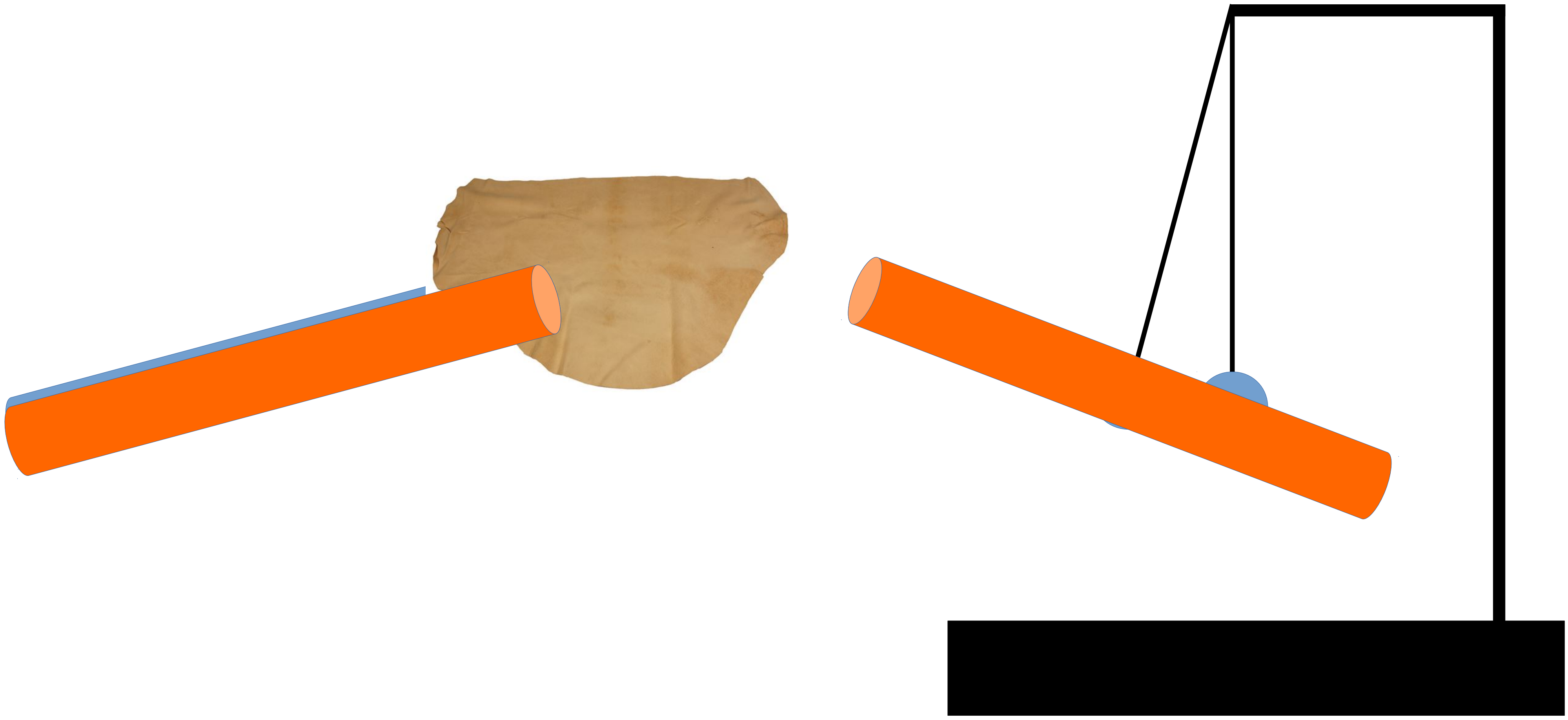
Physique - Electromagnétisme
Chapitre 1 - Electrostatique

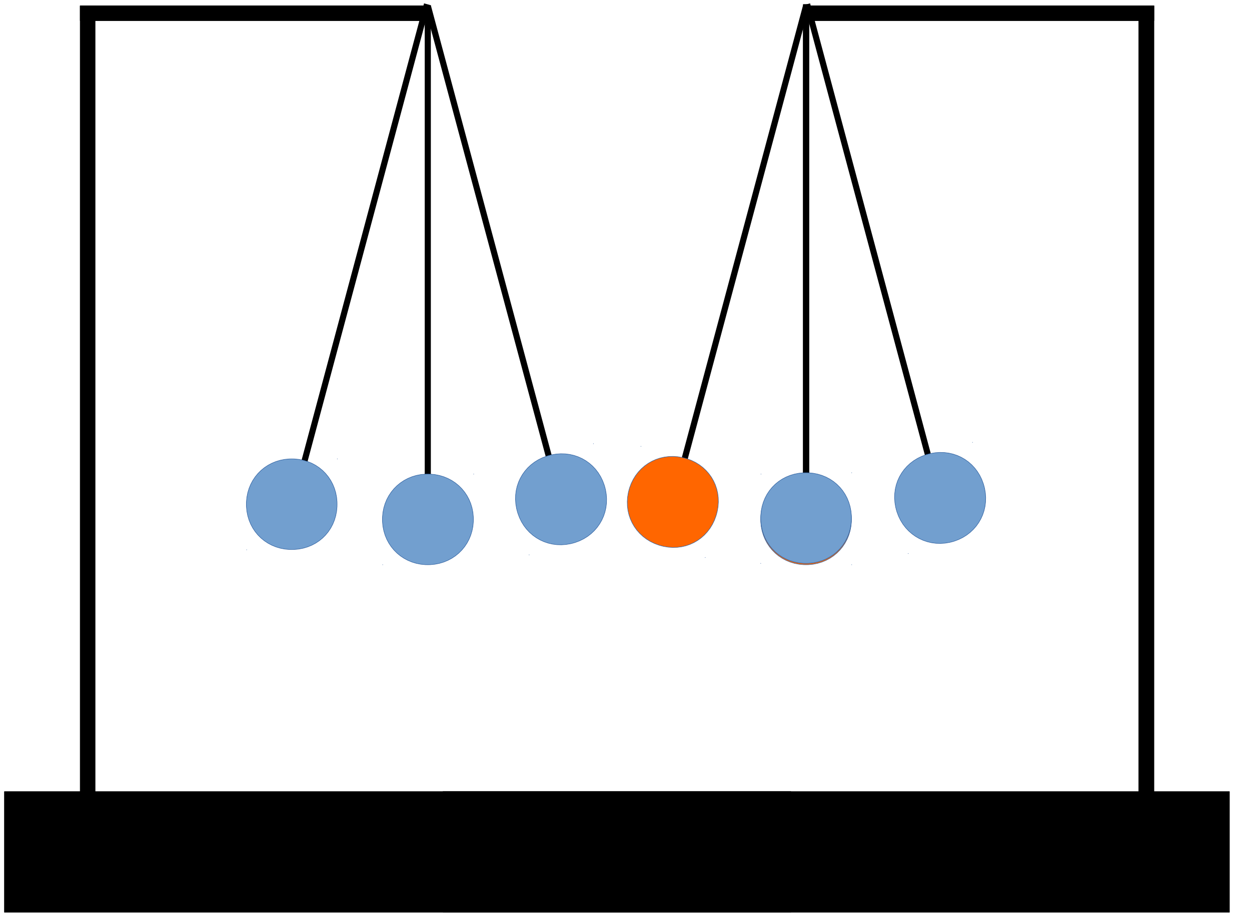
SOMMAIRE

Expérience 1

Expérience 2



Expérience 3



I – Notions de charges électriques – 1. Expériences

Expérience	Observations	Déductions
Expérience 1	Tout corps non électrisé est attiré par un corps électrisé	Corps électrisé exerce une action mécanique => Existence d'une force
Expérience 2	Transfert de l'électrisation d'un corps vers un autre	Existence de particules élémentaires vecteurs de l'électrisation => Notion de charge
Expérience 3	Même électrisation => se repoussent Electrisations différentes => s'attirent	Deux types de charges

Charges électriques portées par des particules élémentaires

Electron Proton

Par convention la charge négative a été attribuée à l'électron

La charge électrique est une grandeur conservative

On ne peut ni créer ni détruire de charges électriques

La charge électrique est une grandeur quantifiée

$Q = Z q_e$ avec $Z \in \mathbb{Z}$ $q_e = 1{,}60217733 . 10^{-19}\,\mathrm{C}$

q_e est la charge élémentaire, son unité est le Coulomb

Les charges peuvent être (distribution)

Ponctuelles
Réparties sur une courbe
Réparties sur une surface
Réparties sur un volume

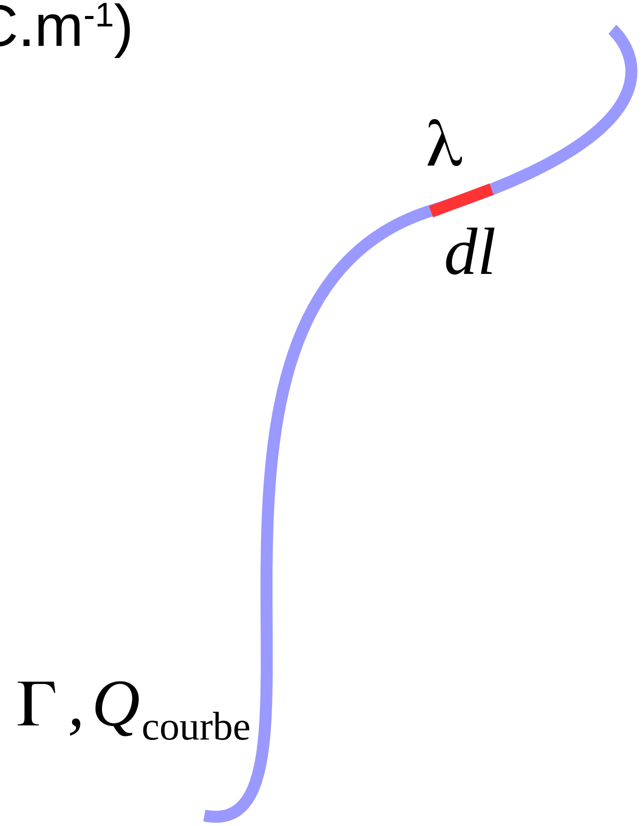
II – Répartitions des charges – 1. Distribution linéique

