Chapitre 1

Série de Fourrier

1.1 Introduction

Dans de nombreux domaines de la physique on rencontre l'étude de systèmes que l'on peut modéliser de la manière suivante (figure 1) :

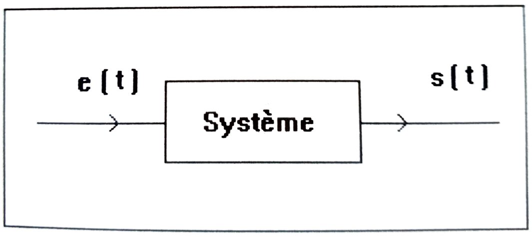

FIGURE 1.1 – Etude d'un système

Une modélisation plus poussée conduit à envisager des systèmes dits « linéaires » qui ont entre autres propriétés celle de *superposition*, c'est-à-dire que le signal de sortie $s(t)$ dû à l'existence de plusieurs signaux d'entrées est égal à la somme des signaux de sorties dus à chacun des signaux d'entrées pris isolément. La figure 2 illustre cette propriété.

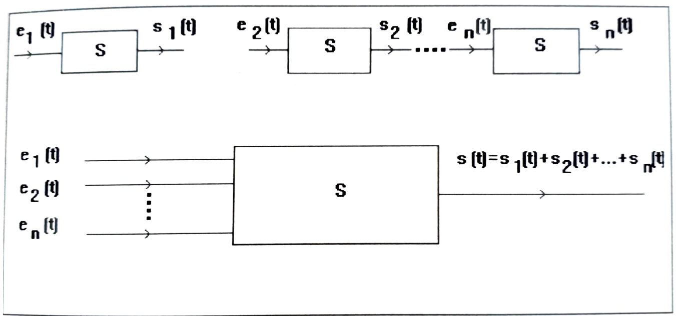

FIGURE 1.2 – Etude de plusieurs systèmes

D'un point de vue mathématique, on maîtrise bien la recherche du signal de sortie à condition que le signal d'entrée soit représenté par une fonction constante ou une fonction sinusoïdale.
Dans la pratique, un signal d'entrée est le plus souvent modélisé par une fonction périodique de période T, mais non nécessairement sinusoïdale, comme par exemple le signal représenté par la figure 3.
Ainsi a-t-on cherché à décomposer une fonction quelconque, périodique, de période T en somme d'une fonction constante et de fonctions sinusoïdales.
Le graphique de la figure 3, a été obtenu en faisant la somme des fonctions :
$t \longmapsto 1,\ t \longmapsto \sin(2t),\ t \longmapsto \frac{1}{2}\sin(5t)$.

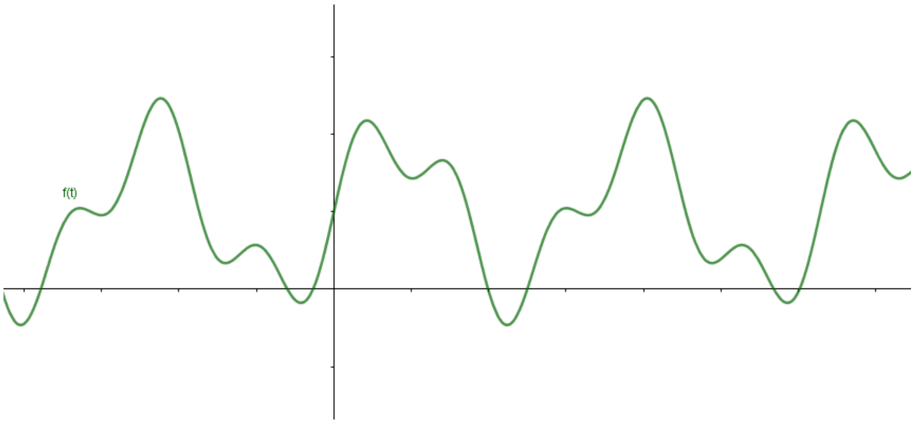

FIGURE 1.3 – Etude d'un signal

1.2 Séries trigonométriques

Les fonctions considérées sont à valeurs réelles. Si une fonction était à valeurs complexes, on pourrait appliquer ce qui va suivre à la partie réelle et à la partie imaginaire.

1.2.1 Définition

On appelle série trigonométrique, toute série de fonctions $\sum f_n$ dont le terme général f_n est une fonction réelle définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_n(t) = a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)$. Les nombres a_n et b_n sont des nombres réels indépendants de t, ω est un réel positif donné et n un entier naturel.

1.2.2 Cas particulier : Fonction périodique de période 2π

On se place dans le cas $\omega = 1$.

Propriétés de périodicité
$t \longmapsto f_n(t) = a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)$ sont périodiques, de période 2π, car pour tout n dans $\mathbb{N}$,
$f_n(t + 2\pi) = f_n(t)$.
Il en résulte qu'en cas de convergence simple sur $\mathbb{R}$ de la série $\sum f_n$, la fonction somme de cette série :

$$t \longmapsto \lim_{N \to +\infty} \sum_{n=0}^{N} f_n(t)$$

est une fonction périodique, de période 2π.
Dans la suite du cours, l'expression « la série de fonction $\sum f_n$ est convergente sur I » voudra dire que la série de fonctions converge simplement sur I. A ce propos, remarquons que les fonctions f_n, sont définies, continues et à dérivées continues sur $\mathbb{R}$.

