation : $u''(t) + \omega^2 u(t) = 0$ *($\omega > 0$ fixé) admet pour solution générale réelle*

$$t \mapsto \lambda \cos(\omega t) + \mu \sin(\omega t),\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

En effet $\Delta = -4\omega^2$ *toujours négatif, d'où* $r_1 = i\omega$ *et* $r_2 = -i\omega$.

2.3.4 Solution générale

On revient à l'équation avec second membre (E) :

$$u''(t) + a \cdot u'(t) + b \cdot u(t) = \varphi(t)$$

Proposition 2.6 ***(Un premier principe de superposition)***
Soit u_p *une solution particulière de* (E) *sur* I.
L'ensemble des solutions de (E) *sur* I *est constitué des applications de la forme* $u = u_p + u_h$ *où* u_h *est une solution de l'équation homogène associée* (E_0).

Comme dans le cas des équations d'ordre 1, on admet que lorsque φ est continue, l'équation (E) admet toujours au moins une solution sur I.
En fait (E) admet une **infinité de solutions** (car les constantes λ_1 et λ_2 du théorème 2.3 peuvent prendre une infinité de valeurs). En général, comme les solutions dépendent de 2 paramètres, il faut deux conditions pour obtenir une solution unique.

Théorème 2.4 ***(Théorème de Cauchy-Lipschitz)***
Soit $t_0 \in I$ *et* $u_0, v_0 \in \mathbb{K}$ *fixés. Alors L'équation* (E) *admet une* ***unique solution*** u *sur* I *qui vérifie les* ***conditions initiales*** $u(t_0) = u_0$ *et* $u'(t_0) = v_0$.
Il s'agit d'un ***problème de Cauchy*** *pour le second ordre.*

Exemple 2.9 ***(Oscillateur harmonique libre : suite)***
L'équation : $u''(t) + \omega^2 u(t) = 0$ *($\omega > 0$ fixé) avec conditions initiales* $u(0) = u_0$ *et* $u'(0) = v_0$ *admet pour unique solution réelle*

$$u(t) = u_0 \cos(\omega t) + \frac{v_0}{\omega} \sin(\omega t),\ t \in \mathbb{R}^+.$$

En effet $u(0) = \lambda = u_0$ *et* $u'(t) = -\lambda\omega \sin(\omega t) + \mu\omega \cos(\omega t)$, *d'où* $u'(0) = \mu\omega = v_0$ *et donc* $\mu = \frac{v_0}{\omega}$.

2.3.5 Seconds membres particuliers

(polynômial, exponentiel ou trigonométrique)

Proposition 2.7
Si le second membre φ *de* (E) *est une fonction polynôme non nulle de degré* d :

- *si* $b \neq 0$, *alors il existe une solution polynômiale de degré* d ;
- *si* $b = 0$ *et* $a \neq 0$, *alors il existe une solution polynômiale de degré* $d + 1$;
- *si* $b = 0$ *et* $a = 0$, *alors il existe une solution polynômiale de degré* $d + 2$.

Proposition 2.8
Si le second membre φ *de* (E) *est une fonction de la forme* $t \mapsto Ae^{\alpha t}$ *avec* $(\alpha, A) \in \mathbb{K}^2$:

- *si* α ***n'est pas une racine*** *de l'équation caractéristique* (EC), *alors la fonction* $u_p : t \mapsto \dfrac{A}{\alpha^2 + a\alpha + b} e^{\alpha t}$ *est une solution particulière de* (E) ;
- *si* α ***est une racine simple*** *de l'équation caractéristique* (EC), *alors la fonction* $u_p : t \mapsto \dfrac{A}{2\alpha + a} t e^{\alpha t}$ *est une solution particulière de* (E) ;
- *si* α ***est une racine double*** *de l'équation caractéristique* (EC), *alors la fonction* $u_p : t \mapsto \dfrac{A}{2} t^2 e^{\alpha t}$ *est une solution particulière de* (E).

Proposition 2.9
Si le second membre φ de (E) est une fonction de la forme $\varphi(t) = A\cos(\omega t)$ ou $A\sin(\omega t)$ avec $\omega > 0$ et $A \in \mathbb{R}^*$:
la méthode est similaire à celle utilisée pour les équations d'ordre 1 en passant par le second membre intermédiaire $t \mapsto Ae^{iwt}$.

Méthode pratique :
En pratique, pour un second membre de (E) de la forme $t \mapsto Ae^{\alpha t}$ sur I avec $(\alpha, A) \in \mathbb{K}^2$:

- lorsque α **n'est pas une racine** de (EC), on recherche une solution particulière de la forme $u_p : t \mapsto Be^{\alpha t}$ avec $B \in \mathbb{K}$,
- lorsque α **est une racine simple** de (EC), on recherche une solution particulière de la forme $u_p : t \mapsto Bte^{\alpha t}$ avec $B \in \mathbb{K}$,
- lorsque α **est une racine double** de (EC), on recherche une solution particulière de la forme $u_p : t \mapsto Bt^2e^{\alpha t}$ avec $B \in \mathbb{K}$

que l'on reporte dans (E) pour en tirer une équation sur B.

