• Calcul intégral
• Développements limités
• Équations différentielles linéaires du 1^{er} et du 2^{nd} ordre

Professeur : Hassan Kaddouri

ISEN

2020/2021

Table des matières

1 Calcul intégral **5**
1.1 Primitives . . . 5
1.1.1 Définition et propriétés . . . 5
1.2 Intégrale d'une fonction . . . 6
1.2.1 Interprétation graphique d'une intégrale . . . 6
1.2.2 Propriétés de l'intégrale . . . 8
1.2.3 Intégration par parties (IPP) . . . 8
1.2.4 Changement de variable . . . 10
1.2.5 Intégration des fractions rationnelles . . . 11
1.3 Feuille d'exercices : Calcul Intégral . . . 12
1.4 Dérivées des fonctions usuelles . . . 13
1.5 Primitives des fonctions usuelles . . . 14

2 Développements limités **15**
2.1 Définitions et propriétés . . . 15
2.1.1 développement limité d'ordre n en a . . . 15
2.1.2 Formule de Taylor-Young . . . 16
2.1.3 Développement limité en 0 . . . 16
2.1.4 Développements limités usuels . . . 16
2.1.5 Changement de variable . . . 17
2.2 Opérations . . . 17
2.2.1 Opérations élémentaires . . . 17
2.2.2 Somme, produit . . . 18
2.2.3 Composition . . . 18
2.2.4 Dérivation et intégration . . . 18
2.3 Applications des développements limités . . . 19
2.3.1 Interprétation graphique . . . 19
2.3.2 Calcul de limites . . . 19
2.3.3 Recherche d'équivalents . . . 20
2.3.4 Position relative d'une courbe par rapport à sa tangente . . . 20
2.3.5 Recherche d'asymptote . . . 20
2.4 Feuille d'exercices : Développements limités . . . 21

3 Intégrales multiples **23**
3.1 Intégrales doubles . . . 23
3.1.1 Introduction . . . 23
3.1.2 Description hiérarchisée d'une partie fermée bornée de $\mathbb{R}^2$ . . . 25
3.1.3 Intégrale double de f continue sur Δ, un fermé borné de $\mathbb{R}^2$ . . . 26
3.1.4 Théorème de Fubini : inversion des bornes . . . 27
3.1.5 Un cas particulier . . . 29
3.1.6 Propriétés . . . 29
3.1.7 Changement de variables . . . 30
3.1.8 Changement de variables en coordonnées polaires . . . 30
3.2 Intégrales triples . . . 33

3.2.1 Description hiérarchisée d'une partie fermée bornée de $\mathbb{R}^3$ . . . 33
3.2.2 Intégrale double de f continue sur Δ, un fermé borné de $\mathbb{R}^3$ . . . 33
3.2.3 Théorème de Fubini : inversion des bornes . . . 33
3.2.4 Changement de variables . . . 34
3.2.5 Coordonnées cylindriques . . . 35
3.2.6 Coordonnées sphériques . . . 36
3.3 Applications : calculs divers . . . 37
3.3.1 Aire ou volume . . . 37
3.3.2 Masse . . . 38
3.3.3 Centre d'inertie . . . 39
3.3.4 Moments d'inertie . . . 39
3.4 Feuille d'exercices : Intégrales multiples . . . 40

4 Équations différentielles linéaires 43
4.1 Introduction . . . 43
4.1.1 Un problème de cinématique : trajectoire balistique . . . 43
4.1.2 Un problème de rhéologie : système visco-élastique . . . 44
4.1.3 Un problème d'électrocinétique : circuit RLC série . . . 44
4.2 Équations différentielles linéaires du 1$^{\text{er}}$ ordre . . . 45
4.2.1 Définitions . . . 45
4.2.2 Solution générale . . . 45
4.2.3 Problème de Cauchy . . . 46
4.2.4 Second membre polynômial ou exponentiel . . . 46
4.2.5 Second membre trigonométrique . . . 48
4.2.6 Principe de superposition . . . 49
4.3 Équations différentielles linéaires du 2$^{\text{nd}}$ ordre . . . 52
4.3.1 Définitions . . . 52
4.3.2 Solution générale . . . 52
4.3.3 Solution de l'équation homogène . . . 52
4.3.4 Solution générale . . . 54
4.3.5 Seconds membres particuliers . . . 54
4.3.6 Principe de superposition . . . 56
4.4 Feuille d'exercices : Équations différentielles linéaires . . . 64

