Владимир Александрович 14.02.

Многозначные логики.

С помощью логик можно формализовать высказывания.

Многозн. логика рассм. высказывания, котор. мы не помним, не исполним.

4) принципиальная многозначность (высоко-кий, молодой, и т.д.) бесконечное количество понятий.

Опр. Введем в рассм-е $U = \{u_1, u_2, \dots, u_n, \dots\}$ это мн-во будем называть алфавит переменных.

$E_k = \{0, 1, \dots, k-1\}$ - отрезок целого ряда

$f: E_k^n \to E_k$ функции k-значной логики

$f(u_{i1}, u_{i2}, \dots, u_{in})$

$j \neq s \quad u_{ij} \neq u_{is}$

Правило для такой функции - это формулы k-значной логики.

Обозначим через σ логическую связку, действ-ю на одну ~~связку~~, применимую, в лог. связке, действ. на 2 переменные.

1) Переменные из алфавита U, конст-ы из E_k формулы

2) (σp)

~~3~~ p, q - формулы, для всех

$(p \sigma q)$ - формула

3) других формул нет.

Равенство двух формул можно доказывать при помощи таблицы истинности.

u_1		u_n	$f(u_1, u_2, \dots u_n)$
0	- - -	0	
0		1	
-	- -	-	-
0		$k-1$	
-	- -	-	
$k-1$		$k-1$	

~~Перв~~

K^{K^n}

$3^{3^2} = 3^9$

Обозначим все функции мн-во $P_k(n)$

Для функции одной переменной используют перестановки

$$f(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & k-1 \\ a_1 & a_2 & \dots & a_k \end{pmatrix}$$

Для функ-ий 2х переменных:

	0	1	2	$k-1$
0				
1				
i		$f(i, j)$		
$k-1$				

Трехзначные логики.

$\frac{1}{2}$ - промежуточное значение

1. Логика Лукасевича (1920)

В качестве исходных связок берём отрицание ¬ и импликацию

$\neg, \to$

$\{0, 1\}$

$\neg 0 = 1$ $\quad$ $0 \to 0 = 1$

$\neg 1 = 0$ $\quad$ $0 \to 1 = 1$

$1 \to 0 = 0$

$1 \to 1 = 1$

$(1 \to \frac{1}{2}) = (\frac{1}{2} \to 0) = \frac{1}{2}$

$\neg \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

$(0 \to \frac{1}{2}) = (\frac{1}{2} \to 1) = 1$

p	$\neg p$
1	0
1/2	1/2
0	1

$\to$	1	1/2	0
1	1	1/2	0
1/2	1	1	1/2
0	1	1	1

$p \vee q = (p \to q) \to q$

$p \wedge q = \neg(\neg p \vee \neg q)$

$p \leftrightarrow q = (p \to q) \wedge (q \to p)$

$\vee$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	1	1
1/2	1	1/2	1/2
0	1	1/2	0

$\wedge$	1	1/2	0
1	1	1/2	0
1/2	1/2	1/2	0
0	0	0	0

$\leftrightarrow$	1	1/2	0
1	1	1/2	0
1/2	1/2	1	1/2
0	0	1/2	1

Формула A наз-ся тавтологией, если при подстановке любого набора значений из мн-ва $\{0, 1/2, 1\}$ она принимает значение 1. Это значение наз-ся выделенным истинностным значением.

Опр. Мн-во всех формульных тавтологий, опред-х при помощи этих связок наз-ся логикой Лукасевича. $Ł_3$

Аксиомы:

1. $(p \to q) \to ((q \to r) \to (p \to r))$
2. $p \to (q \to p)$
3. $(\neg p \to \neg q) \to (q \to p)$
4. $((p \to \neg p) \to p) \to p$ (Закон Пирса)

Правила вывода:

I из A и $A \to B$ следует B modus ponens

II если $в$ - некот. переменная фор-лы A

то из A следует $A|_{в \leftarrow B}$ (подстановка вместо всех вхожд-й перем-ой в формулы B).

У Лукасевича не действует!

$p \vee \neg p$

$\neg(p \wedge \neg p)$

$p \vee q = (p \to q) \to q$

$p \vee q = \neg p \to q$ ∅ проверим, что закон исключ. третьего работает.

Тавтологии ну логики Лукасевича это есть ~~логика~~ тавт. классич. логики

∄ построить пример тавт $\vee$ в классической логике, кот. не явл. бы тавт в логике Лукасевича.

$p \vee q = \cancel{\min\{1, 1-p+q\} = \max\{1-p, q\}}$ $\max\{p, q\}$

$p \wedge q = \min\{p, q\}$

Исходные связки - отрицание и импликация.

∄ показать, что через связки $\{\neg, \wedge, \vee\}$ импликацию выразить нельзя.

Т.е. логика явл-ся не функционально полной. Если к этой системе добавим оператор Слупецкий $T_p = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2 \; 1/2 \end{pmatrix}$

$\{\neg, \wedge, \vee, T_p\}$ логика на базе этой системы явл. ф-но полной. Она наз-ся логикой Слупецкого $Ł_3^T$

Аксиомы:

5) $T_p \to \neg T_p$

6) $\neg T_p \to T_p$

Правила вывода те же

Возможно выполнение M_p

необходимо выполнение N_p

Предположим, что сейчас истина, что

завтра будет морское сражение ну этого $\Rightarrow$, что не может быть, чтобы завтра морского сражения не было

т.е. завтрашнее морское событие — необходимое событие. Точно также, если сейчас ложно, что завтра морск. сражение, то необх., что завтра морск. сражение не будет.

Но сейчас ни истинно ни ложно, что завтра морс. сражение будет $\Rightarrow$ необх, что оно будет или необх, что его не будет.

$M_p = \neg p \to p$ Необходимо, что p

$N_p = \neg M \neg p$ необх. выполнение p.

p	M_p	N_p
0	0	0
1/2	1	0
1	1	1

$\{\neg, \wedge, \vee, M_p, N_p\}$

Получим логику, функ-о экв-ю логику Лукасевича.

$L_3 \simeq L_3'$

Док-во:

$L_3' \subset L_3$ — очевидно.

$L_3 \subset L_3'$

$p \to q = (\neg p \vee q) \vee H(\neg p \wedge q)$ Ф

показать, что в логике Лукасевича имеет место. Доказать с помощью таблицы истинности.

$p \to q = \min\{1, 1-p+q\} = \max\{1-p, q\}$ 21.02.

Логика Клини.

p	$\neg p$
1	0
1/2	1/2
0	1

В строке (или столбце) для 1/2 стоит 1 только в том случае, если во всем столбце все остальные эл-ты 1, 0, если все ост. — 0, для столбца того самое.

$\vee$	1	1/2	0
1	1	1	1
1/2	1	1/2	1/2
0	1	1/2	0

$\wedge$	1	1/2	0
1	1	1/2	0
1/2	1/2	1/2	0
0	0	0	0

$\to$	1	1/2	0
1	1	1/2	0
1/2	1	1	1/2
0	1	1	1

$\leftrightarrow$	1	1/2	0
1	1	1/2	0
1/2	1/2	1/2	1/2
0	0	1/2	1

Логика обозначается K_3.