Remarque 2.4 *(Second membre polynôme $\times$ exponentiel)*
Cette méthode est généralisable au cas de seconds membres de la forme $t \mapsto P(t)e^{\alpha t}$ avec $\alpha \in \mathbb{K}$ et P un polynôme de degré p.
Plus précisément : dans le cas où α ***n'est pas une racine*** *(resp.* ***est une racine simple, est une racine double****) de (EC), il existe une solution particulière de la forme u_p : $t \mapsto Q(t)e^{\alpha t}$ (resp. $t \mapsto tQ(t)e^{\alpha t}$, $t \mapsto t^2Q(t)e^{\alpha t}$) où Q est un polynôme de degré p.*

Autre méthode pratique : *la boite à z*
Utilité : Se « débarrasser » des exponentiels lors de la recherche d'une solution particulière.
Si le second membre φ de (E) est une fonction de la forme $\varphi(t) = P(t)e^{\alpha t}$ où P est un polynôme (à coefficients réels, mais on peut aussi le prendre à coefficients complexes) et $\alpha \in \mathbb{C}$.
On cherche à obtenir une solution particulière.
Rappel :
Soit l'equation du 2$^{\text{nd}}$ degré : $ax^2 + bx + c = 0$ qu'on peut écrire autrement en divisant par a car $a \neq 0$: $x^2 + \alpha x + \beta = 0$ et soient x_1 et x_2 ses racines (respectivement x_0 dans le cas d'une racine double).
♣ On rappelle les deux propriétés suivantes (**à faire en exercice**) :

- la somme des racines est égale à $-\alpha$, c.-à-d. $x_1 + x_2 = -\alpha$ (respectivement $2 \cdot x_0 = -\alpha$ dans le cas d'une racine double).
- le produit des racines est égal à β, c.-à-d. $x_1 \cdot x_2 = \beta$ (respectivement $x_0^2 = \beta$ dans le cas d'une racine double).

♣ Réciproquement si on connaît les solutions de l'équation : $x^2 + \alpha x + \beta = 0$, x_1, x_2 on peut déduire facilement les coefficients $\alpha = -(x_1 + x_2)$ et $\beta = x_1 \cdot x_2$ (respectivement $\alpha = -2 \cdot x_0$ et $\beta = x_0^2$ dans le cas d'une racine double).

Remarque 2.5
Si le second membre φ de (E) est une fonction de la forme $\varphi(t) = P(t)e^{\beta t}\cos(\omega t)$ (respectivement $\varphi(t) = P(t)e^{\beta t}\sin(\omega t)$) on passe par $\phi(t) = P(t)e^{\alpha t}$ avec $\alpha = \beta + i\omega$ et on prend la partie réelle (respectivement la partie imaginaire) de la solution trouvée.

Si on pose $u(t) = z(t)e^{\alpha t}$ on montre facilement que u est solution de (E) si et seulement si z est solution de l'équation du second degré à coefficients constants :

$$z'' + cz' + d = P(t) \qquad (E')$$

La question est : Comment obtenir rapidement les nouveaux coefficients c et d de l'équation (E') ?
Les solutions de l'équation homogène en u sont u_1 et u_2, celles de l'équation homogène en z sont donc $z_1(t) = u_1(t)e^{-\alpha t}$, $z_2(t) = u_2(t)e^{-\alpha t}$. On connaît donc les solutions de l'équation homogène $z'' + cz' + dz = 0$. On peut alors affirmer que les racines de l'équation caractéristique associée à (E') sont $r_1 - \alpha$ et $r_2 - \alpha$ (où

$r_0-\alpha$ dans le cas d'une racine double). On a alors immédiatement les coefficients c et d, (car $-c$ est la somme des racines et d est le produit, voir rappel précédent).
On résume cela dans ce qu'on appelle la « boite à z » :
On place dans la première colonne les solutions u_1 et u_2, et dans la seconde les solutions z_1 et z_2. On lit alors les racines de l'équation caractéristique de l'équation homogène en z. On en déduit l'équation homogène associée à (E') et in fine, (E') elle même. Il reste ensuite à chercher z sous la forme d'un polynôme (de degré à déterminer).

Exemple 2.10
Résoudre l'équation différentielle suivante en utilisant « la boite à z » : $u'' - 5u' + 6u = te^t \qquad (E)$.

L'équation caractéristique est $r^2 - 5r + 6 = (r-2)(r-3)$, les solutions de l'équation homogène en u sont de la forme $\lambda e^{2t} + \mu e^{3t}$. On pose $u(t) = z(t)e^t$ et on écrit la boite à z.

