PHYSIQUE – MÉCANIQUE
CHAPITRE 1 :
INTRODUCTION ET CINÉMATIQUE

SOMMAIRE

- Introduction et définitions
- Systèmes de coordonnées
- Vecteurs position, vitesse et accélération
- Lois de composition

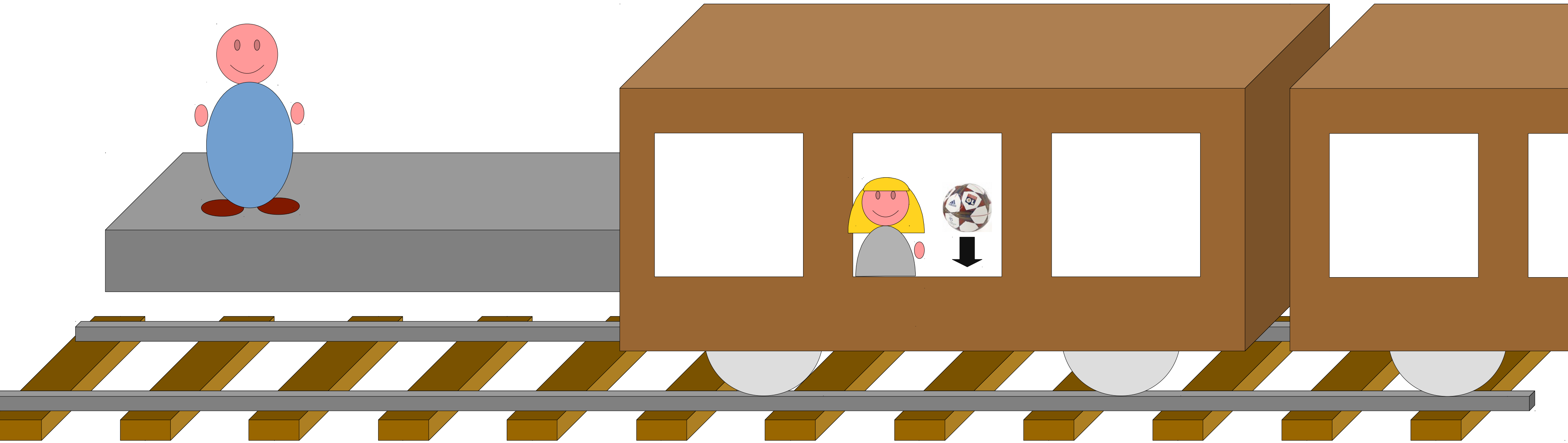
Quelques définitions...

Cinématique : description des mouvements sans soucis des causes.

Dynamique : Ce sont les causes qui régissent le mouvement.

Système : Défini arbitrairement. Sujet de l'étude, peut-être un solide, un ensemble de corps.

Comment analyser un mouvement ?



Première étape : définition du système étudié

en cinématique du point il s'agira forcément d'un point

Ex : le point M

Seconde étape : définition d'un observateur

Point O par rapport auquel le mouvement sera décrit

=> c'est définir un référentiel

Notion de référentiel

Base orthonormée directe

Composée de trois vecteurs (définissant 3 directions) :

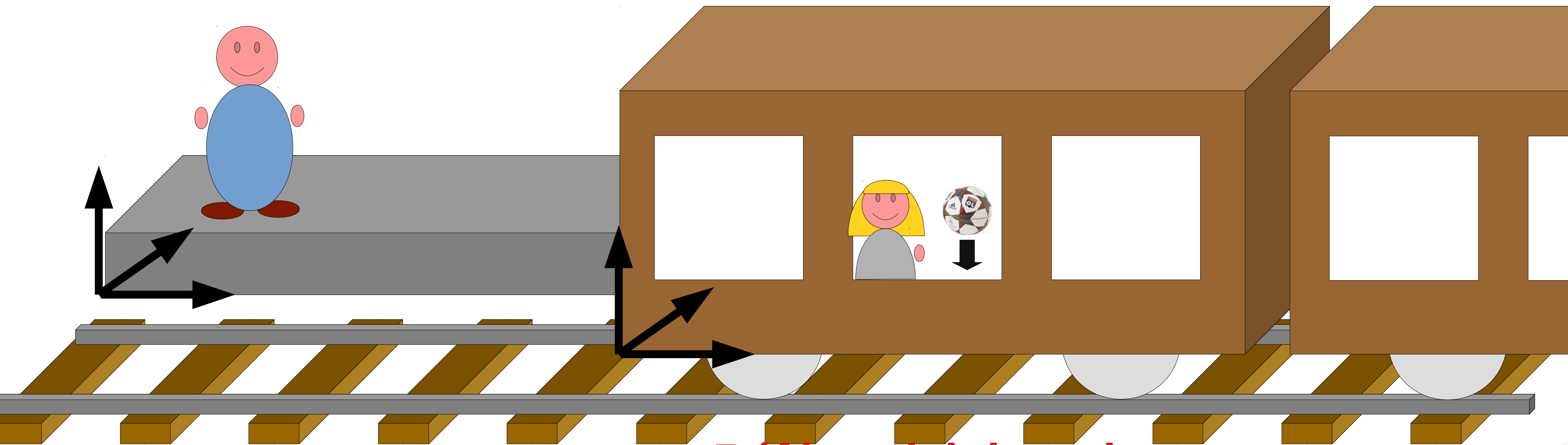
- perpendiculaires entre eux
- de norme 1
- respectant la règle du tire-bouchon

Repère

Adjonction d'un point O (Origine du repère)

Temps

RéférentielS



Référentiel du quai

$$\Re(O, x, y, z, t)$$

Référentiel du train

$$\Re'(O', x', y', z', t)$$

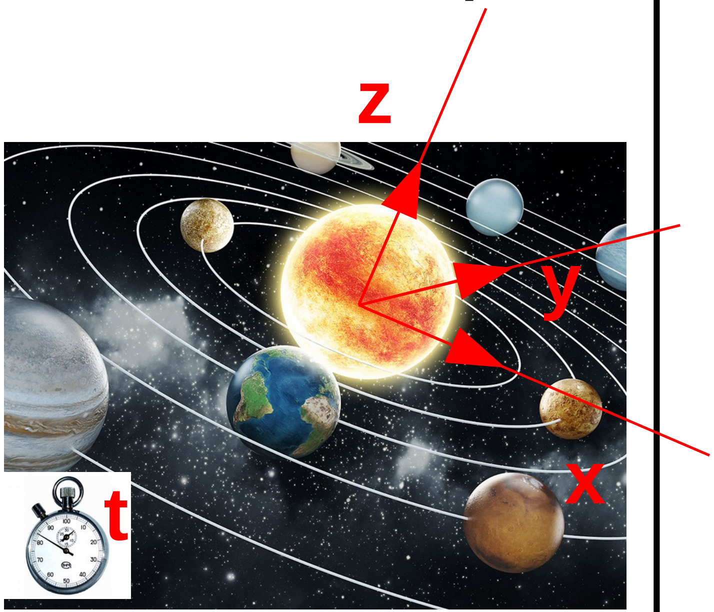
Mouvement d'un système est relatif au référentiel