Дизъюнкция — это логич. операция, кот. истинна, или первый операнд истин., или второй оп. истин. (при этом ничего не следует говорить о первом), ложно, если и 1й и 2й ложны, кроме этого определено только в этих случаях, а по-этому не опред-на во всех остальных.

Ф определения для $\wedge, \to, \leftrightarrow$.

Слабые связки — все классические определения оставляем, во всех ост-х случаях — неопредел. Логика, построенная на слабых связках: K_3^w

$\vee$	1	1/2	0
1	1	1/2	1
1/2	1/2	1/2	1/2
0	1	1/2	0

$\wedge$	1	1/2	0
1	1	1/2	0
1/2	1/2	1/2	1/2
0	0	1/2	0

Логика Бочвара

$\neg, \wedge, \vdash$, $\vdash p = Np$

p	$\neg p$
1	0
1/2	1/2
0	1

p	$\vdash p$
1	1
1/2	0
0	0

$\neg, \wedge, \vdash$ — исходные связки, они же внешние. Все остальные, выражаются через них и назыв. внутренними.

$p \asymp q = (p \supset q) \wedge (q \supset p)$

$p \supset q = \neg p \vee q$

$p \vee q = \neg(\neg p \wedge \neg q)$.

∧	1	½	0
1	1	½	0
½	½	½	0
0	0	0	0

∨	1	½	0
1	1	1	1
½	1	½	½
0	1	½	0

⊃	1	½	0
1	1	½	0
½	1	½	½
0	1	1	1

↔	1	½	0
1	1	½	0
½	½	½	½
0	0	½	1

Для всех внутр. связок вместо какого-то операнда подставим ½ получим ½.

Логика Гейтинга.

$(\neg\neg p \to p)\wedge(p \to \neg\neg p)$ – тавтология.

p	¬p
1	0
½	0
0	1

∧	1	½	0
1	1	½	0
½	½	½	0
0	0	0	0

∨	1	½	0
1	1	1	1
½	1	½	½
0	1	½	0

→	1	½	0
1	1	½	0
½	1	1	0
0	1	1	1

Такая логика обозначается так G_3. Конъюнкция, дизъюнкция, как и в логике Лукасевича.

Дизъюнкция может быть выражена через → и ∧.

$p\vee q = ((p\to q)\to q)\wedge((q\to p)\to p)$

Паранепротиворечивая логика.

Опред. Логика называется паранепротиворечивой, если для её отношения следования ⊢ не всегда выполнено след. св-во: $\{A, \neg A\}\vdash B$

Имеется 2 подхода для построения этой логики:

1) Берется трехзначная логика Клини с исх. связками ¬, ∨, ∧ и двумя выделен-ми значениями 1 и ½. Получим, что класс тавтологий такой логики совпадает с классом тавт-ий логики C_2. Приходится добавлять связку импликацию (⊃).

⊃	1	½	0
1	1	½	0
½	1	½	0
0	1	1	1

Заметим, что закон

$\{A;\neg A\}\vdash B \Leftrightarrow (p\supset(\neg p\supset q))$, кот. явл. в C_2 тавтологией, перестает работать.

$\neg(p\wedge\neg p)$ – тоже не работает. $\Leftrightarrow \{A;\neg A\}$

2). Берутся только внешн. связки с выдел. значениями 1 и ½. А в качестве внешних связок выбирают ¬, ⇒

p	¬p
1	0
½	1
0	1

⇒	1	½	0
1	1	1	0
½	1	1	0
0	1	1	1

$p\vee q = (p\Rightarrow\neg\neg q)\Rightarrow (\neg p\Rightarrow q)$

$p\wedge q = (((p\Rightarrow p)\Rightarrow p)\Rightarrow\neg((q\Rightarrow q)\Rightarrow q))\Rightarrow\neg(p\Rightarrow\neg q)$

$p\Leftrightarrow q = (p\Rightarrow q)\wedge(q\Rightarrow p)$

∨	1	½	0
1	1	1	1
½	1	1	1
0	1	1	0

∧	1	½	0
1	1	1	0
½	1	1	0
0	0	0	0

⇔	1	½	0
1	1	1	0
½	1	1	0
0	0	0	1

Функции конечнозначной логики.

Опред. Мн-во $U = \{u_1, u_2, \dots, u_e, \dots\}$ наз-ся алфавитом переменных.

10 Опред. Рассм. мн-во $E_k = \{0,1,\dots,k-1\}$ как отрезок целочисл. ряда от 0 до $k-1$. И фун-ции, действующ

$f: E_k^n \to E$ такие функции наз-ся функциями k-значной логики.

$f(u_{i1}, u_{i2}, \ldots, u_{in})$
$j \neq s \Rightarrow u_{ij} = u_{is}$.

Для функции чего-то не хватает.

Пример 1. Константы : $0, 1, 2, \ldots, k-1$

$$0(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \ldots & k-1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$$

Пример 2. Функции, зависящие от 1 перемен.

а) отрицание Поста

$$\overline{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \ldots & k-1 \\ 1 & 2 & 3 & \ldots & 0 \end{pmatrix} = x+1 \pmod k$$

$$\overline{\overline{x}} = x+2 \pmod k$$

Для любого натур. k, отрицание Поста примененное l раз дает $x+l \pmod k$

2. Отрицание Лукасевича 28.02

$$\sim x = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \ldots & k-1 \\ k-1 & k-2 & k-3 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$$

$\sim(\sim x) = x$

3. $$-x = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \ldots & k-1 \\ 0 & k-1 & k-2 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$$

$-x = k-x \pmod k$

$-(-x) = x$.

Ø доказать $x = \overline{-(\sim x)}$

4. $J_i(x) = \begin{cases} k-1, & x = i \\ 0, & x \neq i \end{cases} \quad 0 \le i \le k-1$

$j_i(x) = \begin{cases} 1, & x = i \\ 0, & x \neq i \end{cases} \quad 0 \le i \le k-1$

5. $x - i = x + (k-i)$

$k-i$ раз применим отрицание Поста

б) Двухперемен.

1. $\max(x, y)$

I $\max(x, \max(y, z)) = \max(\max(x, y), z)$

II $\max(x, y) = \max(y, x)$

$\max(x_1, x_2, x_3, \ldots x_n) = \max(\max(x_1, \ldots, x_{n-1}), x_n)$

2. Обобщение конъюнкции.

$\min(x, y)$

I. $\min(x, \min(y, z)) = \min(m(x, y), z)$

II $\min(x, y) = \min(y, x)$

$\min(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \min(\min(x_1, \ldots, x_{n-1}), x_n)$

Ø $\sim \max(\sim x, \sim y) = \min(x, y)$ над мн-ом $E_k = \{0, 1, \ldots, k-1\}$.
$\sim \min(\sim x, \sim y) = \max(x, y)$

3. Сложение по модулю k.