Répartition des charges sur une courbe Γ

Ex : Fil isolant chargé

λ est la densité linéique de charge (en $C.m^{-1}$)

dl est la portion élémentaire



Charge élémentaire :

$$dq = \lambda \, dl$$

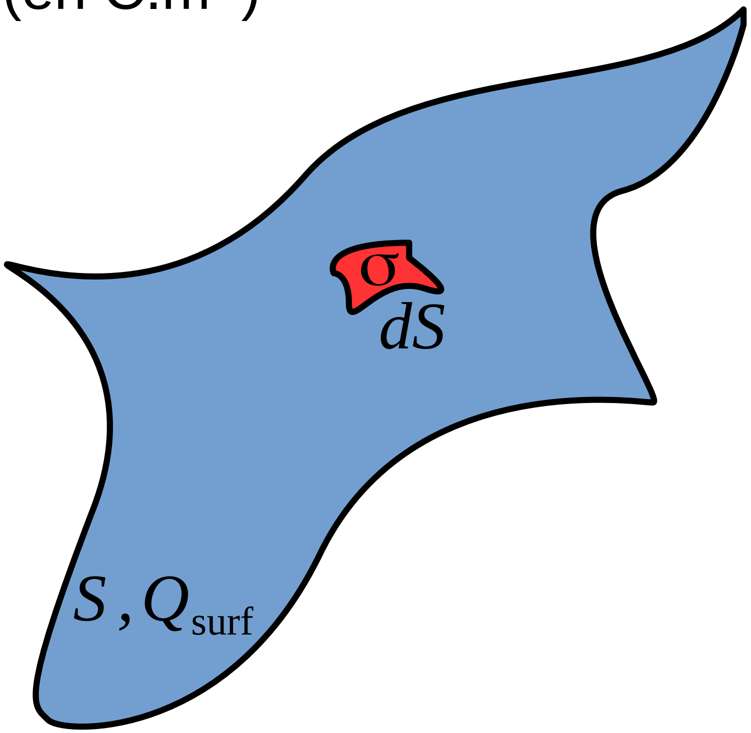
Charge sur toute la courbe :

$$\boxed{Q_{\text{courbe}} = \int_{\Gamma} \lambda \, dl}$$

Nécessite un paramétrage du parcours

Répartition des charges sur une surface S

σ est la densité surfacique de charge (en $C.m^{-2}$)
dS est la surface élémentaire



Charge élémentaire :

$$dq = \sigma \, dS$$

Charge sur toute la surface :

$$\boxed{Q_{surf} = \iint_S \sigma \, dS}$$

Répartition des charges sur un volume V

ρ est la densité volumique de charge (en $C.m^{-3}$)

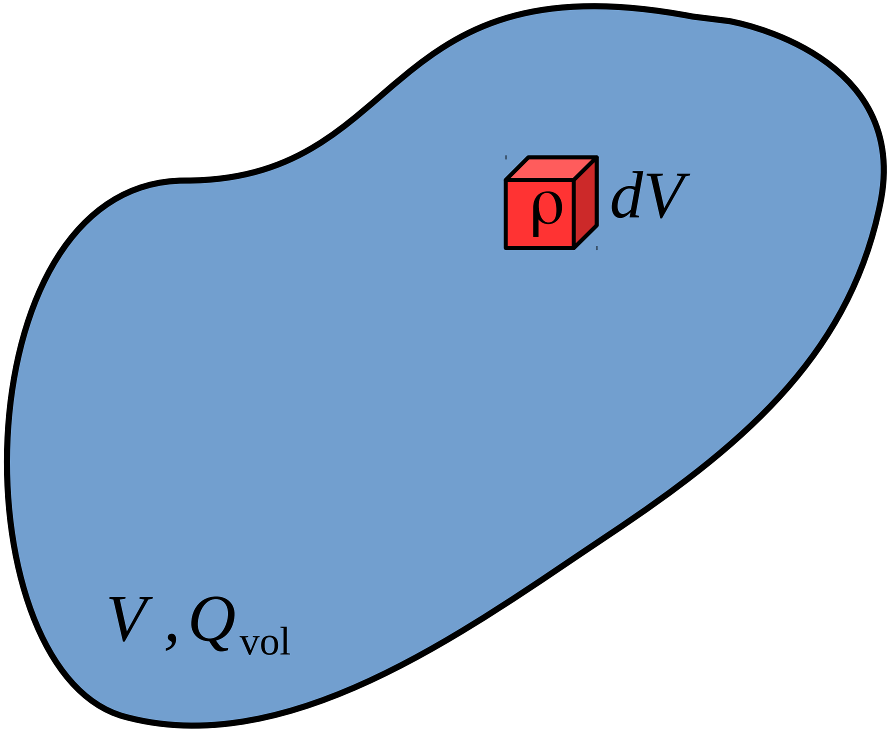
$d\tau$ est le volume élémentaire

Charge élémentaire :

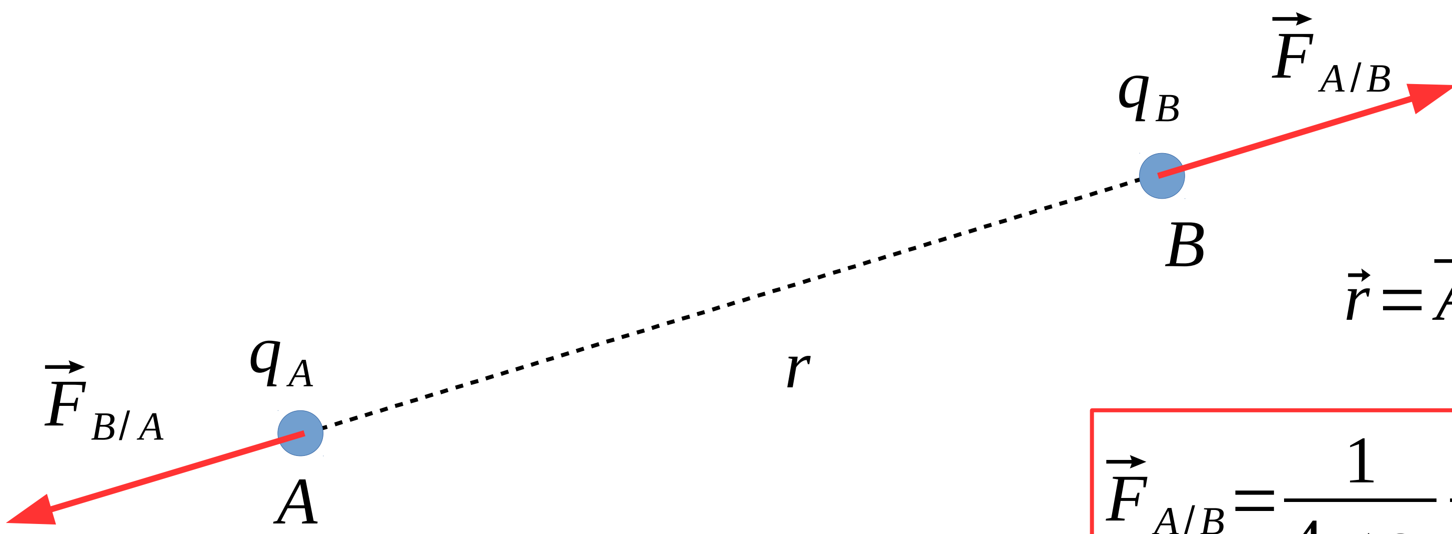
$$dq = \rho\, d\tau$$

Charge sur tout le volume :

$$\boxed{Q_{vol} = \iiint_V \rho\, d\tau}$$



III – Loi de Coulomb – 1. Définition



$$\vec{r} = \overrightarrow{AB}$$

$$\boxed{\vec{F}_{A/B} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_A q_B}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}}$$

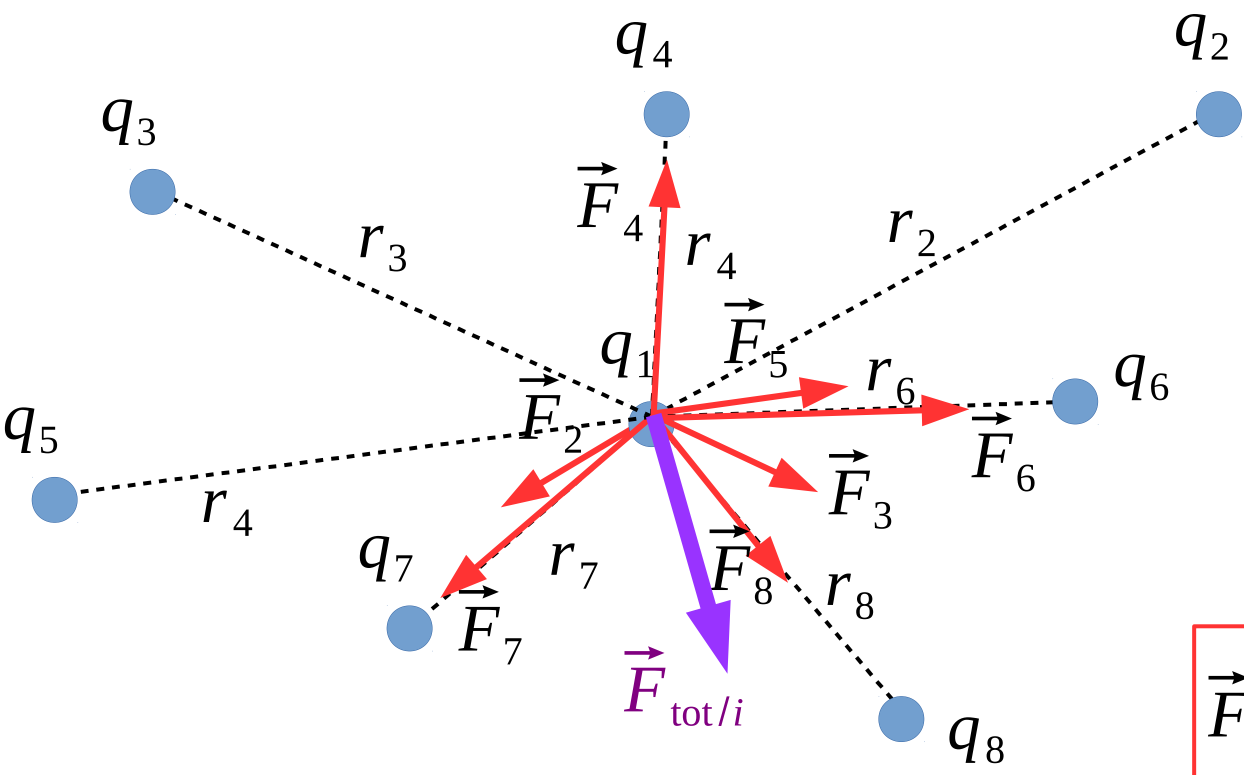
$$\vec{F}_{A/B} = -\vec{F}_{B/A}$$

La direction de la force électrique dépend des signes des charges q_A et q_B

ε_0 est la permittivité du vide

$$\epsilon_0 = 8{,}854 \,.\, 10^{-12}\,\mathrm{A}^2\,\mathrm{s}^4\,\mathrm{m}^{-3}\,\mathrm{kg}^{-1}$$

