Chapitre 3

Intégrales multiples

Préambule
Ce chapitre est un chapitre pratique destiné à permettre de :

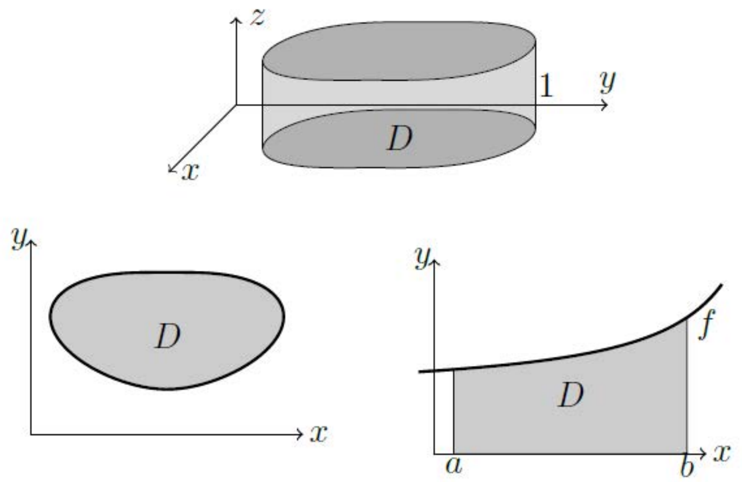
- rappeler le calcul d'intégrale d'une fonction réelle continue sur un intervalle fermé
- calculer l'intégrale d'une fonction continue de 2 variables sur une partie fermée bornée du plan,
- calculer l'intégrale d'une fonction continue de 3 variables sur une partie fermée bornée de l'espace.

On ne se posera aucun problème de nature théorique et tous les théorèmes seront admis.

3.1 Intégrales doubles

3.1.1 Introduction

Avant de voir comment se calcule une intégrale double essayons de répondre à la question : pourquoi calcule-t-on une intégrale double ?
Si D est un domaine borné de $\mathbb{R}^2$, l'intégrale $\displaystyle\iint_D dxdy$ représente le volume sous le graphe de la fonction constante $f(x, y) = 1$: ce solide est un cylindre de hauteur 1 et de base D, son volume est donc égal à l'aire de D multiplié par la hauteur, qui vaut 1.



Définition 3.1 *Soit D un domaine borné de $\mathbb{R}^2$. L'**aire** de D est l'intégrale double*

$$Aire(D) = \iint_D dxdy$$

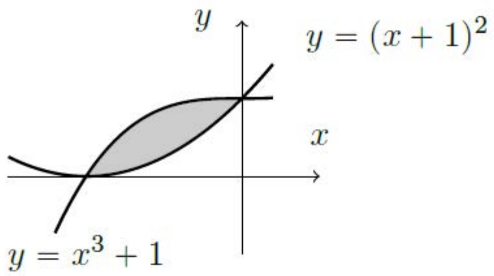
Proposition 3.1 *Si D est la portion du plan sous le graphe d'une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ positive, c.-à-d. si $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \big| x \in [a, b],\ y \in [0, f(x)]\}$, alors on a : $Aire(D) = \displaystyle\int_a^b f(x)dx$.*

En effet, si $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \big| x \in [a,b],\ y \in [0, f(x)]\}$, on a :

$$\text{Aire}(D) = \iint_D dxdy = \int_a^b \left(\int_0^{f(x)} dy \right) dx = \int_a^b \Big[y \Big]_0^{f(x)} dx = \int_a^b f(x)dx$$

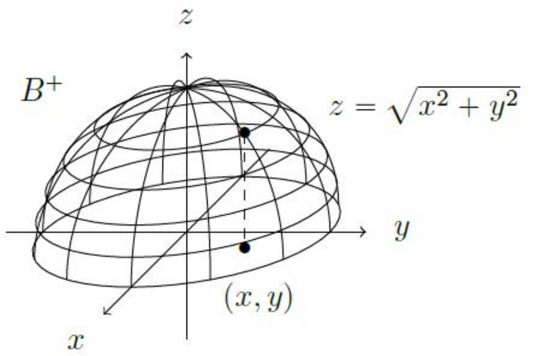
Exemple 3.1
Calculer l'aire du domaine D de $\mathbb{R}^2$ délimitée par les courbes d'équation $y = (x+1)^2$ et $y = x^3 + 1$.

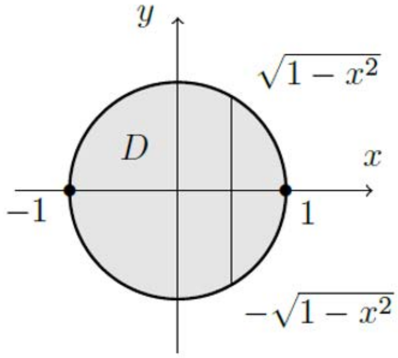
D'abord on dessine le domaine D : les deux courbes $y = (x+1)^2$ et $y = x^3 + 1$ se rencontrent aux points (-1,0) et (0, 1).
On a donc $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \big| -1 \leqslant x \leqslant 0,\ (x+1)^2 \leqslant y \leqslant x^3 + 1\}$



Exemple 3.2
Calculer le volume de la boule unité B de $\mathbb{R}^3$ en coordonnées cartésiennes.
On rappelle que la boule unité est définie par $B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \big| \ x^2+y^2+z^2 \leqslant 1\}$.

Le volume de la boule B est deux fois le volume de la demi-boule $B^+ = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \big| \ x^2+y^2+z^2 \leqslant 1, \ z \geqslant 0\}$ sous le graphe de la fonction $z = f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$ (voir graphique ci-après).





