Chapitre 3

Transformée de Laplace

3.1 Transformation de Laplace dans E_0

La plupart des seconds membres des équations différentielles qui interviennent dans les phénomènes physiques sont des fonctions dites « exponentielle-polynôme », c'est-à-dire qu'elles sont de la forme : $t \mapsto f(t) = e^{rt}P(t)$, avec r appartenant à $\mathbb{C}$ et P une fonction polynôme. On obtient ainsi la plupart des fonctions usuelles : les fonctions polynômes, les fonctions sinusoïdales, les fonctions exponentielles ou les produits de telles fonctions. Pratiquement, le physicien s'intéresse à des phénomènes qu'à partir d'un instant $t = \alpha(\alpha \geqslant 0)$, et donc il est amené à considérer des fonctions nulles pour $t < \alpha$.
Ia plupart des signaux rencontres en électronique peuvent être générés par des fonctions simples résultant d'opérations élémentaires sur des fonctions usuelles (par exemple la translation, $t \mapsto f(t-a)$ ou la dilatation, $t \mapsto f(at)$ sur la variable t).
Ceci nous amène donc à choisir un espace de travail que nous noterons E_0 contenant ce type de fonctions.

3.1.1 Définition de l'espace E_0

A. Fonctions causales

Définition 3.1

*Une fonction est dite **causale** si $f(t) = 0$ pour tout t strictement négatif.*

Des exemples fondamentaux sont constitués par l'échelon unité (ou la fonction de Heaviside) : $t \mapsto \mathcal{U}(t)$ et ses translatées : $t \mapsto \mathcal{U}(t-\alpha)$, où α est un réel positif, qui sont définies par :

$$\mathcal{U}(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [0, +\infty[\\ 0 & \text{si } t \in]-\infty, 0[\end{cases} \quad ; \quad \mathcal{U}(t-\alpha) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [\alpha, +\infty[\\ 0 & \text{si } t \in]-\infty, \alpha[\end{cases}$$

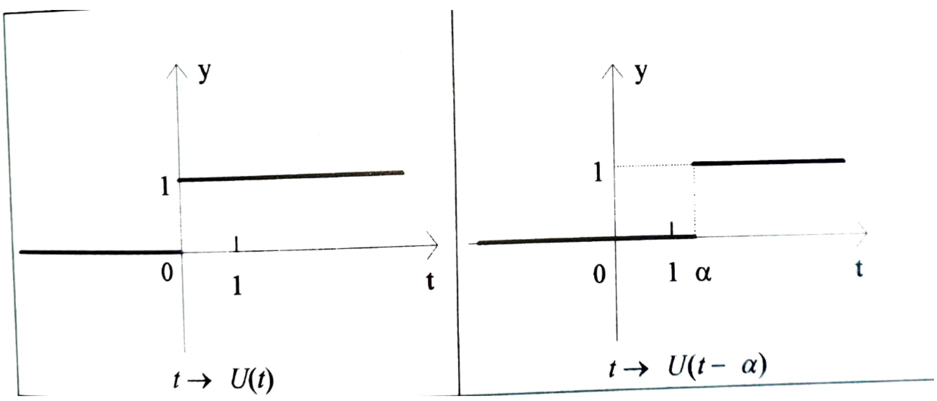

Figure 3.1 – Fonction de Heaviside

Exemple 3.1
La fonction $t \mapsto \mathcal{U}(t)$ *et ses translatées servent à fabriquer des fonctions causales comme le montre la figure suivante :*