III – Loi de Coulomb – 2. Principe de superposition



$$\boxed{\vec{F}_{tot/i} = \sum_{j \neq i} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i q_j}{r_j^2} \frac{\vec{r}_j}{r_j}}$$

Distribution discrète → continue : $\sum \rightarrow \int$

IV – Champ électrique – 1. Définition

Définition : Le champ électrique créé par une distribution de charges fixes représente le champ vectoriel lié à l'action de cette distribution sur son environnement

Autrement dit : Si on place une particule test, elle subit une force coulombienne

En un point M quelconque :

$$\vec{F}_{\text{distri}/test}(M)=\sum_j \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_{test}q_j}{r_j^2}\frac{\vec{r}_j}{r_j}=q_{test}\underbrace{\sum_j \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_j}{r_j^2}\frac{\vec{r}_j}{r_j}}_{\text{Champ électrique } \vec{E}_{\text{distri}}}$$

$$\boxed{\vec{F}_{\text{distri}/test}=q_{\text{test}}\vec{E}_{\text{distri}}}$$

Rappel : le champ électrique est un champ vectoriel

Dans le repère cartésien :

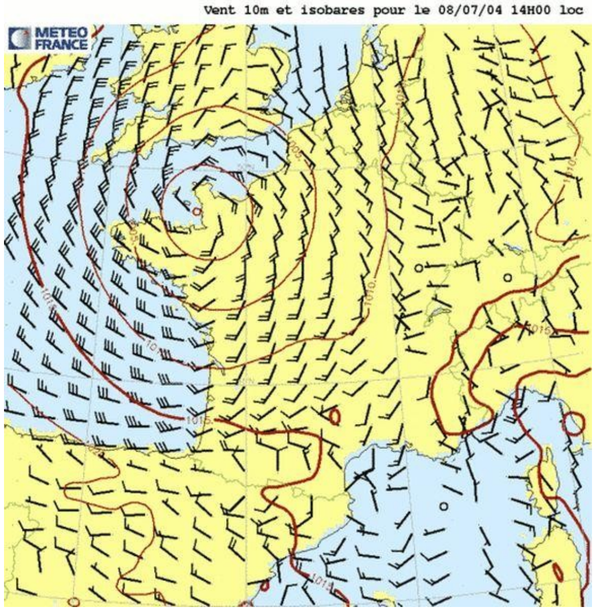
$$\vec{E}_{\text{distri}}(M)=E_x(x,y,z)\vec{u}_x+E_y(x,y,z)\vec{u}_y+E_z(x,y,z)\vec{u}_z$$

IV – Champ électrique – 1. Définition

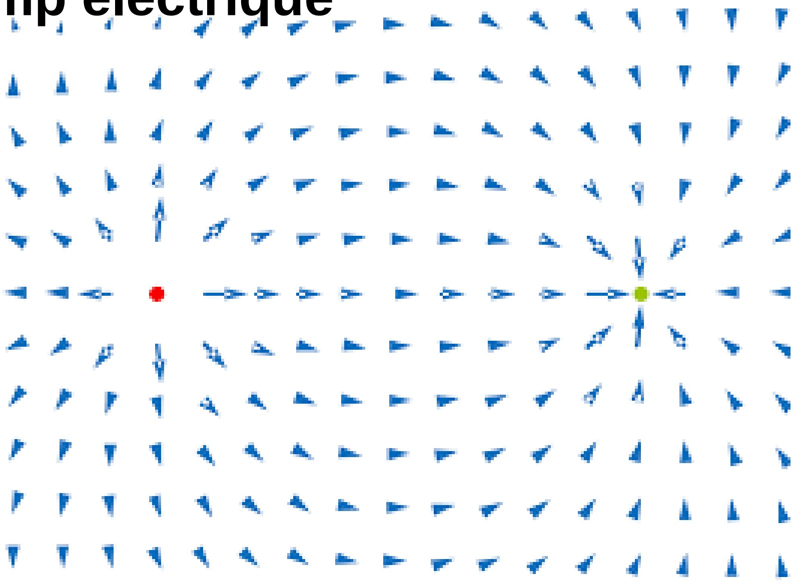
Définition d'un champ
On parle du champ d'une grandeur physique si cette dernière est définie en chaque point d'un espace donné. Cet espace ou portion d'espace peut être schématisé par une ligne, un espace plan ou un volume.

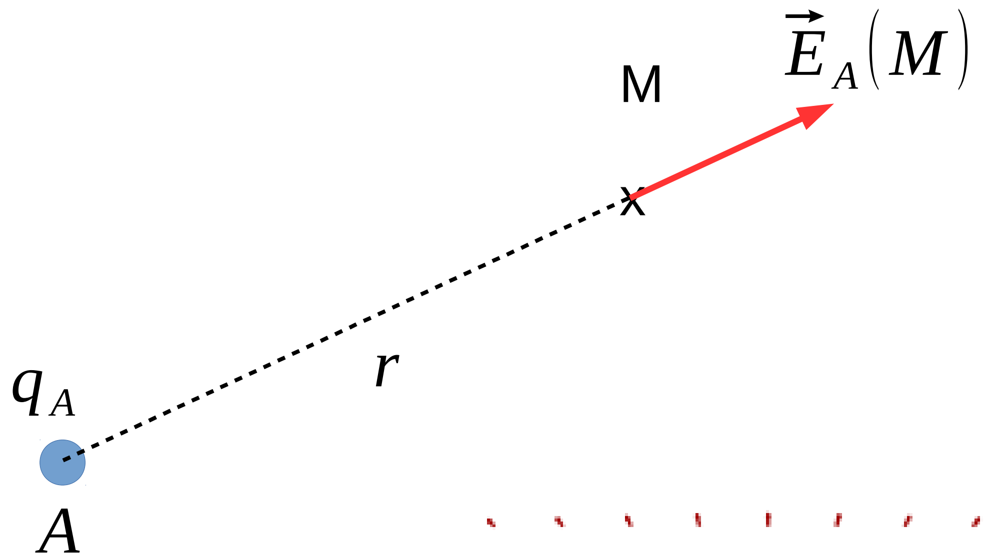
Les champs vectoriels
Un champ est dit vectoriel s'il concerne une grandeur physique décrite non seulement par sa valeur mais aussi par une direction et un sens lui permettant d'être représenté par un vecteur.

Vent



Champ électrique

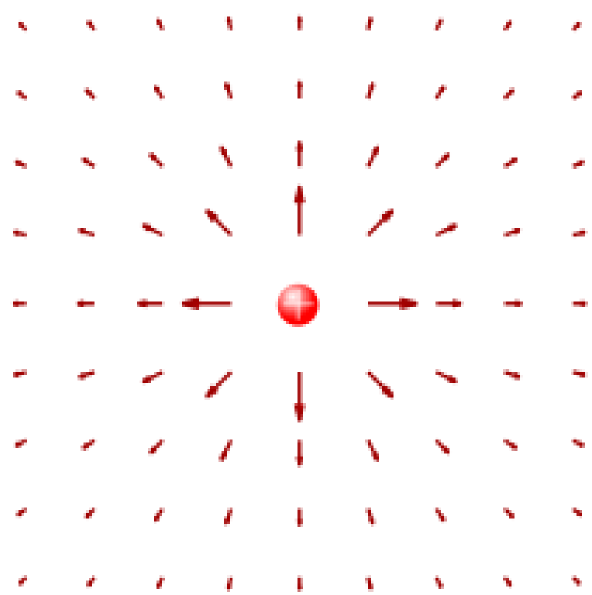




$$\vec{r} = \overrightarrow{AM}$$

$$\boxed{\vec{E}_A(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_A}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}}$$

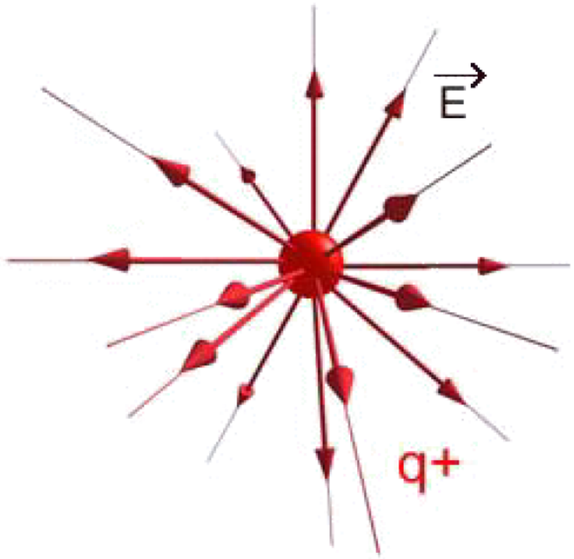
Champ électrique :



Rappel ligne de champ :

