FORMULAIRE

Formules Trigo :

cos(a+b) = cos(a).cos(b) – sin(a).sin(b)
cos(a-b) = cos(a).cos(b) + sin(a).sin(b)
sin(a+b) = sin(a).cos(b) + sin(b).cos(a)
sin(a-b) = sin(a).cos(b) – sin(b).cos(a)

cos(a).cos(b) = ½ (cos(a+b) + cos(a-b))
sin(a).sin(b) = ½ (cos(a-b) – cos(a+b))
cos(a).sin(b) = ½ (sin(a+b) – sin(a-b))
sin(a).cos(b) = ½ (sin(a+b) + sin(a-b))

Définition de la convolution y(t)=x(t)*h(t)

$$y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(u)h(t-u)du=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t-u)h(u)du$$

Décomposition en série de Fourier réelle et complexe + Relations entre an, bn et cn

$$x(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\left(2\pi n\frac{t}{T}\right)+b_n\sin\left(2\pi n\frac{t}{T}\right)$$

avec

$$a_0=\frac{2}{T}\int_T x(t)dt$$

$$a_n=\frac{2}{T}\int_T x(t)\cos\left(2\pi n\frac{t}{T}\right)dt$$

$$bn=\frac{2}{T}\int_T x(t)\sin\left(2\pi n\frac{t}{T}\right)dt$$

$$x(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_n e^{+2\pi j\frac{n}{T}t}$$

avec

$$c_n=\frac{1}{T}\int_T x(t)e^{-2\pi j\frac{n}{T}t}dt$$

$$c_0=\frac{a_0}{2}$$

$$c_n=\frac{1}{2}(a_n-jb_n)$$

$$c_{-n}=\frac{1}{2}(a_n+jb_n)=c_n^*$$

Quelques propriétés liées aux séries de Fourier

Dérivation :
Soit x(t) un signal périodique de période T et Xk ses coefficients de décomposition en série de Fourier complexe alors les coefficients de décomposition en série de Fourier complexe de la fonction :

$\frac{d^n x(t)}{dt^n}$ sont : $\left(2\pi jk \frac{1}{T}\right)^n X_k$

Quelques propriétés de la Transformée de Fourier :

- Changement d'échelle : $x(t) \xrightarrow{TF} X(\upsilon)$
  $x(kt) \xrightarrow{TF} \frac{1}{|k|} X\left(\frac{\upsilon}{k}\right)$

- Dualité : $x(t) \leftrightarrow X(\upsilon)$ alors $X(t) \leftrightarrow x(-\upsilon)$

- Dérivation :
  - Par rapport au temps
    $$x(t) \xrightarrow{TF} X(\upsilon)$$
    $$\frac{d^n x(t)}{dt^n} \xrightarrow{TF} (2\pi j\upsilon)^n X(\upsilon)$$
  - Par rapport à la fréquence
    $$x(t) \xrightarrow{TF} X(\upsilon)$$
    $$t^n x(t) \xrightarrow{TF} \frac{d^n X(\upsilon)}{d\upsilon^n} \frac{1}{(-2\pi j)^n}$$

Transformée de Fourier d'un peigne de Dirac

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT) \quad \rightarrow \quad X(\upsilon) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T} \delta\left(\upsilon - \frac{n}{T}\right)$$

Définition de l'intercorrélation pour x(t) et y(t) d 'énergie finie

$$C_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) y^*(t - \tau) dt$$

Définition de l'intercorrélation pour x(t) et y(t) d 'énergie infinie et de puissance finie

$$C_{xy}(\tau) = \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} x(t) y^*(t - \tau) dt$$

Définition de la Transformée de Fourier Discrète (TFD) :

$$X\left(\nu=\frac{k}{NT_e}\right)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)e^{-\frac{2j\pi nk}{N}}\equiv X(k) \qquad k\in\{0,1,\ldots,N-1\}$$

Périodique de période N en k donc de période ν_e en ν

Expression matricielle de la TFD :

Colonne numéro n

Ligne Numéro k

$$\begin{bmatrix} X(0) \\ X(1) \\ \vdots \\ X(N-2) \\ X(N-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & e^{-\frac{2i\pi nk}{N}} & \vdots & \vdots \\ 1 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ \vdots \\ x(N-2) \\ x(N-1) \end{bmatrix}$$

Expression de la fenêtre de Hanning calculée sur N points :

$$h(n)=0.5\left(1-\cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right)\right) \qquad \text{avec n=0,1,…,N-1}$$

Expression de la fenêtre de Hamming calculée sur N points :

$$h(n)=0.54-0.46.\cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right) \qquad \text{avec n=0,1,…,N-1}$$

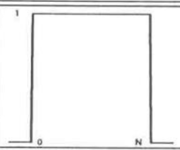
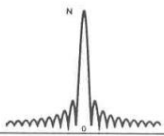
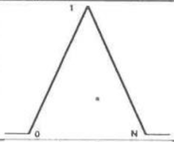
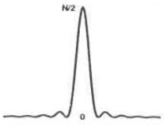
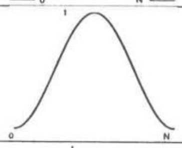
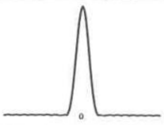
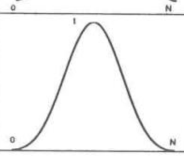
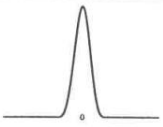
Nom		Représentation temporelle	Représentation fréquentielle	Largeur lob.princ.	Amp. relative $\frac{lob.princ}{lob.sec.}$
Rectangulaire				$\frac{2}{N}$	-13 dB
Triangulaire				$\frac{4}{N}$	-25 dB
Hamming				$\frac{4}{N}$	-41 dB
Blackman				$\frac{6}{N}$	-57 dB

Table 3 *Différents types de fenêtres et leurs caractéristiques*