$u \underset{\times e^t}{\leftarrow} z$	
e^{2t}	e^t
e^{3t}	e^{2t}

Les solutions de l'équation homogène en z sont e^t et e^{2t} . On peut donc affirmer que les racines de son équation caractéristique (celle de l'équation en z) sont 1 et 2.
On connaît ainsi l'équation caractéristique : $r^2 -$ (somme des racines) $\times\, r +$ (produit des racines) $= 0$.
L'équation en z est donc : $z" - (1+2)z' + (1\times 2)z = t$, c.-à-d. $z" - 3z' + 2z = t$.
On cherche ensuite une solution sous la forme d'un polynôme de degré 1, $z(t) = at + b$.
On a alors : $z" - 3z' + 2z = t \Leftrightarrow 2at + 2b - 3a = t \Leftrightarrow a = \frac{1}{2},\ b = \frac{3}{4}$.
Donc $z(t) = \frac{t}{2} + \frac{3}{4}$ et $u_p(t) = \left(\frac{t}{2} + \frac{3}{4}\right)e^t$.
Conclusion : Les solutions de l'équation (E) sont : $u(t) = \lambda e^{2t} + \mu e^{3t} + \left(\frac{t}{2} + \frac{3}{4}\right)e^t$ où $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$.

Exemple 2.11
Résoudre les équations différentielles suivantes en utilisant « la boite à z » :

1. $2u'' - 6u' + 4u = te^{2t}$
2. $u'' - 6u' + 9u = e^{-t}$
3. $u'' - u' - 2u = \cos(t)$
4. $u'' - 2u' + 2u = \sin(2t)$
5. $u'' + u = (5t-7)e^{-t}\cos(t)$
6. $2u'' - 4u' + 4u = t^{2020}e^{2t}$

On trouve respectivement :

1. $u(t) = \lambda e^t + \mu e^{2t} + t\left(\frac{t}{4} - \frac{1}{2}\right)e^{2t}$ où $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$.
2. $u(t) = (\lambda t + \mu)\, e^{3t} + t\frac{1}{16}e^{-t}$ où $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$.
3. $u(t) = \lambda e^{-t} + \mu e^{2t} - \frac{3}{10}\cos(t) - \frac{1}{10}\sin(t)$ où $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$.
4. $u(t) = \lambda e^t\cos(t) + \mu e^t\sin(t) + \frac{1}{5}\cos(2t) - \frac{1}{10}\sin(2t)$ où $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$.
5. $u(t) = \lambda\cos(t) + \mu\sin(t) + t(\cos(t) - 2\sin(t)) - e^{-t}\cos(t)$ où $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$.
6. $u(t) = (\lambda t + \mu)\, e^{2t} + \frac{1}{2021\times 2022}t^{2022}e^{2t}$ où $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$.

2.3.6 Principe de superposition

Proposition 2.10
Soit $(a, b) \in K^2$, $(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{K}^2$ *et* φ_1, φ_2 *deux applications continues de* I *dans* $\mathbb{K}$.
Supposons avoir trouvé deux fonctions particulières u_1 *et* u_2 *telles que :*

- u_1 *est une solution de l'équation* $u''(t) + au'(t) + bu(t) = \varphi_1(t)$ *sur* I *;*
- u_2 *est une solution de l'équation* $u'(t) + au'(t) + bu(t) = \varphi_2(t)$ *sur* I*.*

Alors la fonction $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2$ *est une solution de l'équation* $u''(t) + au'(t) + bu(t) = \alpha_1\varphi_1(t) + \alpha_2\varphi_2(t)$*.*

Exemple 2.12
Résoudre les équations différentielles de l'exemple 2.7 avec respectivement les seconds membres suivants :

1. $\varphi_1(t) = te^t + 2\sin(t) + t^2 - 3t + 1$
2. $\varphi_2(t) = \mathrm{ch}(t)$
3. $\varphi_3(t) = e^t(\cos(2t) - \sin(2t))$

Rappel :
ch (ou cosh) et sh (ou sinh) sont des fonctions appelées respectivement **cosinus hyperbolique** et **sinus hyperbolique** et qui sont définies par : $\mathrm{ch}(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ et $\mathrm{sh}(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

2.4 Compléments : solution des exemples introductifs

2.4.1 Le problème de cinématique : trajectoire balistique

Reprenons le problème du projectile décrit en introduction de masse m, propulsé dans l'air à une vitesse initiale $\overrightarrow{v_0}$ sous un angle de tir α.
Les coordonnées du projectile $((x(t); y(t))$ au cours du temps vérifient les systèmes

