3.2.3 Utilisation du dictionnaire d'images

Le dictionnaire d'images va être utilisé dans les deux cas : de la gauche vers la droite pour trouver les transformées de Laplace et de la droite vers la gauche pour trouver les originaux.
Donnons quelques exemples en insistant sur la pratique de la recherche des originaux.

Exemple 3.19
Déterminer la transformée de la place de la fonction $f(t) = \Big(\sin(3t)\cos(2t)\Big)\mathcal{U}(t)$.

Exemple 3.20
Déterminer l'original de la fonction $G(p) = \dfrac{p}{p^2 + 4p + 13}$.

Exemple 3.21
Déterminer l'original de la fonction $H(p) = \dfrac{2p+1}{p^2(p^2+4)}$.

Exemple 3.22
Déterminer l'original de la fonction $K(p) = \dfrac{\omega^2}{(p^2+\omega^2)^2}$.

Exemple 3.23
Déterminer l'original de la fonction $K(p) = \dfrac{\omega p}{(p^2+\omega^2)^2}$.

3.3 Applications de la transformation de Laplace

La transformation de Laplace permet de remplacer des problèmes de dérivation et d'intégration par des problèmes algébriques. Elle permet ainsi entre autre, de transformer des équations différentielles ou les systèmes d'équations différentielles en équations ou systèmes d'équations algébriques.

3.3.1 Résolution d'équations différentielles

Exemple 3.24
Résoudre les équations différentielles suivantes :

$$(E_1)\left\{\begin{array}{l} x'(t)+x(t)=e^t\mathcal{U}(t) \\ x(0^+)=1 \end{array}\right. \qquad (a) \qquad (E_2)\left\{\begin{array}{l} x"(t)-x'(t)=\sin(2t)\mathcal{U}(t) \\ x(0^+)=1\ ;\ x'(0^+)=-1 \end{array}\right. \qquad (b)$$

où la fonction $x(t)$ *est une fonction causale, continue sur* $]0,+\infty[$ *et dérivable par morceaux.*

3.3.2 Résolution d'équations différentielles

Exemple 3.25
Résoudre le système d'équations différentielles suivant :

$$(E)\begin{cases} 4x(t) + y'(t) = \mathcal{U}(t) \\ y(t) + x'(t) = 0 \\ x(0) = 1,\ y(0) = 0 \end{cases}$$

où les fonctions $x(t)$ *et* $y(t)$ *sont deux fonctions causales, continues sur* $]0, +\infty[$ *et dérivables par morceaux.*

3.4 Extension de la transformation de Laplace. Espace E

3.4.1 Définition de l'espace E

A. Fonctions localement sommables sur $\mathbb{R}$

En physique, des fonctions plus générales que celles de E_0 peuvent apparaître. Non seulement, elles peuvent s'expliciter à l'aide d'autres fonctions que les seules fonctions puissances ou exponentielles mais encore elles peuvent aussi être non partout continues par morceaux. Il faut ainsi généraliser la possibilité de parler des intégrales de telles fonctions sur $[0, +\infty[$. Soit donc une fonction f **causale** à valeurs dans $\mathbb{C}$ telle que, pour a réel quelconque positif, la fonction f soit continue sur $[0, a]$, éventuellement privé d'un nombre fini de points. On peut alors, sur cet intervalle, envisager éventuellement les intégrales de $|f|$ sur les intervalles limités à ces points de discontinuités (intégrales qui peuvent, le cas échéant, être généralisées). Si toutes ces intégrales existent (ou sont convergentes), on sait définir alors $\displaystyle\int_0^a |f(t)|dt$ (voir début du chapitre précédent : Transformée de Fourier). Ceci amène la définition suivante qui englobe toutes les fonctions continues, toutes les fonctions continues par morceaux, en particulier celles de E_0.

Définition 3.5

Une fonction f, causale, à valeurs dans $\mathbb{C}$ est dite localement sommable si, au sens de ce qui précède, l'intégrale $\displaystyle\int_0^a |f(t)|dt$ existe quel que soit $a > 0$.