$x + y \pmod k$
ассоциатив коммутатив-я и ассоц.
можно ввести разность

$x - y = x + ky - y$

4. $x \cdot y \pmod k$

5. Усеченная разность

$$x \dot{-} y = \begin{cases} x-y, & x \geq y \\ 0, & x<y \end{cases}$$

$k=4$

$y \backslash x$	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	1	0	0	0
2	2	1	0	0
3	3	2	1	0

$$\min(x,y) = x \dot{-} (x \dot{-} y)$$

$x \geq y \quad x-(x-y) = y$

$x<y$

6. $x \supset y = \sim(x \dot{-} y) = \begin{cases} k-1-x+y, & x \geq y \\ k-1, & x<y \end{cases}$

Опр. Говорят, что ф-я $f(x_1, x_2, \ldots x_i, \ldots x_n)$ существенно зависит от переменной x_i, если $\exists$ 2 таких набора $\alpha = (\alpha_1, \ldots \alpha_{i-1}, \alpha_i, \alpha_{i+1}, \ldots \alpha_n)$, $\alpha_1 = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, \alpha_i', \alpha_{i+1}, \ldots \alpha_n)$, у кот. $\alpha_i \neq \alpha_i'$, такие что $f(\alpha) \neq f(\alpha')$.

От всех параметров, от кот. ф-я существенно не зависит будем наз-ть фиктивными и будем считать, что вместе с ф-ей f заданы все ф-ции, кот. получаются из нее путем добавления или вычеркивания конечного числа фиктивных параметров.

1-я и 2-я форм.

Система функций $\{0, 1, 2, \ldots, k-1, J_0(x), \ldots, J_{k-1}(x), \min(x,y), \max(x,y)\}$ наз-ся системой Россера-Тюркетта.

Теорема. Такая система функционально полная в P_k.

Т.к. конст. $0 \in A$ будем рассм. все такие ф-ции $f \in P_k$, $f(\alpha) \neq 0$.

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \max_{\substack{(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in E_k^n \\ f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \neq 0}} (\min(J_{\alpha_1}(x_1), J_{\alpha_2}(x_2), \ldots, J_{\alpha_n}(x_n), f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n))) \quad (1)$$

На всех наборах, если $x_i \neq \alpha_i$ $\min = 0$, кроме того случая, когда все совпадает.

Представление (1) наз-ся 1й формулой k-значной логики.

$k=3$

	0	1	2
0	0	0	0
1	1	0	0
2	2	1	0

$x \dot{-} y = \max(\min(J_1(x), J_0(y), 1),$

$\min(J_2(x), J_0(y), 2)$

$\min(J_2(x), J_1(y), 1)$.

1. $x=0$
   $y=0$

$0 \dot{-} 0 = \max(\min(0,2,1), \min(0,2,2), \min(0,0,1)) = 0$.

2. $x=1$
   $y=1$

$1 \dot{-} 1 = \max(\min(2,0,1), \min(0,0,2), \min(0,2,1)) = 0$

3. $x=2$
   $y=0$

$2 \dot{-} 0 = \max(\min(0,2,1), \min(2,2,2), \min(2,0,1)) = 2$

Заметим, если мы в ф-ле (1) max заменим на суммирование по модулю k.

$$f(x_1,x_2,\dots x_n) = \sum_{\substack{(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\in E_k^n \\ f(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\neq 0}} \min(J_{\alpha_1}(x_1),\dots J_{\alpha_n}(x_n), f(\alpha_1,\dots,\alpha_n)) \pmod k \quad (1^*)$$

$B = \{0,1,\dots,k-1, j_0(x),\dots, j_{k-1}(x), x+y, x\cdot y\}$.

Теорема. Система B функц полна в P_k.

▷ Т.к. $0\in B$, будем рассм. $f\in P_k$, для сов-ти наборов, где они не обращаются в 0.

$$f(x_1,x_2,\dots,x_n) = \sum_{\substack{(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\in E_k^n \\ f(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\neq 0}} \underbrace{j_{\alpha_1}(x_1)\cdot j_{\alpha_2}(x_2)\cdot\ldots\cdot j_{\alpha_n}(x_n)}_{=1}\cdot f(\alpha_1,\dots,\alpha_n) \pmod k \quad (2)$$

Если $x_i \neq \alpha_i$, то произведение $= 0$.
Не 0 только в одном случае $x_i = \alpha_i$.

Пример:

$$x \dot{-} y = (j_1(x)\cdot j_0(y)\cdot 1 + j_2(x)\, j_0(y)\, 2 + j_2(x)\, j_1(y)\cdot 1) \pmod k$$

1. $x=0$, $y=1$

$0 \dot{-} 1 = 0\cdot0\cdot1 + 0\cdot0\cdot2 + 0\cdot1\cdot1 = 0$.

2. $x=2$, $y=1$

$2 \dot{-} 1 = 0\cdot0\cdot1 + 1\cdot0\cdot2 + 1\cdot1\cdot1 = 1$.

15

Замыкание. Замкнутые классы.

Опред. Пусть A — некот. мн-во ф-й из P_k, замыканием мн-ва A $[A]$ наз-ся множество всех функций, реализуемых над множеством A.

1. $A \subseteq [A]$
экстенсивность
2. $A \subseteq B \Rightarrow [A] \subseteq [B]$
монотонность.
3. $[[A]] = [A]$.
идемпотентность.

Опр. Система A наз-ся замкнутой (замк-м классом), если A совпадает $A = [A]$.

Опр. Пусть $A, B \subseteq P_k$ (некот. сист. ф-й), причем $B = [B]$, $A \subseteq B$ $[[A]] = B$. В этом случае говорят, что система A полна в системе B.

Опр. Если A мин. полн. система B, то A наз-ся базисом B.

Тривиальный пример:

1. P_k : $[P_k] = P_k$
2. $\varnothing$: $[\varnothing] = \varnothing$

06.03.

Пусть $\varnothing \subsetneq E \subsetneq E_k$, говорят, что ф-я $f(x_1,x_2,\dots,x_n)$ сохраняет мн-во E, если выполняется следующее правило:

$\forall \alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n \in E$
$f(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n) \in E$

16

$T(E)$ – класс ф-ий, сохраняющ-х мн-во E.

Лем. $\forall$ мн-ва $E \subseteq E_k$ $T(E)$ – замкнут.

▷ Т.к. тождеств. ф-я сохраняет любое мн-во, нам достаточно показать, что суперпозиция ф-ий, сохр-х мн-во E сохраняет это мн-во.
Рассм. $f_1(x_1,\dots,x_n)$, $f_2(x_1,\dots,x_n) \in T(E)$.
$F(x,y) \in T(E)$.

Для $\forall$ $\alpha = (\alpha_1,\dots,\alpha_n) \in E^n$

$f_1(\alpha_1,\dots,\alpha_n) = \beta_1 \in E$

$f_2(\alpha_1,\dots,\alpha_n) = \beta_2 \in E$

Для этого же набора α

$F(f_1(\alpha_1,\dots,\alpha_n), f_2(\alpha_1,\dots,\alpha_n)) = F(\beta_1,\beta_2) \in E$.
суперпозиция мн-во сохраняет ◀

Теорема.
Справедливы след. св-ва:
1. $T(E_k) = P_k$
2. $T(\varnothing) = P_k$
3. $\varnothing \subsetneq E \subsetneq E_k$ $T(E) \neq \varnothing, P_k$

$E_k = \{0,\dots,k-1\}$
$E = \{0,1,2\}$.

