Série de Fourier

Exm 1.1

$$f(t) = \begin{cases} t & \text{si } t \in [0,1[\\ t^2-2t & \text{si } t \in]1,3[\end{cases}$$

1) f est continue / dérivable par morceaux sur tout $\mathbb{R}$. (polynômes)

2) $\lim_{t \to 0^+} f(t) = 0 = f(0)$ continue à droite de 0

$\lim_{t \to 1^-} f(t) = 1$, $\lim_{t \to 1^+} f(t) = -1$ discontinuité de 1ère espèce

$\lim_{t \to 3^-} f(t) = 3$ limite existe et est finie.

3) $f'(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in]0,1[\\ 2t-2 & \text{si } t \in]1,3[\end{cases}$ idem $\lim_{t \to 0^+} f'(t) = 1$, $\lim_{t \to 3^-} f'(t) = 4$

$\lim_{t \to 1^-} f'(t) = 1$; $\lim_{t \to 1^+} f'(t) = 0$

toutes ces limites existent et sont finies donc la fct f est de classe C^1 par morceaux sur $[0,3]$.

Exm 1.2

$$g(t) = \begin{cases} t & \text{si } t \in [0,\pi] \\ 2\pi - t & \text{si } t \in]\pi, 2\pi[\end{cases} \qquad g'(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in]0,\pi[\\ -1 & \text{si } t \in]\pi, 2\pi[\end{cases}$$

1) g continue et dérivable sur tout $\mathbb{R}$ sauf "peut-être" aux pts $0, \pi, 2\pi$

2) $\lim\limits_{t \to 0^+} g(t) = 0 = g(0)$, $\lim\limits_{t \to 2\pi^-} g(t) = 0$

$\lim\limits_{t \to \pi^-} g(t) = \pi$

$\lim\limits_{t \to \pi^+} g(t) = 2\pi - \pi = \pi$

g continue en π donc $g(\pi) = \pi$

les limits existent et sont finies

3) $\lim\limits_{t \to 0^+} g'(t) = 1$, $\lim\limits_{t \to 2\pi^-} g'(t) = -1$

$\lim\limits_{t \to \pi^-} g'(t) = 1$ $\lim\limits_{t \to \pi^+} g'(t) = -1$

les limits existent et sont finies

donc $\boxed{g \in \mathcal{C}^1 \text{ par morceaux}}$.

Exm 1.3

Relation de Chasles : $\boxed{\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt}$

Calculer par exemple

$$I = \int_0^{2\pi} f(t)\,dt \overset{\text{Chasles}}{=} \int_0^1 f(t)\,dt + \int_1^{2\pi} f(t)\,dt$$

$\left(\text{à noter : } a_0 = \frac{1}{2\pi} I\right)$

$$= \int_0^1 t\,dt + \int_1^{2\pi} (t^2 - 2t)\,dt$$

$$= \left[\frac{1}{2}t^2\right]_0^1 + \left[\frac{1}{3}t^3 - t^2\right]_1^{2\pi}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{(2\pi)^3}{3} - (2\pi)^2 - \frac{1}{3} + 1$$

$$\boxed{I = \frac{8}{3}\pi^3 - 4\pi^2 + \frac{7}{6}}$$

Conclusion :

$\boxed{\text{$I$ ne dépend absolument pas de la valeur de f en 1. } f(1) = 3 \text{ ou } 4 \ldots}$

Exm 1.4

2) $\lim\limits_{t \to 0^+} f(t) = 0 \qquad \lim\limits_{t \to 2\pi^-} f(t) = 2\pi$

$~~\lim\limits_{t \to 2\pi^-} f(t)~~ \qquad f'(t) = 1$ si $t \in]0, 2\pi[$

$\lim\limits_{t \to 0^+} f'(t) = \lim\limits_{t \to 2\pi^-} f'(t) = 1$

donc

$f \in \mathcal{C}^1$

par morceaux

3) $a_0 = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} t\,dt = \dfrac{1}{2\pi} \left[\dfrac{1}{2} t^2\right]_0^{2\pi} = \pi$

$a_n = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} t \cos(nt)\,dt \qquad b_n = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} t \sin(nt)\,dt$