Hypothèse classique :

temps identique dans tous les référentiels

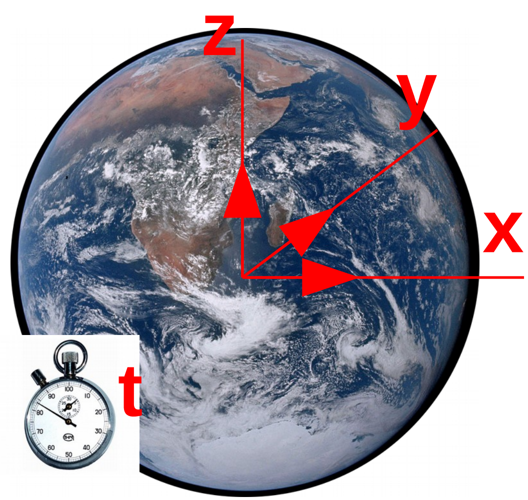
Quelques référentiels

Référentiel de Copernic



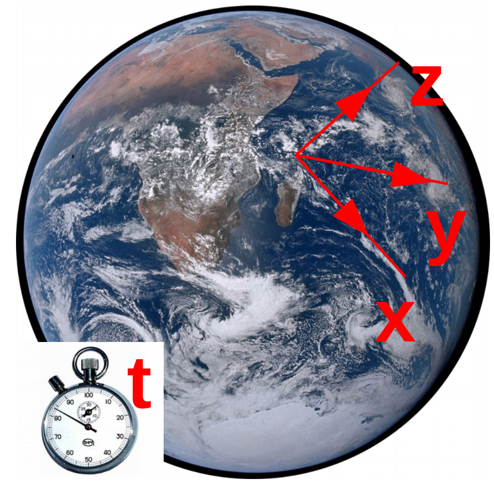
Origine : centre de masse système solaire
Axes : Vers 3 étoiles éloignées

Référentiel géocentrique



Origine : centre de la terre
Axes : parallèle Copernic

Référentiel terrestre



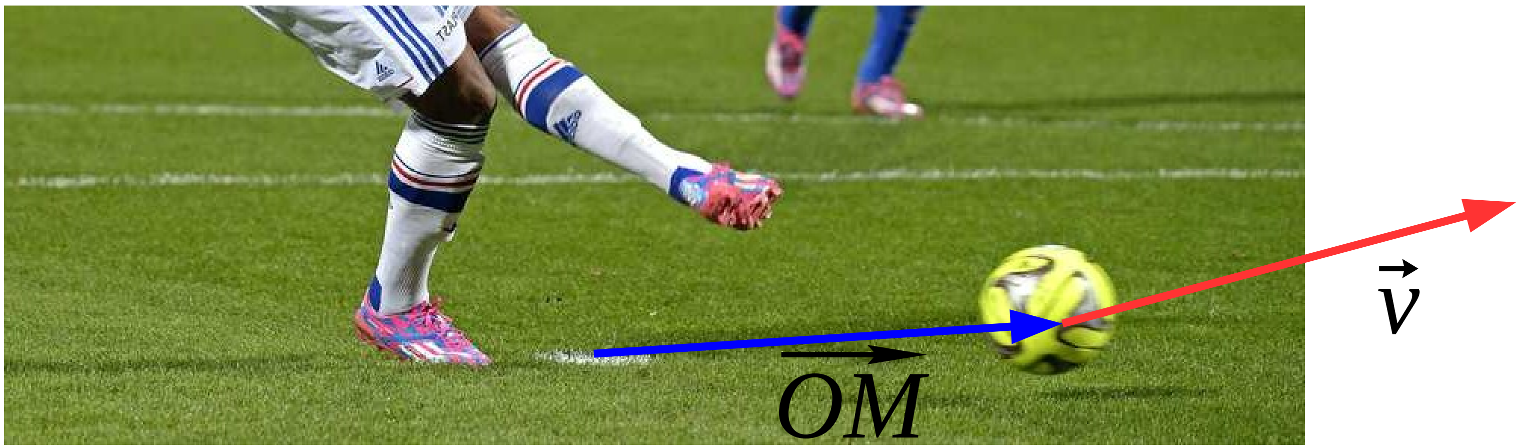
Origine : Surface de la terre
Axes : liés rotation terrestre

Utilité du vecteur

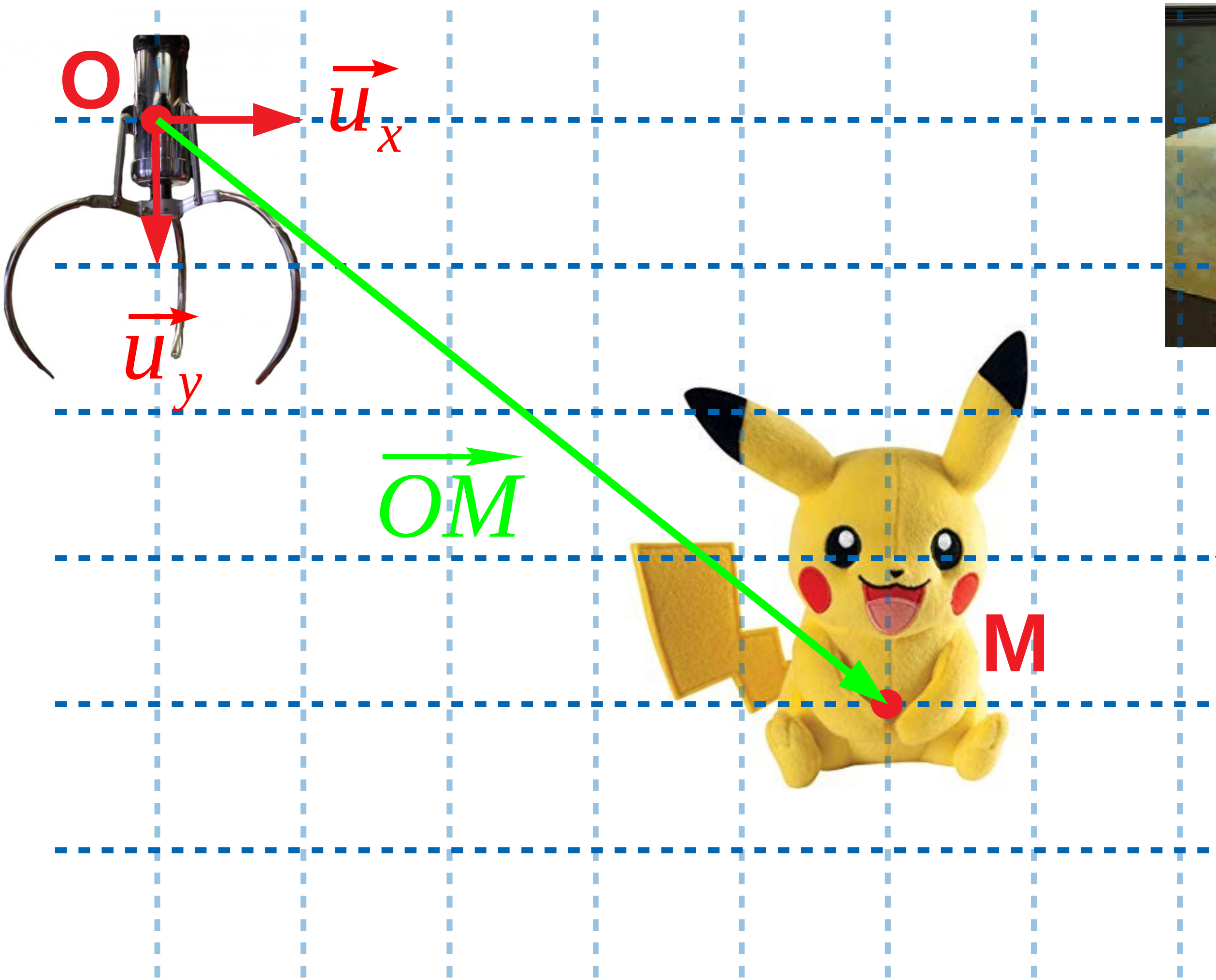
Intérêt : Rendre compte des 3 propriétés :