On a alors $\mathrm{Vol}(B) = 2\displaystyle\iint_D \sqrt{1-x^2-y^2}dxdy$ où $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \big| \ x^2+y^2 \leqslant 1\}$.
On peut décrire D comme l'ensemble : $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \big| \ x \in [-1,1], \ y \in \Big[-\sqrt{1-x^2}, \sqrt{1-x^2}\Big]\}$, (voir graphique ci-après).
On a donc :

3.1.2 Description hiérarchisée d'une partie fermée bornée de $\mathbb{R}^2$

Définition 3.2 *On appelle description hiérarchisée du domaine Δ une partie fermée bornée de $\mathbb{R}^2$: l'existence de 2 réels a et b et de 2 applications continues sur $[a,b]$, notées u et v tels que $a < b$ et $\forall x \in [a,b],\ u(x) \leqslant v(x)$, avec $(x,y) \in \Delta \Leftrightarrow \begin{cases} x \in [a,b] \\ y \in [u(x), v(x)] \end{cases}$*

Ce qui peut s'illustrer par la figure 1 ci-après. On fera attention à ne pas commettre l'erreur du débutant qui cherche les bornes extrêmes pour les 2 variables indépendamment les unes des autres, et transforme tous les domaines en rectangle...

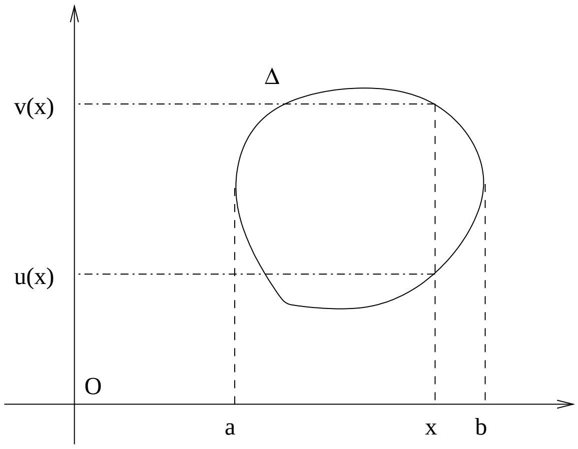


Figure 1 – ***Intégrale double : description hiérarchisée du domaîne***

Exemple 3.3
On va prendre le domaine du plan défini par : $y \geqslant 0, x \geqslant y, x \leqslant 1$.
Il est élémentaire de faire une figure de ce domaine, qui est un triangle.
En travaillant sur cette figure, on obtient facilement une description hiérarchisée : $\begin{cases} x \in [0,1] \\ y \in [0,x] \end{cases}$

3.1.3 Intégrale double de f continue sur Δ, un fermé borné de $\mathbb{R}^2$

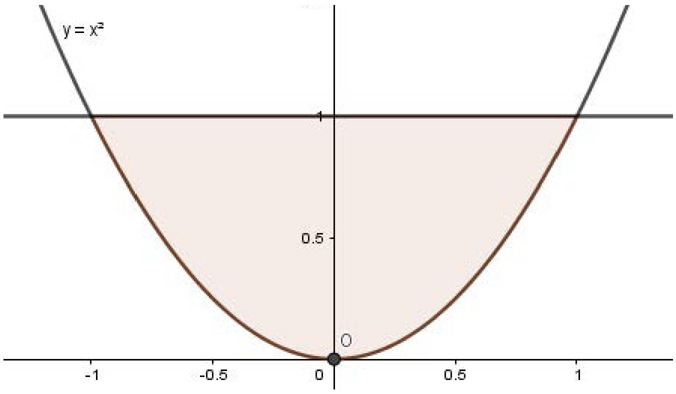
Définition 3.3 *Soit f une fonction continue sur Δ une partie fermée bornée de $\mathbb{R}^2$.*
Si on dispose d'une description hiérarchisée de Δ, on appelle intégrale double de f sur Δ :

$$I = \iint_{\Delta} f(x,y)dxdy = \int_a^b \left(\int_{u(x)}^{v(x)} f(x,y)dy \right) dx.$$

Autrement, on transforme cette intégrale double en 2 intégrales simples emboîtées.

Exemple 3.4
Soit Δ la partie du plan xOy délimitée par l'arc de parabole $y = x^2$ en bas, et la droite $y = 1$ en haut. Intégrer la fonction $f \ : \ (x, y) \mapsto f(x, y) = x^2 y$ sur Δ

On peut décrire Δ (voir figure ci-après) comme l'ensemble : $\Delta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \Big| \ x \in [-1, 1], \ y \in [x^2, 1]\}$.



3.1.4 Théorème de Fubini : inversion des bornes

Théorème 3.1 *Soit f une fonction continue sur Δ une partie fermée bornée de $\mathbb{R}^2$.*
On suppose qu'on dispose d'une description hiérarchisée de Δ c.-à-d.

$$(x, y) \in \Delta \Leftrightarrow \begin{cases} x \in [a, b] \\ y \in [u(x), v(x)] \end{cases}$$

et si on a par ailleurs :

$$(x, y) \in \Delta \Leftrightarrow \begin{cases} y \in [c, d] \\ x \in [\alpha(y), \beta(y)] \end{cases}$$

Alors :

$$I = \iint_{\Delta} f(x, y) dx dy = \int_a^b \left(\int_{u(x)}^{v(x)} f(x, y) dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y) dx \right) dy$$

Ceci est illustré sur la figure 2 ci-après.
On peut changer l'ordre d'intégration, le calcul est différent, mais le résultat est le même.