B. Définition de l'espace E

Soit f une fonction causale, localement sommable sur $\mathbb{R}^+$. On peut donc considérer que l'intégrale définie par $\displaystyle\int_0^A |f(t)|dt$ et dépendante du réel positif A existe.

Supposons qu'il existe un réel p_0, tel que pour tout $p > p_0$ et puisque la fonction $t \mapsto e^{-pt}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$ que l'intégrale $\displaystyle\int_0^A |f(t)|e^{-pt}dt$ existe et que sa limite existe dans $\mathbb{R}$ lorsque $A \to +\infty$.

Définition 3.6

Soit f une fonction de la variable réelle à valeurs dans $\mathbb{C}$. On dit que f est un élément de E si :

1. *f est causale,*
2. *f est localement sommable sur $\mathbb{R}^+$,*
3. *Il existe un nombre réel p_0 el que : $\displaystyle\lim_{A\to+\infty} \int_0^A |f(t)|e^{-p_0 t}dt$ existe.*

Il est évident que $E_0 \subset E$, que toutes les combinaisons linéaires d'éléments de E sont dans E, qu'en multipliant une fonction f de E par une exponentielle e^{at} ou en la translatant d'une quantité $\tau > 0$, on obtient encore un résultat qui est dans E.

3.4.2 Transformation de Laplace dans E

A. Définition

Définition 3.7

Soit f un élément de E, alors il existe un nombre réel (éventuellement $-\infty$) noté $\sigma(f)$ et appelé ***abscisse de convergence*** *de f tel que :*

$$\forall p > \sigma(f) \qquad \lim_{A \to +\infty} \int_0^A |f(t)| e^{-pt} dt \text{ existe}$$

Dans ces conditions : $\lim_{A \to +\infty} \int_0^A f(t) e^{-pt} dt$ existe, quantité notée $\int_0^{+\infty} f(t) e^{-pt} dt$.
On définit ainsi une fonction F de la variable p sur l'intervalle $]\sigma(f), +\infty[$, éventuellement sur $\mathbb{R}$. Cette fonction F, définie sur cet intervalle (qui est $\mathbb{R}$ tout entier si $\sigma(f) = -\infty$) par

$$\boxed{F(p) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-pt} dt}$$

est appelée la ***transformée de Laplace*** *de f.*

Cette définition étend, bien évidemment, la transformation de Laplace dans E_0. Nous conservons dans la suite du cours les mêmes notations que celles utilisées dans E_0. Les exemples qui suivent sont relatifs à des fonctions qui sont dans E mais qui ne sont pas dans E_0.

B. Exemples

Examinons le cas des **fonctions périodiques, continues par morceaux sur une période**

Propriété 3.3
Soit f une fonction causale (nulle si $t < 0$), périodique, de période T, continue ou continue par morceaux sur $[0, T]$.
Soit $f_0(t) = f(t)$ si $t \in [0, T]$ et $f_0(t) = 0$ sinon. $f_0 \in E_0$ et on note $F_0(p) = \mathcal{L}[f_0](p)$.
On montre que $\boxed{F(p) = \mathcal{L}[f](p) = \dfrac{F_0(p)}{1 - e^{-pT}}}$

Exemple 3.26
Déterminer la transformée de la fonction f *causale, périodique, de période* T *et définie par* $f(t) = t$ *si* $t \in [0, T[$.

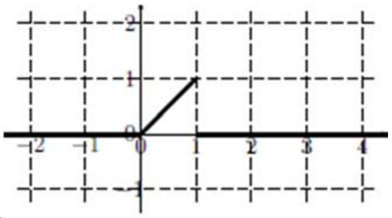
Exemple 3.27
Déterminer la transformée de la fonction f *causale, périodique, de période* π *et définie par* $f(t) = \sin(t)$ *si* $t \in [0, \pi[$ *(voir Exemple 3.12).*