$\vec{E}$ tangent en tout point

$$\vec{dl} \wedge \vec{E} = 0$$

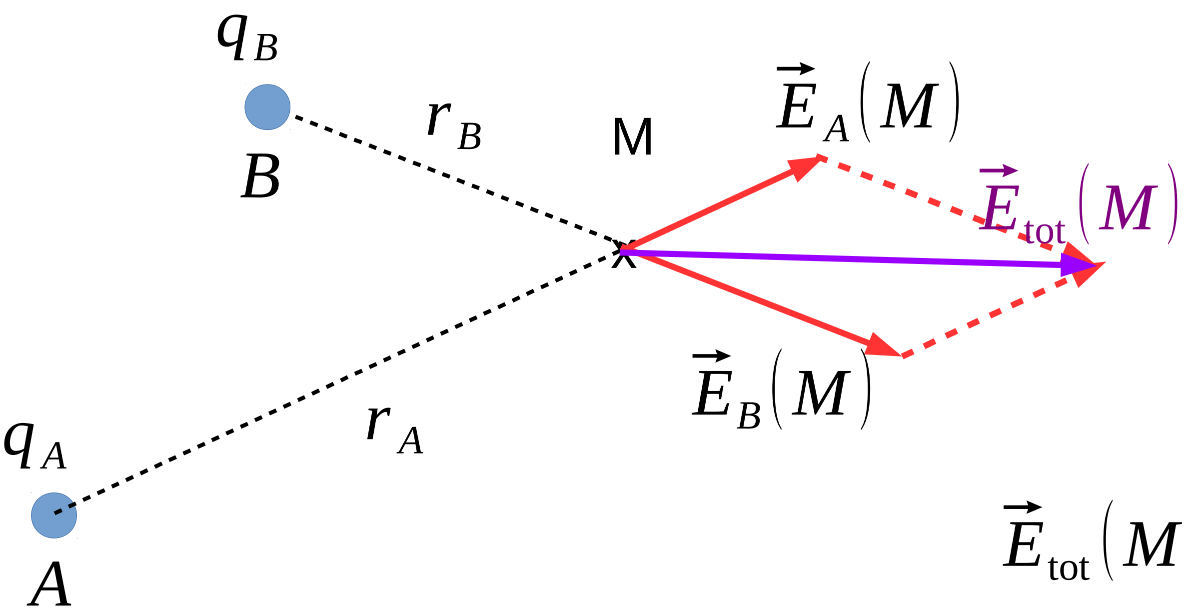


$$\boxed{\vec{F}=q_M \vec{E}(M)}$$

$$\boxed{\vec{E}(M)=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q^+}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}}$$

Que vaut le champ électrostatique créé par une charge +q au point où elle se trouve ?

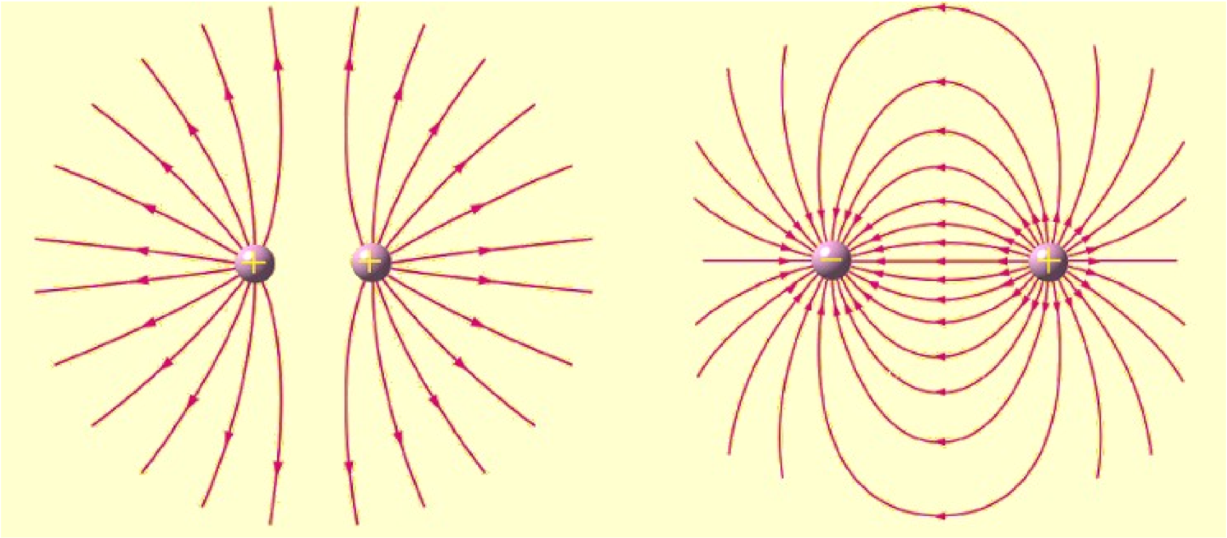
A. +∞
B. -∞
C. 0
D. on ne peut pas le définir



$$\vec{E}_A(M)=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_A}{r_A^2}\frac{\vec{r}_A}{r_A}$$

$$\vec{E}_B(M)=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_B}{r_B^2}\frac{\vec{r}_B}{r_B}$$

$$\vec{E}_{tot}(M)=\vec{E}_A(M)+\vec{E}_B(M)$$



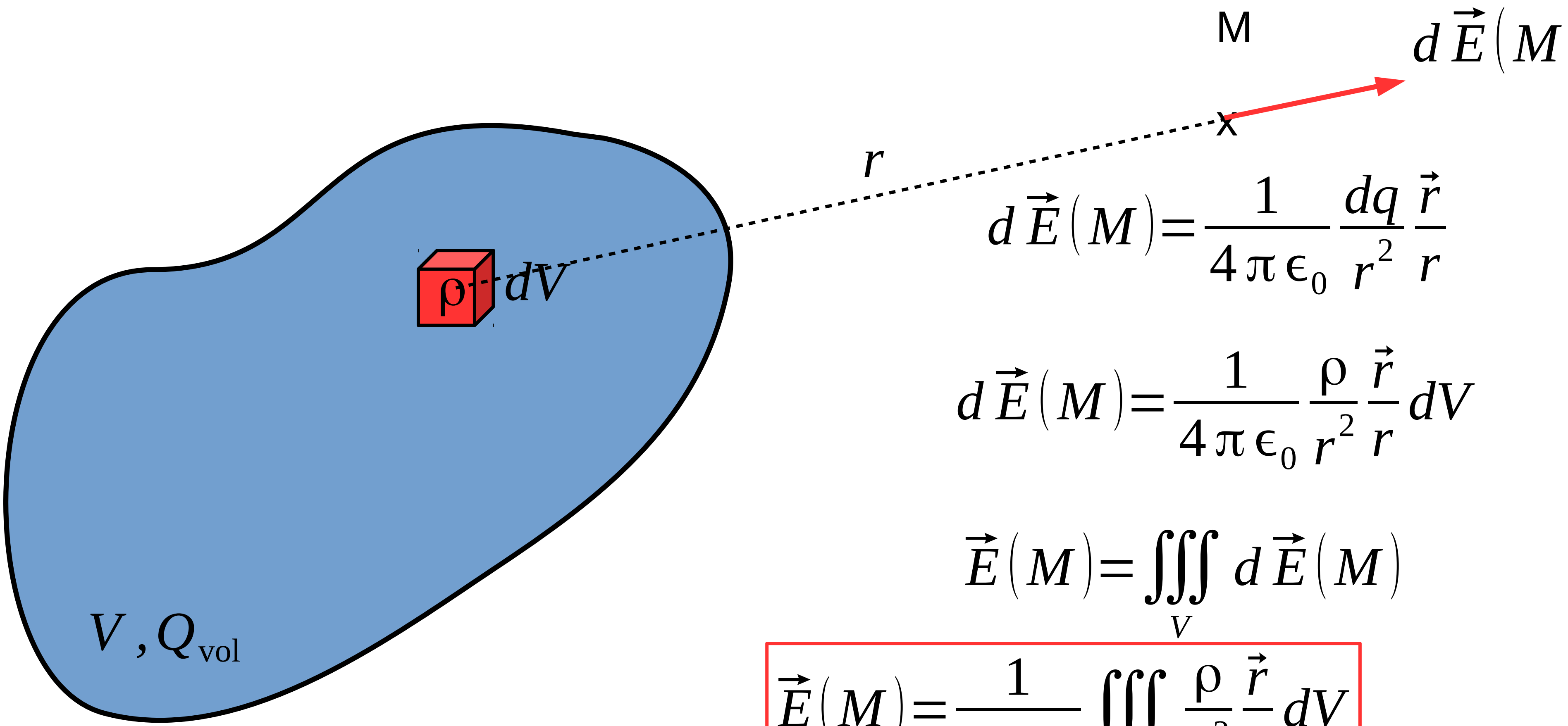
Charges isolées :

Cas de n charges ponctuelles

$$\vec{E}(M) = \sum_{j=1}^{n} \vec{E}_j(M) = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_j}{r_j^2} \frac{\vec{r}_j}{r_j}$$

Distribution continue :

Passage de $\sum$ vers $\int_\Gamma$ (linéique), $\iint_S$ (surfacique), $\iiint_V$ (volumique)



$$d\vec{E}(M)=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{dq}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}$$