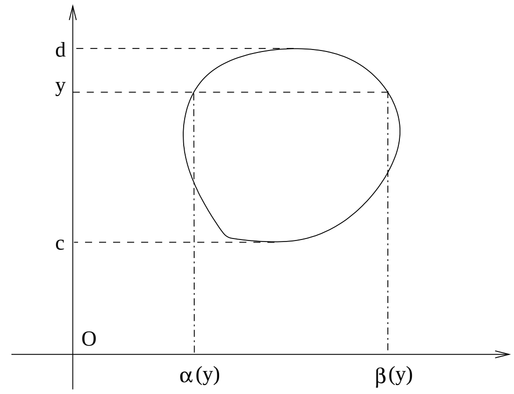
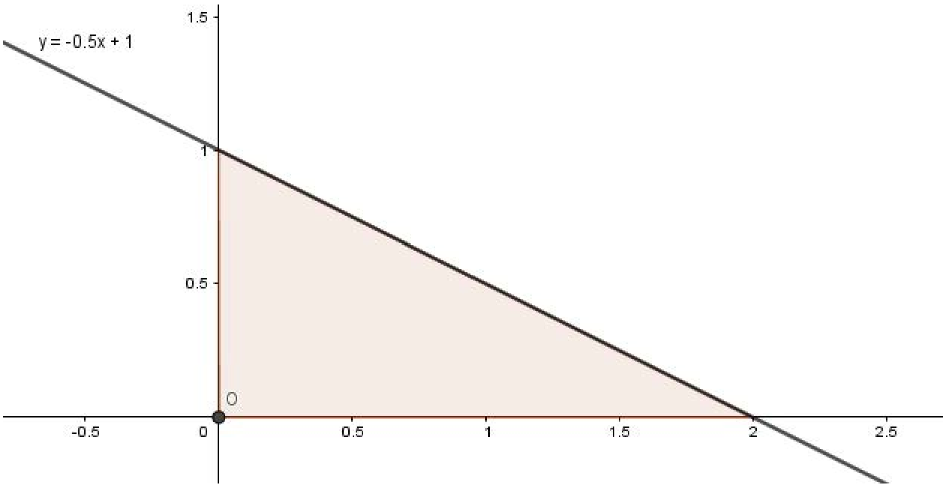


Figure 2 – ***Inversion de l'ordre des intégrations***

Exemple 3.5

On va intégrer la fonction $(x, y) \to f(x, y) = xy$ *sur le triangle suivant* $D = \begin{cases} x \geqslant 0, \; y \geqslant 0 \\ x + 2y \leqslant 2 \end{cases}$



3.1.5 Un cas particulier

On va se placer dans un cas très particulier puisque : $(x, y) \in \Delta \Leftrightarrow \begin{cases} x \in [a, b] \\ y \in [c, d] \end{cases}$

Le domaine est un rectangle. Et d'autre part : $\forall (x, y) \in \Delta, f(x, y) = \varphi(x) \cdot \psi(y)$.

Alors, par linéarité des intégrales simples sur un intervalle :

$$\begin{aligned} I &= \iint_\Delta f(x, y)dxdy = \int_a^b \left(\int_{u(x)}^{v(x)} f(x, y)dy \right) dx \\ &= \int_a^b \left(\int_c^d \varphi(x) \cdot \psi(y)dy \right) dx = \int_a^b \left(\varphi(x) \int_c^d \psi(y)dy \right) dx \\ &= \int_a^b \varphi(x) \left(\int_c^d \psi(y)dy \right) dx = \left(\int_c^d \psi(y)dy \right) \left(\int_a^b \varphi(x)dx \right) \\ &= \int_a^b \varphi(x)dx \times \int_c^d \psi(y)dy \end{aligned}$$

ainsi, dans ce cas : $\displaystyle\iint_\Delta \varphi(x) \cdot \psi(y)dxdy = \int_a^b \varphi(x)dx \times \int_c^d \psi(y)dy$

3.1.6 Propriétés

On démontre les propriétés suivantes :

- **Linéarité**

Théorème 3.2 *Soient f , g deux fonctions continues sur Δ, un fermé borné de $\mathbb{R}^2$. On dispose d'une description hiérarchisée de Δ et λ, μ deux réels. Alors :*

$$\iint_\Delta (\lambda f(x, y) + \mu g(x, y))\, dxdy = \lambda \iint_\Delta f(x, y)dxdy + \mu \iint_\Delta g(x, y)dxdy.$$

- **Positivité**

Théorème 3.3 *Soit f fonction continue **positive** sur Δ, un fermé borné de $\mathbb{R}^2$. On dispose d'une description hiérarchisée de Δ. Alors :*

$$\iint_\Delta f(x, y)dxdy \geqslant 0.$$

- **Additivité selon les domaines**

Théorème 3.4 *Soit f fonction continue sur Δ_1 et sur Δ_2, deux fermés bornés de $\mathbb{R}^2$. On dispose d'une description hiérarchisée de Δ_1 et Δ_2. De plus $\Delta_1 \bigcap \Delta_2$ est **au plus** une courbe. Alors :*

$$\iint_{\Delta_1 \cup \Delta_2} f(x, y)dxdy = \iint_{\Delta_1} f(x, y)dxdy + \iint_{\Delta_2} f(x, y)dxdy.$$

Cela permet d'exploiter d'éventuelles symétries (de la fonction et du domaine).

Théorème 3.5 *Si f est une fonction continue **positive** sur Δ, un fermé borné de $\mathbb{R}^2$ et si $D \subset \Delta$, alors :*

$$\iint_D f(x, y)dxdy \leqslant \iint_\Delta f(x, y)dxdy.$$

3.1.7 Changement de variables

Définition 3.4 *Soit φ une application de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2$, à valeurs dans $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^2$:*

$$\begin{array}{rcll} \varphi & : & \mathcal{U} & \to & \mathcal{V} \\ & & (u,v) & \mapsto & \varphi(u,v) \end{array}$$

On pose $(x,y) = \varphi(u,v)$.

