

Некоторые методы решения задачи о максимальном независимом множестве.

Учебная презентация

Т. С. Синяк Е. А. Максименко

Южный федеральный университет

30 ноября 2007 г.

Основные определения и формулировка

Неориентированный граф, смежность

Определение независимого множества

Формулировка задачи и пример

Точные методы решения

Алгоритм Брона-Кербоша

Метод ветвей и границ

Неточные методы решения

Расширение и урезание

Генетический алгоритм

Эффективность различных методов

Алгоритм Брона-Кербоша

Метод ветвей и границ

Генетический алгоритм

План доклада

Основные определения и формулировка

Неориентированный граф, смежность

Определение независимого множества

Формулировка задачи и пример

Точные методы решения

Алгоритм Брона-Кербоша

Метод ветвей и границ

Неточные методы решения

Расширение и урезание

Генетический алгоритм

Эффективность различных методов

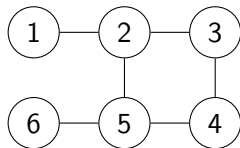
Алгоритм Брона-Кербоша

Метод ветвей и границ

Генетический алгоритм

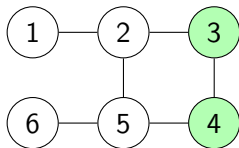
Неориентированный граф, смежность

Пусть $G = (V, E)$ — неориентированный граф с множеством вершин $V (\neq \emptyset)$ и множеством рёбер $E (\subset C_V^2)$, где $C_V^2 = \{\{u, v\} : u, v \in V, u \neq v\}$ — множество двухэлементных подмножеств множества V .



Неориентированный граф, смежность

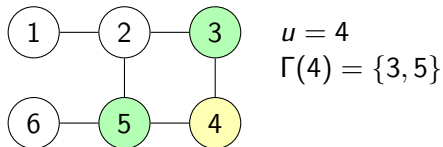
Пусть $G = (V, E)$ — неориентированный граф с множеством вершин $V (\neq \emptyset)$ и множеством рёбер $E (\subset C_V^2)$, где $C_V^2 = \{\{u, v\} : u, v \in V, u \neq v\}$ — множество двухэлементных подмножеств множества V .



Вершины u и v называют *смежными* (*соседними*) в графе G , если $\{u, v\} \in E$.

Неориентированный граф, смежность

Пусть $G = (V, E)$ — неориентированный граф с множеством вершин $V (\neq \emptyset)$ и множеством рёбер $E (\subset C_V^2)$, где $C_V^2 = \{\{u, v\} : u, v \in V, u \neq v\}$ — множество двухэлементных подмножеств множества V .

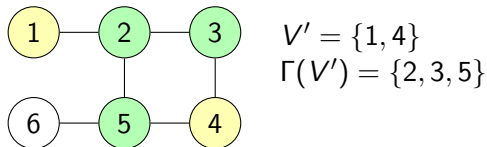


Вершины u и v называют *смежными* (*соседними*) в графе G , если $\{u, v\} \in E$.

$\Gamma(u)$ — множество всех вершин, смежных с вершиной u .

Неориентированный граф, смежность

Пусть $G = (V, E)$ — неориентированный граф с множеством вершин $V (\neq \emptyset)$ и множеством рёбер $E (\subset C_V^2)$, где $C_V^2 = \{\{u, v\}: u, v \in V, u \neq v\}$ — множество двухэлементных подмножеств множества V .



Вершины u и v называют *смежными* (*соседними*) в графе G , если $\{u, v\} \in E$.

$\Gamma(u)$ — множество всех вершин, смежных с вершиной u .

$\Gamma(V')$ ($V' \subset V$) — множество всех вершин, соседних с вершинами из V' :

$$\Gamma(V') = \cup \{\Gamma(v): v \in V'\}$$

Определение независимого множества

Пусть $G = (V, E)$ — неориентированный граф.

Множество $M \subset V$ называют *независимым множеством* в графе G , если $\forall u, v \in M \quad \{u, v\} \notin E$.

Другими словами, если $M \cap \Gamma(M) = \emptyset$.

Определение независимого множества

Пусть $G = (V, E)$ — неориентированный граф.

Множество $M \subset V$ называют *независимым множеством* в графе G , если $\forall u, v \in M \quad \{u, v\} \notin E$.

Другими словами, если $M \cap \Gamma(M) = \emptyset$.

Множество всех независимых множеств в графе G обозначим через $\text{IndSets}(G)$.

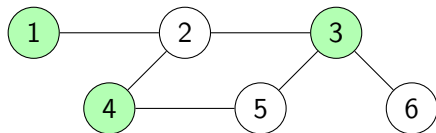
Определение независимого множества

Пусть $G = (V, E)$ — неориентированный граф.

Множество $M \subset V$ называют *независимым множеством* в графе G , если $\forall u, v \in M \quad \{u, v\} \notin E$.

Другими словами, если $M \cap \Gamma(M) = \emptyset$.

Множество всех независимых множеств в графе G обозначим через $\text{IndSets}(G)$.



$\{1, 3, 4\} \in \text{IndSets}(G)$

Рассмотрим пример.

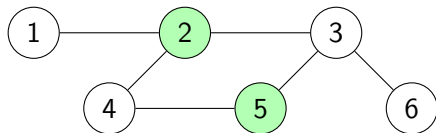
Определение независимого множества

Пусть $G = (V, E)$ — неориентированный граф.

Множество $M \subset V$ называют *независимым множеством* в графе G , если $\forall u, v \in M \quad \{u, v\} \notin E$.

Другими словами, если $M \cap \Gamma(M) = \emptyset$.

Множество всех независимых множеств в графе G обозначим через $\text{IndSets}(G)$.



$\{1, 3, 4\} \in \text{IndSets}(G)$

$\{2, 5\} \in \text{IndSets}(G)$

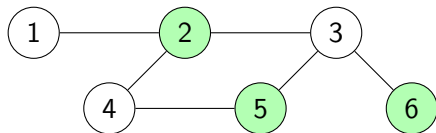
Определение независимого множества

Пусть $G = (V, E)$ — неориентированный граф.

Множество $M \subset V$ называют *независимым множеством* в графе G , если $\forall u, v \in M \quad \{u, v\} \notin E$.

Другими словами, если $M \cap \Gamma(M) = \emptyset$.

Множество всех независимых множеств в графе G обозначим через $\text{IndSets}(G)$.



$\{1, 3, 4\} \in \text{IndSets}(G)$

$\{2, 5\} \in \text{IndSets}(G)$

$\{2, 5, 6\} \in \text{IndSets}(G)$

.....

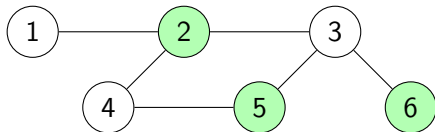
Определение независимого множества

Пусть $G = (V, E)$ — неориентированный граф.

Множество $M \subset V$ называют *независимым множеством* в графе G , если $\forall u, v \in M \quad \{u, v\} \notin E$.

Другими словами, если $M \cap \Gamma(M) = \emptyset$.

Множество всех независимых множеств в графе G обозначим через $\text{IndSets}(G)$.



$\{1, 3, 4\} \in \text{IndSets}(G)$

$\{2, 5\} \in \text{IndSets}(G)$

$\{2, 5, 6\} \in \text{IndSets}(G)$

.....

Независимые множества можно сравнивать

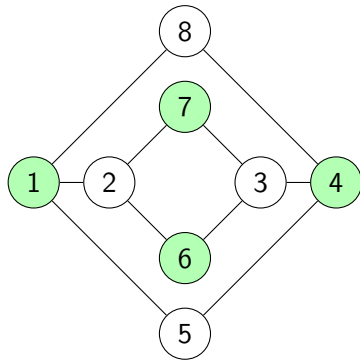
по числу элементов: $\#\{2, 5\} < \#\{1, 3, 4\}$

и по включению: $\{2, 5\} \subset \{2, 5, 6\}$.

Формулировка задачи

Дано: неориентированный граф $G(V, E)$.

Задача: найти максимальное по числу элементов независимое множество в графе G .

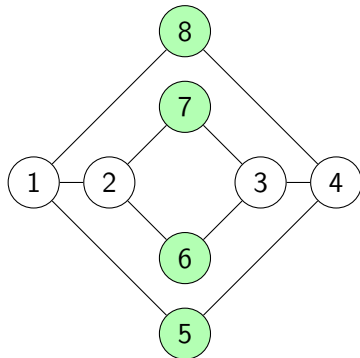


Максимальное независимое множество: $\{1, 4, 6, 7\}$

Формулировка задачи

Дано: неориентированный граф $G(V, E)$.

Задача: найти максимальное по числу элементов независимое множество в графе G .



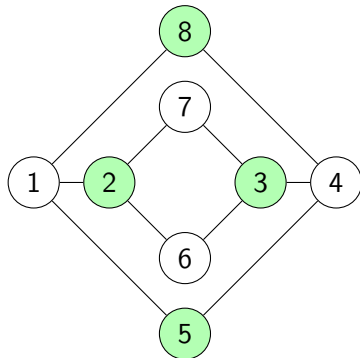
Максимальное независимое множество: $\{1, 4, 6, 7\}$

Есть и другие максимальные независимые множества:
 $\{5, 6, 7, 8\}$

Формулировка задачи

Дано: неориентированный граф $G(V, E)$.

Задача: найти максимальное по числу элементов независимое множество в графе G .



Максимальное независимое множество: $\{1, 4, 6, 7\}$

Есть и другие максимальные независимые множества:

$\{5, 6, 7, 8\}$

$\{2, 3, 5, 8\}$

План доклада

Основные определения и формулировка

Неориентированный граф, смежность

Определение независимого множества

Формулировка задачи и пример

Точные методы решения

Алгоритм Брона-Кербоша

Метод ветвей и границ

Неточные методы решения

Расширение и урезание

Генетический алгоритм

Эффективность различных методов

Алгоритм Брона-Кербоша

Метод ветвей и границ

Генетический алгоритм

Алгоритм Брона-Кербоша: основные объекты

Находит все максимальные по включению независимые множества.

На каждом шаге алгоритма множество V разбито на четыре части:

M

$\Gamma(M)$

K

P

Алгоритм Брона-Кербоша: основные объекты

Находит все максимальные по включению независимые множества.

На каждом шаге алгоритма множество V разбито на четыре части:

M — текущее независимое множество;

$\Gamma(M)$

K

P

Алгоритм Брона-Кербоша: основные объекты

Находит все максимальные по включению независимые множества.

На каждом шаге алгоритма множество V разбито на четыре части:

M — текущее независимое множество;

$\Gamma(M)$ — множество вершин, смежных с M ;

K

P

Алгоритм Брона-Кербоша: основные объекты

Находит все максимальные по включению независимые множества.

На каждом шаге алгоритма множество V разбито на четыре части:

M — текущее независимое множество;

$G(M)$ — множество вершин, смежных с M ;

K — множество кандидатов, т. е. вершин, каждая из которых может быть добавлена в M ;

P

Алгоритм Брона-Кербоша: основные объекты

Находит все максимальные по включению независимые множества.

На каждом шаге алгоритма множество V разбито на четыре части:

M — текущее независимое множество;

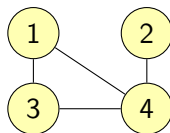
$\Gamma(M)$ — множество вершин, смежных с M ;

K — множество кандидатов, т. е. вершин, каждая из которых может быть добавлена в M ;

P — множество просмотренных вершин, каждая из которых не может быть добавлена в текущее M , так как уже добавлялась ранее.

