

# CHAPITRE 5

---

## Analyse des systèmes linéaires types

# Analyse des systèmes linéaires types

---

- **Système du premier ordre (Résumé):**

➤ Fonction de transfert d'un système du premier ordre :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{1 + Tp}$$

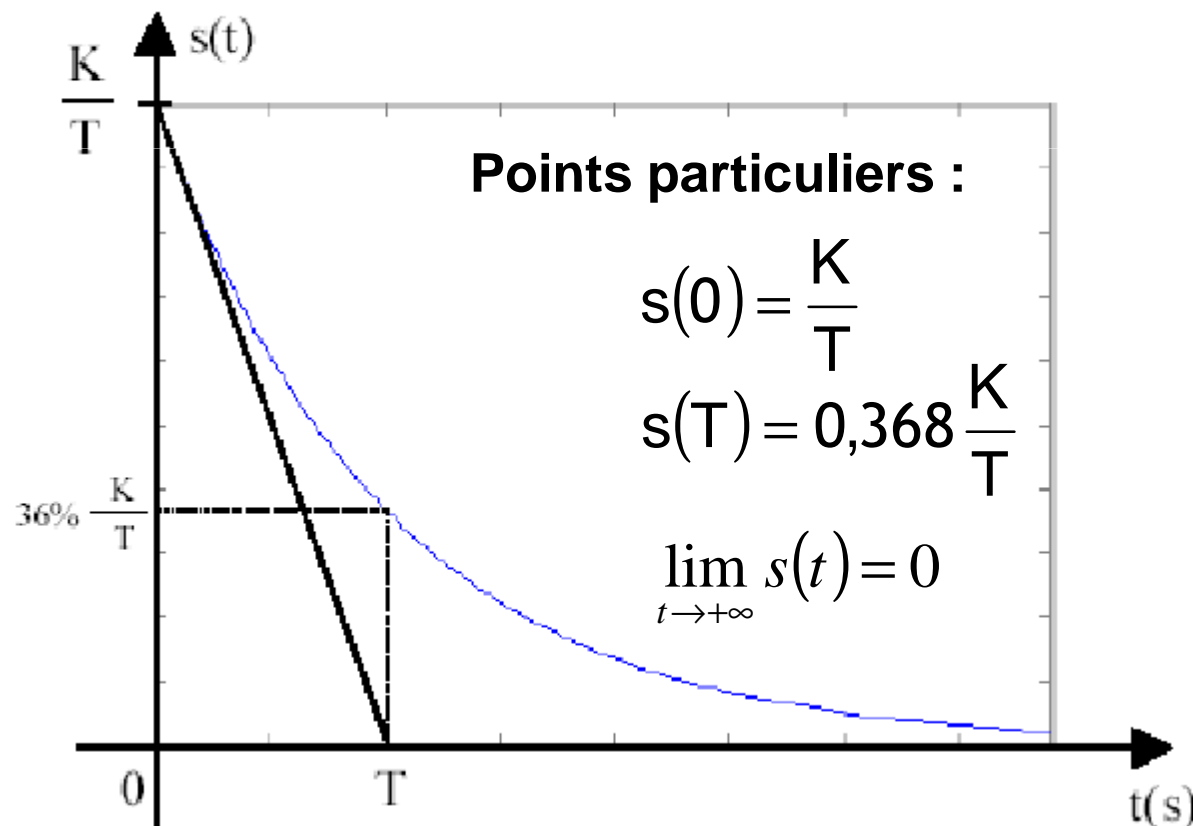
Avec :                      K = Gain statique du système  
                                  T = Constante de temps

# Analyse des systèmes linéaires types

## • Réponses temporelles des systèmes du 1<sup>er</sup> ordre

➤ Réponse à une impulsion (réponse impulsionnelle)

En entrée, nous appliquons une impulsion de dirac :  $E(p)=1$



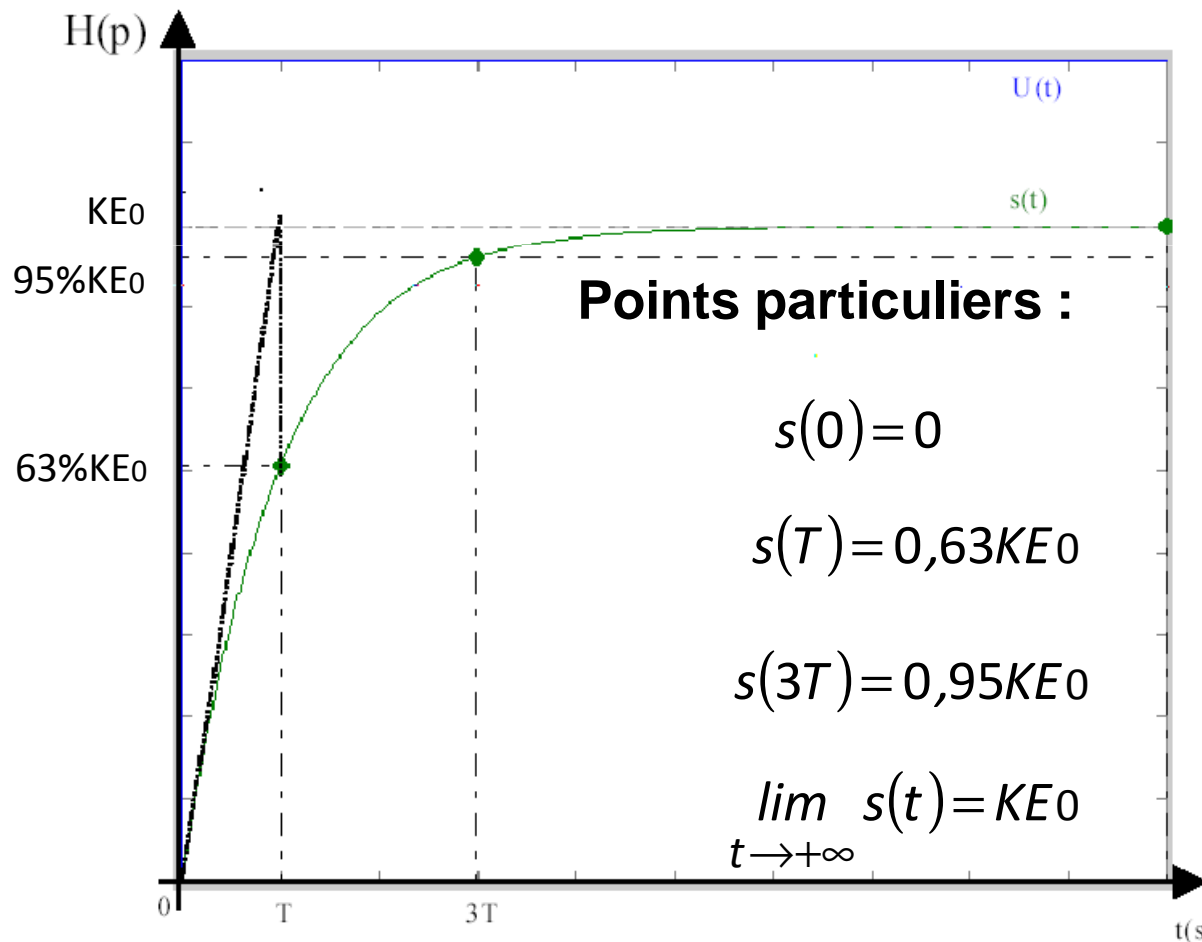
Donc :  $S(p) = \frac{K}{1 + Tp}$

D'où :  $s(t) = \frac{K}{T} e^{-t/T}$

# Analyse des systèmes linéaires types

## • Réponses temporelles des systèmes du 1<sup>er</sup> ordre

➤ Réponse à un échelon (réponse indicielle)



$$S(p) = G(p) \cdot E(p)$$

$$\text{avec } E(p) = \frac{E_0}{p}$$

$$S(p) = \frac{K \cdot E_0}{p(1 + T \cdot p)}$$

# Analyse des systèmes linéaires types

---

- **Réponses fréquentielles des systèmes du 1<sup>er</sup> ordre (Résumé) :**

$$H(p) = \frac{K}{1 + T_p p} \quad \text{D'où} \quad H(j\omega) = \frac{K}{1 + j\omega T}$$

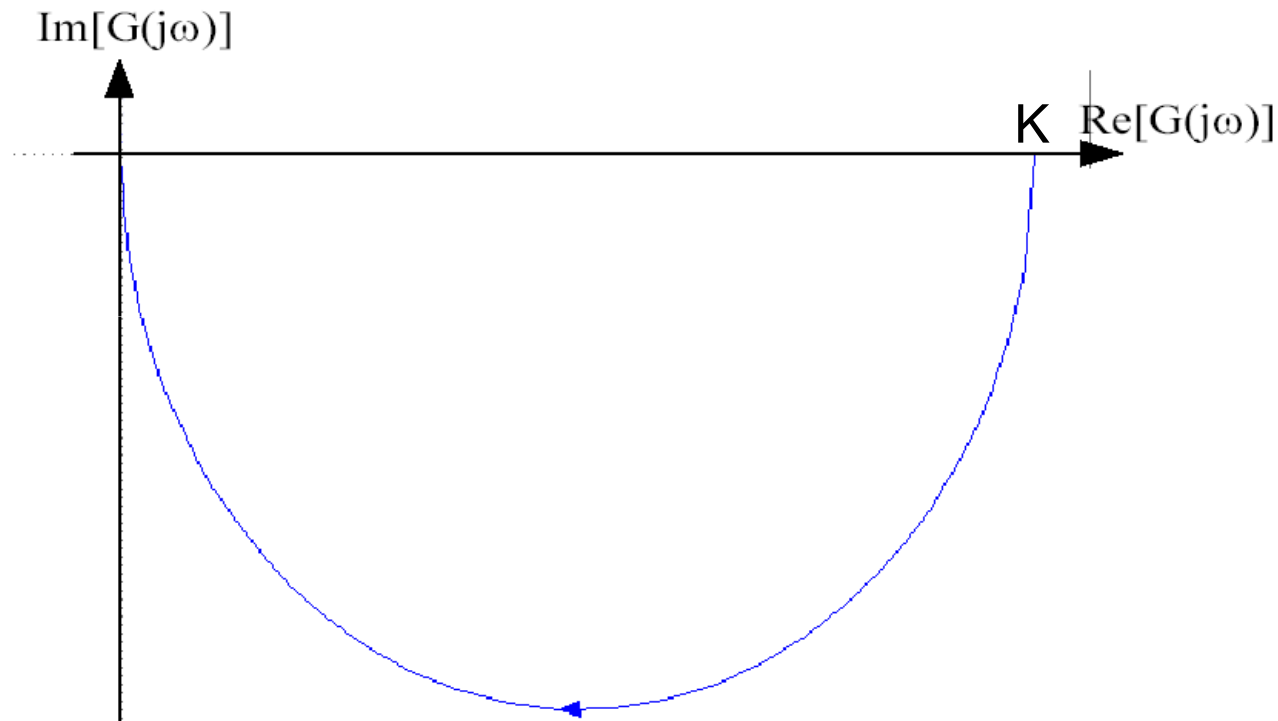
$$H(\omega) = |H(j\omega)| = \frac{K}{\sqrt{1 + \omega^2 T^2}}$$

et

$$\varphi_H(\omega) = \text{Arg}(H(j\omega)) = -\arctan \omega T$$

# Analyse des systèmes linéaires types

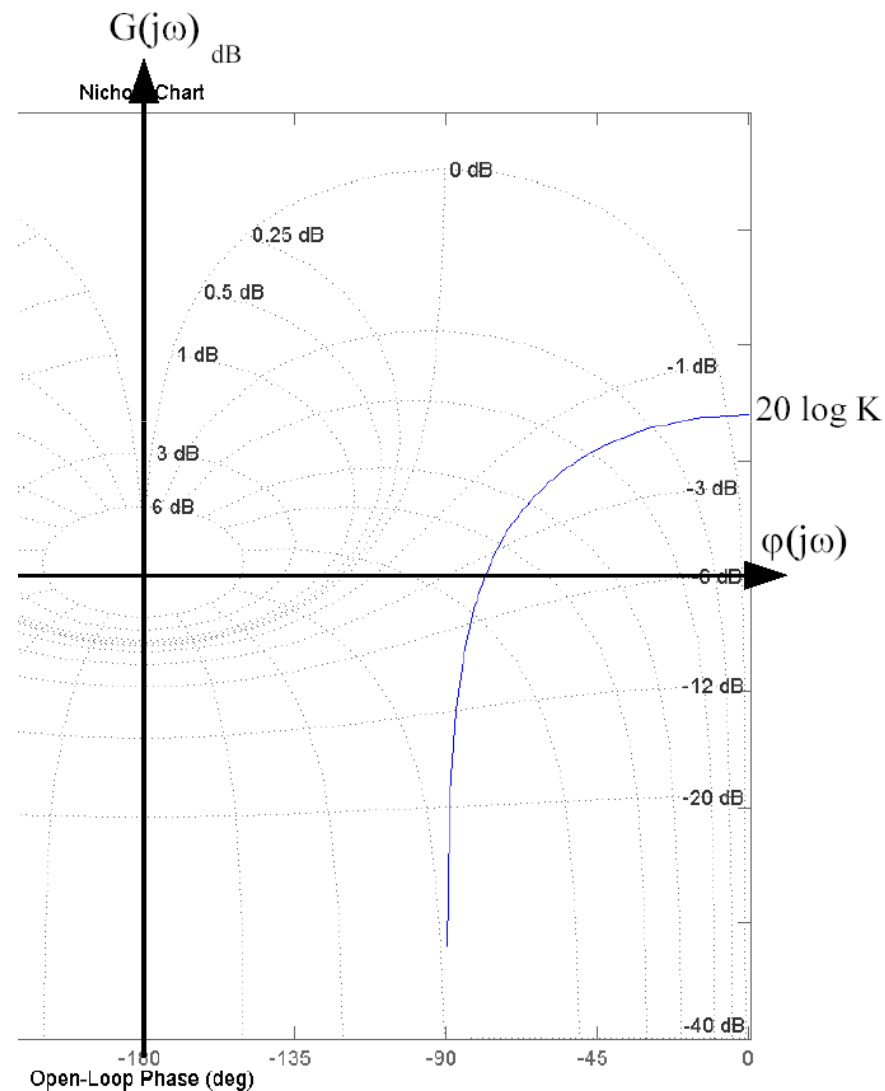
- Lieu de Nyquist d'un système du premier ordre:



Le lieu de Nyquist d'un premier ordre est un demi-cercle

# Analyse des systèmes linéaires types

## ■ Lieu de Black :



# Analyse des systèmes linéaires types

## •Système du 2<sup>ème</sup> ordre (Résumé)



**Il faut TOUJOURS** mettre la fonction de transfert sous la forme généralisée :

$$H(p) = \frac{K}{\left(\frac{p}{\omega_0}\right)^2 + 2\frac{\xi}{\omega_0}p + 1}$$

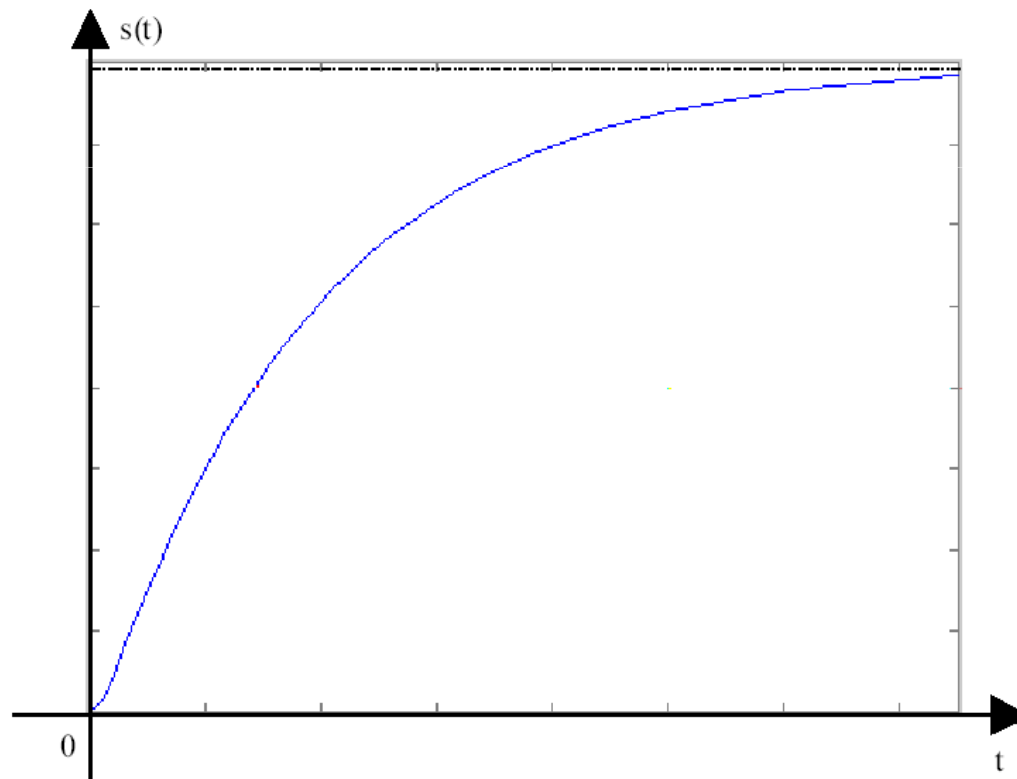
Avec K : Gain statique du système  
 $\xi$  : facteur d'amortissement  
 $\omega_0$  : pulsation naturelle



# Analyse des systèmes linéaires types

## • **Système du 2<sup>ème</sup> ordre** – Réponse indicielle $\xi > 1$

Pour  $\xi > 1$  : Nous obtenons une **réponse apériodique**



### Points particuliers :

$$s(0) = 0$$

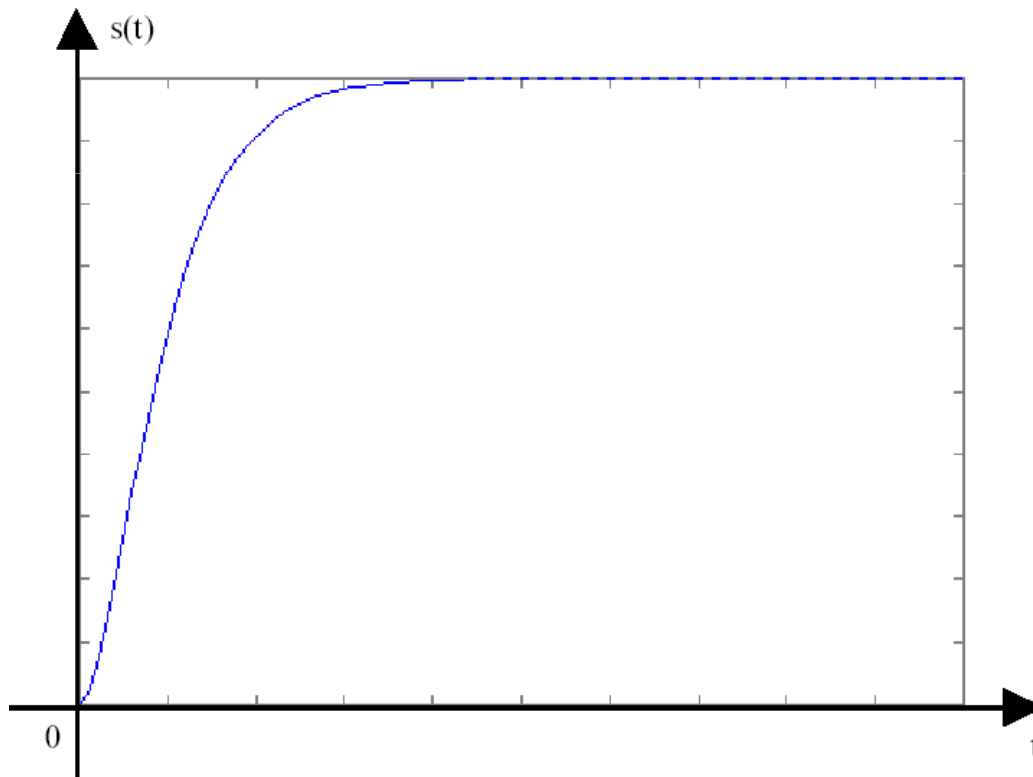
$$\lim_{t \rightarrow +\infty} s(t) = K$$

$s(t)$  possède une tangente horizontale en  $t=0$

# Analyse des systèmes linéaires types

## • Système du 2<sup>ème</sup> ordre – Réponse indicielle

Pour  $\xi=1$  : Nous obtenons une **réponse apériodique critique**



**Points particuliers :**

$$s(0) = 0$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} s(t) = K$$

$s(t)$  possède une tangente horizontale en  $t=0$

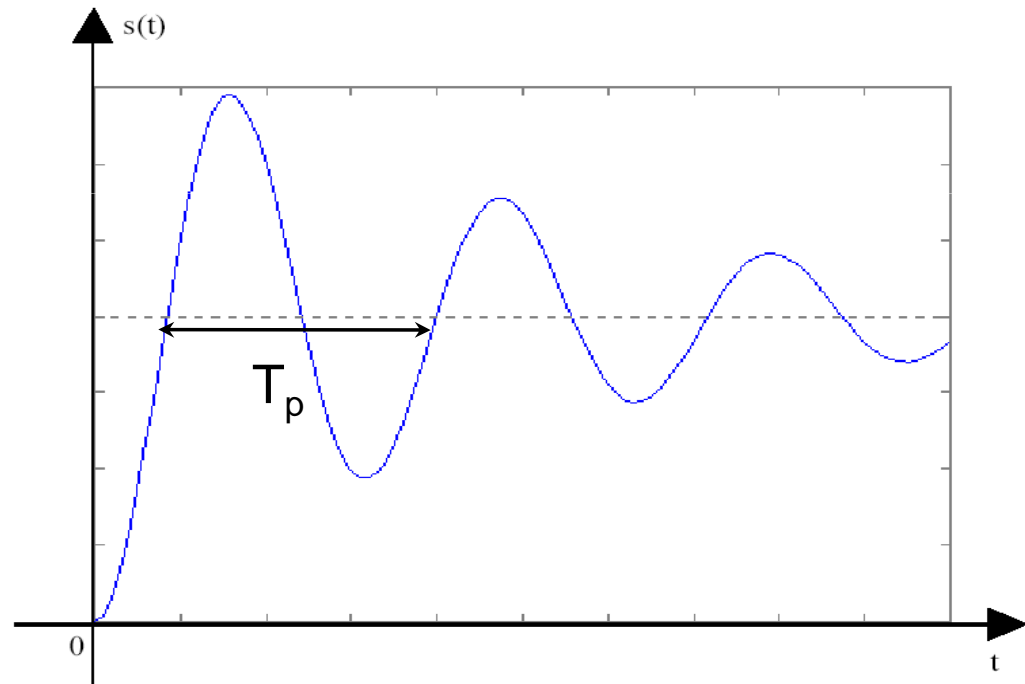
# Analyse des systèmes linéaires types

## • **Système du 2<sup>ème</sup> ordre – Réponse indicielle**

Pour  $\xi < 1$  : Nous obtenons une **réponse oscillatoire amortie**

La réponse indicielle est la superposition d'un régime forcé ( $K$ ) et d'un régime transitoire oscillatoire amortie.  
La pulsation des oscillations se déduit des calculs précédents :

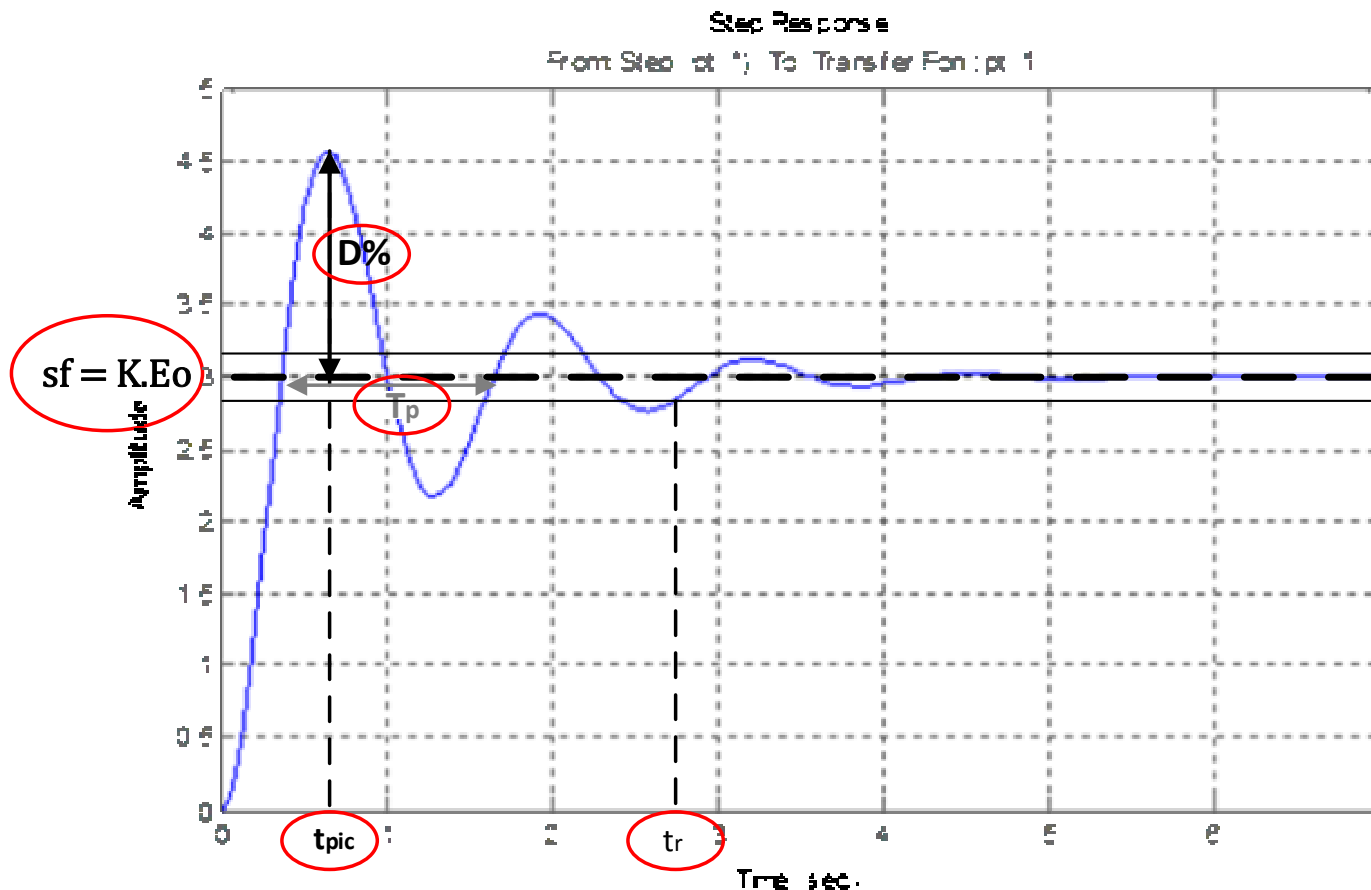
$$\omega_p = \omega_0 \sqrt{1 - \xi^2}$$



# Analyse des systèmes linéaires types

## • Système du 2<sup>ème</sup> ordre – Réponse indicielle

Pour  $\xi < 1$  : Nous obtenons une **réponse oscillatoire amortie**



$$t_r = \frac{3}{\omega_0 \xi}$$

$$t_{pic} = \frac{\pi}{\omega_0 \sqrt{1-\xi^2}}$$

$$D_{\%} = 100 e^{-\frac{\pi \xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$$

$$T_p = \frac{2\pi}{\omega_0 \sqrt{1-\xi^2}}$$

# Analyse des systèmes linéaires types

## • Système du 2<sup>ème</sup> ordre – Réponse fréquentielle

Fonction de transfert harmonique :

$$H(j\omega) = \frac{K}{\left(\frac{j\omega}{\omega_0}\right)^2 + 2\frac{\xi}{\omega_0}j\omega + 1} = \frac{K}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + 2j\xi\frac{\omega}{\omega_0}}$$