Непустота класса $T(E)$ => из $\exists$-я тождеств. ф-ии, а то, что $T(E) \neq P_k$ => из того, что отрицание Поста не сохраняет ни одного своего подмножества.

1. $E_4 = \{0,1,2,3\}$.

$E = \{0,1,2\}$

ф-я $f(x,y) = x \dot{-} y = \begin{cases} x-y & x \geq y \\ 0 & x < y \end{cases}$

$f(x) = 1$.

$f_1(x,y) = \max(x,y)$

$f_2(x,y) = \min(x,y)$

Всего в P_k $\exists$ 2^k-2 различных классов, сохраняющих множество, причём ~~все класс~~ ни один из этих классов не вложен в другой.

▷ $E_1 \neq E_2$.

1. $\exists a, b$ $a \in E_1 \setminus E_2$, $b \in E_2 \setminus E_1$

$E_1 \not\subseteq E_2$

$E_2 \not\subseteq E_1$

$b \notin T(E_1)$

$a \notin T(E_2)$

2. $E_1 \subsetneq E_2$

$a \in E_2 \setminus E_1$

$a \notin \frac{T(E_1)}{T(E_2)}$

$c \in E_1$ $E_2 \neq E_k$

$\exists d \in E_k \setminus E_2$

$$f(x) = \begin{cases} c, & x \in E_1, \\ d, & x \notin E_1 \end{cases}$$

$f \in T(E_1)$

$f \notin T(E_2)$

$f(a) = d \notin E_2$

$2^k - 2$.

Мн-во функций A наз-ся предполным классом в P_k, если оно само замкнуто и не полно, но $\forall$ функции $f \notin A$ выполняется; $[A \cup \{f\}] = P_k$

Утверждение.

$E \subsetneq E_k$ класс $T(E)$ явл. предполным в P_k

Опред. Пусть $D_1, D_2, \dots D_s$ — это попарно не пересекающиеся подмножества E_k, объединение которых дает E_k, в этом случае $E_k = D_1 \cup D_2 \cup \dots \cup D_s$ наз-ся разбиением (на блоки)

$S = 1$ $\quad$ $S = k$

$D_1 = E_k$ $\quad$ $E_k = \{0\} \cup \{1\} \cup \dots \cup \{k-1\}$

Для каждого такого разбиения можно ввести отношение эквивалентности

$\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$

$\tilde{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_n)$

Функ-я f от n переменных сохраняет разбиение D, если при $\forall$ наборах $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta}$ справедливо:

$$f(\tilde{\alpha}) \sim f(\tilde{\beta}) \pmod{D}.$$

Мн-во всех функций, сохраняющих разбиение D будем наз-ть классом, сохраняющим D. $U(D)$.

$U(D^1) = P_k$

$U(D^2) = P_k$

$a \mapsto a$ $\quad$ $\{0, 1\}$ $\{2\}$

$b \mapsto c$

$c \mapsto c$

$a = f(a) \nsim f(b) = c = 2$

Лемма. Для $\forall$ разбиения, класс функций его сохраняющий, замкнут.

Т.к. тожд. функ-я сохраняет разбиение, нам будет достаточно показать, что композиция функ-й, сохраняющих разбиение, его же и сохраняет.

$f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n) \in U(D)$.

$F(y_1, \dots, y_m) \in U(D)$

Рассм. 2 произв-х эквивалентных набора

$\tilde{\alpha} \sim \tilde{\beta} \pmod{D}$

$f_i(\tilde{\alpha}) \sim f_i(\tilde{\beta}) \pmod{D}$ $\forall i$ $\overline{1, m}$

$(f_1(\tilde{\alpha}), f_2(\tilde{\alpha}), \dots, f_m(\tilde{\alpha})) \sim$

$\sim (f_1(\tilde{\beta}), f_2(\tilde{\beta}), \dots, f_m(\tilde{\beta})) \pmod{D}$.

$F(f_1(\tilde{\alpha}), \dots, f_m(\tilde{\alpha})) \sim F(f_1(\tilde{\beta}), \dots, f_m(\tilde{\beta})) \pmod{D}$

$F(\tilde{\alpha})$ и $F(\tilde{\beta}) \pmod{D}$ $\blacktriangle$

Полные системы. Примеры полных систем.

$$\begin{cases} [A] = P_k \\ A \subseteq B \end{cases} \Rightarrow [B] = P_k$$

1. Система Россера - Туркетта

$\{0, \dots, k-1, J_0, \dots, J_{k-1}, \min, \max\}$

2. $\{0, \dots, k-1, j_0, \dots, j_{k-1}, +, \cdot\}$

3. Система Поста

$\{\bar{x}, \max(x, y)\}$

4. $\{\bar{x}, \min(x, y)\}$.

5. $\{1, k-1, x \dot- y\}$

<u>Док-во</u>:

$\min(x, y) = x \dot- (x \dot- y)$

$\max(x, y) = \emptyset$

$k-2 = (k-1) \dot- 1$

$k-3 = (k-2) \dot- 1,$

$2 = 3 \dot- 1$

$0 = 1 \dot- 1$

$$\begin{cases} j_0(x) = 1 \dot- x \\ j_0(x) = \begin{cases} 1 & i = x \\ 0 \end{cases} \\ j_1(x) = ((2 \dot- x) \dot- j_0(x)) \dot- j_0(x) \\ j_i(x) = j_0(x \dot- i) \dot- j_0(x \dot- (i \dot- 1)) \quad \forall i = \overline{2, k-1} \end{cases}$$

$$g_{r,s}(x) = \begin{cases} s, & x = r \\ k-1, & x \neq r \end{cases}$$

$$g_{r,s}(x) = (\dots(\underbrace{((k-1) \dot- j_0(x)) \dot- \dots \dot- j_0(x))}_{k-s-1} \dot- j_0(x)$$

13.05.

$f(x) = \min(g_{0,f(0)}(x), g_{1,f(1)}(x), \dots, g_{k-1,f(k-1)}(x))$

$\{1, k-1, x \dot- y\}$

$\{\bar{x}, \max(x, y)\}$

$\max(x, y) = (k-1) \dot- \min((k-1) \dot- x, (k-1) \dot- y)$

Отрицание Поста:

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & k-2 & k-1 \\ 1 & 2 & \dots & k-1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\bar{x} = \min(g_{0,1}(x), g_{1,2}(x), \dots, g_{k-1,0}(x))$

Нам удалось свести систему к системе Россера

6. $\{j_0, x+y\}$
7. $\{\max(x,y)\}$

Заметим, что при $k=2$ шеффер не явл. полным

$$j_0(x) = \begin{cases} 1, & x=0 \\ 0, & x \neq 0 \end{cases}$$

j_0 при $k=2$ $= \bar{x}$

$\bar{x} = x \oplus 1$

На базе этих функций можно получать лишь монотонные.