Chapitre 1

Calcul intégral

1.1 Primitives

1.1.1 Définition et propriétés

Définition 1.1
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I quelconque.
On dit que la fonction $F : I \to \mathbb{R}$ est une primitive de f sur I si F est une fonction dérivable sur I vérifiant $F'(x) = f(x)$ pour tout $x \in I$.

Trouver une primitive est donc l'opération inverse de calculer la fonction dérivée.

Proposition 1.1
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction et soit $F : I \to \mathbb{R}$ une primitive de f sur I.
Toute primitive de f s'écrit $G = F + c$ où c est une constante réelle.

Exemple 1.1
La fonction $f(x) = x^3$ admet les primitives suivantes $F(x) = \frac{1}{4}x^4 + c$ car sa dérivée $F'(x) = x^3 = f(x)$.

On note $\int f(x)dx$ ou simplement $\int f$ la primitive de f correspondant à $c = 0$.

Proposition 1.2 ***Linéarité***
Soient F et G respectivement les primitives de f et g sur un intervalle I.

$$\boxed{\int (\lambda f(x) + \mu g(x))\, dx = \lambda \int f(x)dx + \mu \int g(x)dx}\ .$$

Les dérivées et les primitives des fonctions usuelles sont données à la fin de ce chapitre.

Exemple 1.2
donner les primitives des fonctions suivantes

1. $x(x^2 - 2)^3$
2. $\sin^2(x) - 3\sin(x) + 8$
3. $\dfrac{x+1}{1+x^2}$
4. $\dfrac{3x-2}{\sqrt{1-x^2}}$

1.2 Intégrale d'une fonction

Définition 1.2 *Soit $I = [a, b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$, f une fonction définie sur I et F une primitive de f. On appelle intégrale de la fonction f sur $I = [a, b]$ le nombre réel noté $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ noté aussi parfois $\Big[F(x)\Big]_a^b$.*
Si I existe et fini on dit que la fonction est intégrable. Pour cela il suffit que f soit continue par morceaux et son éventuelle discontinuité soit du 1ère espèce (voir cours analyse pour plus de détail).

Remarque 1.1 $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ *est **l'unique primitive de $f(x)$** qui s'annule en a.*

1.2.1 Interprétation graphique d'une intégrale

Soit f une fonction positive, alors l'aire sous la courbe de f, l'axe horizontal et les droites verticales d'équations $x = a$ et $x = b$ est égale à l'intégrale de f définie entre les bornes a et b. On verra ultérieurement une démonstration de cette propriété (voir Chapitre Intégrales doubles).

Exemple 1.3
Calculer l'aire du triangle suivant (voir figure ci-après) :