- Intensité de la grandeur ↔ norme du vecteur
- Orientation de la grandeur ↔ direction du vecteur
- Vers où la grandeur agit ↔ sens du vecteur

Exemple : position, vitesse, accélération, force...



Système de coordonnées

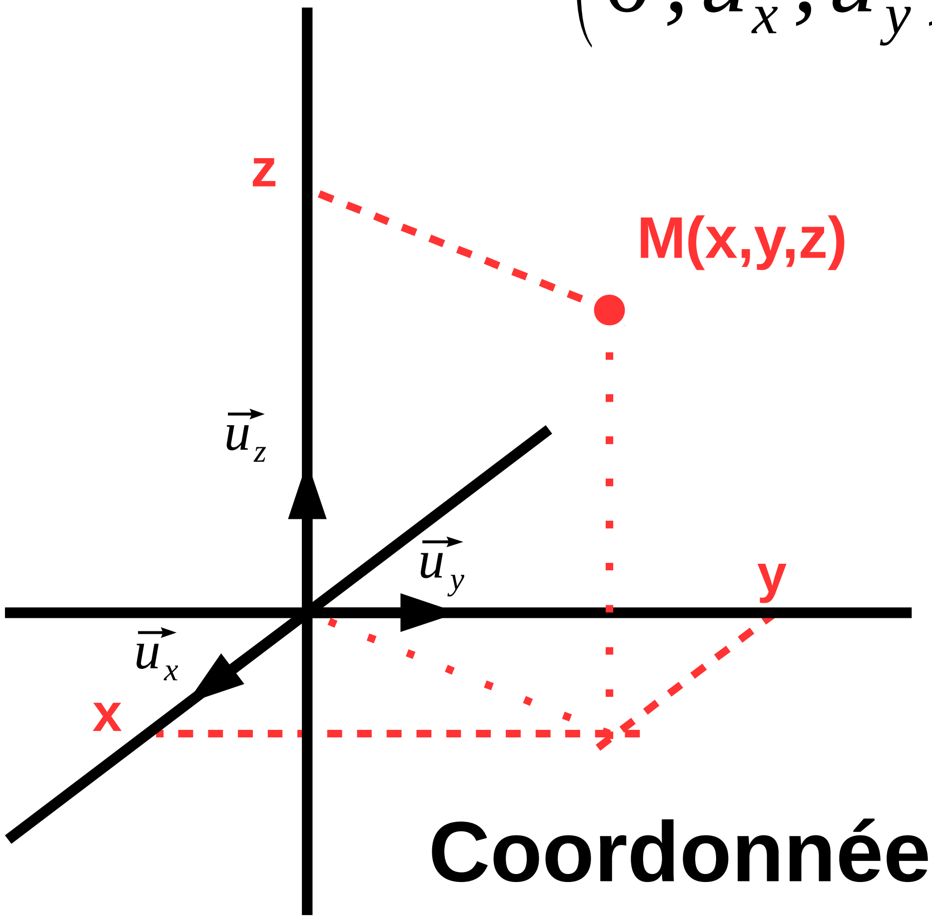


Vecteur position :

$$\overrightarrow{OM} = x \cdot \vec{u}_x + y \cdot \vec{u}_y$$

Coordonnées cartésiennes

$$\left(0,\vec{u}_x,\vec{u}_y,\vec{u}_z\right)$$



Repère orthonormé :

$$\vec{u}_x\perp\vec{u}_y \quad \vec{u}_y\perp\vec{u}_z \quad \vec{u}_z\perp\vec{u}_x$$

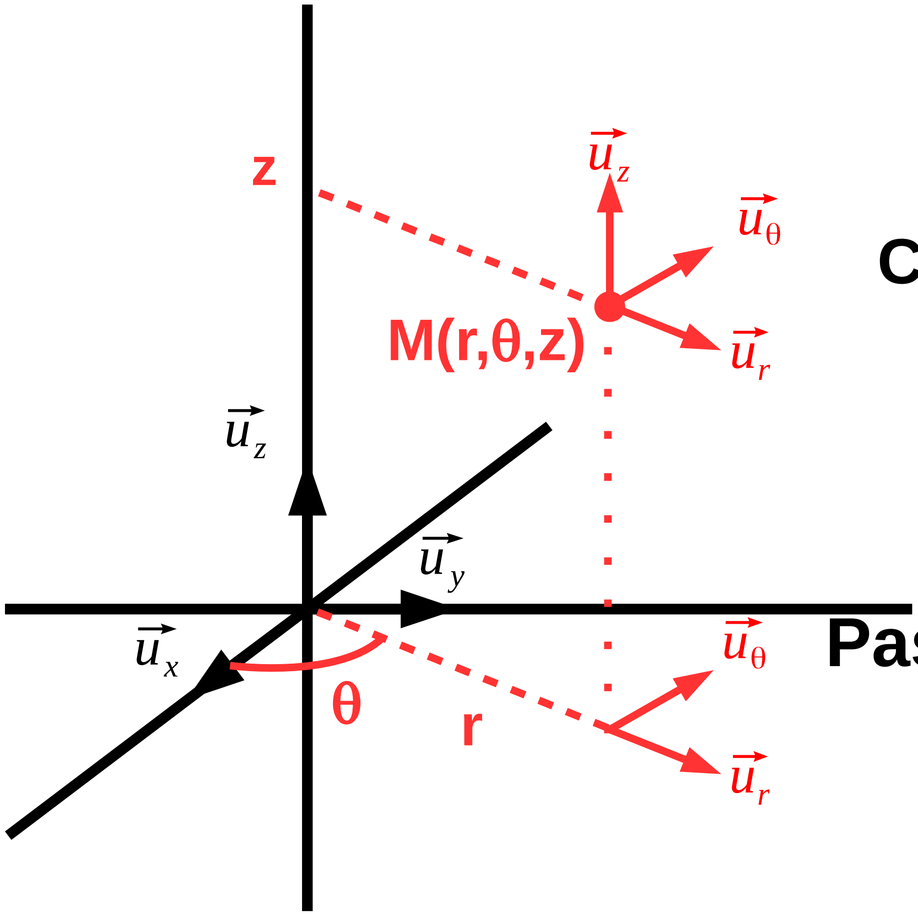
$$|\vec{u}_x|=|\vec{u}_y|=|\vec{u}_z|=1$$