Рассм. при $k>2$

$$\underbrace{x+x+x+\ldots+x}_{k}=0$$

$j_0(0)=1$

$\bar{x} = x+1$

$\bar{0}=1,\ \bar{1}=2, \ldots$

как получить max?

$$j_i(x) = \begin{cases} 1, & i=x \\ 0, & i \neq x \end{cases}$$

$j_1(x) = j_0(x+(k-1))$, если $x=0$, то $=1$

$j_2(x) = j_1(x+(k-1))$ $\varnothing$

Теорема.
Система Поста полна в P_k

$\{\bar{x}, \max(x,y)\}$

Док-во: Сведем эту систему к системе Россера – Туркетта.

$\{0, 1, \ldots, k-1, J_0, J_1, J_{k-1}, \ldots \max(x,y), \min(x,y)\}$

$\bar{x} = x+1 \pmod{k}$

$\sim x = k-1-x$

Если есть отрицание, можем получить $x+i$, применив i раз отрицание Поста.

$\max\{x, x+1, \ldots, x+k-1\} = k-1.$

$\overline{(k-1)} = 0,\ \bar{0}=1, \ldots, \overline{k-3} = k-2$

$$\overline{\max\{x+1, x+2, \ldots, x+k-1\}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \ldots & k-2 & k-1 \\ k-1 & k-1 & \ldots & k-1 & k-2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & \ldots & k-2 & k-1 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & k-1 \end{pmatrix}, \text{ а это есть } J_{k-1}(x)$$

$$J_i(x) = \begin{cases} k-1, & x=i \\ 0, & x \neq i \end{cases}$$

$J_{k-2}(x) = J_{k-1}(\bar{x})$

$J_i(x) = J_{i+1}(\bar{x}),\ i=\overline{0,k-2}$

$$f_{2,5}(x) = \begin{cases} 5, & x=2 \\ 0, & x \neq 2 \end{cases}$$

$f_{0,1}(x) = \max(J_0(x), k-2)+2$

$f_{0,2}(x) = \max(J_0(x), k-3)+3$

$f_{0,3}(x) = \max(J_0(x), k-3-1)+3+1$

$f_{i,s}(x) = f_{i+1,s}(\bar{x})$

 $f_{k-1,s}(x) = f_{0,s}(\bar{x})$

$f(x) = \max(f_{0 f(0)}(x), \dots, f_{k-1\, f(k-1)}(x))$.

Опред. Функцией Вебба будем наз-ть ф-цию двух переменных вида: $V_k(x,y) = \overline{\max(x,y)}$

Т. Система из ф-ии Вебба полна в P_k. $\{V_k\}$

▷ Сведем к системе Поста.

$$\bar{x} = V_k(x,x) \left[= \overline{\max(x,x)}\right]$$

$$\max(x,y) = V_k(V_k(x,y), V_k(x,y)), \dots$$

нужно применять $k-1$ раз ◁

Теорема о функциональной полноте.

Пусть N - это некот. мн-во ф-ий k-значной логики, существенно зависящих от $y_1, \dots, y_m$. Для удобства будем считать, что тождеств. ф-ии $\in$ этому мн-ву. $y_i = g_i^m(y_1, \dots, y_m)$

Опред. Ф-ия $f(x_1, \dots, x_m)$ сохраняет класс N, если $\forall$ ф-ий $h_1, \dots, h_m \in N$ суперпозиция ~~$f(h_1,\dots,h$~~ $f(h_1, \dots, h_m) \in N$

Опр. Мн-во ф-ий M сохр. ет класс N, если оно содержит все функции, сохр. ющ. N.

1. M - замкнутое мн-во. $\emptyset$

Лемма. Пусть N - класс ф-ий, существ-но зависящих от переменных $y_1, \dots, y_m$, кроме того $[N]_{y_1, \dots, y_m} = N$. Тогда, для M, сох-го N выполняется равенство: $M_{y_1, \dots, y_m} = N$

$$f(y_1, \dots, y_m) \in N$$

$$\forall h_1, \dots, h_2 \in N \quad f(h_1, \dots, h_2) \in N \Rightarrow f \in M$$

$$N \subseteq M_{y_1, \dots, y_m}$$

$$f(y_1, \dots, y_m) \in M_{y_1, \dots, y_m}$$

$$g_i^m \in N$$

$$f(\underset{y_1}{g_1^m}, \underset{y_2}{g_2^m}, \dots, \underset{y_m}{g_m^m}) \in N.$$

Получим вложение в др. сторону $M_{y_1, \dots, y_m} \subseteq N$

$\Rightarrow M_{y_1, \dots, y_m} = N$ ◁

Теорема Кузнецова.

$\forall k \geq 2$ P_k $\exists$ система, образованная конечным $M_1, \dots, M_s$ замкнутых классов, попарно несодержащих друг друга, т.е. $\forall$ системы ф-ий $A \subseteq P_k$ класс A полон $\Leftrightarrow$ A не содержится целиком ни в одном классе из этой системы.

Док-во:

Построим такие классы. Рассм-м мн-во всех функций, существ-но зависящих от 2-х переменных

$$|P_k(x_1, x_2)| = k^{k^2}$$

Это значит, что может быть всего $2^{k^{k^2}}$ подмножеств. Из них выберем мн-во N_i

1. $N_i \neq \emptyset$ & $N_i \neq P_k(x_1, x_2)$
2. N_i содержат тожд. е функции
3. Эти классы замкнуты по переменным x_1, x_2

26 Для всех такого класса строим класс по сохранению: M_i'. Иное дело, что этих классов по -

чение тело. Упорядочим их по степени вложения. Заметим, что это будет частичный порядок. В этой системе выделим подмножеству максимальных элементов ($s < s'$). Заметим, что $\forall M_i'$ содержится в одном из неприводимых классов. Если система A содер-ся в каком-то из этих классов, то она не полна. Т.к. ни один из этих классов не совпадает с P_k.

если $A \subseteq M_j \Rightarrow$

$\nexists$ $\forall j = \overline{1,s}$ $M_j \neq P_k$

Практика

20.03.

Доказать, что система явл. полной

$\{J_0(x), J_1(x), \dots, J_{k-1}(x), x^2, x \dot{-} y\}$

$0 - 0 = 0 \qquad (k-1)^2 = k^2 - 2k + 1 \pmod{k}$

$J_0(0) = k-1$

Выделим базис

$\{x \dot{-} y, J, x^2\}$.

$=$

$\{x \dot{-} y, x+y, k-1\}$

$$\underbrace{(k-1)+(k-1)+\dots+(k-1)}_{k-1} = k(k-1)+1$$

Базис: $\{x \dot{-} y, x+y, k-1\}$ система явл. базисом

27.03 (Теория).

$M_i \quad i = \overline{1,s}$

$M_i \neq P_k$

$A \subseteq M_i \neq P_k$

система не полна, т.к. $[A] \subseteq \underset{\text{не полна}}{M_i}$

Предпол., что A не лежит целиком ни в одном из этих классов.

$$M = [A \cup \underbrace{\{g_1^2, g_2^2\}}_{\text{тождественные функции}}] \supseteq A$$

$g_1^2(x,y) = x$

$g_2^2(x,y) = y$

M и A либо полны, либо не полны одновременно.