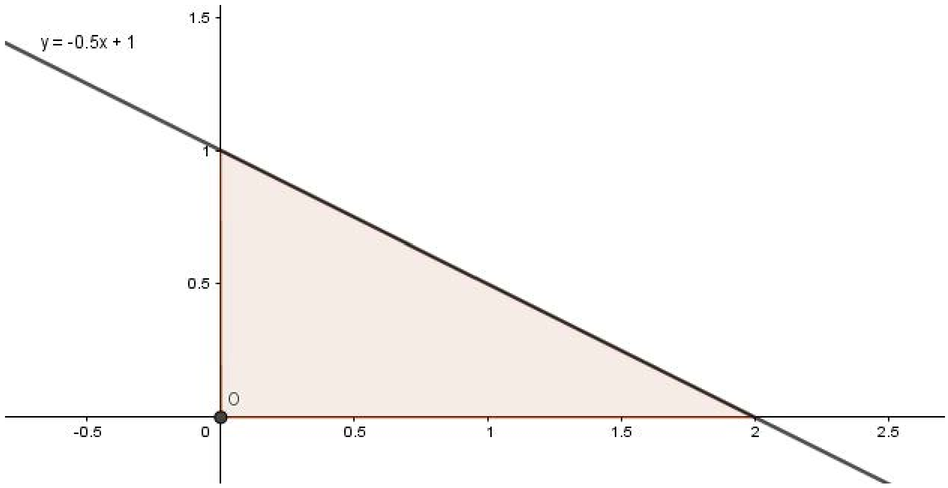

FIGURE 1.1 – Aire sous la droite d'équation $y = 1 - \frac{1}{2}x$, l'axe horizontal (Ox) et les droites verticales d'équations $x = 0$ et $x = 2$

L'aire du triangle, notée A, est égale à $\displaystyle\int_0^2 \left(1 - \frac{1}{2}x\right) dx$.
Donc $A = \left[x - \frac{1}{4}x^2\right]_0^2 = 1$.
On retrouve le résultat connu de la formule de l'aire d'un triangle rectangle $A = a * \frac{h}{2}$.

Définition 1.3 ***Aire entre deux courbes de fonctions*** *Soit $f(x)$ et $g(x)$ deux fonctions intégrables sur $[a, b]$ telle que $f(x) \leqslant g(x)$ sur $[a, b]$.*
L'aire comprise entre les deux courbes représentatives des fonctions $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ et les deux droites verticales d'équations $x = a$ et $x = b$ est donné par $\displaystyle\int_a^b \Big(g(x) - f(x)\Big)dx$.

Exemple 1.4
Soit $f(x) = 9 - x^2$ et $g(x) = x^2 - 3x + 1$.
Calculer l'aire A de la partie du plan délimitée par les courbes de f et de g et les deux droites verticales $x = -1$ et $x = 2$ (voir figure ci-après).
Il suffit de calculer $A = \displaystyle\int_{-1}^2 \Big[(9 - x^2) - (x^2 - 3x + 1)\Big]dx$.

On trouve facilement $A = \frac{45}{2}$.