Алгоритма Брона-Кербоша: демонстрация

M	K	P	v
\emptyset	1, 2, 3, 4	\emptyset	



while $K \neq \emptyset$ or $M \neq \emptyset$:

if $K \neq \emptyset$:

$v = K.first$

push M, K, P, v

$M = M + \{v\}$

$K = K - \Gamma(v) - \{v\}$

$P = P - \Gamma(v)$

else:

if $P == \emptyset$: вывод M

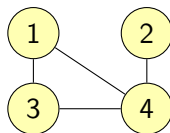
pop v, P, K, M

$K = K - \{v\}$

$P = P + \{v\}$

Алгоритм Брона-Кербоша: демонстрация

M	K	P	v
\emptyset	1, 2, 3, 4	\emptyset	1



while $K \neq \emptyset$ or $M \neq \emptyset$:

if $K \neq \emptyset$:

$v = K.first$

push M, K, P, v

$M = M + \{v\}$

$K = K - \Gamma(v) - \{v\}$

$P = P - \Gamma(v)$

else:

if $P == \emptyset$: вывод M

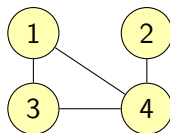
pop v, P, K, M

$K = K - \{v\}$

$P = P + \{v\}$

Алгоритм Брона-Кербоша: демонстрация

M	K	P	v
\emptyset	1, 2, 3, 4	\emptyset	1



while $K \neq \emptyset$ or $M \neq \emptyset$:

if $K \neq \emptyset$:

$v = K.first$

push M, K, P, v

$M = M + \{v\}$

$K = K - \Gamma(v) - \{v\}$

$P = P - \Gamma(v)$

else:

if $P == \emptyset$: вывод M

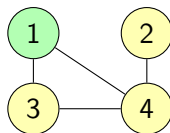
pop v, P, K, M

$K = K - \{v\}$

$P = P + \{v\}$

Алгоритм Брона-Кербоша: демонстрация

M	K	P	v
\emptyset	1, 2, 3, 4	\emptyset	1
1			



while $K \neq \emptyset$ or $M \neq \emptyset$:

if $K \neq \emptyset$:

$v = K.first$

push M, K, P, v

$M = M + \{v\}$

$K = K - \Gamma(v) - \{v\}$

$P = P - \Gamma(v)$

else:

if $P == \emptyset$: вывод M

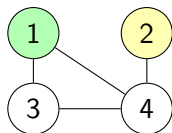
pop v, P, K, M

$K = K - \{v\}$

$P = P + \{v\}$

Алгоритм Брона-Кербоша: демонстрация

M	K	P	v
\emptyset	1, 2, 3, 4	\emptyset	1
1	2		



while $K \neq \emptyset$ or $M \neq \emptyset$:

if $K \neq \emptyset$:

$v = K.first$

push M, K, P, v

$M = M + \{v\}$

$K = K - \Gamma(v) - \{v\}$

$P = P - \Gamma(v)$

else:

if $P == \emptyset$: вывод M

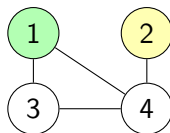
pop v, P, K, M

$K = K - \{v\}$

$P = P + \{v\}$

Алгоритм Брона-Кербоша: демонстрация

M	K	P	v
\emptyset	1, 2, 3, 4	\emptyset	1
1	2	\emptyset	



while $K \neq \emptyset$ or $M \neq \emptyset$:

if $K \neq \emptyset$:

$v = K.first$

push M, K, P, v

$M = M + \{v\}$

$K = K - \Gamma(v) - \{v\}$

$P = P - \Gamma(v)$

else:

if $P == \emptyset$: вывод M

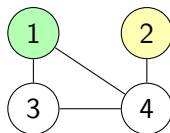
pop v, P, K, M

$K = K - \{v\}$

$P = P + \{v\}$

Алгоритм Брона-Кербоша: демонстрация

M	K	P	v
\emptyset	1, 2, 3, 4	\emptyset	1
1	2	\emptyset	



while $K \neq \emptyset$ or $M \neq \emptyset$:

if $K \neq \emptyset$:

$v = K.first$

push M, K, P, v

$M = M + \{v\}$

$K = K - \Gamma(v) - \{v\}$

$P = P - \Gamma(v)$

else:

if $P == \emptyset$: вывод M

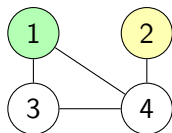
pop v, P, K, M

$K = K - \{v\}$

$P = P + \{v\}$

Алгоритм Брона-Кербоша: демонстрация

M	K	P	v
\emptyset	1, 2, 3, 4	\emptyset	1
1	2	\emptyset	2



while $K \neq \emptyset$ or $M \neq \emptyset$:

if $K \neq \emptyset$:

$v = K.first$

push M, K, P, v

$M = M + \{v\}$

$K = K - \Gamma(v) - \{v\}$

$P = P - \Gamma(v)$

else:

if $P == \emptyset$: вывод M

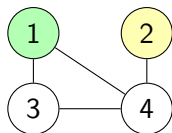
pop v, P, K, M

$K = K - \{v\}$

$P = P + \{v\}$

Алгоритм Брона-Кербоша: демонстрация

M	K	P	v
\emptyset	1, 2, 3, 4	\emptyset	1
1	2	\emptyset	2



while $K \neq \emptyset$ or $M \neq \emptyset$:

if $K \neq \emptyset$:

$v = K.first$

push M, K, P, v

$M = M + \{v\}$

$K = K - \Gamma(v) - \{v\}$

$P = P - \Gamma(v)$

else:

if $P == \emptyset$: вывод M

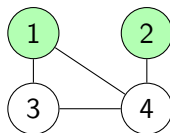
pop v, P, K, M

$K = K - \{v\}$

$P = P + \{v\}$

Алгоритм Брона-Кербоша: демонстрация

M	K	P	v
\emptyset	1, 2, 3, 4	\emptyset	1
1	2	\emptyset	2
1, 2			



while $K \neq \emptyset$ or $M \neq \emptyset$:

if $K \neq \emptyset$:

$v = K.first$

push M, K, P, v

$M = M + \{v\}$

$K = K - \Gamma(v) - \{v\}$

$P = P - \Gamma(v)$

else:

if $P == \emptyset$: вывод M

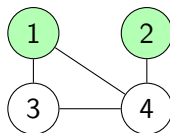
pop v, P, K, M

$K = K - \{v\}$

$P = P + \{v\}$

Алгоритм Брона-Кербоша: демонстрация

M	K	P	v
\emptyset	1, 2, 3, 4	\emptyset	1
1	2	\emptyset	2
1, 2	\emptyset		



while $K \neq \emptyset$ or $M \neq \emptyset$:

if $K \neq \emptyset$:

$v = K.first$

push M, K, P, v

$M = M + \{v\}$

$K = K - \Gamma(v) - \{v\}$

$P = P - \Gamma(v)$

else:

if $P == \emptyset$: вывод M

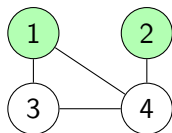
pop v, P, K, M

$K = K - \{v\}$

$P = P + \{v\}$

Алгоритм Брона-Кербоша: демонстрация

M	K	P	v
\emptyset	1, 2, 3, 4	\emptyset	1
1	2	\emptyset	2
1, 2	\emptyset	\emptyset	



while $K \neq \emptyset$ or $M \neq \emptyset$:

if $K \neq \emptyset$:

$v = K.first$

push M, K, P, v

$M = M + \{v\}$

$K = K - \Gamma(v) - \{v\}$

$P = P - \Gamma(v)$

else:

if $P == \emptyset$: вывод M

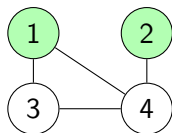
pop v, P, K, M

$K = K - \{v\}$

$P = P + \{v\}$

Алгоритм Брона-Кербоша: демонстрация

M	K	P	v
\emptyset	1, 2, 3, 4	\emptyset	1
1	2	\emptyset	2
1, 2	\emptyset	\emptyset	



while $K \neq \emptyset$ or $M \neq \emptyset$:

if $K \neq \emptyset$:

$v = K.first$

push M, K, P, v

$M = M + \{v\}$

$K = K - \Gamma(v) - \{v\}$

$P = P - \Gamma(v)$

else:

if $P == \emptyset$: вывод M

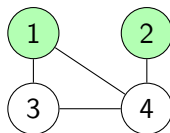
pop v, P, K, M

$K = K - \{v\}$

$P = P + \{v\}$

Алгоритм Брона-Кербоша: демонстрация

M	K	P	v
\emptyset	1, 2, 3, 4	\emptyset	1
1	2	\emptyset	2
▶ 1, 2	\emptyset	\emptyset	



while $K \neq \emptyset$ or $M \neq \emptyset$:

if $K \neq \emptyset$:

$v = K.first$

push M, K, P, v

$M = M + \{v\}$

$K = K - \Gamma(v) - \{v\}$

$P = P - \Gamma(v)$

else:

if $P == \emptyset$: вывод M

pop v, P, K, M

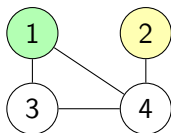
$K = K - \{v\}$

$P = P + \{v\}$

Вывод: $\{1,2\}$

Алгоритм Брона-Кербоша: демонстрация

	M	K	P	v
	\emptyset	1, 2, 3, 4	\emptyset	1
→	1	2	\emptyset	2
►	1, 2	\emptyset	\emptyset	
	1			



while $K \neq \emptyset$ or $M \neq \emptyset$:

if $K \neq \emptyset$:

$v = K.\text{first}$

push M, K, P, v

$M = M + \{v\}$

$K = K - \Gamma(v) - \{v\}$

$P = P - \Gamma(v)$

else:

if $P == \emptyset$: вывод M

pop v, P, K, M

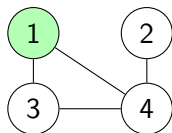
$K = K - \{v\}$

$P = P + \{v\}$

Вывод: $\{1, 2\}$

Алгоритм Брона-Кербоша: демонстрация

	M	K	P	v
	\emptyset	1, 2, 3, 4	\emptyset	1
→	1	2	\emptyset	2
▶	1, 2	\emptyset	\emptyset	
	1	\emptyset		



while $K \neq \emptyset$ or $M \neq \emptyset$:

if $K \neq \emptyset$:

$v = K.\text{first}$

push M, K, P, v

$M = M + \{v\}$

$K = K - \Gamma(v) - \{v\}$

$P = P - \Gamma(v)$

else:

if $P == \emptyset$: вывод M

pop v, P, K, M

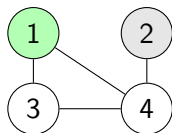
$K = K - \{v\}$

$P = P + \{v\}$

Вывод: $\{1,2\}$

Алгоритм Брона-Кербоша: демонстрация

	M	K	P	v
	\emptyset	1, 2, 3, 4	\emptyset	1
→	1	2	\emptyset	2
▶	1, 2	\emptyset	\emptyset	
	1	\emptyset	2	



while $K \neq \emptyset$ or $M \neq \emptyset$:

if $K \neq \emptyset$:

$v = K.first$

push M, K, P, v

$M = M + \{v\}$

$K = K - \Gamma(v) - \{v\}$

$P = P - \Gamma(v)$

else:

if $P == \emptyset$: вывод M

pop v, P, K, M

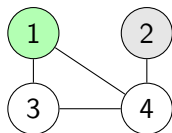
$K = K - \{v\}$

$P = P + \{v\}$

Вывод: $\{1,2\}$

Алгоритм Брона-Кербоша: демонстрация

M	K	P	v
\emptyset	1, 2, 3, 4	\emptyset	1
1	2	\emptyset	2
1, 2	\emptyset	\emptyset	
1	\emptyset	2	



while $K \neq \emptyset$ or $M \neq \emptyset$:

if $K \neq \emptyset$:

$v = K.first$

push M, K, P, v

$M = M + \{v\}$

$K = K - \Gamma(v) - \{v\}$

$P = P - \Gamma(v)$

else:

if $P == \emptyset$: вывод M

pop v, P, K, M

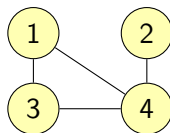
$K = K - \{v\}$

$P = P + \{v\}$

Вывод: $\{1,2\}$

Алгоритм Брона-Кербоша: демонстрация

	M	K	P	v
→	\emptyset	1, 2, 3, 4	\emptyset	1
	1	2	\emptyset	2
►	1, 2	\emptyset	\emptyset	
	1	\emptyset	2	
	\emptyset			



while $K \neq \emptyset$ or $M \neq \emptyset$:

if $K \neq \emptyset$:

$v = K.\text{first}$

push M, K, P, v

$M = M + \{v\}$

$K = K - \Gamma(v) - \{v\}$

$P = P - \Gamma(v)$

else:

if $P == \emptyset$: вывод M

pop v, P, K, M

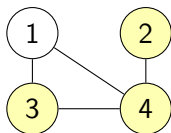
$K = K - \{v\}$

$P = P + \{v\}$

Вывод: $\{1,2\}$

Алгоритм Брона-Кербоша: демонстрация

	M	K	P	v
→	\emptyset	1, 2, 3, 4	\emptyset	1
	1	2	\emptyset	2
►	1, 2	\emptyset	\emptyset	
	1	\emptyset	2	
	\emptyset	2, 3, 4		



while $K \neq \emptyset$ or $M \neq \emptyset$:

if $K \neq \emptyset$:

$v = K.first$

push M, K, P, v

$M = M + \{v\}$

$K = K - \Gamma(v) - \{v\}$

$P = P - \Gamma(v)$

else:

if $P == \emptyset$: вывод M

pop v, P, K, M

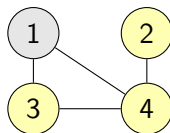
$K = K - \{v\}$

$P = P + \{v\}$

Вывод: {1,2}

Алгоритм Брона-Кербоша: демонстрация

	M	K	P	v
→	\emptyset	1, 2, 3, 4	\emptyset	1
	1	2	\emptyset	2
►	1, 2	\emptyset	\emptyset	
	1	\emptyset	2	
	\emptyset	2, 3, 4	1	



while $K \neq \emptyset$ or $M \neq \emptyset$:

if $K \neq \emptyset$:

$v = K.\text{first}$

push M, K, P, v

$M = M + \{v\}$

$K = K - \Gamma(v) - \{v\}$

$P = P - \Gamma(v)$

else:

if $P == \emptyset$: вывод M

pop v, P, K, M

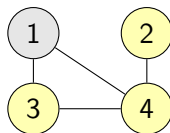
$K = K - \{v\}$

$P = P + \{v\}$

Вывод: {1,2}

Алгоритм Брона-Кербоша: демонстрация

	M	K	P	v
	\emptyset	1, 2, 3, 4	\emptyset	1
	1	2	\emptyset	2
►	1, 2	\emptyset	\emptyset	
	1	\emptyset	2	
	\emptyset	2, 3, 4	1	



while $K \neq \emptyset$ or $M \neq \emptyset$:

if $K \neq \emptyset$:

$v = K.\text{first}$

push M, K, P, v

$M = M + \{v\}$

$K = K - \Gamma(v) - \{v\}$

$P = P - \Gamma(v)$

else:

if $P == \emptyset$: вывод M

pop v, P, K, M

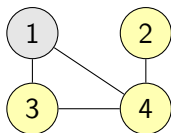
$K = K - \{v\}$

$P = P + \{v\}$

Вывод: $\{1,2\}$

Алгоритм Брона-Кербоша: демонстрация

	M	K	P	v
	\emptyset	1, 2, 3, 4	\emptyset	1
	1	2	\emptyset	2
►	1, 2	\emptyset	\emptyset	
	1	\emptyset	2	
	\emptyset	2, 3, 4	1	2



while $K \neq \emptyset$ or $M \neq \emptyset$:

if $K \neq \emptyset$:

$v = K.first$

push M, K, P, v

$M = M + \{v\}$

$K = K - \Gamma(v) - \{v\}$

$P = P - \Gamma(v)$

else:

if $P == \emptyset$: вывод M

pop v, P, K, M

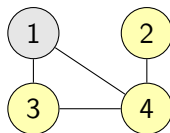
$K = K - \{v\}$

$P = P + \{v\}$

Вывод: {1,2}

Алгоритм Брона-Кербоша: демонстрация

	M	K	P	v
	\emptyset	1, 2, 3, 4	\emptyset	1
	1	2	\emptyset	2
►	1, 2	\emptyset	\emptyset	
	1	\emptyset	2	
	\emptyset	2, 3, 4	1	2



while $K \neq \emptyset$ or $M \neq \emptyset$:

if $K \neq \emptyset$:

$v = K.\text{first}$

push M, K, P, v

$M = M + \{v\}$

$K = K - \Gamma(v) - \{v\}$

$P = P - \Gamma(v)$

else:

if $P == \emptyset$: вывод M

pop v, P, K, M

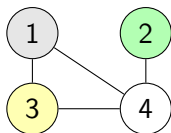
$K = K - \{v\}$

$P = P + \{v\}$

Вывод: {1,2}

Алгоритм Брона-Кербоша: демонстрация

	M	K	P	v
	\emptyset	1, 2, 3, 4	\emptyset	1
	1	2	\emptyset	2
►	1, 2	\emptyset	\emptyset	
	1	\emptyset	2	
	\emptyset	2, 3, 4	1	2
	2	3	1	3



while $K \neq \emptyset$ or $M \neq \emptyset$:

if $K \neq \emptyset$:

$v = K.\text{first}$

push M, K, P, v

$M = M + \{v\}$

$K = K - \Gamma(v) - \{v\}$

$P = P - \Gamma(v)$

else:

if $P == \emptyset$: вывод M

pop v, P, K, M

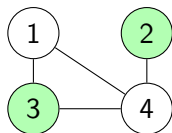
$K = K - \{v\}$

$P = P + \{v\}$

Вывод: $\{1,2\}$

Алгоритм Брона-Кербоша: демонстрация

	M	K	P	v
	\emptyset	1, 2, 3, 4	\emptyset	1
	1	2	\emptyset	2
►	1, 2	\emptyset	\emptyset	
	1	\emptyset	2	
	\emptyset	2, 3, 4	1	2
	2	3	1	3
►	2, 3	\emptyset	\emptyset	



while $K \neq \emptyset$ or $M \neq \emptyset$:

if $K \neq \emptyset$:

$v = K.\text{first}$

push M, K, P, v

$M = M + \{v\}$

$K = K - \Gamma(v) - \{v\}$

$P = P - \Gamma(v)$

else:

if $P == \emptyset$: вывод M

pop v, P, K, M

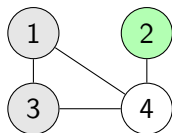
$K = K - \{v\}$

$P = P + \{v\}$

Вывод: $\{1,2\}$, $\{2,3\}$

Алгоритма Брона-Кербоша: демонстрация

	M	K	P	v
	\emptyset	1, 2, 3, 4	\emptyset	1
	1	2	\emptyset	2
►	1, 2	\emptyset	\emptyset	
	1	\emptyset	2	
	\emptyset	2, 3, 4	1	2
→	2	3	1	3
►	2, 3	\emptyset	\emptyset	
	2	\emptyset	1, 3	



while $K \neq \emptyset$ or $M \neq \emptyset$:

if $K \neq \emptyset$:

$v = K.\text{first}$

push M, K, P, v

$M = M + \{v\}$

$K = K - \Gamma(v) - \{v\}$

$P = P - \Gamma(v)$

else:

if $P == \emptyset$: вывод M

pop v, P, K, M

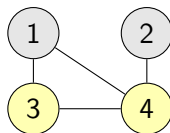
$K = K - \{v\}$

$P = P + \{v\}$

Вывод: $\{1,2\}$, $\{2,3\}$

Алгоритм Брона-Кербоша: демонстрация

	M	K	P	v
	\emptyset	1, 2, 3, 4	\emptyset	1
	1	2	\emptyset	2
►	1, 2	\emptyset	\emptyset	
	1	\emptyset	2	
→	\emptyset	2, 3, 4	1	2
	2	3	1	3
►	2, 3	\emptyset	\emptyset	
	2	\emptyset	1, 3	
	\emptyset	3, 4	1, 2	3



while $K \neq \emptyset$ or $M \neq \emptyset$:

if $K \neq \emptyset$:

$v = K.\text{first}$

push M, K, P, v

$M = M + \{v\}$

$K = K - \Gamma(v) - \{v\}$

$P = P - \Gamma(v)$

else:

if $P == \emptyset$: вывод M

pop v, P, K, M

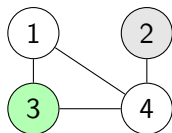
$K = K - \{v\}$

$P = P + \{v\}$

Вывод: $\{1,2\}$, $\{2,3\}$

Алгоритма Брона-Кербоша: демонстрация

	M	K	P	v
	\emptyset	1, 2, 3, 4	\emptyset	1
	1	2	\emptyset	2
►	1, 2	\emptyset	\emptyset	
	1	\emptyset	2	
	\emptyset	2, 3, 4	1	2
	2	3	1	3
►	2, 3	\emptyset	\emptyset	
	2	\emptyset	1, 3	
	\emptyset	3, 4	1, 2	3
	3	\emptyset	2	



while $K \neq \emptyset$ or $M \neq \emptyset$:

if $K \neq \emptyset$:

$v = K.\text{first}$

push M, K, P, v

$M = M + \{v\}$

$K = K - \Gamma(v) - \{v\}$

$P = P - \Gamma(v)$

else:

if $P == \emptyset$: вывод M

pop v, P, K, M

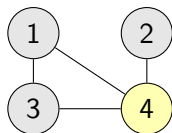
$K = K - \{v\}$

$P = P + \{v\}$

Вывод: $\{1,2\}$, $\{2,3\}$

Алгоритма Брона-Кербоша: демонстрация

	M	K	P	v
	\emptyset	1, 2, 3, 4	\emptyset	1
	1	2	\emptyset	2
►	1, 2	\emptyset	\emptyset	
	1	\emptyset	2	
	\emptyset	2, 3, 4	1	2
	2	3	1	3
►	2, 3	\emptyset	\emptyset	
	2	\emptyset	1, 3	
→	\emptyset	3, 4	1, 2	3
	3	\emptyset	2	
	\emptyset	4	1, 2, 3	4



while $K \neq \emptyset$ or $M \neq \emptyset$:

if $K \neq \emptyset$:

$v = K.\text{first}$

push M, K, P, v

$M = M + \{v\}$

$K = K - \Gamma(v) - \{v\}$

$P = P - \Gamma(v)$

else:

if $P == \emptyset$: вывод M

pop v, P, K, M

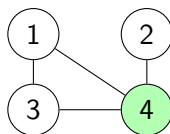
$K = K - \{v\}$

$P = P + \{v\}$

Вывод: $\{1,2\}$, $\{2,3\}$

Алгоритм Брона-Кербоша: демонстрация

	M	K	P	v
	\emptyset	1, 2, 3, 4	\emptyset	1
	1	2	\emptyset	2
►	1, 2	\emptyset	\emptyset	
	1	\emptyset	2	
	\emptyset	2, 3, 4	1	2
	2	3	1	3
►	2, 3	\emptyset	\emptyset	
	2	\emptyset	1, 3	
	\emptyset	3, 4	1, 2	3
	3	\emptyset	2	
	\emptyset	4	1, 2, 3	4
►	4	\emptyset	\emptyset	



while $K \neq \emptyset$ or $M \neq \emptyset$:

if $K \neq \emptyset$:

$v = K.\text{first}$

push M, K, P, v

$M = M + \{v\}$

$K = K - \Gamma(v) - \{v\}$

$P = P - \Gamma(v)$

else:

if $P == \emptyset$: вывод M

pop v, P, K, M

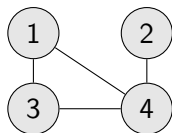
$K = K - \{v\}$

$P = P + \{v\}$

Вывод: $\{1,2\}$, $\{2,3\}$, $\{4\}$

Алгоритма Брона-Кербоша: демонстрация

	M	K	P	v
	\emptyset	1, 2, 3, 4	\emptyset	1
	1	2	\emptyset	2
►	1, 2	\emptyset	\emptyset	
	1	\emptyset	2	
	\emptyset	2, 3, 4	1	2
	2	3	1	3
►	2, 3	\emptyset	\emptyset	
	2	\emptyset	1, 3	
	\emptyset	3, 4	1, 2	3
	3	\emptyset	2	
→	\emptyset	4	1, 2, 3	4
►	4	\emptyset	\emptyset	
	\emptyset	\emptyset	1, 2, 3, 4	



while $K \neq \emptyset$ or $M \neq \emptyset$:

if $K \neq \emptyset$:

$v = K.\text{first}$

push M, K, P, v

$M = M + \{v\}$

$K = K - \Gamma(v) - \{v\}$

$P = P - \Gamma(v)$

else:

if $P == \emptyset$: вывод M

pop v, P, K, M

$K = K - \{v\}$

$P = P + \{v\}$

Вывод: $\{1,2\}$, $\{2,3\}$, $\{4\}$

Метод ветвей и границ: описание

Находит максимальное независимое множество в графе G .

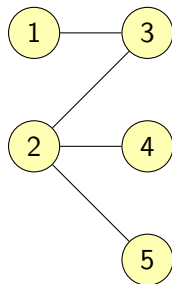
```
static G, record = 0, M_rec =  $\emptyset$ 
procedure MaxIndSet(M, K):
  while K  $\neq$   $\emptyset$ :
    v = K.first
    if #M + #(K -  $\Gamma(v)$ ) > record:
      MaxIndSet(M + v, K - v -  $\Gamma(v)$ )
    K -= v
  if #M > record:
    record = #M
    M_rec = M
```

Обозначения: M — текущее независимое множество;
 K — множество кандидатов;
 record — максимальное число элементов
 среди просмотренных M ;
 $X.first$ — первый элемент в X .

Метод ветвей и границ: демонстрация

$\text{record} = 0, \quad M_{\text{rec}} = \emptyset$

$M = \emptyset, \quad K = \{1, 2, 3, 4, 5\}$



Метод ветвей и границ: демонстрация

$\text{record} = 0, \quad M_{\text{rec}} = \emptyset$

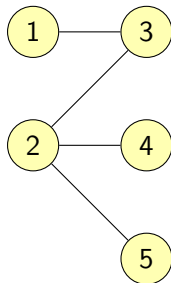
$M = \emptyset, \quad K = \{\textcolor{red}{1}, 2, 3, 4, 5\}$

$v = K.\text{first}$

$\#M + \#(K - \Gamma(v)) > \text{record}:$

$K - \Gamma(v) = \{1, 2, 4, 5\}$

$0 + 4 > 0$



Метод ветвей и границ: демонстрация

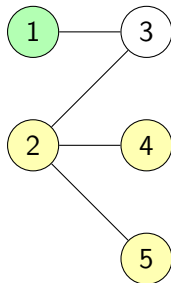
record = 0, M_rec = \emptyset

M = \emptyset , K = {1, 2, 3, 4, 5}

M = {1}, K = {2, 4, 5}

M = M + {v}

K = K - {v} - $\Gamma(v)$



Метод ветвей и границ: демонстрация

record = 0, $M_{\text{rec}} = \emptyset$

$M = \emptyset$, $K = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

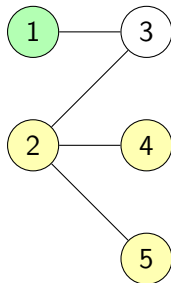
$M = \{1\}$, $K = \{\textcolor{red}{2}, 4, 5\}$

$v = K.\text{first}$

$\#M + \#(K - \Gamma(v)) > \text{record}$:

$K - \Gamma(v) = \{2\}$

$1 + 1 > 0$



Метод ветвей и границ: демонстрация

record = 0, $M_{\text{rec}} = \emptyset$

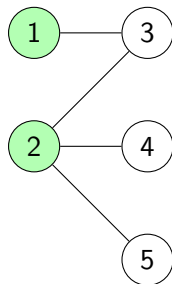
$M = \emptyset, \quad K = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$M = \{1\}, \quad K = \{2, 4, 5\}$

$M = \{1, 2\}, \quad K = \emptyset$

$M = M + \{v\}$

$K = K - \{v\} - \Gamma(v)$



Метод ветвей и границ: демонстрация

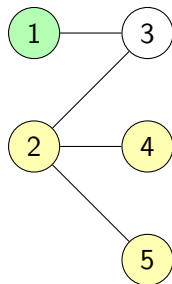
record = 2, M_rec = {1, 2}

$M = \emptyset, \quad K = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$M = \{1\}, \quad K = \{2, 4, 5\}$

$\hookleftarrow M = \{1, 2\}, \quad K = \emptyset$

$K = K - \{v\}$

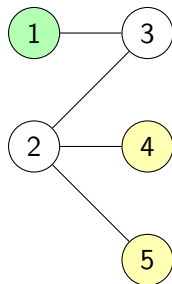


Метод ветвей и границ: демонстрация

record = 2, $M_{\text{rec}} = \{1, 2\}$

$M = \emptyset, \quad K = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$M = \{1\}, \quad K = \{4, 5\}$



Метод ветвей и границ: демонстрация

record = 2, $M_{\text{rec}} = \{1, 2\}$

$M = \emptyset, \quad K = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

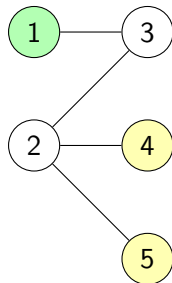
$M = \{1\}, \quad K = \{4, 5\}$

$v = K.\text{first}$

$\#M + \#(K - \Gamma(v)) > \text{record}:$

$K - \Gamma(v) = \{4, 5\}$

$1 + 2 > 2$



Метод ветвей и границ: демонстрация

record = 2, $M_{\text{rec}} = \{1, 2\}$

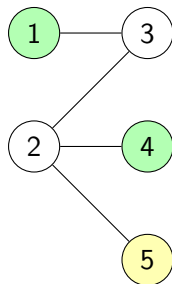
$M = \emptyset, \quad K = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$M = \{1\}, \quad K = \{4, 5\}$

$M = \{1, 4\}, \quad K = \{5\}$

$M = M + \{v\}$

$K = K - \{v\} - \Gamma(v)$



Метод ветвей и границ: демонстрация

record = 2, $M_{\text{rec}} = \{1, 2\}$

$M = \emptyset, \quad K = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$M = \{1\}, \quad K = \{4, 5\}$

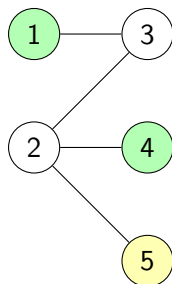
$M = \{1, 4\}, \quad K = \{5\}$

$v = K.\text{first}$

$\#M + \#(K - \Gamma(v)) > \text{record}:$

$K - \Gamma(v) = \{5\}$

$2 + 1 > 2$



Метод ветвей и границ: демонстрация

record = 2, $M_{\text{rec}} = \{1, 2\}$

$M = \emptyset, \quad K = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

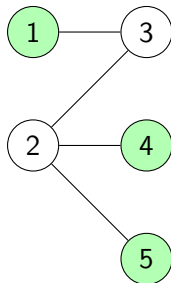
$M = \{1\}, \quad K = \{4, 5\}$

$M = \{1, 4\}, \quad K = \{5\}$

$M = \{1, 4, 5\}, \quad K = \emptyset$

$M = M + \{v\}$

$K = K - \{v\} - \Gamma(v)$



Метод ветвей и границ: демонстрация

record = 3, $M_{\text{rec}} = \{1, 4, 5\}$

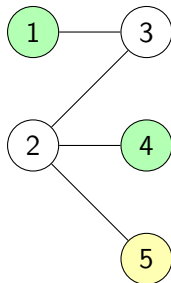
$M = \emptyset, \quad K = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$M = \{1\}, \quad K = \{4, 5\}$

$M = \{1, 4\}, \quad K = \{5\}$

$\uparrow M = \{1, 4, 5\}, \quad K = \emptyset$

$K = K - \{v\}$



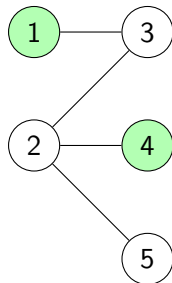
Метод ветвей и границ: демонстрация

record = 3, M_rec = {1, 4, 5}

$M = \emptyset, \quad K = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$M = \{1\}, \quad K = \{4, 5\}$

$M = \{1, 4\}, \quad K = \emptyset$



Метод ветвей и границ: демонстрация

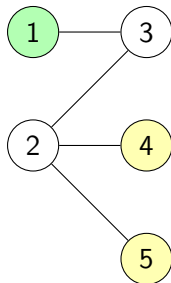
record = 3, $M_{\text{rec}} = \{1, 4, 5\}$

$M = \emptyset, \quad K = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$M = \{1\}, \quad K = \{4, 5\}$

$\hookleftarrow M = \{1, 4\}, \quad K = \emptyset$

$K = K - \{v\}$

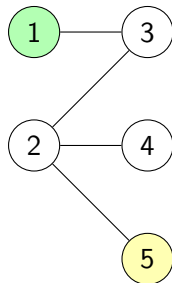


Метод ветвей и границ: демонстрация

record = 3, $M_{\text{rec}} = \{1, 4, 5\}$

$M = \emptyset$, $K = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$M = \{1\}$, $K = \{5\}$



Метод ветвей и границ: демонстрация

record = 3, $M_{\text{rec}} = \{1, 4, 5\}$

$M = \emptyset$, $K = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$M = \{1\}$, $K = \{5\}$

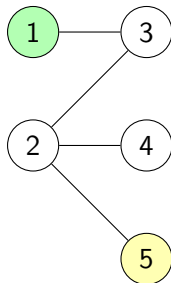
$v = K.\text{first}$

$\#M + \#(K - \Gamma(v)) > \text{record}$:

$K - \Gamma(v) = \{5\}$

$1 + 1 \not> 3$

$K = K - \{v\}$

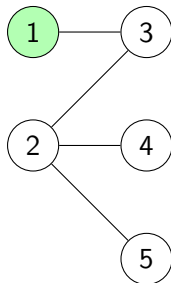


Метод ветвей и границ: демонстрация

record = 3, $M_{\text{rec}} = \{1, 4, 5\}$

$M = \emptyset$, $K = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$M = \{1\}$, $K = \emptyset$



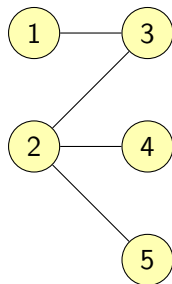
Метод ветвей и границ: демонстрация

record = 3, $M_{\text{rec}} = \{1, 4, 5\}$

$M = \emptyset$, $K = \{\textcolor{red}{1}, 2, 3, 4, 5\}$

↖ $M = \{1\}$, $K = \emptyset$

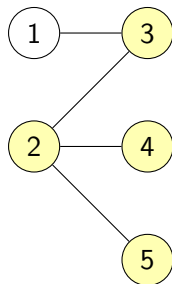
$K = K - \{v\}$



Метод ветвей и границ: демонстрация

$\text{record} = 3, \quad M_{\text{rec}} = \{1, 4, 5\}$

$M = \emptyset, \quad K = \{2, 3, 4, 5\}$



Метод ветвей и границ: демонстрация

record = 3, $M_{\text{rec}} = \{1, 4, 5\}$

$M = \emptyset$, $K = \{\textcolor{red}{2}, 3, 4, 5\}$

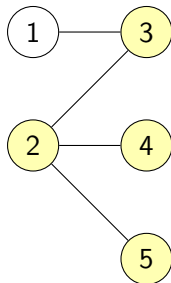
$v = K.\text{first}$

$\#M + \#(K - \Gamma(v)) > \text{record}$:

$K - \Gamma(v) = \{2\}$

$0 + 1 \not> 3$

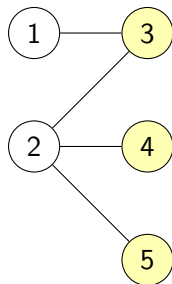
$K = K - \{v\}$



Метод ветвей и границ: демонстрация

$\text{record} = 3, \quad M_{\text{rec}} = \{1, 4, 5\}$

$M = \emptyset, \quad K = \{3, 4, 5\}$



Метод ветвей и границ: демонстрация

record = 3, $M_rec = \{1, 4, 5\}$

$M = \emptyset$, $K = \{\textcolor{red}{3}, 4, 5\}$

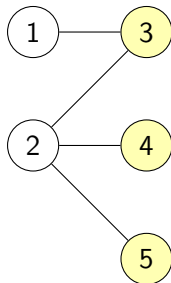
$v = K.first$

$\#M + \#(K - \Gamma(v)) > record$:

$K - \Gamma(v) = \{3, 4, 5\}$

$0 + 3 \not> 3$

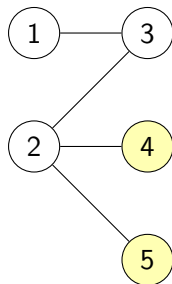
$K = K - \{v\}$



Метод ветвей и границ: демонстрация

$\text{record} = 3, \quad M_{\text{rec}} = \{1, 4, 5\}$

$M = \emptyset, \quad K = \{4, 5\}$



Метод ветвей и границ: демонстрация

record = 3, $M_{\text{rec}} = \{1, 4, 5\}$

$M = \emptyset$, $K = \{4, 5\}$

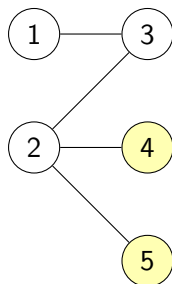
$v = K.\text{first}$

$\#M + \#(K - \Gamma(v)) > \text{record}$:

$K - \Gamma(v) = \{4, 5\}$

$0 + 2 \not> 3$

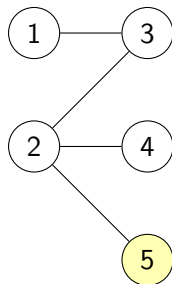
$K = K - \{v\}$



Метод ветвей и границ: демонстрация

record = 3, $M_{\text{rec}} = \{1, 4, 5\}$

$M = \emptyset$, $K = \{5\}$



Метод ветвей и границ: демонстрация

record = 3, $M_{\text{rec}} = \{1, 4, 5\}$

$M = \emptyset$, $K = \{5\}$

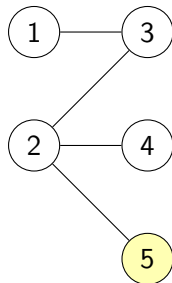
$v = K.\text{first}$

$\#M + \#(K - \Gamma(v)) > \text{record}$:

$K - \Gamma(v) = \{5\}$

$0 + 1 \not> 3$

$K = K - \{v\}$

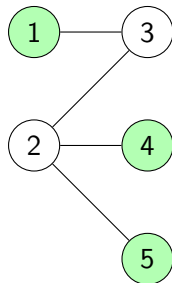


Метод ветвей и границ: демонстрация

$\text{record} = 3, \quad M_{\text{rec}} = \{1, 4, 5\}$

$M = \emptyset, \quad K = \emptyset$

Вывод: $\{1, 4, 5\}$.

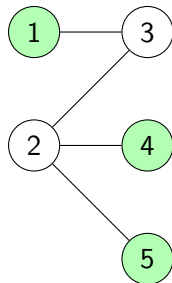


Метод ветвей и границ: демонстрация

$\text{record} = 3, \quad M_{\text{rec}} = \{1, 4, 5\}$

$M = \emptyset, \quad K = \emptyset$

Вывод: $\{1, 4, 5\}$.



В этом примере показана типичная ситуация для МВГ:
в конце работы алгоритма большинство ветвей отсекается.

Некоторые способы оптимизации МВГ

- ▶ Сделать M статической переменной (перед вызовом рекурсивной процедуры добавляем в M выбранную вершину, после выхода удаляем её из M).
- ▶ Вместо локальной переменной K хранить массив $K[i]$, где $K[i]$ соответствуют i -му уровню рекурсии. Экономим на выделении и освобождении памяти.
- ▶ На каждом уровне рекурсии элементы множества K упорядочивать по числу соседей и выбирать их по очереди. Оказывается, выгоднее упорядочивать по убыванию числа соседей. При таком подходе придётся постоянно пересчитывать для каждой вершины из K число её соседей в K .

План доклада

Основные определения и формулировка

Неориентированный граф, смежность

Определение независимого множества

Формулировка задачи и пример

Точные методы решения

Алгоритм Брона-Кербоша

Метод ветвей и границ

Неточные методы решения

Расширение и урезание

Генетический алгоритм

Эффективность различных методов

Алгоритм Брона-Кербоша

Метод ветвей и границ

Генетический алгоритм

Случайное расширение

Дано: граф $G(V; E)$, M — независимое множество.

Цель: расширить M до какого-нибудь максимального по включению независимого множества.

Метод: пока $K \neq \emptyset$, добавлять в M случайную вершину из K .

Здесь K — множество вершин, не принадлежащих M и несмежных с M : $K = V \setminus (M \cup \Gamma(M))$.

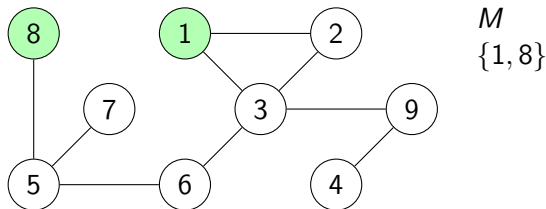
Случайное расширение

Дано: граф $G(V; E)$, M — независимое множество.

Цель: расширить M до какого-нибудь максимального по включению независимого множества.

Метод: пока $K \neq \emptyset$, добавлять в M случайную вершину из K .

Здесь K — множество вершин, не принадлежащих M и несмежных с M : $K = V \setminus (M \cup \Gamma(M))$.



Рассмотрим пример.

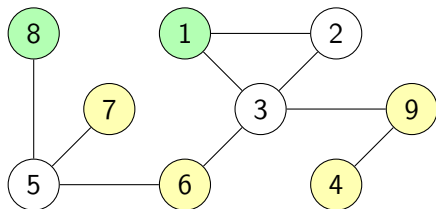
Случайное расширение

Дано: граф $G(V; E)$, M — независимое множество.

Цель: расширить M до какого-нибудь максимального по включению независимого множества.

Метод: пока $K \neq \emptyset$, добавлять в M случайную вершину из K .

Здесь K — множество вершин, не принадлежащих M и несмежных с M : $K = V \setminus (M \cup \Gamma(M))$.



M
 $\{1, 8\}$

K
 $\{4, 6, 7, 9\}$

Формируем множество кандидатов.

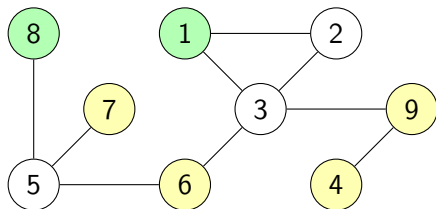
Случайное расширение

Дано: граф $G(V; E)$, M — независимое множество.

Цель: расширить M до какого-нибудь максимального по включению независимого множества.

Метод: пока $K \neq \emptyset$, добавлять в M случайную вершину из K .

Здесь K — множество вершин, не принадлежащих M и несмежных с M : $K = V \setminus (M \cup \Gamma(M))$.



M
 $\{1, 8\}$

K
 $\{4, 6, 7, 9\}$

Случайно выбираем вершину из K .

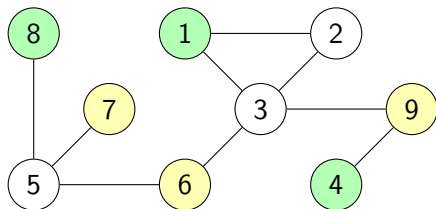
Случайное расширение

Дано: граф $G(V; E)$, M — независимое множество.

Цель: расширить M до какого-нибудь максимального по включению независимого множества.

Метод: пока $K \neq \emptyset$, добавлять в M случайную вершину из K .

Здесь K — множество вершин, не принадлежащих M и несмежных с M : $K = V \setminus (M \cup \Gamma(M))$.



M
 $\{1, 8\}$
 $\{1, 4, 8\}$

K
 $\{4, 6, 7, 9\}$

Добавляем выбранную вершину в M .

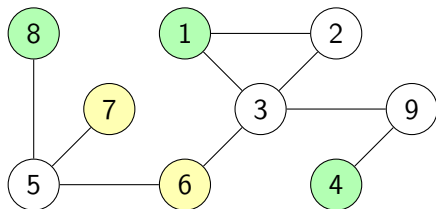
Случайное расширение

Дано: граф $G(V; E)$, M — независимое множество.

Цель: расширить M до какого-нибудь максимального по включению независимого множества.

Метод: пока $K \neq \emptyset$, добавлять в M случайную вершину из K .

Здесь K — множество вершин, не принадлежащих M и несмежных с M : $K = V \setminus (M \cup \Gamma(M))$.



M

$\{1, 8\}$

$\{1, 4, 8\}$

K

$\{4, 6, 7, 9\}$

$\{6, 7\}$

Удаляем из K выбранную вершину и вершины, смежные с ней.

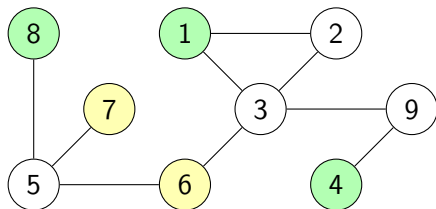
Случайное расширение

Дано: граф $G(V; E)$, M — независимое множество.

