CSI3/U3/CIR3 25 avril 2017
Sans Document
Avec Calculatrice

# Devoir Surveillé
# Analyse des Signaux et des Images

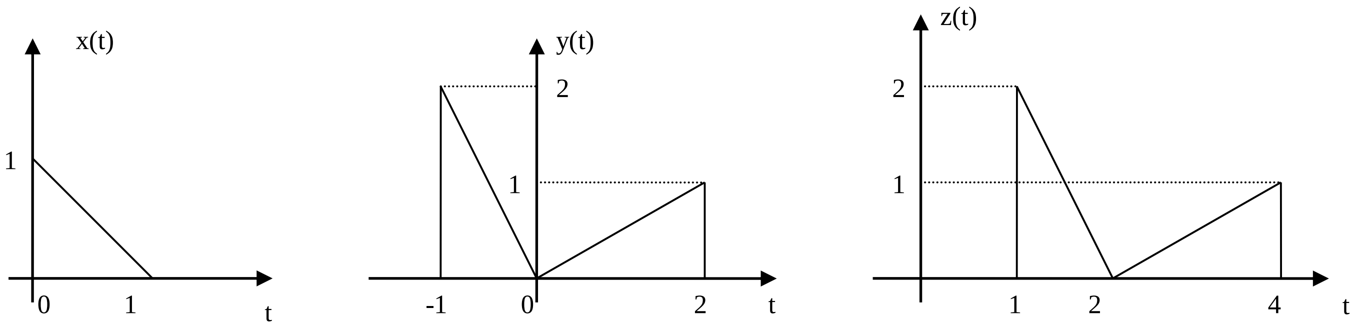
**Les réponses seront expliquées, justifiées et correctement rédigées**
**L'évaluation tiendra compte de cette rédaction et du raisonnement.**

## *Exercice 1* *(les 3 questions sont indépendantes)*

1. Donner l'expression de la transformée de Fourier du signal $x(t) = \sin(2\pi t) + \cos\left(2\pi t + \frac{\pi}{4}\right)$

   et représenter son spectre d'amplitude et son spectre de phase

2. Supposons que X(f), la transformée de Fourier du signal x(t) ci-dessous est connue.
   Calculer Y(f) et Z(f), les transformées de Fourier de y(t) et z(t), en fonction de X(f), <u>sans calculer explicitement X(f).</u>




3. Calculer de manière simple l'énergie du signal $x(t) = \text{sinc}\left(\frac{t}{2}\right)$.

## **Exercice 2 :** *Etude d'un signal rectangulaire périodique*

Soit y(t) le signal périodique suivant :

$$y(t) = \begin{cases} 1 & si \quad t \in \left[0; \dfrac{1}{4\upsilon_0}\right] \\ 0 & ailleurs \end{cases}$$

1. Déterminer l'expression de la transformée de Fourier de y(t)

2. Représenter le spectre d'amplitude de y(t)

3. Soit z(t) le signal défini de la manière suivante :

$$z(t) = y(t) * \sum_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - \frac{k}{2\vartheta_0})$$

Représenter le spectre de z(t) en amplitude dans l'intervalle [$-6\upsilon_0$ ; $6\upsilon_0$]

# FORMULAIRE

**Formules Trigo :**

cos(a+b) = cos(a).cos(b) – sin(a).sin(b)
cos(a-b) = cos(a).cos(b) + sin(a).sin(b)
sin(a+b) = sin(a).cos(b) + sin(b).cos(a)
sin(a-b) = sin(a).cos(b) – sin(b).cos(a)

cos(a).cos(b) = ½ ( cos(a+b) + cos(a-b) )
sin(a).sin(b) = ½ ( cos(a-b) – cos(a+b) )
cos(a).sin(b) = ½ ( sin(a+b) – sin(a-b) )
sin(a).cos(b) = ½ ( sin(a+b) + sin(a-b) )

**Définition de la convolution y(t)=x(t)*h(t)**

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(u)h(t-u)du = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t-u)h(u)du$$

**Décomposition en série de Fourier réelle et complexe + Relations entre an, bn et cn**

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(2\pi n \frac{t}{T}\right) + b_n \sin\left(2\pi n \frac{t}{T}\right)$$

*avec*

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_T x(t)dt$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_T x(t)\cos\left(2\pi n \frac{t}{T}\right)dt$$

$$bn = \frac{2}{T}\int_T x(t)\sin\left(2\pi n \frac{t}{T}\right)dt$$

$$x(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{+2\pi j\frac{n}{T}t}$$

*avec*

$$c_n=\frac{1}{T}\int_T x(t)e^{-2\pi j\frac{n}{T}t}dt$$

$$c_0=\frac{a_0}{2}$$

$$c_n=\frac{1}{2}(a_n-jb_n)$$

$$c_{-n}=\frac{1}{2}(a_n+jb_n)=c_n^*$$

**Quelques propriétés liées aux séries de Fourier**

Dérivation :