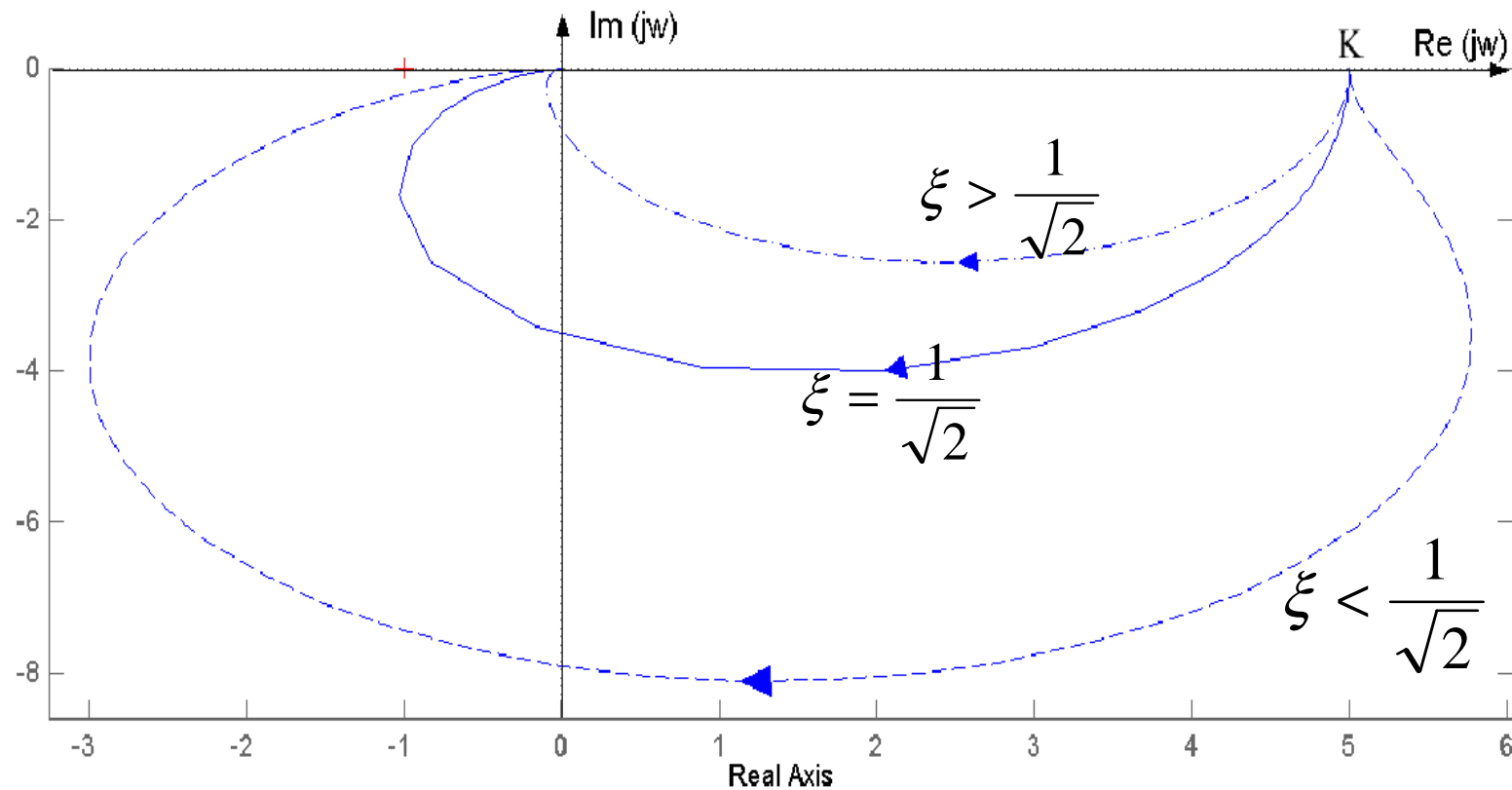
Nous pouvons donc en déduire les valeurs du gain et de la phase :

$$H(\omega) = |H(j\omega)| = \frac{K}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + 4\xi^2\frac{\omega^2}{\omega_0^2}}} \quad \varphi_H(\omega) = -\arctan \frac{2\xi\frac{\omega}{\omega_0}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}$$

# Analyse des systèmes linéaires types

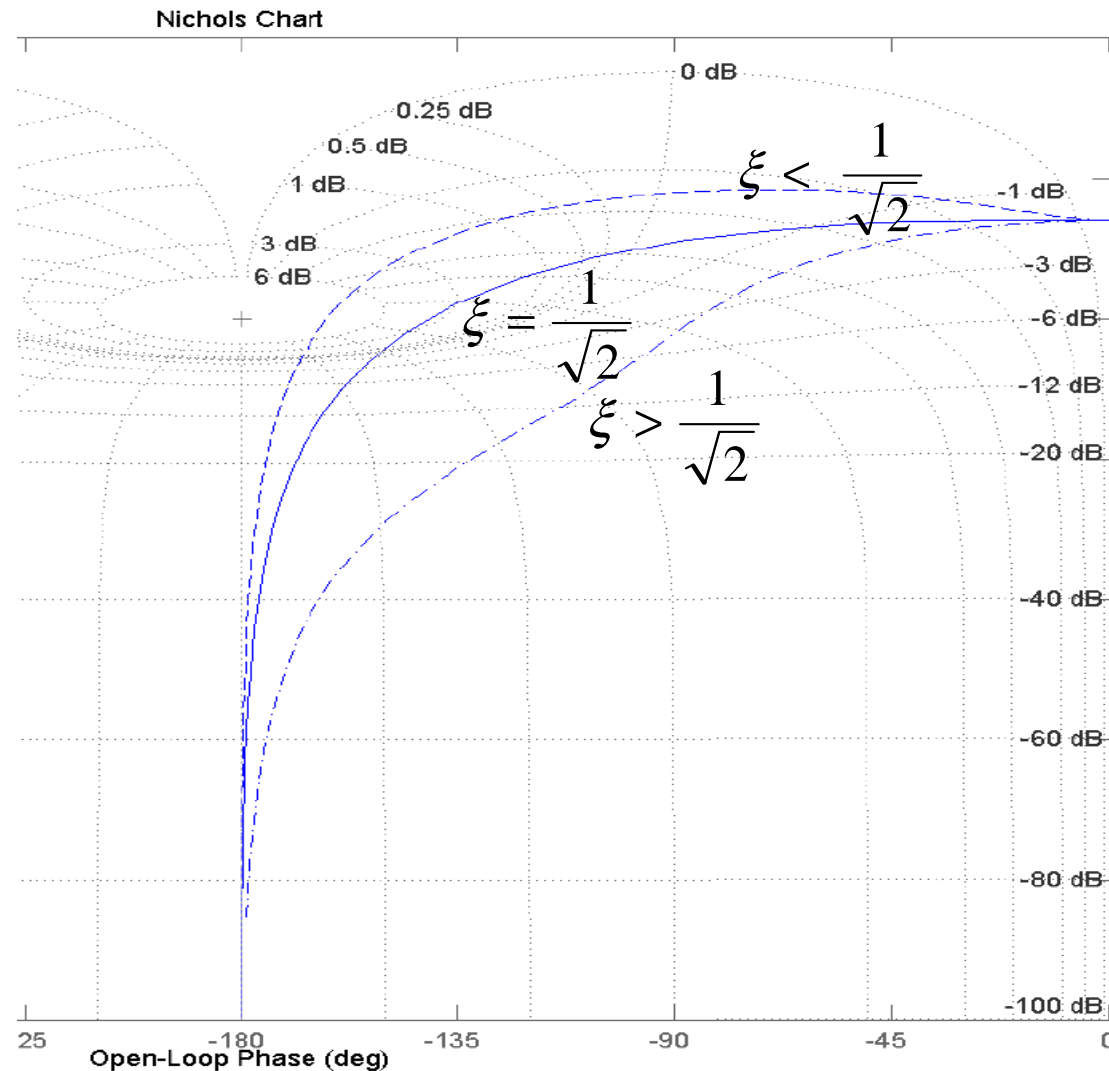
## • Système du 2<sup>ème</sup> ordre – Réponse fréquentielle

### ➤ Lieu de Nyquist



# Analyse des systèmes linéaires types

## ➤ Lieu de Black – Systèmes du 2<sup>ème</sup> ordre



# CHAPITRE 6

---

## Stabilité des SA



# Stabilité des SA

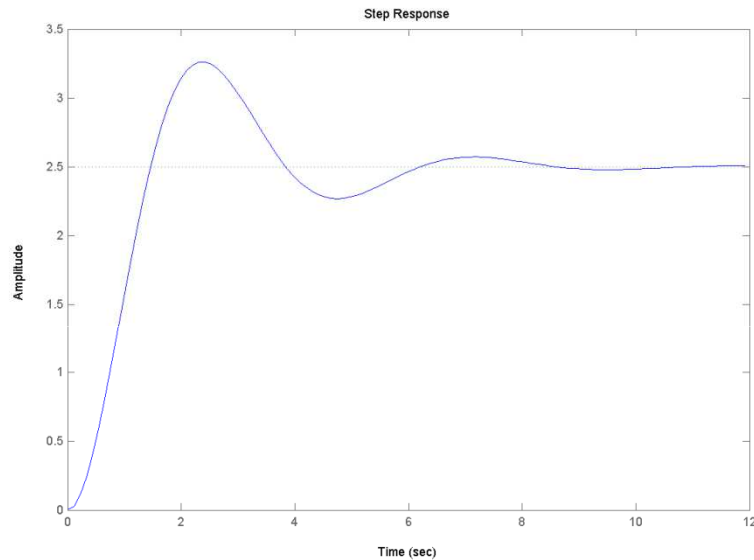
---

La stabilité est la première propriété exigée pour les systèmes asservis (boucle fermée) !

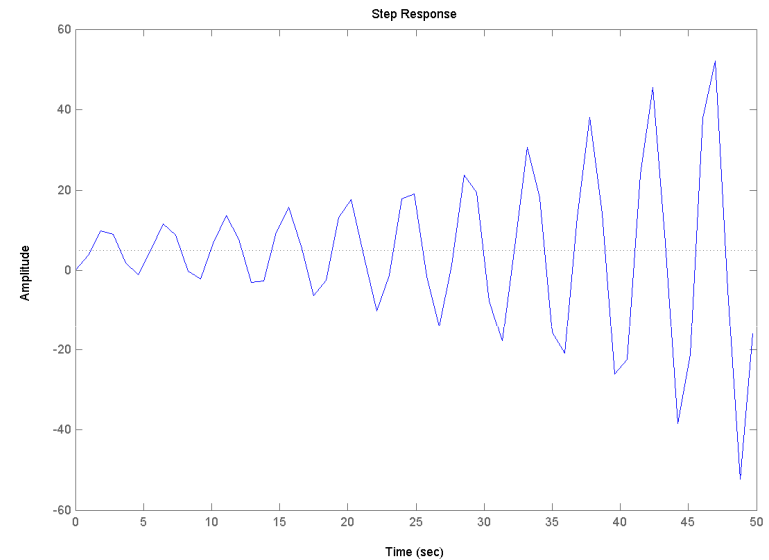
Un système instable est inutilisable...

- Définition 1 : un système asservi est stable si lorsqu'on lui applique une entrée limitée, sa sortie est limitée.
- Définition 2 : un système asservi est stable s'il revient à un état permanent après une perturbation.
- Définition 3 : un système asservi est stable si sa réponse impulsionnelle tend vers une constante pour  $t = \infty$

# Stabilité des SA



Système stable



Système instable

# Stabilité des SA

## • Conditions générales de stabilité :

LA STABILITE D'UN SYSTEME DEPEND DE LA NATURE  
DES POLES DE LA FONCTION DE TRANSFERT EN  
BOUCLE FERMEE

Un système linéaire  $G(p)$  est de la forme :

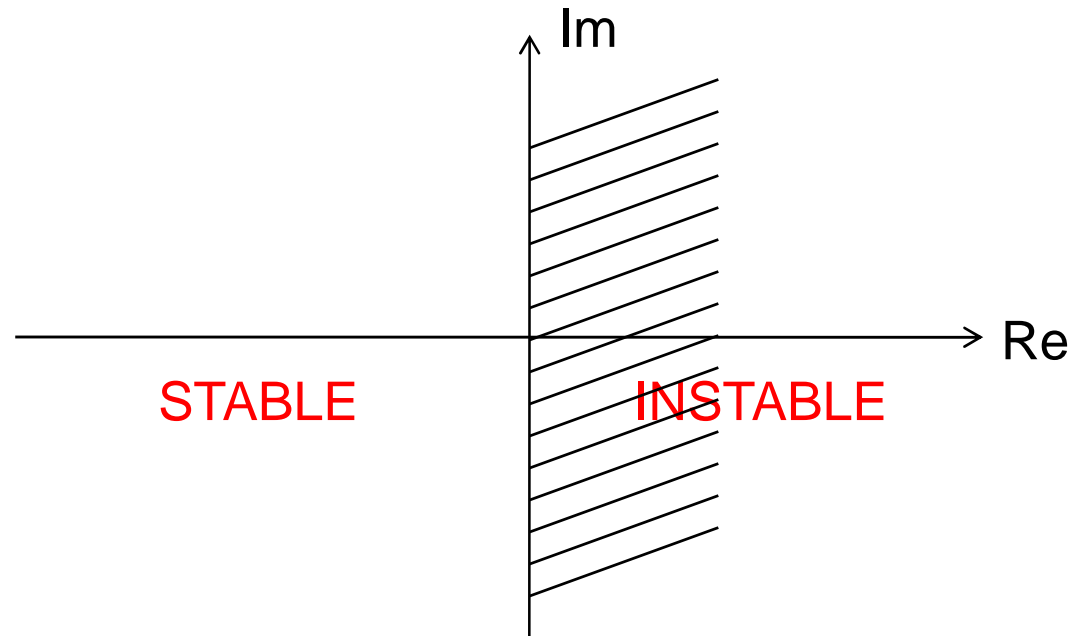
$$G(p) = \frac{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_1 p + b_0}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0} = \frac{N(p)}{D(p)} = \sum_{i=1}^n \frac{A_i}{(p - p_i)}$$

Pôles de  $D(p)$

# Stabilité des SA

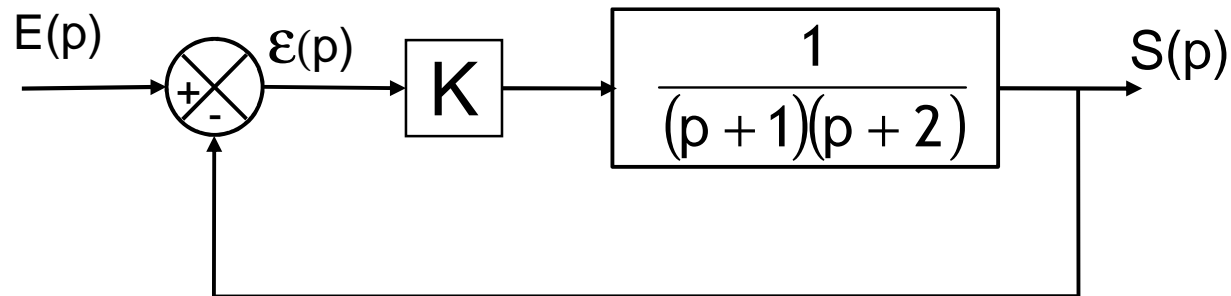
- **Conditions générales de stabilité :**

Un système en boucle fermée est stable si tous les pôles de  $D(p)$  sont à partie réelle strictement négative.



# Stabilité des SA

- Exercice C-11 : Soit le système suivant ( $K > 0$ )



*Etudier la stabilité de ce système en fonction de  $K$*

# Stabilité des SA

---

- **Exercice C-11** : ( $K > 0$ )

# Stabilité des SA

---

# Stabilité des SA

## • Critère de ROUTH-HURWITZ

Il n'est pas toujours facile de déterminer explicitement ces racines, surtout lorsque l'ordre est élevé. Le critère de Routh permet de connaître les conditions de la stabilité (ou non) d'un système sans connaître les valeurs des pôles.

### ➤ Énoncé du critère :

- ♦  $D(p)$  est le dénominateur de la fonction de transfert en BF.

$$\text{On a : } D(p) = a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0$$

- ♦ Les conditions **nécessaires** pour Routh sont :
  - Tous les  $a_i$  existent
  - Tous les  $a_i$  sont de même signe



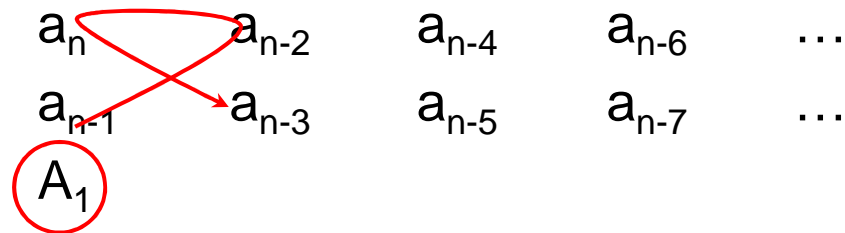
# Stabilité des SA

- Si les conditions nécessaires ne sont pas réunies le **système est instable**
- Si les conditions nécessaires sont réunies, nous pouvons alors écrire le tableau de Routh pour déterminer les conditions ***nécessaires et suffisantes à la stabilité du système.***
- Cette méthode comprend 3 étapes :
  - A partir de l'écriture de  $D(p) = a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0$ , nous écrivons le tableau à deux lignes suivants :

|           |           |           |           |         |
|-----------|-----------|-----------|-----------|---------|
| $a_n$     | $a_{n-2}$ | $a_{n-4}$ | $a_{n-6}$ | $\dots$ |
| $a_{n-1}$ | $a_{n-3}$ | $a_{n-5}$ | $a_{n-7}$ | $\dots$ |

# Stabilité des SA

- A partir du tableau, nous déduisons le nouveau tableau de Routh de la manière suivante :

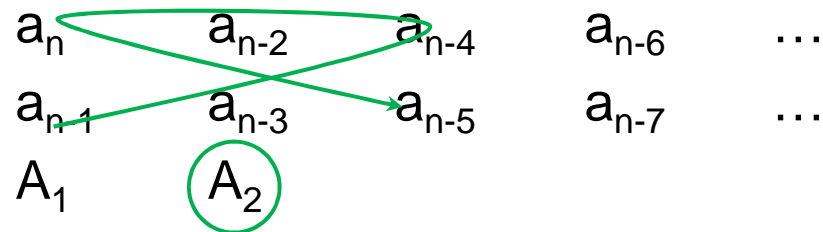


$$\begin{array}{cccccc}
 a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & a_{n-6} & \dots \\
 a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & a_{n-7} & \dots \\
 A_1 & & & & 
 \end{array}$$

$$A_1 = \frac{a_{n-1} \cdot a_{n-2} - a_n \cdot a_{n-3}}{a_{n-1}}$$

# Stabilité des SA

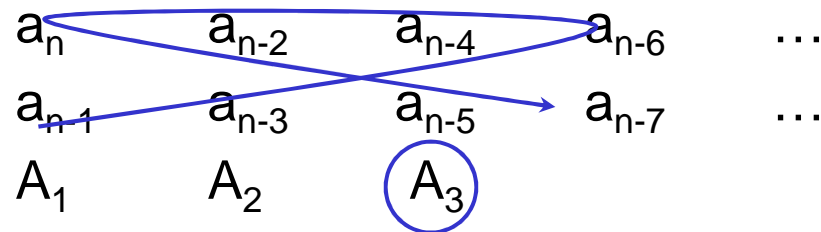
- A partir du tableau, nous déduisons le nouveau tableau de Routh de la manière suivante :



$$A_2 = \frac{a_{n-1} \cdot a_{n-4} - a_n \cdot a_{n-5}}{a_{n-1}}$$

# Stabilité des SA

- A partir du tableau, nous déduisons le nouveau tableau de Routh de la manière suivante :

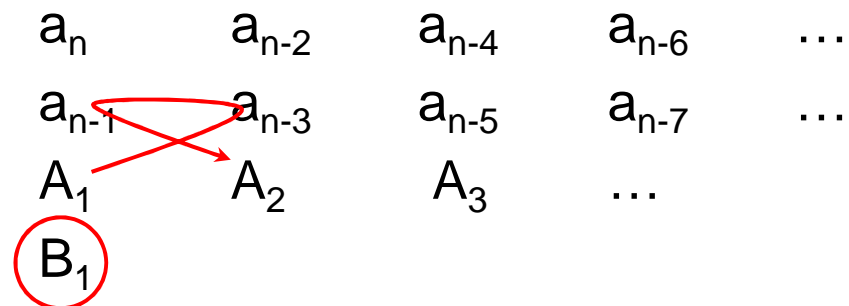


$$A_3 = \frac{a_{n-1} \cdot a_{n-6} - a_n \cdot a_{n-7}}{a_{n-1}}$$

# Stabilité des SA

- A partir du tableau, nous déduisons le nouveau tableau de Routh de la manière suivante :

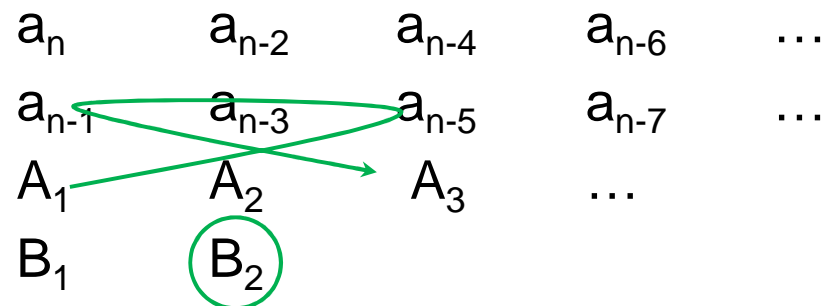
|           |           |           |           |     |
|-----------|-----------|-----------|-----------|-----|
| $a_n$     | $a_{n-2}$ | $a_{n-4}$ | $a_{n-6}$ | ... |
| $a_{n-1}$ | $a_{n-3}$ | $a_{n-5}$ | $a_{n-7}$ | ... |
| $A_1$     | $A_2$     | $A_3$     | ...       |     |
| $B_1$     |           |           |           |     |



$$B_1 = \frac{A_1 \cdot a_{n-3} - a_{n-1} \cdot A_2}{A_1}$$

# Stabilité des SA

- A partir du tableau, nous déduisons le nouveau tableau de Routh de la manière suivante :

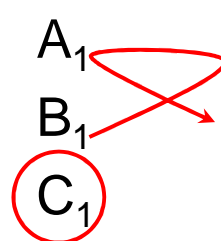


$$B_2 = \frac{A_1 \cdot a_{n-5} - a_{n-1} \cdot A_3}{A_1}$$

# Stabilité des SA

- A partir du tableau, nous déduisons le nouveau tableau de Routh de la manière suivante :

|           |           |           |           |     |
|-----------|-----------|-----------|-----------|-----|
| $a_n$     | $a_{n-2}$ | $a_{n-4}$ | $a_{n-6}$ | ... |
| $a_{n-1}$ | $a_{n-3}$ | $a_{n-5}$ | $a_{n-7}$ | ... |
| $A_1$     | $A_2$     | $A_3$     | ...       |     |
| $B_1$     | $B_2$     |           |           |     |
| $C_1$     |           |           |           |     |



$$C_1 = \frac{B_1 \cdot A_2 - A_1 \cdot B_2}{B_1}$$

# Stabilité des SA

- A partir du tableau, nous déduisons le nouveau tableau de Routh de la manière suivante :

|           |           |           |           |     |
|-----------|-----------|-----------|-----------|-----|
| $a_n$     | $a_{n-2}$ | $a_{n-4}$ | $a_{n-6}$ | ... |
| $a_{n-1}$ | $a_{n-3}$ | $a_{n-5}$ | $a_{n-7}$ | ... |
| $A_1$     | $A_2$     | $A_3$     | ...       |     |
| $B_1$     | $B_2$     |           |           |     |
| $C_1$     |           |           |           |     |
| 0         |           |           |           |     |

**Jusqu'à l'obtention d'un 0 sur la première colonne!**



# Stabilité des SA

---

- Nous examinons dans un dernier temps la première colonne qui va nous permettre de conclure sur la stabilité du système.

Les racines (ou pôles) sont à partie réelle strictement négative si les termes de la première colonne du tableau sont tous de même signe !  
Le nombre de changement de signe dans cette première colonne donne le nombre de pôles à partie réelle positive.

- Exercice C-12 : Soit  $G(p)$  la fonction de transfert d'un système en Boucle Fermée. Etudiez la stabilité de ce système :

$$n \geq 1$$

# Stabilité des SA

---

$$G(p) = \frac{p + 1}{p^5 + 4.p^4 + 3.p^3 + 2.p^2 + p + 1}$$

# Stabilité des SA

---

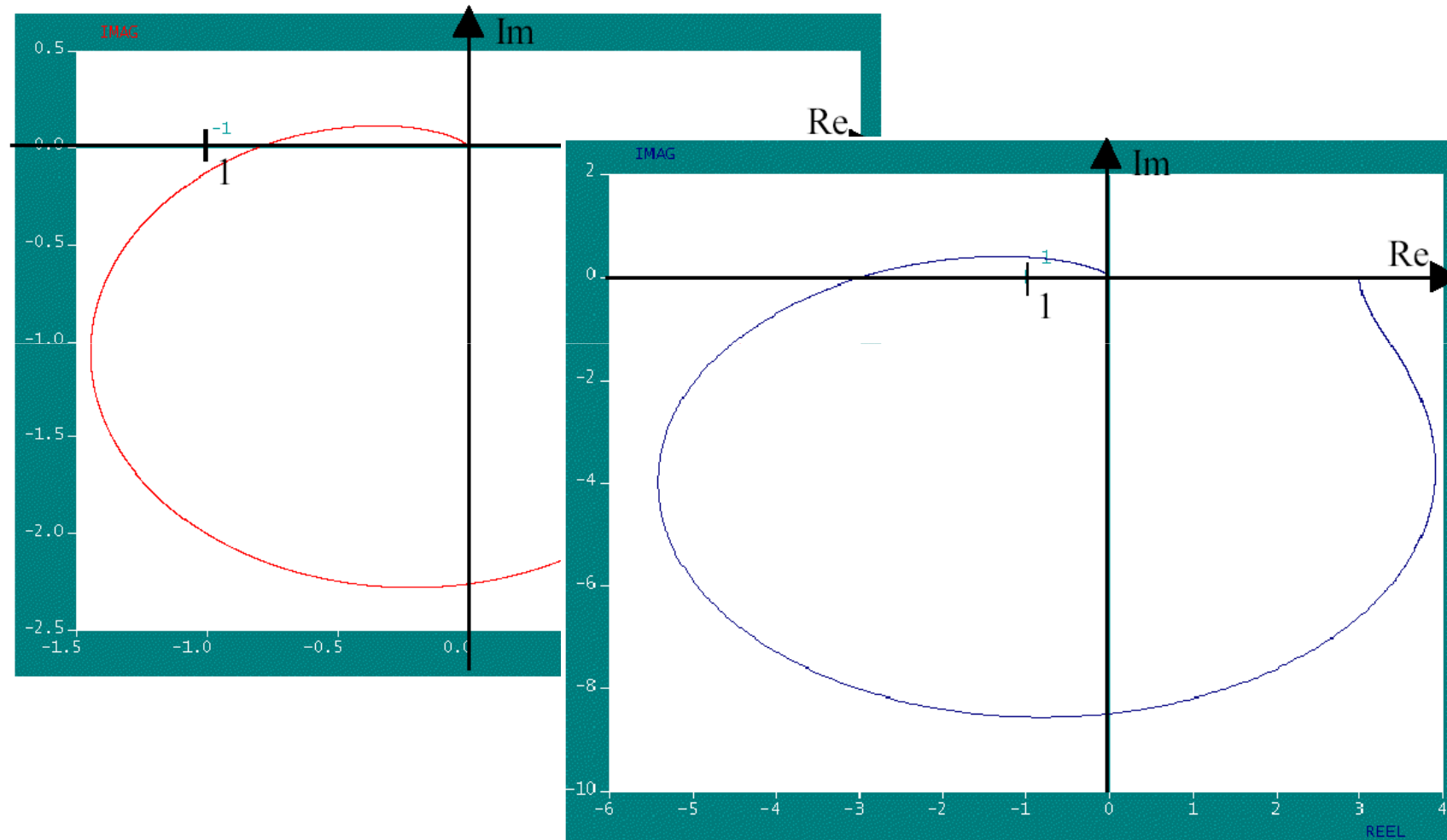
- Critère de Nyquist ou critère du revers

Ce critère est une méthode graphique pour l'analyse de la stabilité d'un système asservi. Il ne s'applique que pour les SA à retour unitaire.

Le critère conclut à la stabilité du système en boucle fermée par examen du lieu de Nyquist en boucle ouverte.