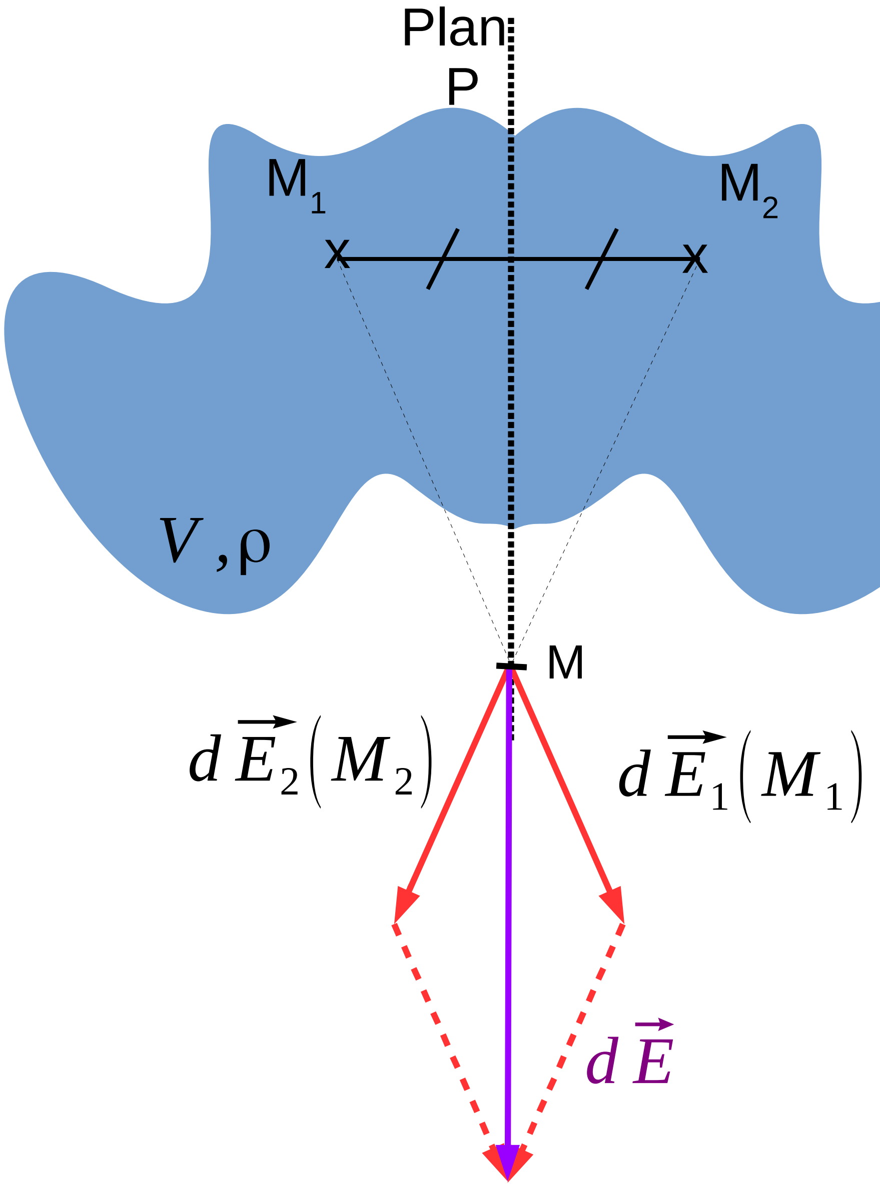
$$d\vec{E}(M)=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\rho}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}dV$$

$$\vec{E}(M)=\iiint_V d\vec{E}(M)$$

$$\boxed{\vec{E}(M)=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\iiint_V \frac{\rho}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}dV}$$

Généralement très compliqué à utiliser

IV – Champ électrique – 8. Plan de symétrie



On regarde, en un point M appartenant au plan de symétrie P, le champ électrique créé par deux points M1 et M2 symétriques par rapport à P

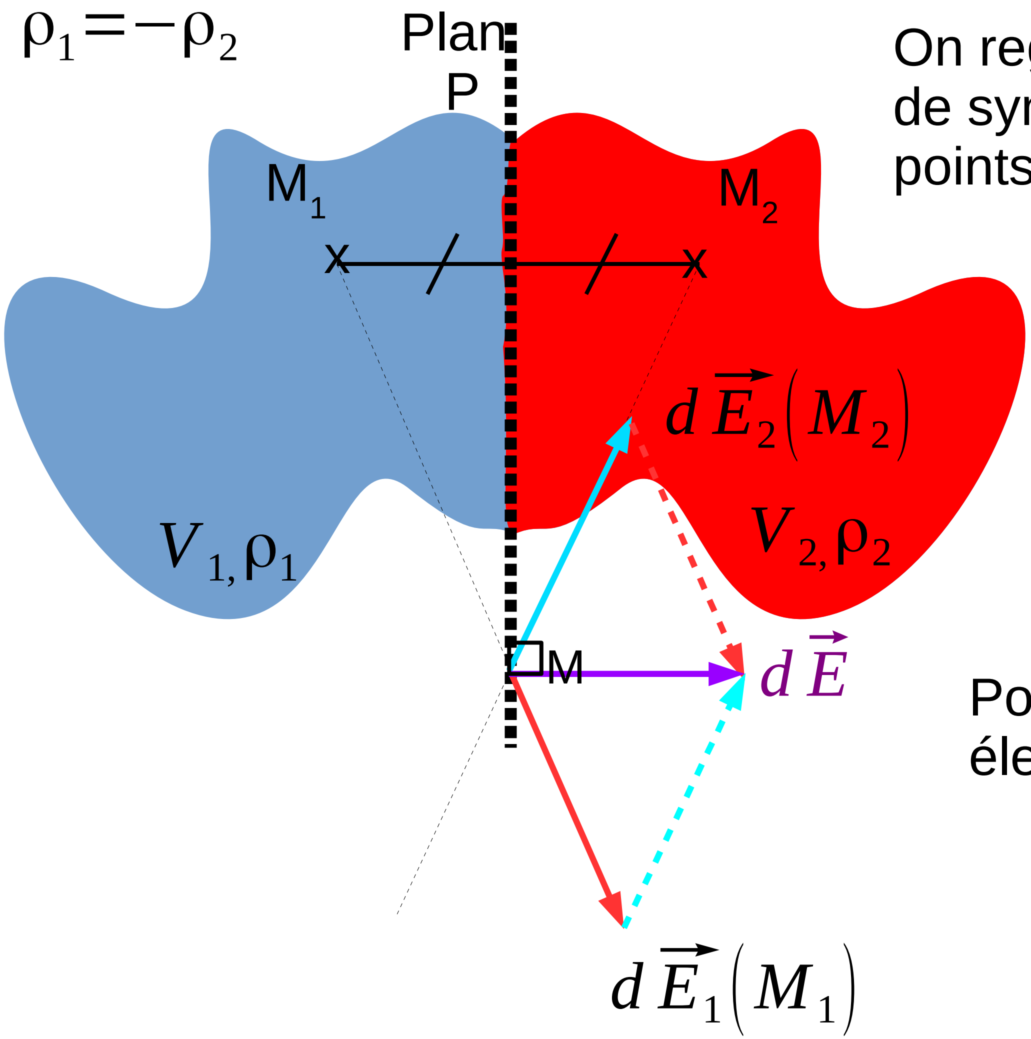
$$\left|d\vec{E}_1(M_1)\right| = \left|d\vec{E}_2(M_2)\right|$$

$$d\vec{E}(M) \in P$$

Pour tout point du plan P, le champ électrique créé par la distribution de charge :

$$\vec{E}(M) \in P$$

IV – Champ électrique – 9. Plan d'anti-symétrie



On regarde, en un point M appartenant au plan de symétrie P, le champ électrique créé par deux points M1 et M2 symétriques par rapport à P

$$\left|d\vec{E}_1(M_1)\right| = \left|d\vec{E}_2(M_2)\right|$$

$$d\vec{E}(M) \perp P$$

Pour tout point du plan P, le champ électrique créé par la distribution de charge :

$$\vec{E}(M) \perp P$$

V – Théorème de Gauss – 1. Notion de flux

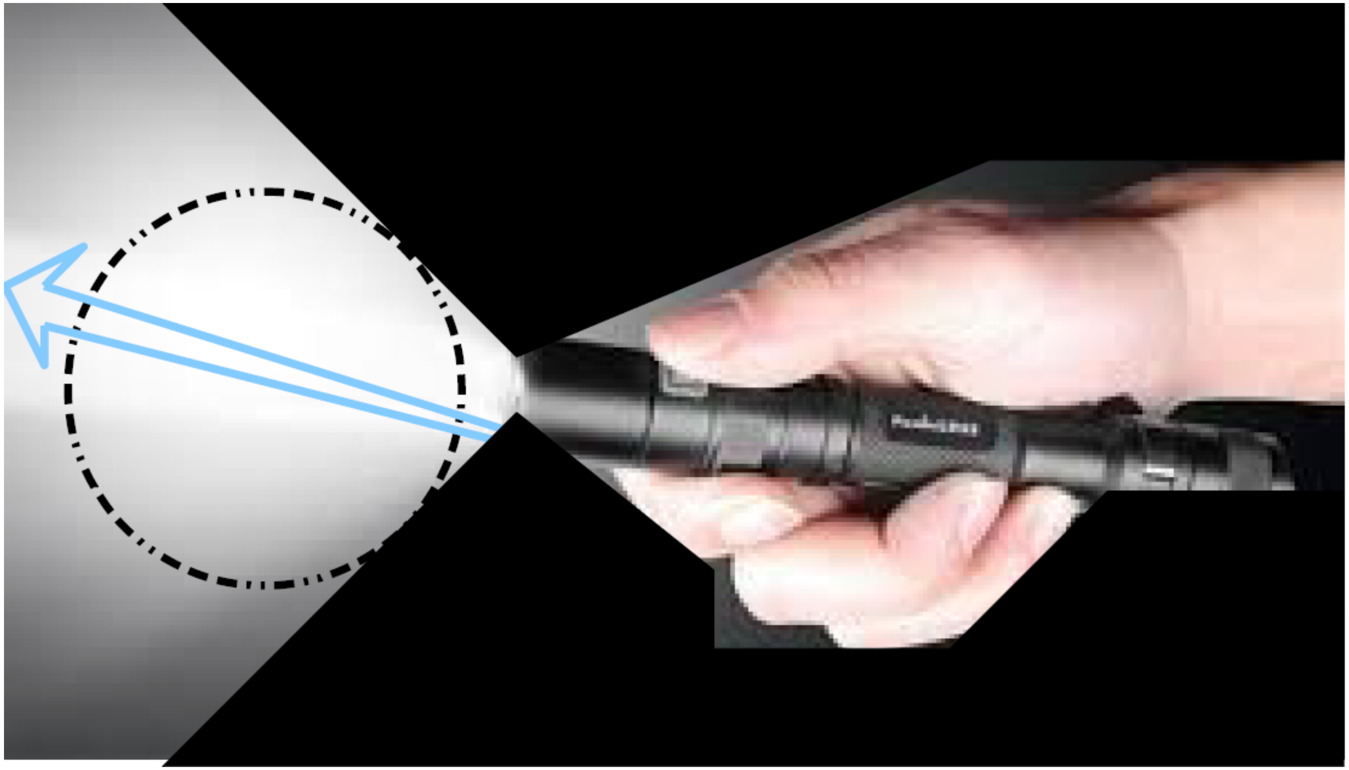
Flux = mesure d'une quantité physique vectorielle traversant une surface

$$\boxed{\phi = \iint_{\Sigma} \vec{I} \, . \, \vec{n} \, dS}$$

exemple : flux lumineux (flux d'intensité lumineuse en cd.m^{-2})

