

PARTIEL
ANALYSE DES SIGNAUX ET DES IMAGES

**Les questions seront traitées dans l'ordre et correctement numérotées.
Les réponses seront rédigées, justifiées et les résultats encadrés.**

Exercice 1 :

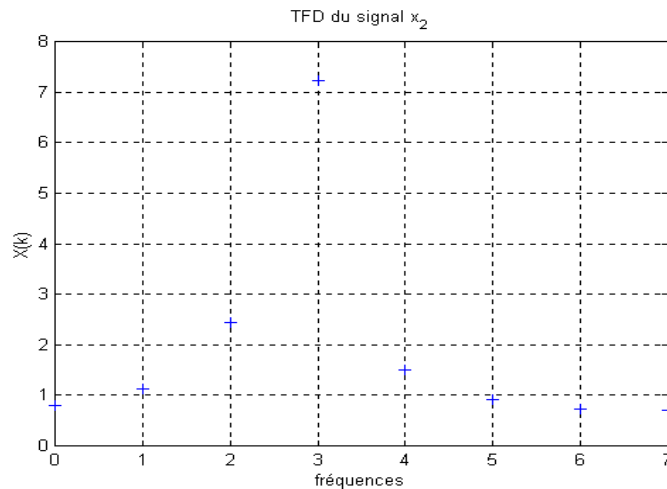
On dispose d'un capteur de tension.

En restant le plus général possible, les signaux étant issus de ce capteur sont déterministes et peuvent être de type Signal périodique, Exponentielle décroissante ou complexe, Echelon, Porte, ou une somme de ces différents types...

Ces signaux doivent être analysés numériquement et on souhaite mettre en place un système de traitement numérique complet. Plutôt que de concevoir ce système, on vous propose d'utiliser un système existant et le but de ce problème est de faire une analyse « retro-engineering ».

- A. Le dispositif contient en premier lieu une option de filtrage que l'on peut donc ou non appliquer aux signaux issus des capteurs. La fréquence de coupure f_c de ce filtrage est ajustable.
 - 1. Quelle est la raison principale expliquant la mise en place de ce filtre ?
 - 2. En considérant ce filtre comme idéal, déterminer en justifiant la réponse fréquentielle et la réponse impulsionnelle associées à ce filtre.
- B. Le dispositif en question contient également un convertisseur analogique numérique de fréquence d'échantillonnage ajustable et dont la quantification se fait par la méthode de l'arrondi avec un pas de 0,25V et le codage sur 8 bits.
 - 1. Rappeler les différents éléments nécessaires dans cet exercice pour réaliser cette numérisation. Expliquer le but de chacun de ces éléments. Vous **justifierez** toutes vos réponses
 - 2. Quelle devra être la dynamique maximale en amplitude de ces signaux à analyser ? **Justifier** votre réponse.
 - 3. Quelle sera l'erreur de quantification commise par ce système ? **Expliquer** votre réponse.
- C. Le dernier élément de ce dispositif permet de faire une analyse de Fourier du signal par transformée de Fourier discrète.

Lors de l'analyse d'un signal, on observe le résultat du calcul du module de la TFD suivant (l'axe des abscisses est en Hertz) :



1. Sur combien de points la TFD a-t-elle été calculée ? Comment faire pour représenter la TFD sur toutes les fréquences ?
2. Quelle est la fréquence d'échantillonnage utilisée par le convertisseur analogique numérique ?
3. En analysant ce résultat, donner en justifiant une expression la plus précise possible du signal analogique analysé. Quelle marge d'erreur avez-vous et pourquoi ?
4. Expliquer les différences pouvant exister entre le résultat de cette figure et la transformée de Fourier continue de votre signal proposé en réponse à la question 3. Que peut-on ajouter comme traitement pour les atténuer ?
5. En gardant les mêmes paramètres de calcul, donner l'allure de ce que serait la TFD pour le signal suivant : $y(t) = \sin(4\pi t)$

Exercice 2 :

Un phénomène électromagnétique génère un signal $s(t)$ correspondant à une impulsion de type porte et donc d'amplitude constante valant 5 mV.