**Un système asservi linéaire est stable si, en décrivant le lieu de transfert de Nyquist en BO dans le sens des fréquences croissantes, nous laissons le point dit « critique »  $(-1,0)$  à gauche.**

# Stabilité des SA



# Stabilité des SA

---

**Etudier la stabilité par analyse fréquentielle (d'un système asservi à retour unitaire)**

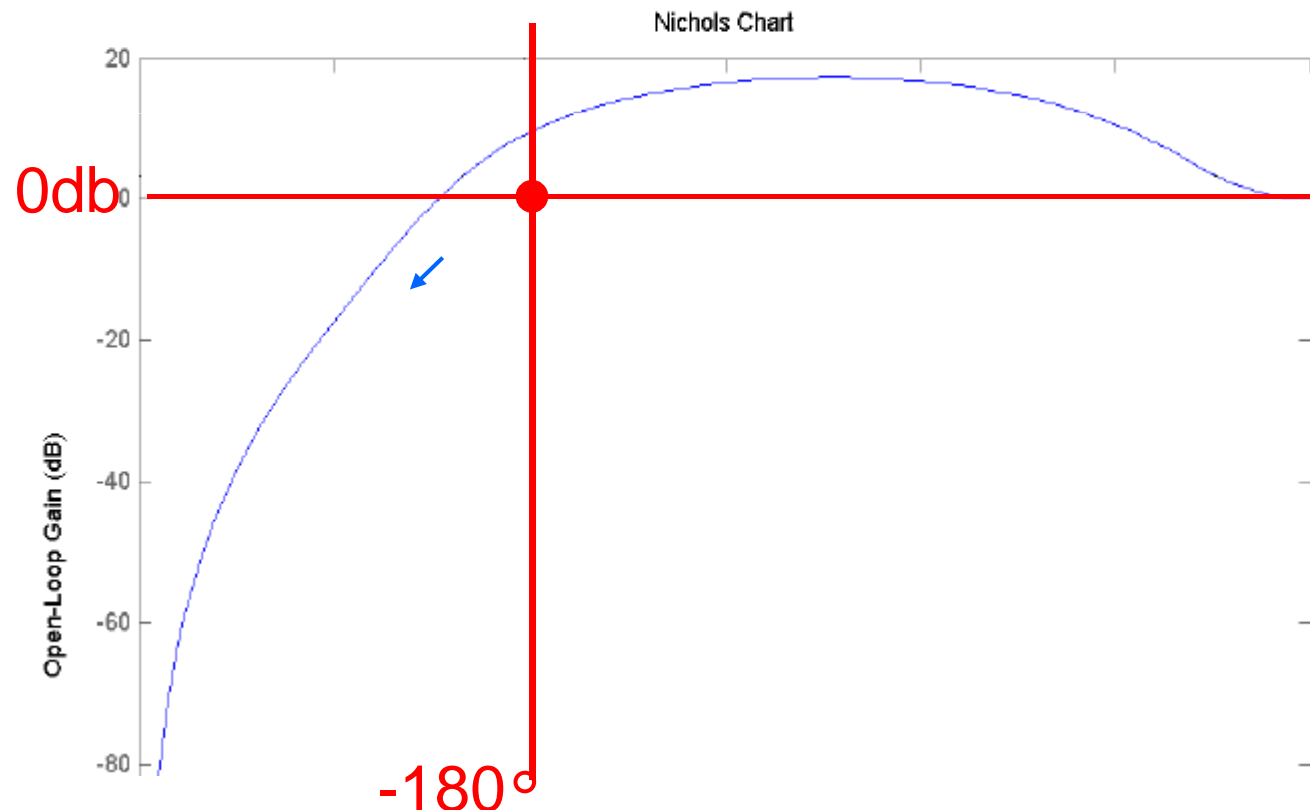


**Etudier le module de la fonction de transfert en boucle ouverte à la pulsation  $\omega_\pi$**

**Système stable ssi**  $H_{BO}(\omega_\pi) \leq 1$   
avec  $\omega_\pi$  tel que  $\varphi_{H_{BO}}(\omega_\pi) = -\pi$

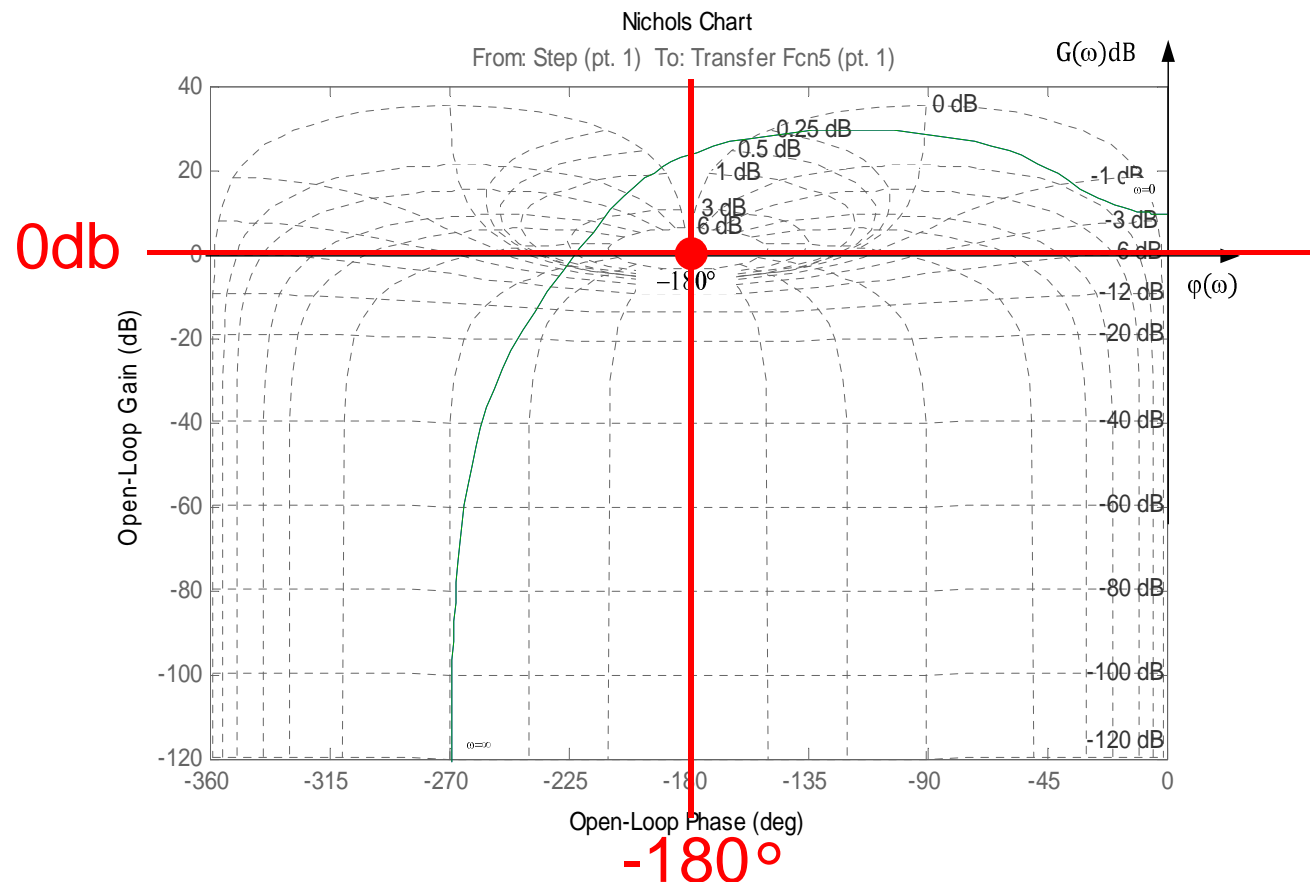
# Stabilité des SA

- Application au diagramme de Black : un système sera stable si, en décrivant le lieu de transfert de Black en BO dans le sens des fréquences croissantes, nous laissons le point critique (0 dB,  $-180^\circ$ ) à **DROITE**.



# Stabilité des SA

- Application au diagramme de Black : un système sera stable si, en décrivant le lieu de transfert de Black en BO dans le sens des fréquences croissantes, nous laissons le point critique (0 dB,  $-180^\circ$ ) à **DROITE**.



# Stabilité des SA

---

- Marges de stabilité :

La stabilité mathématique présentée précédemment n'est pas synonyme de bon comportement. Il faut que la stabilité soit « suffisante ». Un système sera d'autant plus stable que son lieu en boucle ouverte sera éloigné du point critique.

Si des perturbations ou une déviance du comportement apparaissent, une augmentation de la phase ou du gain peut entraîner le système en instabilité.



# Stabilité des SA

---

- Marges de stabilité et robustesse :

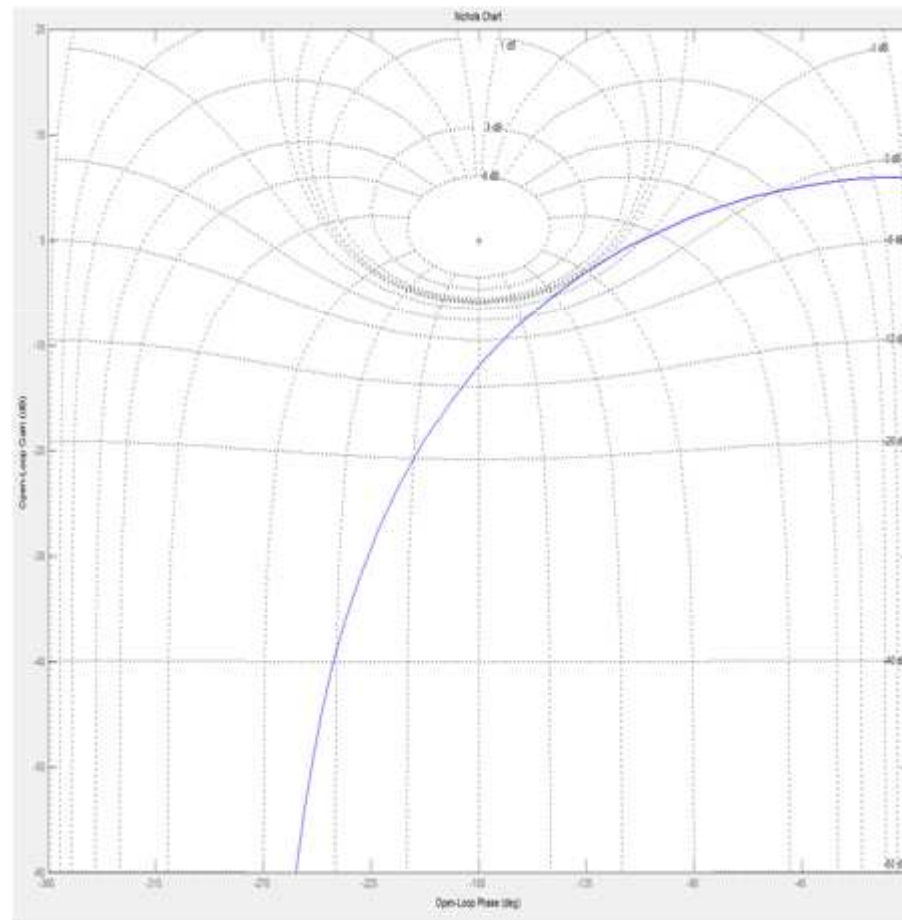
Nous définissons alors :

- **LA MARGE DE GAIN** : c'est le gain minimum qu'il faut ajouter pour rendre le système instable.
- **LA MARGE DE PHASE** : c'est la phase minimale que nous pouvons ajouter pour passer au point critique.

**Un système sera considéré comme ROBUSTE**  
s'il possède une marge de gain d'au moins 10db **ET**  
une marge de phase d'au moins 45°.

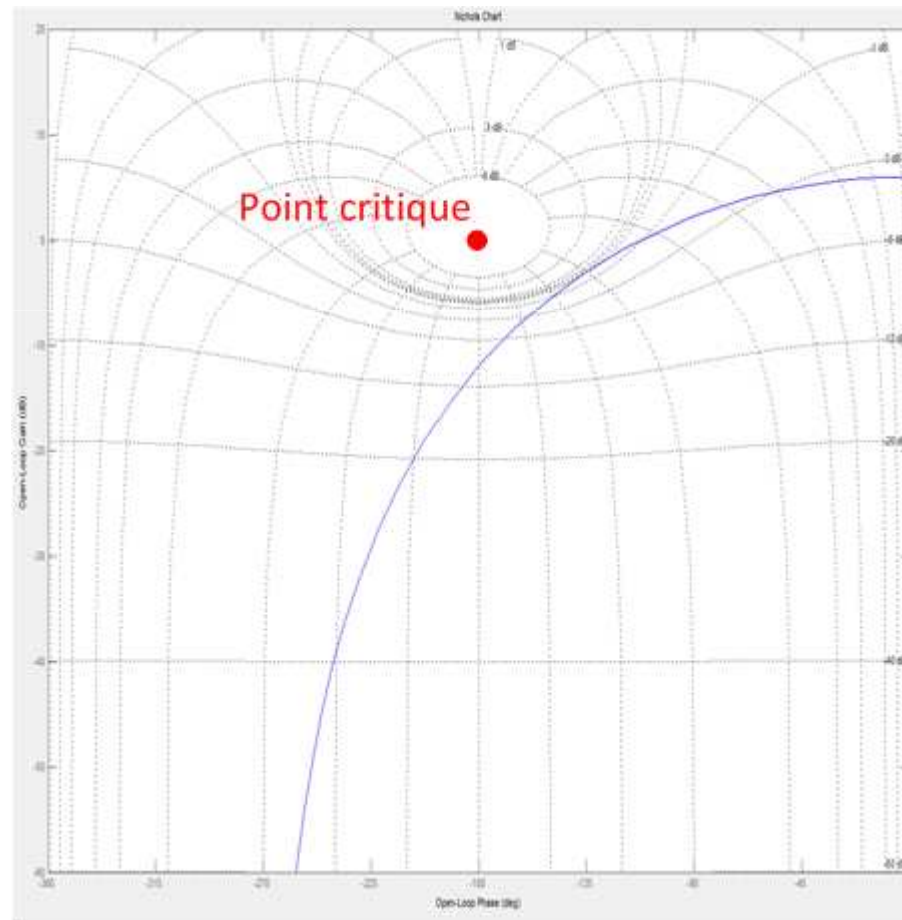
# Stabilité des SA

- Mesures de ces marges : LIEU DE BLACK



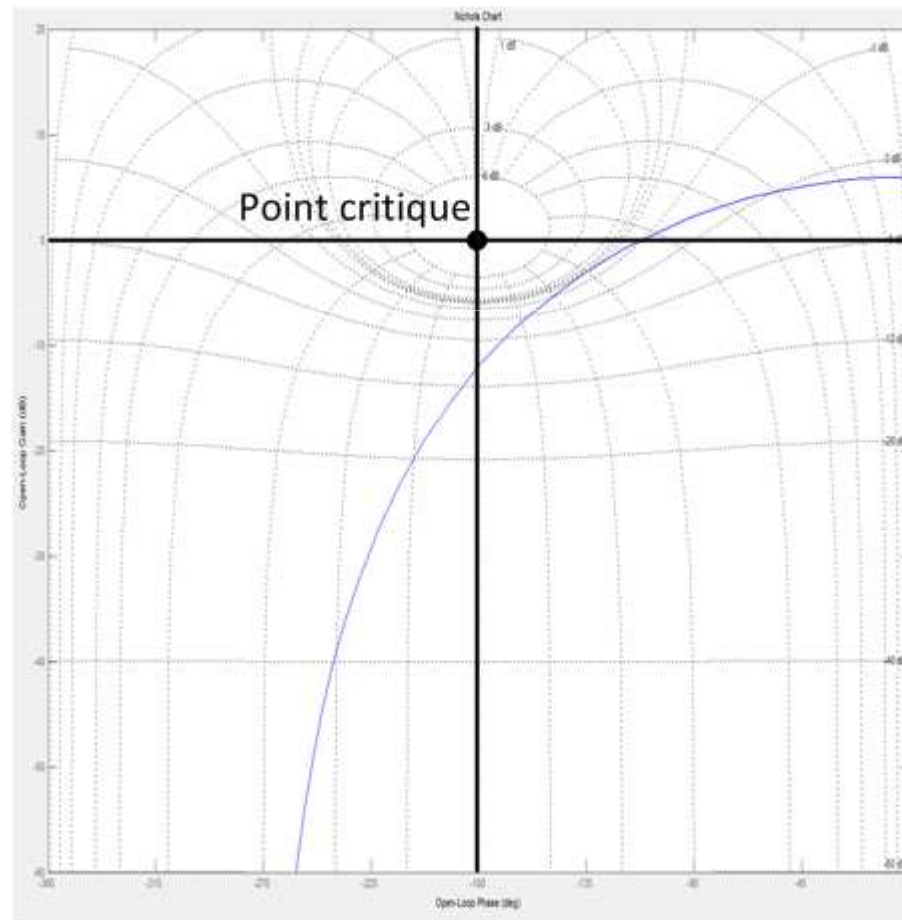
# Stabilité des SA

- Mesures de ces marges : LIEU DE BLACK



# Stabilité des SA

- Mesures de ces marges : LIEU DE BLACK



# Stabilité des SA

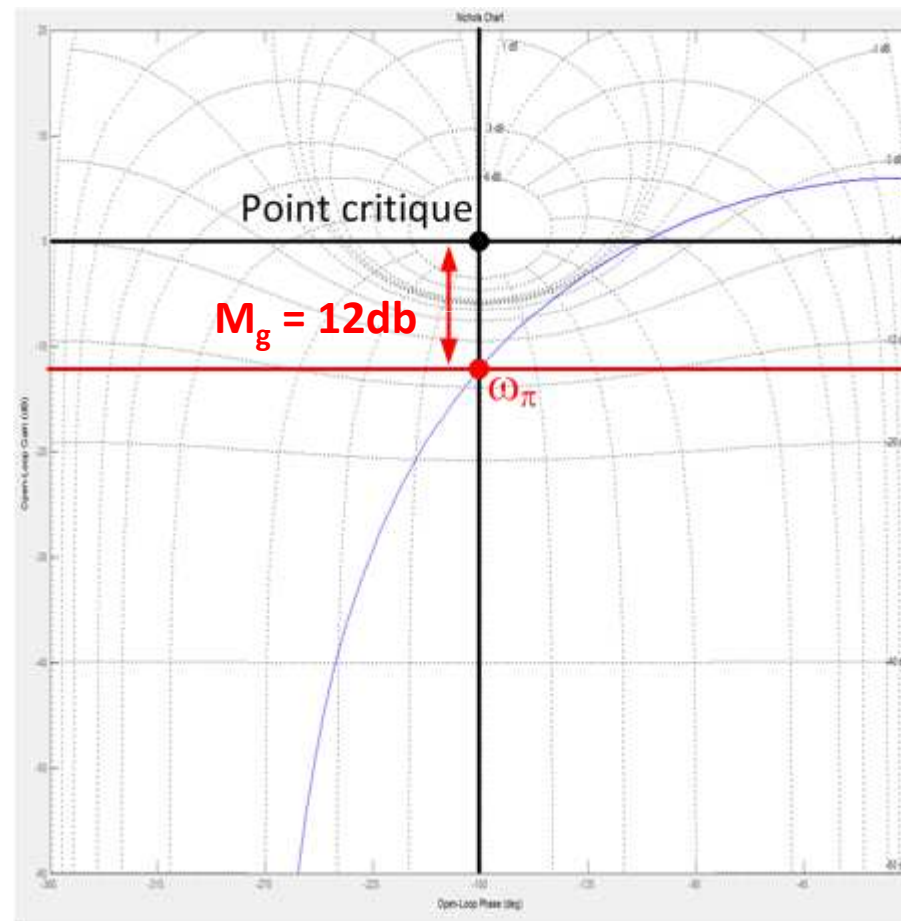
- Mesures de ces marges : LIEU DE BLACK

- **Marge de gain :**

Elle se calcule quand la phase de la fonction de transfert en BO vaut  $-\pi$  ( $-180^\circ$ )

$$M_g = -20 \log H_{bo}(\omega_\pi)$$

$$\varphi(\omega_\pi) = -\pi \Rightarrow \omega_\pi$$



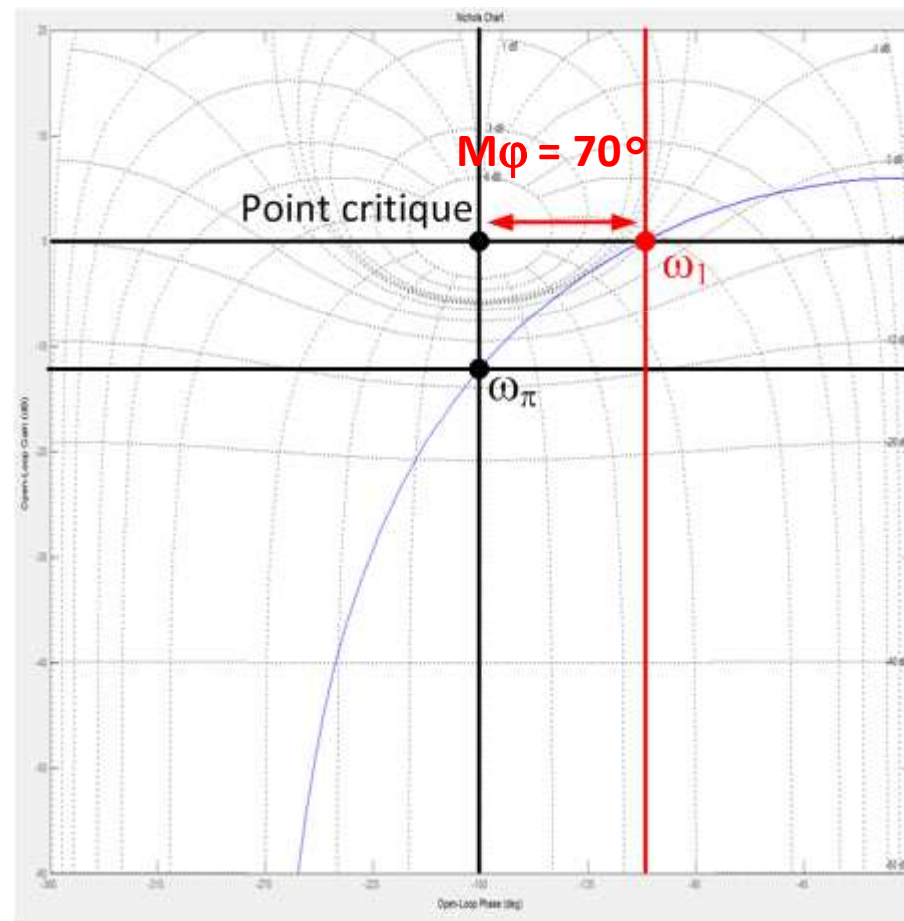
# Stabilité des SA

- Mesures de ces marges : LIEU DE BLACK

- **Marge de phase :**  
Elle se calcule quand le module de la fonction de transfert en BO vaut 1 ou 0db.

$$M_{\varphi} = 180^{\circ} + \varphi_{H_{BO}}(\omega_1)$$

$$H_{bo}(\omega_1) = 1 \Rightarrow \omega_1$$

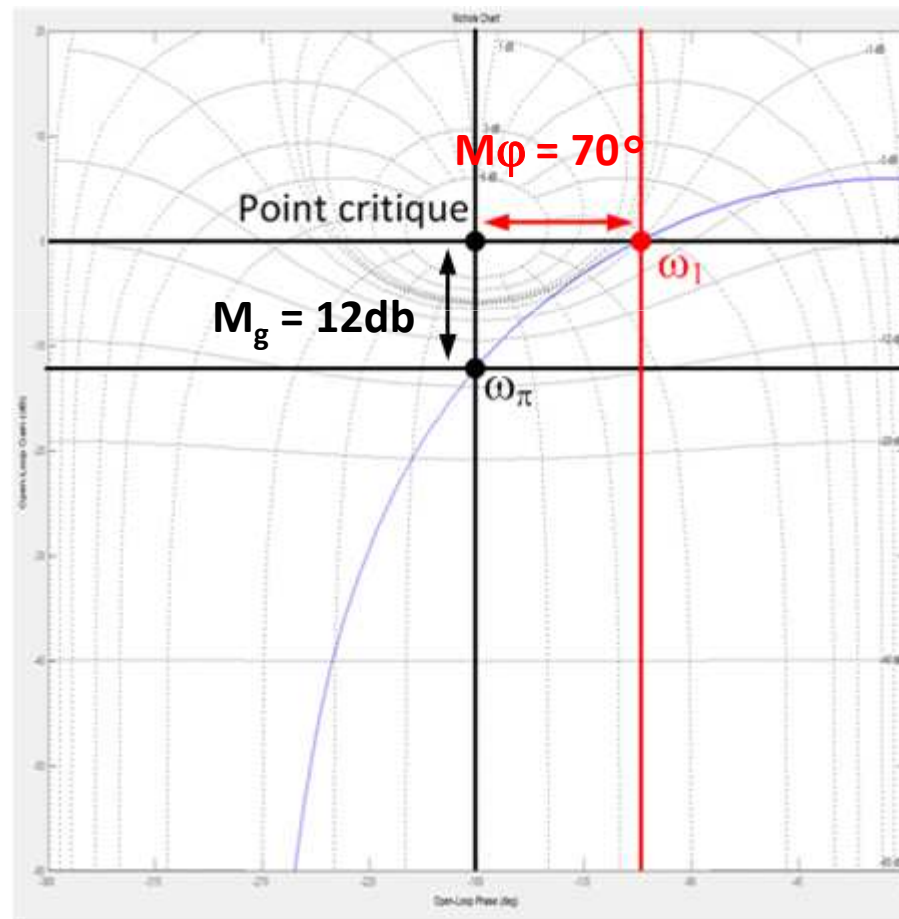


# Stabilité des SA

- Mesures de ces marges : LIEU DE BLACK

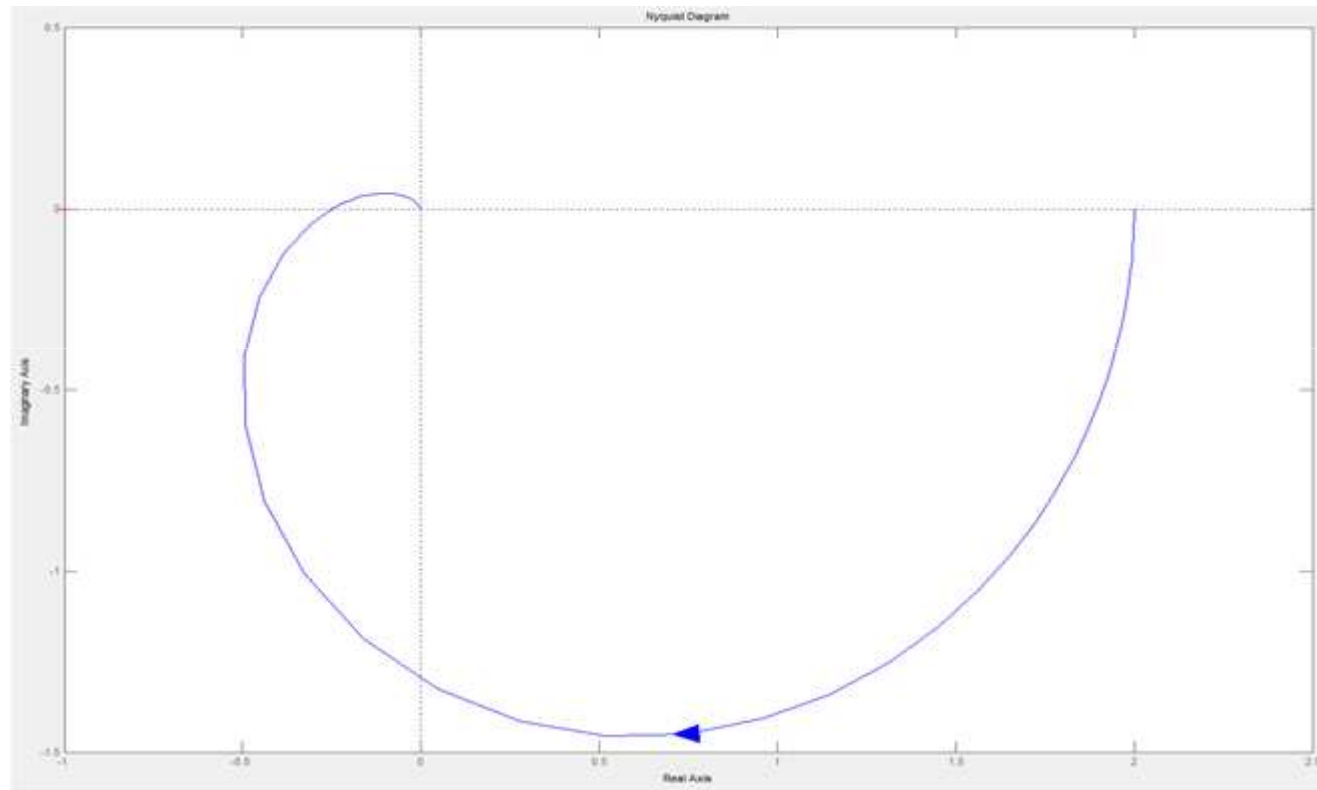
$M_g = 12\text{db}$  ET  $M_\phi = 70^\circ$

