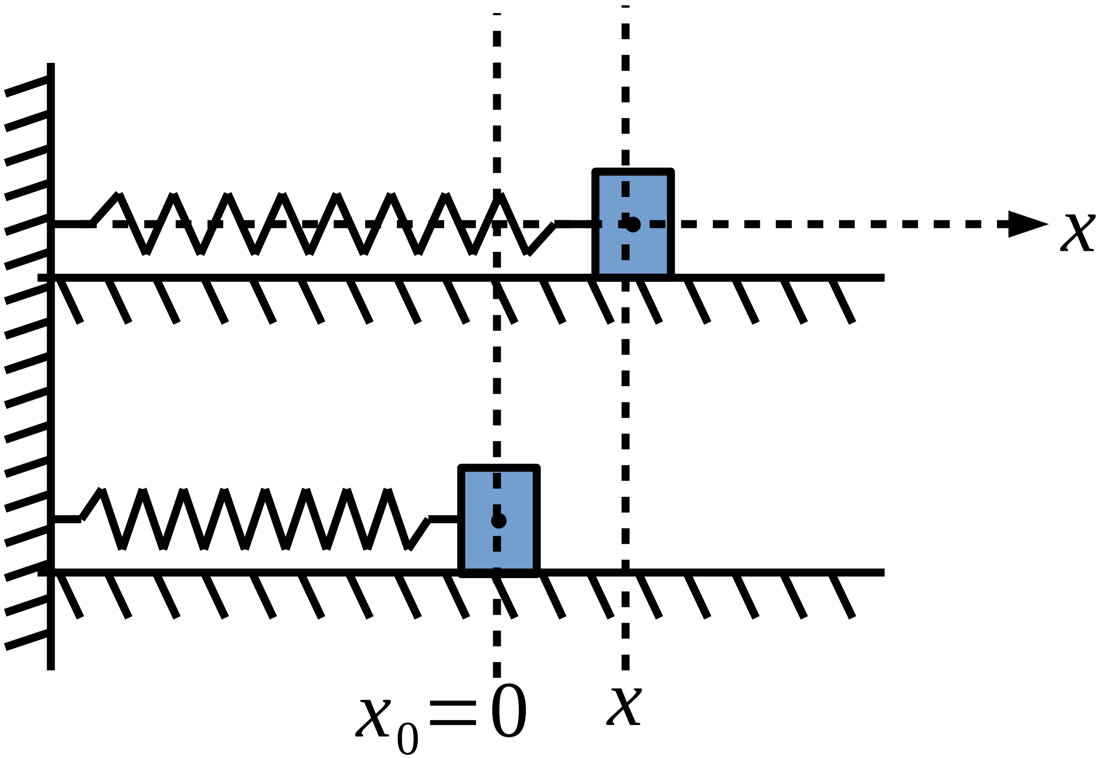
Physique – Mécanique
Chapitre 4 – Oscillateurs mécaniques

SOMMAIRE

- Oscillateur harmonique
- Oscillateur amorti
- Oscillation forcée

Pendule élastique horizontal



$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$$

Oscillateur harmonique

Solution générale de l'équation

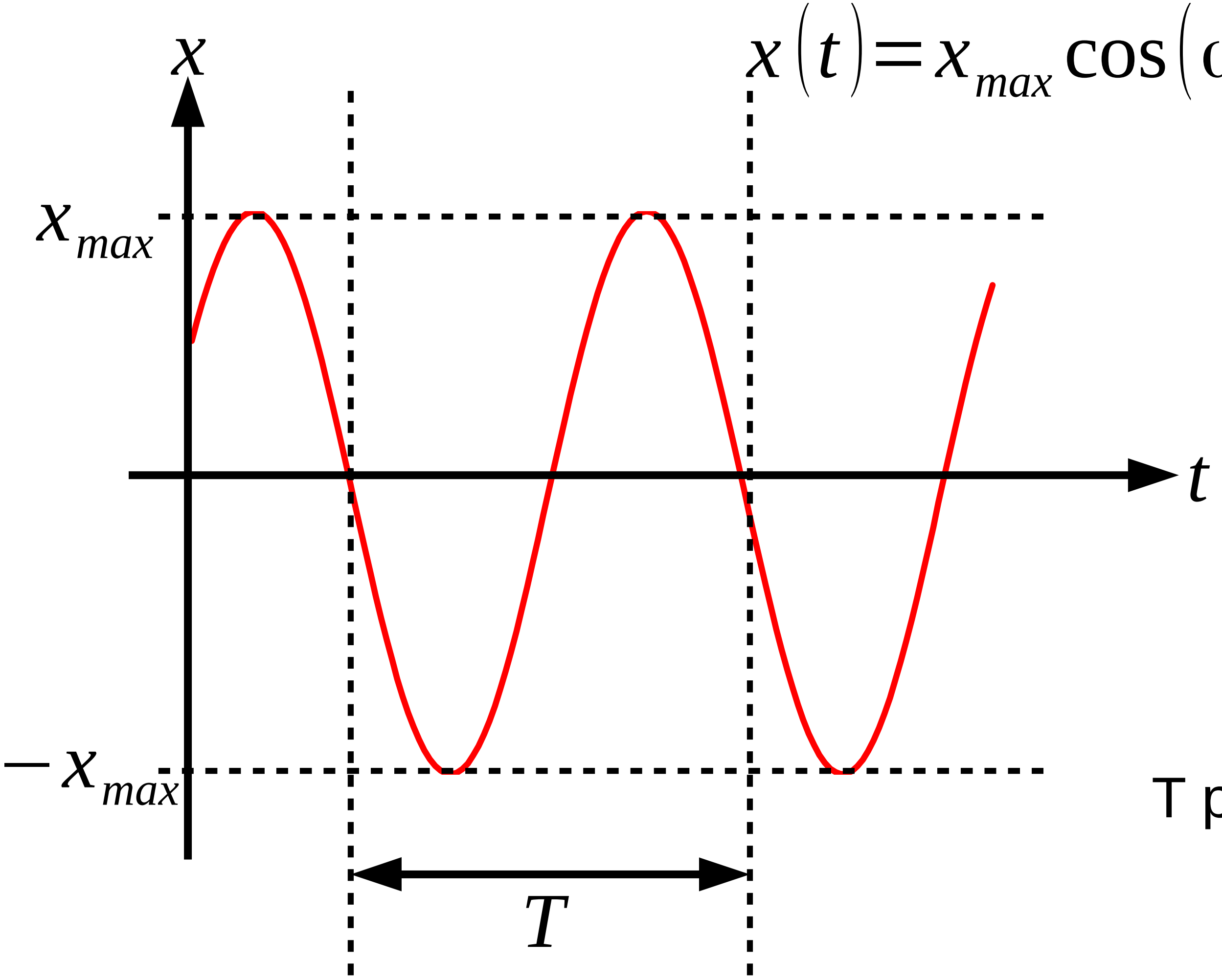
$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$$