Coordonnées d'un point M :

$$\overrightarrow{OM}=x\cdot\vec{u}_x+y\cdot\vec{u}_y+z\cdot\vec{u}_z \qquad x,y,z\in\left]-\infty,+\infty\right[$$

Coordonnées cylindriques

$$\left(0, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z\right)$$



Repère orthonormé :

$$\vec{u}_r \perp \vec{u}_\theta \quad \vec{u}_\theta \perp \vec{u}_z \quad \vec{u}_z \perp \vec{u}_r$$

$$|\vec{u}_r| = |\vec{u}_\theta| = |\vec{u}_z| = 1$$

Coordonnées d'un point M :

$$\overrightarrow{OM} = r \cdot \vec{u}_r + z \cdot \vec{u}_z$$

$$r \in [0, +\infty[, \ \theta \in [0, 2\pi] \text{ et } z \in]-\infty, +\infty[$$

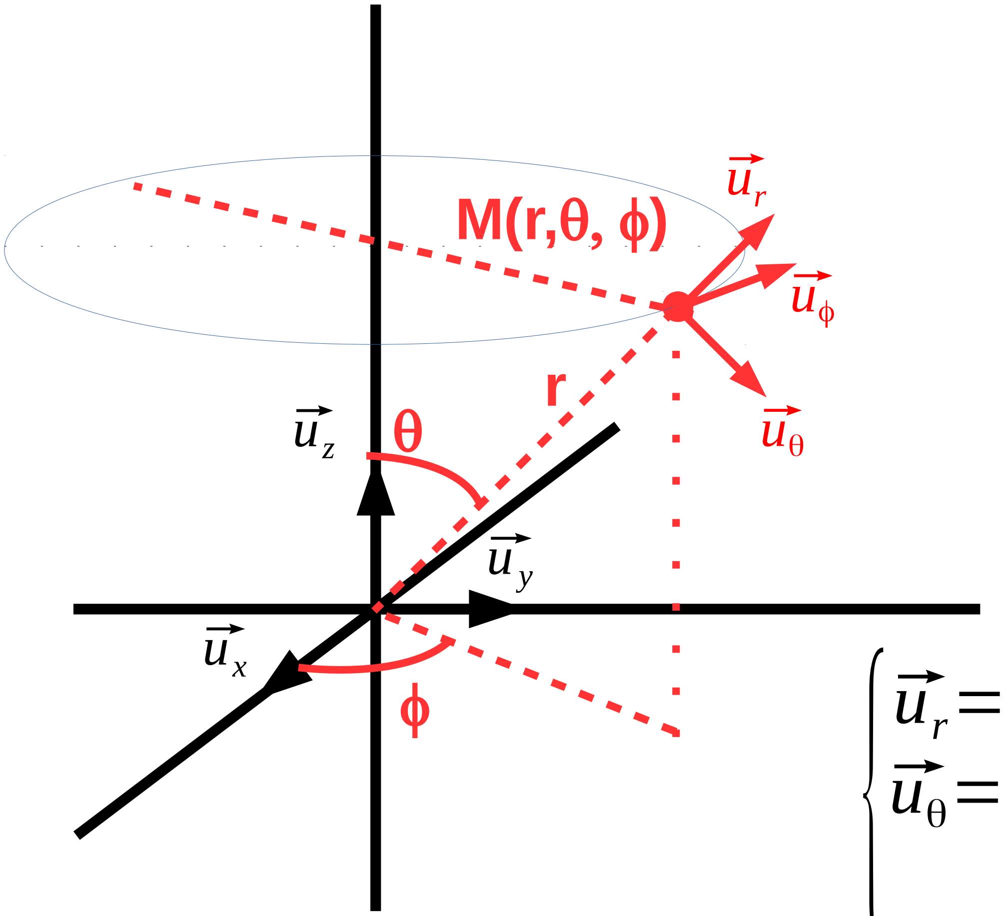
Passage vers le système cartésien :

$$\begin{cases} \vec{u}_r = \cos\theta \cdot \vec{u}_x + \sin\theta \cdot \vec{u}_y \\ \vec{u}_\theta = -\sin\theta \cdot \vec{u}_x + \cos\theta \cdot \vec{u}_y \\ \vec{u}_z = \vec{u}_z \end{cases}$$

Attention : les vecteurs $\vec{u}_r$ et $\vec{u}_\theta$ sont des fonctions du temps

Coordonnées sphériques

$$\left(0, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\phi\right)$$



Repère orthonormé :

$$\vec{u}_r \perp \vec{u}_\theta \quad \vec{u}_\theta \perp \vec{u}_\phi \quad \vec{u}_\phi \perp \vec{u}_\theta$$

$$|\vec{u}_r| = |\vec{u}_\theta| = |\vec{u}_\phi| = 1$$

Coordonnées d'un point M :

$$\overrightarrow{OM} = r \cdot \vec{u}_r$$

$$r \in]0, +\infty[, \ \theta \in [0, 2\pi] \text{ et } \phi \in [0, \pi]$$

Passage vers le système cartésien :

$$\begin{cases} \vec{u}_r = \sin\theta \cdot \cos\phi \cdot \vec{u}_x + \sin\theta \cdot \sin\phi \cdot \vec{u}_y + \cos\theta \cdot \vec{u}_z \\ \vec{u}_\theta = \cos\theta \cdot \cos\phi \cdot \vec{u}_x + \cos\theta \cdot \sin\phi \cdot \vec{u}_y - \sin\theta \vec{u}_z \\ \vec{u}_\phi = -\sin\phi \vec{u}_x + \cos\phi \vec{u}_y \end{cases}$$

