Résumé du cours Analyse de Fourier

1 Série de Fourier

Fonction de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux :
On dit qu'une fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur un intervalle I si et seulement :

1. f est continue par morceaux,
2. sa dérivée f' existe et est continue par morceaux
3. et les discontinuités éventuelles de f et f' sont de première espèce (limites à droite et à gauche existent et sont finies).

Les **coefficients de Fourier** associés à une fonction f périodique, de période T sont :

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_\alpha^{\alpha+T} f(t)dt \ ; \ b_0 = 0 \ ; \ a_n = \frac{2}{T}\int_\alpha^{\alpha+T} f(t)\cos(n\omega t)dt \ ; \ b_n = \frac{2}{T}\int_\alpha^{\alpha+T} f(t)\sin(n\omega t)dt \quad (n \in \mathbb{N}^*)$$

avec α un réel quelconque et $\omega = \frac{2\pi}{T}$.
La **série de Fourier** associée à f est la série de fonctions $\sum f_n$ dont le terme général est la fonction f_n définie par : $f_n(t) = a_n\cos(n\omega t) + b_n\sin(n\omega t)$.

Théorème de Dirichlet

Si f est une fonction périodique, de période T, de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$, **alors** la série de Fourier associée à f est convergente pour toute valeur de t et on a, pour tout t dans $\mathbb{R}$:

$$\frac{1}{2}\Big[f(t^+) + f(t^-)\Big] = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\Big(a_n\cos(n\omega t) + b_n\sin(n\omega t)\Big)$$

En particulier, en tout point t_0, où f est **continue**, la somme de la série de Fourier associée à f est égale à $f(t_0)$:

$$f(t_0) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\Big(a_n\cos(n\omega t_0) + b_n\sin(n\omega t_0)\Big)$$

Rappel : Formules d'Euler : $\boxed{\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \ ; \ \sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.}$

La forme complexe du développement en série de Fourier d'une fonction f réelle, périodique de période T, de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$ est en tout point $t \in \mathbb{R}$:

$$\frac{1}{2}\Big(f(t^+) + f(t^-)\Big) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\omega t} \quad \text{avec : } c_n = \frac{1}{T}\int_\alpha^{\alpha+T} f(t)e^{-in\omega t}dt \quad (n \in \mathbb{Z})$$

Les coefficients de Fourier complexes c_n sont liés aux coefficients de Fourier réels a_n et b_n par les relations suivantes :

$$c_0 = a_0 \ ; \ c_n = \frac{a_n - ib_n}{2} \quad (n \in \mathbb{N}^*) \text{ et } c_{-n} = \bar{c}_n$$

Formule de Parseval :

$$\boxed{\frac{1}{T}\int_\alpha^{\alpha+T}\Big|f(t)\Big|^2 dt = a_0^2 + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n^2 + b_n^2}{2} = \sum_{-\infty}^{+\infty}|c_n|^2} \quad (\alpha \in \mathbb{R})$$

2 Transformée de Fourier

On note $\mathbb{L}^1 = \left\{ f \text{ fonction numérique quelconque } \Big/ \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|dt \text{ converge} \right\}$.

Pour toute fonction f de l'espace $\mathbb{L}^1$, on appelle **transformée de Fourier** de f la fonction $\lambda \mapsto \widehat{f}(\lambda)$ définie sur $\mathbb{R}$ par : $\boxed{\widehat{f}(\lambda) \ = \ \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-2i\pi\lambda t}dt}$ où λ est la fréquence.

Définition : Produit de convolution

Soient f et g deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux et appartenant à l'espace $\mathbb{L}^1$.
Le produit de convolution de f et g est la fonction notée $f * g$ définie pour tout $t \in \mathbb{R}$ par :

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-x)g(x)dx$$

Propriétés :

- **fonction conjuguée :** $\widehat{\overline{f}}(\lambda) = \overline{\widehat{f}(-\lambda)}$.
- **Multiplication par une exponentielle :** $\mathcal{F}\Big(f(t)e^{2i\pi at}\Big)(\lambda) = \mathcal{F}\big(f\big)(\lambda - a)$.
- **Transformée d'une translatée :** $\mathcal{F}\big(f(t-a)\big)(\lambda) = e^{-2i\pi a\lambda}\widehat{f}(\lambda)$.
- **Théorème de modulation :** si $h(t) = f(t)\cos(2\pi at)$ alors $\widehat{h}(\lambda) = \dfrac{\widehat{f}(\lambda - a) + \widehat{f}(\lambda + a)}{2}$.
- **Transformée d'une dilatée :** $\mathcal{F}\big(f(kt)\big)(\lambda) = \left|\dfrac{1}{k}\right|\widehat{f}(\dfrac{\lambda}{k})$.
- **Fonctions paires et impaires** :
  — Si f est paire alors $\widehat{f}(\lambda) = 2\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\cos(2\pi\lambda t)dt$.
  — Si f est impaire alors $\widehat{f}(\lambda) = -2i\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\sin(2\pi\lambda t)dt$.
- **Dérivation dans le domaine temporel :** $\widehat{f'}(\lambda) = 2i\pi\lambda\widehat{f}(\lambda)$.
- **Intégration :** On note $F(t) = \displaystyle\int_{-\infty}^{t} f(x)dx$ (primitive de f « s'annulant » en $-\infty$).
  On suppose que $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} F(t) = 0$. On a : $\widehat{F}(\lambda) = \dfrac{\widehat{f}(\lambda)}{2i\pi\lambda}$.
- **Dérivation dans le domaine fréquentiel :** $\dfrac{d}{d\lambda}\Big(\mathcal{F}\big(f\big)\Big)(\lambda) = \mathcal{F}\big(-2i\pi t f(t)\big)(\lambda)$.
- **Produit de convolution**
  — $\widehat{f * g}(\lambda) = \widehat{f}(\lambda) \times \widehat{g}(\lambda)$.
  — $\mathcal{F}\big(f \times g\big) = \mathcal{F}\big(f\big) * \mathcal{F}\big(g\big)$.
- **Formule de Plancherel-Parseval :**

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt \ = \ \int_{-\infty}^{+\infty} |\widehat{f}(\lambda)|^2 d\lambda}$$