$$x(t) = x_{max} \cos(\omega t + \phi) \qquad x(t) = x_{max} \sin(\omega t + \phi)$$

$$x(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t$$

$$\tilde{x}(t) = x_{max} e^{j(\omega t + \phi)}$$

Position



$$x(t) = x_{max}\cos(\omega t + \phi)$$

x_{max}	élongation maximale
ϕ	phase à l'origine
ω	pulsation
$\omega t + \phi$	phase à l'instant t

T période telle que :

$$x(t) = x(t+T)$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

Vitesse – accélération

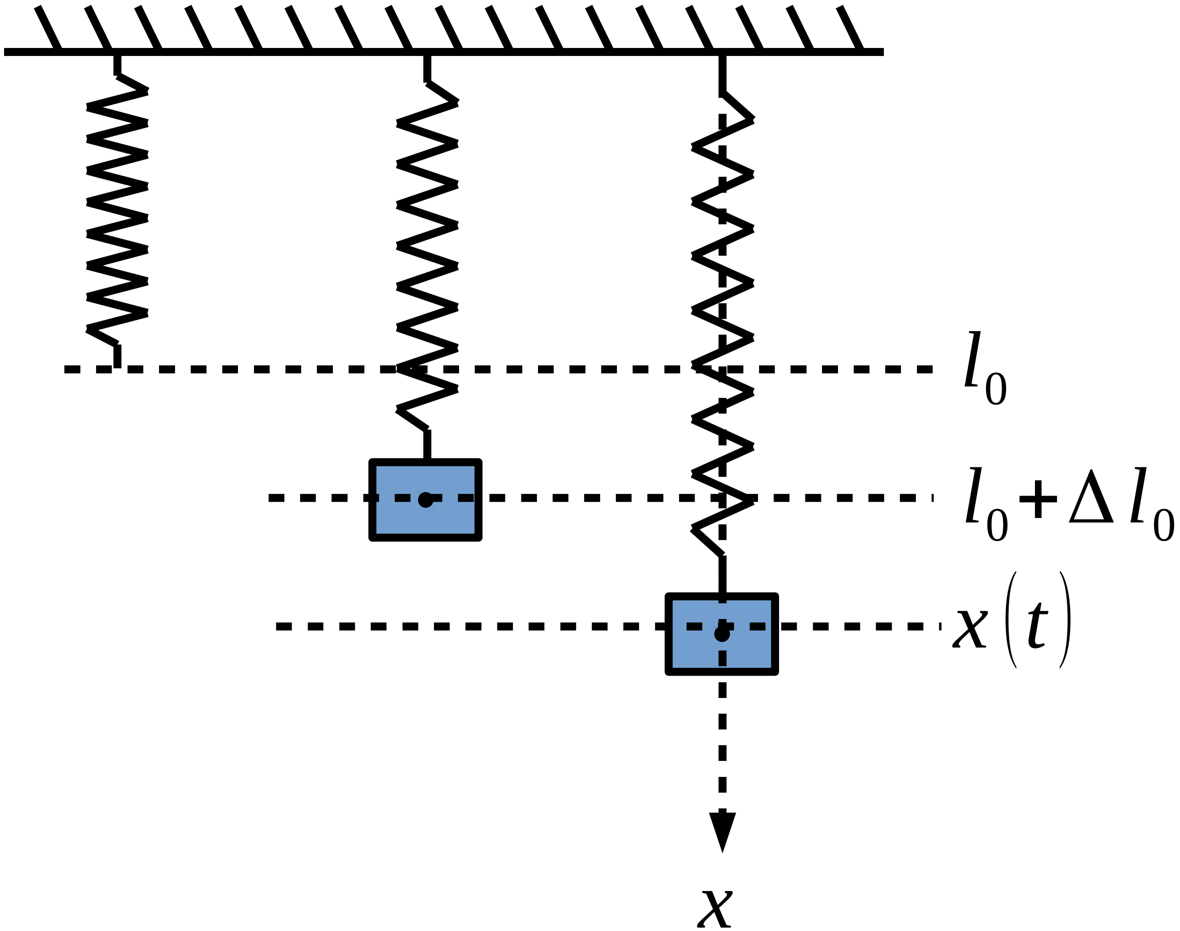
Vitesse

$$v(t) = \frac{d\,x(t)}{dt} = x_{max}\,\omega\,e^{j\left(\omega t + \phi + \frac{\pi}{2}\right)}$$

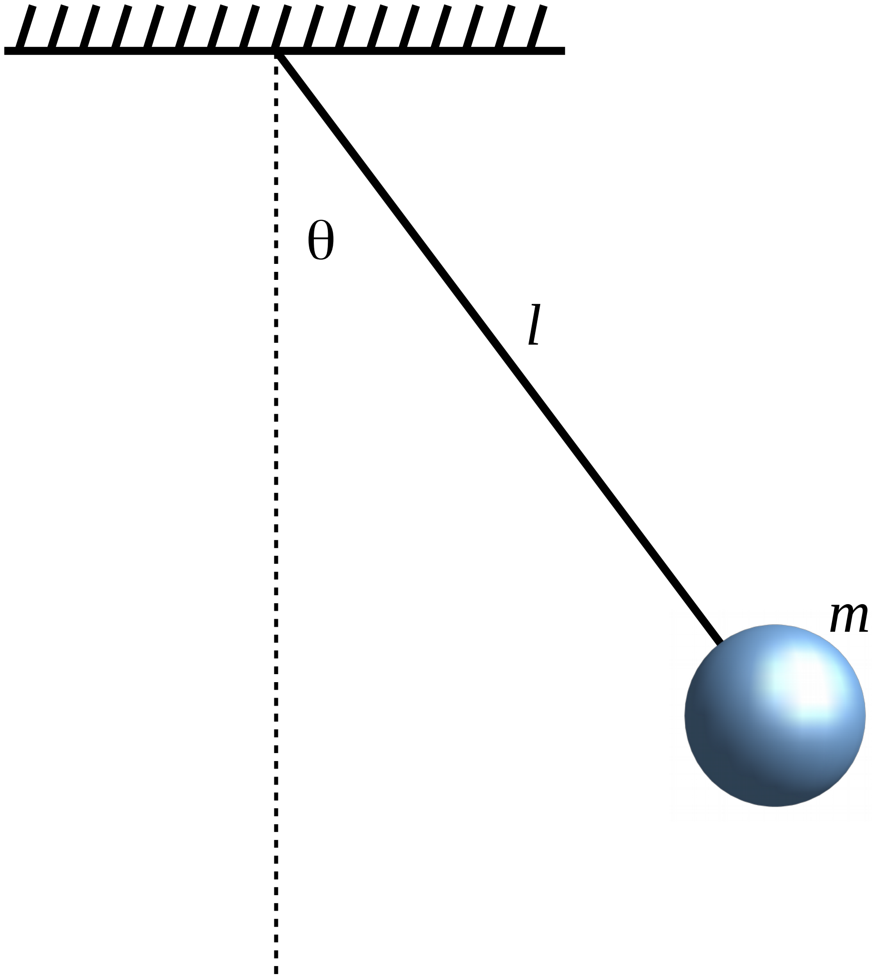
Accélération

$$a(t) = \frac{d^2\,x(t)}{dt^2} = x_{max}\,\omega^2\,e^{j(\omega t + \phi - \pi)}$$