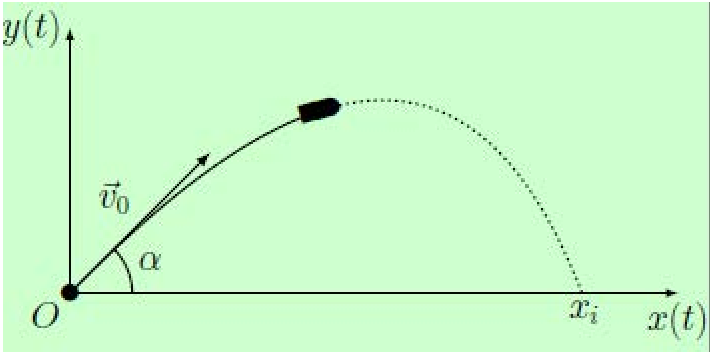
$$\begin{cases} x''(t) + \kappa x'(t) = 0 & (E_x) \\ x(0) = 0,\ x'(0) = v_0 \cos(\alpha) & (CI_x) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} y''(t) + \kappa y'(t) = -g & (E_y) \\ y(0) = 0,\ y'(0) = v_0 \sin(\alpha) & (CI_y) \end{cases}$$

1. **Équation caractéristique**
   Les équations (E_x) et (E_y) admettent la même équation caractéristique $r^2 + \kappa r = 0$, de racines 0 et $-\kappa$.
2. **Résolution de** $(E_x) - (CI_x)$
   La solution générale de (E_x) est donnée par $x(t) = \lambda + \mu e^{-\kappa t},\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.
   En reportant cette expression dans (CI_x), on trouve $\lambda = -\mu = \dfrac{v_0 \cos(\alpha)}{\kappa}$. D'où
   $$x(t) = \frac{v_0 \cos(\alpha)}{\kappa}(1 - e^{-\kappa t}).$$
3. **Résolution de** $(E_y) - (CI_y)$
   La solution générale de l'équation homogène associée (E_y) est donnée par $y_h(t) = \lambda + \mu e^{-\kappa t},\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.
   Une solution particulière de (E_y) est $y_p(t) = -\frac{g}{\kappa} t$.
   La solution générale de (E_y) est alors $y(t) = y_h(t) + y_p(t)$. En reportant cette expression dans (CI_y), on trouve $\lambda = -\mu = \dfrac{v_0 \sin(\alpha)}{\kappa} + \dfrac{g}{\kappa^2}$. D'où
   $$y(t) = \left(\frac{v_0 \sin(\alpha)}{\kappa} + \frac{g}{\kappa^2}\right)(1 - e^{-\kappa t}) - \frac{g}{\kappa} t.$$
4. **Trajectoire du projectile**
   La trajectoire du projectile est donc portée par la courbe paramétrée
   $$\begin{cases} x(t) = \frac{v_0 \cos(\alpha)}{\kappa}(1 - e^{-\kappa t}) \\ y(t) = \left(\frac{v_0 \sin(\alpha)}{\kappa} + \frac{g}{\kappa^2}\right)(1 - e^{-\kappa t}) - \frac{g}{\kappa} t. \end{cases}$$
   Une représentation cartésienne peut être obtenue en éliminant le paramètre t entre $x(t)$ et $y(t)$. La première équation fournit $t = -\frac{1}{\kappa} \ln\left(1 - \dfrac{\kappa}{v_0 \sin(\alpha)} x(t)\right)$ que l'on reporte dans la deuxième. Cela donne
   $$y = \left(\tan(\alpha) + \frac{g}{\kappa v_0 \cos(\alpha)}\right) x + \frac{g}{\kappa^2} \ln\left(1 - \frac{\kappa}{v_0 \sin(\alpha)} x\right).$$

Remarque 2.6
la portée du tir (voir graphique ci-dessous) est le point d'impact $(x_i, 0)$ du projectile au sol. Ce point vérifie l'équation $y_i = 0$, soit :

$$\left(\tan(\alpha) + \frac{g}{\kappa v_0 \cos(\alpha)}\right) x_i + \frac{g}{\kappa^2} \ln\left(1 - \frac{\kappa x_i}{v_0 \sin(\alpha)}\right) = 0$$

que l'on ne peut pas résoudre explicitement.



5. **Cas d'un tir dans le vide**
   Dans cette situation, il n'y a plus de résistance et l'on a $\kappa = 0$. Les coordonnées du projectile vérifient les systèmes simplifiés

$$\begin{cases} x''(t) = 0 & (E_x) \\ x(0) = 0,\ x'(0) = v_0\cos(\alpha) & (CI_x) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} y''(t) = -g & (E_y) \\ y(0) = 0,\ y'(0) = v_0\sin(\alpha) & (CI_y) \end{cases}$$