⇒ **Systeme robuste**



# Stabilité des SA

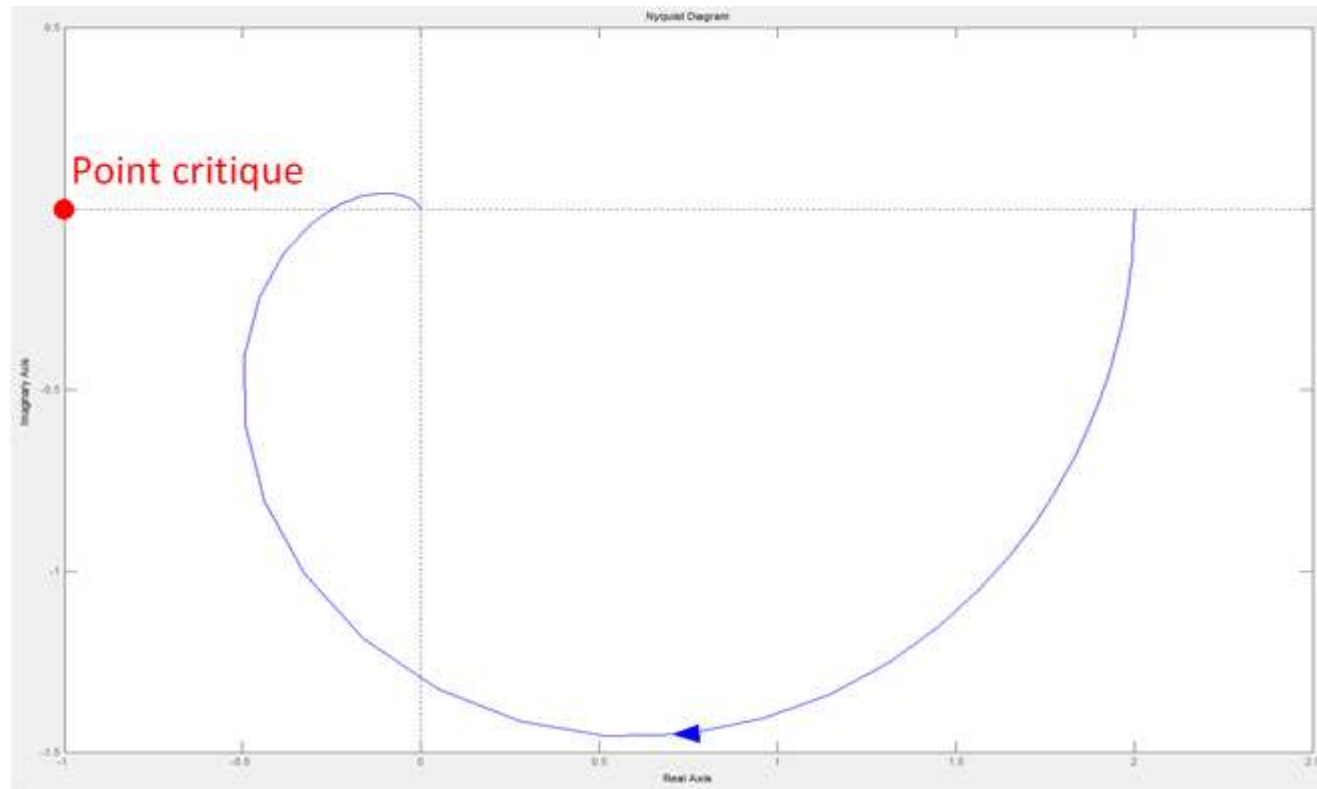
- Mesures de ces marges : LIEU DE NYQUIST





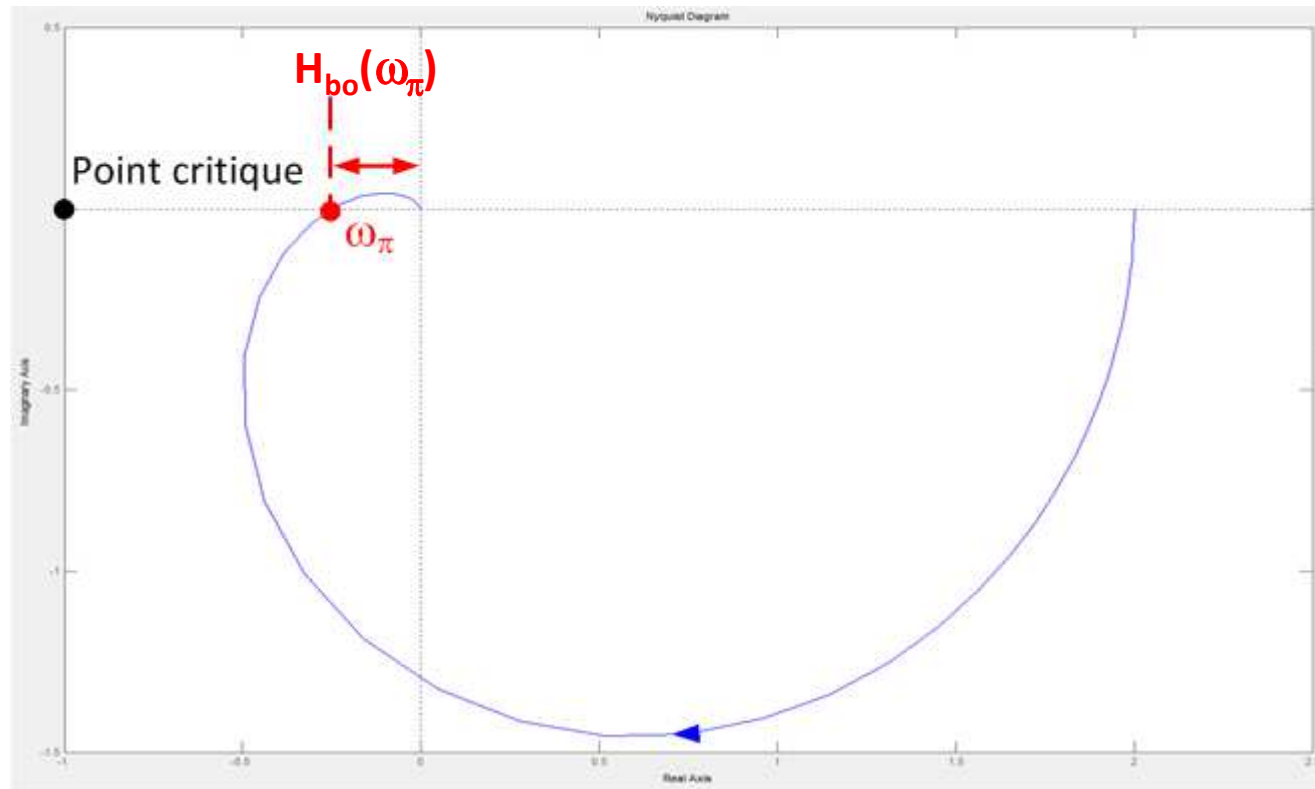
# Stabilité des SA

- Mesures de ces marges : LIEU DE NYQUIST



# Stabilité des SA

- Mesures de ces marges : LIEU DE NYQUIST



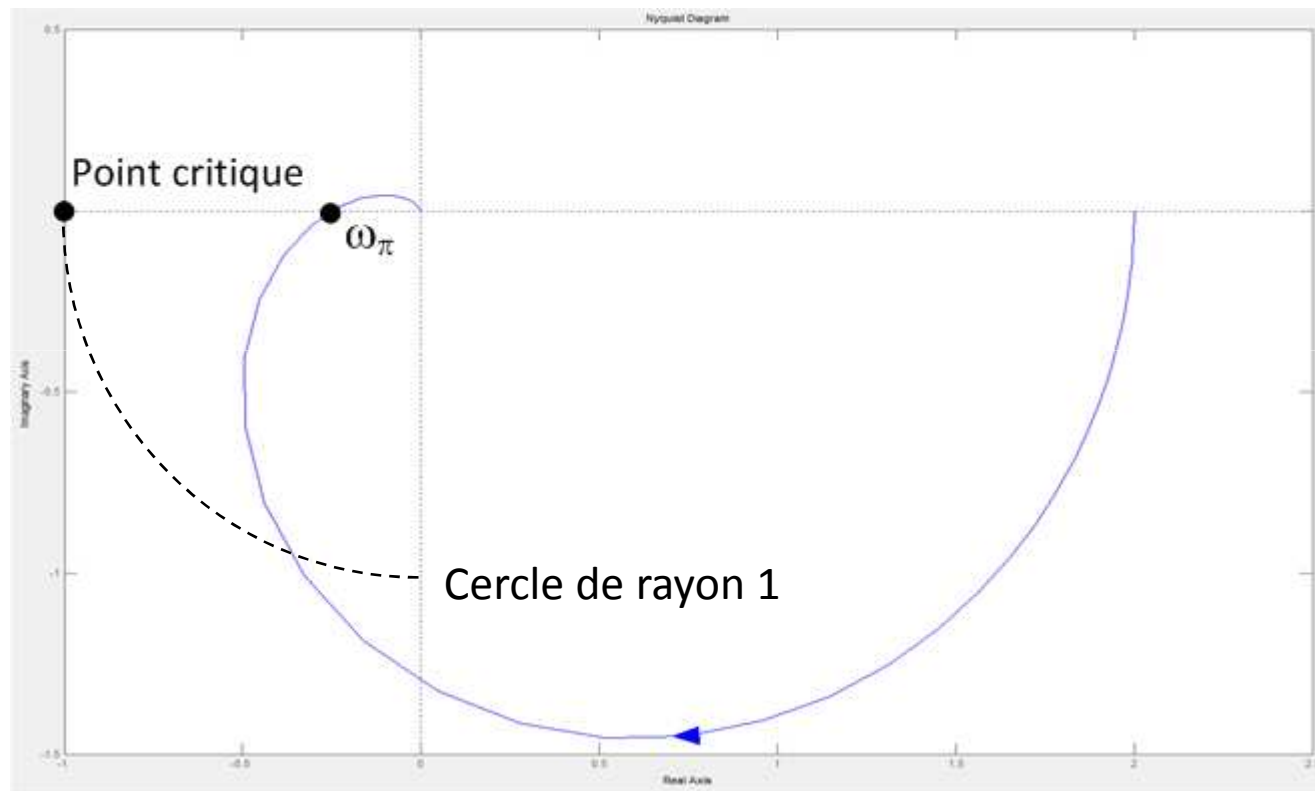
## Marge de gain :

Elle se calcule quand la phase de la fonction de transfert en BO vaut  $-\pi$  ( $-180^\circ$ ) :

$$M_g = -20 \log (H_{bo}(\omega_\pi))$$

# Stabilité des SA

- Mesures de ces marges : LIEU DE NYQUIST



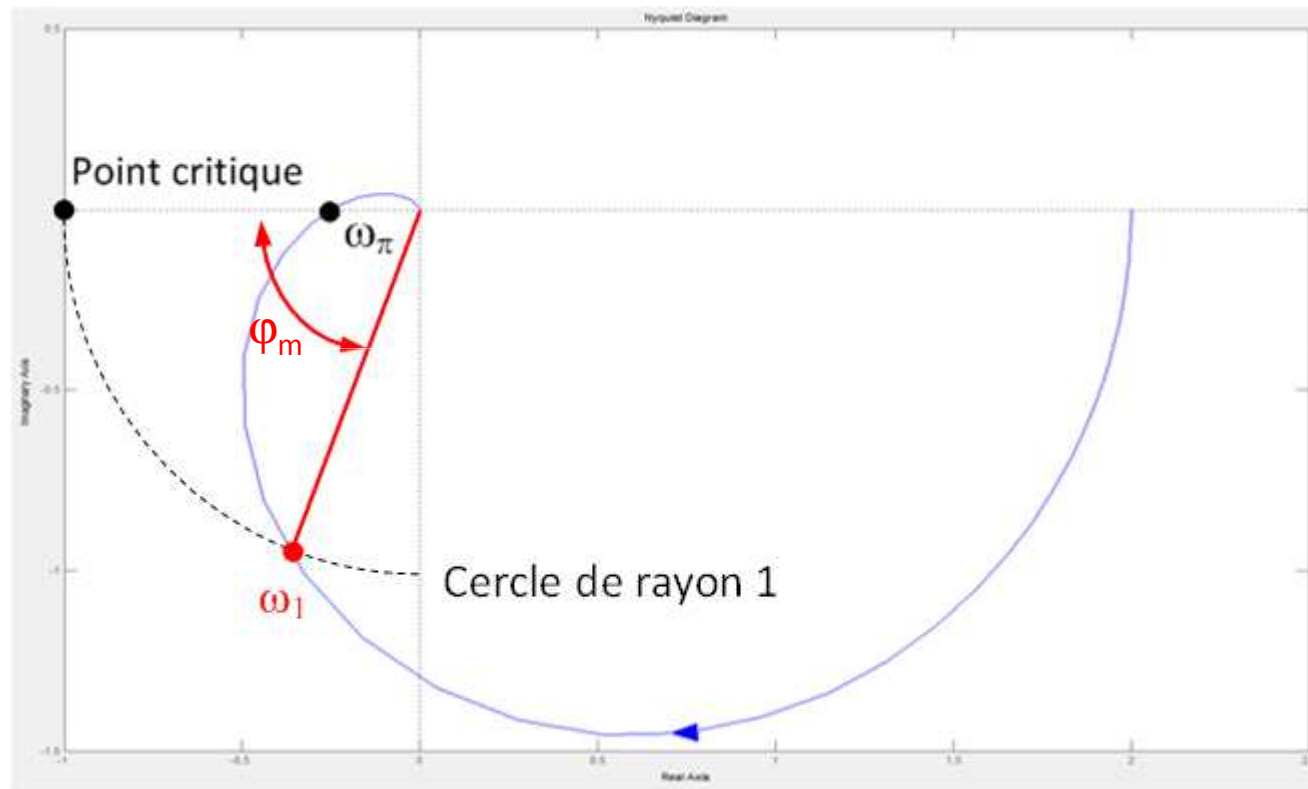
## Marge de phase :

Elle se calcule quand le module de la fct de transfert en BO vaut 1 ou 0db :

$$M_{\varphi} = 180^{\circ} + \varphi_{H_{BO}}(\omega_1)$$

# Stabilité des SA

- Mesures de ces marges : LIEU DE NYQUIST



## Marge de phase :

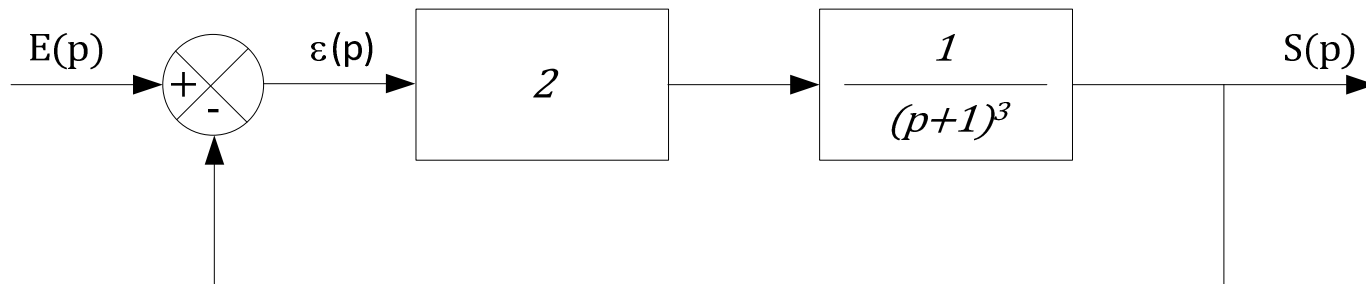
Elle se calcule quand le module de la fct de transfert en BO vaut 1 ou 0db :

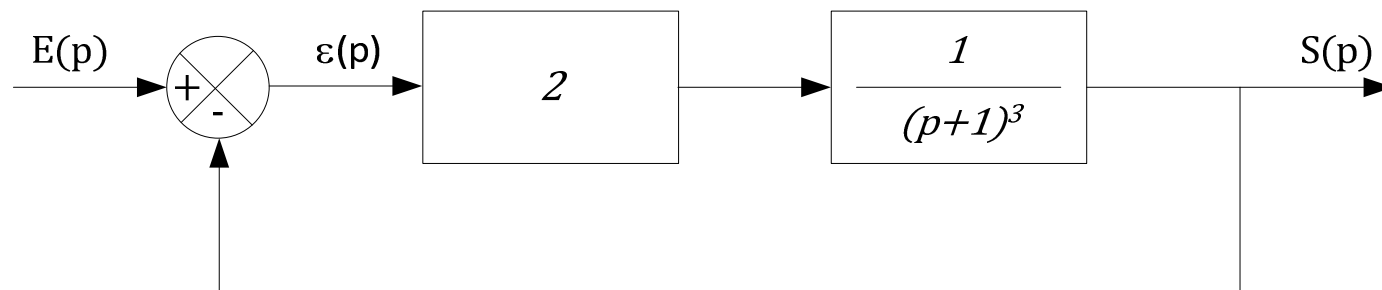
$$M_\varphi = 180^\circ + \varphi_{H_{BO}}(\omega_1)$$

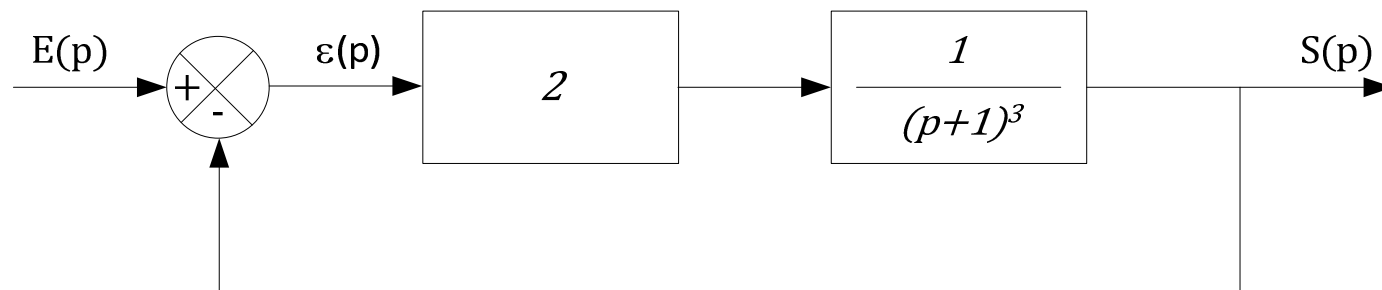
# Stabilité des SA

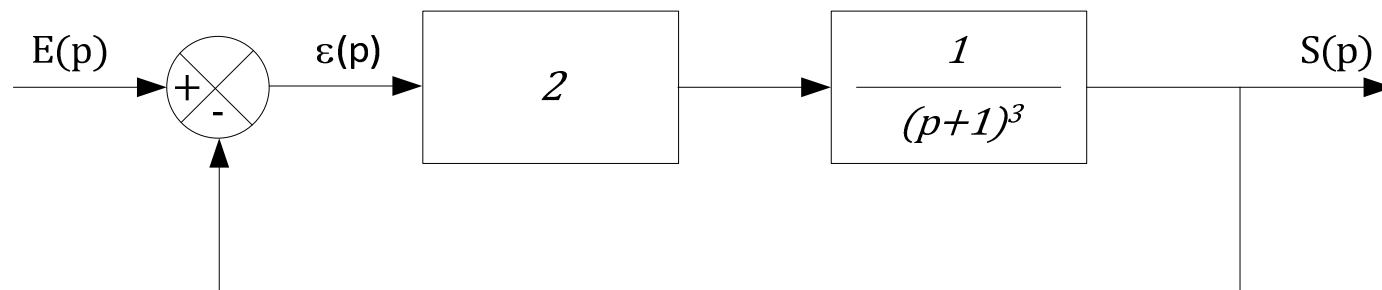
- Exercice C-13 :

Calculer la marge de gain et de phase pour le système suivant, s'il est stable en déduire la robustesse du système :











# CHAPITRE 7

---

## Identification des processus

# Identification des processus

---

- Introduction :

- Jusqu'à maintenant, nous avons toujours considéré que nous connaissions la fonction de transfert du système ou les équations qui le régissent. En pratique, cette fonction n'est pas connue.
- C'est l'identification qui permet de trouver un modèle du comportement de notre système, à l'aide d'essais expérimentaux. Ce modèle, s'il est confirmé servira par la suite à la synthèse complète de notre système.

# Identification des processus

---

- Introduction :

- L'identification comporte généralement 4 phases distinctes :
  - Envoi de signaux tests sur le processus et acquisition de la réponse,
  - Choix du modèle qui approximera le système,
  - Calcul des paramètres du modèle en fonction de la réponse obtenue,
  - Comparaison des sorties du système et du modèle pour validation.

# Identification des processus

---

- Les méthodes graphiques :

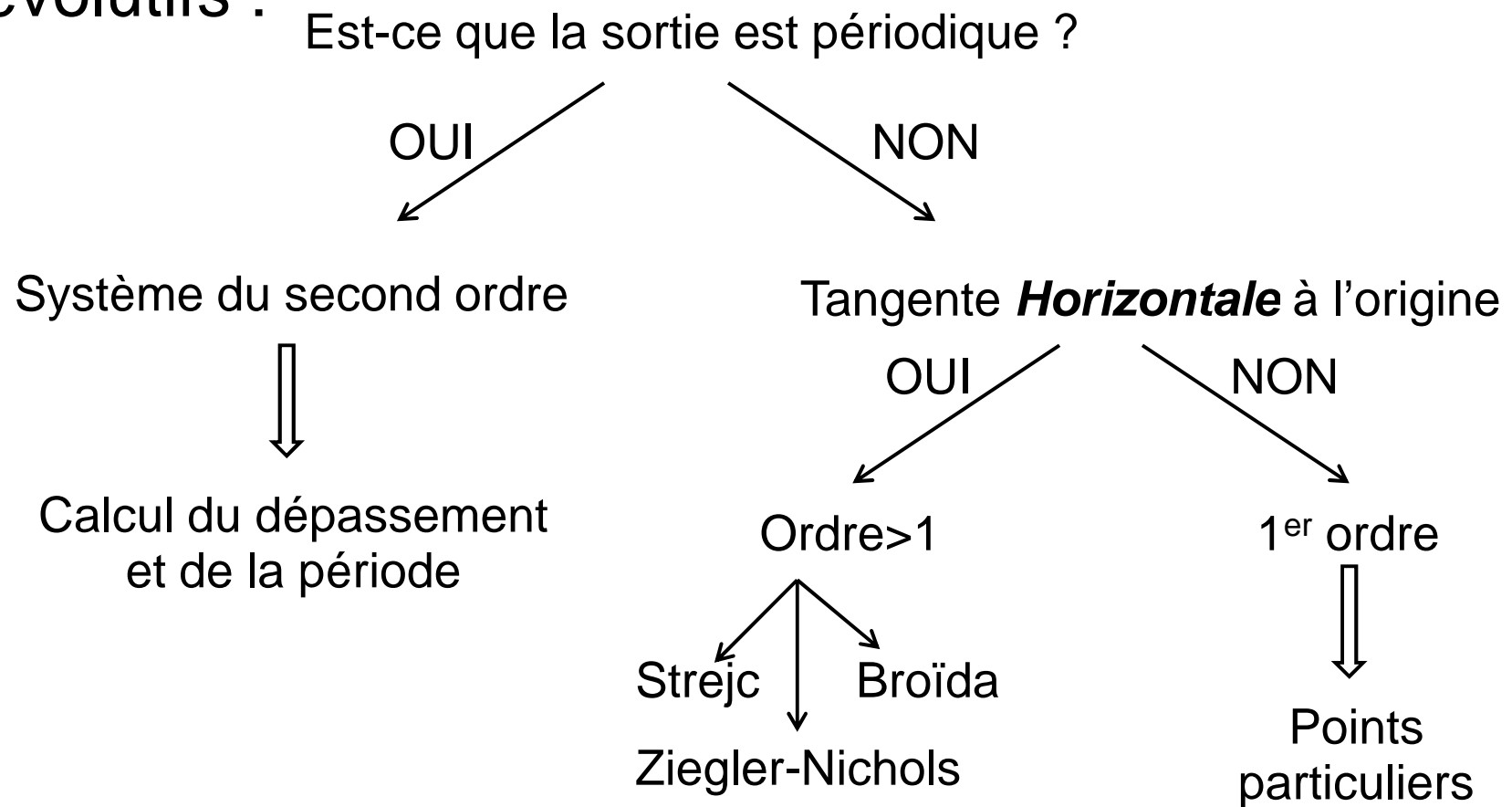
Les méthodes graphiques ont l'inconvénient d'être peu précises. Cependant, comme les modèles proposés ne correspondent pas exactement à la complexité des processus, ces méthodes ont montré leur validité.

Elles consistent à étudier la réponse indicielle du système. Nous pouvons alors envisager 2 cas :

- La réponse est variable à une entrée constante : le système possède une intégration et est dit **EVOLUTIF**.
- La réponse est constante : le système est considéré comme **NON EVOLUTIF** car il ne possède pas d'intégration.