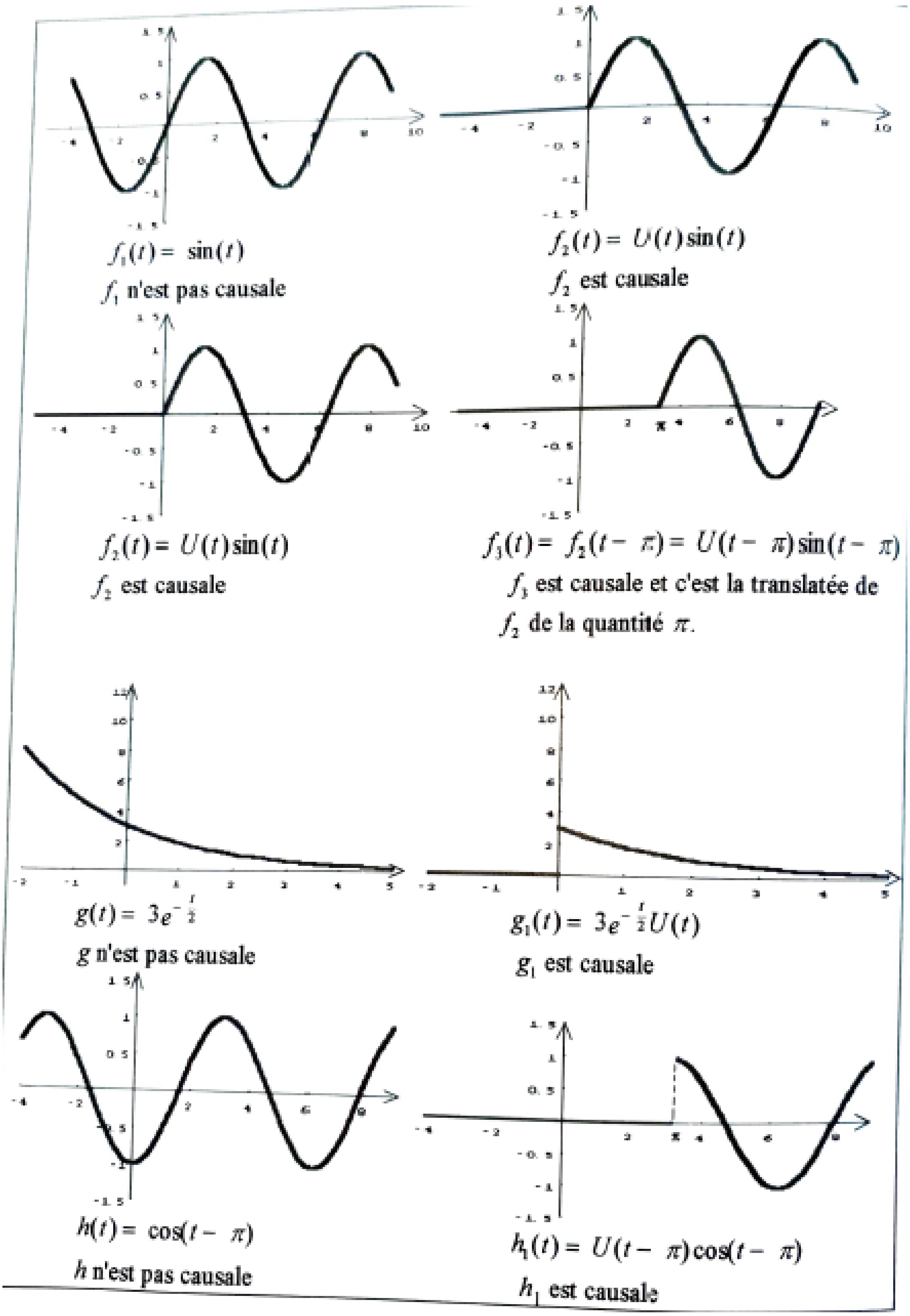

FIGURE 3.2 – Fonctions causales

B. Les fonctions de E_0

Parmi les fonctions causales les plus simples et les plus employés en physique, on distingue les fonctions f telles que : $f(t) = t^n e^{rt}\mathcal{U}(t-\alpha)$ où α est un réel positif, n un entier positif et r un nombre complexe quelconque.

Définition 3.2

E_0 est l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires à coefficients réels ou complexes des fonctions de la forme $t \mapsto t^n e^{rt}\mathcal{U}(t-\alpha)$ où α est un réel positif, n un entier positif et r un nombre complexe quelconque.

Ainsi, si f et g sont deux fonctions de E_0 alors pour tous nombres complexes λ et μ, la fonction : $\lambda f + \mu g$ est dans E_0.

Exemple 3.2

- *la fonction :* $t \mapsto t^2 e^{-t}\mathcal{U}(t-3)$ *est une fonction de* E_0 $(\alpha = 3,\ n = 2,\ r = -1)$.
- *la fonction :* $t \mapsto h(t) = \sin(t)\mathcal{U}(t)$ *est une fonction de* E_0. *En effet :*
  $h(t) = \sin(t)\mathcal{U}(t) = \frac{1}{2i}e^{it}\mathcal{U}(t) - \frac{1}{2i}e^{-it}\mathcal{U}(t)$
  La fonction $h(t)$ *est combinaison linéaire des fonctions* f *et* g *de* E_0, *définies par :*
  $f(t) = e^{it}\mathcal{U}(t)$ *et* $g(t) = e^{-it}\mathcal{U}(t) \quad (\alpha = 0,\ n = 0,\ r = \pm i)$
  avec les coefficients : $\lambda = \frac{1}{2i}$ *et* $\mu = -\frac{1}{2i}$.
- *les fonctions* $t \mapsto k(t) = \mathcal{U}(t-\pi)\sin(t-\pi)$ *et* $t \mapsto k(t) = \mathcal{U}(t-\pi)\sin(t)$ *sont des fonctions de* E_0 *(il suffit d'utiliser la formule d'Euler).*

Propriété 3.1

1. *On démontre qu'une fonction de* E_0 *est continue par morceaux sur* $\mathbb{R}$ *avec un nombre fini de discontinuité.*
2. *Si* a *et* α *sont des réels positifs,* r *un nombre complexe et* f *une fonction appartenant à* E_0, *alors les fonctions* $t \mapsto f(at), t \mapsto f(t-\alpha)$ *et* $t \mapsto e^{rt}f(t)$ *sont encore des fonctions appartenant à* E_0.
3. *Si* f *est une fonction de* E_0 *alors la fonction* f' *qui est définie sur tout intervalle fermé de* $\mathbb{R}$ *privé d'un nombre fini de points, peut s'identifier (en dehors de ces points) à une fonction de* E_0.
4. *La fonction :* $t \mapsto \displaystyle\int_0^t f(x)dx$ *est bien définie et appartient à* E_0 *si* $f \in E_0$.

Exemple 3.3

Soit la fonction : $t \mapsto f(t) = t\mathcal{U}(t) - 2(t-1)\mathcal{U}(t-1) + (t-2)\mathcal{U}(t-2)$

1. *Montrer que* f *est une fonction de* E_0.
2. *Déterminer explicitement* $f(t)$ *et donner sa représentation graphique.*

Exemple 3.4
Soit la fonction : $t \mapsto g(t) = \mathcal{U}(t) - 2\mathcal{U}(t-1) + \mathcal{U}(t-2)$.

1. *Montrer que* g *est la dérivée de* f*. En déduire que c'est une fonction de* E_0.
2. *Déterminer explicitement* $g(t)$ *et donner sa représentation graphique.*

Exemple 3.5

Soient les fonctions h *et* H *définies par :* $t \mapsto h(t) = 2\mathcal{U}(t) - 3\mathcal{U}(t-1) + 2\mathcal{U}(t-2)$ *et* $H(t) = \displaystyle\int_0^t h(x)dx$.

1. *Montrer que les fonctions sont des fonctions de* E_0.
2. *Déterminer explicitement* $h(t)$ *et* $H(t)$. *Donner leur représentation graphique.*

3.1.2 Transformation de Laplace dans E_0

On se propose de justifier pour certains nombres réels p, l'existence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} |f(t)e^{-pt}|dt$ où f est une élément de E_0. Pour ces valeurs de p, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt$ sera convergente.
Pour cela, nous étudierons dans un premier temps, l'existence d'une telle intégrale pour deux fonctions particulières de E_0 : $t \mapsto e^{rt}\mathcal{U}(t)$ et $t \mapsto te^{rt}\mathcal{U}(t)$.

A. Etude de l'absolue convergence et calcul de $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{rt}e^{-pt}dt$ pour p réel

Soit r le nombre complexe : $r = b + ic$ ($c \neq 0$).
Pour $A > 0$ et pour tout $p \neq b$ nous avons :

$$\int_0^A \left|e^{(r-p)t}\right|dt = \int_0^A \left|e^{(b-p)t}\right| \cdot \left|e^{ict}\right|dt = \int_0^A e^{(b-p)t}dt = \frac{1}{b-p}\Big(e^{(b-p)A} - 1\Big)$$

car $\left|e^{ict}\right| = 1$ et $e^{(b-p)t}$ est un réel positif.
Quand A tend vers $+\infty$, la limite de $e^{(b-p)A}$ n'est un nombre fini (qui vaut d'ailleurs 0) que si $b - p < 0$, c.-à-d. si $p > \mathcal{R}(r)$.
Nous avons alors dans ce cas :

$$\int_0^A \left|e^{rt}e^{-pt}\right| dt = \lim_{A \to +\infty} \left[\frac{1}{b-p}\left(e^{(b-p)A} - 1\right)\right] = \frac{1}{p-b}$$

et donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{rt}e^{-pt}dt$ est absolument convergente et donc convergente.
Déterminons la valeur de cette intégrale. Lorsque $p > \mathcal{R}(r)$, nous obtenons :

$$\int_0^A e^{(r-p)t}dt = \frac{1}{r-p}\left[e^{(r-p)t}\right]_0^A = \frac{1}{r-p}\left[e^{(r-p)A} - 1\right]$$