Cas d'une surface fermée

$$\phi = \oiint_{\Sigma} \vec{I} \, . \, \vec{n} \, dS$$

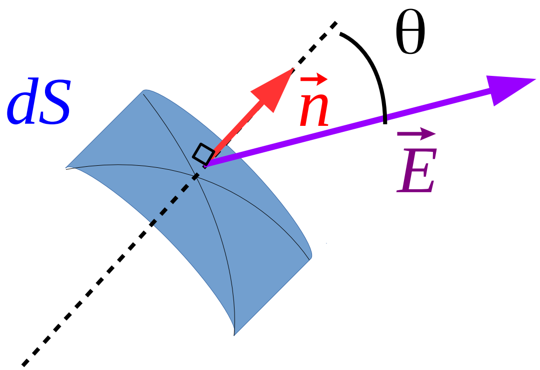


Cas d'une surface fermée

$$\boxed{\phi = \oint\!\!\!\oint_{\Sigma} \vec{I} \cdot \vec{n}\, dS \neq 0}$$

Le flux à travers une surface fermée est nul sauf s'il y a une source de lumière à l'intérieur

Flux élémentaire du champ électrique :

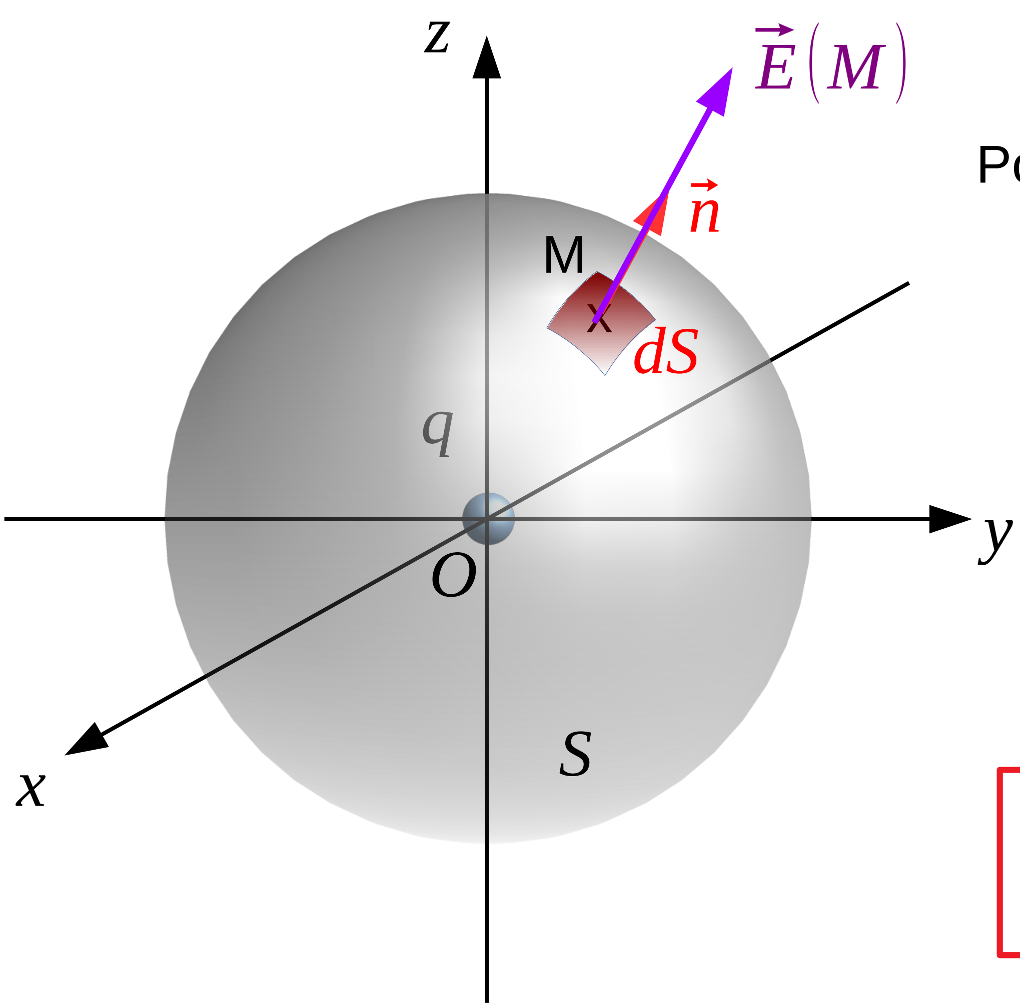


$$d\phi_E = \vec{E}.\vec{n}\,dS = E\cos\theta\,dS$$

Flux du champ électrique :

$$\boxed{\phi_E = \iint_S \vec{E}.\vec{n}\,dS}$$

Le signe du flux dépend du choix d'orientation de la surface



Flux à travers la surface passant par M :

$$\phi_E = \oiint_S \vec{E}\cdot\vec{n}\,dS$$

Pour une charge :

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}$$

$$\Rightarrow \quad \phi_E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2}\oiint_S dS$$

$$\boxed{\oiint_S \vec{E}\cdot\vec{n}\,dS = \frac{q}{\epsilon_0} = \frac{q_{int}}{\epsilon_0}}$$

Théorème de Gauss !!

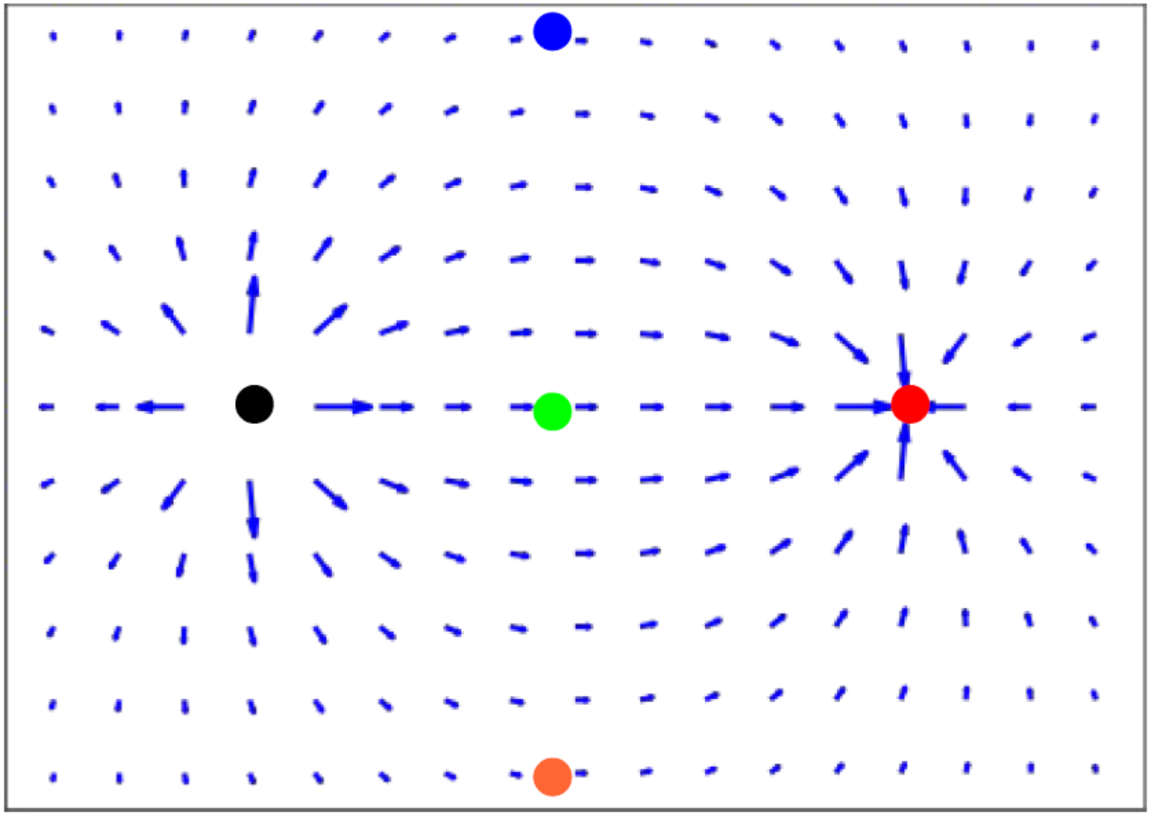
Ce résultat est généralisable à toute surface fermée et toute distribution de charges

Théorème : Le flux électrique sortant d'une surface fermée S régulière est égale à la somme des charges situés à l'intérieur le tout divisé par ε_0.

$$\boxed{\oiint_S \vec{E}\,.\,\vec{n}\,dS = \frac{\sum Q_{\mathrm{int}}}{\epsilon_0}}$$

Plus simple à utiliser à condition de choisir la bonne surface d'intégration (attention à la géométrie du système)

V – Théorème de Gauss – 5. Question 2



Où se trouvent les charges qui créent le champ électrique suivant ?

A. ●
B. ● et ●
C. ● , ● et ●
D. ● , ● , ● , ● et ●
E. Aucune de ces réponses

V – Théorème de Gauss – 6. Retour sur l'exemple

Champ électrique créé par un fil infini

Densité linéique de charge λ

Théorème de Gauss :

$$\boxed{\oiint_S \vec{E}\,.\,\vec{n}\,dS = \frac{\sum Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}}$$

Pour une distribution de charge en volume :

$$\sum Q_{\text{int}} = \iiint_V \rho\,dV$$

Théorème d'Ostrogradski :

$$\oiint_S \vec{E}\,.\,\vec{n}\,dS = \iiint_V \operatorname{div}\vec{E}\,dV$$

Une démo ?

$$\Rightarrow \iiint_V \operatorname{div}\vec{E}\,dV = \frac{1}{\epsilon_0}\iiint_V \rho\,dV$$