# Identification des processus

- Les méthodes graphiques pour les systèmes non évolutifs :



# Identification des processus

---

- Les méthodes graphiques pour les systèmes non évolutifs :

- Les éléments à calculer pour une identification d'un système du second ordre :

- ♦ Le dépassement :

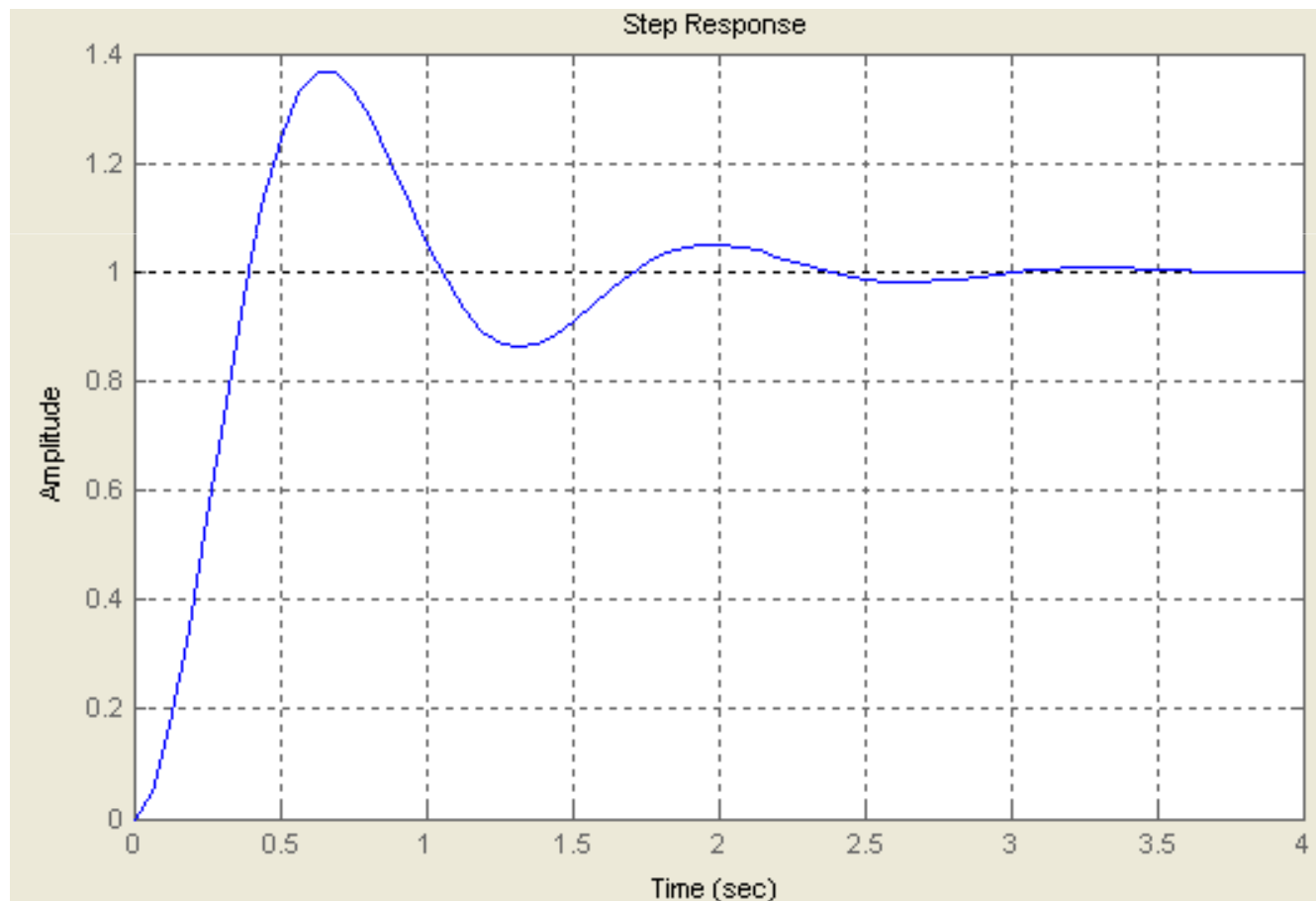
$$D = e^{-\xi\pi/\sqrt{1-\xi^2}} \Rightarrow \xi$$

- ♦ La pseudo période des oscillations :

$$T_p = \frac{2\pi}{\omega_0 \sqrt{1-\xi^2}} \Rightarrow \omega_0$$

# Identification des processus

- Les méthodes graphiques pour les systèmes non évolutifs – Système du second ordre :



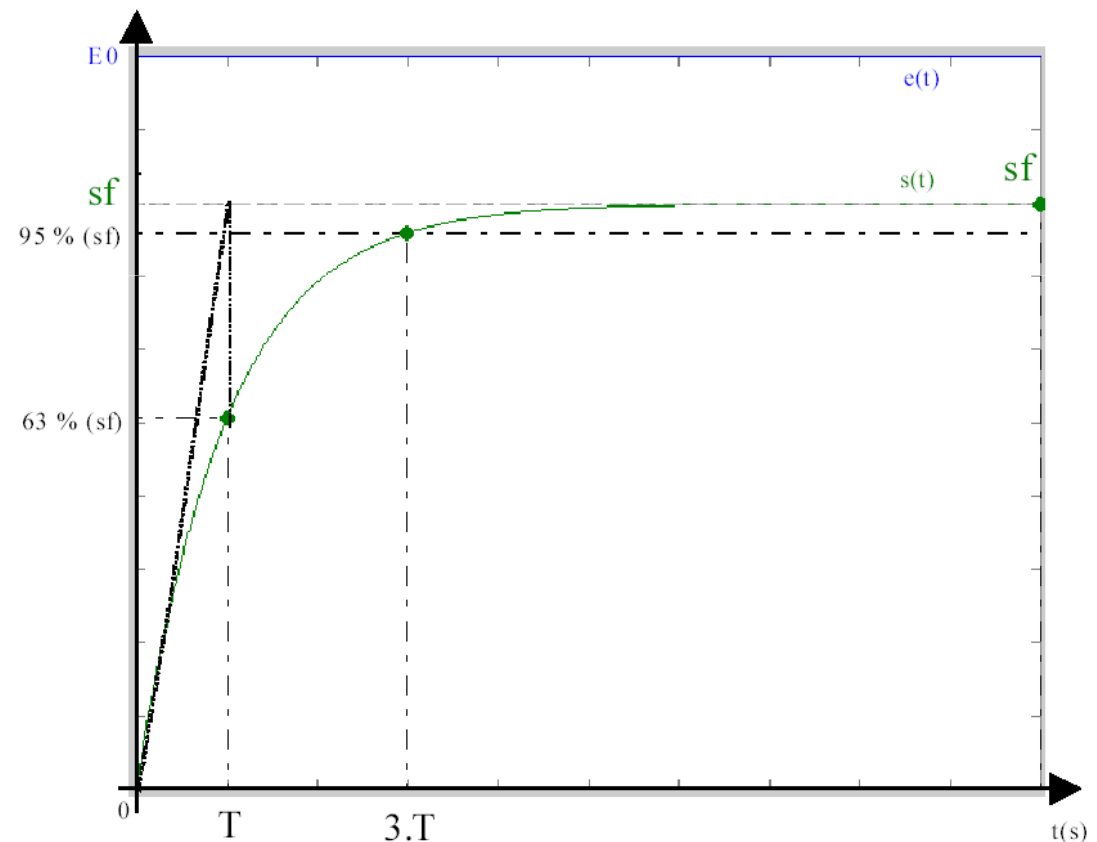
# Identification des processus

- Identification des systèmes non périodiques
  - **Système du premier ordre :**

Modèle :  $G(p) = \frac{K}{1 + Tp}$

On peut déterminer :

- le gain  $K = s_f / E_0$
- la constante de temps  $T$  à 63% (ou 95%) de  $s_f$



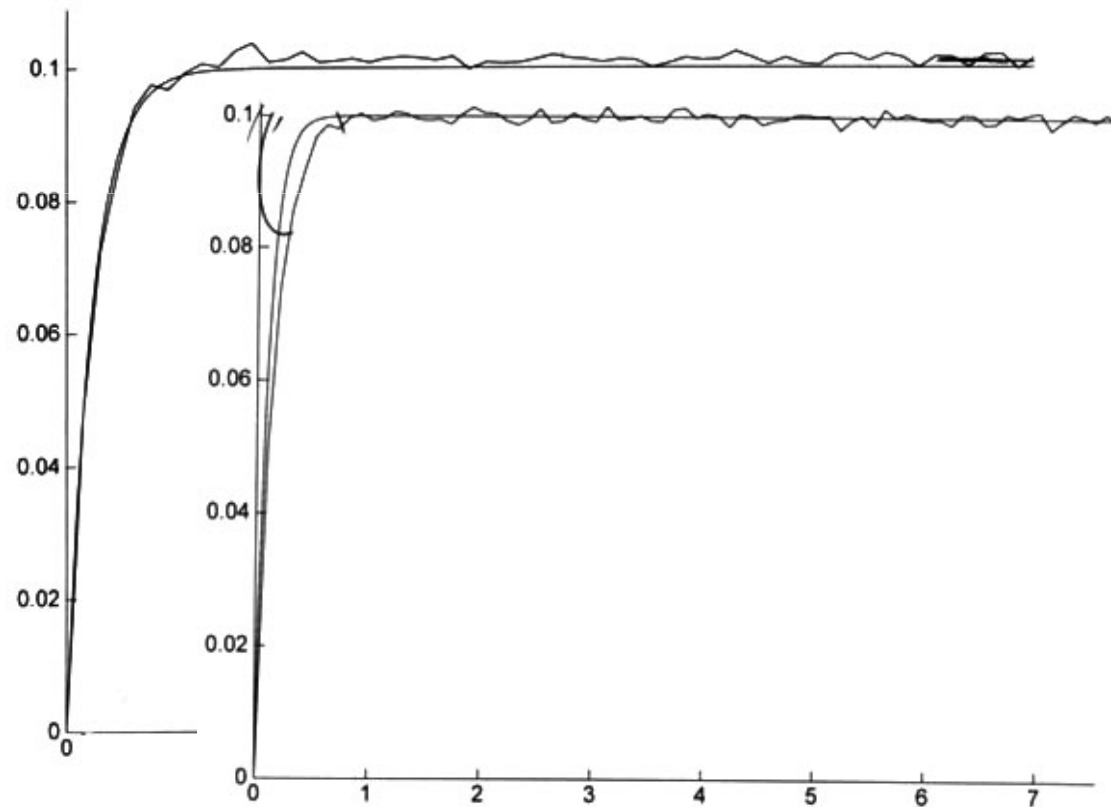


# Identification des processus

## ▪ Système du premier ordre :

Avec les valeurs de  $K$  et  $T$ , nous pouvons simuler notre modèle et voir s'il correspond à la sortie de notre système.

Exemples :



# Identification des processus

---

## ▪ Système d'ordre supérieur : Méthode de Strejc-Quentin

Le modèle général sera de la forme : 
$$G(p) = \frac{K e^{-\tau'p}}{(1 + Tp)^n}$$

Ce modèle ne s'applique que si la réponse du système est apériodique, d'asymptote horizontale et ne comportant qu'un seul point d'inflexion.

Ces conditions dépendent de la méthode graphique qui permet de déterminer les valeurs de  $K$ ,  $\tau'$ ,  $T$  et  $n$ .

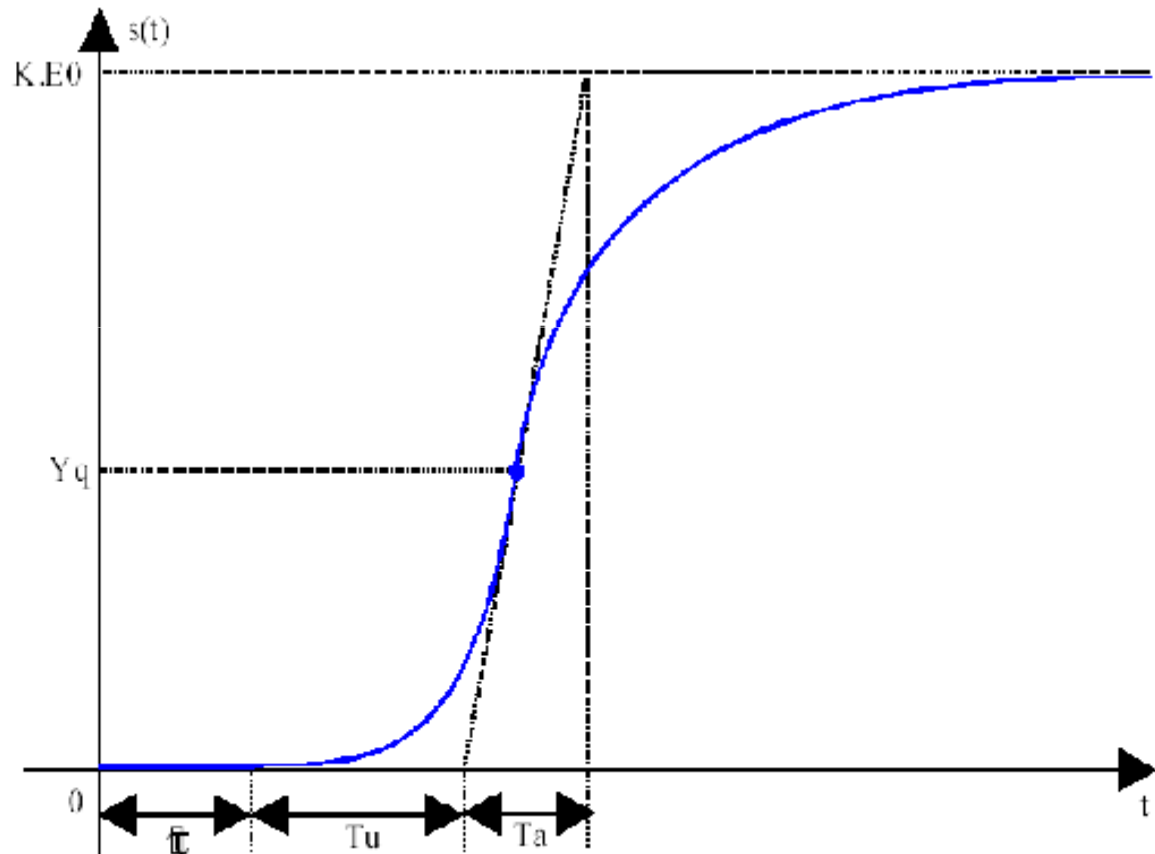
**TOUTE LA METHODE REPOSE SUR LE TRACE  
D'UN POINT D'INFLEXION...**

# Identification des processus

## ▪ Système d'ordre supérieur :

La réponse a la forme :

- 1- Déterminer le gain  $K$
- 2- Rechercher le point d'inflexion  $Y_q$
- 3- Tracer la tangente et déterminer  $T_u$  et  $T_a$
- 4- Calculer  $T_u / T_a$



# Identification des processus

5- Du calcul de  $T_u/T_a$ , on détermine l'ordre du système (on prend toujours le  $n$  inférieur)

6- Des valeurs du tableau, on en déduit la valeur de  $T$ .

7- Avec cette valeur de  $n$ , on va donc déterminer un  $T'_u$  théorique. Ceci va permettre de déterminer un retard fictif qui permet de compenser l'erreur due à la détermination du point d'inflexion. Il faut prendre cette valeur en compte pour rectifier le retard pur.

| $n$ | $\frac{T_a}{T}$ | $\frac{T'_u}{T}$ | $\frac{T_u}{T_a}$ |
|-----|-----------------|------------------|-------------------|
| 1   | 1               | 0                | 0                 |
| 2   | 2.718           | 0.282            | 0.104             |
| 3   | 3.695           | 0.805            | 0.218             |
| 4   | 4.463           | 1.425            | 0.319             |
| 5   | 5.119           | 2.100            | 0.410             |
| 6   | 5.7             | 2.81             | 0.49              |
| 7   | 6.2             | 3.55             | 0.57              |
| 8   | 6.7             | 4.31             | 0.64              |
| 9   | 7.2             | 5.08             | 0.71              |
| 10  | 7.6             | 5.87             | 0.77              |

$$\tau' = \tau_{réel} + (T_{u_{mes}} - T'_u)$$

Exercice C-14 : On mesure  $K = 5$ ,  $T_u = 10.5$  s,  $T_a = 30$  s et  $\tau = 0$   
Donner le modèle de  $G(p)$

# Identification des processus

Exercice C-14 : On mesure  $K = 5$ ,  $T_u = 10.5$  s et  $T_a = 30$  s  
Donner le modèle de  $G(p)$

On calcule  $T_u/T_a = 10.5/30 = 0,35$

$$G(p) = \frac{K e^{-\tau'p}}{(1 + T_p)^n}$$



| n  | $\frac{T_a}{T}$ | $\frac{T'_u}{T}$ | $\frac{T_u}{T_a}$ |
|----|-----------------|------------------|-------------------|
| 1  | 1               | 0                | 0                 |
| 2  | 2.718           | 0.282            | 0.104             |
| 3  | 3.695           | 0.805            | 0.218             |
| 4  | 4.463           | 1.425            | 0.319             |
| 5  | 5.119           | 2.100            | 0.410             |
| 6  | 5.7             | 2.81             | 0.49              |
| 7  | 6.2             | 3.55             | 0.57              |
| 8  | 6.7             | 4.31             | 0.64              |
| 9  | 7.2             | 5.08             | 0.71              |
| 10 | 7.6             | 5.87             | 0.77              |

# Identification des processus

Exercice C-14 : On mesure  $K = 5$ ,  $T_u = 10.5$  s et  $T_a = 30$  s  
Donner le modèle de  $G(p)$

| $n$ | $\frac{T_a}{T}$ | $\frac{T'_u}{T}$ | $\frac{T_u}{T_a}$ |
|-----|-----------------|------------------|-------------------|
| 4   | 4.463           | 1.425            | 0.319             |

$$G(p) = \frac{K e^{-\tau'p}}{(1 + T_p)^n}$$

On considère  $T_a$  comme exacte : 30s

On calcule  $T$

- $T_a/T = 4,463$
- $T = T_a/4,463 = 6,72$  s

Ensuite nous calculons :

- $\tau'$  ici  $\tau=0 \Rightarrow T_u'/T = 1,425 \Rightarrow T_u' = 1,425 * T = 9,57$ s
- $\tau' = T_u - T_u' = 10,5 - 9,57 = 0,92$ s

$$G(p) = \frac{5 e^{-0.92p}}{(1 + 6.72p)^4}$$

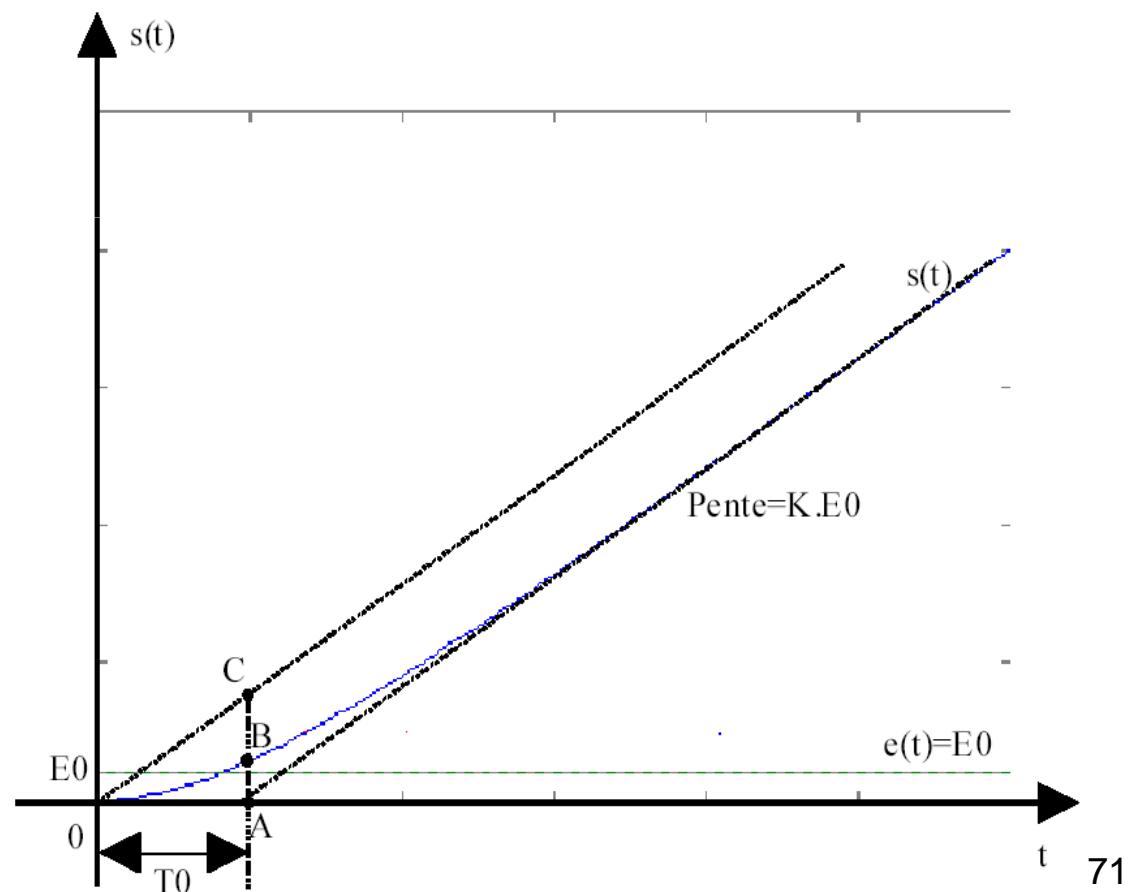
# Identification des processus

- Identification des systèmes évolutifs
  - **Systèmes de type  $n^{\text{ième}}$  ordre avec intégrateur**

Le modèle est :

$$G(p) = \frac{K}{p(1 + T_p)^n}$$

- On trace l'asymptote à la courbe, coupant l'axe des abscisses en  $T_0$ .
- On trace la parallèle à cette asymptote passant par l'origine.
- En  $T_0$ , nous définissons les points A, B et C.



# Identification des processus

## ▪ Systèmes de type $n^{\text{ième}}$ ordre avec intégrateur

On calcule le rapport  $AB / AC$  pour obtenir l'ordre du système, avec le tableau :

| <b>n</b> | <b>AB/AC</b> |
|----------|--------------|
| 1        | 0.368        |
| 2        | 0.271        |
| 3        | 0.224        |
| 4        | 0.195        |
| 5        | 0.175        |

K est donné par la pente de l'asymptote

$$T = T_0 / n$$

Nous prendrons toujours le  $n$  inférieur du tableau.



# Identification des processus

Exercice C-15 : on considère un générateur de vapeur.

$y$  = hauteur d'eau dans le ballon

$Q_e$  = débit d'eau à l'entrée

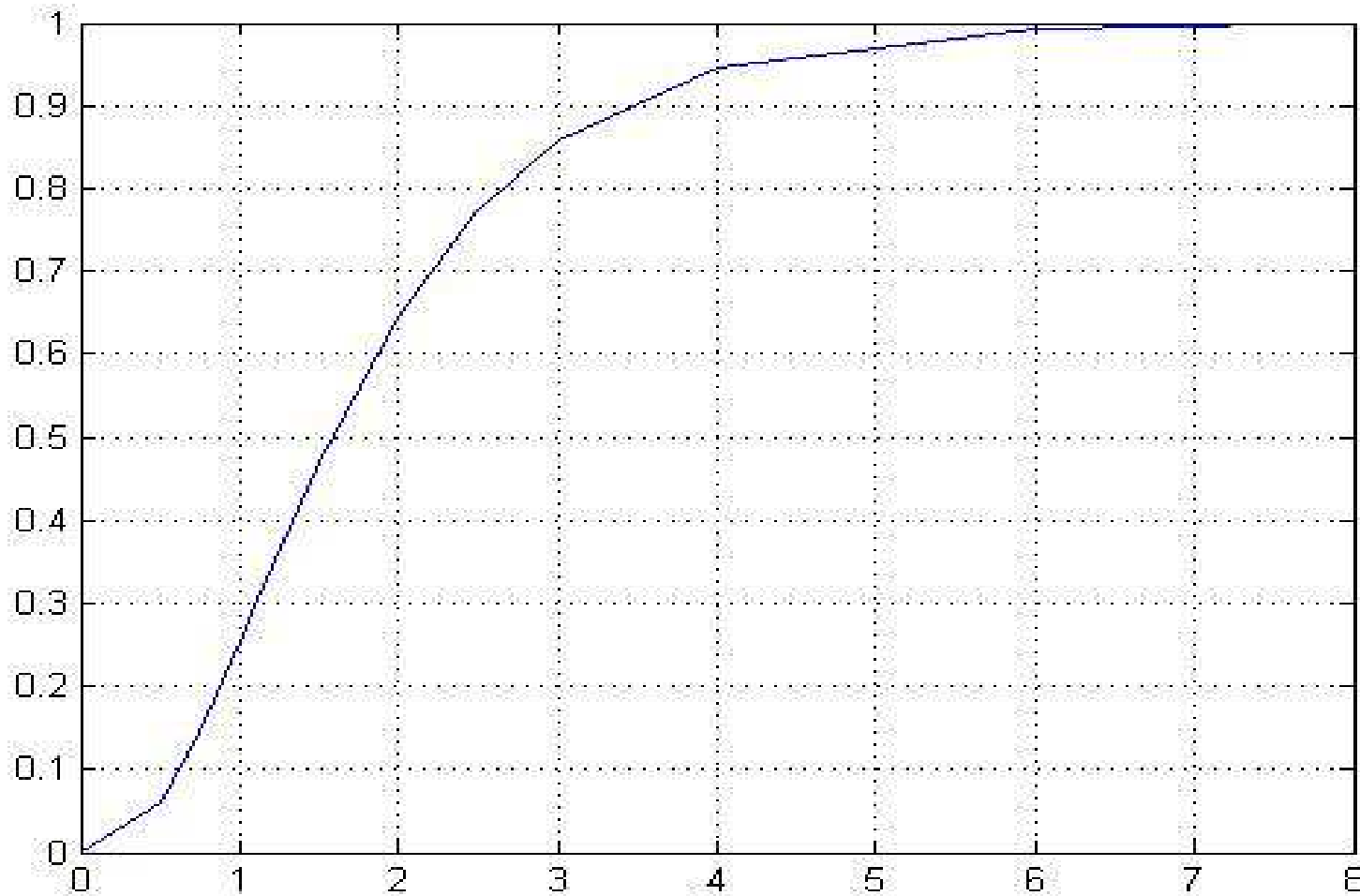
1 - Un essai d'identification nous donne la réponse suivante :

|      |   |      |      |      |     |      |      |      |      |      |      |
|------|---|------|------|------|-----|------|------|------|------|------|------|
| t    | 0 | 0,5  | 0,75 | 1    | 1,1 | 1,5  | 2    | 2,5  | 3    | 4    | 6    |
| h(t) | 0 | 0,06 | 0,15 | 0,25 | 0,3 | 0,47 | 0,65 | 0,77 | 0,86 | 0,95 | 0,99 |

- Tracer la réponse,
- Donner le modèle de la fonction de transfert
- Identifier par la méthode de Strejc