Comme $p > \mathcal{R}(r)$, c.-à-d. $p > b$, nous avons : $\lim\limits_{A \to +\infty} |e^{(r-p)A}| = \lim\limits_{A \to +\infty} e^{(b-p)A} = 0$
ce qui entraîne $\lim\limits_{A \to +\infty} e^{(r-p)A} = 0$ donc :

$$\boxed{\text{Si } \; p > \mathcal{R}(r) \; \text{ alors } : \int_0^{+\infty} e^{rt}e^{-pt}dt = \frac{1}{p-r}}$$

Remarque 3.1
• *Si la condition d'absolue convergence $p > \mathcal{R}(r)$ n'est pas vérifiée, l'intégrale peut être divergente. Ainsi par exemple, si $p = r$ un calcul élémentaire montre que l'intégrale précédente diverge.*
• *Considérons l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathcal{U}(t-\alpha)e^{rt}e^{-pt}dt$, nous avons :*

$$\int_0^{+\infty} \mathcal{U}(t-\alpha)e^{rt}e^{-pt}dt = \int_\alpha^{+\infty} e^{rt}e^{-pt}dt = \frac{1}{p-r}$$

La condition d'absolue convergence reste $p > \mathcal{R}(r)$ et :

$$\int_0^{+\infty} \mathcal{U}(t-\alpha)e^{rt}e^{-pt}dt = \frac{e^{(r-p)\alpha}}{p-r}$$

B. Calcul de l'intégrale : $\displaystyle\int_0^{\infty} te^{rt}e^{-pt}dt$

Considérons la fonction $t \mapsto f(t) = \mathcal{U}(t)te^{rt}$. Pour $A > 0$ et $p \neq r$ nous avons :

$$\int_0^A f(t)e^{-pt}dt = \int_0^A te^{(r-p)t}dt$$

Une intégration par parties conduit à

$$\begin{aligned}\int_0^A te^{(r-p)t}dt &= \frac{1}{r-p}\left[te^{(r-p)t}\right]_0^A - \frac{1}{r-p}\int_0^A e^{(r-p)t}dt \\ &= \frac{A}{r-p}e^{(r-p)A} - \frac{1}{(r-p)^2}\left(e^{(r-p)A} - 1\right)\end{aligned}$$

Comme dans le paragraphe précédent, l'intégrale de la valeur absolue et pour les mêmes raisons l'absolue convergence sera obtenue si $p > \mathcal{R}(r)$.
Nous avons alors sous cette condition :

$$\lim_{A \to +\infty} e^{(r-p)A} = 0 \text{ et } \lim_{A \to +\infty} Ae^{(r-p)A} = 0$$

donc : si $p > \mathcal{R}(r)$ alors $\displaystyle\int_0^{\infty} te^{rt}e^{-pt}dt = \frac{1}{(p-r)^2}$.

C. Existence de $\int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt$ pour f élément de E_0

Des intégrations par parties successives permettent de conclure, pour $p > \mathcal{R}(r)$, à la convergence absolue des deux intégrales :

$$\int_0^{+\infty} t^n e^{rt} e^{-pt} dt \text{ et } \int_0^{\infty} \mathcal{U}(t-\alpha) t^n e^{rt} e^{-pt} dt$$

Définition 3.3

Si une fonction g de la forme : $t \mapsto g(t) = k\mathcal{U}(t-\alpha)t^n e^{rt}$ avec k réel, r complexe, a réel positif, le nombre complexe r est appelé ***exposant*** *de la fonction g.*

Une fonction f de E_0 étant une combinaison linéaire de fonctions du type $t \mapsto \mathcal{U}(t-\alpha)t^n e^{rt}$, nous avons la propriété suivante :

Propriété 3.2 ***et définition***

L'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt$ est absolument convergente si p est un nombre réel appartenant à l'intervalle $]\sigma(f),\ +\infty[$ où $\sigma(f)$ est la plus grande des parties réelles des exposants des fonctions composant la combinaison linéaire réalisant f.
Le réel $\sigma(f)$ est appelé ***abscisse de convergence*** *de f.*

Exemple 3.6
Soit la fonction f appartenant à E_0, définie pour tout t réel par :

$$f(t) = e^{2t}\cos(3t)\mathcal{U}(t) + te^t \sin(t)\mathcal{U}(t-\pi)$$

Vérifions que la fonction f est une combinaison linéaire de fonctions de type $t \mapsto t^n e^{rt}\mathcal{U}(t-\alpha)$.
En effet, par utilisation des formules d'Euler :

$$f(t) = \frac{1}{2}e^{(2+3i)t}\mathcal{U}(t) + \frac{1}{2}e^{(2-3i)t}\mathcal{U}(t) + \frac{1}{2i}te^{(1+i)t}\mathcal{U}(t-\pi) - \frac{1}{2i}te^{(1-i)t}\mathcal{U}(t-\pi)$$

Les exposants des fonctions qui composent la combinaison linéaire donnant f sont respectivement : $2+3i$, $2-$

$3i$, $1+i$ et $1-i$. Les parties réelles de ces exposants sont donc 2 et 1 ; d'où, d'près la propriété énoncée plus haut, nous avons : $\sigma(f) = \max(1,2) = 2$ et l'intégrale : $\int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt$ est absolument convergent, donc convergente si le réel p est appartient à l'intervalle $]2,\ +\infty[$

D. Définition de la transformation de Laplace dans E_0

Soit f un élément de E_0 d'abscisse de convergence $\sigma(f)$.
La **transformée de Laplace** de f est la fonction, notée F, définie sur $]\sigma(f), +\infty[$ par

$$p \mapsto F(p) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-pt} dt$$

On notera :

$$f \sqsupset F \text{ ou } f(t) \sqsupset F(p) \text{ ou } F = \mathcal{L}(f) \text{ ou } F(p) = \mathcal{L}[f](p)$$

Le symbole : $\mathcal{L}$ désignant la transformation de Laplace : $f \mapsto F$.