Предпол., что M не полна. Док-ем от против. A не входит ни в один из классов и не полна. В системе M_{x_1,x_2} не содержится ф-ии Вебба $V_k(x_1,x_2)$. По предыдущ. лемме $\exists$ такое j, т.ч. $M_{x_1,x_2} = U_j$.

Получаем, что $M \subseteq M_j'$ (где M_j' - класс функ-й, сохраняющих U_j), но

$M \subseteq M_j' \subseteq M_i$.

$\Rightarrow A \subseteq M_i$ получили противор-е, т.к. A не вложено ни в одно из множеств.

Опр. Ф-я k-знач-й логики наз-ся существенной, если она существенно зависит хотя бы от 2х переменных.

Лемма о 5-ти наборах.

x_1 – существенная переменная f

Пусть $f(x_1,\dots,x_n)$ – существенная функция, принимающая l различных значений, где $l\geq 3$, тогда ∃ет 3 набора вида
$$(\alpha,\alpha_2,\dots,\alpha_n)$$
$$(\beta,\alpha_2,\dots,\alpha_n)$$
$$(\alpha,\beta_2,\dots,\beta_n)$$
на этих наборах функция принимает 3 различных значения.

Лемма.

Пусть f – сущ-я функция, принимающая l различных значений, $l\geq 3$. Тогда ∃ ет мн-ва Q_i, $i=\overline{1,n}$, т.ч. $Q_i\subseteq E_k$ и $|Q_i|\leq l-1$. Тогда на декарт. произведении $Q_1\times Q_2\times\dots\times Q_n$ функция f принимает все свои l значений.

Лемма о квадрате.

Пусть f – сущ. функция, приним-я l различных значений, $l\geq 3$. x_1 – не существ-я переменная, тогда ∃ет 4-ре набора, называемые квадратом, след.:

$$(\alpha_1,\dots,\alpha_{i-1},\alpha,\alpha_{i+1},\dots,\alpha_{j-1},\gamma,\alpha_{j+1},\dots,\alpha_n)$$
$$(\alpha_1,\dots,\alpha_{i-1},\alpha,\alpha_{i+1},\dots,\alpha_{j-1},\delta,\alpha_{j+1},\dots,\alpha_n)$$
$$(\alpha_1,\dots,\alpha_{i-1},\beta,\alpha_{i+1},\dots,\alpha_{j-1},\gamma,\alpha_{j+1},\dots,\alpha_n)$$
$$(\alpha_1,\dots,\alpha_{i-1},\beta,\alpha_{i+1},\dots,\alpha_{j-1},\delta,\alpha_{j+1},\dots,\alpha_n)$$

на которых функция либо принимает не менее 3 различных значений, либо принимает 2 значения, но одно из этих значений только на одном наборе, а 2е – на оставшихся 3-х.

Теорема Яблонского С.В.

Система функций, содержащая все одноместные функции, принимающие не более $k-1$ различного значения, полна в P^3, когда она содержит существенную функцию, принимающую все k значений.

Теорема Слупецкого.

Система функций, содерж-я все одноместн. функции, полна в P^3, когда она содержит существ-ю функцию, принимающую все k значений.

Теорема Софи Пикар.

Следующие системы полны в $P_k(\ell)$:

1. $\{\bar{x}, h_{0,1}(x), x+j_0(x)\}$.
2. $\{h_{0,1}(x),\dots,h_{0,k-1}(x), x+j_0(x)\}$

$h_{i,j}$ – это перестановка значений i и j.

$$h_{i,j}(x)=\begin{pmatrix}0 & 1 & \dots & i & \dots & j & \dots & k-1\\ 0 & 0 & \dots & j & \dots & i & \dots & k-1\end{pmatrix}$$

$$h_{0,1}(x)=x+j_0(x)+J_1(x)$$

Представление функций k-значной логики полиномами.

$$f(x_1,\dots,x_n)=\sum_{\substack{(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\\ f(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\neq 0}} f(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\, j_{\alpha_1}(x_1)\cdots j_{\alpha_n}(x_n)$$

$$j_i(x)=j_0(x-i)$$

$$f(x)=a_0+a_1x+\dots+a_{k-1}x^{k-1}$$

$$\begin{cases} a_0 = f(0) \\ a_0 + a_1 + \dots + a_{k-1} = f(1) \\ \dots \\ a_0 + a_1 s + \dots + a_{k-1} s^{k-1} = f(s) \\ \dots \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1^2 & \dots & 1^{k-1} \\ 2 & 2^2 & \dots & 2^{k-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ k-1 & (k-1)^2 & \dots & (k-1)^{k-1} \end{pmatrix}$$

$$\prod_{0 \le i < j \le k-1} (j-i) \pmod k$$

Определитель $\ne 0$ при простых k.

Теорема Ферма (малая)

Пусть p — простое число, тогда $\forall$ числа $1 \le a \le p-1$

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod p.$$

▷ Рассм. для фикс. a.

$a, 2a, 3a, \dots, (p-1)a$

все эти числа по модулю p различны и $\ne 0$.

Значит, среди них есть числа от 1 до $p-1$

$$a^{p-1}(p-1)! \equiv (p-1)! \pmod p$$

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod p \quad ◁$$

Полином для $j^0(x)$:

в случае простого k $(j_0(x)) = 1 - x^{k-1}$

Если k — составное, то полинома $\nexists$

$$j_0(x) = a_0 + a_1(x) + \dots + a_{k-1} x^{k-1}$$

$$1 = j_0(0) = a_0.$$

$$k_1 \not\equiv 0 \pmod k$$

$$1 + a_1 k_1 + a_2 k_1^2 + \dots + a_{k-1} k_1^{k-1} = 0.$$

$$a_1 k_1 + a_2 k_1^2 + \dots + a_{k-1} k_1^{k-1} = k-1. \Rightarrow$$

что k_1 должно делиться без остатка на $k_1 - 1$, что не м.б. при $k \ge 3$.

Теорема.

Класс ф-ий, предст-х полиномами, полон, т.т.т., когда k простое.

Задача. Разложить полином $f = 2x - x^2$, $k=5$

$$f = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$f = 1 \cdot j_1(x) + 2 j_4(x) = j_0(x-1) + 2 j_0(x-4) =$$

$$= 1 - (x-1)^4 + 2(1 - (x-4)^4) =$$

$$= 3 - x^4 + 4x^3 - 6x^2 + 4x - 1 - 2(x^4 - 16x^3 + 96x^2 - 256x + 256) \pmod 5 = 3 - x^4 + 4x^3 - 2x^2 + 4x - 1 - 2x^4 + 2x^3 - 2x^2 + 2x - 2 = -3x^4 + x^3 - 3x^2 + x. ◁$$

$= 2x^4 + x^3 + 2x^2 + y.$

② $f = \max(2x \dot- y, xy)$ ⊜ $k = 3$

	0	1	2
0	0	0	0
1	2	1	2
2	1	2	1.