# Identification des processus

---



# Identification des processus

Donner le modèle de la fonction de transfert

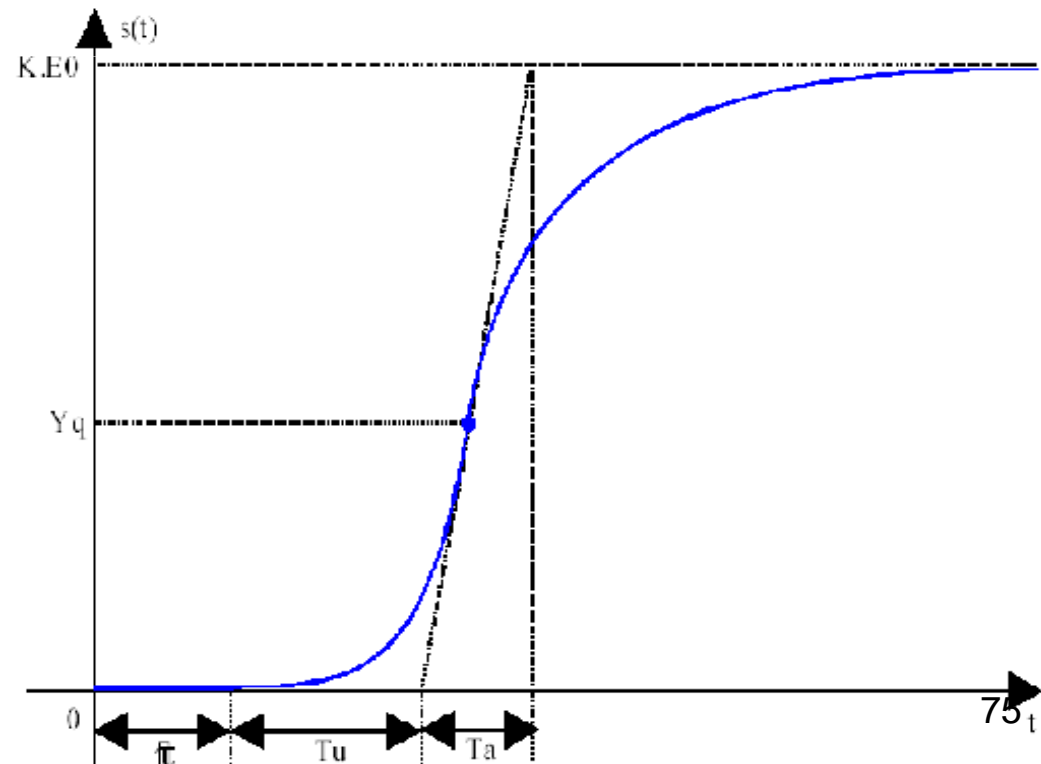
| n  | Ta/T  | Tu/T  | Tu/Ta |
|----|-------|-------|-------|
| 1  | 1     | 0     | 0     |
| 2  | 2.718 | 0.282 | 0.104 |
| 3  | 3.695 | 0.805 | 0.218 |
| 4  | 4.463 | 1.425 | 0.319 |
| 5  | 5.119 | 2.100 | 0.410 |
| 6  | 5.7   | 2.81  | 0.49  |
| 7  | 6.2   | 3.55  | 0.57  |
| 8  | 6.7   | 4.31  | 0.64  |
| 9  | 7.2   | 5.08  | 0.71  |
| 10 | 7.6   | 5.87  | 0.77  |

$$G(p) = \frac{K e^{-\tau'p}}{(1 + T_p)^2}$$

Tu = 0.4 sec

Ta = 2.35 sec

Tu/Ta = 0.1702



# Identification des processus

---

- Calcul des paramètres du modèle

$$T_u = 0.4 \text{ sec}$$

$$T_a = 2.35 \text{ sec}$$

$$T_u/T_a = 0.1702$$

$$n=2$$

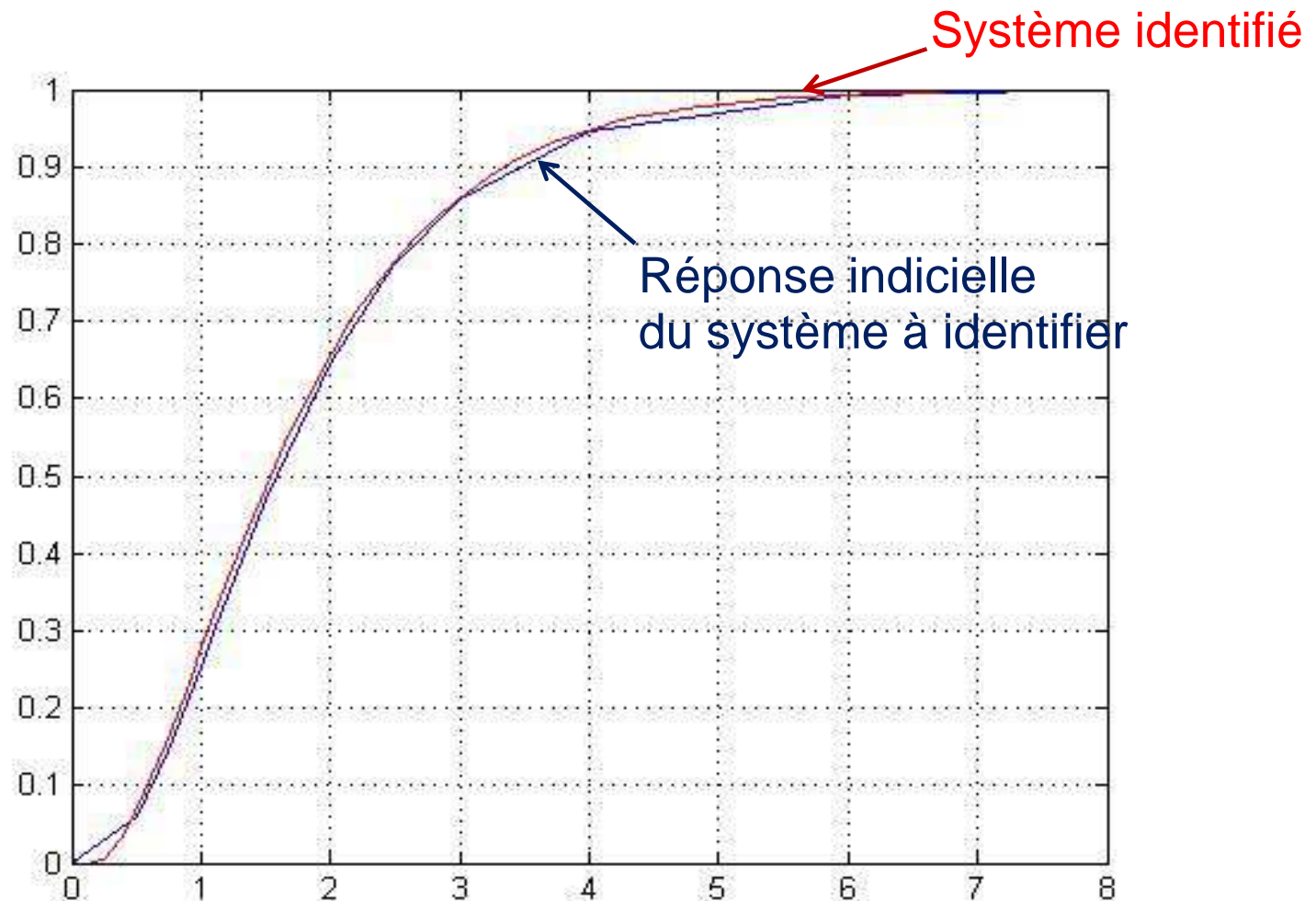
$$T = 0.82 \text{ sec}$$

$$\tau' = 0.156 \text{ sec}$$

$$G(p) = \frac{1 \cdot e^{-0.156 p}}{(1 + 0.82 p)^2}$$

# Identification des processus

- Vérification du modèle



# Identification des processus

---

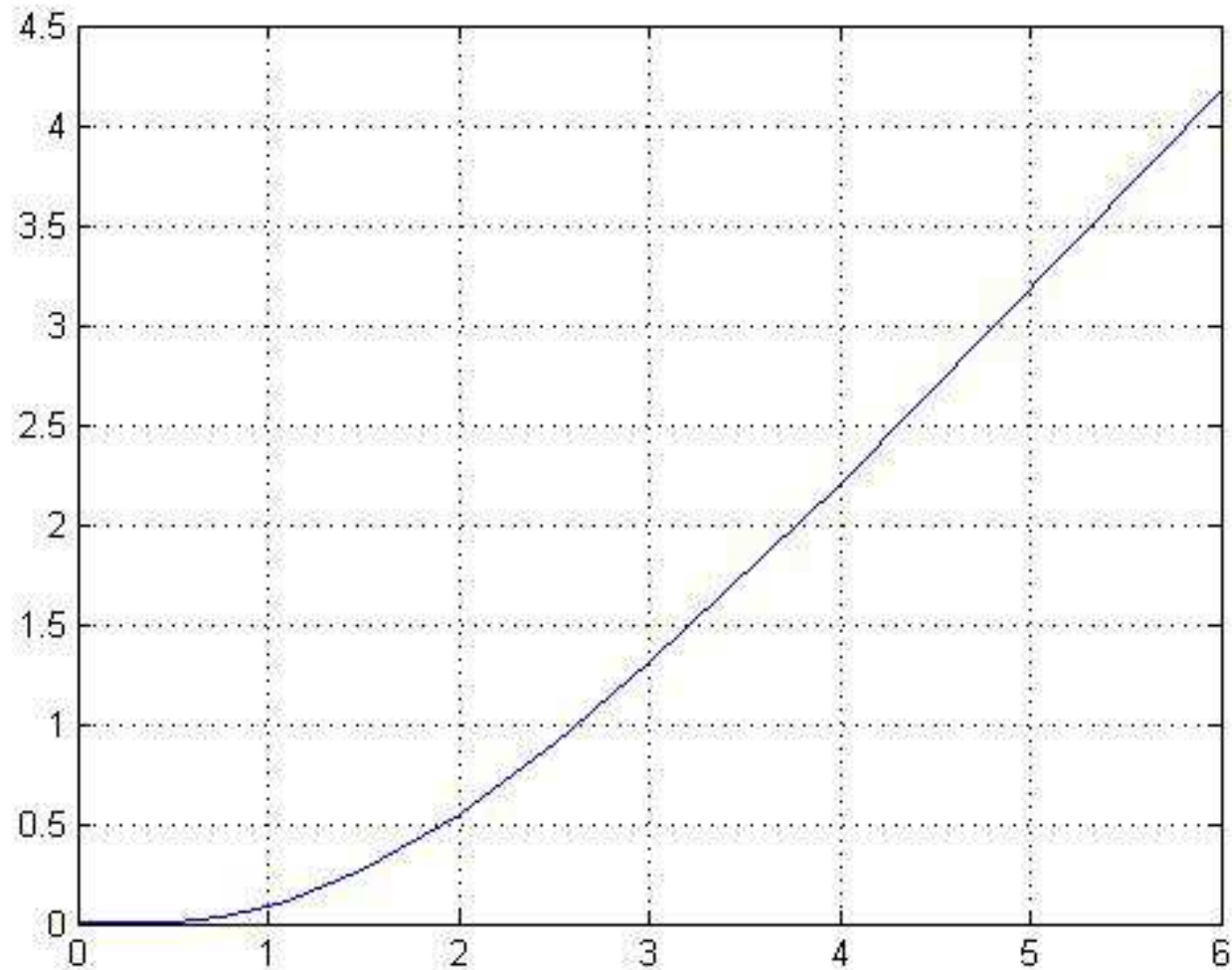
*2 - Un 2ème essai d'identification, avec un autre type de générateur, nous donne la réponse suivante :*

|             |   |      |      |      |      |      |      |     |      |      |      |
|-------------|---|------|------|------|------|------|------|-----|------|------|------|
| <b>t</b>    | 0 | 0,5  | 0,75 | 1    | 1,1  | 1,5  | 2    | 2,5 | 3    | 4    | 6    |
| <b>h(t)</b> | 0 | 0,01 | 0,03 | 0,08 | 0,12 | 0,27 | 0,55 | 0,9 | 1,31 | 2,21 | 4,17 |

- tracer la réponse.
- identifier avec le modèle adéquat.

# Identification des processus

---



# Identification des processus

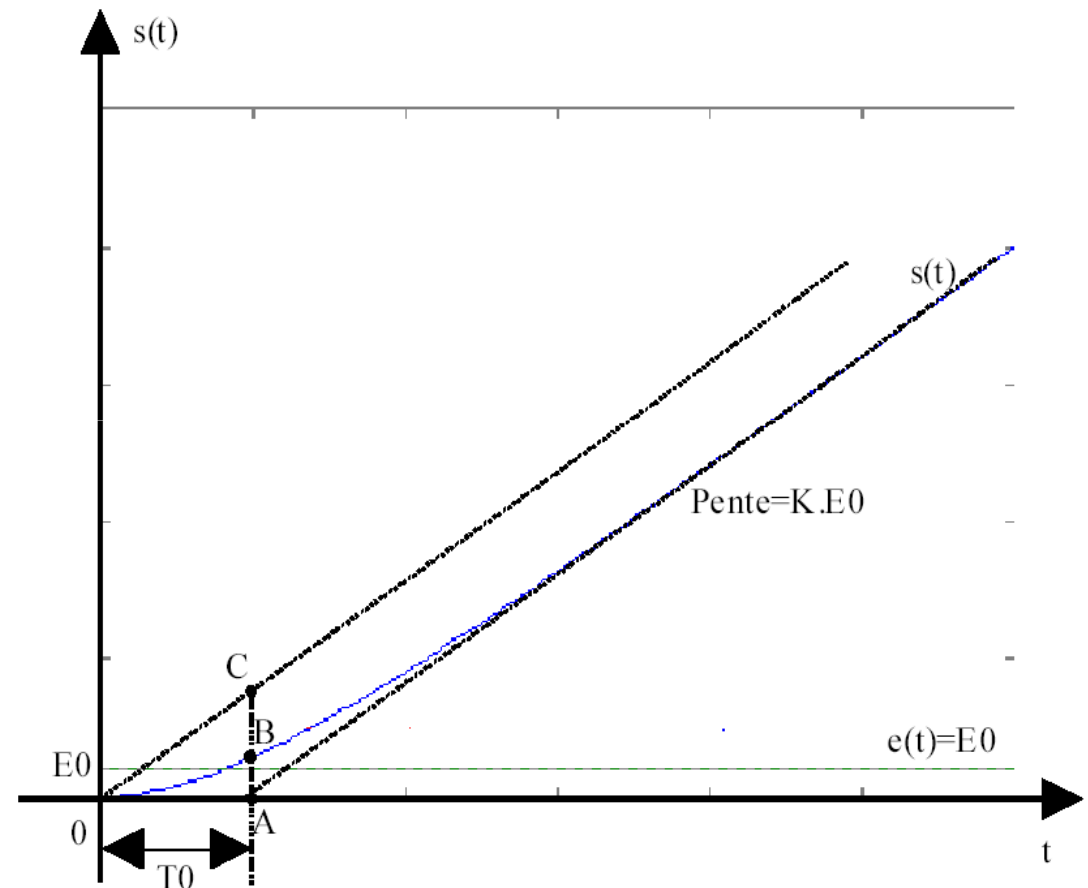
$$G(p) = \frac{K}{p \cdot (1 + T \cdot p)^n}$$

| n | AB/AC |
|---|-------|
| 1 | 0.368 |
| 2 | 0.271 |
| 3 | 0.224 |
| 4 | 0.195 |
| 5 | 0.175 |

$$T_0 = 1.75 \text{sec}$$

$$AB/AC = 0.242$$

$$n=2$$





# Identification des processus

---

- Calcul des paramètres du modèle

$$T_0 = 1.75 \text{ sec}$$

$$AB/AC = 0.242$$

$$n = 2$$

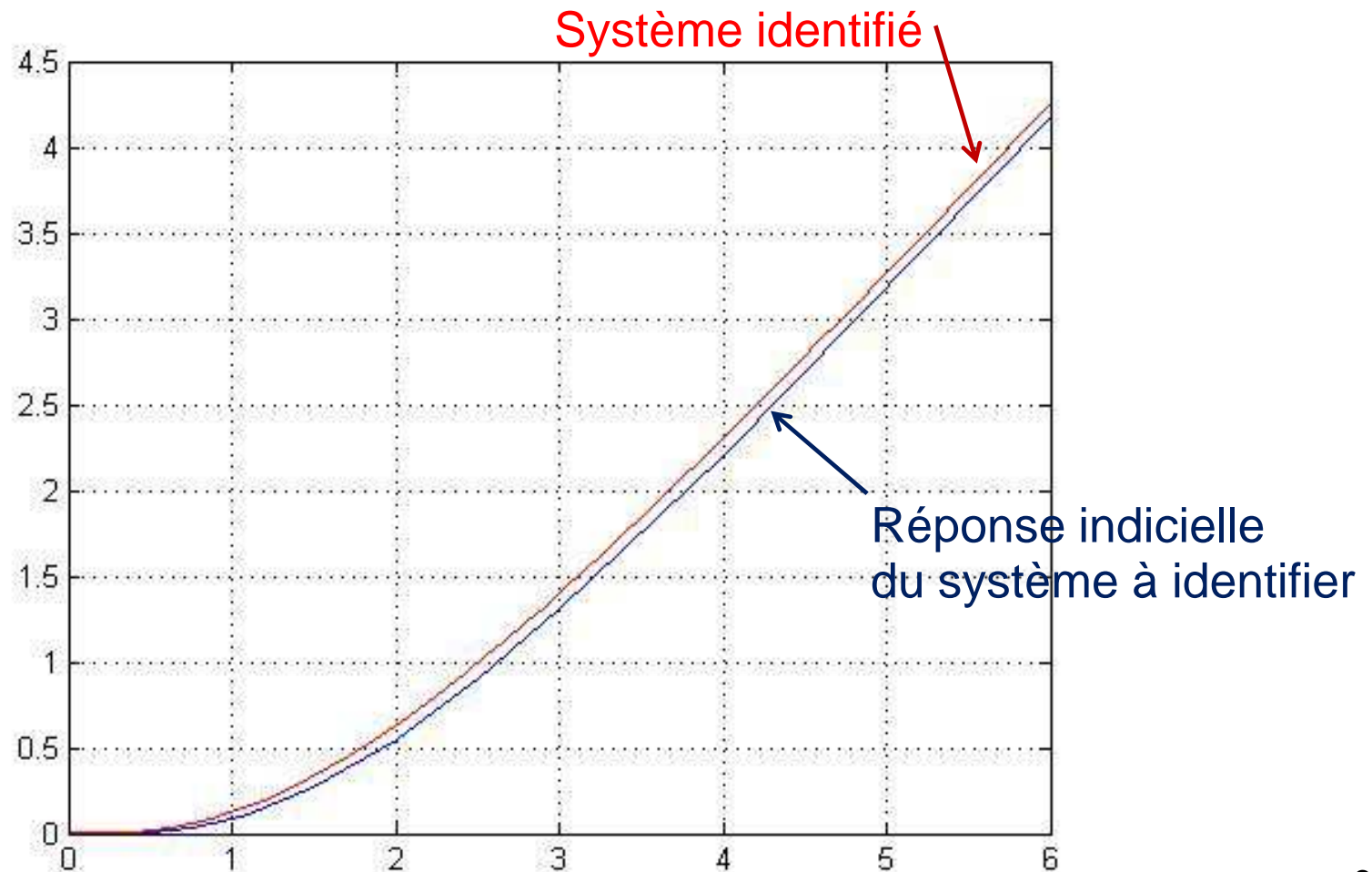
$$K = 1 \text{ (pente)}$$

$$T = T_0 / n = 0.875 \text{ sec}$$

$$G(p) = \frac{1}{p \cdot (1 + 0.875 p)^2}$$

# Identification des processus

- Vérification du modèle



# CHAPITRE 8

---

## Correction des Systèmes

# Correction des Systèmes

---

## • Introduction :

- Nous avons vu comment quantifier le comportement d'un système et ce dernier chapitre va permettre de régler au mieux le processus.
  
- L'amélioration des performances d'un système sont :
  - Un meilleur temps de montée,
  - Modifier l'amplitude du premier dépassement,
  - Minimiser, voir annuler l'erreur statique,
  - Avoir une meilleure stabilité en modifiant les marges de gain et de phase,
  - ...

# Correction des Systèmes

---

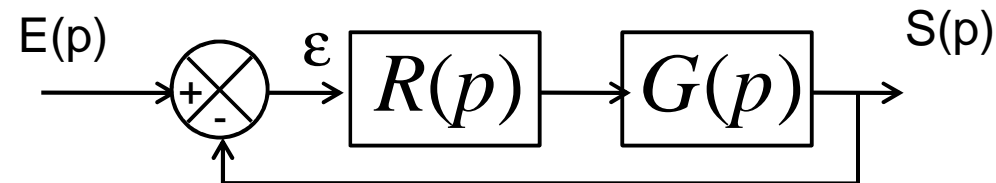
## • Introduction :

- Un processus à commander possède ses propres caractéristiques qui ne peuvent être modifiées. L'étude à suivre est alors la suivante :
  - Trouver un modèle pour le système,
  - Identifier les paramètres du modèle,
  - Calcul des erreurs,
  - Étude de la stabilité.
- Néanmoins, la régulation des systèmes passent par la recherche du compromis : *stabilité–rapidité–précision*.

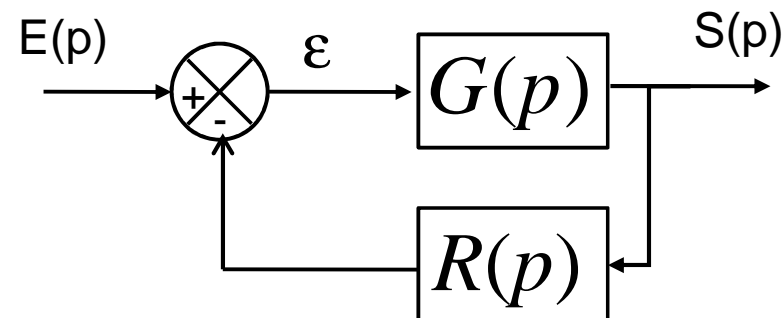
# Correction des Systèmes

- Structure des correcteurs :

- Correcteur Série ou en Cascade :

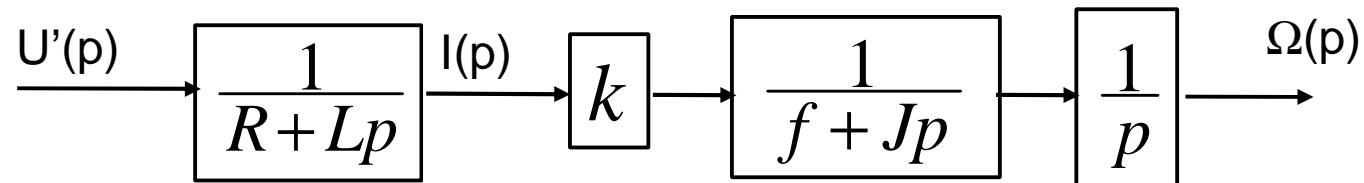


- Correcteur Parallèle :

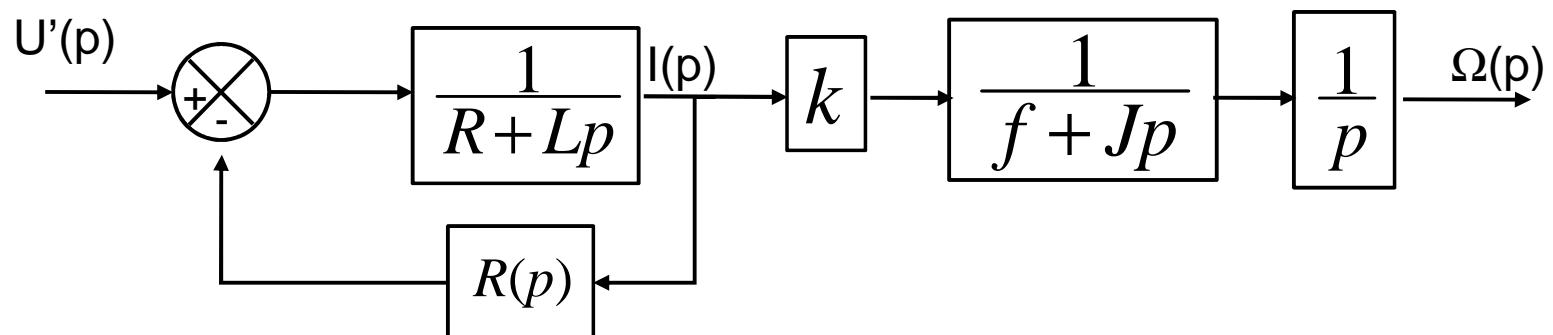


# Correction des Systèmes

- En reprenant l'exemple du moteur à courant continu du chapitre 2, nous avons :

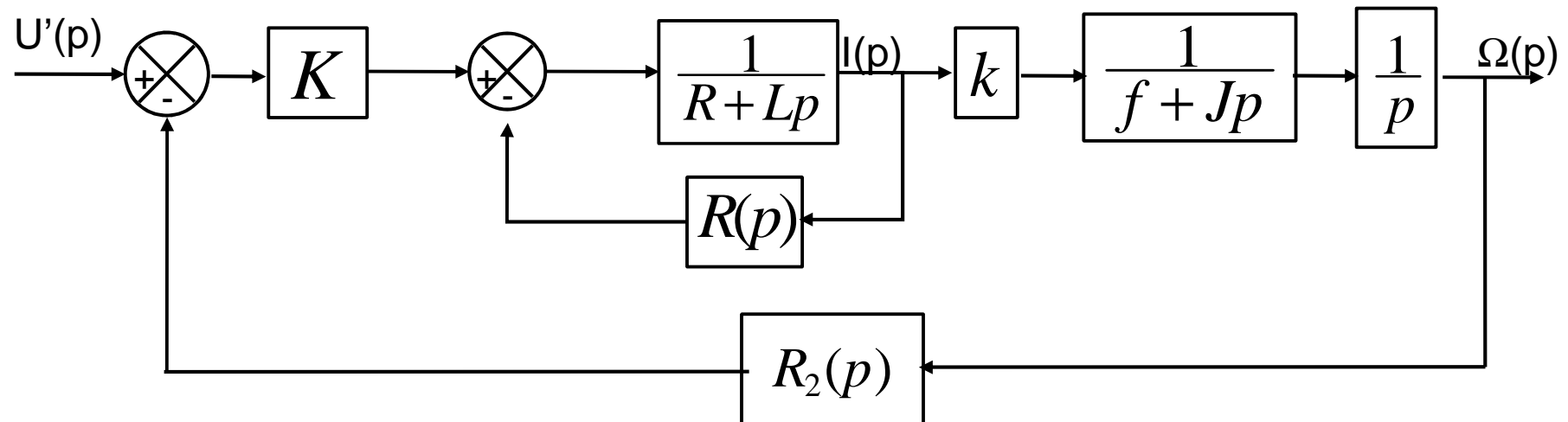


Nous pouvons mettre en place un asservissement en intensité pour contrôler le courant et éviter une surintensité :



# Correction des Systèmes

Nous pouvons aussi asservir le moteur en vitesse :



- Dans tous les cas, le problème consiste à calculer les correcteurs  $R(p)$  pour arriver aux performances souhaitées.



# Correction des Systèmes

---

- Études des différents régulateurs :

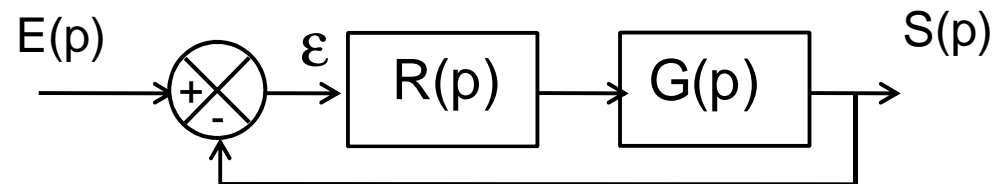
- Introduction :

Les différents correcteurs ou régulateurs sont :

- Proportionnel P,
  - Proportionnel Intégral PI,
  - Proportionnel Intégral Dérivée PID,
  - A avance de phase (garde un gain constant mais avance la phase),
  - A retard de phase (garde un gain constant mais diminue la phase afin d'avoir plus de dynamique),
  - Flou,
  - ...

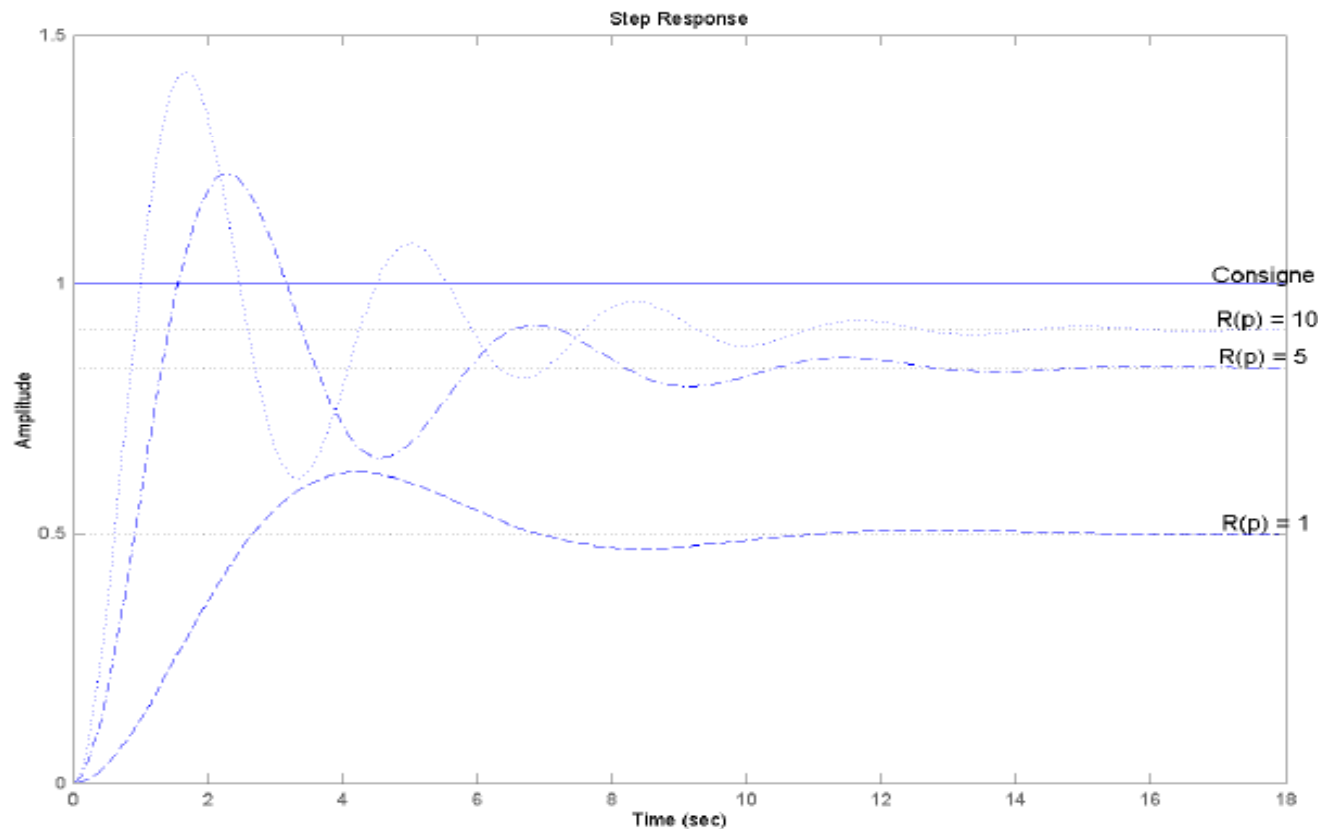
# Correction des Systèmes

- Dans la majorité des applications, ce sont des correcteurs séries qui sont mis en place. Chaque correcteur a ses caractéristiques propres. Le choix dépendra donc du résultat que nous voulons obtenir.
- ACTION PROPORTIONNELLE :  $R(p) = K$



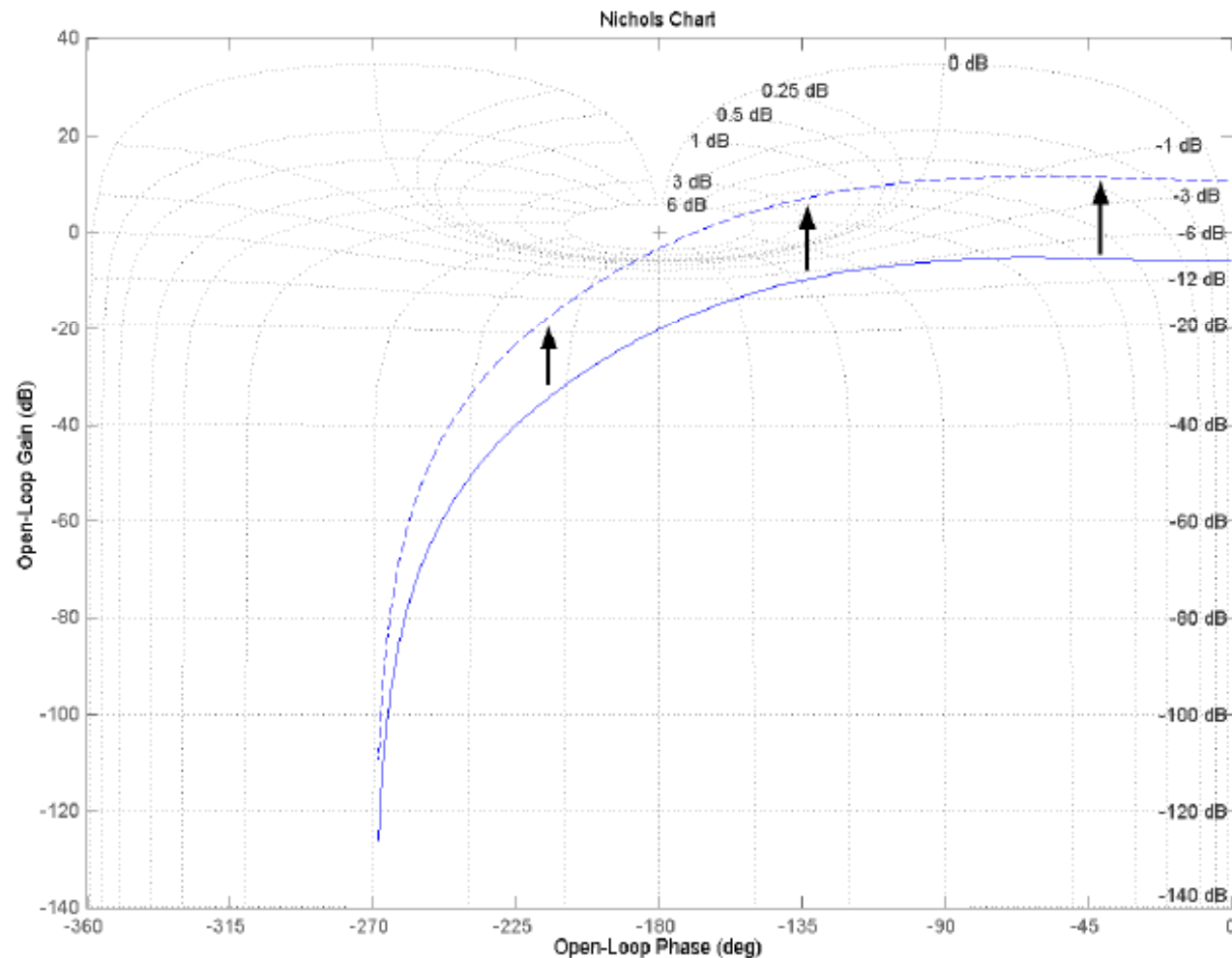
# Correction des Systèmes

- ACTION PROPORTIONNELLE :  $R(p) = K$ 
  - ◆ Son action intervient sur les 3 performances :
    - L'augmentation de  $K$  provoque une instabilité,
    - La précision augmente.