• *On appelle matrice jacobienne de φ en (u,v) la matrice 2×2 définie par* $J_\varphi(u,v) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u}(u,v) & \dfrac{\partial x}{\partial v}(u,v) \\ \dfrac{\partial y}{\partial u}(u,v) & \dfrac{\partial y}{\partial v}(u,v) \end{pmatrix}$

• *Le **déterminant** de la matrice jacobienne s'appelle **déterminant jacobien** ou tout simplement **jacobien** de φ en (u,v).*

On le note $\dfrac{D(x,y)}{D(u,v)} = \det(J_\varphi(u,v)) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u}(u,v) & \dfrac{\partial x}{\partial v}(u,v) \\ \dfrac{\partial y}{\partial u}(u,v) & \dfrac{\partial y}{\partial v}(u,v) \end{vmatrix}$ *et* $\left|\dfrac{D(x,y)}{D(u,v)}\right|$ *est la valeur absolue du jacobien.*

Théorème 3.6 *Soit $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ deux ouverts de $\mathbb{R}^2$ et $\varphi : \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{V}$ une application de classe $\mathcal{C}^1$. D et Δ deux fermés bornés de $\mathbb{R}^2$ telles que $D \subset \mathcal{U}$ et $\Delta \subset \mathcal{V}$. De plus, on suppose que $\varphi(D) = \Delta$. On note $(x,y) = \varphi(u,v)$. On a alors la formule du changement de variable :*

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_\Delta g(u,v)\left|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right|dudv$$

A noter qu'on fait un changement de variables :
• pour simplifier le domaine d'intégration,
• ou pour simplifier le calcul des primitives emboîtées (**ce qui est nouveau par rapport au calcul intégral à une seule variable**).

3.1.8 Changement de variables en coordonnées polaires

Théorème 3.7 *On pose $(x,y) = \varphi(\rho,\theta)$ avec* $\begin{cases} x = \rho\cos(\theta) \\ y = \rho\sin(\theta) \end{cases}$

On a $(x,y) \in D \Longleftrightarrow (\rho,\theta) \in \Delta$ et $f(x,y) = f(\rho\cos(\theta), \rho\sin(\theta)) = g(\rho,\theta)$. On a alors :

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_\Delta g(\rho,\theta)\rho d\rho d\theta$$

En effet le jacobien de ce changement de variables est

$$\det(J_\varphi(\rho,\theta)) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \rho} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial \rho} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos(\theta) & -\rho\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \rho\cos(\theta) \end{vmatrix} = \rho\cos^2(\theta) + \rho\sin^2(\theta) = \rho \geqslant 0$$

La figure 3 ci-dessous, explicite les coordonnées polaires.

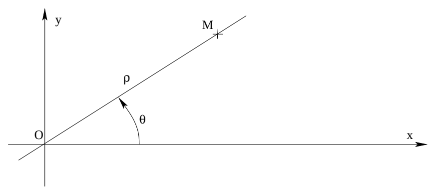
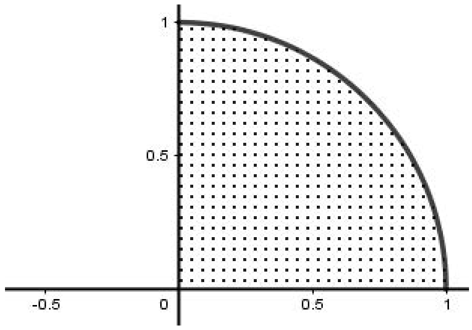


Figure 3 – *Coordonnées polaires*

Exemple 3.6

Intégrer la fonction $f \;:\; (x,y) \mapsto f(x,y) = xy$ *sur le premier quart du disque de centre* $O(0,0)$ *est de rayon 1 (voir figure ci-après) :* $D = \begin{cases} x \geqslant 0 \\ y \geqslant 0 \\ x^2 + y^2 \leqslant 1 \end{cases}$



On cherche d'abord une description hiérarchisée du domaine en coordonnées polaires : $\begin{cases} \theta \in [0, \frac{\pi}{2}] \\ \rho \in [0,1] \end{cases}$,

ce qui donne, compte tenu que $xy = \rho^2 \cos(\theta)\sin(\theta)$:

Exemple 3.7

Calculer les intégrales doubles $I_1 = \displaystyle\iint_D dxdy$ *et* $I_2 = \displaystyle\iint_D x^2 dxdy$ *où* D *est le disque de centre* $(1,2)$ *et de rayon égal à 2.*

On rappelle que l'aire d'un disque est égale à πR^2.

Indication : il suffit de poser $\begin{cases} x = 1 + \rho\cos(\theta) \\ y = 2 + \rho\sin(\theta) \end{cases}$

et d'utiliser la formule de changements de variable en coordonnées polaires.

On trouve : $I_1 = 4\pi$ et $I_2 = 8\pi$.

3.2 Intégrales triples

3.2.1 Description hiérarchisée d'une partie fermée bornée de $\mathbb{R}^3$

Définition 3.5 *On appelle description hiérarchisée du domaine Δ une partie fermée bornée de $\mathbb{R}^3$: l'existence de 2 réels a et b ($a < b$), de 2 applications à une seule variable, continues sur $[a, b]$, notées u et v avec $u(x) \leqslant v(x)$ $\forall x \in [a, b]$ et l'existence de 2 applications à deux variables, continues sur $[a, b]$, notées $\alpha(x, y)$ et $\beta(x, y)$ tels que :*

$$(x, y, z)) \in \Delta \Leftrightarrow \begin{cases} x \in [a, b] \\ y \in [u(x), v(x)] \\ z \in \Big[\alpha(x, y), \beta(x, y)\Big] \end{cases}$$

On peut avoir les variables dans un autre ordre, l'important est que les bornes de chacune ne soient définies qu'en fonction des précédentes.
La figure 4 donne une description hiérarchisée du domaine.