Soit x(t) un signal périodique de période T et Xk ses coefficients de décomposition en série de Fourier complexe alors les coefficients de décomposition en série de Fourier complexe de la fonction :

$\frac{d^n x(t)}{dt^n}$ sont : $\left(2\pi jk\frac{1}{T}\right)^n X_k$

**Quelques propriétés de la Transformée de Fourier :**

- Changement d'échelle : $x(t)\xrightarrow{TF}X(\upsilon)$, $x(kt)\xrightarrow{TF}\frac{1}{|k|}X\left(\frac{\upsilon}{k}\right)$
- Dualité : $x(t)\leftrightarrow X(\upsilon)$ alors $X(t)\leftrightarrow x(-\upsilon)$
- Dérivation :
  - Par rapport au temps
    $$x(t)\xrightarrow{TF}X(\upsilon)$$
    $$\frac{d^n x(t)}{dt^n}\xrightarrow{TF}(2\pi j\upsilon)^n X(\upsilon)$$
  - Par rapport à la fréquence
    $$x(t)\xrightarrow{TF}X(\upsilon)$$
    $$t^n x(t)\xrightarrow{TF}\frac{d^n X(\upsilon)}{d\upsilon^n}\frac{1}{(-2\pi j)^n}$$

**Transformée de Fourier d'un peigne de Dirac**

$$x(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(t-nT) \quad \rightarrow \quad X(\upsilon)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{T}\delta\left(\upsilon-\frac{n}{T}\right)$$

**Définition de l'intercorrélation pour x(t) et y(t) d 'énergie finie**

$$C_{xy}(\tau)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)y^*(t-\tau)dt$$

**Définition de l'intercorrélation pour x(t) et y(t) d 'énergie infinie et de puissance finie**

$$C_{xy}(\tau) = \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} x(t) y^*(t-\tau) dt$$

**Définition de la Transformée de Fourier Discrète (TFD) :**

$$X\left(\nu = \frac{k}{NT_e}\right) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-\frac{2j\pi nk}{N}} \equiv X(k) \qquad k \in \{0,1,\dots,N-1\}$$

Périodique de période N en k donc de période $\nu_e$ en $\nu$

**Expression matricielle de la TFD :**

Colonne numéro n

ne
méro

$$\begin{bmatrix} X(0) \\ X(1) \\ \vdots \\ X(N-2) \\ X(N-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & e^{-\frac{2i\pi nk}{N}} & \vdots & \vdots \\ 1 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ \vdots \\ x(N-2) \\ x(N-1) \end{bmatrix}$$

**Expression de la fenêtre de Hanning calculée sur N points :**

$$h(n) = 0.5\left(1 - \cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right)\right) \qquad \text{avec } n=0,1,\dots,N-1$$

**Expression de la fenêtre de Hamming calculée sur N points :**

$$h(n) = 0.54 - 0.46.\cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right) \qquad \text{avec n=0,1,…,N-1}$$

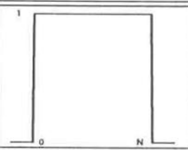
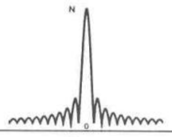
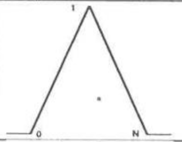
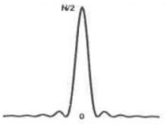
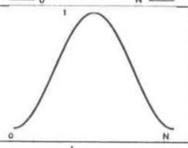
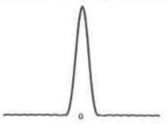
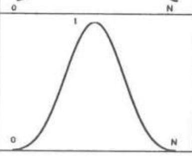
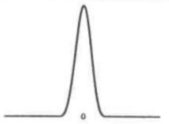
| Nom | | Représentation temporelle | Représentation fréquentielle | Largeur lob.princ. | Amp. relative $\frac{lob.princ}{lob.sec.}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| **Rectangulaire** | |  |  | $\frac{2}{N}$ | -13 dB |
| **Triangulaire** | |  |  | $\frac{4}{N}$ | -25 dB |
| **Hamming** | |  |  | $\frac{4}{N}$ | -41 dB |
| **Blackman** | |  |  | $\frac{6}{N}$ | -57 dB |

**Table 3** *Différents types de fenêtres et leurs caractéristiques*