# Correction des Systèmes

- ACTION PROPORTIONNELLE :  $R(p) = K$



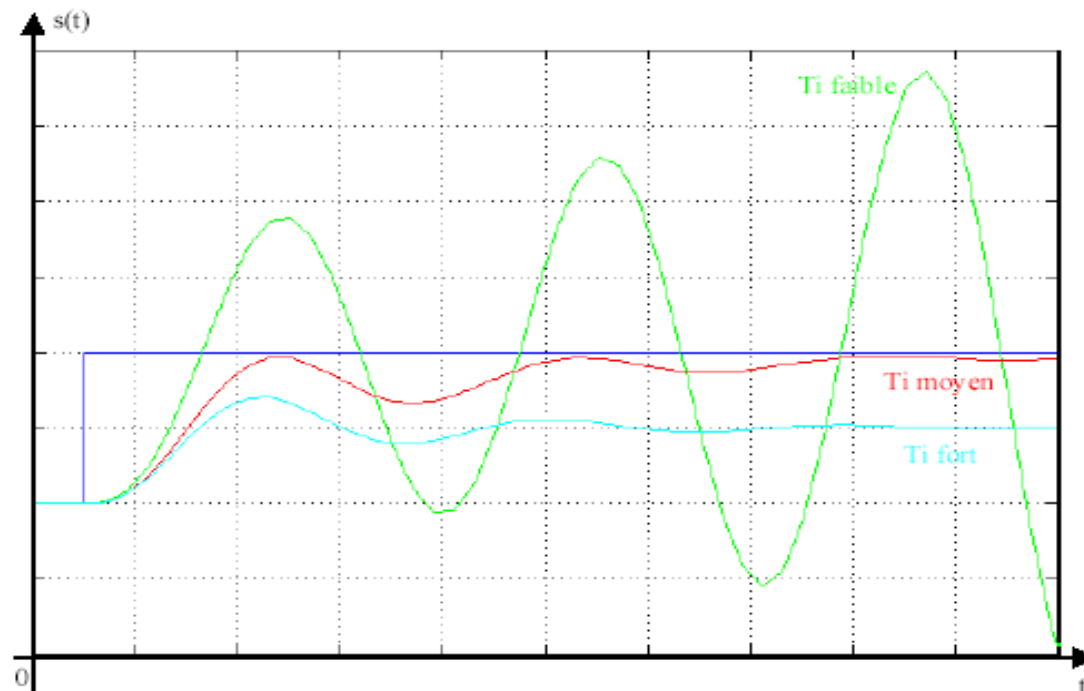
# Correction des Systèmes

---

- ACTION PROPORTIONNELLE :  $R(p) = K$ 
  - ♦ Un correcteur proportionnel a le gros avantage d'être simple à mettre en place et facile à modifier.
  - ♦ Si  $K$  est faible ( $K < 1$ ), nous avons une translation vers le bas du lieu de Bode ou Black. La stabilité est donc augmentée, mais l'analyse temporelle montre un asservissement lent et « mou ».
  - ♦ Si  $K$  est important, la dynamique sera meilleure, l'erreur sera réduite, mais nous pouvons observer une translation vers le haut du lieu de Bode ou Black. Dans ce cas, nous nous approchons du point critique, pouvant entraîner une instabilité selon la valeur de  $K$

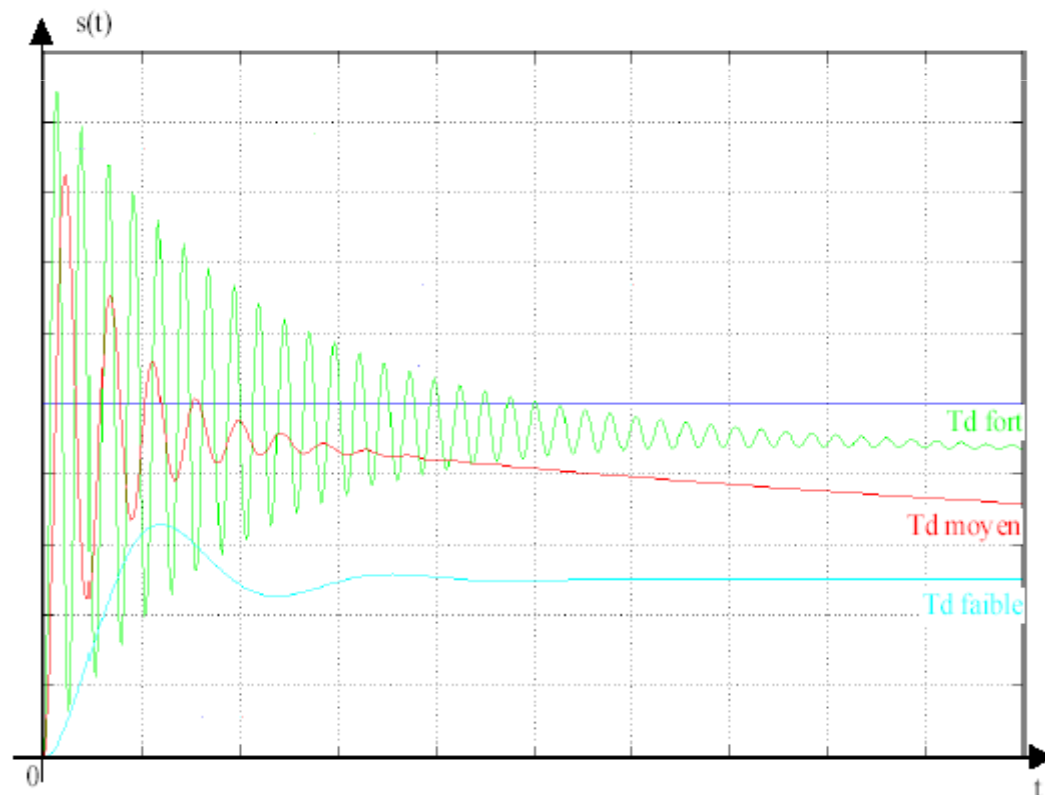
# Correction des Systèmes

- ACTION INTEGRALE :  $R(p) = \frac{1}{T_i p}$ 
  - ♦ Cette action amplifie les basses fréquences sans en modifier les hautes. En calculant la phase de cette action, nous pouvons remarquer qu'elle ajoute  $-\pi/2$ . Ceci entraîne une translation horizontale du lieu de Black, pouvant rendre instable le système.



# Correction des Systèmes

- ACTION DERIVEE :  $R(p) = T_d p$ 
  - ♦ Cette action permet de stabiliser un système qui ne possède pas une marge de phase suffisante avec l'ajout de  $\pi/2$ . Nous pouvons alors augmenter le gain (donc la rapidité) sans déstabiliser le système.



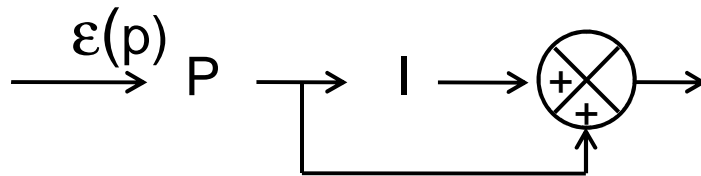
# Correction des Systèmes

- Association des différentes actions

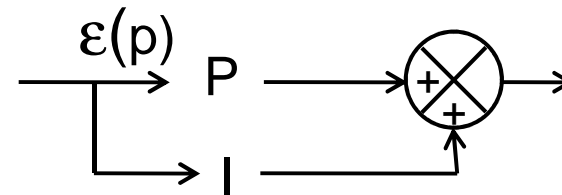
Il y a possibilité d'associer les différentes actions afin de créer des régulateurs : PI, PD ou PID.

- **CORRECTEUR PI :**

Ce correcteur peut se présenter soit en série, soit en parallèle :



$$R(p) = G_r \left( 1 + \frac{1}{T_i p} \right)$$



$$R(p) = G_r + \frac{1}{T_i p}$$



# Correction des Systèmes

---

## ▪ CORRECTEUR PI :

- ♦ Le correcteur série est le plus souvent utilisé. Le correcteur PI permet d'annuler l'erreur de position d'un système de classe 0 ou d'améliorer la précision. Cependant il ralentit la réponse du système.
- ♦ Pour bénéficier de l'amélioration de la précision et éviter de perdre en stabilité, il faut régler  $1/T_i$  aussi bas que possible.

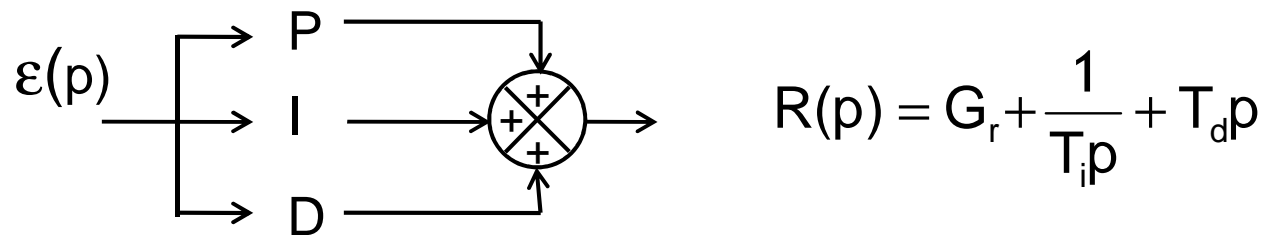
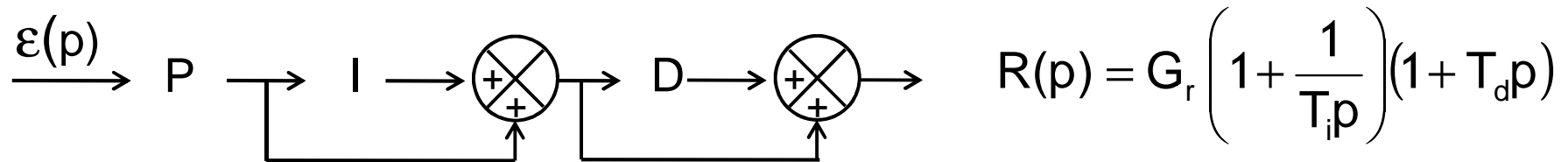
## ▪ CORRECTEUR PID :

- ♦ Il est intéressant d'associer les actions D et I puisqu'elles concernent des domaines de fréquences très différents (HF pour D et BF pour I).

# Correction des Systèmes

## ▪ CORRECTEUR PID :

- ♦ Les correcteurs PID se présente soit en série, soit en parallèle.



# Correction des Systèmes

---

## ▪ CORRECTEUR PID :

Avec ce type de correcteur, en réglant correctement les paramètres de  $T_i$ ,  $T_d$  et  $G_r$ , nous avons :

- L'action D apporte une avance de phase et une amplification des HF. La marge de phase augmente ainsi que la rapidité par augmentation de la bande passante.
- L'action I permet l'amplification des BF mais va retarder la phase.

La version théorique du PID étudié n'est pas vraiment réalisable. En effet, le circuit dérivateur pur ne peut être construit. On réalise alors une forme filtrée du PID.

# Correction des Systèmes

---

- Méthodes pratiques :

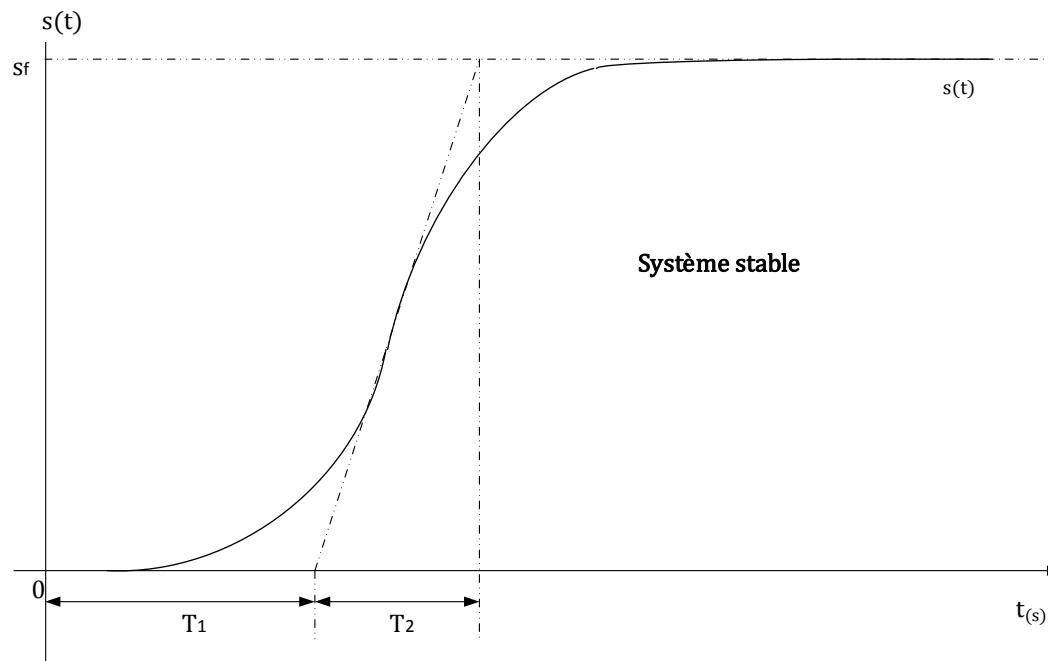
Afin de trouver pratiquement les valeurs de  $K$ ,  $T_i$  et  $T_d$ , deux méthodes sont proposées suivant que le système peut être étudié en boucle fermée ou non.

Dans le cas de la boucle fermée, nous utilisons la méthode de Ziegler-Nichols. Avec un essai en boucle ouverte, nous observons si la réponse est « évolutive » ou « non évolutive ».

# Correction des Systèmes

## ■ Etude en boucle ouverte

La réponse indicielle de notre système peut être « évolutive » ou « non évolutive » :



Réponse non évolutive: le point d'inflexion de la réponse nous permet de définir les valeurs de  $T_2$  et  $T_1$ .

Du rapport  $T_2/T_1$ , nous pouvons en déduire le correcteur à mettre en place.

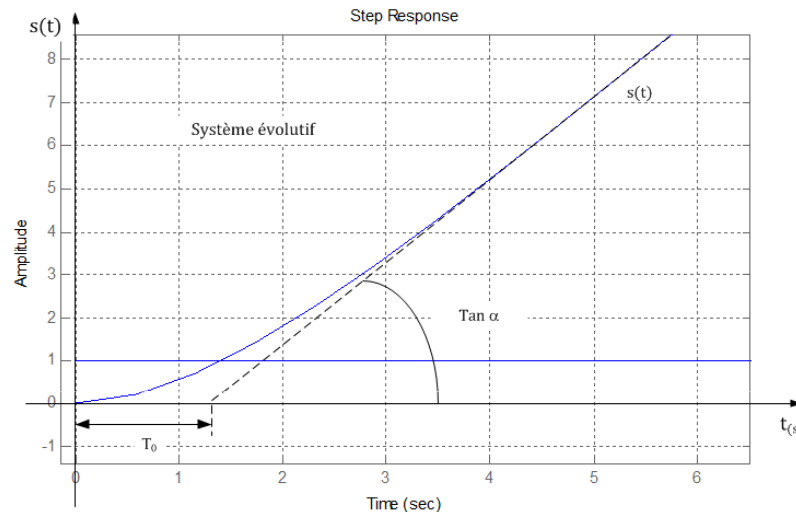
# Correction des Systèmes

| Choix du type de régulateur en fonction de la "réglabilité" |               |       |        |         |              |
|---|---------------|-------|--------|---------|--------------|
| "Réglabilité" : $\frac{T_2}{T_1}$                           | <2            | 2 à 5 | 5 à 10 | 10 à 20 | >20          |
| Régulateur  | Limite du PID | PID   | PI     | P       | Tout ou rien |

Nous pouvons en déduire les valeurs du correcteur :

| Calcul des actions P, I et D pour les systèmes stables |                                       |                                       |                                       |  |   |   |
|--|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|--|---|---|
| Modes<br>Action  | P                                     | PI série                              | PI parallèle                          | PID série                              | PID<br>parallèle                              | PID mixte                                     |
| K  | $\frac{0,8 \cdot T_2}{K_s \cdot T_1}$ | $\frac{0,8 \cdot T_2}{K_s \cdot T_1}$ | $\frac{0,8 \cdot T_2}{K_s \cdot T_1}$ | $\frac{0,85 \cdot T_2}{K_s \cdot T_1}$ | $\frac{\frac{T_2}{T_1} + 0,4}{1,2 \cdot K_s}$ | $\frac{\frac{T_2}{T_1} + 0,4}{1,2 \cdot K_s}$ |
| $T_i$  | Maxi.                                 | $T_2$                                 | $\frac{K_s \cdot T_1}{0,8}$           | $T_2$                                  | $\frac{K_s \cdot T_1}{0,75}$                  | $T_2 + 0,4 \cdot T_1$                         |
| $T_d$  | 0                                     | 0                                     | 0                                     | $0,4 \cdot T_1$                        | $\frac{0,35 \cdot T_2}{K_s}$                  | $\frac{T_2 \cdot T_1}{T_1 + 2,5 \cdot T_2}$   |

# Correction des Systèmes



Réponse évolutive:

$$\tan \alpha = \frac{\Delta y}{\Delta t}$$

$$K_i = \frac{\tan \alpha}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta t \Delta x}$$

Avec  $K_i$  gain statique instable en BO

De la valeur de  $K_i.T_0$ , nous en déduisons le type de correcteur à mettre en place :

- $K_i.T_0 < 0.05$  Correcteur Tout ou rien
- $0.05 < K_i.T_0 < 0.1$  Correcteur P
- $0.1 < K_i.T_0 < 0.2$  Correcteur PI
- $0.2 < K_i.T_0 < 0.5$  Correcteur PID
- $0.5 < K_i.T_0$  Limite de correcteur PID

# Correction des Systèmes

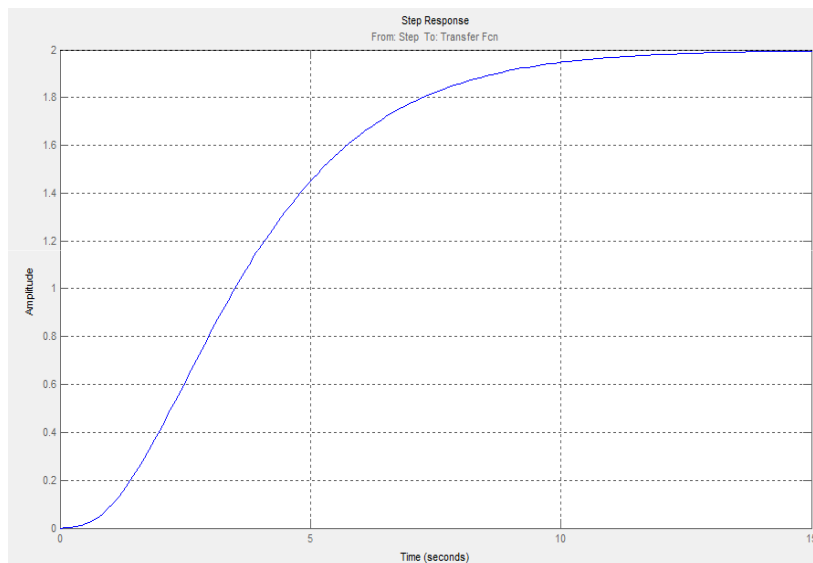
Nous en déduisons les valeurs du correcteur :

| Calcul des actions P, I et D pour les systèmes évolutif |                             |                             |                                |                              |                                |                             |
|---|-----------------------------|-----------------------------|--------------------------------|------------------------------|--------------------------------|-----------------------------|
| Modes<br>Action   | P                           | PI série                    | PI parallèle                   | PID série                    | PID parallèle                  | PID mixte                   |
| K   | $\frac{0,8}{K_i \cdot T_0}$ | $\frac{0,8}{K_i \cdot T_0}$ | $\frac{0,8}{K_i \cdot T_0}$    | $\frac{0,85}{K_i \cdot T_0}$ | $\frac{0,9}{K_i \cdot T_0}$    | $\frac{0,9}{K_i \cdot T_0}$ |
| $T_i$   | Maxi.                       | $5 \cdot T_0$               | $\frac{K_i \cdot T_0^2}{0,15}$ | $4,8 \cdot T_0$              | $\frac{K_i \cdot T_0^2}{0,15}$ | $5,2 \cdot T_0$             |
| $T_d$   | 0                           | 0                           | 0                              | 0                            | $\frac{0,35}{K_i}$             | $0,4 \cdot T_0$             |

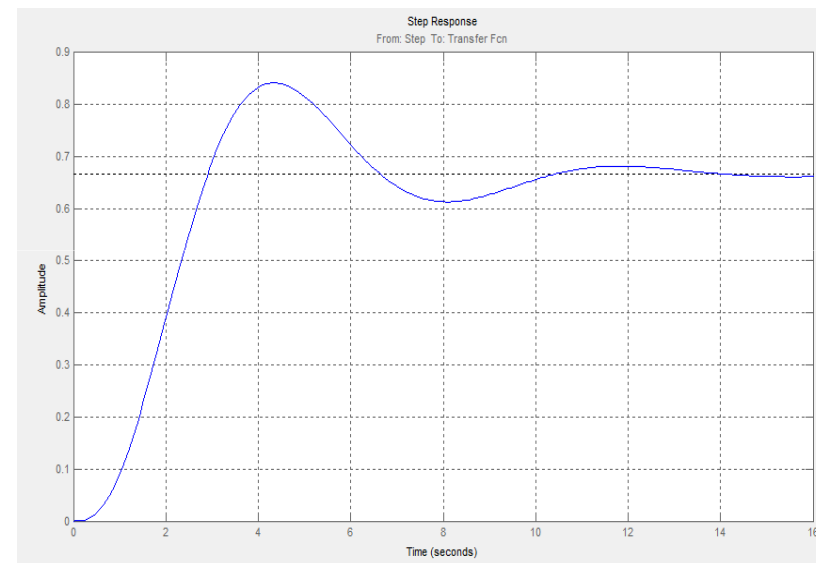


# Correction des Systèmes

Exercice C-16 : Soit un système inséré dans une boucle d'asservissement à retour unitaire.