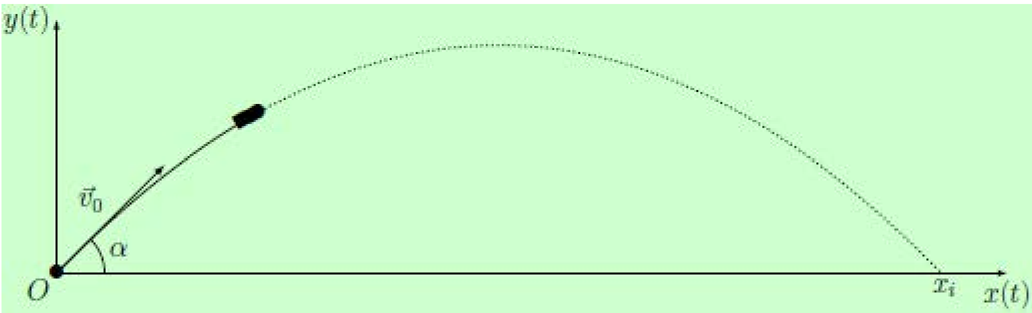
   Les équations (Ex) et (Ey) se résolvent directement et l'on trouve

$$\begin{cases} x(t) = v_0\cos(\alpha)t \\ y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0\sin(\alpha)t \end{cases}$$

   En éliminant le paramètre t entre $x(t)$ et $y(t)$, on trouve immédiatement que la trajectoire est portée par la courbe d'équation

$$y = -\frac{g}{2v_0^2\cos^2(\alpha)}x^2 + \tan(\alpha)x.$$

Il s'agit d'une parabole (voir graphique ci-après) de portée $x_i = \frac{v_0^2}{g}\sin(2\alpha)$.

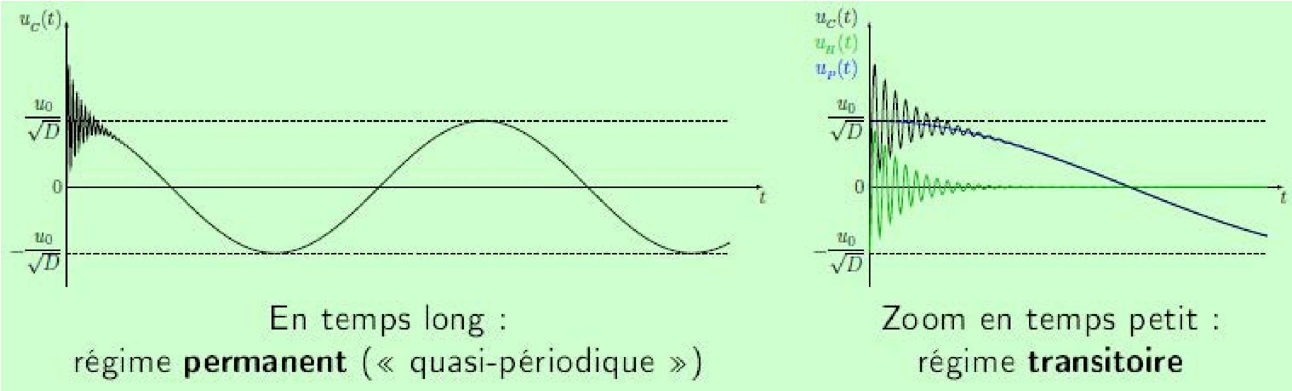


2.4.2 Le problème d'électrocinétique : circuit RLC série

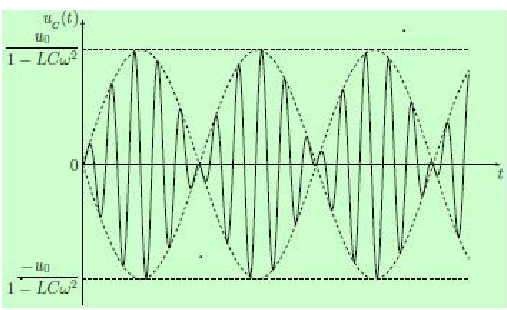
Reprenons le circuit RLC décrit en introduction avec une tension en entrée sinusoïdale d'amplitude $u_0 > 0$ et de pulsation $\omega \leqslant 0$: $u(t) = u_0 \cos(\omega t)$.
La tension aux bornes du condensateur vérifie le système

$$\begin{cases} Lu_C''(t) + Ru_C'(t) + \frac{1}{C}u_C(t) = \frac{1}{C}u_0\cos(\omega t) & (E) \\ u_C(0) = u_C'(0) = 0 & (CI) \end{cases}$$