Цель: расширить M до какого-нибудь максимального по включению независимого множества.

Метод: пока $K \neq \emptyset$, добавлять в M случайную вершину из K .

Здесь K — множество вершин, не принадлежащих M и несмежных с M : $K = V \setminus (M \cup \Gamma(M))$.



M
 $\{1, 8\}$
 $\{1, 4, 8\}$

K
 $\{4, 6, 7, 9\}$
 $\{6, 7\}$

Случайно выбираем вершину из K .

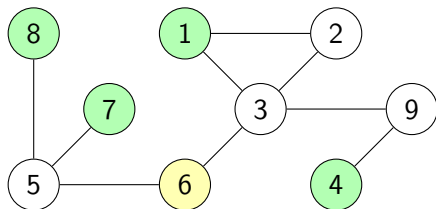
Случайное расширение

Дано: граф $G(V; E)$, M — независимое множество.

Цель: расширить M до какого-нибудь максимального по включению независимого множества.

Метод: пока $K \neq \emptyset$, добавлять в M случайную вершину из K .

Здесь K — множество вершин, не принадлежащих M и несмежных с M : $K = V \setminus (M \cup \Gamma(M))$.



M

$\{1, 8\}$
 $\{1, 4, 8\}$
 $\{1, 4, 7, 8\}$

K

$\{4, 6, 7, 9\}$
 $\{6, 7\}$

Добавляем выбранную вершину в M .

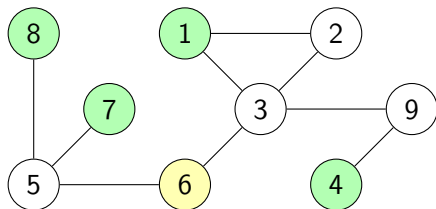
Случайное расширение

Дано: граф $G(V; E)$, M — независимое множество.

Цель: расширить M до какого-нибудь максимального по включению независимого множества.

Метод: пока $K \neq \emptyset$, добавлять в M случайную вершину из K .

Здесь K — множество вершин, не принадлежащих M и несмежных с M : $K = V \setminus (M \cup \Gamma(M))$.



M	K
$\{1, 8\}$	$\{4, 6, 7, 9\}$
$\{1, 4, 8\}$	$\{6, 7\}$
$\{1, 4, 7, 8\}$	$\{6\}$

Удаляем из K выбранную вершину и вершины, смежные с ней.

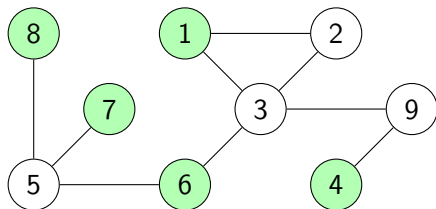
Случайное расширение

Дано: граф $G(V; E)$, M — независимое множество.

Цель: расширить M до какого-нибудь максимального по включению независимого множества.

Метод: пока $K \neq \emptyset$, добавлять в M случайную вершину из K .

Здесь K — множество вершин, не принадлежащих M и несмежных с M : $K = V \setminus (M \cup \Gamma(M))$.



M	K
$\{1, 8\}$	$\{4, 6, 7, 9\}$
$\{1, 4, 8\}$	$\{6, 7\}$
$\{1, 4, 7, 8\}$	$\{6\}$
$\{1, 4, 6, 7, 8\}$	

Оставшуюся вершину в K добавляем в M .

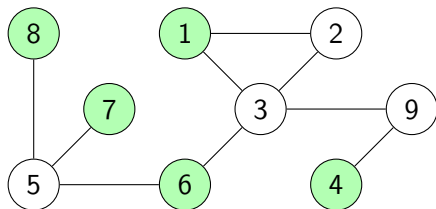
Случайное расширение

Дано: граф $G(V; E)$, M — независимое множество.

Цель: расширить M до какого-нибудь максимального по включению независимого множества.

Метод: пока $K \neq \emptyset$, добавлять в M случайную вершину из K .

Здесь K — множество вершин, не принадлежащих M и несмежных с M : $K = V \setminus (M \cup \Gamma(M))$.



M	K
$\{1, 8\}$	$\{4, 6, 7, 9\}$
$\{1, 4, 8\}$	$\{6, 7\}$
$\{1, 4, 7, 8\}$	$\{6\}$
$\{1, 4, 6, 7, 8\}$	

Ответ: $\{1, 4, 6, 7, 8\}$.

Жадное расширение

Дано: граф $G = (V, E)$, M — независимое множество.

Цель: расширить M до какого-нибудь максимального по включению независимого множества.

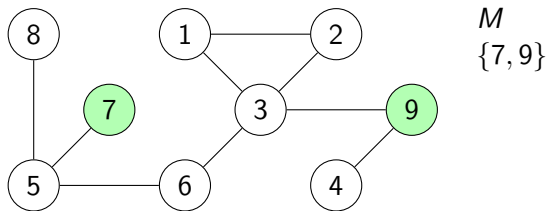
Метод: пока $K \neq \emptyset$, добавлять в M ту вершину из K , которая имеет наименьшее число соседей среди вершин множества K .

Жадное расширение

Дано: граф $G = (V, E)$, M — независимое множество.

Цель: расширить M до какого-нибудь максимального по включению независимого множества.

Метод: пока $K \neq \emptyset$, добавлять в M ту вершину из K , которая имеет наименьшее число соседей среди вершин множества K .



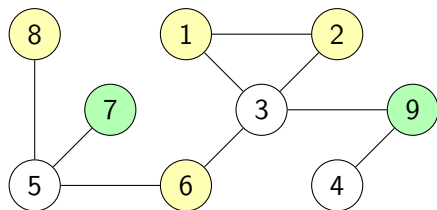
Рассмотрим на примере.

Жадное расширение

Дано: граф $G = (V, E)$, M — независимое множество.

Цель: расширить M до какого-нибудь максимального по включению независимого множества.

Метод: пока $K \neq \emptyset$, добавлять в M ту вершину из K , которая имеет наименьшее число соседей среди вершин множества K .



M
 $\{7, 9\}$

K
 $\{1, 2, 6, 8\}$

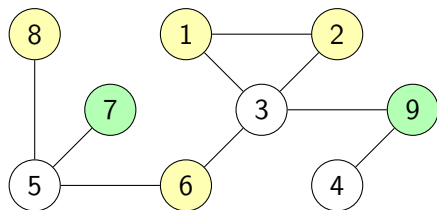
Формируем множество кандидатов K .

Жадное расширение

Дано: граф $G = (V, E)$, M — независимое множество.

Цель: расширить M до какого-нибудь максимального по включению независимого множества.

Метод: пока $K \neq \emptyset$, добавлять в M ту вершину из K , которая имеет наименьшее число соседей среди вершин множества K .



M
 $\{7, 9\}$

K
 $\{1, 2, 6, 8\}$

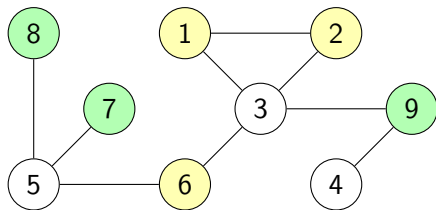
Выбираем вершину из K с наименьшим числом соседей среди вершин этого множества.

Жадное расширение

Дано: граф $G = (V, E)$, M — независимое множество.

Цель: расширить M до какого-нибудь максимального по включению независимого множества.

Метод: пока $K \neq \emptyset$, добавлять в M ту вершину из K , которая имеет наименьшее число соседей среди вершин множества K .



M
 $\{7, 9\}$
 $\{7, 8, 9\}$

K
 $\{1, 2, 6, 8\}$

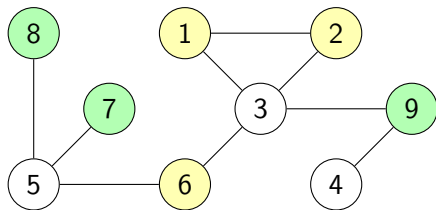
Добавляем выбранную вершину в M .

Жадное расширение

Дано: граф $G = (V, E)$, M — независимое множество.

Цель: расширить M до какого-нибудь максимального по включению независимого множества.

Метод: пока $K \neq \emptyset$, добавлять в M ту вершину из K , которая имеет наименьшее число соседей среди вершин множества K .



M
 $\{7, 9\}$
 $\{7, 8, 9\}$

K
 $\{1, 2, 6, 8\}$
 $\{1, 2, 6\}$

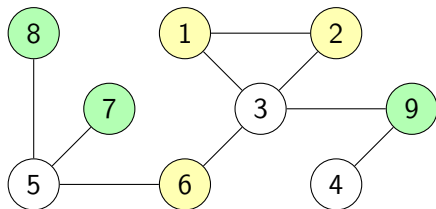
Удаляем из K выбранную вершину и смежные с ней вершины.

Жадное расширение

Дано: граф $G = (V, E)$, M — независимое множество.

Цель: расширить M до какого-нибудь максимального по включению независимого множества.

Метод: пока $K \neq \emptyset$, добавлять в M ту вершину из K , которая имеет наименьшее число соседей среди вершин множества K .



M
 $\{7, 9\}$
 $\{7, 8, 9\}$

K
 $\{1, 2, 6, 8\}$
 $\{1, 2, \mathbf{6}\}$

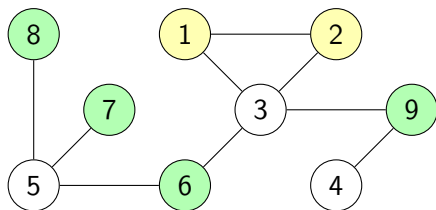
Выбираем вершину из K с наименьшим числом соседей среди вершин этого множества.

Жадное расширение

Дано: граф $G = (V, E)$, M — независимое множество.

Цель: расширить M до какого-нибудь максимального по включению независимого множества.

Метод: пока $K \neq \emptyset$, добавлять в M ту вершину из K , которая имеет наименьшее число соседей среди вершин множества K .



M

$\{7, 9\}$

$\{7, 8, 9\}$

$\{6, 7, 8, 9\}$

K

$\{1, 2, 6, 8\}$

$\{1, 2, \mathbf{6}\}$

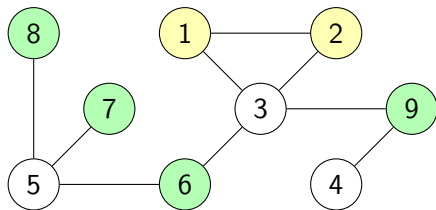
Добавляем выбранную вершину в M .

Жадное расширение

Дано: граф $G = (V, E)$, M — независимое множество.

Цель: расширить M до какого-нибудь максимального по включению независимого множества.

Метод: пока $K \neq \emptyset$, добавлять в M ту вершину из K , которая имеет наименьшее число соседей среди вершин множества K .



M	K
$\{7, 9\}$	$\{1, 2, 6, 8\}$
$\{7, 8, 9\}$	$\{1, 2, 6\}$
$\{6, 7, 8, 9\}$	$\{1, 2\}$

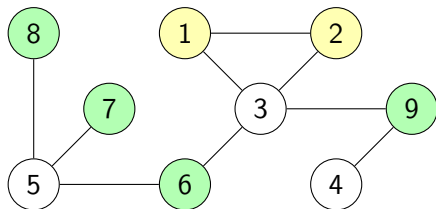
Удаляем из K выбранную вершину и смежные с ней вершины.