Calcul des coefficients a_n et b_n $(n \in \mathbb{N})$
Considérons une série trigonométrique $\sum f_n$ et supposons qu'elle converge sur $\mathbb{R}$. La fonction somme f est alors définie pour tout t dans $\mathbb{R}$ par :

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \Big(a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt) \Big) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \Big(a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt) \Big) \tag{1.1}$$

Remarquons que le coefficient b_0, n'intervient pas dans l'écriture de $f(t)$. Par convention, on pose $b_0 = 0$.

Proposition 1.1
On montre que les coefficients $a_0,\ b_0,\ a_n,\ b_n$ sont donnés par les formules :

$$\boxed{a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)dt \ ;\ b_0 = 0 \ ;\ a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos(nt)dt \ ;\ b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin(nt)dt \quad (n \in \mathbb{N}^*)}$$

Remarque 1.1
Puisque la fonction f somme d'une série trigonométrique, est périodique de période 2π, il en est de même pour les fonctions $t \longmapsto f(t)\cos(nt)$ et $t \longmapsto f(t)\sin(nt)$. L'intervalle d'intégration qui a servi à calculer a_0, a_n, b_n peut être remplacé par un intervalle quelconque $[\alpha, \alpha + 2\pi[$ d'amplitude ou de longueur 2π avec α un réel quelconque, par exemple pour $\alpha = -\pi$ l'intervalle d'intégration est $[-\pi, \pi[$...

Proposition 1.2

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} f(t)dt \; ; \quad b_0 = 0 \; ; \quad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} f(t)\cos(nt)dt \; ; \; b_n = \frac{1}{\pi}\int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} f(t)\sin(nt)dt \quad (n \in \mathbb{N}^*)$$

1.2.3 Cas général : Fonction périodique de période T ($T \in \mathbb{R}^{+*}$)

Soit f une fonction périodique de période T ($T \in \mathbb{R}^{+*}$). Les résultats du paragraphe précédent s'étendent à ce type de fonctions en considérant la fonction g, définie par $g(u) = f\left(\frac{T}{2\pi}u\right)$ et en posant $\omega = \frac{2\pi}{T}$.
La fonction g étant périodique de période 2π, les coefficients a_0, b_0, a_n, b_n sont :

$$\boxed{a_0 = \frac{1}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T} f(t)dt \; ; \quad b_0 = 0 \; ; \quad a_n = \frac{2}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T} f(t)\cos(n\omega t)dt \; ; \quad b_n = \frac{2}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T} f(t)\sin(n\omega t)dt \quad (n \in \mathbb{N}^*)}$$

Si $T = 2\pi$, alors $\omega = 1$ et on retrouve les formules de la proposition 1.2.

1.3 Développement en série de Fourier

1.3.1 Fonctions périodiques de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$

A. Discontinuité de première espèce

Considérons une fonction g sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ sauf peut-être en un point t_0 de I.
On dit que g possède une discontinuité de première espèce en t_0, si g possède une limite finie à droite et une limite finie à gauche en t_0 et ces deux limites ne sont pas égales (voir figure 1.4).
On notera dans ce cas

$$g(t_0^+) = \lim_{t \mapsto t_0^+} g(t) \; ; \; g(t_0^-) = \lim_{t \mapsto t_0^-} g(t).$$

Évidemment si les deux limites sont égales à $g(t_0)$ alors la fonction g est continue en t_0.