Pendule élastique vertical



Pendule élastique vertical

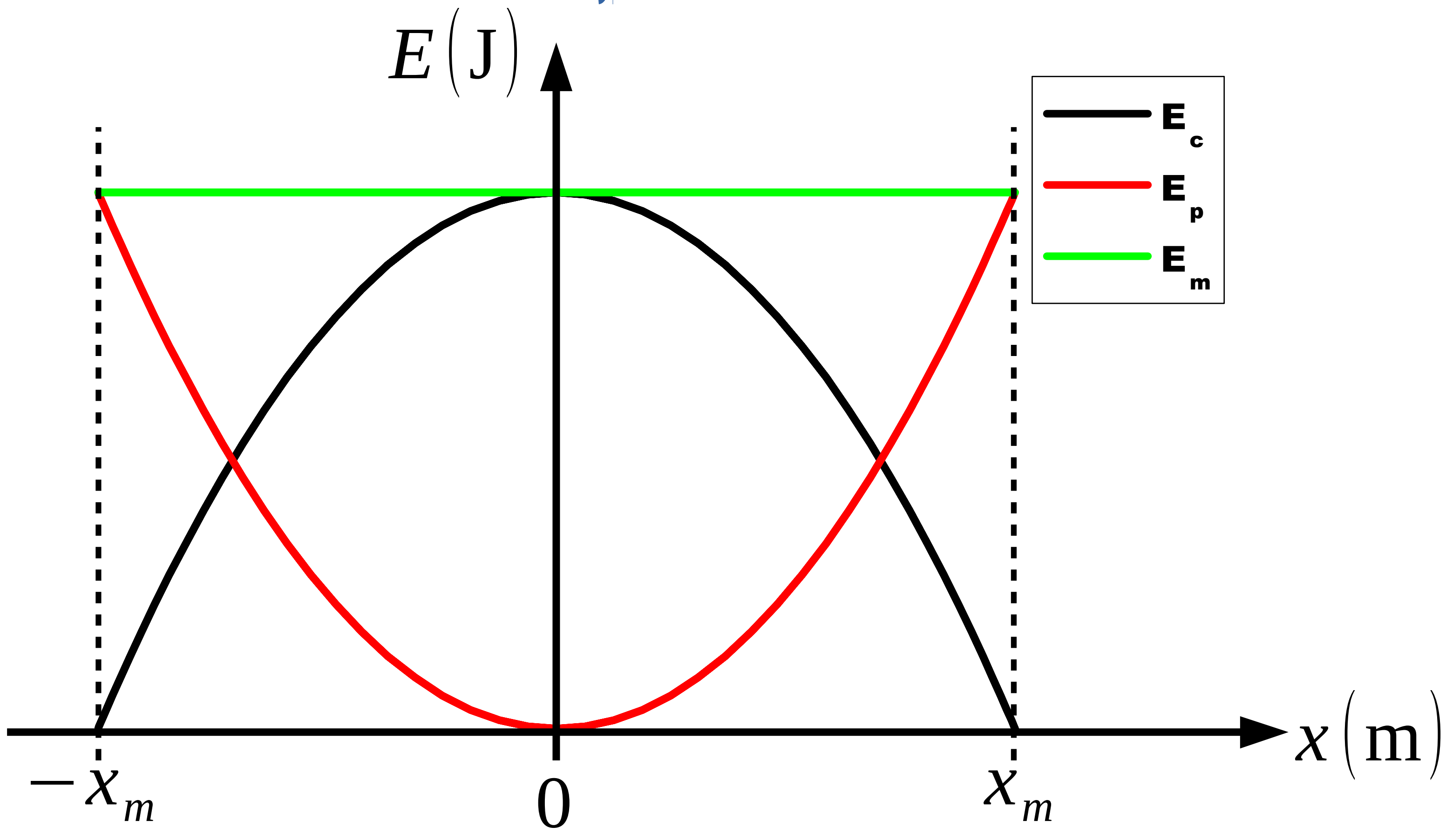


Energie des oscillateurs

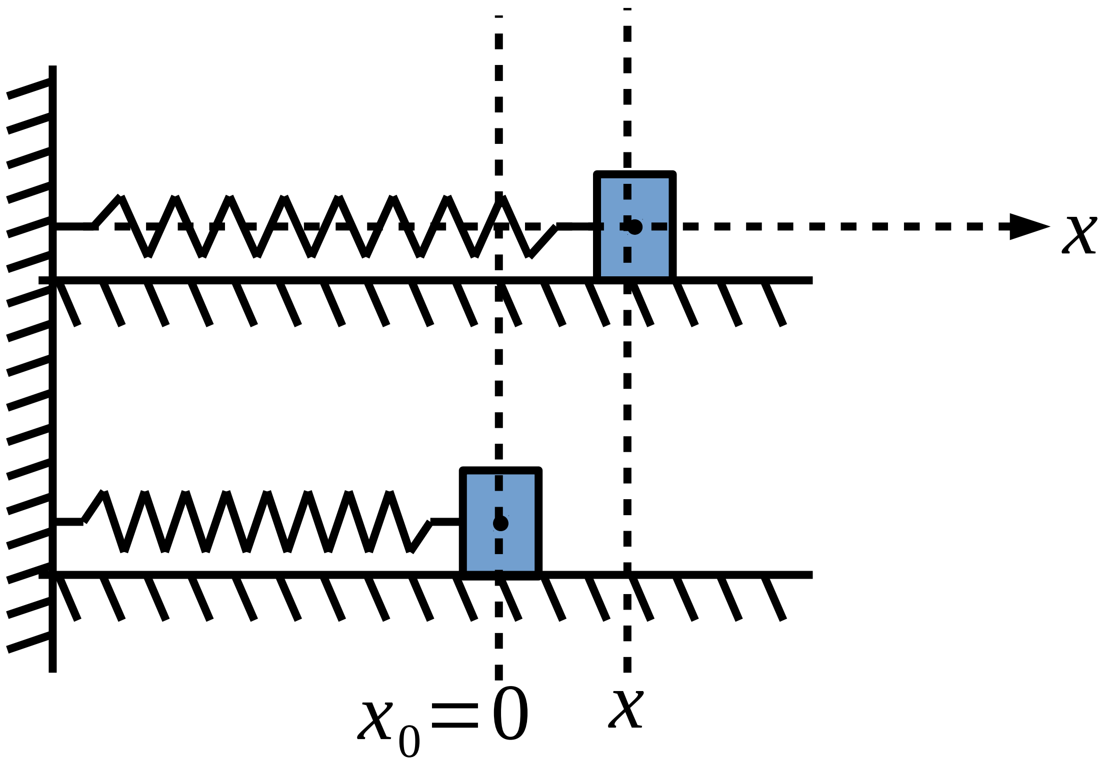
Système isolé

Forces conservatives

$$E_{méca} = E_c + E_p = \text{constante}$$



Frottements visqueux



$$\ddot{x} + \frac{\alpha}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

Rappels résolutions...

Forme de la solution :

$$x(t) = A\,e^{r\,t}$$

Équation caractéristique :

$$r^2 + \frac{\alpha}{m} r + \frac{k}{m} = 0$$

Valeur du discriminant :

$$\Delta = \left(\frac{\alpha}{m}\right)^2 - 4\frac{k}{m} = \frac{\alpha^2}{m^2} - 4\,\omega_0^2$$

Régime amortie – cas $\Delta < 0$

$\alpha < 2\omega_0 m$ → amortissement faible

Racines de l'équation caractéristique :