$\ominus\ 2j_1(x) j_0(y) + 1\cdot j_1(x)\cdot j_2(y) + 2j_1(x) j_2(y) +$

$+ j_2(x) j_0(y) + 2j_2(x) j_1(y) + 1\cdot j_2(x) j_2(y) =$

$= 2(1-(x-1)^2)(1-y^2) + (1-(x-1)^2)(1-(y-1)^2) +$

$+ 2(1-(x-1)^2)(1-(y-2)^2) + (1-(x-2)^2)(1-y^2) +$

$+ 2(1-(x-1)^2)(1-(y-1)^2) + (1-(x-2)^2)(1-(y-2)^2) =$

$= (-x^2+2x)(2-2y^2 - y^2 + 2y - 2y^2 + 8y - 3) +$

$+ (-x^2 + x)(1 - y^2 + 4y - y - 2y) =$

$= (2x^2+2x)(y^2+y+2) + (2x^2+x)(2y^2+1)$

Практика.

$\min\{x^2, y\}, k=3$

	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	1
2	0	1	1.

$f(x_1,\dots,x_n) = \sum\limits_{\substack{\alpha_1,\dots,\alpha_n \\ f(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\neq 0}} f(\alpha_1,\dots,\alpha_n) j_{\alpha_1}(x)\dots j_{\alpha_n}(x_n) = 1\cdot \underset{j_0(x-1)}{j_1(x)} \cdot \underset{j_0(y-1)}{j_1(y)} +$

$+ 1\cdot j_1(x)\cdot j_2(y) + 1\cdot j_2(x)\cdot j_1(y) + 1\cdot j_2(x)\cdot j_2(y) =$

$= (1-(x-1)^2)(1-(y-1)^2) + (1-(x-1)^2)\cdot(1-(y-2)^2) +$

$+ (1-(x-2)^2)(1-(y-1)^2) + (1-(x-2)^2)(1-(y-2)^2) =$

$= (-x^2+2x)(\cancel{\ }\ (-2y^2) + (-x^2+x)(-2y^2) = x^2y^2.$

Вычислить, представимы ли полиномом по модулю k функции f

* $f(x) = 2(J_1(x) + J_2(x))$; $k=6$.

$a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^3 + a_4x^4 + a_5x^5$

	0	1	2	3	4	5
x	0	1	2	3	4	5
x^2	0	1	4	3	4	1
x^3	0	1	2	3	4	5
x^4	0	1	4	3	4	1
x^5	0	1	2	3	4	5

Если подставим 0 в $f(0) = 2(J_1(0) + J_2(0)) = 0$.

1: $\left(\begin{array}{cc|c} a_1 & a_2 & 4 \\ 2a_1 & 4a_2 & 0 \\ 3a_1 & 3a_2 & 0 \\ 4a_1 & 4a_2 & 4 \\ 5a_1 & a_2 & 0 \end{array}\right)$

$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \\ 4 & 4 & 4 \\ 5 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} = f(1) \\ = f(2) \end{array} \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$

$a_1 = 2$

$a_2 = 2$

$f(x) = 2x + 2x^2$.

* $f(x) = 3x \dot{-} 2x^2$ $k=4$

$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$ $f(0) = 0$.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow$ получим дробные коэф-ты, $\Rightarrow$ разложение единств. невозм.

* $f = 3(x + J_2(x) - J_4(x))$ $k = 6$

$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5$

$f_*(1) = 3 + a_1 + a_2$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 3 \\ 5 & 1 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{array}\right)$$

решений нет

1) свести систему к заведомо полной
2) док-ть неполноту
выражение полинома
3) представить в виде полинома
4) док-ть полноту

Док-ть, что приводимая система полна в P^k, $k \geq 3$, когда k - простое число.

$\{x-1, x+y, x^2+y\}$

$x-1$

$(x-1)-1 = x-2$

$= x-3 \ldots$

$x-(k-1) = x+1$.

$x + \underbrace{y + \ldots + y}_{k-1} = x - y$,

подставл.

$x - y = x - (x-1) = 1$. все const получим.

$x^2 + 0 = x^2$

$(x+y)^2 - (x^2+y^2) = 2xy$

$xy = \underbrace{2xy + \ldots + 2xy}_{\frac{k+1}{2}}$

система полна при k - прост.

* $\{x-1, xy + x - y + z\}$

$(x-1)^2 + x - 1 = 0$

$\cdot\ 1 + z$ - отрицание Поста

$x + z = x0 + x - 0 + z$

$x - z = x + \underbrace{z + z + \ldots + z}_{k-1}$

$xy + x - y + y - x = xy$

вместо z — $y-x$.

$\forall \{k-2, x+2y, xy^2\}$

$$x + \underbrace{2y + \ldots + 2y}_{\frac{k+1}{2}} = x + y$$

$$x + \underbrace{y + \ldots + y}_{k-1} = x - y$$

$$x + \underbrace{(k-2) + \ldots + (k-2)}_{\frac{k-1}{2}} = x+1$$

Нечеткие множества. 05.05

Понятие о нечетком множестве.

$E = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0, & \text{элемент} \notin A \\ 1 & \text{элемент} \in A. \end{cases}$$

Пусть функ-я $\mu_A(x)$ принимает значение на отр $[0,1]$

1) x_i точно не $\in$. Т.е. $\mu_A(x_i)=0$
2) м.б. элем-м мн-ва A в небольшой степени $\mu_A(x_i)$ близко к 0.
3) x_i может более менее $\in A$, т.е. не слишком близко к 0 и не слишк. близко к 1.
4) x_i м.б. в большей степени $\in A$, $\mu_A(x_i)$ близко к 1
5) x_i точно $\in A$, т.е. $\mu_A(x_i) = 1$

$A = \{(x_1|0,2), (x_2|1), (x_3|0), (x_4|0,7)\}$

$x \underset{\sim}{\in} A \qquad A \underset{\sim}{\subseteq} E$

$x \underset{\sim}{\notin} A$

если степень принадлежности $\in [0,1]$, то пишут

$x_1 \in_{0,2} A$.

Опр. Пусть E - некот. мн-во, тогда нечетким подмножеством $\underset{\sim}{A}$ мн-ва E будем наз-ть мн-во пар вида

$$A = \{(x, \mu_{\underset{\sim}{A}}(x)) \mid x \in E\}$$

μ_A - степень принадлежности и явл. отображением $\mu_A: E \longmapsto M$ из мн-ва E в некот. мн-во M, кот. наз-ся множеством принадлежности.

В том случае, если $M = \{0,1\}$ мы получим классическое подмножество.

Пример 1. Для мн-ва действ-х чисел нечеткое подмножество таких чисел, кот. $\approx a$

Пример 2. Для мн-ва всех людей нечеткое подмножество всех высоких.

Пример 3. На мн-ве всех цветов нечеткие подмножества темно-синего и сине-розового.

Простейшие операции над нечетким множеством.

1) вложение (включение)

Пусть E - некот. универс-е подмн-во, M - мн-во принадлежности и заданы мн-ва $\underset{\sim}{A}$ и $\underset{\sim}{B}$ как нечеткие подмн-ва мн-ва E.