Ce signal est perturbé lors de sa propagation par un bruit additif blanc gaussien $b(t)$ de moyenne 1 mV et d'écart-type 0.5 mV.

1. Représenter graphiquement l'allure des caractéristiques spectrales du bruit $b(t)$
2. Un capteur électromagnétique enregistre ce signal bruité $x(t)$ et le numérise. Donner **uniquement** les caractéristiques probabilistes précises d'un échantillon de ce signal en sortie du capteur

FORMULAIRE

Formules Trigo :

$$\cos(a+b) = \cos(a).\cos(b) - \sin(a).\sin(b)$$

$$\cos(a-b) = \cos(a).\cos(b) + \sin(a).\sin(b)$$

$$\sin(a+b) = \sin(a).\cos(b) + \sin(b).\cos(a)$$

$$\sin(a-b) = \sin(a).\cos(b) - \sin(b).\cos(a)$$

$$\cos(a).\cos(b) = \frac{1}{2} (\cos(a+b) + \cos(a-b))$$

$$\sin(a).\sin(b) = \frac{1}{2} (\cos(a-b) - \cos(a+b))$$

$$\cos(a).\sin(b) = \frac{1}{2} (\sin(a+b) - \sin(a-b))$$

$$\sin(a).\cos(b) = \frac{1}{2} (\sin(a+b) + \sin(a-b))$$

Définition de la convolution $y(t)=x(t)*h(t)$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(u)h(t-u)du = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t-u)h(u)du$$

Décomposition en série de Fourier réelle et complexe + Relations entre a_n , b_n et c_n

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(2\pi n \frac{t}{T}\right) + b_n \sin\left(2\pi n \frac{t}{T}\right)$$

avec

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_T x(t)dt$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_T x(t) \cos\left(2\pi n \frac{t}{T}\right) dt$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_T x(t) \sin\left(2\pi n \frac{t}{T}\right) dt$$

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{+2\pi j \frac{n}{T} t}$$

avec

$$c_n = \frac{1}{T} \int_T x(t) e^{-2\pi j \frac{n}{T} t} dt$$

$$c_0 = \frac{a_0}{2}$$

$$c_n = \frac{1}{2} (a_n - j b_n)$$

$$c_{-n} = \frac{1}{2} (a_n + j b_n) = c_n^*$$

Quelques propriétés liées aux séries de Fourier

Dérivation :

Soit $x(t)$ un signal périodique de période T et X_k ses coefficients de décomposition en série de Fourier complexe alors les coefficients de décomposition en série de Fourier complexe de la fonction :

$$\frac{d^n x(t)}{dt^n} \quad \text{sont :} \quad \left(2\pi jk \frac{1}{T}\right)^n X_k$$

Quelques propriétés de la Transformée de Fourier :

■ Changement d'échelle :

$$\begin{aligned} x(t) &\xrightarrow{\text{TF}} X(\nu) \\ x(kt) &\xrightarrow{\text{TF}} \frac{1}{|k|} X\left(\frac{\nu}{k}\right) \end{aligned}$$

■ Dualité : $x(t) \leftrightarrow X(\nu)$ alors $X(t) \leftrightarrow x(-\nu)$

■ Dérivation :

■ Par rapport au temps

$$\left\| \begin{aligned} x(t) &\xrightarrow{\text{TF}} X(\nu) \\ \frac{d^n x(t)}{dt^n} &\xrightarrow{\text{TF}} (2\pi j\nu)^n X(\nu) \end{aligned} \right\|$$