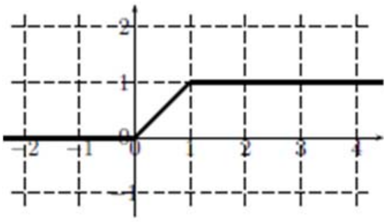
3.5 Feuille d'exercices : Transformation de Laplace

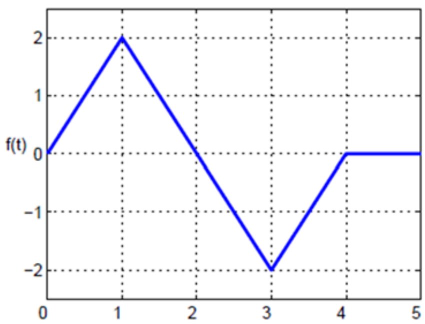
Exercice 3.1 ***Abscisse de convergence et transformée de Laplace des fonctions usuelles***
On considère les fonctions causales suivantes définies sur $\mathbb{R}^+$ et nulles sur $\mathbb{R}^-$. Pour chacune de ces fonctions, on vous demande de déterminer la transformée de Laplace et de préciser le domaine d'existence (déterminer l'abscisse de convergence).

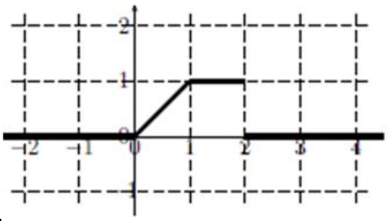
(a) $2e^{-6t}$ ***(c)*** $2t^4$ ***(e)*** $\alpha\cos(3t)+\beta\sin(3t)$ ***(g)*** $2e^{-2t}\big(\cos(2t)+\sin(2t)\big)$ ***(i)*** $e^{-4t}\sinh(8t)$
(b) $5e^{2t}$ ***(d)*** $(t^2+1)^2$ ***(f)*** $\alpha\cosh(3t)+\beta\sinh(3t)$ ***(h)*** $e^{-t}\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)$ ***(j)*** $e^{-2t}(t^2-1)^2$

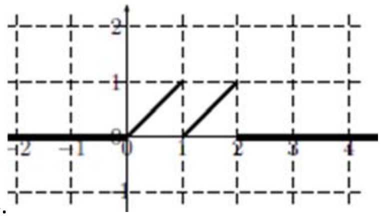
Exercice 3.2
Définir les fonctions représentées graphiquement à l'aide de la fonction échelon unité et calculer leurs transformées de Laplace.


1.


2.

5.



3.


4.

<u>**Réponse**</u> : 1. $\dfrac{1-e^{-p}}{p^2}+\dfrac{e^{-p}}{p}$; 2. $\dfrac{1-e^{-p}}{p^2}$; 3. $\dfrac{1-e^{-p}}{p^2}-\dfrac{e^{-2p}}{p}$;

4. $\dfrac{1-e^{-2p}}{p^2}-\dfrac{e^{-2p}+e^{-p}}{p}$; 5. $\dfrac{2(1-2e^{-p}+2e^{-3p}-e^{-4p})}{p^2}$.

Exercice 3.3

1. *En faisant apparaître le terme $t-1$, calculer $\mathcal{L}\big(f(t)\big)(p)=F(p)$ où : $f(t)=t^2\mathcal{U}(t-1)$.*
2. *En s'inspirant de la méthode de la question précédente, calculer les transformées de Laplace des fonctions suivantes :* ***(a)*** $g(t)=(t^2-t+1)\mathcal{U}(t-1)$ ***(b)*** $h(t)=e^{-2t}\mathcal{U}(t-1)$

<u>***Réponse***</u> *: 1.* $F(p)=\dfrac{p^2+2p+2}{p^3}e^{-p}$; 2. $G(p)=\dfrac{-p^2+p+2}{p^3}e^{-p}$; 3. $H(p)=\dfrac{e^{-(p+2)}}{p+2}$

Exercice 3.4 ***Propriétés de la transformée de Laplace***
Calculer la transformée de Laplace des fonctions suivantes (tracer le graphe des 3 premières fonctions) :