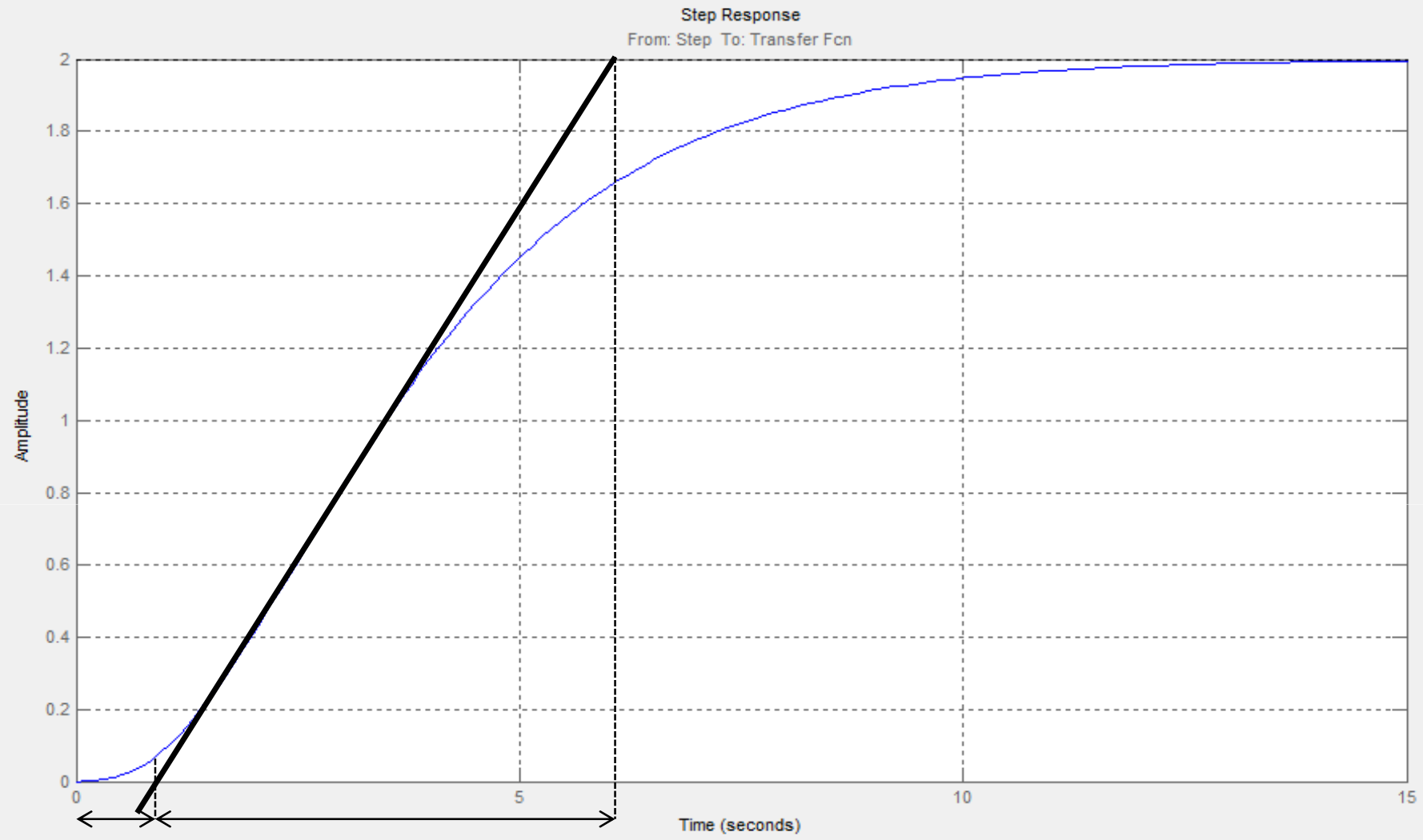


Réponse indicielle en BO



Réponse indicielle en BF

**Question 1** : A l'aide du tracé de ces réponses, déterminer le correcteur le plus adapté.



$$T_1 = 0,88s$$

$$T_2 = 4,82s$$

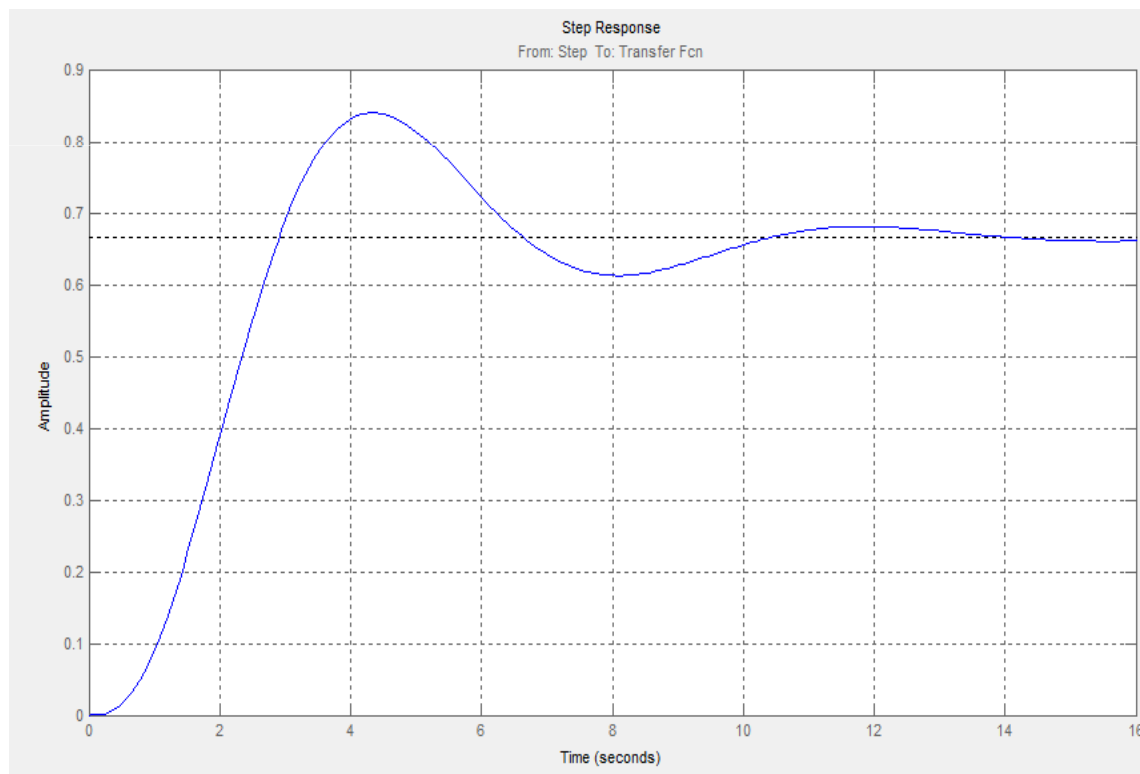
$$\Rightarrow \frac{T_2}{T_1} = 5,47$$

$\Rightarrow$  Correcteur PI

# Correction des Systèmes

**Question 2 :** A l'aide des réponses obtenues, déterminer la valeur de l'erreur finale de ce système ainsi asservi et le temps de réponse à 5%.

Système asservi en retour unitaire donc  $\varepsilon(p) = E(p) - S(p)$   
avec  $E(p)$  échelon unitaire



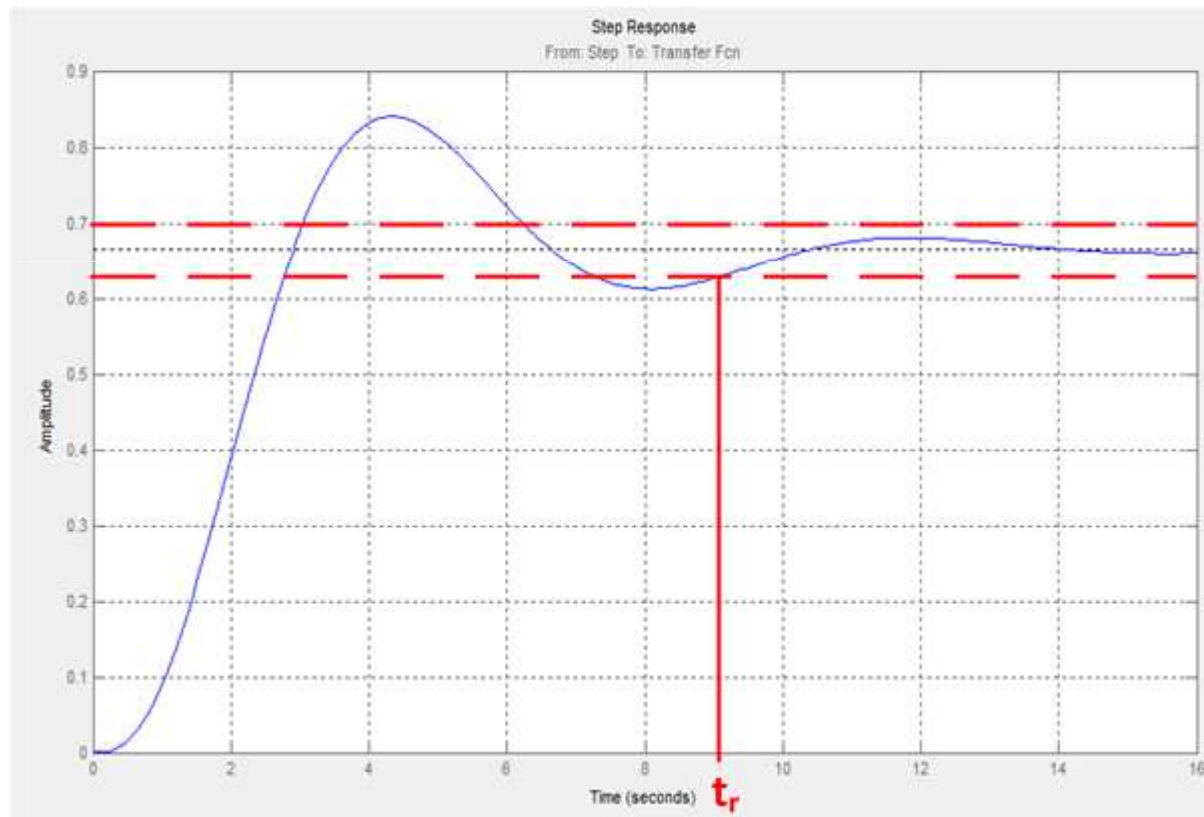
$$s_f = \lim_{t \rightarrow \infty} s(t) = 0,67$$



$$\varepsilon_f = 0,33$$

# Correction des Systèmes

**Question 2 :** A l'aide des réponses obtenues, déterminer la valeur de l'erreur finale de ce système ainsi asservi et le temps de réponse à 5%.



*temps de réponse à 5%*  
 $t_r = 9s$

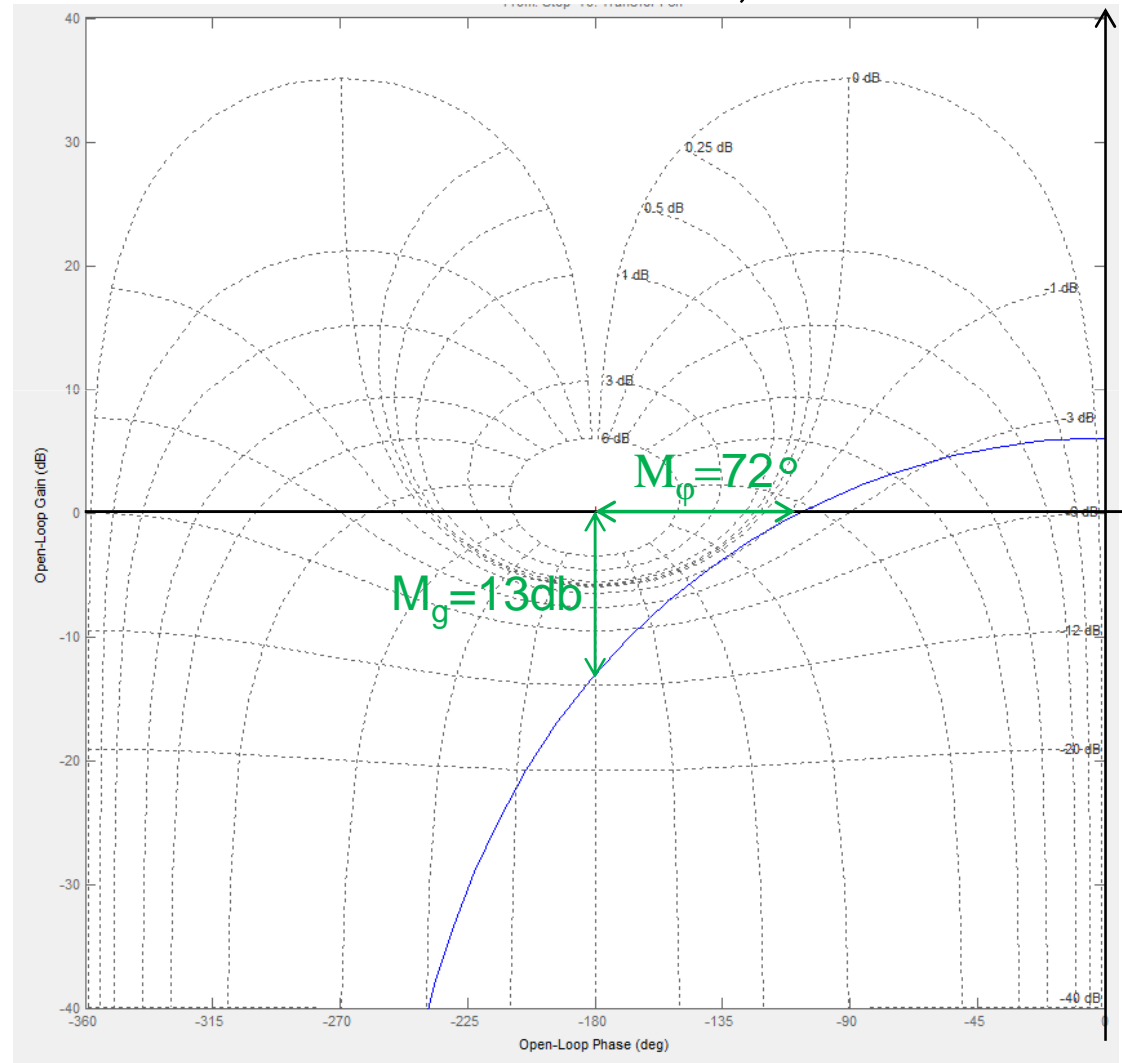
# Correction des Systèmes

**Question 3 :** En utilisant le tableau ci-dessous, tracer le lieu de black de ce système en boucle ouverte. Le système est-il stable ? Déterminer graphiquement la marge de gain et de phase du système.

| $\omega(\text{rad/s})$ | 0 | 0.5 | 0.75 | 1    | 1.5  | 2.5  |
|------------------------|---|-----|------|------|------|------|
| Gain en db             | 6 | 1   | -3   | -7   | -14  | -25  |
| Phase en °             | 0 | -98 | -130 | -154 | -184 | -215 |

# Correction des Systèmes

**Question 3 :** En utilisant le tableau ci-dessous, tracer le lieu de black de ce système.

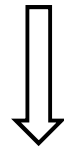


# Correction des Systèmes

---

**Question 4 :** Nous allons maintenant insérer un correcteur proportionnel  $K=3.5$ . Tracer le lieu de black de ce système ainsi corrigé. En étudiant également la réponse indicielle de ce système (voir Figure 119), qu'en déduisez-vous sur ce correcteur?

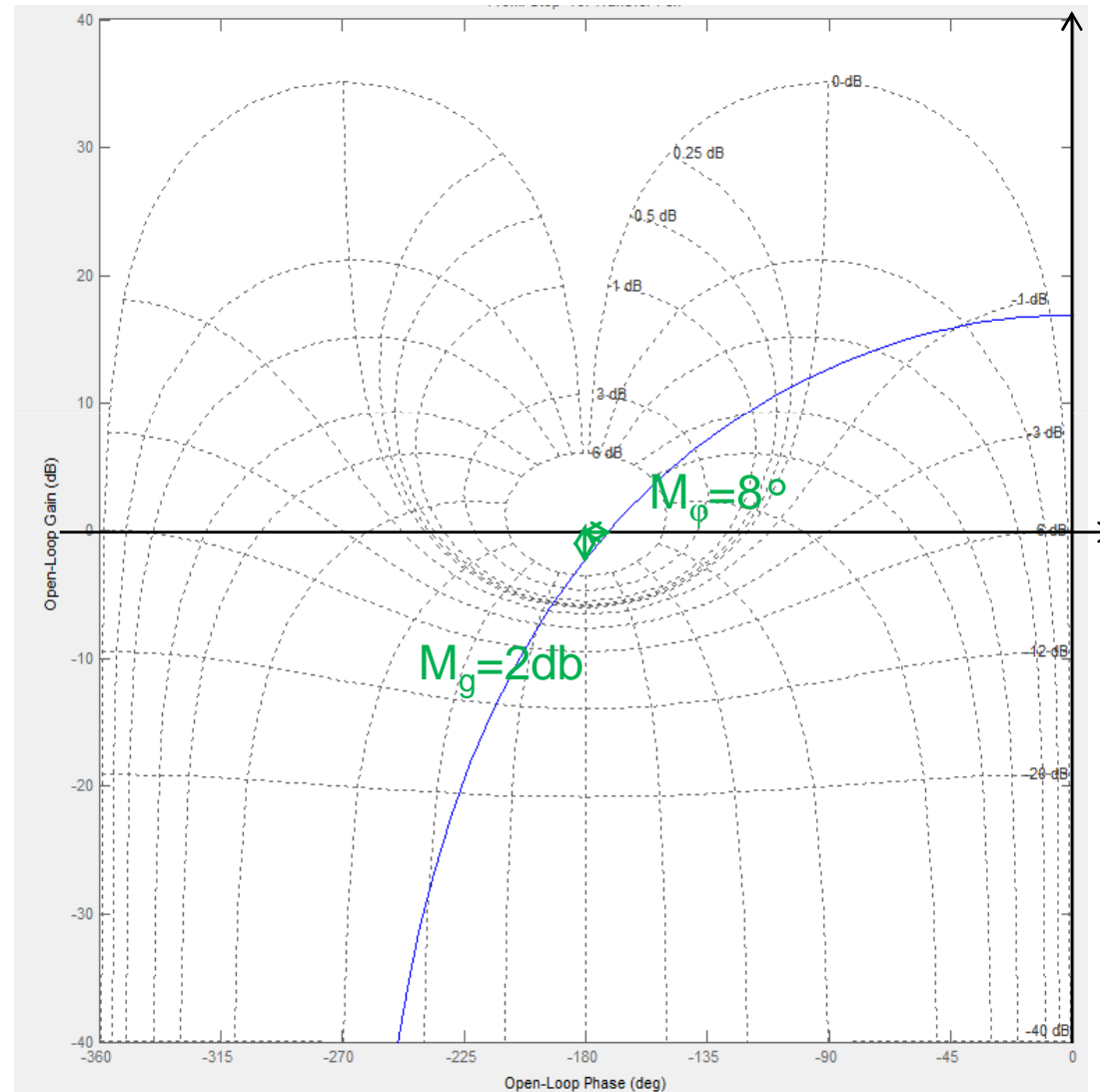
Insertion d'un gain  $k = 3,5$



Translation du lieu de black de  $20\log K$  soit 10,9db vers le haut

# Correction des Systèmes

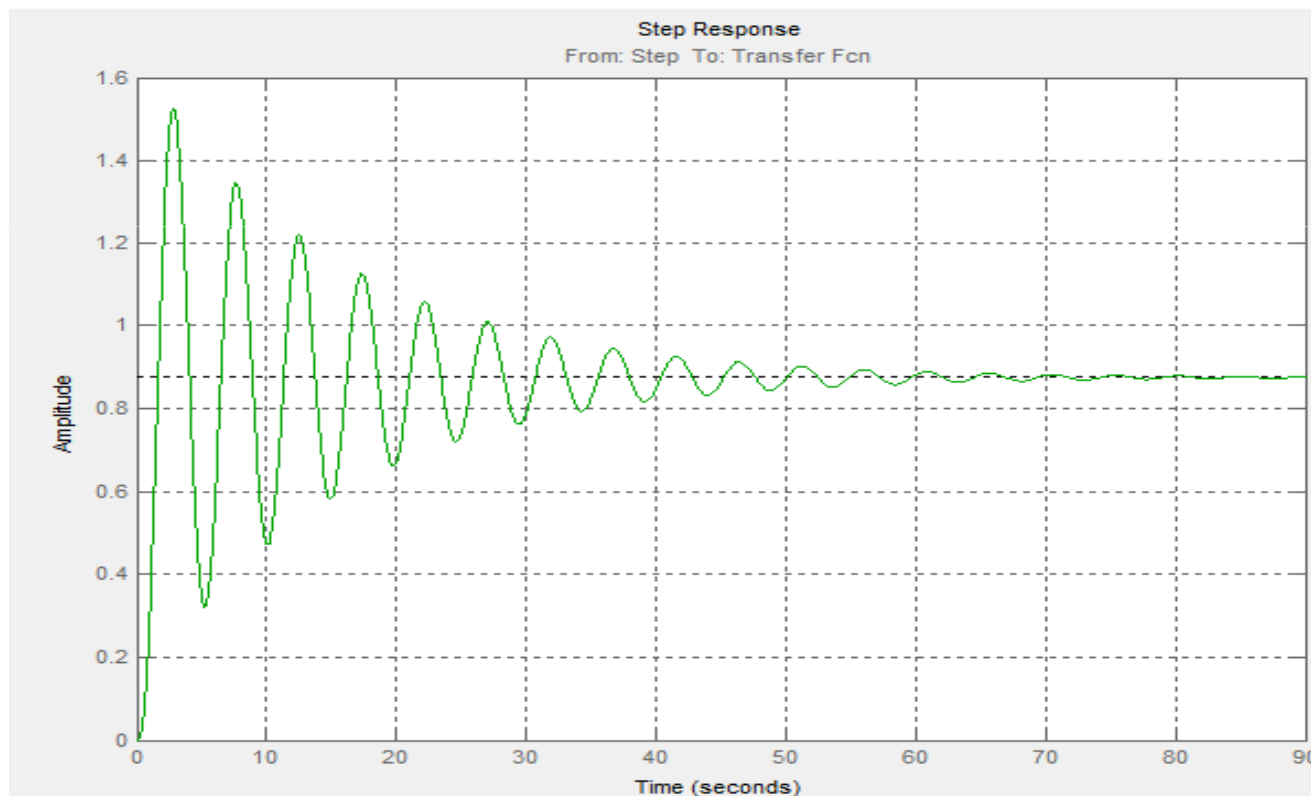
Lieu de black  
du système corrigé





# Correction des Systèmes

Réponse indicielle du système en BF avec un correcteur proportionnel  $k=3,5$



$$s_f = \lim_{t \rightarrow \infty} s(t) = 0,87$$



$$\varepsilon_f = 0,13$$

# Correction des Systèmes

**Question 5 :** Nous allons insérer dans la boucle d'asservissement le correcteur PI série suivant :

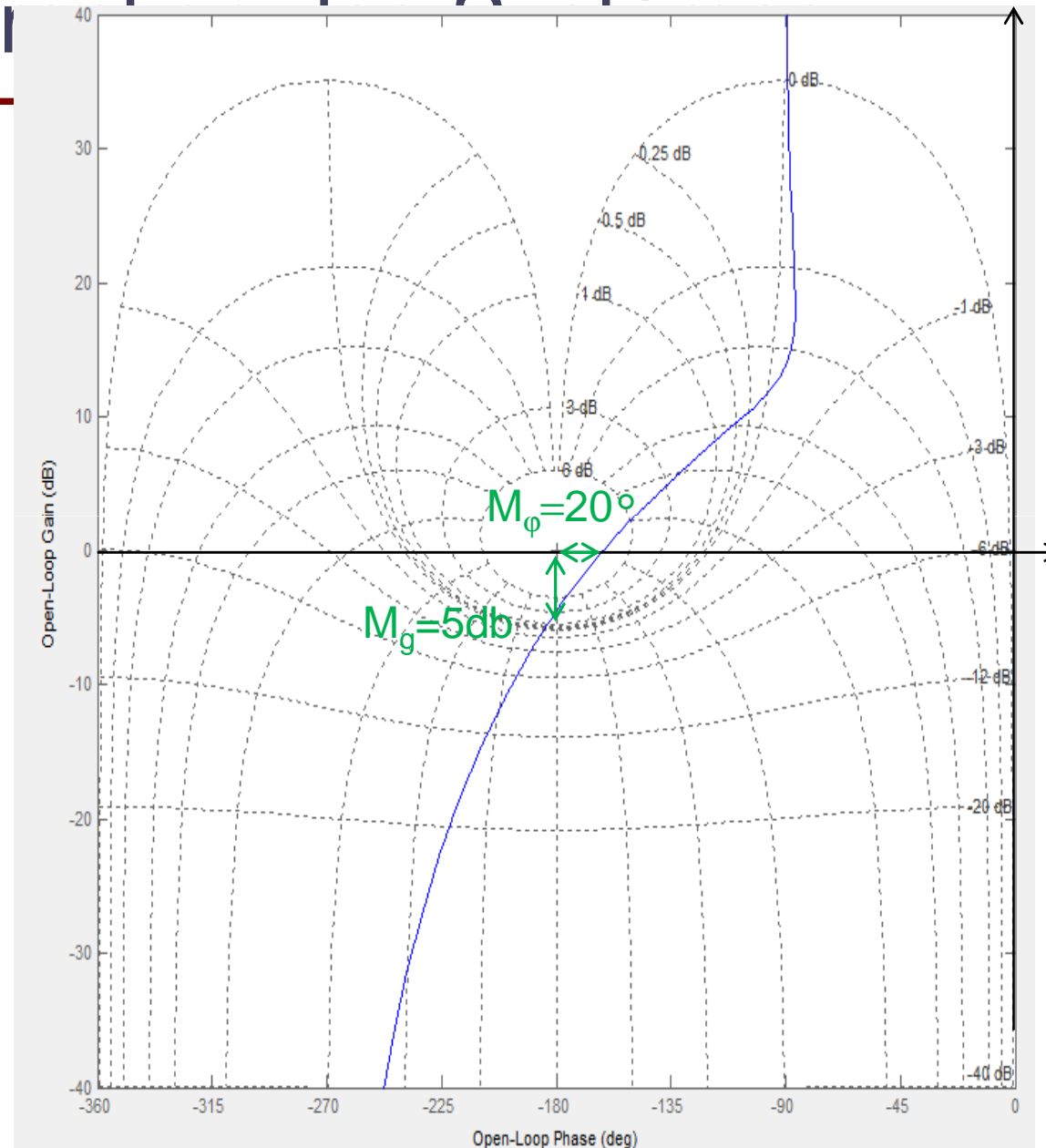
$$R(p) = 2 \left( 1 + \frac{1}{5 \cdot p} \right)$$

$$R(j\omega) = 2 \left( 1 + \frac{1}{5j\omega} \right) = 2 \left( \frac{1 + 5j\omega}{5j\omega} \right) \quad \left\{ \begin{array}{l} R(\omega) = 2 \left( \frac{\sqrt{1 + 25\omega^2}}{5\omega} \right) \\ \varphi_R(\omega)^\circ = \arctan 5\omega - 90 \end{array} \right.$$

| $\omega(\text{rad/s})$          | 0        | 0.5  | 0.75 | 1    | 1.5  | 2.5  |
|---------------------------------|----------|------|------|------|------|------|
| $R(\omega)$ en db               | $\infty$ | 6,7  | 6,31 | 6,2  | 6,1  | 6    |
| $\varphi_R(\omega)$ en °        | -90      | -22  | -15  | -11  | -8   | -5   |
| Module du système corrigé en db | $\infty$ | 7,7  | 3,31 | -0,8 | -7,9 | -19  |
| Phase du système corrigé en db  | -90      | -120 | -145 | -165 | 192  | -220 |

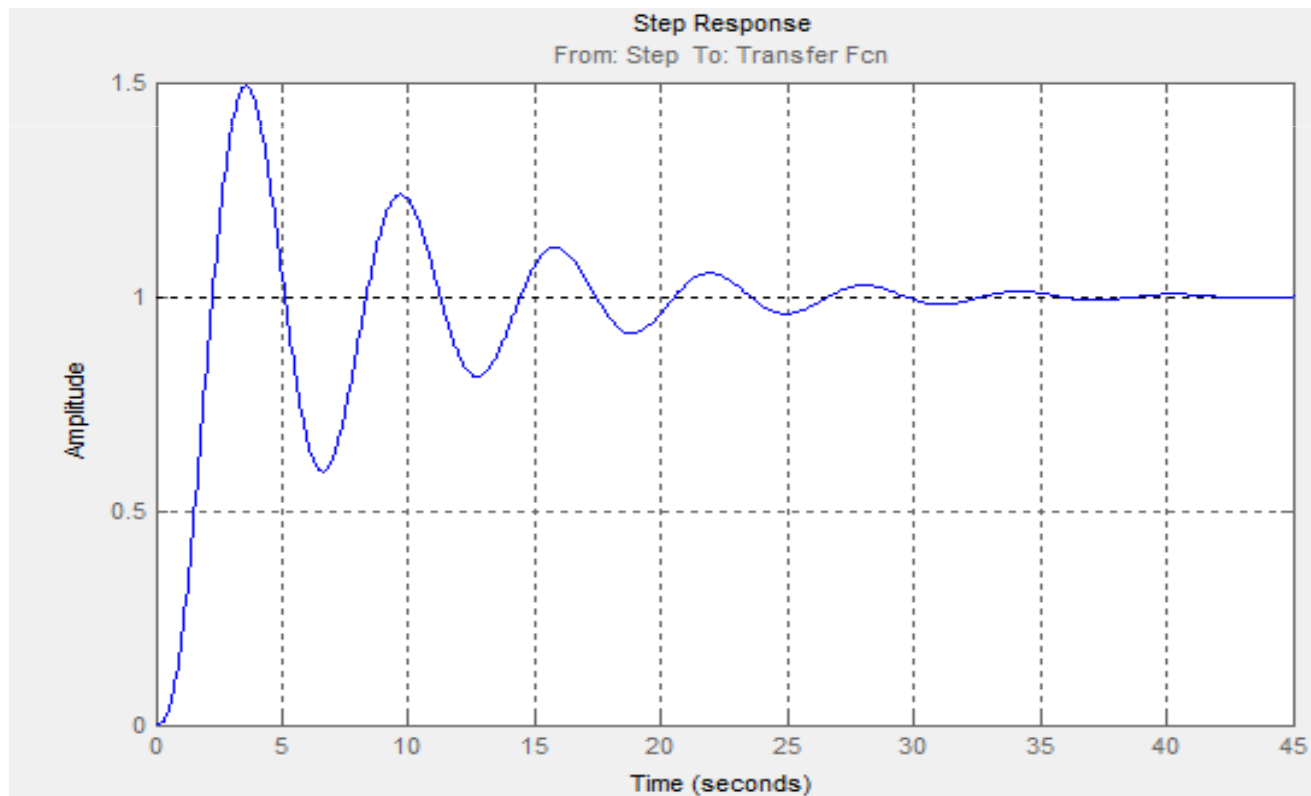
# Correction

Lieu de Black  
du système corrigé :



# Correction des Systèmes

Réponse indicielle du système en BF avec le correcteur PI



$$s_f = \lim_{t \rightarrow \infty} s(t) = 1$$



$$\varepsilon_f = 0$$