Attention : les vecteurs $\vec{u}_r$, $\vec{u}_\theta$ et $\vec{u}_\phi$ sont des fonctions du temps

Rappels sur les vecteurs

$$A(x_A, y_A, z_A) \qquad B(x_B, y_B, z_B)$$

Coordonnées d'un vecteur :

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A)\vec{u}_x + (y_B - y_A)\vec{u}_y + (z_B - z_A)\vec{u}_z$$

Norme ou module :

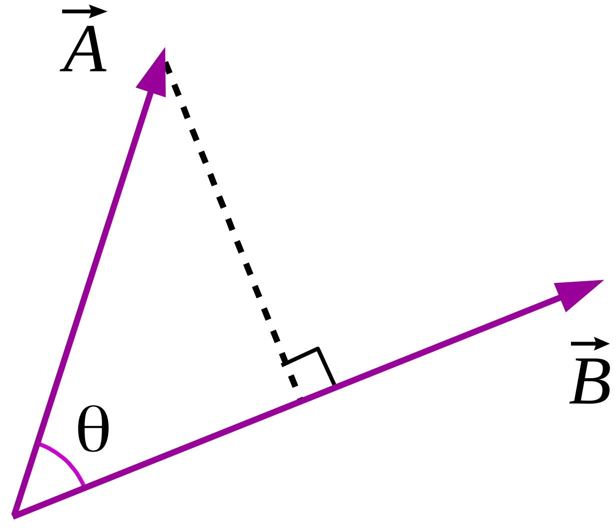
$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Opérations simples :

$$\vec{C} = \vec{A} + \vec{B} \qquad \vec{C} = n \cdot \vec{A}$$

$$\vec{C} = \begin{cases} C_x = A_x + B_x \\ C_y = A_y + B_y \\ C_z = A_z + B_z \end{cases} \qquad \vec{C} = \begin{cases} C_x = n \cdot A_x \\ C_y = n \cdot A_y \\ C_z = n \cdot A_z \end{cases}$$

Produit scalaire



$\vec{A}\cdot\vec{B}=\lambda$ avec $\lambda\in\mathbb{R}$

D'une manière générale :

$$\vec{A}\cdot\vec{B}=|\vec{A}|\cdot|\vec{B}|\cdot\cos\theta$$

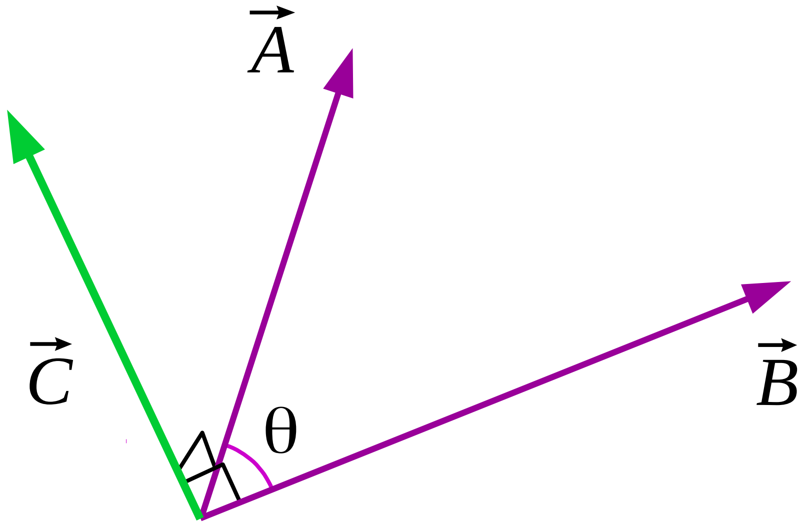
Quelques propriétés :

$$\vec{A}\perp\vec{B}\Rightarrow\vec{A}\cdot\vec{B}=0$$
$$\vec{A}\cdot\vec{B}=\vec{B}\cdot\vec{A}$$

Écriture commune :

$$\vec{A}\cdot\vec{B}=x_A\cdot x_B+y_A\cdot y_B+z_A\cdot z_B$$

Produit vectoriel



Définition : $\vec{A} \wedge \vec{B} = \vec{C}$

3 renseignements pour $\vec{C}$

– son module : $|\vec{C}| = |\vec{A} \wedge \vec{B}| = |\vec{A}| \cdot |\vec{B}| \cdot \sin\theta$

– sa direction : $\vec{C} \perp (\vec{A}, \vec{B})$

– sens : trièdre direct

Propriétés :