(a) $\mathcal{U}(t-1)-\mathcal{U}(t-2)$ ***(b)*** $(t-2)^2\mathcal{U}(t-2)$ ***(c)*** $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\Big[\mathcal{U}(t-2n)-\mathcal{U}\Big(t-(2n+1)\Big)\Big]$

(d) $(t^2+t+1)e^{-4t}\mathcal{U}(t)$ ***(e)*** $\left(e^t-cos(\frac{2}{3}t)e^{2t}\right)\mathcal{U}(t)$ ***(f)*** $\cos^3(t)e^t\mathcal{U}(t)$

<u>***Réponse***</u> *:*

(a) $\frac{1}{p}e^{-p}-\frac{1}{p}e^{-2p}$ ***(b)*** $\frac{2}{p^3}e^{-2p}$ ***(c)*** $\dfrac{1}{1-e^{-2p}}\left(\dfrac{1-e^{-p}}{p}\right)$

(d) $\dfrac{p^2+5p+81}{(p+2)^3}$ ***(e)*** $\dfrac{1}{p-1}-\dfrac{p-2}{(p-2)^2+\dfrac{4}{9}}$ ***(f)*** $\dfrac{1}{4}\dfrac{p-1}{(p-1)^2+9}+\dfrac{3}{4}\dfrac{p-1}{(p-1)^2+1}$

Exercice 3.5

1. *Soit* $a > 0$. *Déterminer la transformée de Laplace de* $t \mapsto t\mathcal{U}(t-a)$.
2. *Calculer, à partir de la définition, la transformée de Laplace du signal* $e(t)$ *défini ci-contre.*

$$e(t) = \begin{cases} 2t & si\ t \in [0,1] \\ 1 & si\ t \geqslant 1 \\ 0 & sinon \end{cases}$$

3. *Décomposer le signal en une combinaison linéaire de signaux élémentaires. Retrouver alors le résultat en utilisant le formulaire.*

Réponse : 1. $\dfrac{e^{-ap}(1+ap)}{p^2}$ 2. & 3. $\dfrac{2(1-e^{-ap})}{p^2}$.

Exercice 3.6 ***Application de la formule de dérivation***
On pose $f(t) = (1 - cos(t))\mathcal{U}(t)$, $g(t) = e^{-t}f(t)$ *et* $h(t) = e^t g''(t)$.

1. *Calculer la transformée de Laplace de la fonction* $f(t)$.
2. *En utilisant la formule de dérivation déduire que la transformée de Laplace de la fonction* $h(t)$ *est* $H(p) = \dfrac{(p-1)^2}{p(p^2+1)}$.
3. *Retrouver ce résultat en calculant directement la transformée de Laplace de la fonction* $h(t)$.

Exercice 3.7 ***Recherche d'original***
Déterminer l'original des transformées de Laplace suivantes :

(a) $\dfrac{1}{(p+1)(p-2)}$ ***(b)*** $\dfrac{5p+10}{p^2+3p-4}$ ***(c)*** $\dfrac{p}{p^2+4p+6}$ ***(d)*** $\dfrac{-1}{(p-2)^2}$

(e) $\dfrac{p-7}{p^2-14p+50}$ ***(f)*** $\dfrac{p}{p^2-6p+13}$ ***(g)*** $\dfrac{p^2+3p+1}{(p^2+4)^2}$ ***(h)*** $\dfrac{e^{-2p}}{p+3}$

Exercice 3.8 ***Produit de convolution***
Trouver la fonction f *causale, continue de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$ *vérifiant :* $f(t) = t^2 + \displaystyle\int_0^t \sin(t-x)f(x)dx$.

Réponse : $f(t) = \left(t^2 + \frac{1}{12}t^4\right)\mathcal{U}(t)$.

Exercice 3.9
Soit la fonction $F(p) = \dfrac{p}{(p+2)(p^2+4)}$.