Ainsi, en tenant compte des résultats obtenus précédemment, nous pouvons écrire :

$$\mathcal{U}(t)e^{rt} \sqsupset \frac{1}{p-r} \quad \text{si } p > \mathcal{R}(r) \quad \text{et} \quad \mathcal{U}(t)te^{rt} \sqsupset \frac{1}{(p-r)^2} \quad \text{si } p > \mathcal{R}(r)$$

Exemple 3.7

1. *Déterminer la transformée de Laplace de la fonction échelon unité $\mathcal{U}(t)$.*
2. *Soit $f_n : t \mapsto t^n \mathcal{U}(t)$ $(n \in \mathbb{N})$.*
   (a) *Que vaut $\sigma(f_n)$?*
   (b) *Déterminer une relation entre $\mathcal{L}(f_n)$ et $\mathcal{L}(f_{n-1})$.*
   (c) *En déduire $\mathcal{L}(f_n)$.*

3.1.3 Propriétés de la transformation de Laplace dans E_0

Avertissement : Dans les égalités faisant intervenir des transformations de Laplace, il est sous entendu que p appartient à l'intervalle dans lequel elles sont définies simultanément.

A. Linéarité

Si f et g sont des éléments de E_0 de transformées de Laplace F et G et si λ et μ sont des nombres complexes quelconques, la transformée de Laplace de la fonction $h = \lambda f + \mu g$ est $H = \lambda F + \mu G$ (grâce à la linéarité des intégrales généralisées supposées convergentes).
La fonction H est définie sur un intervalle $]\sigma(h), +\infty[$ où $\sigma(h) = \max\big(\sigma(f); \sigma(g)\big)$.

$$\boxed{\mathcal{L}[\lambda f + \mu g](p) = \lambda \mathcal{L}[f](p) + \mu \mathcal{L}[g](p)}$$

ou bien

$$\boxed{\Big(\lambda f(t) + \mu g(t)\Big) \sqsupset \Big(\lambda F(p) + \mu G(p)\Big)}$$

Exemple 3.8
Déterminer les transformées de Laplace de $f(t) = \cos(t)\mathcal{U}(t)$ *et* $g(t) = \sin(t)\mathcal{U}(t)$.

B. Transformée d'une dilatée

Soit $f \in E_0; f \sqsupset F$ et $a \in \mathbb{R}^{\star +}$. On cherche $\lim\limits_{A \to +\infty} \int_0^A f(at)e^{-pt}dt$.

À l'aide d'un changement de variable $u = at$ on obtient : $\int_0^A f(at)e^{-pt}dt = \frac{1}{a}\int_0^A f(u)e^{-\frac{p}{a}u}du$.

Lorsque $A \mapsto +\infty$, il en est de même pour aA (car $a > 0$), et la deuxième intégrale de l'égalité précédente admet, si $p > a\sigma(f)$, une limite qui est $\frac{1}{a}F\left(\frac{p}{a}\right)$.

$$\boxed{\text{si } \; f(t) \sqsupset F(p) \; \text{ alors } \; f(at) \sqsupset \frac{1}{a}F\left(\frac{p}{a}\right)}$$

Exemple 3.9

Déterminer les transformées de Laplace de $f(t) = \cos(\omega t)\mathcal{U}(t)$ et $g(t) = \sin(\omega t)\mathcal{U}(t)$ où $\omega > 0$.

C. Transformée d'une translatée

Soit $f \in E_0; f \sqsupset F$ et $\tau \in \mathbb{R}^{\star +}$. On cherche $\lim\limits_{A \to +\infty} \int_0^A f(t-\tau)e^{-pt}dt$.

À l'aide d'un changement de variable $u = t - \tau$ on obtient : $\int_0^A f(t-\tau)e^{-pt}dt = \int_{-\tau}^{A-\tau} f(u)e^{-p(u+\tau)}du$.

La deuxième intégrale de l'égalité précédente est égale à $e^{-p\tau}\int_0^{A-\tau} f(u)e^{-pu}du$ car la fonction f est nulle sur l'intervalle $[-\tau, 0[$ (f est causale). Lorsque $A \mapsto +\infty$, il en est de même pour $A - \tau$. On obtient alors pour $p > a\sigma(f)$, une limite qui est $e^{-p\tau}F(p)$.

$$\boxed{\text{si } \; f(t) \sqsupset F(p) \; \text{ alors } \; f(t-\tau) \sqsupset e^{-p\tau}F(p)}$$

Le facteur $e^{-p\tau}$ s'appelle le **facteur retard**. Lorsqu'une fonction est « retardée »d'un temps τ, sa transformée de Laplace est multipliée par $e^{-p\tau}$.

Remarque 3.2

Soit f une fonction non causale. La fonction g définie par $g(t) = f(t)\mathcal{U}(t)$ est causale et c'est elle qui admet éventuellement une transformée de Laplace. A ce sujet $t \mapsto f(t-\tau)$ n'est pas la translatée de $t \mapsto f(t)\mathcal{U}(t)$. Il faut bien distinguer ici $t \mapsto f(t-\tau)\mathcal{U}(t)$ et $t \mapsto f(t-\tau)\mathcal{U}(t-\tau)$; c'est cette dernière fonction qui est la

translatée de $t \mapsto f(t)\mathcal{U}(t)$.
Nous avons donc :

$$\boxed{si \quad f(t)\mathcal{U}(t) \sqsupset F(p) \quad alors \quad f(t-\tau)\mathcal{U}(t-\tau) \sqsupset e^{-p\tau}F(p)}$$

Exemple 3.10
On se propose de calculer la transformée de Laplace du signal $t \mapsto e(t)$ *défini par sa représentation graphique suivante :*