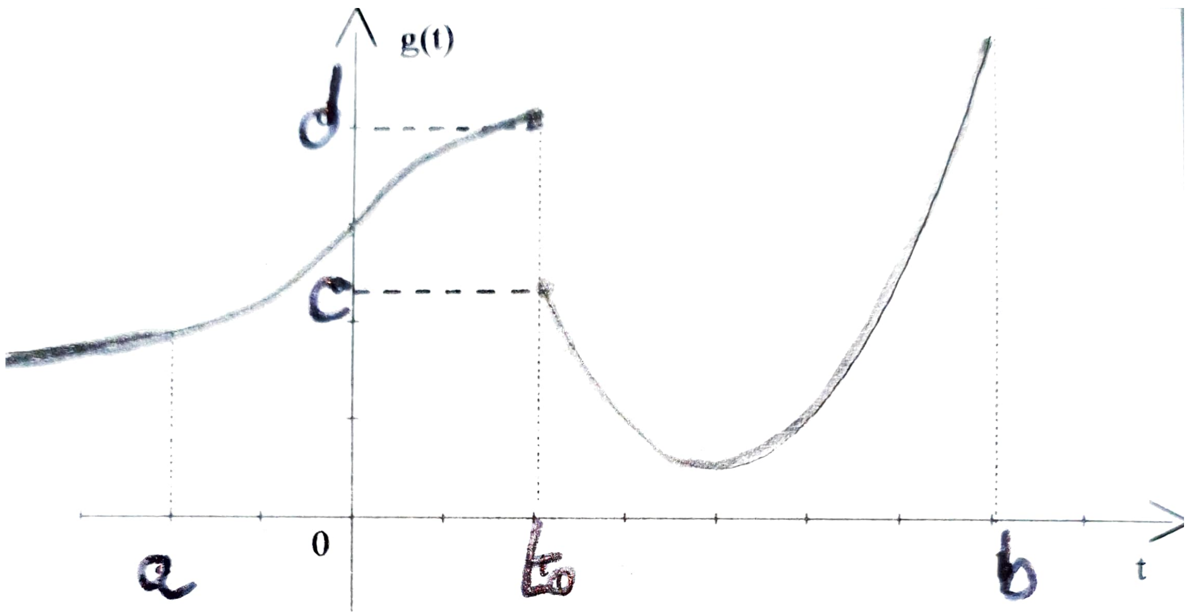

FIGURE 1.4 – Discontinuité de première espèce

B. Fonction de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$

Définition 1.1
Soit f une fonction à valeurs réelles et $I = [a, b]$ un intervalle fermé de $\mathbb{R}$.
On dit que f est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur I si les trois conditions suivantes sont réalisées :

1. *La fonction f est définie, continue, dérivable et à dérivée continue en tous points de l'intervalle I, **sauf** peut-être en un nombre **fini** de points t_i de I (éventuellement $t_i = a$ ou/et $t_i = b$).*
2. *En chacun des points t_i ($t_i \neq a$ et $t_i \neq b$) : $f(t_i^+)$ et $f(t_i^-)$ existent dans $\mathbb{R}$.*
   Si $t_i = a$ (respectivement $t_i = b$), $f(a^+)$ (respectivement $f(b^-)$) existe dans $\mathbb{R}$.
3. *En chacun des points t_i ($t_i \neq a$ et $t_i \neq b$) : $f'(t_i^+)$ et $f(t_i^-)$ existent dans $\mathbb{R}$.*
   Si $t_i = a$ (respectivement $t_i = b$), $f'(a^+)$ (respectivement $f'(b^-)$) existe dans $\mathbb{R}$.

Exemple 1.1
Soit f la fonction définie par $f(t) = \begin{cases} t & \text{si } t \in [0, 1[\\ t^2 - 2t & \text{si } t \in]1, 3[\end{cases}$
On remarquera que la fonction f n'est pas définie en $t_0 = 1$.

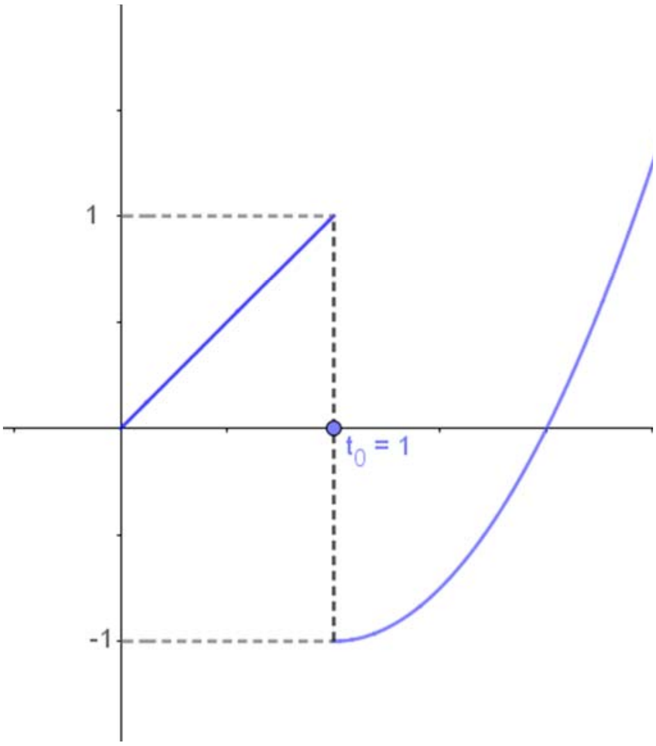

Figure 1.5 – Exemple 1.1

Exemple 1.2

Soit g la fonction définie par $g(t) = \begin{cases} t & \text{si } t \in [0, \pi] \\ 2\pi - t & \text{si } t \in]\pi, 2\pi[\end{cases}$

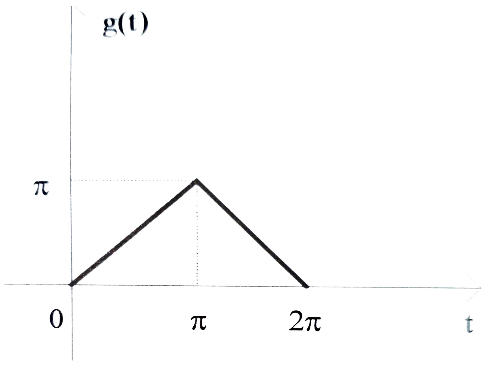

FIGURE 1.6 – Exemple 1.2

C. Fonction périodique de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$

Définition 1.2

Une fonction f périodique, de période T, est dite de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$ si f est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur un intervalle $[\alpha, \alpha + T[$, $(\alpha \in \mathbb{R})$.

Dans la pratique, une fonction f périodique, de période T sera définie par sa restriction à $[0, T[$ ou $[-\frac{T}{2}, +\frac{T}{2}[$ voire $[0, +\frac{T}{2}[$ si f est une fonction paire ou impaire. On se contentera alors de vérifier que f est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur l'intervalle concerné.