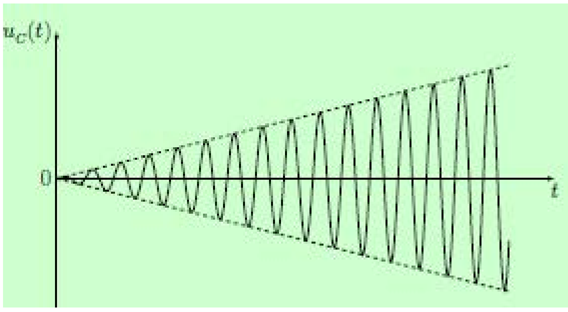
1. **Résolution de l'équation homogène associée à $(\boldsymbol{E})$**
   L'équation **homogène** associée à (E) s'écrit : $Lu_C''(t) + Ru_C'(t) + \frac{1}{C}u_C(t) = 0 \qquad (E_0)$
   d'équation **caractéristique** (EC) : $Lr^2 + Rr + \frac{1}{C} = 0$.
   Notons r_1 et r_2 les racines de (C), $\Delta = R^2 - 4\frac{L}{C}$ son discriminant et posons $\delta = \sqrt{|\Delta|}$.
   La solution générale de (E_0) sur $\mathbb{R}$ s'écrit, selon le signe de Δ selon :
   - si $4\frac{L}{C} < R^2$, alors $r_1 = \frac{-R-\delta}{2L}, r_1 = \frac{-R+\delta}{2L}$ et $u_h(t) = e^{-\frac{R}{2L}t}\left[\lambda\cosh(\frac{\delta}{2L}t) + \mu\sinh(\frac{\delta}{2L}t)\right]$;
   - si $4\frac{L}{C} > R^2$, alors $r_1 = \frac{-R-i\delta}{2L}, r_1 = \frac{-R+i\delta}{2L}$ et $u_h(t) = e^{-\frac{R}{2L}t}\left[\lambda\cos(\frac{\delta}{2L}t) + \mu\sin(\frac{\delta}{2L}t)\right]$;
   - si $4\frac{L}{C} = R^2$, alors $r_1 = r_2 = r_0 = -\frac{R}{2L}$ et $u_h(t) = (\lambda t + \mu)e^{-\frac{R}{2L}t}$
     où, dans chaque cas, λ et μ sont des réels quelconques.
2. **Recherche d'une solution particulière de $(\boldsymbol{E})$**
   Remarquons que le second membre de (E) peut s'écrire $u_0\cos(\omega t) = u_0\,\mathfrak{Re}\left(e^{i\omega t}\right)$ et que, lorsque $R \neq 0$, (EC) n'a pas de racine imaginaire pure (c.-à-d. $i\omega$ n'est pas racine de (EC)).
   - Cas $R \neq 0$. On recherche une solution particulière de la forme $u_p(t) = \mathfrak{Re}\left(Ae^{i\omega t}\right)$.
     On trouve $A = \frac{u_0}{2\left[(1-LC\omega^2) + iRC\omega\right]}$ puis en posant $D = (1-LC\omega^2)^2 + (RC\omega)^2$:
     $$u_p(t) = \frac{u_0}{D}\left[(1-LC\omega^2)\cos(\omega t) + RC\omega\sin(\omega t)\right].$$
   - Cas $R = 0$. On a $\delta = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ et les racines de (EC) sont $r_1 = -\frac{i}{\sqrt{LC}}$ et $r_2 = \frac{i}{\sqrt{LC}}$.
     Deux cas sont à distinguer :
     - ⋆ si $\omega \neq \frac{1}{\sqrt{LC}}$, la solution u_p du cas précédent se simplifie selon
       $$u_p(t) = \frac{u_0}{1-LC\omega^2}\cos(\omega t);$$
     - ⋆ si $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, condition qui s'écrit encore $LC\omega^2 = 1$; on recherche ici une solution **particulière** de la forme $u_p(t) = \mathfrak{Re}\left(Bte^{i\omega t}\right)$. On obtient $B = -\frac{i\omega u_0}{2}$ puis
       $$u_p(t) = \frac{u_0}{2}\omega t\sin(\omega t).$$
3. **Résolution du système $(\boldsymbol{E}) - (\boldsymbol{CI})$**
   La solution générale de (E) s'obtient selon $u_C = u_h + u_p$.
   Enfin les conditions initiales (CI) permettent de fixer les paramètres λ et μ.
   - Cas $R \neq 0$.
     $$u_p(t) = \frac{u_0}{D}\left[(1-LC\omega^2)\cos(\omega t) + RC\omega\sin(\omega t)\right].$$
     et
     $$u_h(t) = \begin{cases} -\frac{u_0}{D}e^{-\frac{R}{2L}t}\left[(1-LC\omega^2)\cosh\left(\frac{\delta}{2L}t\right) + \frac{R}{\delta}(1+LC\omega^2)\sinh(\frac{\delta}{2L}t)\right] & \text{si } 4\frac{L}{C} < R^2 \\ -\frac{u_0}{D}e^{-\frac{R}{2L}t}\left[(1-LC\omega^2)\cos\left(\frac{\delta}{2L}t\right) + \frac{R}{\delta}(1+LC\omega^2)\sin(\frac{\delta}{2L}t)\right] & \text{si } 4\frac{L}{C} > R^2 \\ -\frac{u_0}{D}e^{-\frac{R}{2L}t}\left[(1-LC\omega^2) + \frac{R}{\delta}(1+LC\omega^2)\right] & \text{si } 4\frac{L}{C} = R^2 \end{cases}$$



- Cas $R = 0$. Posons $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$ (c'est la pulsation propre du circuit).
  L'équation (E) se réécrit alors $u_C''(t) + \omega_0^2 u_C(t) = \omega_0^2 u_0 \cos(\omega t)$.
  - ⋆ si $\omega \neq \omega_0$:
  $$u_C(t) = \frac{\omega_0^2 u_0}{\omega_0^2 - \omega^2}\left[\cos(\omega t) - \cos(\omega_0 t)\right].$$
  Lorsque ω se rapproche de ω_0, il y a un phénomène de **battements** qui se rapproche de celui de **résonance** signalé ci-dessous.
  - ⋆ si $\omega = \omega_0$:
  $$u_C(t) = \frac{u_0}{2}\omega_0 t \sin(\omega_0 t).$$
  La tension est amplifiée : il y a **résonance**.