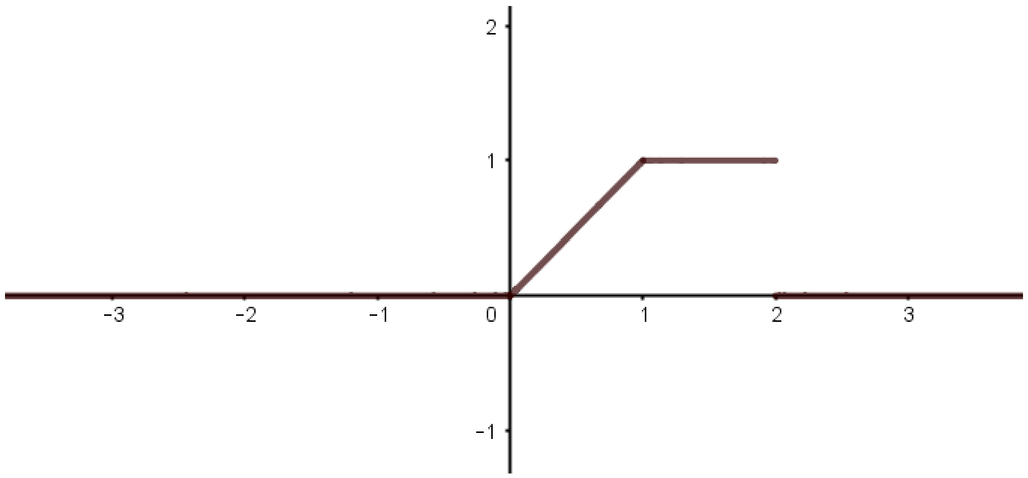

FIGURE 3.3 – signal $e(t)$

Remarque 3.3

1. *Un calcul direct (à faire en exercice) conduirait à écrire :* $F(p) = \int_0^{+\infty} e(t)e^{-pt}dt = \int_0^1 te^{-pt}dt + \int_1^2 e^{-pt}dt$.
   La décomposition de $t \mapsto e(t)$ *en signaux élémentaires a permis, en utilisant la transformation d'une translatée, d'éviter le calcul d'intégrales ; en particulier pour la première d'entre elles qui nécessiterait une intégration par parties.*
2. *Soit la fonction* $k(t) = t\mathcal{U}(t) - t\mathcal{U}(t-1)$. *Pour déterminer la transformée de Laplace de* k, *on cherche à faire apparaître des fonctions du type* $t \mapsto g(t-\tau)\mathcal{U}(t-\tau)$ *pour utiliser la transformée d'une translatée. en écrivant* $t = t - 1 + 1$, *on obtient :*

$$k(t) = t\mathcal{U}(t) - (t-1)\mathcal{U}(t-1) - \mathcal{U}(t-1)$$

   d'où $\left[\mathcal{L}\right](p) = \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p^2}e^{-p} - \frac{1}{p}e^{-p}$.

Dans cet exemple, nous avons détaillé les démarches pour décomposer un signal en translatés de signaux élémentaires. Elle seront utilisées directement dans les autres exemples de chapitre.

Exemple 3.11 ***Transformation de Laplace d'une fonction impulsion : Distribution de Dirac***
Soit a un nombre réel strictement positif et soit la fonction impulsion notée $\prod_a$ définie par :

$$\prod_a(t) = \begin{cases} \frac{1}{a} & si\ t \in]0, a[\\ 0 & sinon \end{cases}$$

1. *Tracer dans un repère orthogonal la courbe représentative de la fonction $\prod_a(t)$.*
2. *Montrer que la fonction $\prod_a$ est un élément de E_0.*
3. *Calculer la transformée de Laplace de la fonction $\prod_a$ notée $F_a(p) = \mathcal{L}(\prod_a)$.*
   *On admet que lorsque $a \to 0$ la fonction $\prod_a(t)$ tend vers une limite, qui n'est pas une fonction et qui appelée **Distribution de Dirac et sera notée $\boldsymbol{\delta}$**.*
4. *Montrer alors que la transformée de Laplace de δ est la fonction identité c.-à-d. $\mathcal{L}(\delta) = 1$.*

Exemple 3.12
On cherche à déterminer la transformée de Laplace du signal $t \mapsto i(t)$ défini par :

$$i(t) = \begin{cases} \sin(t) & si\ t \in [0, \pi] \\ 0 & sinon \end{cases}$$

La représentation graphique du signal $i(t)$ est :

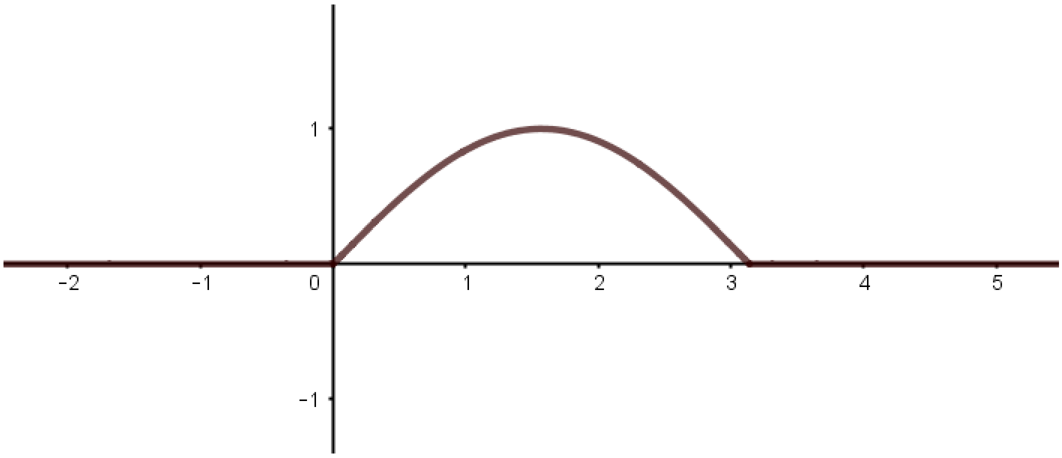

Figure 3.4 – signal $i(t)$

D. Multiplication par la variable t

Nous avons obtenu précédemment, si $p > \mathcal{R}(r)$:

$$\mathcal{U}(t)e^{rt} \sqsupset \frac{1}{p-r} \quad \text{et} \quad \mathcal{U}(t)te^{rt} \sqsupset \frac{1}{(p-r)^2}$$

Ce dernier résultat est, au signe près, la dérivée par rapport à p de la transformée $\frac{1}{p-r}$ de la fonction $t \mapsto \mathcal{U}(t)e^{rt}$.
cette propriété se généralise ainsi :

$$\boxed{\text{si } \; f(t) \sqsupset F(p) \quad \text{alors} - tf(t) \sqsupset \frac{dF}{dp}(p)}$$

et par conséquent

$$\boxed{(-t)^n f(t) \sqsupset \frac{d^n F}{dp^n}(p)}$$

Exemple 3.13
Déterminer les transformées de Laplace de $f(t) = t\cos(\omega t)\mathcal{U}(t)$ et $g(t) = t\sin(\omega t)\mathcal{U}(t)$ où $\omega > 0$.

E. Multiplication par e^{-at} où a est réel

Soit f une fonction appartenant à E_0 et F sa transformée de Laplace.

$$\lim_{A \to +\infty} \int_0^A f(t)e^{-at}e^{-pt}dt = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-(a+p)t}dt$$

pourvu que $p + a$ soit supérieur à $\sigma(f)$, soit $p > \sigma(f) - a$, nous obtenons :

$$\boxed{\text{si } \; f(t) \sqsupset F(p) \quad \text{alors} \quad f(t)e^{-at} \sqsupset F(p+a)}$$

Exemple 3.14

Déterminer les transformées de Laplace de $f(t) = e^{-at}\cos(\omega t)\mathcal{U}(t)$ et $g(t) = e^{-at}\sin(\omega t)\mathcal{U}(t)$ où a est un nombre réel quelconque et $\omega > 0$.