– non commutatif $\vec{A} \wedge \vec{B} = -\vec{B} \wedge \vec{A}$

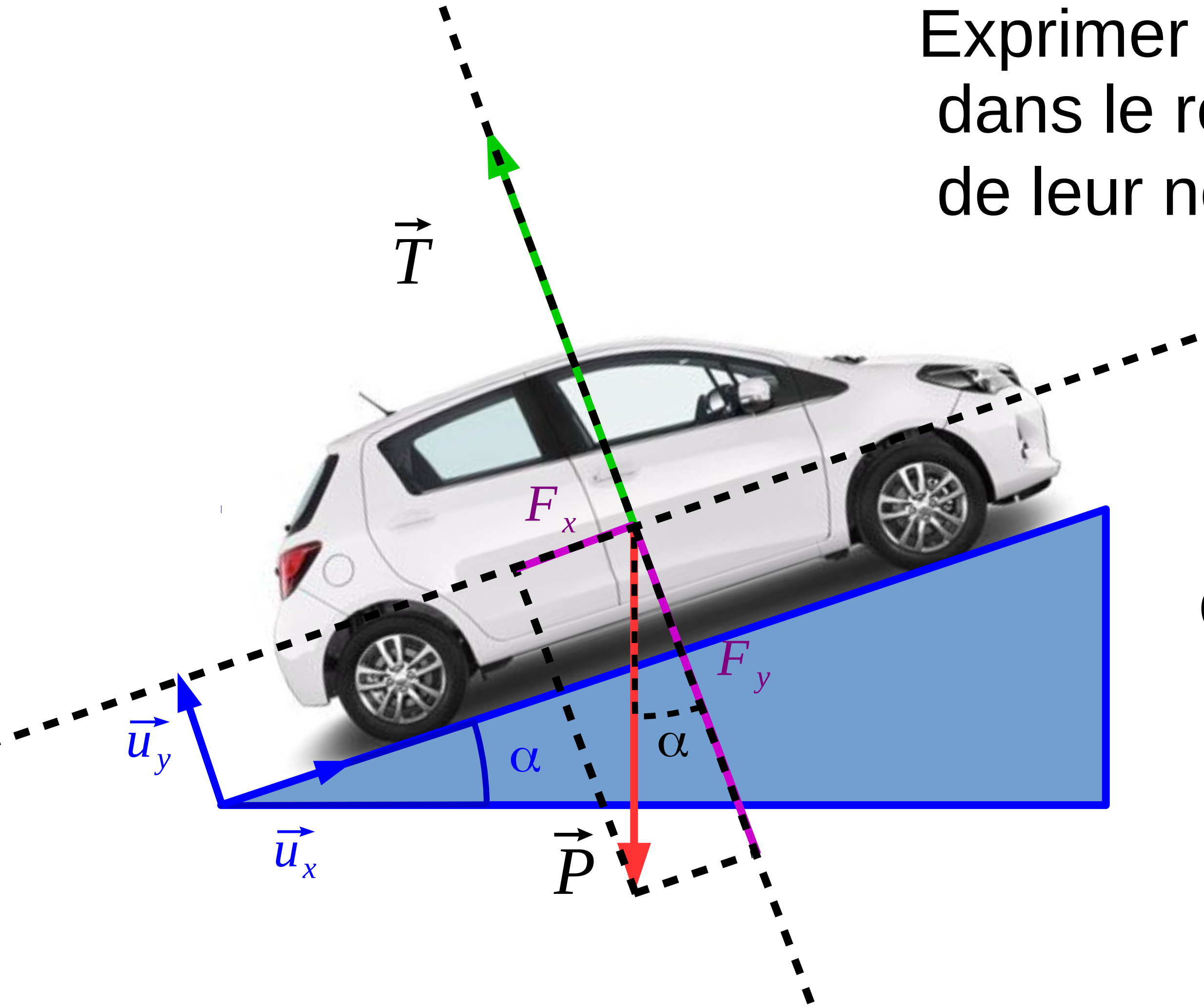
– Maximum pour $\vec{A} \perp \vec{B}$

– $\vec{A} \| \vec{B} \Rightarrow \vec{A} \wedge \vec{B} = 0$

Expression :

$$\vec{A} \wedge \vec{B} = (y_A \cdot z_B - y_B \cdot z_A)\vec{u}_x + (z_A \cdot x_B - z_B \cdot x_A)\vec{u}_y + (x_A \cdot y_B - x_B \cdot y_A)\vec{u}_z$$

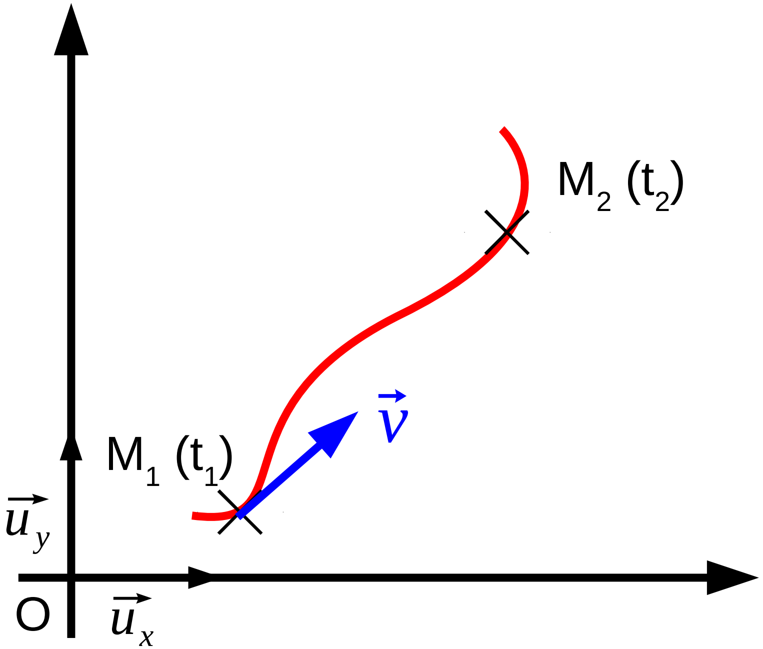
Projection



Exprimer les vecteurs $\vec{P}$ et $\vec{T}$ dans le repère $(0, \vec{u}_x, \vec{u}_y)$ en fonction de leur norme et de l'angle α

Calculer la somme des deux vecteurs

Vecteur vitesse dans le repère cartésien



Vecteur position :

$$\overrightarrow{OM}(t)=x(t)\cdot\vec{u}_x+y(t)\cdot\vec{u}_y+z(t)\cdot\vec{u}_z$$

Vitesse moyenne :

$$v_{moy}=\frac{\Delta\left|\overrightarrow{M_1M_2}\right|}{\Delta t}=\frac{M_2-M_1}{t_2-t_1}$$

Vitesse instantanée :

$$v_{inst}=\lim_{t_2-t_1\to 0}\frac{M_2-M_1}{t_2-t_1}$$

Vecteur vitesse :

$$\boxed{\vec{v}=\lim_{t_2-t_1\to 0}\frac{\overrightarrow{M_2M_1}}{t_2-t_1}=\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}}$$

$$\vec{v}=\dot{x}\cdot\vec{u}_x+\dot{y}\cdot\vec{u}_y+\dot{z}\cdot\vec{u}_z$$

Vecteur vitesse dans le repère cylindrique

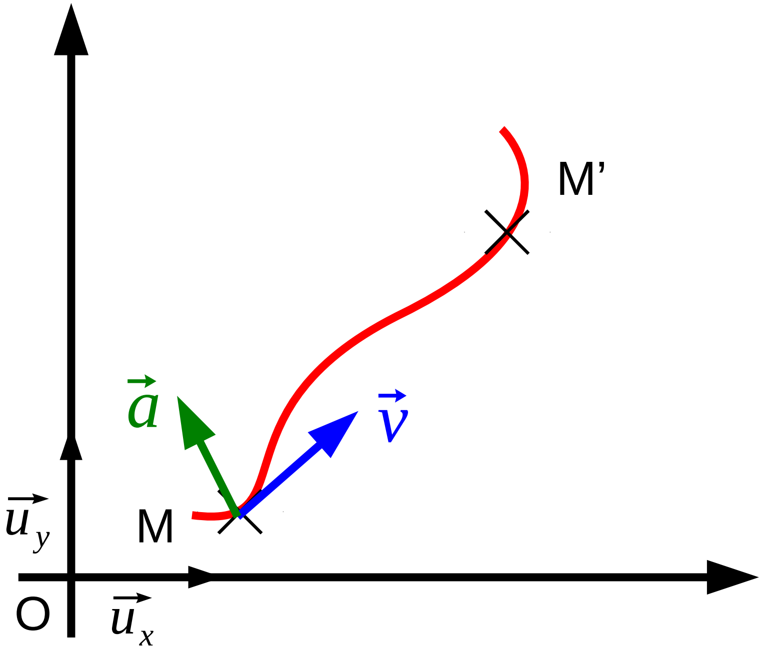
Comment dérive-t-on en coordonnées cylindriques ?