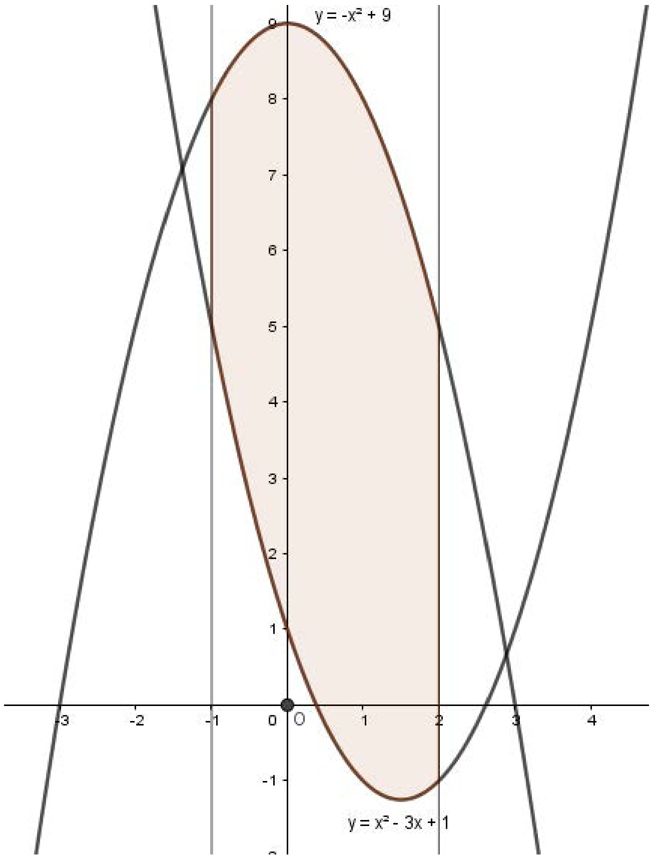

FIGURE 1.2 – Aire entre deux courbes

1.2.2 Propriétés de l'intégrale

Propriétés 1.1

- ***Relation de Chasles*** : $\boxed{\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx}$ $a, b, c \in \mathbb{R}$ *avec* $a < c < b$

- ***Monotonie de l'intégrale*** : $\boxed{\text{si } f \leqslant g \text{ alors } \int_a^b f(x)dx \leqslant \int_a^b g(x)dx}$ $a, b \in \mathbb{R}$ *avec* $a \leqslant b$.

  En particulier :

- ***Positivité de l'intégrale*** : $\boxed{\text{si } f(x) \geqslant 0 \text{ pour tout } x \in [a,b] \text{ alors } \int_a^b f(x)dx \geqslant 0}$ $a \leqslant b \in \mathbb{R}$.

- ***Valeur absolue et intégrale*** : $\boxed{\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\, dx}$

- ***Linéarité de l'intégrale*** : $\boxed{\int_a^b \Big(\lambda f(x) + \mu g(x)\Big)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx + \mu \int_a^b g(x)dx}$

1.2.3 Intégration par parties (IPP)

On dit qu'une fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ si f est continue, dérivable et sa dérivée f' est continue.
Soient u et v deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$. Partant de la dérivée du produit : $(uv)' = u'v + uv'$ on montre facilement :

$$\boxed{\int_a^b u(x)v'(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx}$$

Exemple 1.5

En utilisant la méthode d'intégration par parties calculer :

1. $I_1 = \displaystyle\int_0^x \sin(t)e^t dt.$
2. $I_2 = \displaystyle\int_0^x \arctan(t) dt.$

1.2.4 Changement de variable

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $\phi : J \to I$ une bijection de classe $\mathcal{C}^1$.

$$\text{Pour tout } a, b \in J : \boxed{\int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(x)dx = \int_a^b \phi'(t).f(\phi(t))dt}$$

Mise en pratique du changement de variable

1. On pose $x = \varphi(u)$ avec $u = \psi(x)$
2. On remplace $f(x)$ par $f(\varphi(u))$
3. On pose $dx = \varphi'(u)du$
4. On cherche la valeur prise par u quand $x = a$ (on résout $a = \varphi(u)$)
5. On cherche la valeur prise par u quand $x = b$
6. il suffit de remplacer dans l'intégrale et continuer les calculs avec une nouvelle intégrale plus facile à calculer.

Exemple 1.6
En posant $u = e^x$, montrer que $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^x}{\sqrt{e^x+1}}dx = 2\sqrt{e+1} - 2\sqrt{2}.$

1.2.5 Intégration des fractions rationnelles

Méthode de décomposition en éléments simples

Définition 1.4 *Soient $A(x)$ et $B(x)$ deux polynômes. On appelle fraction rationnelle toute fonction de la forme $f(x) = \dfrac{A(x)}{B(x)}$ où $x \in \mathcal{D}_f = \{x \in \mathbb{R}/B(x) \neq 0\}$.*

Les valeurs de x qui annulent le dénominateur s'appellent pôles de la fraction rationnelle.
Par exemple, on peut montrer facilement que $\dfrac{2}{x-1} + \dfrac{3}{x+2} - \dfrac{1}{x+3} = \dfrac{4x^2+15x+5}{(x-1)(x+2)(x+3)}$.