Battement



Résonance

2.4.3 Le problème de rhéologie : système visco-élastique

Reprenons le problème du solide décrit en introduction de masse m accroché à un ressort de raideur k sollicité par une force externe sinusoïdale $F_{ext}(t) = F_0 \cos(\omega t)$ dans le cas non amorti (c.-à-d. $c = 0$).
Le déplacement vérifie le système

$$\begin{cases} mx''(t) + kx(t) = F_0 \cos(\omega t) & (E) \\ x(0) = x'(0) = 0 & (CI) \end{cases}$$

1. **Résolution de l'équation homogène associée à ($\boldsymbol{E}$)**
   L'équation **homogène** associée à (E) s'écrit : $mx''(t) + kx(t) = 0 \qquad (E_0)$
   d'équation **caractéristique** (EC) : $mr^2 + k = 0$.
   Posons $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ (c'est la pulsation **propre** du système).
   L'équation (E_0) se réécrit plus simplement : $x''(t) + \omega_0^2 x(t) = 0$
   Les racines de (EC) sont $r_1 = i\omega_0$ et $r_2 = -i\omega_0$.
   La solution générale de (E_0) sur $\mathbb{R}$ s'écrit :
   $$x_h(t) = \lambda \cos(\omega_0 t) + \mu \sin(\omega_0 t), \qquad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

2. **Recherche d'une solution particulière de ($\boldsymbol{E}$)**
   Réécrivons (E) sous la forme normalisée
   $$x''(t) + \omega_0^2 x(t) = \frac{F_0}{m} \cos(\omega t) \qquad (E)$$
   Remarquons que le second membre de (E) peut s'écrire $F_0 \cos(\omega t) = F_0 \,\mathfrak{Re}\left(e^{i\omega t}\right)$.
   Deux cas sont à distinguer :
   - Si $\omega \neq \omega_0$, on recherche une solution **particulière** de la forme $x_p(t) = \mathfrak{Re}\left(Ae^{i\omega t}\right)$.
     On trouve $A = \dfrac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}$ puis :
     $$x_p(t) = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \cos(\omega t).$$
   - Si $\omega \neq \omega_0$ condition qui s'écrit encore $m\omega^2 = k$, on recherche à présent une solution **particulière** de la forme $x_p(t) = \mathfrak{Re}\left(Bte^{i\omega t}\right)$.
     On obtient $B = -\dfrac{iF_0}{2m\omega_0}$ puis :
     $$x_p(t) = \frac{F_0}{2m\omega_0} t \sin(\omega_0 t).$$

3. **Résolution du système ($\boldsymbol{E}$) − (CI)**
   La **solution générale** de (E) s'obtient selon $x = x_h + x_p$.
   Enfin les **conditions initiales** (CI) permettent de fixer les paramètres λ et μ.
   - Si $\omega \neq \omega_0$:
     $$x(t) = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \left[\cos(\omega t) - \cos(\omega_0 t)\right].$$
     Lorsque ω se rapproche de ω_0, il y a un phénomène de **battements** qui se rapproche de celui de **résonance** signalé ci-dessous.
   - Si $\omega \neq \omega_0$:
     $$x(t) = \frac{F_0}{2m\omega_0} t \sin(\omega_0 t).$$
     Les vibrations sont amplifiées : il y a **résonance**. Ce phénomène pourrait être à l'origine de plusieurs effondrements de ponts suspendus...

2.5 Feuille d'exercices : Équations différentielles linéaires

(pour simplifier la notation, on a écrit u à la place de $u(t)$)

Exercice 2.1
Donner toutes les solutions des équations différentielles suivantes :

1. $3u' + 2u = t^3 + 6t + 1$
2. $u' - 3u = \sin(3t)$
3. $u' + u = te^{-t} + 1$
4. $u' - u = (x+1)e^x + \sin(t) + 2\cos(t)$

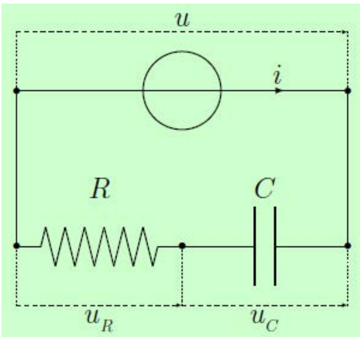
Exercice 2.2 ***Problème de Cauchy***
Déterminer les (uniques) solutions des équations de l'exercice précédent vérifiant respectivement

1. $u(0) = 3$
2. $u(0) = 0$
3. $u(0) = 0$
4. $u(0) = 2$

Exercice 2.3 ***Circuit RC série***
On dispose d'un résistor de résistance R et d'un condensateur de capacité C montés en série et alimentés par un générateur délivrant une tension u.