$$\overrightarrow{OM}(t)=r(t)\cdot\vec{u}_r+z(t)\cdot\vec{u}_z$$

$$\begin{cases}\vec{u}_r=\cos\theta\cdot\vec{u}_x+\sin\theta\cdot\vec{u}_y\\ \vec{u}_\theta=-\sin\theta\cdot\vec{u}_x+\cos\theta\cdot\vec{u}_y\\ \vec{u}_z=\vec{u}_z\end{cases}$$

$$\vec{v}=\dot{r}\cdot\vec{u}_r+r\cdot\dot{\theta}\cdot\vec{u}_\theta+\dot{z}\cdot\vec{u}_z$$

Vecteur accélération dans le repère cartésien



Accélération moyenne :

$$a_{moy} = \frac{\Delta|\vec{v}|}{\Delta t} = \frac{v_{finale} - v_{initiale}}{t_{finale} - t_{initiale}}$$

Accélération instantanée :

$$a_{inst} = \lim_{t_{finale} - t_{initiale} \to 0} \frac{v(t_{finale}) - v(t_{initiale})}{t_{finale} - t_{initiale}}$$

Vecteur accélération : $$\boxed{\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}}$$

$$\vec{a} = \ddot{x} \cdot \vec{u}_x + \ddot{y} \cdot \vec{u}_y + \ddot{z} \cdot \vec{u}_z$$

Vecteur accélération dans le repère cylindrique

$$\vec{v}=\dot{r}\cdot\vec{u_r}+r\cdot\dot{\theta}\cdot\vec{u_\theta}+\dot{z}\cdot\vec{u_z}$$

$$\begin{cases}\vec{u_r}=\cos\theta\cdot\vec{u_x}+\sin\theta\cdot\vec{u_y}\\ \vec{u_\theta}=-\sin\theta\cdot\vec{u_x}+\cos\theta\cdot\vec{u_y}\\ \vec{u_z}=\vec{u_z}\end{cases}$$

$$\vec{a}=\left(\ddot{r}-r\cdot\dot{\theta}^2\right)\cdot\vec{u_r}+\left(2\cdot\dot{r}\cdot\dot{\theta}+r\cdot\ddot{\theta}\right)\cdot\vec{u_\theta}+\ddot{z}\cdot\vec{u_z}$$

Bilan

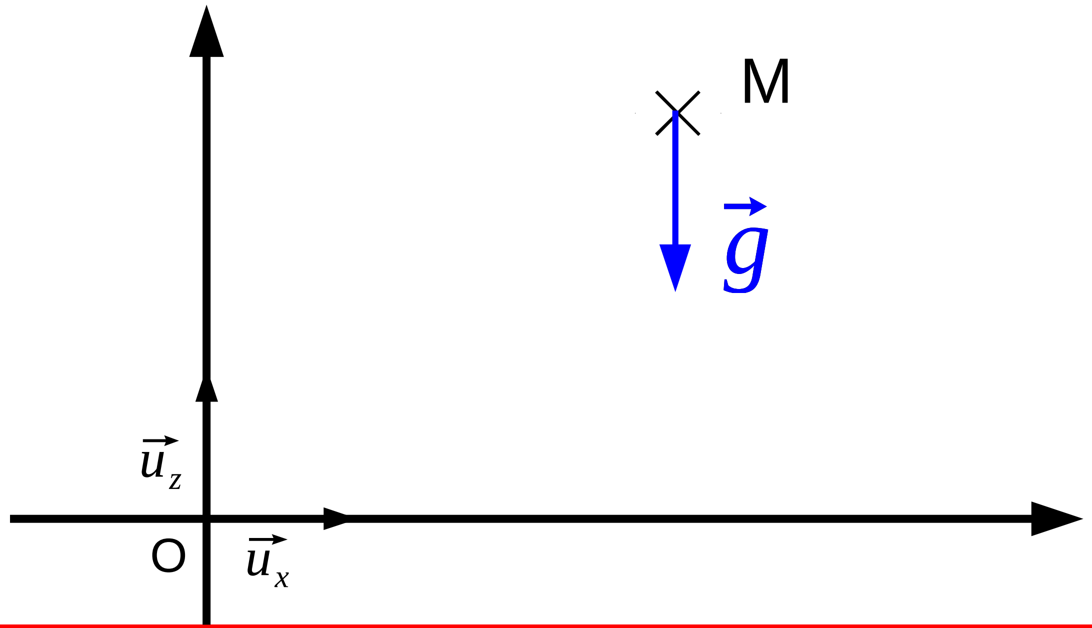
$$\overrightarrow{OM} \quad \underset{\left(\int \cdot dt\right)+CI}{\overset{\left(\frac{d\cdot}{dt}\right)}{\rightleftarrows}} \quad \vec{v}(M) \quad \underset{\left(\int \cdot dt\right)+CI}{\overset{\left(\frac{d\cdot}{dt}\right)}{\rightleftarrows}} \quad \vec{a}(M)$$

Exemples de mouvements

- Mouvement rectiligne uniforme
- Mouvement rectiligne uniformément varié
- Mouvement circulaire uniforme

Un cas : la chute libre

- On considère un objet assimilé à un point M en chute libre par rapport au sol. A tout instant l'accélération du point M est égale au vecteur $\vec{g}$
- A t=0, le point M se trouve à une hauteur h et possède une vitesse $\vec{v}_0 = v_0 \vec{e}_x$
- Déterminer la position du point M pour tout t



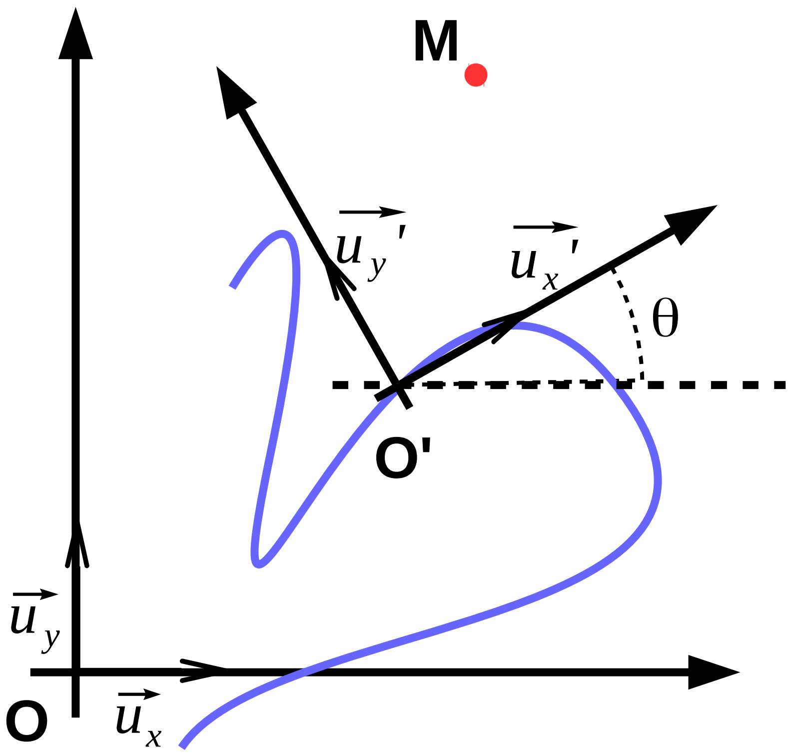
Lois de composition

Objectif ?