Жадное расширение

Дано: граф $G = (V, E)$, M — независимое множество.

Цель: расширить M до какого-нибудь максимального по включению независимого множества.

Метод: пока $K \neq \emptyset$, добавлять в M ту вершину из K , которая имеет наименьшее число соседей среди вершин множества K .



M	K
$\{7, 9\}$	$\{1, 2, 6, 8\}$
$\{7, 8, 9\}$	$\{1, 2, 6\}$
$\{6, 7, 8, 9\}$	$\{\textcolor{red}{1}, 2\}$

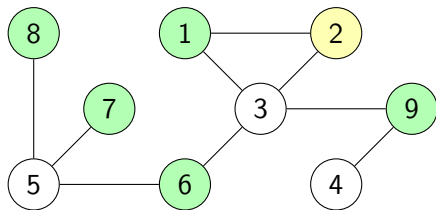
Выбираем вершину из K с наименьшим числом соседей среди вершин этого множества.

Жадное расширение

Дано: граф $G = (V, E)$, M — независимое множество.

Цель: расширить M до какого-нибудь максимального по включению независимого множества.

Метод: пока $K \neq \emptyset$, добавлять в M ту вершину из K , которая имеет наименьшее число соседей среди вершин множества K .



M	K
$\{7, 9\}$	$\{1, 2, 6, 8\}$
$\{7, 8, 9\}$	$\{1, 2, 6\}$
$\{6, 7, 8, 9\}$	$\{1, 2\}$
$\{1, 6, 7, 8, 9\}$	

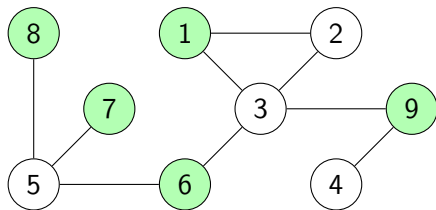
Добавляем выбранную вершину в M .

Жадное расширение

Дано: граф $G = (V, E)$, M — независимое множество.

Цель: расширить M до какого-нибудь максимального по включению независимого множества.

Метод: пока $K \neq \emptyset$, добавлять в M ту вершину из K , которая имеет наименьшее число соседей среди вершин множества K .



M	K
$\{7, 9\}$	$\{1, 2, 6, 8\}$
$\{7, 8, 9\}$	$\{1, 2, 6\}$
$\{6, 7, 8, 9\}$	$\{1, 2\}$
$\{1, 6, 7, 8, 9\}$	

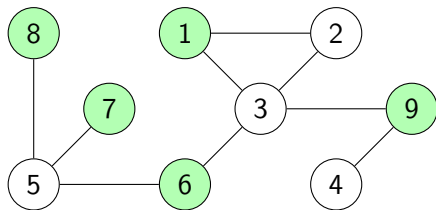
Удаляем из K выбранную вершину и смежные с ней вершины.

Жадное расширение

Дано: граф $G = (V, E)$, M — независимое множество.

Цель: расширить M до какого-нибудь максимального по включению независимого множества.

Метод: пока $K \neq \emptyset$, добавлять в M ту вершину из K , которая имеет наименьшее число соседей среди вершин множества K .



M	K
$\{7, 9\}$	$\{1, 2, 6, 8\}$
$\{7, 8, 9\}$	$\{1, 2, 6\}$
$\{6, 7, 8, 9\}$	$\{1, 2\}$
$\{1, 6, 7, 8, 9\}$	

Ответ: $\{1, 6, 7, 8, 9\}$

Жадное урезание

Дано: граф $G = (V, E)$, множество M ($M \subset V$).

Цель: урезать M до независимого множества.

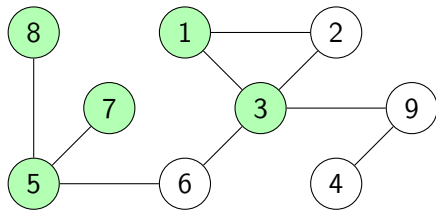
Метод: пока $M \notin \text{IndSets}(G)$, удалять из множества M вершину, имеющую наибольшее число соседей в M .

Жадное урезание

Дано: граф $G = (V, E)$, множество M ($M \subset V$).

Цель: урезать M до независимого множества.

Метод: пока $M \notin \text{IndSets}(G)$, удалять из множества M вершину, имеющую наибольшее число соседей в M .



M
 $\{1, 3, 5, 7, 8\}$

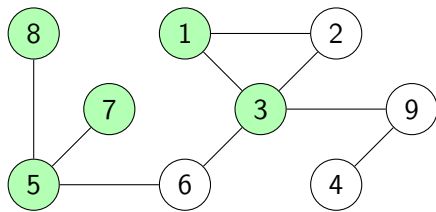
Рассмотрим пример.

Жадное урезание

Дано: граф $G = (V, E)$, множество M ($M \subset V$).

Цель: урезать M до независимого множества.

Метод: пока $M \notin \text{IndSets}(G)$, удалять из множества M вершину, имеющую наибольшее число соседей в M .



M
 $\{1, 3, 5, 7, 8\}$

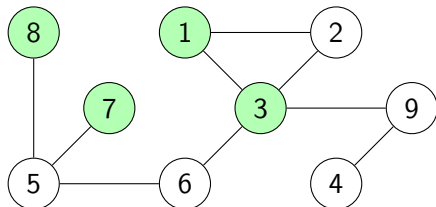
Выбираем вершину с наибольшим числом соседей в M .

Жадное урезание

Дано: граф $G = (V, E)$, множество M ($M \subset V$).

Цель: урезать M до независимого множества.

Метод: пока $M \notin \text{IndSets}(G)$, удалять из множества M вершину, имеющую наибольшее число соседей в M .



M
 $\{1, 3, 5, 7, 8\}$
 $\{1, 3, 7, 8\}$

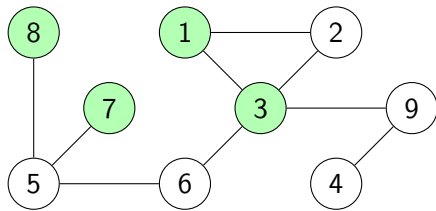
Удаляем из M выбранную вершину.

Жадное урезание

Дано: граф $G = (V, E)$, множество M ($M \subset V$).

Цель: урезать M до независимого множества.

Метод: пока $M \notin \text{IndSets}(G)$, удалять из множества M вершину, имеющую наибольшее число соседей в M .



M
 $\{1, 3, 5, 7, 8\}$
 $\{\textcolor{red}{1}, 3, 7, 8\}$

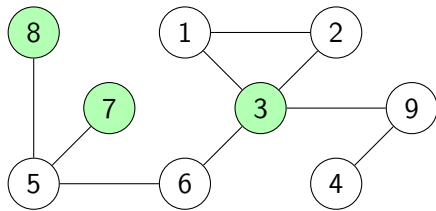
Выбираем вершину с наибольшим числом соседей в M .

Жадное урезание

Дано: граф $G = (V, E)$, множество M ($M \subset V$).

Цель: урезать M до независимого множества.

Метод: пока $M \notin \text{IndSets}(G)$, удалять из множества M вершину, имеющую наибольшее число соседей в M .



M

$\{1, 3, 5, 7, 8\}$

$\{1, 3, 7, 8\}$

$\{3, 7, 8\}$

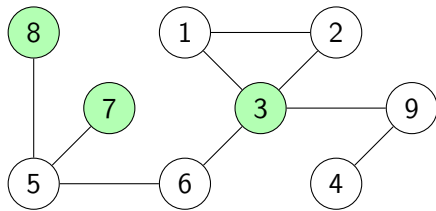
Удаляем из M выбранную вершину.

Жадное урезание

Дано: граф $G = (V, E)$, множество M ($M \subset V$).

Цель: урезать M до независимого множества.

Метод: пока $M \notin \text{IndSets}(G)$, удалять из множества M вершину, имеющую наибольшее число соседей в M .



M

$\{1, 3, 5, 7, 8\}$

$\{1, 3, 7, 8\}$

$\{3, 7, 8\}$

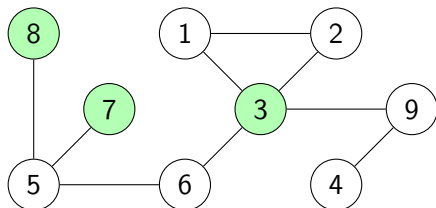
У вершин из M нет соседей среди элементов этого множества.

Жадное урезание

Дано: граф $G = (V, E)$, множество M ($M \subset V$).

Цель: урезать M до независимого множества.

Метод: пока $M \notin \text{IndSets}(G)$, удалять из множества M вершину, имеющую наибольшее число соседей в M .



M

$\{1, 3, 5, 7, 8\}$

$\{1, 3, 7, 8\}$

$\{3, 7, 8\}$

Ответ: $\{3, 7, 8\}$.

Генетический алгоритм: основные объекты

Хромосома (особь) — независимое множество вершин графа; хранится в виде двоичного вектора, длина которого равна числу вершин графа (на i -ом месте стоит 1, если i -ая вершина принадлежит множеству).

Приспособленность хромосомы — число вершин в независимом множестве.

Популяция хранится как упорядоченный массив хромосом. Хромосомы упорядочены по приспособленности, а хромосомы с одинаковой приспособленностью — лексикографически. Обеспечивается уникальность хромосом.

Генетический алгоритм: схема алгоритма

Создать начальную популяцию

Для $t = 1 \dots T$ (T — число поколений):

 Для $i = 1 \dots NP/2$ (NP — число особей):

 Случайно выбрать две особи

 Скрестить выбранные особи

 Применить к потомкам метод урезания и расширения

 Поместить потомков во множество потомков

 Для $i = 1 \dots NP$:

 Мутировать i -ую особь

 Применить к мутанту метод урезания и расширения

 Поместить мутанта во множество мутантов

Добавить всех потомков и мутантов в популяцию

Отсортировать популяцию и удалить дубликаты

Провести отбор усечением

Генетический алгоритм: мутация

1-й способ. Мутация случайного числа генов.

Дана максимальная доля μ инвертируемых генов.

Случайно генерируем число m ($0 \leq m < n \cdot \mu$).

Случайно выбираем и инвертируем m генов.

Генетический алгоритм: мутация

1-й способ. Мутация случайного числа генов.

Дана максимальная доля μ инвертируемых генов.

Случайно генерируем число m ($0 \leq m < n \cdot \mu$).

Случайно выбираем и инвертируем m генов.

$\{2, 4, 5, 8\} \Rightarrow 01011001$

Генетический алгоритм: мутация

1-й способ. Мутация случайного числа генов.

Дана максимальная доля μ инвертируемых генов.

Случайно генерируем число m ($0 \leq m < n \cdot \mu$).

Случайно выбираем и инвертируем m генов.

$\{2, 4, 5, 8\} \Rightarrow 01011001$

$m = 3, \quad k = 6, 3, 6$

Генетический алгоритм: мутация

1-й способ. Мутация случайного числа генов.

Дана максимальная доля μ инвертируемых генов.

Случайно генерируем число m ($0 \leq m < n \cdot \mu$).

Случайно выбираем и инвертируем m генов.

$$\{2, 4, 5, 8\} \Rightarrow 01\bar{0}11\bar{0}\bar{0}1$$

$$m = 3, \quad k = 6, 3, 6$$

Генетический алгоритм: мутация

1-й способ. Мутация случайного числа генов.

Дана максимальная доля μ инвертируемых генов.

Случайно генерируем число m ($0 \leq m < n \cdot \mu$).