Définition 1.5 *On appelle* ***décomposition en éléments simples*** *sur $\mathbb{R}$ l'opération inverse qui brise une fraction rationnelle « compliquée » à coefficients réels en une somme de morceaux « simples » eux-mêmes à coefficients réels.*

Donc décomposer la fraction rationnelle $\dfrac{4x^2+15x+5}{(x-1)(x+2)(x+3)}$ c'est de l'écrire sous la forme :
$\dfrac{2}{x-1} + \dfrac{3}{x+2} - \dfrac{1}{x+3}$.
Si on veut par exemple calculer l'intégrale $I = \displaystyle\int_2^3 \dfrac{4x^2+15x+5}{(x-1)(x+2)(x+3)}\,dx$, il suffit d'utiliser la forme simple de la fraction rationnelle et ensuite d'utiliser la linéarité de l'intégrale. On a donc :

$$\begin{aligned} I &= \int_2^3 \frac{4x^2+15x+5}{(x-1)(x+2)(x+3)}\,dx \\ &= \int_2^3 \frac{2}{x-1}\,dx + \int_2^3 \frac{3}{x+2}\,dx - \int_2^3 \frac{1}{x+3}\,dx \\ &= 2\big[\ln|x-1|\big]_2^3 + 3\big[\ln|x+2|\big]_2^3 - \big[\ln|x+3|\big]_2^3 = \ldots = \ln(\tfrac{625}{96}). \end{aligned}$$

Remarque 1.2 *Si la puissance du polynôme du numérateur est supérieure à celle du dénominateur, on commence d'abord faire une division euclidienne et on appliquera les règles précédentes au reste de la division (voir littérature pour plus de détails).*

Exemple 1.7
En utilisant la méthode de décomposition en éléments simples, calculer l'intégrale suivante :

$$I = \int_1^3 \frac{x+3}{(x+1)^2(x+2)}dx.$$

1.3 Feuille d'exercices : Calcul Intégral

Exercice 1.1

Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes et calculer leurs dérivées :

(*a*) $f_1(x) = \ln(3x^2 + 5x - 8)$ (*b*) $f_2(x) = \ln\left(x - \sqrt{x^2 - 1}\right)$ (*c*) $f_3(x) = xe^{-2x}$

(*d*) $f_4(x) = \dfrac{3x + 1}{2x - 3}$ (*e*) $f_5(x) = \sin^2(x) + \frac{1}{2}\cos(3x)$ (*f*) $f_6(x) = x^2 \sin(\frac{1}{x})$

Exercice 1.2

Calculer les primitives suivantes par intégration par parties (ipp).

1. $\displaystyle\int x^2 \ln(x)dx$
2. $\displaystyle\int \ln(x)dx$ *puis* $\displaystyle\int (\ln(x))^2 dx$
3. $\displaystyle\int x^2 \cos(x)dx$
4. $\displaystyle\int \cos(x)e^x dx$

Exercice 1.3

Calculer les primitives suivantes par changement de variable :

1. $\int \dfrac{1}{3 + e^{-x}}dx$ *(poser* $u = e^x$*)*
2. $\int \dfrac{1 + \sinh(x)}{1 + \cosh(x)}dx$ *(poser* $u = e^x$*)*
3. $\displaystyle\int \frac{1}{x\ln(x)}dx$ *(poser* $u = \ln(x)$*)*
4. $\displaystyle\int \cos^{2020}(x)\sin(x)dx$ *(poser* $u = \cos(x)$*)*

Exercice 1.4

Calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin(x)dx$ *(ipp)*
2. $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin^3(x)dx$ *(poser* $u = \cos(x)$*)*
3. $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x}{\sqrt{e^x + 1}}dx$ *(poser* $u = e^x$*)*
4. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(1 + x^2)^2}dx$ *(poser* $u = \arctan x$*)*

Exercice 1.5

En utilisant la méthode de décomposition en éléments simples, calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^1 \frac{3x + 1}{(x + 1)^2}dx$
2. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{(x + 1)(x^2 + 1)}dx$
3. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(x - 1)^2(x^2 + 4)}dx$
4. $\displaystyle\int_0^1 \frac{10x^2 + 15x + 36}{(x + 3)(x^2 + x + 3)}dx$

Exercice 1.6

Soit $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(x))^n dx$ *pour* $n \in \mathbb{N}$.

