CSI3/CIR3 avril 2019
Sans Document
Avec Calculatrice

Devoir Surveillé
Analyse des Signaux et des Images

Les réponses seront expliquées, justifiées et correctement rédigées
L'évaluation tiendra compte de cette rédaction et du raisonnement.

Exercice 1

On considère un signal x(t) ayant les caractéristiques suivantes :

- Le spectre de x(t) peut être considéré comme négligeable en dehors de l'intervalle [50 Hz – 210 Hz]
- Les valeurs d'amplitude de x(t) sont comprises entre – 2 Volts et + 4 Volts

On souhaite numériser ce signal x(t) (échantillonnage, quantification et codage en binaire) avec un objectif :

- de limiter le plus possible le nombre de bits obtenus
- d'avoir une erreur de quantification au maximum égale à 0,05 Volts

Pour chacune de ces étapes préciser les traitements ou méthodes à mettre en place en chiffrant les paramétrages nécessaires.

Exercice 2

Soit un signal s(t) inconnu.
On sait que sa transformée de Fourier S(υ) présente l'expression suivante :

$$S(\upsilon)=\begin{cases}3 & si \quad |\upsilon|\leq 2Hz\\ 0 & ailleurs\end{cases}$$

1. Calculer l'expression de s(t) et le représenter graphiquement.

2. Quelle est l'énergie totale du signal s(t) ?

3. On échantillonne le signal s(t) à la fréquence d'échantillonnage Fe = 4Hz.
    a. Représenter le signal échantillonné $s_e(t)$
    b. Calculer l'expression de sa transformée de Fourier et représenter le spectre d'amplitude
    c. Conclure

4. On s'intéresse de nouveau au signal s(t).
   Ce signal s(t) est transmis dans un canal qui se comporte comme un filtre h(t) de réponse impulsionnelle :
   $$h(t)=a.\delta(t-T_0)$$
   Déterminer la transformée de Fourier du signal en sortie du filtre.

FORMULAIRE

Formules Trigo:

cos(a+b) = cos(a).cos(b) – sin(a).sin(b)
cos(a-b) = cos(a).cos(b) + sin(a).sin(b)
sin(a+b) = sin(a).cos(b) + sin(b).cos(a)
sin(a-b) = sin(a).cos(b) – sin(b).cos(a)

cos(a).cos(b) = ½ (cos(a+b) + cos(a-b))
sin(a).sin(b) = ½ (cos(a-b) – cos(a+b))
cos(a).sin(b) = ½ (sin(a+b) – sin(a-b))
sin(a).cos(b) = ½ (sin(a+b) + sin(a-b))

Définition de la convolution y(t)=x(t)*h(t)

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(u)h(t-u)du = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t-u)h(u)du$$

Transformée de Fourier d'un Dirac décalé

$$\delta(t-t_0) \xrightarrow{TF} e^{-2\pi j \upsilon t_0}$$

Quelques propriétés de la Transformée de Fourier :

- Changement d'échelle :
$$x(t) \xrightarrow{TF} X(\upsilon)$$
$$x(kt) \xrightarrow{TF} \frac{1}{|k|} X\left(\frac{\upsilon}{k}\right)$$

- Dualité : $x(t) \leftrightarrow X(\upsilon)$ alors $X(t) \leftrightarrow x(-\upsilon)$

- Dérivation :
  - Par rapport au temps
$$\left\| \begin{array}{l} x(t) \xrightarrow{TF} X(\upsilon) \\ \dfrac{d^n x(t)}{dt^n} \xrightarrow{TF} (2\pi j \upsilon)^n X(\upsilon) \end{array} \right.$$
  - Par rapport à la fréquence
$$\left\| \begin{array}{l} x(t) \xrightarrow{TF} X(\upsilon) \\ t^n x(t) \xrightarrow{TF} \dfrac{d^n X(\upsilon)}{d\upsilon^n} \dfrac{1}{(-2\pi j)^n} \end{array} \right.$$

Transformée de Fourier d'un peigne de Dirac

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t-nT) \quad \rightarrow \quad X(\upsilon) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T} \delta\left(\upsilon - \frac{n}{T}\right)$$

Définition de l'intercorrélation pour x(t) et y(t) d 'énergie finie

$$C_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) y^*(t-\tau) dt$$

Définition de l'intercorrélation pour x(t) et y(t) d 'énergie infinie et de puissance finie

$$C_{xy}(\tau) = \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} x(t) y^*(t-\tau) dt$$

Définition de la Transformée de Fourier Discrète (TFD) :

$$X\left(\nu = \frac{k}{NT_e}\right) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-\frac{2j\pi nk}{N}} \equiv X(k) \qquad k \in \{0,1,\ldots,N-1\}$$

Périodique de période N en k donc de période ν_e en ν

Expression matricielle de la TFD :

$$\begin{array}{cc}
 & \text{Colonne numéro n} \\
\begin{array}{l}\text{Ligne}\\ \text{Numéro}\\ \text{k}\end{array} &
\begin{bmatrix} X(0) \\ X(1) \\ \vdots \\ X(N-2) \\ X(N-1) \end{bmatrix} =
\begin{bmatrix}
1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\
1 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\vdots & \vdots & e^{-\frac{2i\pi nk}{N}} & \vdots & \vdots \\
1 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
1 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ \vdots \\ x(N-2) \\ x(N-1) \end{bmatrix}
\end{array}$$