1.3.2 Développement en série de Fourier d'une fonction périodique de période 2π

Étant donnée une fonction f, périodique de période 2π, peut-on considérer f comme la somme d'une série trigonométrique sur certains intervalles de $\mathbb{R}$? Si oui, nous aurons alors sur ces intervalles :

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \Big(a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt) \Big)$$

Dans tout ce qui suit, on suppose que les réels a_n et b_n trouvés au paragraphes précédents existent (et que l'on peut effectivement les calculer).

Définition 1.3

Étant donnée une fonction f périodique, de période 2π, on appelle **série de Fourier** *associée à f, la série de fonctions $\sum f_n$ dont le terme général est la fonction f_n définie par : $f_n(t) = a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)$ avec*

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_\alpha^{\alpha+2\pi} f(t)dt \ ; \quad b_0 = 0 \ ; \quad a_n = \frac{1}{\pi}\int_\alpha^{\alpha+2\pi} f(t)\cos(nt)dt \ ; \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_\alpha^{\alpha+2\pi} f(t)\sin(nt)dt \quad (n \in \mathbb{N}^*)$$

et α un réel quelconque.
Les nombres a_n et b_n sont les **coefficients de Fourier** *associés à f.*

— **Cas où la fonction présente une discontinuité de première espèce :**
La valeur de la fonction f aux points de discontinuité n'intervient pas dans la définition des intégrales permettant de calculer les coefficients a_n et b_n.

Exemple 1.3

Soit f la fonction périodique, de période 2π définie par $f(t) = \begin{cases} t & si\ t \in [0,1[\\ 3 & si\ t = 1 \\ t^2 - 2t & si\ t \in]1, 2\pi[\end{cases}$

— **Cas d'une fonction paire ou impaire**

<u>**Rappel :**</u>

- Si f est impaire $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(t)dt = 0 \quad \forall a \in \mathbb{R}$.
- Si f est paire $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(t)dt = 2\int_0^a f(t)dt \quad \forall a \in \mathbb{R}$.

Dans le cas où la fonction f est **paire ou impaire**, donc définie sur $\mathbb{R}$ tout entier, il est judicieux de choisir l'intervalle $[-\pi, +\pi]$ comme intervalle d'intégration pour calculer les coefficients de Fourier associés à f.

• Si f est une fonction **paire** :
La fonction $t \longmapsto f(t)\sin(nt)$ est alors une fonction impaire et son intégrale entre $-\pi$ et $+\pi$ est nulle, donc $b_n = 0\ \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Ainsi, la série de Fourier associée à une fonction paire est une « **série de cosinus** » $\left(a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nt)\right)$.

• Si f est une fonction **impaire** :
La fonction $t \longmapsto f(t)\cos(nt)$ est alors une fonction impaire et son intégrale entre $-\pi$ et $+\pi$ est nulle, donc $a_n = 0\ \forall n \in \mathbb{N}$ (y compris le terme a_0).

Ainsi, la série de Fourier associée à une fonction impaire est une « **série de sinus** » $\left(\sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin(nt)\right)$.

Théorème 1.1 ***Théorème de Dirichlet***

> ***Si*** *f est une fonction périodique, de période 2π, de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$,* ***alors*** *la série de Fourier associée à f est convergente pour toute valeur de t et on a, pour tout t dans $\mathbb{R}$:*
>
> $$\frac{1}{2}\Big[f(t^+)+f(t^-)\Big] = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\Big(a_n\cos(nt)+b_n\sin(nt)\Big)$$
>
> *En particulier, en tout point t_0, où f est* ***continue****, la somme de la série de Fourier associée à f est égale à $f(t_0)$:*
>
> $$f(t_0) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\Big(a_n\cos(nt_0)+b_n\sin(nt_0)\Big)$$

Exemple 1.4
Soit f une fonction périodique, de période 2π définie par $f(t) = t$ si $t \in [0; 2\pi[$.

1. *Tracer dans un repère orthogonal la courbe représentative de la restriction de la fonction f à l'intervalle $[-4\pi, +4\pi[$.*
2. *Montrer que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$ (vérifier les conditions d'application du théorème de Dirichlet).*
3. *Calculer les coefficients de Fourier associés à la fonction f.*
4. *En déduire le développement en série de Fourier de la fonction f (en tout point où elle est continue ou pas).*