$$r_{\pm} = \frac{-\alpha}{2m} \pm j\sqrt{\omega_0^2 - \frac{\alpha^2}{4m^2}}$$

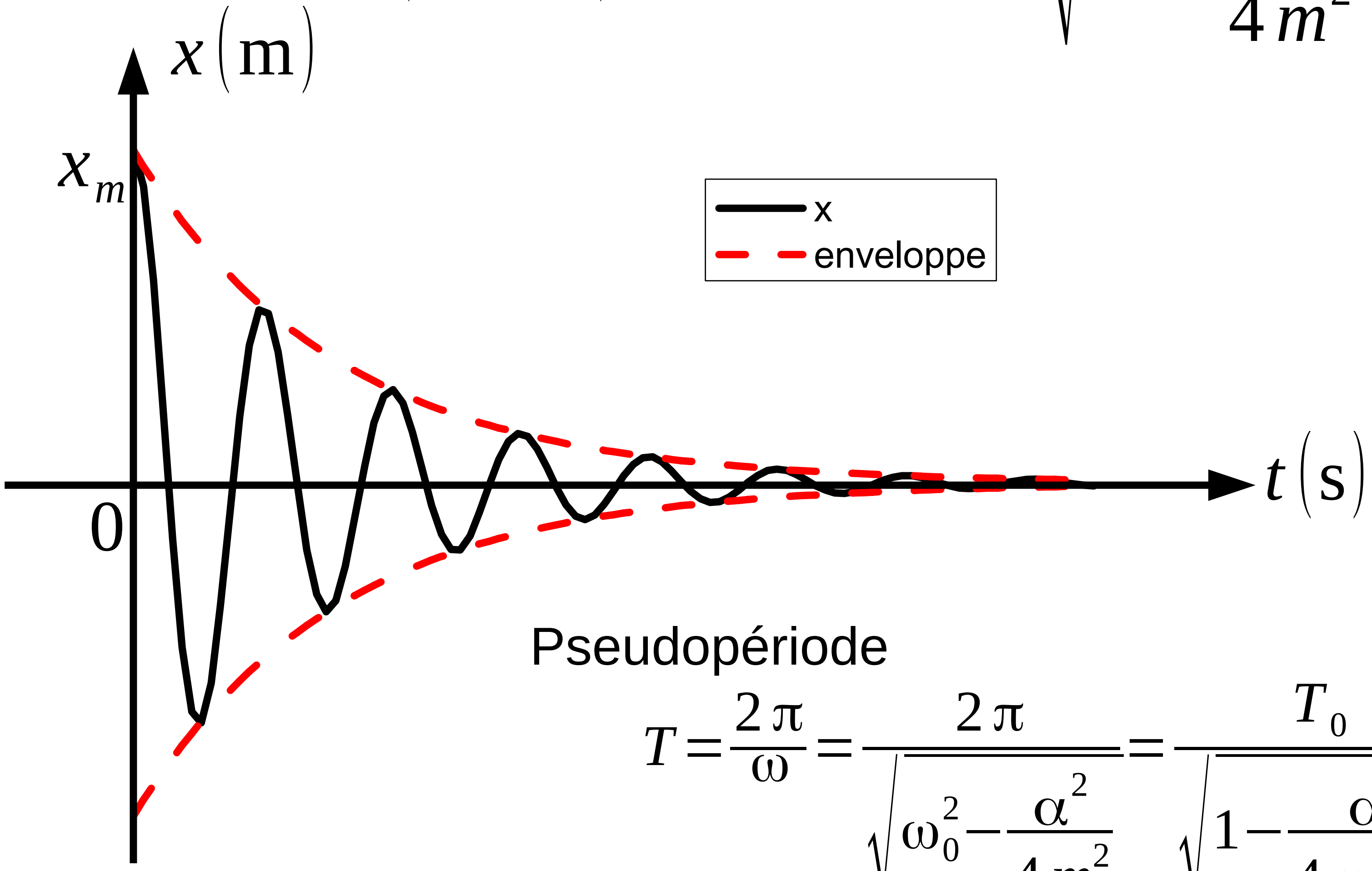
Solution de l'équation différentielle

$$\text{C. I. : à } t=0 \text{ , } x(t=0) = x_{max} \text{ et } v(t=0) = 0$$

$$x(t) = x_{max} e^{\frac{-\alpha}{2m}t} \cos(\omega t + \phi)$$ avec $$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\alpha^2}{4m^2}}$$

Régime amortie – cas $\Delta < 0$

$$x(t) = X_{max}\, e^{\frac{-\alpha}{2m}t} \cos(\omega t + \phi) \quad \text{avec} \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\alpha^2}{4m^2}}$$



Pseudopériode

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \frac{\alpha^2}{4m^2}}} = \frac{T_0}{\sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{4\omega_0^2 m^2}}}$$

Régime critique – cas $\Delta = 0$

$$\alpha = 2\,\omega_0\,m \qquad \rightarrow \text{ oscillateur critique}$$

Racines de l'équation caractéristique :