1. *Décomposer la fonction* $F(p)$ *en éléments simples.*
2. *Déduire de cette décomposition l'original de la fonction* $F(p)$.
3. *Montrer que l'original de* $G(p) = e^{-p\frac{\pi}{4}}\dfrac{p}{(p+2)((p^2+4)}$ *est la fonction* g *définie par :*

$$g(t) = \begin{cases} -\dfrac{e^{-\frac{\pi}{2}}}{4}e^{-2t} + \dfrac{1}{4}\sin(2t) - \dfrac{1}{4}\cos(2t) & si\ t \geqslant \dfrac{\pi}{4} \\ 0 & si\ t < \dfrac{\pi}{4} \end{cases}$$

4. *retrouver l'original de* $F(p)$ *en utilisant le produit de convolution.*

Exercice 3.10
Déterminer les originaux des fonctions suivantes en utilisant le produit de convolution :

(a) $\dfrac{1}{(p+1)(p^2+1)}$ ***(b)*** $\dfrac{1}{(p^2+\omega^2)^2}$ ***(c)*** $\dfrac{p^2}{(p^2+\omega^2)^2}$

Exercice 3.11 ***Résolution d'équations différentielles***
Résoudre les équations différentielles suivantes en utilisant la transformée de Laplace :

$$\begin{cases} x^{'}(t) - 2x(t) = 8\sin(2t)\mathcal{U}(t) \\ x(0) = -2 \end{cases} ; \begin{cases} x^{"}(t) - 3x^{'}(t) + 2x(t) = e^{3t}\mathcal{U}(t) \\ x(0) = 1;\ x'(0) = 0 \end{cases} ; \begin{cases} x^{"}(t) + 2x^{'}(t) + 5x(t) = e^{-t}\sin(2t)\mathcal{U}(t) \\ x(0) = 0;\ x'(0) = 1 \end{cases}$$

Exercice 3.12 ***Résolution d'un système différentiel***
Résoudre sur $[0, +\infty[$, *à l'aide de la transformation de Laplace le système différentiel suivant :*

$$(E)\begin{cases} x'(t) = 2x(t) - y(t) & x(0^+) = 1 \\ y'(t) = x(t) + 2y(t) & y(0^+) = 0 \end{cases} \quad \textit{avec} \quad \begin{cases} x(0) = 1 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Exercice 3.13
On considère la fonction causale e définie sur $\mathbb{R}$ *par* $e(t) = 4\left(\mathcal{U}(t) - \mathcal{U}(t-2)\right)$.

1. *Tracer dans un repère orthogonal la courbe représentative de la fonction* $e(t)$.
2. *On note* E *la transformée de Laplace de* e. *Calculer* $E(p)$.
3. *L'étude d'un circuit électrique conduit à étudier la tension de sortie* s *reliée à la tension d'entrée* e *par la formule :* $4s'(t) + s(t) = e(t)$, $s(0) = 0$.
   On admet que s *admet une transformée de Laplace notée* S.
   Démontrer que $S(p) = \dfrac{4}{p(4p+1)}(1 - e^{-2p})$.
4. *En décomposant en éléments simples la fraction :* $\dfrac{4}{p(4p+1)}$, *déduire la valeur de la fonction* $s(t)$.
5. *Vérifier que*

$$s(t) = \begin{cases} 0 & \textit{si } t < 0 \\ 4(1 - e^{-t/4}) & \textit{si } t \in [0, 2[\\ 4(e^{1/2} - 1)e^{-t/4} & \textit{si } t \geqslant 2. \end{cases}$$

Exercice 3.14 ***Transformation de Laplace dans l'espace*** E
On considère les fonctions 2-périodiques sur $\mathbb{R}^+$, f_1, f_2 *définies de la façon suivante :*

$$f_1(t) = \begin{cases} 0 & \textit{si } t < 0 \\ 1 & \textit{si } t \in]0, 1[\\ -1 & \textit{si } t \in]1, 2[\end{cases} \quad ; \quad f_2(t) = \begin{cases} 0 & \textit{si } t < 0 \\ t & \textit{si } t \in]0, 1[\\ -t + 2 & \textit{si } t \in]1, 2[\end{cases}$$

1. *Déterminer la transformée de Laplace de la fonction* $f_1(t)$.
2. *En remarquant que* f_2 *est la primitive de* f_1 *qui s'annule en 0, déterminer sa transformée de Laplace.*
3. *Retrouver ce résultat en calculant directement la transformée de Laplace de la fonction* $f_2(t)$.