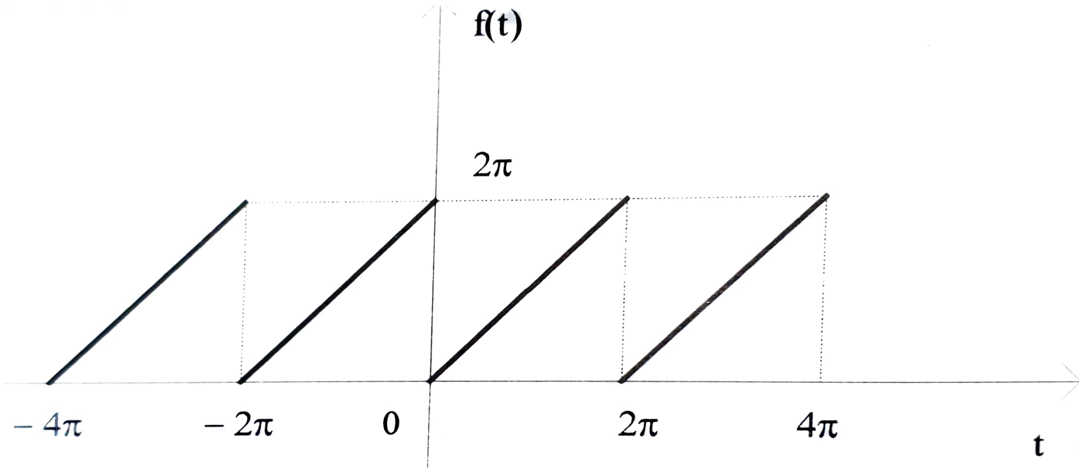

Figure 1.7 – Exemple 1.4

Vocabulaire spécifique à la physique :

Si une fonction f, périodique, de période 2π, est développable en série de Fourier, nous avons :
$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \Big(a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)\Big)$ (dans le cas où f est continue en t).

- $a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} f(t)dt$ représente la **valeur moyenne** de la fonction f sur un intervalle quelconque de longueur 2π.
- Les termes $\Big(a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)\Big)$ pour $n \geqslant 1$ sont appelés : **harmoniques de rang** $\boldsymbol{n}$.
- **L'harmonique de rang 1**, $\Big(a_1 \cos(t) + b_1 \sin(t)\Big)$, est appelé le **fondamental**.

Remarque 1.2
Une transformation trigonométrique simple donne :

$$a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt) = A_n \cos(nt - \phi_n)$$

avec si $a_n \neq 0,\ A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ *et* $\tan(\phi_n) = \frac{a_n}{b_n}$ $(\phi_n \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[)$
et si $a_n = 0,\ A_n = |b_n|$ *et* $\phi_n = 0$.
Le nombre A_n s'appelle ***l'amplitude*** *et ϕ_n* ***la phase*** *de l'harmonique de rang n.*

- On appelle **spectre de fréquence** du signal la représentation graphique de la fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $n \longmapsto A_n$. Cette représentation graphique est un diagramme en bâtons. La figure 1.8 donne le spectre de fréquence du signal donné dans l'exemple 1.4 :
  Nous avons : $A_0 = \pi$ et $A_n = \sqrt{\frac{4}{n^2} + 0} = \frac{2}{n}$.

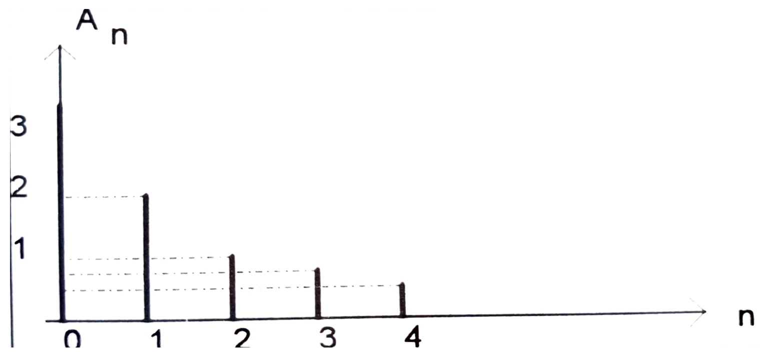

FIGURE 1.8 – Spectre de fréquence

1.3.3 Développement en série de Fourier d'une fonction périodique de période T

- La série de Fourier associée à la fonction f est :

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \Big(a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)\Big)$$

- Le théorème de Dirichlet sur la convergence de la série de Fourier associée à f reste valable en remplaçant « f fonction périodique de période 2π » par « f fonction périodique de période T ($\omega = \frac{2\pi}{T}$) ».

Définition 1.4

*Étant donnée une fonction f périodique, de période T, on appelle **série de Fourier** associée à f, la série de fonctions $\sum f_n$ dont le terme général est la fonction f_n définie par : $f_n(t) = a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)$ avec*

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T} f(t)dt \; ; \quad b_0 = 0 \; ; \quad a_n = \frac{2}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T} f(t)\cos(n\omega t)dt \; ; \quad b_n = \frac{2}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T} f(t)\sin(n\omega t)dt \quad (n \in \mathbb{N}^*)$$

et α un réel quelconque.
*Les nombres a_n et b_n sont les **coefficients de Fourier** associés à f.*

Théorème 1.2 ***Théorème de Dirichlet*** *(cas général)*

***Si** f est une fonction périodique, de période T, de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$, **alors** la série de Fourier associée à f est convergente pour toute valeur de t et on a, pour tout t dans $\mathbb{R}$:*

$$\frac{1}{2}\Big[f(t^+) + f(t^-)\Big] = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\Big(a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)\Big)$$

*En particulier, en tout point t_0, où f est **continue**, la somme de la série de Fourier associée à f est égale à $f(t_0)$:*

$$f(t_0) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\Big(a_n \cos(n\omega t_0) + b_n \sin(n\omega t_0)\Big)$$