$u = t \quad u' = 1 \qquad v' = \cos(nt) \qquad v = \frac{1}{n}\sin(nt)$ $\quad$ 5/13

$$a_n = \frac{1}{\pi}\left[t\,\frac{\sin(nt)}{n}\right]_0^{2\pi} - \frac{1}{n\pi}\int_0^{2\pi}\sin(nt)\,dt$$

$$= \quad 0 \quad + \frac{1}{n^2\pi}\left[\cos(nt)\right]_0^{2\pi} = 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} t\sin(nt)\,dt \qquad \begin{cases} u = t & u' = 1 \\ v' = \sin(nt) & v = -\frac{1}{n}\cos(nt)\end{cases}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[-t\,\frac{\cos(nt)}{n}\right]_0^{2\pi} + \frac{1}{n\pi}\int_0^{2\pi}\cos(nt)\,dt$$

$$= \frac{-2\pi\cos(2n\pi)}{\pi n} + \frac{1}{n^2\pi}\underbrace{\left[\sin(nt)\right]_0^{2\pi}}_{0} = \frac{-2}{n}$$

Car $\underline{\cos(2n\pi) = 1}$

$$S(t) = \pi + \sum_{n \geq 1} \left(-\frac{2}{n}\right) \sin(nt)$$

Si f continue en t càd $t \neq 2k\pi = t_k$

$$f(t) = \pi + \sum \left(\frac{-2}{n}\right) \sin(nt)$$

$$= \pi - 2 \sum \frac{1}{n} \sin(nt)$$

~~Si f~~ pour $t = t_k = 2k\pi$:

$$\frac{1}{2}\left[f(t_k^+) + f(t_k^-)\right] = \frac{1}{2}\left[0 + 2\pi\right] = \pi = \pi - 2 \underbrace{\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} \sin(n2k\pi)}_{=0}$$

Exo 1.5

1/6

- $\underline{-2}$ $\lim\limits_{t\to -2^-} f(t) = 0 = \lim\limits_{t\to -2^+} f(t) = f(-2)$ (f continue en -2)

- $\underline{-1}$: $\lim\limits_{t\to -1^-} f(t) = 0 = \lim\limits_{t\to -1^+} f(t) = \lim\limits_{t\to -1^+} (1+t) = 0$ (f continue en -1)

- $\underline{0}$ $\lim\limits_{t\to 0^-} f(t) = \lim\limits_{t\to 0^-} (1+t) = 1 = \lim\limits_{t\to 0^+} f(t) = \lim\limits_{t\to 0^+} (1-t) = 1$ f cont. en 0

- $\underline{1}$: $\lim\limits_{t\to 1^+} f(t) = 0 = \lim\limits_{t\to 1^-} f(t) = \lim\limits_{t\to 1^-} (1-t) = 0$ (f cont en 1

- 2 : $\lim\limits_{t\to -2^\pm} f(t) = 0$ f cont. en 2

$\Longrightarrow$ f continue sur $[-2;2]$

~~8~~/6

$$f'(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \in]-2,-1[\\ 1 & \text{si } t \in]-1,0[\\ -1 & \text{si } t \in]0,1[\\ 0 & \text{si } t \in]1,2[\end{cases}$$

$\lim\limits_{t \to -2^+} f'(t) = 0$ $\quad \lim\limits_{t \to -1^-} f'(t) = 0$ $\quad \lim\limits_{t \to -1^+} f'(t) = 1$

$\lim\limits_{t \to 0^-} f'(t) = 1$ $\quad \lim\limits_{t \to 0^+} f'(t) = -1$, $\quad \lim\limits_{t \to 2^-} f'(t) = 0$

les limites existent et finies ~~et~~

donc f est $\mathcal{C}^1$ par morceaux.

(<u>Rem</u> f est $\mathcal{C}^0$ sur tout $\mathbb{R}$)

2) f fonction paire donc $b_n = 0 \quad \forall n \geq 1$ 3/6

- $a_0 = \frac{1}{T} \int_{-2}^{2} f(t)\,dt \overset{\text{parité}}{=} \frac{2}{4} \int_{0}^{2} f(t)\,dt = \frac{1}{2} \cdot \int_{0}^{2} f(t)\,dt$

$= \frac{1}{4} \cdot$

- $a_n = \frac{2}{T} \int_{-2}^{2} f(t) \cos(n\omega t)\,dt \quad , \quad \omega = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$