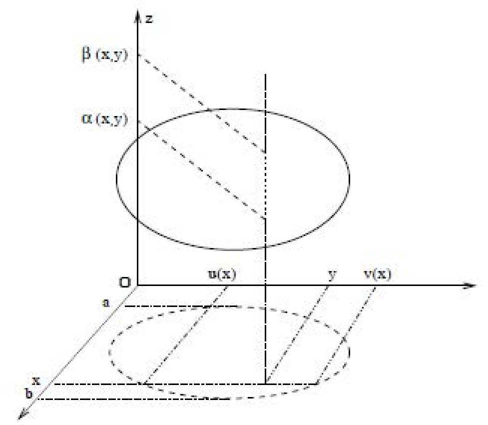


Figure 4 – *Intégrale triple: description hiérarchisée du domaine*

3.2.2 Intégrale double de f continue sur Δ, un fermé borné de $\mathbb{R}^3$

Définition 3.6 *Soit f une fonction continue sur Δ une partie fermée bornée de $\mathbb{R}^3$.*
Si on dispose d'une description hiérarchisée de Δ, on appelle intégrale triple de f sur Δ :

$$I = \iiint_\Delta f(x, y, z) dxdydz = \int_a^b \left\{ \int_{u(x)}^{v(x)} \left(\int_{\alpha(x,y)}^{\beta(x,y)} f(x, y, z) dz \right) dy \right\} dx.$$

Autrement, on transforme cette intégrale triple en 3 intégrales simples emboîtées.
Cette définition est l'analogue en dimension 3 de celle donnée en dimension 2 pour les intégrales doubles.
Les intégrales triples ont donc les mêmes propriétés des intégrales doubles, et les mêmes théorèmes d'existence (f continue ou bien bornée et avec discontinuités de première espèce ou de mesure nulle). La signification géométrique de l'intégrale triple est plus abstraite : par analogie, le volume (algébrique) sous le graphe de f devient le quadri-volume (algébrique) sous le graphe de f.

3.2.3 Théorème de Fubini : inversion des bornes

Théorème 3.8 *Soit f une fonction continue sur Δ une partie fermée bornée de $\mathbb{R}^3$.*
On suppose qu'on dispose d'une description hiérarchisée de Δ c.-à-d.

$$(x, y, z)) \in \Delta \Leftrightarrow \begin{cases} x \in [a, b] \\ y \in [u(x), v(x)] \\ z \in \Big[\alpha(x, y), \beta(x, y)\Big] \end{cases}$$

et si on fixe y (ou z) :

$$(x,y)\in\Delta \Leftrightarrow \begin{cases} y\in[c,d] \\ x\in[t(y),w(y)] \\ z\in\Big[\lambda(x,y),\mu(x,y)\Big] \end{cases}$$

Alors :

$$I=\iiint_{\Delta} f(x,y,z)dxdydz=\int_c^d\left\{\int_{t(y)}^{w(y)}\left(\int_{\lambda(x,y)}^{\mu(x,y)} f(x,y,z)dz\right)dx\right\}dy.$$

On peut changer l'ordre d'intégration, le calcul est différent, mais le résultat est le même.

Cas particulier : si $\Delta=[a,b]\times[c,d]\times[e,g]$ est un parallélépipède, alors :

$$\iiint_{\Delta} f(x,y,z)dxdydz=\int_a^b dx\int_c^d dy\int_e^g dz f(x,yh,z)\quad\text{(dans l'ordre qu'on veut).}$$

Exemple 3.8

1. *Soit* $\Delta=[0,1]\times[1,2]\times[2,3]$. *Intégrer la fonction* $f\ :\ (x,y,z)\mapsto f(x,y,z)=x^2-2yz$ *sur* Δ.
2. *Soit* C *est le cylindre plein, de base le disque* $D=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \middle| x^2+y^2\leqslant 1,\ z=0\right\}$ *et de hauteur 3. Intégrer la fonction* $g\ :\ (x,y,z)\mapsto g(x,y,z)=1-2yz$ *sur* C.

3.2.4 Changement de variables

Définition 3.7 *Soit φ une application de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^3$, à valeurs dans $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^3$:*

$$\begin{array}{rcll} \varphi & : & \mathcal{U} & \to \mathcal{V} \\ & & (u,v,w) & \mapsto \varphi(u,v,w) \end{array}$$

On pose $(x,y,z) = \varphi(u,v,w)$.
• *On notera $J_\varphi(u,v)$ la matrice jacobienne de φ en (u,v) la matrice 3×3 définie par*

$$J_\varphi(u,v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(u,v,w) & \frac{\partial x}{\partial v}(u,v,w) & \frac{\partial x}{\partial w}(u,v,w) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(u,v,w) & \frac{\partial y}{\partial v}(u,v,w) & \frac{\partial y}{\partial w}(u,v,w) \\ \frac{\partial z}{\partial u}(u,v,w) & \frac{\partial z}{\partial v}(u,v,w) & \frac{\partial z}{\partial w}(u,v,w) \end{pmatrix}$$

• *Le **jacobien** de φ en (u,v,w) est noté*

$$\frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)} = \det(J_\varphi(u,v,w)) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(u,v,w) & \frac{\partial x}{\partial v}(u,v,w) & \frac{\partial x}{\partial w}(u,v,w) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(u,v,w) & \frac{\partial y}{\partial v}(u,v,w) & \frac{\partial y}{\partial w}(u,v,w) \\ \frac{\partial z}{\partial u}(u,v,w) & \frac{\partial z}{\partial v}(u,v,w) & \frac{\partial z}{\partial w}(u,v,w) \end{vmatrix}$$

et $\left|\frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)}\right|$ est la valeur absolue du jacobien.