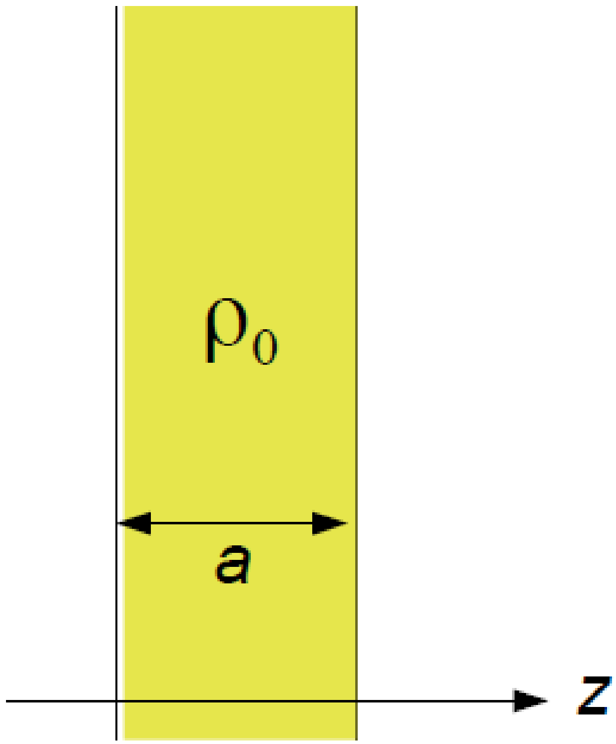
$$\boxed{\operatorname{div}\vec{E} - \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0}$$

Forme locale

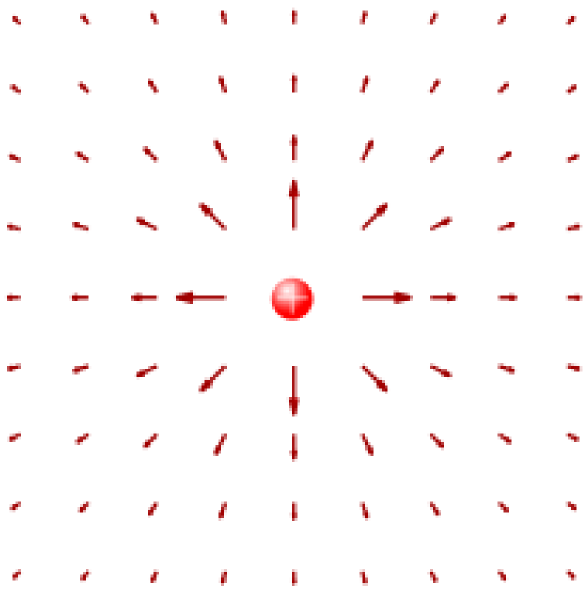
1ière équation de Maxwell

On considère une couche d'épaisseur finie et latéralement infinie (problème 1D) portant une densité volumique de charges électriques uniforme ρ_0 .
La variation du champ électrostatique dans la couche en fonction de l'épaisseur est :

A. nulle
B. linéaire
C. quadratique
D. logarithmique



VI – Potentiel électrique – 1. Charge isolée



$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}$$

$$\vec{E}(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{-1}{r}\right)\ \vec{u}_r$$

$$\vec{E}(M) = \frac{-q}{4\pi\epsilon_0}\overrightarrow{\mathrm{grad}}\left(\frac{1}{r}\right)$$

$$\vec{E}(M) = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r}\right)$$

$\vec{E}(M) = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,V$ avec $V(M) = \dfrac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$ potentiel électrique

VI – Potentiel électrique – 2. Définition

Le potentiel électrique est un scalaire dépendant de la position dans l'espace

V est un champ de scalaires

On dit que le champ électrique dérive d'un potentiel V

$$\boxed{\vec{E}(M) = -\overrightarrow{\text{grad}}\, V}$$

V en Volt (V)

Attention V est toujours une grandeur relative

Généralement on fait l'hypothèse $V \rightarrow 0$ lorsque $r \rightarrow \infty$

Loi de Poisson $\quad \text{div}\, \vec{E}(M) = \dfrac{\rho}{\epsilon_0} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Delta V + \dfrac{\rho}{\epsilon_0} = 0}$

VI – Potentiel électrique – 3. Cas de plusieurs charges

Dans le cas de plusieurs charges ponctuelles, le potentiel s'obtient par une somme algébrique.

$$V(M) = \sum_{i=1}^{n} V_i(M) = \sum_{i=1}^{n} \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 r_i} \qquad \text{avec} \qquad r_i = \left|\overrightarrow{O_i M}\right|$$

Passage d'une distribution ponctuelle → continue

$$\sum \rightarrow \int$$

Réécriture de la relation liant le champ électrique et le potentiel

$$\vec{E}(M) = -\overrightarrow{\text{grad}}\, V$$

$$\Rightarrow \quad \underbrace{\int_{\Gamma} \vec{E}.\vec{dl}} = V(A) - V(B)$$

Définition mathématique de la circulation

$$C = \int_{\Gamma} \vec{E}.\vec{dl}$$

Lien avec la tension électrique !!

$$U_{AB} = V(A) - V(B)$$

Cas particulier sur un contour fermé :

$$\oint_{\Gamma} \vec{E}.\vec{dl} = O$$

La circulation sur un contour fermé :

$$\oint_{\Gamma} \vec{E}\,.\,\vec{dl} = O$$

Théorème de Stockes :

$$\oint_{\Gamma} \vec{E}\,.\,\vec{dl} = \iint_{S} \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{E}\,.\,\vec{n}\,dS$$

Une démo ?

$$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{E} = \vec{0}}$$

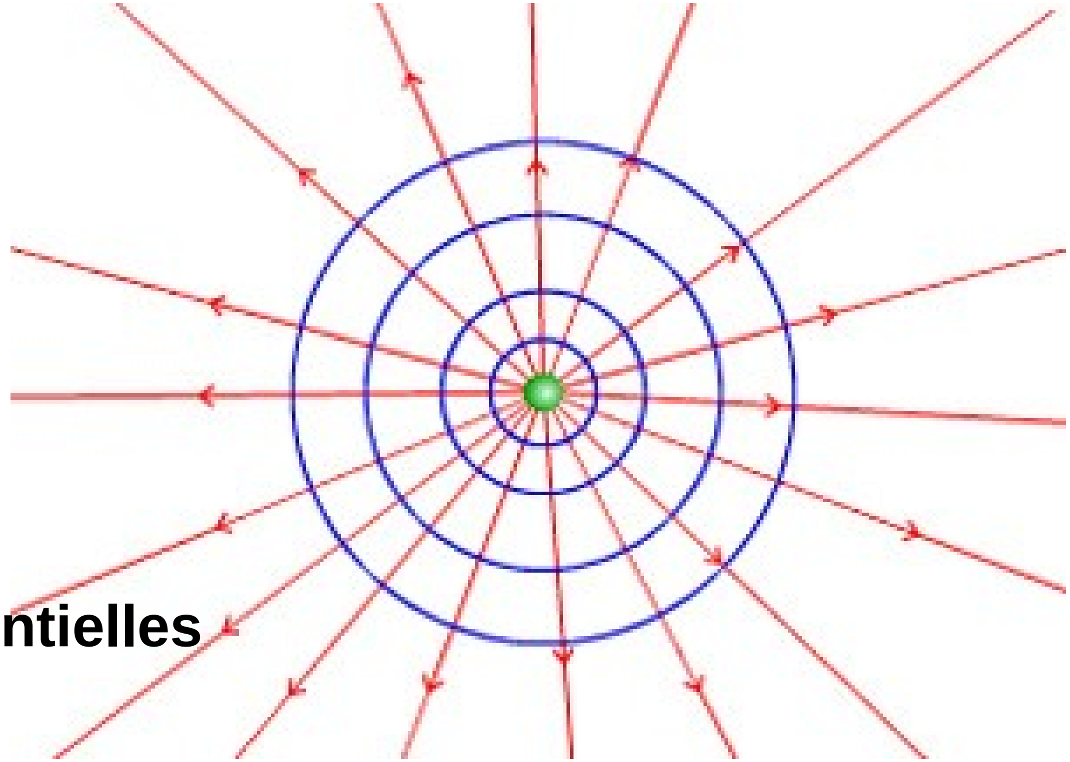
Forme provisoire
2^{e} équation de Maxwell

Définition : On appelle surfaces équipotentielles, les surfaces pour lesquelles le potentiel électrostatique est constant

$$V = \text{constante}$$

$$\overrightarrow{\text{grad}}\, V = 0$$

$$\boxed{\vec{E}\,.\,\vec{dl} = 0}$$



Les lignes de champ sont perpendiculaires aux équipotentielles

VII – Comment démarrer un exercice

On note les données de l'énoncé

Que cherche-t-on ?

Q ? E ? ou V ?

Vecteur E → Il faut déterminer toutes ses coordonnées.

Chacune dépendant de la position

Scalaire Q ou V → Fonction dépendant de la position

Choix du repère

Le repère doit respecter les symétries du système !!

- Cylindre → repère cylindrique
- Sphère → repère sphérique
- Aucun ou rectangle → Repère cartésien

On regarde les symétries et invariance du système

Simplifications possibles :

- Symétrie → suppression de composantes
- Invariance → élimination de variables

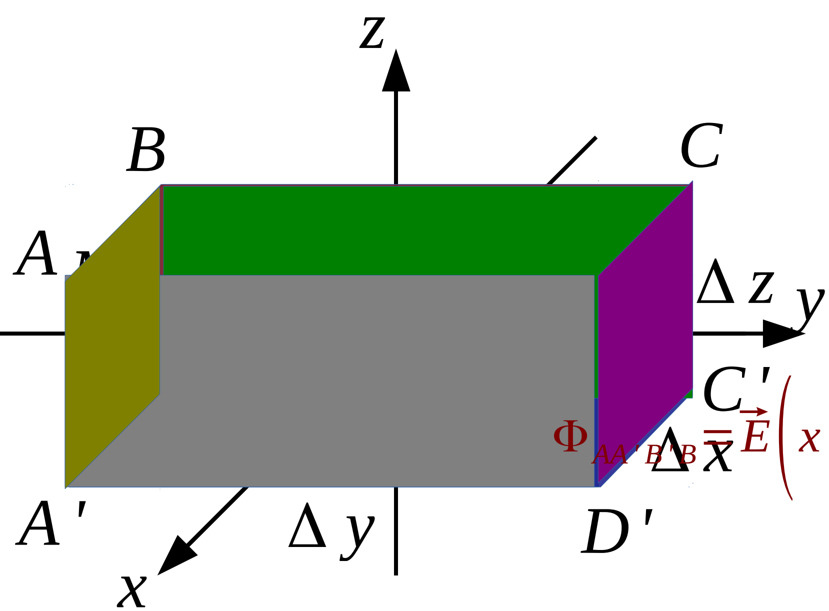
Choix de la formule à utiliser

Intégrale ? Gauss ? Loi de Poisson ?