$$r = \frac{-\alpha}{2\,m}$$

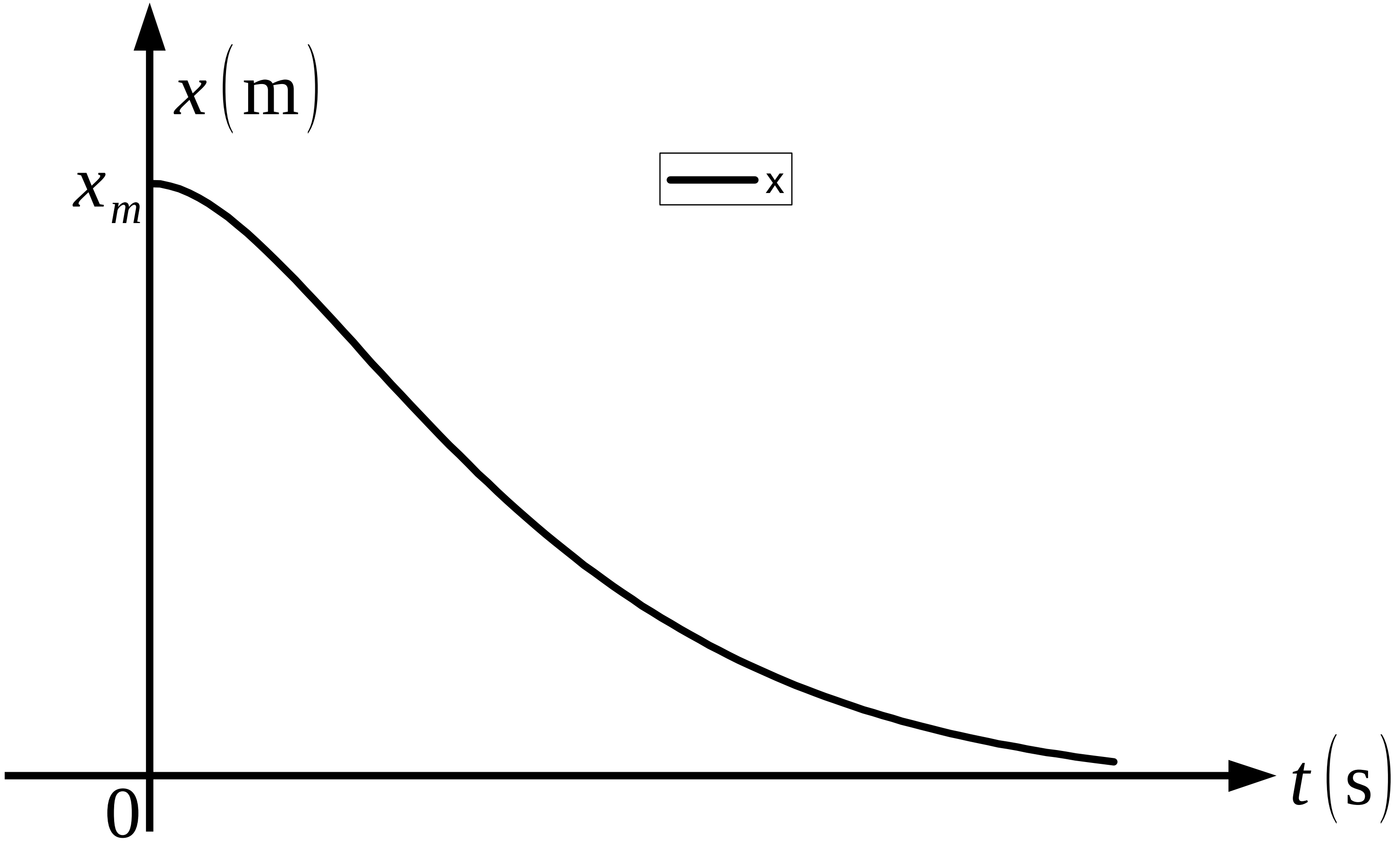
Solution de l'équation différentielle

$$\text{C. I. : à } t=0 \;,\; x(t=0) = x_{max} \text{ et } v(t=0)=0$$

$$x(t) = x_{max}\left(\frac{\alpha}{2\,m}t+1\right)e^{\frac{-\alpha}{2\,m}t}$$

Régime critique – cas $\Delta = 0$

$$x(t) = x_{max}\left(\frac{\alpha}{2m}t + 1\right)e^{\frac{-\alpha}{2m}t}$$



Régime apériodique – cas $\Delta > 0$

$$\alpha > 2\,\omega_0\, m$$ → amortissement fort

Racines de l'équation caractéristique :