F. Transformée d'une dérivée

Soit f une fonction appartenant à E_0, alors $\lim\limits_{t\to 0^+} f(t)$ existe dans $\mathbb{C}$; posons $f(0^+) = \lim\limits_{t\to 0^+} f(t)$.

Pour $p > \sigma(f)$, nous avons : $F(p) = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt$. Supposons f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$, ce qui implique que f' est continue sur $]0, +\infty[$. Soit la transformée de Laplace de la fonction dérivée de f :$\mathcal{L}[f'](p) = \displaystyle\int_0^{+\infty} f'(t)e^{-pt}dt$ notée $G(p)$.

Nous avons $G(p) = \lim\limits_{A\to+\infty}\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\displaystyle\int_\varepsilon^A f'(t)e^{-pt}dt$.

En intégrant par parties ($u' = f'(t)$ et $v = e^{-pt}$), on obtient :

$$\int_\varepsilon^A f(t)e^{-pt}dt = \Big[f(t)e^{-pt}\Big]_\varepsilon^A + p\int_\varepsilon^A f(t)e^{-pt}dt$$

En considérant $p > \sigma(f)$, et en passant à la limite lorsque $A \to +\infty$ et lorsque $\varepsilon \to 0$ ($\lim\limits_{A\to+\infty} |f(A)|e^{-pA} = 0$ puisque $f \in E_0$), on obtient $G(p) = \displaystyle\int_0^{+\infty} f'(t)e^{-pt}dt = -f(0^+)p\int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt$, donc : $\mathcal{L}[f'](p) = p\mathcal{L}[f](p) - f(0^+)$.

Plus généralement, on démontre que si $\boldsymbol{f}$ est seulement continue sur $]0, +\infty[$ (donc **sans l'hypothèse de continuité de la dérivée** mais continue par morceaux) et que f appartient à E_0, alors la transformée de Laplace de f' vérifie

$$\boxed{\mathcal{L}[f'](p) = p\mathcal{L}[f](p) - f(0^+)} \tag{3.1}$$

ou bien

$$\boxed{\text{si } \ f(t) \sqsupset F(p) \quad \text{alors} \quad f'(t) \sqsupset pF(p) - f(0^+)}$$

N.B. : l'hypothèse de continuité de f sur $]0, +\infty[$ est essentielle (voir exemple 3.17 plus loin et la remarque qui suit si cette hypothèse n'est pas vérifiée).
Si f' est à son tour continue sur $]0, +\infty[$, on aura : $\mathcal{L}[f''](p) = p\mathcal{L}[f'](p) - f'(0^+)$. Soit

$$\boxed{\mathcal{L}[f''](p) = p^2\mathcal{L}[f](p) - pf(0^+) - f'(0^+)} \tag{3.2}$$

ou bien

$$\boxed{\text{si } \ f(t) \sqsupset F(p) \quad \text{alors} \quad f''(t) \sqsupset p^2F(p) - pf(0^+) - f'(0^+)}$$

Exemple 3.15
Soit $f(t) = \cos(\omega t)\mathcal{U}(t)$ et sa dérivée $f'(t) = -\omega\sin(\omega t)\mathcal{U}(t)$ où a est un nombre réel quelconque et $\omega > 0$. Déterminer la transformée de Laplace de $f'(t)$ en utilisant la formule 3.1. Vérifier qu'on a bien le même résultat en calculant directement la transformée de Laplace de $f'(t)$.

Exemple 3.16
Soit la fonction f dont la représentation graphique est donnée par la figure 3.5

1. *Déterminer la transformée de Laplace de $f(t)$.*
2. *Déterminer la transformée de Laplace de $g(t) = f'(t)$.*
3. *Montrer que la formule 3.1 est bien vérifiée.*

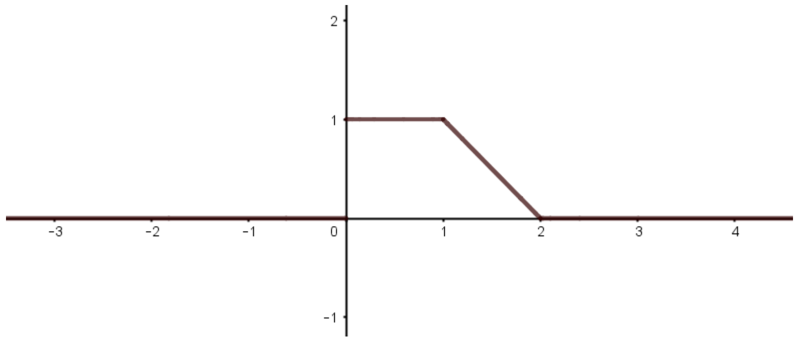

FIGURE 3.5 – Fonction f

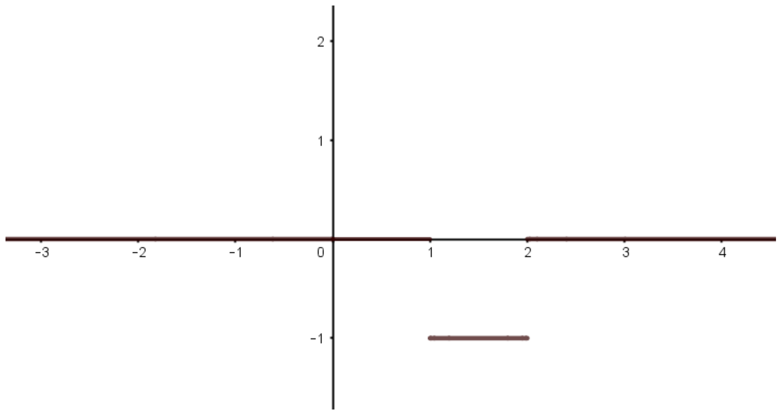

FIGURE 3.6 – Fonction dérivée f'

Exemple 3.17
Soit la fonction f dont la représentation graphique est donnée par la figure 3.7

1. *Déterminer la transformée de Laplace de $f(t)$.*
2. *Déterminer la transformée de Laplace de $g(t) = f'(t)$.*
3. *Montrer que la formule 3.1 n'est pas vérifiée.*