Remarque 1.3
L'intervalle d'intégration de longueur T sera choisi de manière à faciliter le calcul des coefficients de Fourier. Le plus souvent on choisira : $[0,T]$ ou $[-\frac{T}{2}, +\frac{T}{2}]$:

- *Si la fonction f est paire, on a pour tout n dans $\mathbb{N}$: $b_n = 0$.*
- *Si la fonction f est impaire, on a pour tout n dans $\mathbb{N}$: $a_n = 0$.*

Exemple 1.5
Soit la fonction f périodique, de période $T = 4$ définie par :

$$f(t) = \begin{cases} 0 & si\ t \in [-2,-1[\\ 1+t & si\ t \in [-1,0[\\ 1-t & si\ t \in [0,1[\\ 0 & si\ t \in]1,2[\end{cases}$$

1. *Tracer dans un repère orthogonal la courbe représentative de la restriction de la fonction f à l'intervalle $[-5,+5[$. On constatera sur le graphique que la fonction f est une fonction paire.*
2. *Calculer les coefficients de Fourier associés à la fonction f.*
3. *Montrer que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$ (vérifier les conditions d'application du théorème de Dirichlet).*
4. *En déduire le développement en série de Fourier de la fonction f sur l'intervalle $[-2,+2[$.*

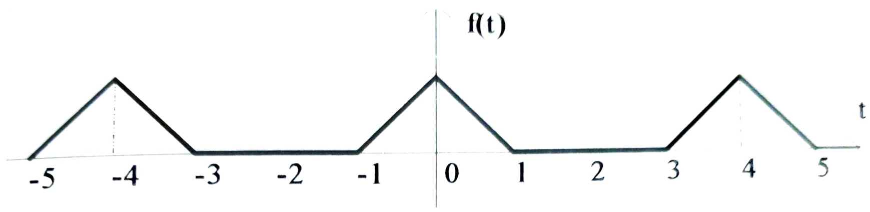

Figure 1.9 – Exemple 1.5

1.4 Forme complexe de la série de Fourier

Rappel : Formules d'Euler : $\boxed{\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \ ; \ \sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.}$

Soit f une fonction réelle périodique, de période T, de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur tout intervalle $[\alpha, \alpha+T[$ ($\alpha \in \mathbb{R}$) de longueur T. Le terme général de la série de Fourier associée à f est $u_n = a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)$. En utilisant les formules d'Euler, nous obtenons :

$$u_n = a_n \frac{e^{in\omega t} + e^{-in\omega t}}{2} + b_n \frac{e^{in\omega t} - e^{-in\omega t}}{2i}$$

Transformons l'écriture de u_n. Nous obtenons :

$$u_n = \frac{a_n - ib_n}{2} e^{in\omega t} + \frac{a_n + ib_n}{2} e^{-in\omega t}$$

Posons : $c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}$, alors le conjugué de c_n est : $\bar{c}_n = \frac{a_n + ib_n}{2}$ (car a_n et b_n sont des nombres réels) et l'expression de u_n devient :

$$u_n = c_n e^{in\omega t} + \bar{c}_n e^{-in\omega t} \tag{1.2}$$

En utilisant les expressions intégrales de a_n et de b_n, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
c_n &= \frac{1}{2}\Big[\frac{2}{T}\int_\alpha^{\alpha+T} f(t)\cos(n\omega t)dt - i\frac{2}{T}\int_\alpha^{\alpha+T} f(t)\sin(n\omega t)dt\Big] \\
c_n &= \frac{1}{T}\int_\alpha^{\alpha+T} f(t)\Big(\cos(n\omega t) - i\sin(n\omega t)dt\Big)dt \\
c_n &= \frac{1}{T}\int_\alpha^{\alpha+T} f(t)e^{-in\omega t}dt
\end{aligned}$$

or d'après la formule : $\overline{\int_a^b g(t)dt} = \int_a^b \overline{g(t)}dt$,

nous avons donc $\bar{c}_n = \frac{1}{T}\int_\alpha^{\alpha+T} f(t)e^{in\omega t}dt$ car $f(t)$ est une fonction réelle.

On a donc $\bar{c}_n = c_{-n}$.

Ainsi $u_n = c_n e^{in\omega t} + c_{-n}e^{-in\omega t}$

Si l'on remarque que $c_0 = \frac{1}{T}\int_\alpha^{\alpha+T} f(t)dt = a_0$, le développement de la fonction f en série de Fourier est :

$$a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty}\Big[c_n e^{in\omega t} + c_{-n}e^{-in\omega t}\Big] = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\omega t}$$

En conclusion, nous retiendrons donc les résultats suivants :

> La forme complexe du développement en série de Fourier d'une fonction f réelle, périodique de période T, de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$ est en tout point $t \in \mathbb{R}$:
>
> $$\frac{1}{2}\Big(f(t^+) + f(t^-)\Big) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\omega t} \quad \text{avec :} \ c_n = \frac{1}{T}\int_\alpha^{\alpha+T} f(t)e^{-in\omega t}dt \quad (n \in \mathbb{Z})$$
>
> Les coefficients de Fourier complexes c_n sont liés aux coefficients de Fourier réels a_n et b_n par les relations suivantes :
>
> $$c_0 = a_0 \ ; \ c_n = \frac{a_n - ib_n}{2} \quad (n \in \mathbb{N}^*) \text{ et } c_{-n} = \bar{c}_n$$

Remarque 1.4

*Si f est une fonction à valeurs complexes, la formule du développement est toujours valable avec c_n défini par la **seule** formule :* $c_n = \frac{1}{T}\int_\alpha^{\alpha+T} f(t)e^{-in\omega t}dt \quad (n \in \mathbb{Z})$.