$$r_{\pm} = \frac{-\alpha}{2m} \pm \sqrt{\frac{\alpha^2}{4m^2} - \omega_0^2}$$

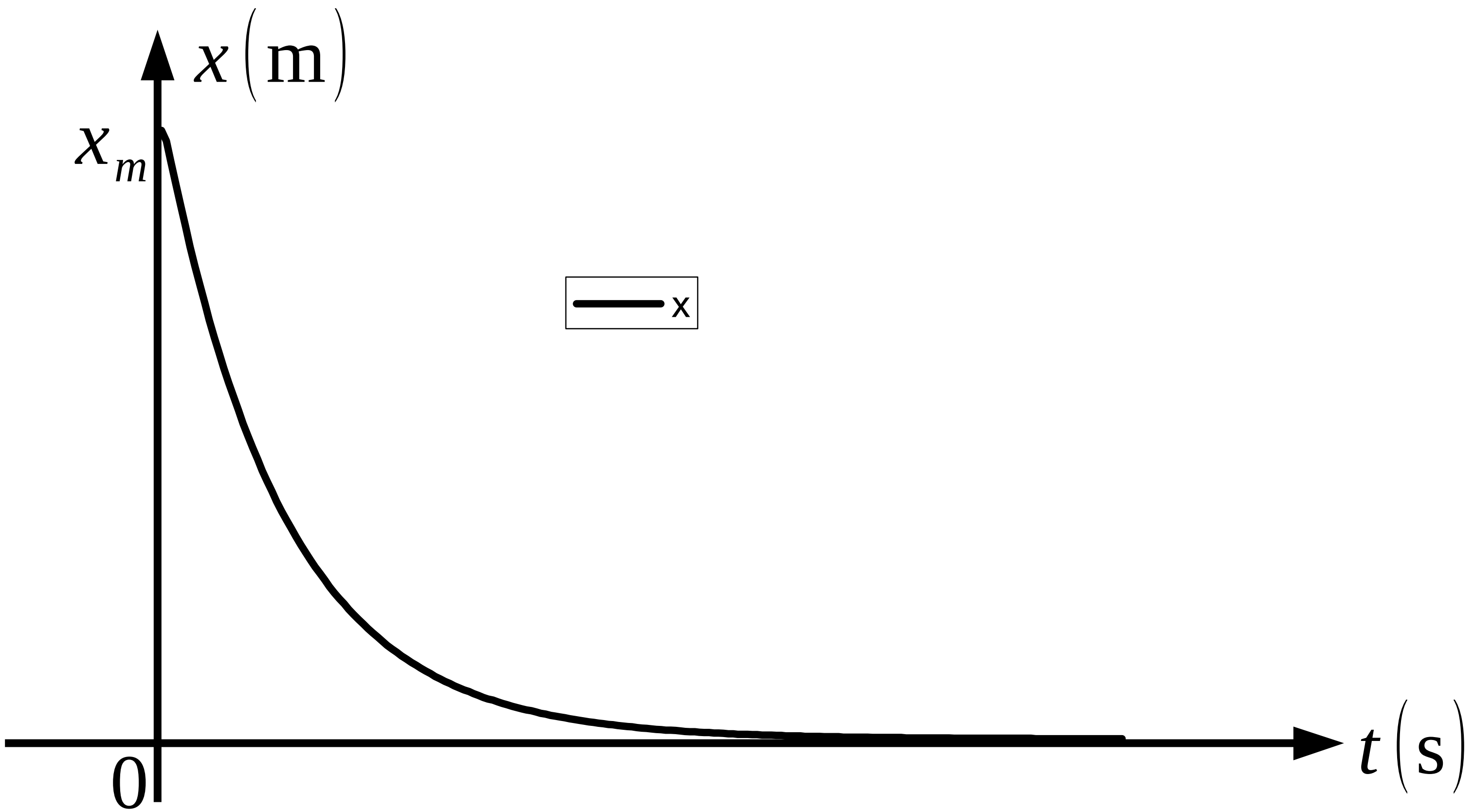
Solution de l'équation différentielle

$$\text{C. I. : à } t=0\ ,\ x(t=0)=x_{max} \text{ et } v(t=0)=0$$

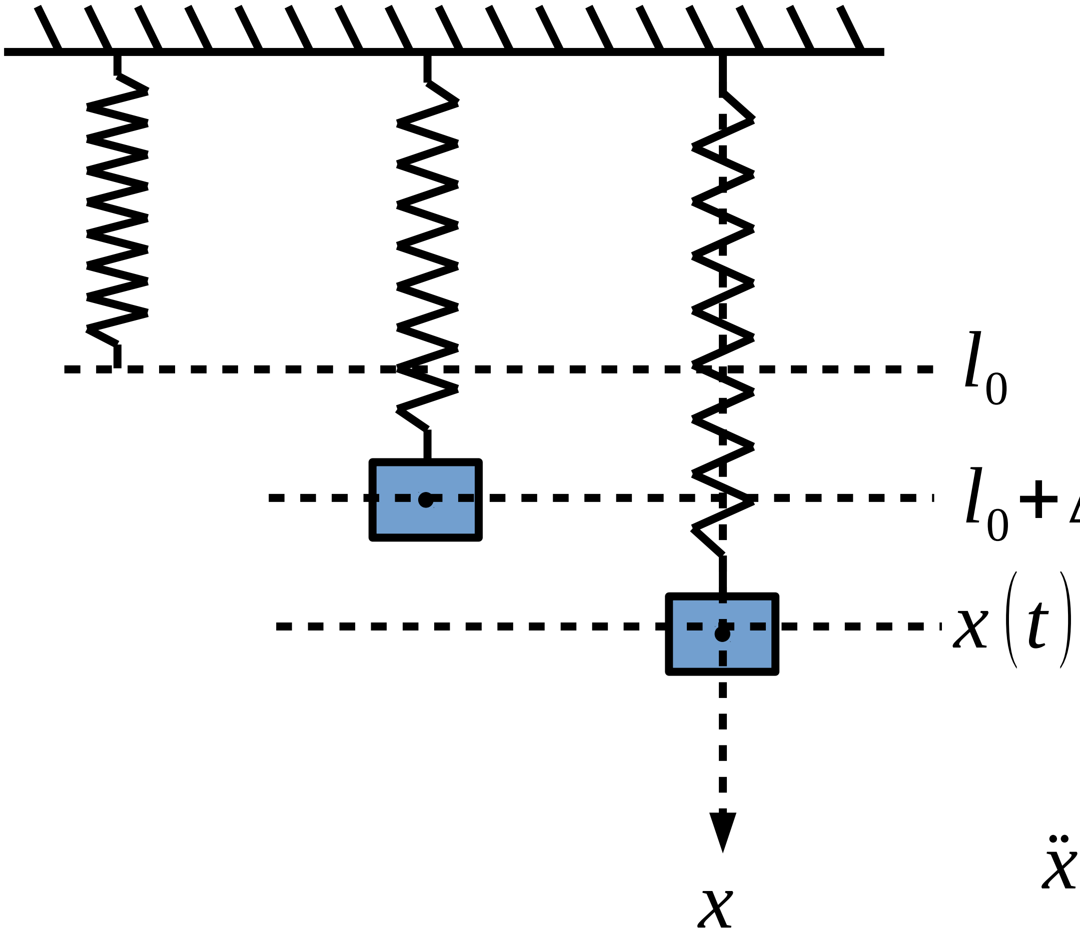
$$x(t) = \frac{x_{max}}{2} e^{\frac{-\alpha}{2m}t} \left[\left(1 + \frac{\alpha}{2m\omega}\right) e^{\sqrt{\frac{\alpha^2}{4m^2} - \omega_0^2}\,t} + \left(1 - \frac{\alpha}{2m\omega}\right) e^{-\sqrt{\frac{\alpha^2}{4m^2} - \omega_0^2}\,t} \right]$$

Régime apériodique – cas $\Delta > 0$

$$x(t)=\frac{x_{max}}{2}e^{\frac{-\alpha}{2m}t}\left[\left(1+\frac{\alpha}{2m\omega}\right)e^{\sqrt{\frac{\alpha^2}{4m^2}-\omega_0^2}\,t}+\left(1-\frac{\alpha}{2m\omega}\right)e^{-\sqrt{\frac{\alpha^2}{4m^2}-\omega_0^2}\,t}\right]$$



Equation différentielle du mouvement



$$\ddot{x}+\frac{\alpha}{m}\dot{x}+\frac{k}{m}x=F_0\cos(\omega t)$$

La force extérieure impose la pulsation

Solution de l'équation différentielle

Solution = solution générale + solution particulière

Solution = régime transitoire + régime permanent

Régime transitoire :

$$x(t) = x_{max} e^{\frac{-\alpha}{2m} t} \cos(\omega' t + \phi) \qquad \omega' = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\alpha^2}{4m^2}}$$

Régime permanent :

$$x(t) = x_0 \cos(\omega t + \phi)$$

Régime permanent

$$x_0 = \frac{F_0}{m} \frac{1}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + \frac{\alpha^2 \omega^2}{m^2}}}$$

$$\tan\phi = -\frac{\alpha\omega}{m\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)}$$