Опр. Говорят, что A нечетко вложено в $\underset{\sim}{B}$, $\underset{\sim}{A} \subset \underset{\sim}{B}$, $\underset{\sim}{A} \underset{\sim}{\subseteq} \underset{\sim}{B}$, если выполн-ся след. соотношение,

$$\forall x \in E \quad \mu_{\underset{\sim}{A}}(x) \le \mu_{\underset{\sim}{B}}(x).$$

Пример $E = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$

$\underset{\sim}{A} = \{(x_1/0.7), (x_2/0), (x_3/0.6), (x_4/1)\}$

$\underset{\sim}{B} = \{(x_1/0.3), (x_2/0), (x_3/0.6), (x_4/0)\}$.

$\underset{\sim}{B} \subseteq \underset{\sim}{A}$

Опр. Говорят, что мн-во $\underset{\sim}{A}$ строго вложено во мн-во $\underset{\sim}{B}$, если хотя бы на одном эл-те $\mu_{\underset{\sim}{A}}(x) \le \mu_{\underset{\sim}{B}}(x)$ · строгое.

$\underset{\sim}{A} \subset\subset \underset{\sim}{B}$

2) равенство.

Опр. Говорят, что мн-во $\underset{\sim}{A} = \underset{\sim}{B}$, если
$\forall x \in E \quad \mu_{\underset{\sim}{A}}(x) = \mu_{\underset{\sim}{B}}(x)$

3) Дополнение

Будем считать, что $M = [0,1]$. 2а нечетк. подмн. универс-го мн-ва дополняют друг друга, если выполняется соотношение:

$\forall x \in E \quad \mu_{\underset{\sim}{A}}(x) = 1 - \mu_{\underset{\sim}{B}}(x)$

Пример. $E = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$

$\underset{\sim}{B} = \{(x_1/0.3), (x_2/0), (x_3/0.6), (x_4/0)\}$

$\overline{\underset{\sim}{B}} = \{(x_1/0.7), (x_2/1), (x_3/0.4), (x_4/1)\}$.

4) Пересечение

Пересечением 2х нечетких подмн-в унив. мн-ва наз-ся максимальное нечеткое подмн-во одновременно вложенное и в $\underset{\sim}{A}$, и в $\underset{\sim}{B}$.

$\underset{\sim}{A} \cap \underset{\sim}{B}$, т.е. $\forall x \in E \quad \mu_{\underset{\sim}{A} \cap \underset{\sim}{B}} = \min(\mu_{\underset{\sim}{A}}(x), \mu_{\underset{\sim}{B}}(x))$

Пример. (*)

$E = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$

$\underset{\sim}{A} = \{(x_1/0.3), (x_2/0.5), (x_3/0.7), (x_4/1), (x_5/0)\}$

$\underset{\sim}{B} = \{(x_1/0.5), (x_2/0.8), (x_3/0.3), (x_4/0.1), (x_5/1)\}$.

$\underset{\sim}{A} \cap \underset{\sim}{B} = \{(x_1/0.3), (x_2/0.5), (x_3/0.5), (x_4/0.1), (x_5/0)\}$.

Заметим, что пересечение двух нечетких подмножеств позволяет определить нечеткую конъюнкцию.

Пример. Число x близко к 5
Число x близко к 10

В этом случае мы определили нечеткое понятие

5) Объединением 2х нечетких подмн-в унив. мн-ва E наз-ся мин-е нечетк. подмн-во мн-ва E, кот. содержит и $\underset{\sim}{A}$ и $\underset{\sim}{B}$.

$\forall x \in E \quad \mu_{\underset{\sim}{A} \cup \underset{\sim}{B}}(x) = \max(\mu_{\underset{\sim}{A}}(x), \mu_{\underset{\sim}{B}}(x))$

Пример. (Данные из примера *)

$\underset{\sim}{A} \cup \underset{\sim}{B} = \{(x_1/0.5), (x_2/0.8), (x_3/0.7), (x_4/1), (x_5/1)\}$

6) Разность. $\underset{\sim}{A} \setminus \underset{\sim}{B} = \underset{\sim}{A} \cap \overline{\underset{\sim}{B}}$

Пример (Данные из примера *).

$\underset{\sim}{A} \setminus \underset{\sim}{B} = \{(x_1/0.3), (x_2/0.2), (x_3/0.7), (x_4/0.9), (x_5/0)\}$

7) симметрическая разность

$\underset{\sim}{A} \Delta \underset{\sim}{B}, \ \underset{\sim}{A} \oplus \underset{\sim}{B} = (\underset{\sim}{A} \setminus \underset{\sim}{B}) \cup (\underset{\sim}{B} \setminus \underset{\sim}{A})$

Пример.

$B \setminus A = \{(x_1|0.5), (x_2|0.5), (x_3|0.3), (x_4|0), (x_5|1)\}$

$\underset{\sim}{A} \triangle \underset{\sim}{B} = \{(x_1|0.5), (x_2|0.5), (x_3|0.7), (x_4|0.9), (x_5|1)\}$

8) расстояние Хемминга

Расстояние Хемминга наз-ют величину:

1. $d(\underset{\sim}{A}, \underset{\sim}{B}) = \sum_{i=1}^{n} |\mu_{\underset{\sim}{A}}(x_i) - \mu_{\underset{\sim}{B}}(x_i)|$, если кол-во эл-в в универс. множестве $= n$.

2. Если E счетно.

$$d(\underset{\sim}{A}, \underset{\sim}{B}) = \sum_{i=1}^{\infty} |\mu_{\underset{\sim}{A}}(x_i) - \mu_{\underset{\sim}{B}}(x_i)|$$

3. $E = \mathbb{R}$.

$$d(\underset{\sim}{A}, \underset{\sim}{B}) = \int_{-\infty}^{\infty} |\mu_{\underset{\sim}{A}}(x) - \mu_{\underset{\sim}{B}}(x)| dx.$$

Пример (данные из примера $*$)

$$d(\underset{\sim}{A}, \underset{\sim}{B}) = 0.2 + 0.3 + 0.4 + 0.9 + 1 = 2.8.$$

9) расстояние Евклида.

$$e(\underset{\sim}{A}, \underset{\sim}{B}) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |\mu_{\underset{\sim}{A}}(x_i) - \mu_{\underset{\sim}{B}}(x_i)|^2}$$

10) подмножество α-уровня.

Опр. Подмн-ем α уровня нечет. мн-ва $\underset{\sim}{A}$ наз-ся мн-во вида

$$A_\alpha = \{x \mid \mu_{\underset{\sim}{A}}(x) \geq \alpha\}$$

<u>Подготовка к к.р</u>

$\{x-2,\ 2x+y,\ x \dot{-} y\}$

$(x-2) \dot{-} (x-2) = 0.$

$2x+y$

$$\underbrace{2x+\ldots+2x}_{\frac{x+1}{2}} + y = x+y$$

$$x + \underbrace{(x-2)+\ldots+(x-2)}_{\frac{x-1}{2}} = x+1$$

Система полна.

$\{x-2,\ 2x+y,\ x^2 \dot{-} y\}$

$$\underbrace{2x+\ldots+2x}_{\frac{x+1}{2}} + y = x+y$$

$$x + \underbrace{(x-2)+\ldots+(x-2)}_{\frac{x-1}{2}} = x+1$$

$$1^2 \dot{-} x = j_0(x)$$

В последнем (сумму и произведение)!