Exemple 1.6

Soit f une fonction périodique, de période $T = 1$, définie par $f(t) = e^{-t}$ si $t \in [0; 1[$.

1. *Tracer dans un repère orthogonal la courbe représentative de la restriction de la fonction f à l'intervalle $[-3, +3[$.*
2. *Montrer que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$ (vérifier les conditions d'application du théorème de Dirichlet).*
3. *Calculer les coefficients de Fourier complexes associés à la fonction f.*
4. *En déduire le développement en série de Fourier de la fonction f sur l'intervalle $]0, 1[$.*

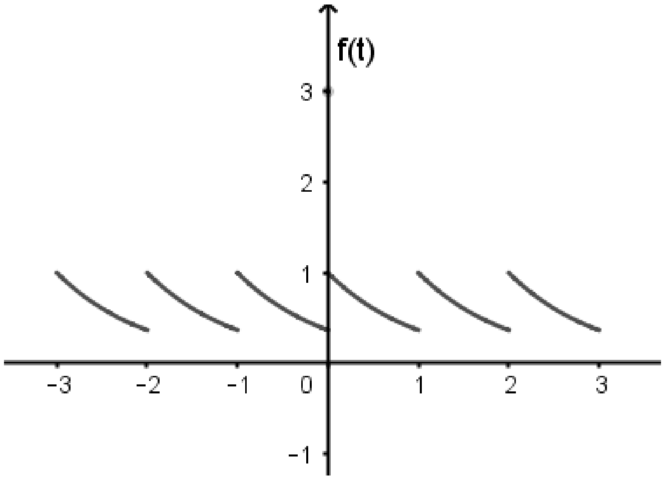

Figure 1.10 – Exemple 1.6

1.5 Formule de Parseval

Soit f une fonction, périodique, de période T, vérifiant les conditions d'application du théorème de Dirichlet. On démontre, et nous l'admettrons, la formule suivante, dite **formule de Parseval** :

$$\boxed{\frac{1}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T}\Big[f(t)\Big]^2 dt = a_0^2 + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n^2+b_n^2}{2}} \quad (\alpha \in \mathbb{R})$$

Cette formule est valable dans le cas d'une fonction à valeurs réelles.

- Si la série de Fourier est donnée sous la forme $a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \cos(n\omega t + \phi)$ avec $A_n = \sqrt{a_n^2+b_n^2}$, la formule de Parseval s'écrit
$$\frac{1}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T}\Big[f(t)\Big]^2 dt = a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} A_n^2 \quad (\alpha \in \mathbb{R})$$

- Si la série de Fourier est donnée sous forme complexe par $\sum_{-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\omega t}$, la formule de Parseval s'écrit

  1. si la fonction f est à valeurs réelles
$$\boxed{\frac{1}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T}\Big(f(t)\Big)^2 dt = \sum_{-\infty}^{+\infty}|c_n|^2 = \sum_{-\infty}^{-1}|c_n|^2 + |c_0|^2 + \sum_{+1}^{+\infty}|c_n|^2} \quad (\alpha \in \mathbb{R})$$

  2. si la fonction f est à valeurs complexes
$$\boxed{\frac{1}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T}\Big|f(t)\Big|^2 dt = \sum_{-\infty}^{+\infty}|c_n|^2 = \sum_{-\infty}^{-1}|c_n|^2 + |c_0|^2 + \sum_{+1}^{+\infty}|c_n|^2} \quad (\alpha \in \mathbb{R})$$

Interprétation physique de la formule de Parseval
Si la fonction f est la modélisation d'un signal électrique, périodique, de période T, on sait qu'en choisissant des unités convenables la puissance P du signal est : $P = \frac{1}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T}\Big|f(t)\Big|^2 dt$.
La formule de Parseval indique donc que la puissance du signal peut se calculer à l'aide des coefficients du développement en série de Fourier de ce signal.
Plus précisément, cherchons la puissance du signal $t \mapsto a_0$ et celle du signal $t \mapsto a_n\cos(n\omega t) + b_n\sin(n\omega t)$ ($n^{\text{ième}}$ harmonique). Nous obtenons très facilement : $P_0 = a_0^2$; $P_n = \frac{1}{2}(a_n^2+b_n^2)$.
La puissance totale P du signal est donc :

$$\boxed{P = P_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} P_n = a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n^2+b_n^2) = a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} A_n^2}$$

Nous obtenons le résultat suivant : **la puissance d'un signal modélisé par une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$ est égale à la somme de la puissance du signal $t \mapsto a_0$ et de celle de tous les harmoniques (c'est le principe de la conservation de la puissance).**

Exemple 1.7
Utiliser la formule de Parseval pour l'exemple 1.4.