- *i : courant traversant le circuit*

  q : quantité d'électricité correspondante $\left(\frac{dq}{dt}(t) = i(t)\right)$
- *u_R : tension aux bornes du résistor : $u_R(t) = R \cdot i(t) = Rq'(t)$*
- *u_C : tension aux bornes du condensateur $u_C = \frac{1}{C}q((t)$*
- *u : tension délivrée par le générateur.*



La loi des mailles s'écrit $u_R + u_C = u$.
Elle conduit à l'équation différentielle $Rq'(t) + \frac{1}{C}q(t) = u(t)$
avec condition initiale $q(0) = 0$ pour un condensateur initialement déchargé.

Résolution

1. **Premier cas** : générateur de courant **continu**, c.-à-d. u est une constante égale à $u_0 > 0$.
   Montrer que $q(t) = Cu_0\left(1 - e^{-\frac{1}{RC}t}\right)$ puis $i(t) = \frac{u_0}{R}e^{-\frac{1}{RC}t}$.
2. **Deuxième cas** : générateur de courant **alternatif**, c.-à-d. $u = u_0\sin(\omega t)$ avec $u_0 > 0$.
   Montrer que $q(t) = \dfrac{Cu_0}{1+(RC\omega)^2}\left[\sin(\omega t) - RC\omega\left(\cos(\omega t) - e^{-\frac{1}{RC}t}\right)\right]$.
3. **Troisième cas** : générateur de courant **amorti**, c.-à-d. $u(t) = u_0e^{-\alpha t}$ avec $u_0,\ \alpha > 0$.
   Montrer (cas de **résonance**) que

$$q(t) = \begin{cases} \dfrac{Cu_0}{1-RC\alpha}\left(e^{-\alpha t} - e^{-\frac{1}{RC}t}\right) & \text{si } \alpha \neq \dfrac{1}{RC} \\ \dfrac{u_0}{R}te^{-\frac{1}{RC}t} & \text{si } \alpha = \dfrac{1}{RC} \end{cases}$$

Exercice 2.4

Donner toutes les solutions des équations différentielles suivantes (on pourra utiliser la boite à z) :

1. $u'' + 5u' + 4u = 6e^{-t} - 10e^{-2t}\cos(t)$
2. $u'' + 4u' + 5u = 6e^{-t} - 8e^{-2t}\cos(t)$
3. $u'' - 5u' + 6u = 4te^{2t} + 4te^{t}$
4. $u'' + 4u' + 4u = 2e^{-2t} - 8e^{-t}\sin(\sqrt{3}t)$

On trouve respectivement les solutions suivantes :

1. $u(t) = (2t + \lambda)e^{-t} + \mu e^{-4t} + (3\cos(t) - \sin(t))e^{-2t}$ *où* $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.
2. $u(t) = (\lambda\cos(t) + \mu\sin(t) - 4t\sin(t))\, e^{-2t} + 3e^{-t}$ *où* $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.
3. $u(t) = (-2t^2 + \lambda - 4)e^{2t} + \mu e^{3t} + (2t + 3)e^{t}$ *où* $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.
4. $u(t) = (t^2 + \lambda t + \mu)e^{-2t} + 2e^{-t}\sin\left(\sqrt{3}t + \frac{\pi}{3}\right)$ *où* $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

Exercice 2.5

Déterminer les (uniques) solutions des équations de l'exercice précédent vérifiant respectivement (problème de Cauchy)

1. $u(0) = 1,\ u'(0) = 0$
2. $u(0) = 2,\ u'(0) = 0$
3. $u(0) = 0,\ u'(0) = 1$
4. $u(0) = 1,\ u'(0) = 1$

Exercice 2.6

En passant par la forme complexe, déterminer l'unique solution du problème de Cauchy correspondant aux équations différentielles suivantes :

1. $\begin{cases} 4u''(t) + 4u'(t) + 5u(t) = \sin(t)e^{-\dfrac{t}{2}} \\ u(0) = 2,\ u'(0) = 0 \end{cases}$
2. $\begin{cases} u''(t) - 2u'(t) + u(t) = 5e^{t}\cos(t) \\ u(0) = 1,\ u'(0) = 1 \end{cases}$

Exercice 2.7

En utilisant la boite à z, résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $u'' + 3u' + 2u = e^{-t} + \sin(t)$
2. $u'' - 4u' + 13u = \cos(t)$