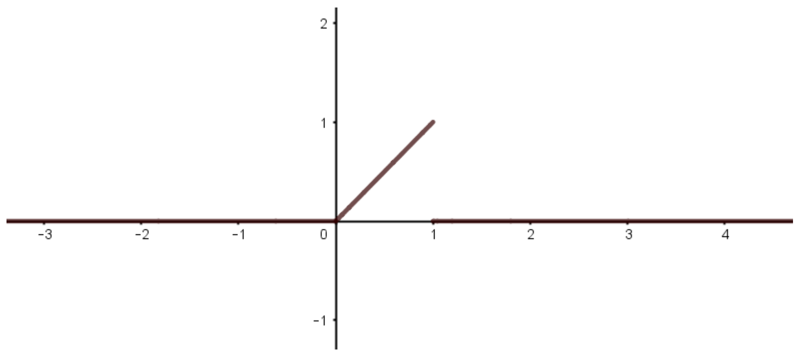

FIGURE 3.7 – Fonction f

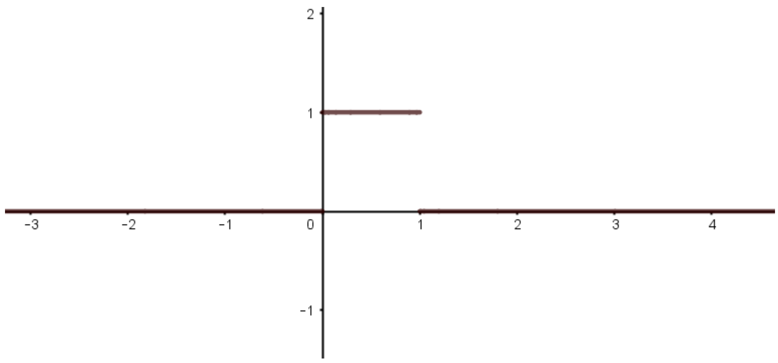

FIGURE 3.8 – Fonction dérivée f'

Remarque 3.4
si l'on suppose que la fonction est continue sur $]0, +\infty[$ *sauf pour* $t = a$ $(a > 0)$ *où elle admet une discontinuité de premiere espèce, et si de plus* f *est dérivable sur* $]0, a[$ *et sur* $[a, +\infty[$ *avec une fonction dérivée* f' *continue*

sur ces intervalles (voir figure 3.9), on a alors :

$$\boxed{\mathcal{L}[f'](p) = p\mathcal{L}[f](p) - f(0^+) - \left(f(a^+) - f(a^-)\right) e^{-ap}} \tag{3.3}$$

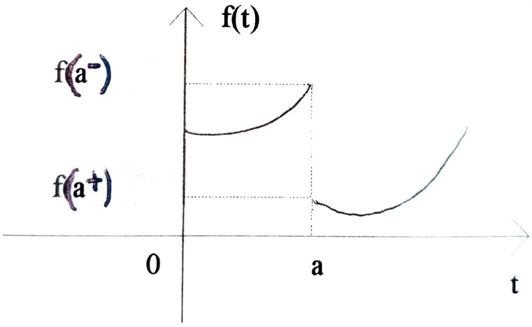

FIGURE 3.9 – Fonction discontinue

G. Théorème de la valeur initiale et de la valeur finale

Si $f(t) = e^{rt} \cdot \mathcal{U}(t)$, alors $F(p) = \dfrac{1}{p-r}$ tend vers 0 lorsque p tend vers $+\infty$. Cette propriété reste vraie par multiplication par t^n et par translation, puis par linéarité, pour toute fonction de E_0. Nous admettrons les deux théorèmes suivants.

Théorème 3.1 ***Théorème de la valeur initiale***

Si *une fonction f de E_0 admet pour transformée de Laplace la fonction F,*
alors *non seulement $\lim\limits_{p\to+\infty} F(p) = 0$, mais encore :*

$$\lim_{p\to+\infty} pF(p) = f(0^+)$$

Théorème 3.2 ***Théorème de la valeur finale***

Si *une fonction f de E_0 admet pour transformée de Laplace la fonction F* ***et si*** $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t)$ ***existe et est finie, alors***

$$\lim_{p\to 0} pF(p) = \lim_{t\to+\infty} f(t)$$

Exemple 3.18
Soient $f(t) = e^{rt}\mathcal{U}(t)$. Voir si on peut appliquer ces deux théorèmes. Si oui vérifier qu'on a bien la formule.

Remarque 3.5
Le théorème de la valeur initiale est utilisé en physique pour déterminer les conditions initiales ; celui de la valeur finale permet de connaître le comportement d'un système lorsque t tend vers $+\infty$.

3.1.4 Convolution dans E_0

A. Définition

Rappel : La convolée (ou le produit de convolution) $h = f * g$ de deux fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ est définie de façon générale (sous réserve de convergence de l'intégrale) par :

$$h(t) = (f * g)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g(t-x)dx$$

Si f est causale, l'intégrale devient :

$$h(t) = (f * g)(t) = \int_{0}^{+\infty} f(x)g(t-x)dx$$

Si de plus g est causale, la formule précédente fournit :
- si $t < 0$ alors $h(t) = 0$ (car $t - x < 0 \ \forall\ x \geqslant 0$)
- si $t \geqslant 0$ alors $h(t) = \displaystyle\int_0^t f(x)g(t-x)dx$ (car $g(t-x) = 0$ lorsque $x \geqslant t$)

Il peut d'ailleurs être demandé facilement que si f et g sont dans E_0 alors $h(t)$ est défini pour tout t réel.

Définition 3.4 ***Produit de convolution***
Soient f et g deux fonctions appartenant à E_0.
On appelle produit de convolution (ou convolée) de f et g la fonction causale h notée $f * g$ définie pour tout $t \in \mathbb{R}^+$ par :

$$h(t) = (f * g)(t) = \int_0^t f(x)g(t-x)dx$$

Il apparaît immédiatement qu'à l'aide du changement de variable $u = t - x$ on a : $f * g = g * f$, c.-à-d. $h(t) = (f * g)(t) = \displaystyle\int_0^t f(x)g(t-x)dx = \int_0^t f(t-u)g(u)du = (g * f)(t)$.

Théorème 3.3
Si f et g sont deux fonctions de E_0, alors leur produit de convolution $h = f * g$ est aussi une fonction de E_0.