1. *Montrer que* $I_{n+2} = \dfrac{n + 1}{n + 2}I_n$. *Expliciter* I_n.
2. *En posant* $x = \cos(u)$, *déduire la valeur de* $\displaystyle\int_{-1}^1 (1 - x^2)^n dx$.

1.4 Dérivées des fonctions usuelles

$f(x)$	$f'(x)$	$(\mathcal{D}_f)$ ou $(\mathcal{D}'_f)$	$f(x)$	$f'(x)$
k constante	0	$\mathbb{R}$	$u+v$	$u'+v'$
kx, k constante	k	$\mathbb{R}$	(ku), k constante	ku'
x^n, $n \in \mathbb{N}$	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$	uv	$u'v+uv'$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$	$\frac{1}{u}$	-$\frac{u'}{u^2}$
$\frac{1}{x^n}$, $n \in \mathbb{N}^*$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$	$\mathbb{R}^*$	$\frac{u}{v}$	$\frac{u'v-uv'}{v^2}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}^{+*}$	$\sqrt{u}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$
x^α, $\alpha \in \mathbb{R}$	$\alpha x^{\alpha-1}$	$\mathbb{R}^{+*}$	u^α $\alpha \in \mathbb{R}$	$\alpha u' u^{\alpha-1}$
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^{+*}$	$\ln(u)$	$\frac{u'}{u}$
e^x	e^x	$\mathbb{R}$	e^u	$u'e^u$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$\mathbb{R}$	$\cos(u)$	$-u'\sin(u)$
$\sin(x)$	$\cos(x)$	$\mathbb{R}$	$\sin(u)$	$u'\cos(u)$
$\tan(x)$	$1+\tan^2 x = \frac{1}{\cos^2(x)}$	$\mathbb{R}^*$	$\tan(u)$	$u'(1+\tan^2 u) = \frac{u'}{\cos^2(u)}$
$\arcsin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$]-1;1[$	$g \circ f(x) = g(f(x))$	$f'(x) \cdot g'(f(x))$
$\arccos(x)$	-$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$]-1;1[$	$f^{-1}(x)$	$\frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$
$\arctan(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\mathbb{R}$		
$arsinh(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\mathbb{R}$		
$arcosh(x)$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$]1;+\infty[$		
$artanh(x)$	$\frac{1}{1-x^2}$	$]-1;1[$		

1.5 Primitives des fonctions usuelles

$f(x)$	$\int f(x)dx$	$\mathcal{D}_f$
e^x	e^x	$\mathbb{R}$
$e^{ax},\ a \neq 0$	$\frac{1}{a}e^{ax}$	$\mathbb{R}$
$\cos x$	$\sin(x)$	$\mathbb{R}$
$\sin(x)$	-$\cos x$	$\mathbb{R}$
$\cosh x$	$\sinh x$	$\mathbb{R}$
$\sinh x$	$\cosh x$	$\mathbb{R}$
$x^n,\ n \in \mathbb{N}$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert$	$\mathbb{R}^{+*}$ ou $\mathbb{R}^{-*}$
$x^\alpha,\ \alpha \neq -1$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	$\mathbb{R}^{+*}$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\begin{cases} \arcsin(x) \\ \frac{\pi}{2} - \arccos(x) \end{cases}$	$]-1;1[$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan(x)$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\begin{cases} arsinh(x) \\ \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) \end{cases}$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\begin{cases} arcosh(x) \\ \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) \end{cases}$	$]1;+\infty[$
$\frac{1}{1-x^2}$	$artanh(x)$	$]-1;1[$