Exercice 3.15
On considère les fonctions f_1, f_2, f_3 *définies par :*

$$\begin{aligned} f_1(t) &= \sin\left(t - \tfrac{\pi}{4}\right)\mathcal{U}\left(t - \frac{\pi}{4}\right) \\ f_2(t) &= \sin\left(t - \tfrac{\pi}{4}\right)\mathcal{U}(t) \\ f_3(t) &= \sin(t)\mathcal{U}\left(t - \frac{\pi}{4}\right) \end{aligned}$$

Déterminer leur transformée de Laplace.

Exercice 3.16 ***Devoir Maison à rendre pour le 6 avril (14h au plus tard)***
Soit l'équation différentielle du ***second ordre***

$$\begin{cases} y''(t) + y(t) = f(t) \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases} \tag{3.4}$$

dans laquelle la fonction inconnue $y(t)$ *est causale et de classe* C^1 *sur* $\mathbb{R}$ *et* f *la fonction causale définie par*

$$f(t) = \begin{cases} 1 & si\ t \in [0, \frac{\pi}{2}[\\ -1 & si\ t \in [\frac{\pi}{2}, \pi[\\ 0 & sinon \end{cases}$$

1. *Donner la représentation graphique de la fonction* $f(t)$ *et déterminer sa transformée de Laplace notée* $F(p)$.
2. *Déterminer l'original de la fonction* $H(p) = \dfrac{e^{-\tau p}}{p(p^2+1)}$ *où* τ *est une constante réelle strictement positive.*
3. *En utilisant la transformée de Laplace, résoudre sur* $\mathbb{R}$*, l'équation différentielle* (3.4) *et donner les expressions de* $y(t)$ *sur les intervalles* $[0, \frac{\pi}{2}[$, $[\frac{\pi}{2}, \pi[$ *et* $]\pi, +\infty[$.
4. *Étudier* $y(t)$ *et tracer sa représentation graphique.*

Exercice 3.17 ***Devoir Maison à rendre pour le 6 avril (14h au plus tard)***
Fonction intensité dans un circuit "R,L"
Soient $E, ; a$ *et* b *trois nombres réels strictement positifs avec* $a < b$.
On considère un circuit R, L *auquel on applique une force électromotrice* $e(t)$ *est définie par*

$$e(t) = \begin{cases} E & si\ t \in [0, a[\\ -E & si\ t \in [a, b[\\ 0 & sinon \end{cases}$$

est donnée à la figure ci-dessous. Soit $i(t)$ *la fonction intensité du courant :* $t \mapsto i(t)$. *Elle est donc causale. On suppose qu'elle est continue et de plus de classe* C^1 *par morceaux sur l'intervalle* $]0, +\infty[$.
L'équation que régit ce circuit s'écrit :

$$\begin{cases} L\frac{di}{dt}(t) + Ri(t) = e(t) \\ i(0) = 0 \end{cases} \tag{3.5}$$

1. *Donner la représentation graphique de la fonction* $e(t)$ *et déterminer sa transformée de Laplace notée* $F(p)$.
2. *Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle* $\dfrac{E}{p(Lp+R)}$ *et en déduire l'original de la fonction* $G(p) = \dfrac{Ee^{-\tau p}}{p(Lp+R)}$ *où* τ *est une constante réelle strictement positive.*
3. *En utilisant la transformée de Laplace, résoudre sur* $\mathbb{R}$*, l'équation différentielle* (3.5) *et donner les expressions de* $i(t)$ *sur les intervalles* $[0, a[$, $[a, b[$ *et* $]b, +\infty[$.
4. *On donne :* $E = 2V$, $R = 10\Omega$, $L = 0,1H$, $a = 0,02s$, $b = 0,04s$. *Étudier* $i(t)$ *et tracer sa représentation graphique.*