Théorème 3.9 *Soit $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ deux ouverts de $\mathbb{R}^3$ et $\varphi : \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{V}$ une application de classe $\mathcal{C}^1$. D et Δ deux fermés bornés de $\mathbb{R}^3$ telles que $D \subset \mathcal{U}$ et $\Delta \subset \mathcal{V}$. De plus, on suppose que $\varphi(D) = \Delta$. On note $(x,y,z) = \varphi(u,v,w)$. On a alors la formule du changement de variable :*

$$\iiint_D f(x,y,z)dxdydz = \iiint_\Delta g(u,v,w)\left|\frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)}\right|dudvdw$$

3.2.5 Coordonnées cylindriques

Théorème 3.10 *On pose $(x,y,z) = \varphi(\rho,\theta,z)$ avec* $\begin{cases} x = \rho\cos(\theta) \\ y = \rho\sin(\theta) \\ z = z \end{cases}$
On a $(x,y,z) \in D \Longleftrightarrow (\rho,\theta,z) \in \Delta$ et $f(x,y,z) = f(\rho\cos(\theta), \rho\sin(\theta), z) = g(\rho,\theta,z)$.
On a alors :

$$\iiint_D f(x,y,z)dxdydz = \iiint_\Delta g(\rho,\theta,z)\rho d\rho d\theta dz$$

En effet le jacobien de ce changement de variables est :

$$\begin{aligned} \det(J_\varphi(\rho,\theta,z)) &= \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial \rho} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos(\theta) & -\rho\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \rho\cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\ &= \rho\cos^2(\theta) + \rho\sin^2(\theta) = \rho \geqslant 0 \end{aligned}$$

La figure suivante explicite les coordonnées cylindriques.

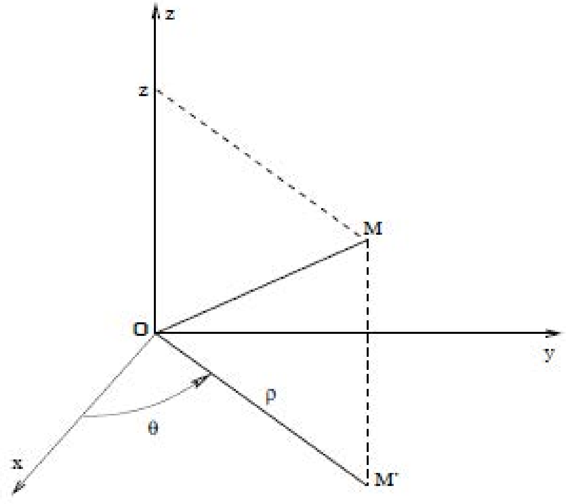


Figure 5 – *Coordonnées cylindriques*

Exemple 3.9
Soit à nouveau C le cylindre plein, de base le disque $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \big| x^2 + y^2 \leqslant 1,\ z = 0\}$ et de hauteur 3. Intégrer la fonction $f\ :\ (x, y, z) \mapsto f(x, y, z) = 1 - 2yz$ sur C.

3.2.6 Coordonnées sphériques

Théorème 3.11 *On pose $(x, y, z) = \phi(r, \theta, \varphi)$ avec* $\begin{cases} x = r\cos(\theta)\cos(\varphi) \\ y = r\sin(\theta)\cos(\varphi) \\ z = r\sin(\varphi) \end{cases}$
On a $(x, y, z) \in D \Longleftrightarrow (r, \theta, \varphi) \in \Delta$ et $f(x, y, z) = f(r\cos(\theta)\cos(\varphi), r\sin(\theta)\cos(\varphi), r\sin(\varphi)) = g(r, \theta, \varphi)$.
On a alors :

$$\iiint_D f(x, y, z)dxdydz = \iiint_\Delta g(r, \theta, \varphi)r^2\cos(\varphi)drd\theta d\varphi$$

En effet le jacobien de ce changement de variables est :

$$
\begin{aligned}
\det(J_\phi(\rho,\theta,\varphi)) &= \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} & \dfrac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} & \dfrac{\partial y}{\partial \varphi} \\ \dfrac{\partial z}{\partial r} & \dfrac{\partial z}{\partial \theta} & \dfrac{\partial z}{\partial \varphi} \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} \cos(\theta)\cos(\varphi) & -r\sin(\theta)\cos(\varphi) & -r\cos(\theta)\sin(\varphi) \\ \sin(\theta)\cos(\varphi) & r\cos(\theta)\cos(\varphi) & -r\sin(\theta)\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & 0 & r\cos(\varphi) \end{vmatrix} \\
&= \ldots = r^2\cos(\varphi) \geqslant 0 \quad \text{puisque } \varphi \in [0,\pi]
\end{aligned}
$$

La figure suivante explicite les coordonnées sphériques.

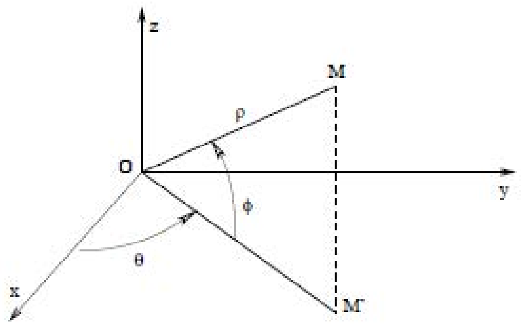


Figure 6 – ***Coordonnées sphériques du mathématicien***

Remarque 3.1
Les physiciens utilisent l'angle entre Oz et OM qui appartient donc à $[0,\pi]$.
Dans la formule, au niveau de la valeur absolue du jacobien, ils échangent ainsi $\sin(\varphi)$ *et* $\cos(\varphi)$.
Attention, parfois, ils changent aussi le nom des angles...