– Décomposer un mouvement
– Se rapporter à un référentiel Galiléen

Un repère étant attaché à un référentiel, nous emploierons ici indifféremment référentiel et repère.

Composition des positions

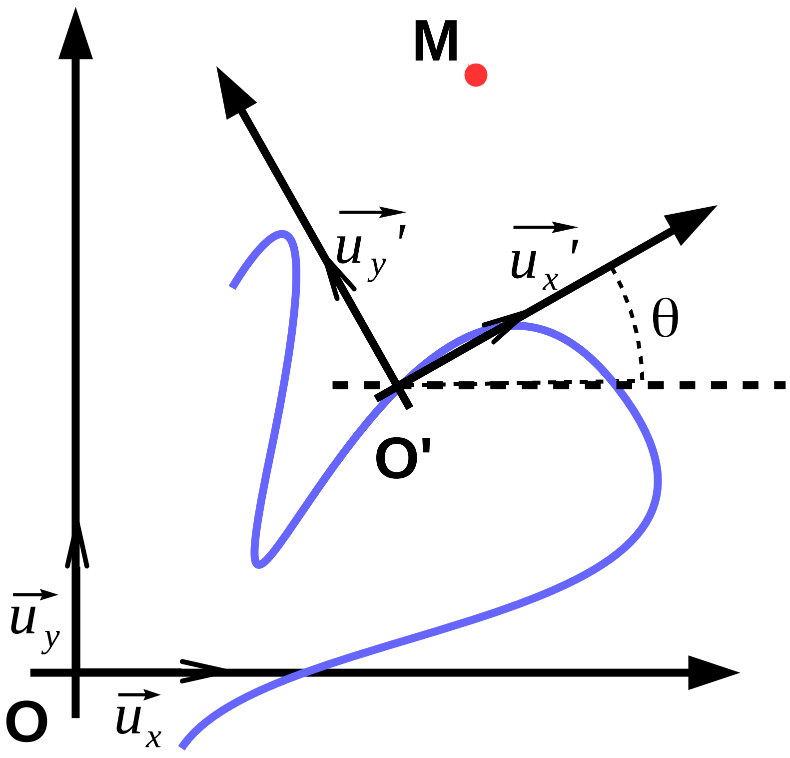


R : $\overrightarrow{OM} = x\,\vec{u}_x + y\,\vec{u}_y + z\,\vec{u}_z$

R' : $\overrightarrow{O'M} = x'\,\vec{u}_x\,' + y'\,\vec{u}_y\,' + z'\,\vec{u}_z\,'$

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}$$

Composition des vitesses

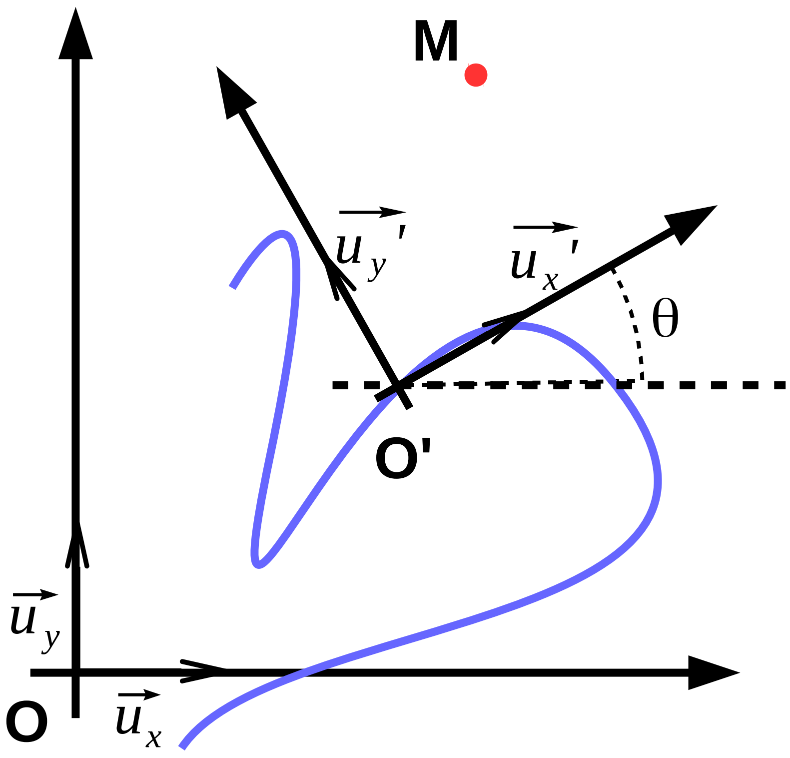


$$\vec{v}_{M/R} = \left.\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right|_R = \left.\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}\right|_R + \left.\frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}\right|_R$$

$$\boxed{\vec{v}_{M/R} = \underbrace{\vec{v}_{M/R'}}_{\text{vitesse relative}} + \underbrace{\vec{v}_{O'/R} + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{O'M}}_{\text{vitesse d'entraînement}}}$$

Composition des accélérations

$$\vec{a}_{M/R} = \left.\frac{d\vec{v}_{M/R}}{dt}\right|_R$$



Loi de composition : $\left.\frac{d\vec{U}}{dt}\right|_R = \left.\frac{d\vec{U}}{dt}\right|_{R'} + \vec{\Omega} \wedge \vec{U}$

$$\vec{a}_{M/R} = \vec{a}_{M/R'} + \vec{a}_e + \vec{a}_c$$

Accélération d'entraînement :

$$\vec{a}_e = \vec{a}_{O'/R} + \vec{\Omega} \wedge \left(\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{O'M}\right) + \frac{d\vec{\Omega}}{dt} \wedge \overrightarrow{O'M}$$

Accélération de Coriolis :

$$\vec{a}_c = 2\vec{\Omega} \wedge \vec{v}_{M/R'}$$