■ Par rapport à la fréquence

$$\left\| \begin{aligned} x(t) &\xrightarrow{\text{TF}} X(\nu) \\ t^n x(t) &\xrightarrow{\text{TF}} \frac{d^n X(\nu)}{d\nu^n} \frac{1}{(-2\pi j)^n} \end{aligned} \right\|$$

Transformée de Fourier d'un peigne de Dirac

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT) \quad \rightarrow \quad X(\nu) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T} \delta\left(\nu - \frac{n}{T}\right)$$

Définition de l'intercorrélation pour $x(t)$ et $y(t)$ d'énergie finie

$$C_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) y^*(t - \tau) dt$$

Définition de l'intercorrélation pour $x(t)$ et $y(t)$ d'énergie infinie et de puissance finie

$$C_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} x(t) y^*(t - \tau) dt$$

Définition de la Transformée de Fourier Discrète (TFD) :

$$X\left(\nu = \frac{k}{NT_e}\right) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-\frac{2j\pi nk}{N}} \equiv X(k) \quad k \in \{0, 1, \dots, N-1\}$$

Périodique de période N en k donc de période ν_e en ν

Expression matricielle de la TFD :

$$\begin{array}{c} \text{Ligne} \\ \text{Numéro} \\ k \end{array}
 \begin{bmatrix} X(0) \\ X(1) \\ \vdots \\ X(N-2) \\ X(N-1) \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & e^{-\frac{2j\pi nk}{N}} & \vdots & \vdots \\ 1 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}
 \begin{array}{c} \text{Colonne numéro } n \\ \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ \vdots \\ x(N-2) \\ x(N-1) \end{bmatrix} \end{array}$$

Expression de la fenêtre de Hanning calculée sur N points :

$$h(n) = 0.5 \left(1 - \cos \left(\frac{2\pi n}{N} \right) \right) \quad \text{avec } n=0,1,\dots,N-1$$

Expression de la fenêtre de Hamming calculée sur N points :

$$h(n) = 0.54 - 0.46 \cdot \cos \left(\frac{2\pi n}{N} \right) \quad \text{avec } n=0,1,\dots,N-1$$

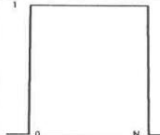
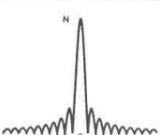
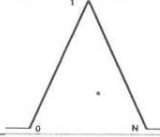
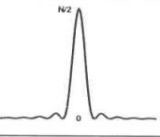
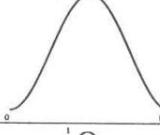
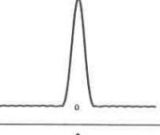

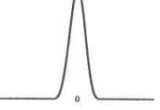
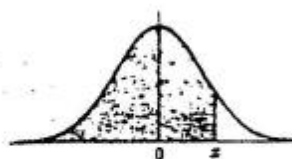
Nom		Représentation temporelle	Représentation fréquentielle	Largeur lob.princ.	Amp. relative $\frac{\text{lob.princ}}{\text{lob.sec.}}$
Rectangulaire				$\frac{2}{N}$	-13 dB
Triangulaire				$\frac{4}{N}$	-25 dB
Hamming				$\frac{4}{N}$	-41 dB
Blackman				$\frac{6}{N}$	-57 dB

Table 3 Différents types de fenêtres et leurs caractéristiques

AIRES SOUTENDUES PAR LA COURBE
NORMALE CANONIQUE DE $-\infty$ à x

$$\text{erf}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-t^2/2} dt$$



z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5754
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6	.7258	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7518	.7549
0.7	.7580	.7612	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7996	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9163	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990
3.1	.9990	.9991	.9991	.9991	.9992	.9992	.9992	.9992	.9993	.9993
3.2	.9993	.9993	.9994	.9994	.9994	.9994	.9994	.9995	.9995	.9995
3.3	.9995	.9995	.9995	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9997
3.4	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9998
3.5	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998
3.6	.9998	.9998	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999
3.7	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999
3.8	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000