3.3 Applications : calculs divers

3.3.1 Aire ou volume

Nous avons déjà vu en introduction de ce chapitre que l'aire d'une partie fermée bornée du plan D est égale à $\iint_D dxdy$

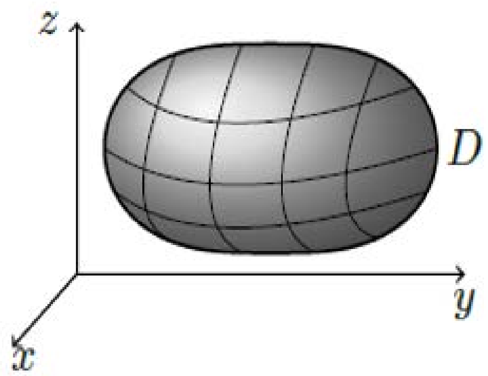
Définition 3.8 *Soit D un domaine borné de $\mathbb{R}^3$. Le* ***volume*** *de D est l'intégrale triple*

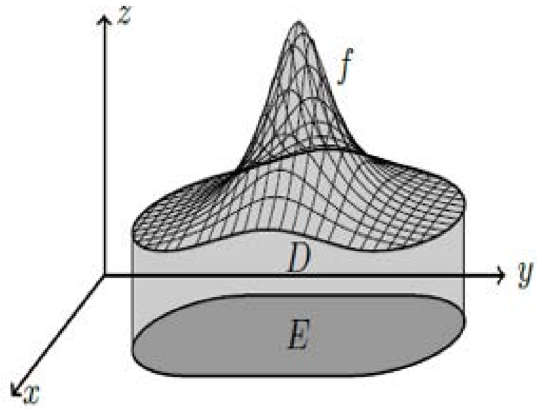
$$Vol(D) = \iiint_D dxdydz$$

Proposition 3.2 *Si D est la portion d'espace sous le graphe d'une fonction $f : E \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ positive, c.-à-d. si $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,\big|\, (x,y) \in E \subset \mathbb{R}^2,\ z \in \big[0, f(x,y)\big]\}$, alors on a : $Vol(D) = \iint_E f(x,y)dxdy$.*

En effet, si $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,\big|\, (x,y) \in E \subset \mathbb{R}^2,\ z \in \big[0, f(x,y)\big]\}$, on a :

$$\text{Vol}(D) = \iint_D dxdydz = \iint_E dxdy \int_0^{f(x,y)} dz = \iint_E dxdy \Big[z\Big]_0^{f(x,y)} dxdy = \iint_E f(x,y)dxdy$$





Exemple 3.10
Calculer le volume de la boule unité B de $\mathbb{R}^3$ en coordonnées sphériques.

On rappelle que la boule unité est définie par $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | \ x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1\}$.
Elle s'écrit en coordonnées sphériques

$$\Delta = \phi^{-1}(B) = \{(r, \theta, \varphi) | \ r \in [0, 1], \ \theta \in [0, 2\pi[, \ \varphi \in \Big[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \Big] \},$$

et puisque $dxdydz = r^2 \cos(\varphi) drd\theta d\varphi$, on a

$$\begin{aligned} \mathrm{Vol}(B) &= \iiint_B dxdydz \ = \ \iiint_\Delta r^2 \cos(\varphi) drd\theta d\varphi \\ &= \int_0^1 r^2 dr \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(\varphi) d\varphi \\ &= \frac{1}{3} \times 2\pi \Big[\sin(\varphi) \Big]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ = \ \frac{4\pi}{3} \end{aligned}$$

A noter que cette démonstration est beaucoup plus rapide que celle vue précédemment.

Exemple 3.11
Un matériau est réparti dans un cube $D = [0, R]^3$ selon la densité volumique

$$f(x, y, z) = \frac{x + y}{(z + 1)^2}.$$

Calculer la quantité totale du matériau ($I = \iiint_D f(x, y, z) dxdydz$) et sa quantité moyenne ($I_m = \frac{1}{Vol(D)} \iiint_D f(x, y, z) dxdydz$).

Indication : utiliser la formule du volume d'une cube (Vol(D)=R^3) et Fubini pour montrer que $I = \dfrac{3R^4}{2(R+1)}$ et $I_m = \dfrac{3R}{2(R+1)}$

3.3.2 Masse

Si on a $\mu(x, y, z)$ la masse volumique du solide en un point donné, sa masse est $M = \iiint_D \mu(x, y, z) dxdydz$.
Pour une plaque, on peut faire un calcul équivalent avec la densité surfacique $\sigma(x, y)$ et une intégrale double, $M = \iint \sigma(x, y) dxdy$.

3.3.3 Centre d'inertie

Avec les mêmes notations, et P de coordonnées (x, y, z) on a :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{M}\iiint_D \overrightarrow{OP}\mu(x,y,z)dxdydz$$

ou en densité surfacique :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{M}\iint_D \overrightarrow{OP}\sigma(x,y)dxdy$$

ce qui donne pour la première coordonnée par exemple : $x_G = \frac{1}{M}\iiint_D x\mu(x,y,z)dxdydz$

ou encore, dans le cas d'une densité surfacique : $x_G = \frac{1}{M}\iint_D x\sigma(x,y)dxdy$

3.3.4 Moments d'inertie

Pour un solide, un moment d'inertie (noté I ou J selon les auteurs), peut se calculer par rapport à un point, une droite ou un plan qu'on appelle dans tous les cas A.
On note $d\left((x,y,z),A\right)$ la distance du point courant à A.
Toujours avec les mêmes notations, on a : $I_A = \iiint_D \Big(d((x,y,z),A)\Big)^2\mu(x,y,z)dxdydz$
On peut faire, une dernière fois, le même type de calcul pour une plaque : $I_A = \iiint_D \Big(d((x,y,z),A)\Big)^2\sigma(x,y)dxdy$
Pour un volume, le moment d'inertie par rapport à l'axe Oz est donc : $I_{Oz} = \iiint_D \left(x^2+y^2\right)\mu(x,y,z)dxdydz.$

Exemple 3.12
Déterminer le centre de masse du demi-cylindre homogène

$$D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 |\ x^2+y^2 \leqslant R^2,\ z \in [0,H],\ y \geqslant 0\}.$$

Il est naturel de travailler en coordonnées cylindriques et d'écrire

$$\Delta = \phi^{-1}(D) = \{(\rho,\varphi,z) \in \mathbb{R}^3 |\ \rho \in [0,R], \varphi \in [0,\pi[,\ z \in [0,H]\}.$$