Montrons ce théorème sur un exemple de fonctions : les fonctions exponentielles.
Soient $f(t) = e^{rt}\mathcal{U}(t)$ et $g(t) = e^{st}\mathcal{U}(t)$ deux fonctions de E_0.
Pour t positif on a : $h(t) = (f * g)(t) = \displaystyle\int_0^t e^{rx}e^{s(t-x)}dx = e^{st}\int_0^t e^{(r-s)x}dx$
D'où :
- si $s = r$ alors $h(t) = te^{rt}$
- si $s \neq r$ alors $h(t) = e^{st}\left[\dfrac{e^{(r-s)x}}{r-s}\right]_0^t = \dfrac{e^{st}}{r-s}\left(e^{(r-s)t} - 1\right) = \dfrac{e^{rt} - e^{st}}{r-s}$

Finalement, puisque h est causale,
- si $s = r$ alors $h(t) = te^{rt}\mathcal{U}(t)$
- si $s \neq r$ alors $h(t) = \dfrac{e^{rt} - e^{st}}{r-s}\mathcal{U}(t)$

donc ***h* est dans *E_0***.

B. Transformée de Laplace de $f * g$

Reprenons l'exemple de la partie précédente. Nous savons que :

$$e^{rt}\mathcal{U}(t) \sqsupset F(p) = \frac{1}{p-r}\ ;\ e^{st}\mathcal{U}(t) \sqsupset G(p) = \frac{1}{p-s} \ \text{ et } \ te^{rt}\mathcal{U}(t) \sqsupset \frac{1}{(p-r)^2}$$

Si l'on note H la transformée de Laplace de la fonction h, on obtient :
• si $s = r$ alors $H(p) = \mathcal{L}\big(te^{rt}\mathcal{U}(t)\big)(p) = \dfrac{1}{(p-r)^2} = F(p) \times G(p)$
• si $s \neq r$ alors $H(p) = \mathcal{L}\Big(\dfrac{e^{rt}-e^{st}}{r-s}\mathcal{U}(t)\Big)(p) = \dfrac{1}{r-s}\Big(\dfrac{1}{p-r} - \dfrac{1}{p-s}\Big) = \dfrac{1}{(p-r)(p-s)} = F(p) \times G(p)$
L'utilisation des propriétés déjà démontrées permet de justifier la théorème suivant que nous admettrons.

Théorème 3.4

Si f et g sont deux fonctions de E_0, alors leur produit de convolution $h = f * g$ a pour transformée de Laplace le produit des transformées de Laplace de f et de g.

$$\boxed{\mathcal{L}\big[f * g\big](p) \; = \; \mathcal{L}(f) \times \mathcal{L}(g)}$$

pour $p > \max\big(\sigma(f), \sigma(g)\big)$

C. Transformée de Laplace de $t \mapsto \displaystyle\int_0^t f(x)dx$

Remarquons que $t \mapsto \displaystyle\int_0^t f(x)dx$ est la primitive de la fonction f qui s'annule pour $t = 0$.
soit f une fonction continue de E_0, $\mathcal{U}$ l'échelon unité. On a :

$$\forall\ t > 0\ (f * \mathcal{U})(t) = \int_0^t f(x)\mathcal{U}(t-x)dx = \int_0^t f(x)dx \ \text{ car } \ \mathcal{U}(t-x) = 1 \ \text{ si } \ x \leqslant t$$

Si l'on note F la transformée de Laplace de f, en appliquant le théorème précédent et en se rappelant que $\mathcal{U}(t) \sqsupset \frac{1}{p}$ et que l'abscisse de convergence de $\mathcal{U}$ est 0, on obtient :

$$\boxed{\Big(\int_0^t f(x)dx\Big) \sqsupset \frac{F(p)}{p}}$$

3.2 Image et transformation de Laplace inverse

3.2.1 Définition

Si l'on transforme des fonctions du type $f(t) = t^n e^{rt}\mathcal{U}(t)$, on obtient des fractions rationnelles de la variable p. La transformée de Laplace de la translatée de $f : t \mapsto f(t-\tau)$ s'obtient en multipliant la fraction rationnelle par $e^{-p\tau}$ P. On en déduit que toutes les transformées des fonctions de E_0 sont des combinaisons linéaires de produit de fractions rationnelles par des exponentielles $e^{-p\tau}$ (où $\tau \geqslant 0$). On admettra que la réciproque de cette peut propriété est vraie, autrement dit que sur l'ensemble de ces combinaisons linéaires, on peut définir $\mathcal{L}^{-1}$, transformation inverse de $\mathcal{L}$.
Puisque toute fraction rationnelle se décompose en éléments simples, il suffit donc de connaître les transformées inverses de ces éléments simples pour pouvoir calculer toutes les transformées inverses.
Remarque Si F est la transformée de Laplace d'une fonction f, f est appelée **original** ou **transformée de Laplace inverse** de la fonction F.

3.2.2 Dictionnaire d'images

Condition(s)	Fonction f	$\mathcal{L}(f) = F$
$p > 0$	$\mathcal{U}(t)$	$\frac{1}{p}$
$p > 0$	$t\mathcal{U}(t)$	$\frac{1}{p^2}$
$p > 0$	$t^n\mathcal{U}(t)$, $n \in \mathbb{N}$	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
$p > \mathcal{R}(a)$	$e^{-at}\mathcal{U}(t)$	$\frac{1}{p+a}$
$p > 0$	$\Big(\cos(\omega t)\big)\mathcal{U}(t)$	$\frac{p}{p^2+\omega^2}$
$p > 0$	$\Big(\sin(\omega t)\big)\mathcal{U}(t)$	$\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$
$f \in E_0,\ p > \sigma(f)$ $g \in E_0,\ p > \sigma(g)$	$f(t)$ $g(t)$	$F(p)$ $G(p)$
$f \in E_0,\ p > \sigma(f),\ a > 0$	$f(at)$	$\frac{1}{a}F\left(\frac{p}{a}\right)$
$f \in E_0,\ p > \sigma(f),\ \tau > 0$	$f(t-\tau)$	$F(p)e^{-\tau p}$
$f \in E_0,\ p > \sigma(f) - a,\ a \in \mathbb{R}$	$f(t)e^{-at}$	$F(p+a)$
$f \in E_0,\ p > \sigma(f),\ f \in \mathcal{C}^0$	$f'(t)$	$pF(p) - f(0^+)$
$f \in E_0,\ p > \sigma(f),\ f \in \mathcal{C}^1$	$f"(t)$	$p^2F(p) - pf(0^+) - f'(0+)$
$f \in E_0,\ p > \sigma(f)$	$\int_0^t f(x)dx$	$\frac{F(p)}{p}$
$f \in E_0,\ p > \sigma(f)$	$-tf(t)$	$\frac{dF}{dp}(p)$
$(f,g) \in E_0^2,\ p > \max\big(\sigma(f),\sigma(g)\big)$	$(f * g)(t) = \mathcal{U}(t)\int_0^t f(x)g(t-x)dx$	$F(p) \times G(p)$