1.6 Feuille d'exercices : Série de Fourrier

Exercice 1.1 Quelques décompositions en série de Fourier d'un signal de l'électronique. Spectre de fréquence.
Soient les fonctions suivantes modélisant quelques signaux, 2π-périodique, définies sur $\mathbb{R}$ par :

- *la fonction créneau :* $f_1(t) = \begin{cases} 1 & si\ t \in [0, \pi[\\ -1 & si\ t \in [-\pi, 0[\end{cases}$
- $f_2(t) = t$ *si* $-\pi \leqslant t < \pi$.
- $f_3(t) = t^2$ *si* $t \in [-\pi, \pi[$.

Pour chacune de ces trois fonctions $f = f_i;\ i = 1, 2, 3$

1. *Tracer dans un repère orthogonal la courbe représentative de la restriction de la fonction f à l'intervalle $[-3\pi, +3\pi[$.*
2. *Montrer que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$ (vérifier les conditions d'application du théorème de Dirichlet).*
3. *Calculer les coefficients de Fourier associés à la fonction f.*
4. *En déduire le développement en série de Fourier de la fonction f en tout point où elle est continue.*
5. *Examiner le cas $t = t_k = k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$, les points où la fonction est discontinue.*
6. *Tracer le spectre de fréquence associé à f_1 et à f_2.*
7. *Utiliser la formule de Parseval.*

Exercice 1.2 Coefficients de Fourier complexes
Un signal est modélisé par la fonction f, 2π-périodique, définie par :

$$f(t) = \begin{cases} \sin(t) & si\ t \in [0, \pi[\\ 0 & si\ t \in [\pi, 2\pi[\end{cases}$$

1. *Tracer dans un repère orthogonal $\mathcal{C}_f$, la courbe représentative de la restriction de la fonction f à l'intervalle $[-3\pi, +3\pi[$.*
2. *Montrer que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$ (vérifier les conditions d'application du théorème de Dirichlet).*
3. *Calculer les coefficients de Fourier complexes associés à la fonction f et en déduire les coefficients de Fourier réels.*
4. *Montrer qu'en tout point de $\mathbb{R}$, la somme de la série de Fourier associée à f est égale à $f(t)$. Écrire alors le développement en série de Fourier complexe, puis celui en série de Fourier réelle de la fonction f.*
5. *En choisissant une valeur particulière de t, montrer que :*
$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} + \sum_{p \geqslant 1} \frac{(-1)^p}{1 - 4p^2}$$
6. *En utilisant la formule de Parseval, montrer que*
$$\frac{1}{2}\left(\frac{\pi^2}{8} - 1\right) = +\sum_{p \geqslant 1} \frac{1}{(1 - 4p^2)^2}$$

Exercice 1.3 ***Somme de séries entières***
Soit la fonction 2π-périodique, définie pour $t \in [0, 2\pi[$ par $f(t) = t^2$.

1. *Calculer les coefficients de Fourier associés à la fonction f et en son déduire son développement en série de Fourier.*
2. *En déduire la somme des séries :*
$$\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^2}, \ \sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^4}.$$

Exercice 1.4

1. *Idem pour la fonction 2π-périodique définie sur $[-\pi,\pi[$ par $f(t)=|t|$ si $-\pi\leqslant t<\pi$.*
2. *En déduire la somme des séries :*

$$\sum_{n\geqslant 0}\frac{1}{(2n+1)^2},\ \sum_{n\geqslant 0}\frac{1}{(2n+1)^4}.$$

Exercice 1.5
Un signal est modélisé par la fonction f, périodique, de période $T=\pi$, définie par :

$$f(t)=\begin{cases} t & si\ t\in[0,\frac{\pi}{2}] \\ \frac{\pi}{2} & si\ t\in]\frac{\pi}{2},\pi[\end{cases}$$

1. *Tracer dans un repère orthogonal $\mathcal{C}_f$, la courbe représentative de la restriction de la fonction f à l'intervalle $[-2\pi,+2\pi[$.*
2. *Montrer que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$ (vérifier les conditions d'application du théorème de Dirichlet).*
3. *Calculer les coefficients de Fourier associés à la fonction f.*
4. *En déduire le développement en série de Fourier de la fonction f.*
5. *Examiner les cas $t=k\pi$ et $t=\frac{\pi}{2}+k\pi$.*
6. *Utiliser la formule de Parseval.*

Exercice 1.6
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$, de période $T=4$, telle que :

$$f(t)=\begin{cases} t & si\ t\in[0,1[\\ 1 & si\ t\in[1,3[\\ 4-t & si\ t\in[3,4[\end{cases}$$

1. *Tracer dans un repère orthogonal $\mathcal{C}_f$, la courbe représentative de la restriction de la fonction f à l'intervalle $[-6,+6]$ et montrer qu'elle est paire.*
2. *Montrer que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$ (vérifier les conditions d'application du théorème de Dirichlet).*
3. *Calculer les coefficients de Fourier associés à la fonction f (montrer que $a_0=\frac{3}{4}$ et $a_n=\frac{4}{n^2\pi^2}\Big(\cos(n\frac{\pi}{2})-1\Big)$ pour $n>0$).*
4. *En déduire le développement en série de Fourier de la fonction f.*
5. *En choisissant une valeur particulière de t, calculer :*

$$\sum_{p\geqslant 1}\frac{1}{(1+2p)^2}$$

6. *Utiliser la formule de Parseval.*