$\overset{\text{parité}}{=} \frac{4}{4} \int_{0}^{2} f(t) \cos\left(\frac{n\pi}{2} t\right) dt$

$$\boxed{a_n = \int_{0}^{2} f(t) \cos\left(\frac{n\pi}{2} t\right) dt}$$

$$a_0 = \frac{1}{2}\int_0^1 (1-t)\,dt + \frac{1}{2}\int_1^2 0.\,dt = \frac{1}{2}\left[t - \frac{1}{2}t^2\right]_0^1 =$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}.$$

$n \geq 1$

$$a_n = \int_0^1 (1-t)\cos\left(n\frac{\pi}{2}t\right)dt + \cancel{\int_1^2 0.\cos\left(\frac{n\pi}{2}t\right)dt}$$

IPP :

$u = 1-t$, $u' = -1$

$v' = \cos\left(\frac{n\pi}{2}t\right)$, $v = \frac{2}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi}{2}t\right)$

$$a_n = \cancel{\left[\frac{2}{n\pi}(1-t)\sin\left(\frac{n\pi}{2}t\right)\right]_0^1} + \frac{2}{n\pi}\int_0^1 \sin\left(\frac{n\pi}{2}t\right)dt \qquad n \geq 1$$

$$= \frac{-4}{n^2\pi^2}\left[\cos\left(\frac{n\pi}{2}t\right)\right]_0^1 = \frac{4}{n^2\pi^2}\left[1 - \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right]$$

$$\boxed{a_n = \frac{4\left[1 - \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right]}{\pi^2 n^2}}$$

$\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

$\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0$

$\cos 0 = 1$

$\cos \pi = -1$

Si $n = 2p+1$ $\quad p \in \mathbb{N}$ $\quad \cos\left(\frac{(2p+1)\pi}{2}\right) = 0$ 5/6

Si $n = 2p$ $\quad p \geq 1$. $\quad \cos\left(\frac{2p\pi}{2}\right) = \cos(p\pi) = (-1)^p$

$\forall p \geq 0 \quad a_{2p+1} = \frac{4}{\pi^2(2p+1)^2}$

$p \geq 1 \quad a_{2p} = \frac{4(1-(-1)^p)}{\pi^2(2p)^2} = \begin{cases} 0 & p \text{ pair } (p=2k) \\ \frac{8}{\pi^2 \times 4 \times p^2} & p \text{ impair } (p=2k+1) \end{cases}$

$n = 2p$

$$\left.\begin{aligned}
&\text{Si } n = 4k \quad k \neq 0 \quad a_{4k} = 0 \\
&\text{Si } n = 4k+2 \quad a_{4k+2} = \frac{2}{\pi^2 (2k+1)^2} \\
&\qquad k \geq 0 \\
&\text{Si } n = 2k+1 \quad a_{2k+1} = \frac{4}{(2k+1)^2 \pi^2} \\
&\qquad k \geq 0
\end{aligned}\right\} a_n.$$

$$\boxed{S(t) = \frac{1}{4} + \sum_{n \geq 1} a_n \cos\left(\frac{n\pi}{2} t\right) = f(t)}$$

Car $f(t)$ est continue sur tout l'intervalle $[-2, 2]$.

Exm 1.7 (Fin Exm 1.4) Rappel $f(t) = t$ si $t \in [0, 2\pi[$ 2π-périodique

$a_0 = \pi$ et $a_n = \begin{cases} 0 \text{ si } n \geq 1 \end{cases}$ et $b_n = -\frac{2}{n}$ $\forall n \geq 1$

Parseval : $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (f(t))^2 dt = a_0^2 + \sum_{n\geq 1} \frac{a_n^2 + b_n^2}{2} = a_0^2 + \frac{1}{2}\sum b_n^2$

$\Rightarrow \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} t^2 dt = \pi^2 + \frac{1}{2}\sum_{n\geq 1}\frac{(-2)^2}{n^2}$

$\frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{3}t^3\right]_0^{2\pi} = \pi^2 + \frac{4}{2}\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2} = \pi^2 + 2\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}$

donc $\pi^2 + 2\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2} = \frac{1}{2\pi}\,\frac{1}{3}\,8\pi^3 = \frac{4}{3}\pi^2$

$\Rightarrow 2\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2} = \frac{4}{3}\pi^2 - \pi^2 = \frac{\pi^2}{3}$ Conclusion : $\boxed{\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}}$