ANNEXE 1 – Théorème d'Ostrogradsky

$$\oiint_S \vec{E}\,.\,\vec{n}\,dS = \oiiint_V \operatorname{div}\vec{E}\,dV$$

On regarde le flux traversant un parallélépipède entourant M(x,y,z) :



$$\Phi_{ABCD}=\vec{E}\left(x,y,z+\frac{\Delta z}{2}\right)\Delta x\,\Delta y\,\vec{u}_z+\epsilon_1(\Delta x\,\Delta y)$$

$$\Phi_{A'B'C'D'}=\vec{E}\left(x,y,z-\frac{\Delta z}{2}\right)\Delta x\,\Delta y\,(-\vec{u}_z)+\epsilon_2(\Delta x\,\Delta y)$$

$$\Phi_{BB'C'C}=\vec{E}\left(x-\frac{\Delta x}{2,}y,z\right)\Delta y\,\Delta z\,(-\vec{u}_x)+\epsilon_3(\Delta y\,\Delta z)$$

$$\Phi_{AA'D'D}=\vec{E}\left(x+\frac{\Delta x}{2,}y,z\right)\Delta y\,\Delta z\,\vec{u}_x+\epsilon_4(\Delta y\,\Delta z)$$

$$\Phi_{AA'B'B}=\vec{E}\left(x,y-\frac{\Delta y}{2,}z\right)\Delta x\,\Delta z\,(-\vec{u}_y)+\epsilon_6(\Delta x\,\Delta z)$$

$$\Phi_{DD'C'C}=\vec{E}\left(x,y+\frac{\Delta y}{2,}z\right)\Delta x\,\Delta z\,\vec{u}_y+\epsilon_5(\Delta x\,\Delta z)$$

$$\Phi_{ABCD}+\Phi_{A'B'C'D'}=\left[\vec{E}\left(x,y,z+\frac{\Delta z}{2}\right)-\vec{E}\left(x,y,z-\frac{\Delta z}{2}\right)\right]\Delta x\,\Delta y\,\vec{u}_z=\frac{\partial\vec{E}}{\partial z}\Delta x\,\Delta y\,\Delta z\,\vec{u}_z=\frac{\partial E_z}{\partial z}\Delta V$$

$$\Phi_{AA'D'D}+\Phi_{BB'C'C}=\left[\vec{E}\left(x+\frac{\Delta x}{2,}y,z\right)-\vec{E}\left(x-\frac{\Delta x}{2,}y,z\right)\right]\Delta y\,\Delta z\,\vec{u}_x=\frac{\partial\vec{E}}{\partial x}\Delta x\,\Delta y\,\Delta z\,\vec{u}_x=\frac{\partial E_x}{\partial x}\Delta V$$

$$\Phi_{CC'D'D}+\Phi_{AA'B'B}=\left[\vec{E}\left(x,+\frac{\Delta y}{2,}z\right)-\vec{E}\left(x,y-\frac{\Delta y}{2,}z\right)\right]\Delta x\,\Delta z\,\vec{u}_y=\frac{\partial\vec{E}}{\partial y}\Delta x\,\Delta y\,\Delta z\,\vec{u}_y=\frac{\partial E_y}{\partial y}\Delta V$$

ANNEXE 1 – Théorème d'Ostrogradsky (Suite)

$$\Phi_{ABCD}+\Phi_{A'B'C'D'}=\frac{\partial E_x}{\partial x}\Delta V \qquad \Phi_{AA'D'D}+\Phi_{BB'C'C}=\frac{\partial E_x}{\partial x}\Delta V \qquad \Phi_{CC'D'D}+\Phi_{AA'B'B}=\frac{\partial E_y}{\partial y}\Delta V$$

Sur tout le parallélépipède :

$$\Delta\Phi=\Phi_{ABCD}+\Phi_{A'B'C'D'}+\Phi_{AA'D'D}+\Phi_{BB'C'C}+\Phi_{CC'D'D}+\Phi_{AA'B'B}=\left(\frac{\partial E_x}{\partial x}+\frac{\partial E_y}{\partial y}+\frac{\partial E_z}{\partial z}\right)\Delta V$$

$$\Delta\Phi=\mathrm{div}\,\vec{E}\;\;\Delta V$$

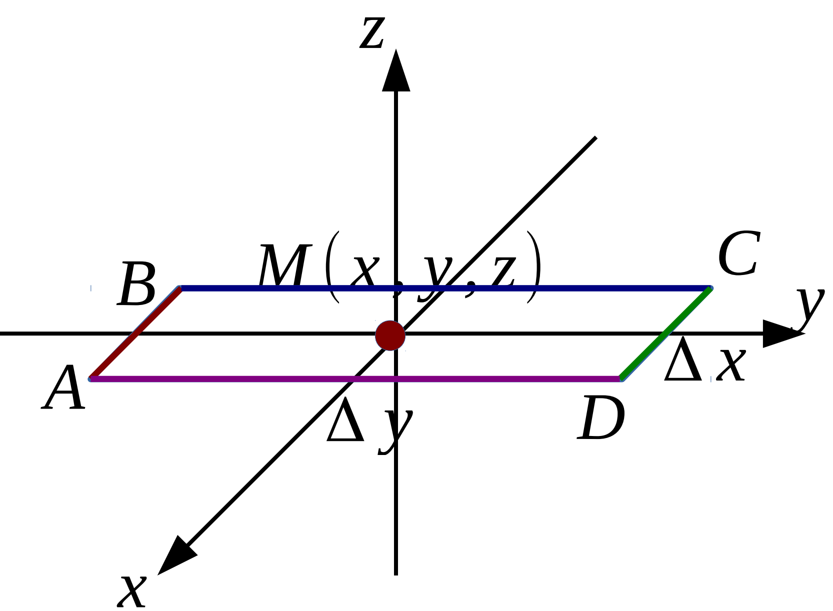
Si on pave tout le volume V défini par la surface S par des parallélépipède :

$$\boxed{\oiint_S \vec{E}.\vec{n}\,dS=\iiint_V \mathrm{div}\,\vec{E}\,dV}$$

ANNEXE 2 – Théorème de Stockes

$$\oint_{\Gamma} \vec{E}.\vec{dl} = \iint_{S} \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{E}.\vec{n}\,dS$$

On regarde la circulation sur le rectangle élémentaire autours de M(x,y,z) :



$$\int_{AB} \vec{E}\,\vec{dl} = \vec{E}\left(x, y-\frac{\Delta y}{2}, z\right)\Delta x\left(-\vec{u}_x\right)$$

$$\int_{BC} \vec{E}\,\vec{dl} = \vec{E}\left(x-\frac{\Delta x}{2}, y, z\right)\Delta y\,\vec{u}_y$$

$$\int_{CD} \vec{E}\,\vec{dl} = \vec{E}\left(x, y+\frac{\Delta y}{2}, z\right)\Delta x\,\vec{u}_x$$

$$\int_{DA} \vec{E}\,\vec{dl} = \vec{E}\left(x+\frac{\Delta x}{2}, y, z\right)\Delta y\left(-\vec{u}_y\right)$$

$$\oint_{ABCD} \vec{E}.\vec{dl} = \int_{AB} \vec{E}.\vec{dl} + \int_{CD} \vec{E}.\vec{dl} + \int_{BC} \vec{E}.\vec{dl} + \int_{DA} \vec{E}.\vec{dl}$$

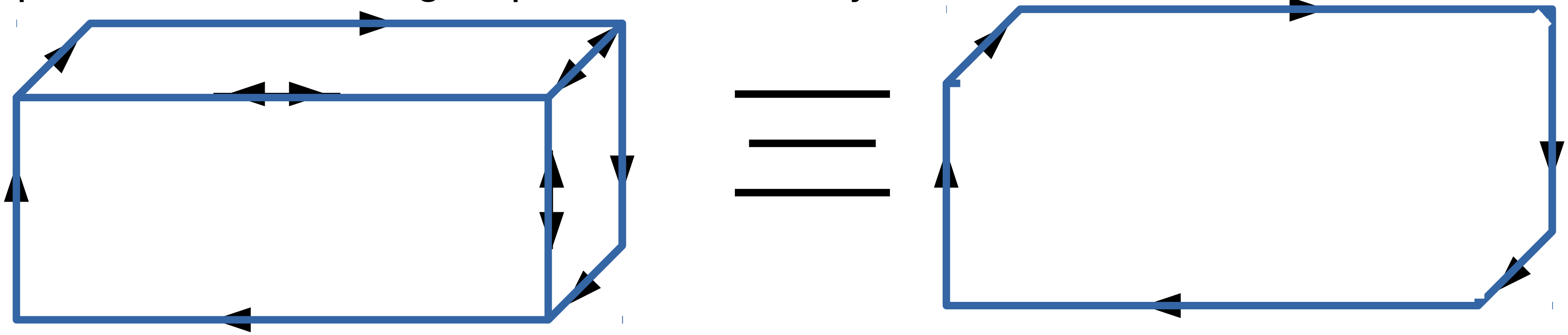
$$\oint_{ABCD} \vec{E}.\vec{dl} = \left[\vec{E}\left(x+\frac{\Delta x}{2,} y, z\right) - \vec{E}\left(x-\frac{\Delta x}{2,} y, z\right)\right]\Delta y\,\vec{u}_y - \left[\vec{E}\left(x, y+\frac{\Delta y}{2,} z\right) - \vec{E}\left(x, y-\frac{\Delta y}{2,} z\right)\right]\Delta x\,\vec{u}_x$$

$$\oint_{ABCD} \vec{E}.\vec{dl} = \frac{\partial \vec{E}}{\partial x}\Delta x\,\Delta y\,\vec{u}_y - \frac{\partial \vec{E}}{\partial y}\Delta x\,\Delta y\,\vec{u}_x = \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right)\Delta x\,\Delta y = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{E}.\vec{n}\;\;\Delta S$$

ANNEXE 2 – Théorème de Stockes (suite)

$$\oint_{ABCD} \vec{E}.\vec{dl} = \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{E}.\vec{n}\ \ \Delta S$$

Si on juxtapose tous les rectangles pour former le trajet Γ :



$$\boxed{\oint_{\Gamma} \vec{E}.\vec{dl} = \oiint_{S} \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{E}.\vec{n}\,dS}$$

IV – Champ électrique – 7. Exemple

Champ électrique créé par un fil infini

Densité linéique de charge λ