Le calcul de la masse totale donne

$$M = \iiint_D dxdydz = \iiint_\Delta \rho d\rho d\varphi dz = \frac{\pi R^2 H}{2}$$

(en utilisant Fubini).
Le centre de masse G a pour coordonnées cartésiennes

$$\begin{array}{rcl} x_G &=& \frac{1}{M}\iiint_D xdxdydz = \frac{1}{M}\iiint_\Delta \rho^2\cos(\varphi)d\rho d\varphi dz \ = \ \ldots \ = \ 0 \\ y_G &=& \frac{1}{M}\iiint_D ydxdydz = \frac{1}{M}\iiint_\Delta \rho^2\sin(\varphi)d\rho d\varphi dz \ = \ \ldots \ = \ \frac{4R}{3\pi} \\ z_G &=& \frac{1}{M}\iiint_D zdxdydz = \frac{1}{M}\iiint_\Delta \rho d\rho d\varphi dz \ = \ \ldots \ = \ \frac{H}{2} \end{array}$$

Ainsi G a pour coordonnées cartésiennes $(0, \frac{4R}{3\pi}, \frac{H}{2})$.

3.4 Feuille d'exercices : Intégrales multiples

Exercice 3.1

Soit D le domaine : $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ x+y \leqslant 1\}$. *Calculer* $\displaystyle\iint_D f(x,y)dxdy$ *si*

1. $f(x,y) = x^2 + y^2$
2. $f(x,y) = xy(x+y)$

Exercice 3.2

Calculer l'intégrale double suivante $\displaystyle\iint_D f(x,y)dxdy$ *avec*

1. $f(x,y) = x$ *et* $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ y \geqslant 0,\ x+2y \leqslant 4,\ y-x-1 \leqslant 1\}$,
2. $f(x,y) = \cos(xy)$ *et* $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ 1 \leqslant x \leqslant 2,\ 0 \leqslant xy \leqslant \frac{\pi}{2}\}$,
3. $f(x,y) = xy$ *et* $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ xy+x+y \leqslant 1\}$,
4. $f(x,y) = \dfrac{1}{(x+y)^3}$ *et* $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ 1 < x < 3,\ y > 2,\ x+y < 5\}$,
5. $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ *et* $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ 0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 1,\ x^2+y^2 \geqslant 1\}$.

Exercice 3.3

Soit D le domaine délimitée par les droites verticales $x=-1$ et $x=1$ et les courbes $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ d'équations $y=x^2$ et $y=4-x^3$. Tracer D et calculer son aire.

Exercice 3.4

Calculer $\displaystyle\iint_D f(x,y)dxdy$ *où D est le carré de sommets $O(0,0)$, $A(\pi,0)$, $B(\pi,\pi)$, $C(0,\pi)$ et f est la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par* $f(x,y) = (x+y)\sin(x)\sin(y)$.

Exercice 3.5

Calculer $\displaystyle\iint_D f(x,y)dxdy$ *où D est le triangle de sommets $O(0,0)$, $A(1,0)$, $B(0,1)$ et f est la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par* $f(x,y) = \ln(x+y+1)$.

Exercice 3.6 *(*exercice supplémentaire*)*

Calculer $\displaystyle\iint_D f(x,y)dxdy$ *où D est la partie du plan délimitée par les cercles d'équation :*
$x^2+y^2=1$ *et* $(x-1)^2+(y-1)^2=1$ *et f est la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par* $f(x,y)=xy$.

Exercice 3.7 ***un changement de variables donné***

En posant $u=xy$ et $v=y^2-x^2$ calculer l'intégrale double $\displaystyle\iint_D (y^2-x^2)^{xy}(x^2+y^2)dxdy$.

Indication : *pour calculer le jacobien* $J = \dfrac{D(x,y)}{D(u,v)}$ *il vaut mieux calculer le jacobien* $\dfrac{D(u,v)}{D(x,y)}$ *et ensuite par la formule d'inversion des déterminants :* $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$ *déduire J.*

Exercice 3.8 ***coordonnées polaires***

En passant par un changement de variables en coordonnées polaires, calculer $\displaystyle\iint_D f(x,y)dxdy$ *si*

1. $f(x,y) = \dfrac{1}{1+x^2+y^2}$ *et* $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ 0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 1,\ x^2+y^2 \leqslant 1\}$,
2. $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ *et* $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2+y^2-2x \leqslant 0\}$ *(montrer que D est un disque)*,
3. $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ *et* $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ 1 \leqslant x^2+y^2 \leqslant 4\}$,
4. $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ *et* $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x \geqslant 0,\ 1 \leqslant x^2+y^2 \leqslant 2y\}$.

Exercice 3.9 ***Intégrale triple***

Calculer l'intégrale triple suivante $\iiint_D f(x,y,z)dxdydz$ *avec*

1. $f(x,y,z) = x(y+z)$ *et* $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ z \geqslant 0,\ x+y+z \leqslant 1\}$,
2. $f(x,y,z) = x$ *et* $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ 0 \leqslant z \leqslant 1,\ x+y+z \leqslant 1\}$,
3. $f(x,y,z) = \dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$ *et* $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x^2+y^2 \geqslant a^2\ \ 0 \leqslant z \leqslant a\}$, *où* $a > 0$,
4. $f(x,y,z) = |xyz|$ *et* $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ 0 \leqslant z \leqslant 1,\ x^2+y^2 \leqslant z^2\}$,
5. $f(x,y,z) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z-a)^2}}$ *et* D *est la boule unité* $B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x^2+y^2+z^2 \leqslant 1\}$
6. $f(x,y,z) = \dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$ *et* $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ z \geqslant 0,\ x^2+y^2+z^2 \leqslant R^2\}$, *où* $a > 0$,

Éventuellement passer par les coordonnées cylindriques ou sphériques.