Случайно выбираем и инвертируем m генов.

$$\{2, 4, 5, 8\} \Leftrightarrow 01\bar{0}11\bar{0}\bar{0}1 \mapsto 01111001 \Leftrightarrow \{2, 3, 4, 5, 8\}$$

$m = 3, \quad k = 6, 3, 6$

Генетический алгоритм: мутация

1-й способ. Мутация случайного числа генов.

Дана максимальная доля μ инвертируемых генов.

Случайно генерируем число m ($0 \leq m < n \cdot \mu$).

Случайно выбираем и инвертируем m генов.

$$\{2, 4, 5, 8\} \Leftrightarrow 01\bar{0}11\bar{0}\bar{0}1 \mapsto 01111001 \Leftrightarrow \{2, 3, 4, 5, 8\}$$

$m = 3, \quad k = 6, 3, 6$

2-й способ. Однородная мутация.

Каждый ген инвертируем с заданной вероятностью p .

Генетический алгоритм: мутация

1-й способ. Мутация случайного числа генов.

Дана максимальная доля μ инвертируемых генов.

Случайно генерируем число m ($0 \leq m < n \cdot \mu$).

Случайно выбираем и инвертируем m генов.

$$\{2, 4, 5, 8\} \rightleftharpoons 01\bar{0}11\bar{0}\bar{0}1 \mapsto 01111001 \leftrightsquigarrow \{2, 3, 4, 5, 8\}$$

$m = 3, \quad k = 6, 3, 6$

2-й способ. Однородная мутация.

Каждый ген инвертируем с заданной вероятностью p .

$$\{2, 4, 5, 8\} \rightleftharpoons 01011001$$

Генетический алгоритм: мутация

1-й способ. Мутация случайного числа генов.

Дана максимальная доля μ инвертируемых генов.

Случайно генерируем число m ($0 \leq m < n \cdot \mu$).

Случайно выбираем и инвертируем m генов.

$$\{2, 4, 5, 8\} \rightleftharpoons 01\bar{0}11\bar{0}\bar{0}1 \mapsto 01111001 \leftrightsquigarrow \{2, 3, 4, 5, 8\}$$

$m = 3, \quad k = 6, 3, 6$

2-й способ. Однородная мутация.

Каждый ген инвертируем с заданной вероятностью p .

$$\{2, 4, 5, 8\} \rightleftharpoons 0\bar{1}011\bar{0}01$$

инвертируем? FTFFFTFF

Генетический алгоритм: мутация

1-й способ. Мутация случайного числа генов.

Дана максимальная доля μ инвертируемых генов.

Случайно генерируем число m ($0 \leq m < n \cdot \mu$).

Случайно выбираем и инвертируем m генов.

$$\{2, 4, 5, 8\} \Leftrightarrow 01\bar{0}11\bar{0}\bar{0}1 \mapsto 01111001 \Leftrightarrow \{2, 3, 4, 5, 8\}$$

$m = 3, \quad k = 6, 3, 6$

2-й способ. Однородная мутация.

Каждый ген инвертируем с заданной вероятностью p .

$$\{2, 4, 5, 8\} \Leftrightarrow 0\bar{1}011\bar{0}01 \mapsto 00011101 \Leftrightarrow \{4, 5, 6, 8\}$$

инвертируем? FTFFFTFF

Генетический алгоритм: мутация

1-й способ. Мутация случайного числа генов.

Дана максимальная доля μ инвертируемых генов.

Случайно генерируем число m ($0 \leq m < n \cdot \mu$).

Случайно выбираем и инвертируем m генов.

$$\{2, 4, 5, 8\} \rightleftharpoons 01\bar{0}11\bar{0}01 \mapsto 01111001 \rightleftharpoons \{2, 3, 4, 5, 8\}$$

$m = 3, \quad k = 6, 3, 6$

2-й способ. Однородная мутация.

Каждый ген инвертируем с заданной вероятностью p .

$$\{2, 4, 5, 8\} \rightleftharpoons 0\bar{1}011\bar{0}01 \mapsto 00011101 \rightleftharpoons \{4, 5, 6, 8\}$$

инвертируем? FTFFFTFF

Урезаем каждого мутанта жадным алгоритмом до независимого множества и дополняем его до максимального по включению независимого множества.

Генетический алгоритм: скрещивание

Одноточечное скрещивание

Случайная точка разрыва, обмен концами:

$\{1, 3, 4, 6\} \rightleftharpoons 10110100$

$\{1, 2, 5, 7, 8\} \rightleftharpoons 11001011$

Генетический алгоритм: скрещивание

Одноточечное скрещивание

Случайная точка разрыва, обмен концами:

$\{1, 3, 4, 6\} \rightleftharpoons 10110100$

$k = 5$

$\{1, 2, 5, 7, 8\} \rightleftharpoons 11001011$

Генетический алгоритм: скрещивание

Одноточечное скрещивание

Случайная точка разрыва, обмен концами:

$$\begin{array}{ccc} \{1,3,4,6\} \Leftrightarrow 10110\mathbf{100} & & \\ \quad k = 5 & \quad \updownarrow & \quad \mapsto \\ \{1,2,5,7,8\} \Leftrightarrow 11001\mathbf{011} & & \end{array}$$

Генетический алгоритм: скрещивание

Одноточечное скрещивание

Случайная точка разрыва, обмен концами:

$$\begin{array}{ccc} \{1,3,4,6\} \Leftrightarrow 10110\mathbf{100} & & 10110011 \Leftrightarrow \{1,3,4,7,8\} \\ k = 5 & \downarrow \quad \mapsto & \\ \{1,2,5,7,8\} \Leftrightarrow 11001\mathbf{011} & & 11001100 \Leftrightarrow \{1,2,5,6\} \end{array}$$

Генетический алгоритм: скрещивание

Одноточечное скрещивание

Случайная точка разрыва, обмен концами:

$$\begin{array}{ccc} \{1,3,4,6\} \Leftrightarrow 10110\mathbf{100} & & 10110011 \Leftrightarrow \{1,3,4,7,8\} \\ k = 5 & \downarrow \mapsto & \\ \{1,2,5,7,8\} \Leftrightarrow 11001\mathbf{011} & & 11001100 \Leftrightarrow \{1,2,5,6\} \end{array}$$

Двухточечное скрещивание

Две случайные точки разрыва, обмен серединами:

$$\{1,3,4,6\} \Leftrightarrow 10110100$$

$$\{1,2,5,7,8\} \Leftrightarrow 11001011$$

Генетический алгоритм: скрещивание

Одноточечное скрещивание

Случайная точка разрыва, обмен концами:

$$\begin{array}{ccc} \{1,3,4,6\} \Leftrightarrow 10110\mathbf{100} & & 10110011 \Leftrightarrow \{1,3,4,7,8\} \\ k = 5 & \downarrow \mapsto & \\ \{1,2,5,7,8\} \Leftrightarrow 11001\mathbf{011} & & 11001100 \Leftrightarrow \{1,2,5,6\} \end{array}$$

Двухточечное скрещивание

Две случайные точки разрыва, обмен серединами:

$$\begin{array}{l} \{1,3,4,6\} \Leftrightarrow 10110100 \\ k_1 = 2, k_2 = 5 \\ \{1,2,5,7,8\} \Leftrightarrow 11001011 \end{array}$$

Генетический алгоритм: скрещивание

Одноточечное скрещивание

Случайная точка разрыва, обмен концами:

$$\begin{array}{ccc} \{1, 3, 4, 6\} \Leftrightarrow 10110\mathbf{100} & & 10110011 \Leftrightarrow \{1, 3, 4, 7, 8\} \\ k = 5 & \updownarrow \mapsto & \\ \{1, 2, 5, 7, 8\} \Leftrightarrow 11001\mathbf{011} & & 11001100 \Leftrightarrow \{1, 2, 5, 6\} \end{array}$$

Двухточечное скрещивание

Две случайные точки разрыва, обмен серединами:

$$\begin{array}{ccc} \{1, 3, 4, 6\} \Leftrightarrow 10\mathbf{11}0100 & & \\ k_1 = 2, k_2 = 5 & \updownarrow \mapsto & \\ \{1, 2, 5, 7, 8\} \Leftrightarrow 11\mathbf{00}1011 & & \end{array}$$

Генетический алгоритм: скрещивание

Одноточечное скрещивание

Случайная точка разрыва, обмен концами:

$$\begin{array}{ccc} \{1,3,4,6\} \Leftrightarrow 10110\color{red}{100} & & 10110011 \Leftrightarrow \{1,3,4,7,8\} \\ k = 5 & \updownarrow & \mapsto \\ \{1,2,5,7,8\} \Leftrightarrow 11001\color{red}{011} & & 11001100 \Leftrightarrow \{1,2,5,6\} \end{array}$$

Двухточечное скрещивание

Две случайные точки разрыва, обмен серединами:

$$\begin{array}{ccc} \{1,3,4,6\} \Leftrightarrow 10\color{red}{11}\color{red}{0}100 & & 10001100 \Leftrightarrow \{1,5,6\} \\ k_1 = 2, k_2 = 5 & \updownarrow & \mapsto \\ \{1,2,5,7,8\} \Leftrightarrow 11\color{red}{00}\color{red}{1}011 & & 11110011 \Leftrightarrow \{1,2,3,4,7,8\} \end{array}$$

Генетический алгоритм: скрещивание

Одноточечное скрещивание

Случайная точка разрыва, обмен концами:

$$\begin{array}{ccc} \{1,3,4,6\} \rightleftharpoons 10110\mathbf{100} & & 10110011 \rightleftharpoons \{1,3,4,7,8\} \\ k = 5 & \updownarrow \mapsto & \\ \{1,2,5,7,8\} \rightleftharpoons 11001\mathbf{011} & & 11001100 \rightleftharpoons \{1,2,5,6\} \end{array}$$

Двухточечное скрещивание

Две случайные точки разрыва, обмен серединами:

$$\begin{array}{ccc} \{1,3,4,6\} \rightleftharpoons 10\mathbf{11}0100 & & 10001100 \rightleftharpoons \{1,5,6\} \\ k_1 = 2, k_2 = 5 & \updownarrow \mapsto & \\ \{1,2,5,7,8\} \rightleftharpoons 11\mathbf{00}1011 & & 11110011 \rightleftharpoons \{1,2,3,4,7,8\} \end{array}$$

Однородное скрещивание

Обмен генами осуществляется с заданной вероятностью:

$$\{1,3,4,6\} \rightleftharpoons 10110100$$

$$\{1,2,5,7,8\} \rightleftharpoons 11001011$$

Генетический алгоритм: скрещивание

Одноточечное скрещивание

Случайная точка разрыва, обмен концами:

$$\begin{array}{ccc} \{1,3,4,6\} \rightleftharpoons 10110\mathbf{100} & & 10110011 \rightleftharpoons \{1,3,4,7,8\} \\ k = 5 & \updownarrow & \mapsto \\ \{1,2,5,7,8\} \rightleftharpoons 11001\mathbf{011} & & 11001100 \rightleftharpoons \{1,2,5,6\} \end{array}$$

Двухточечное скрещивание

Две случайные точки разрыва, обмен серединами:

$$\begin{array}{ccc} \{1,3,4,6\} \rightleftharpoons 10\mathbf{11}0100 & & 10001100 \rightleftharpoons \{1,5,6\} \\ k_1 = 2, k_2 = 5 & \updownarrow & \mapsto \\ \{1,2,5,7,8\} \rightleftharpoons 11\mathbf{00}1011 & & 11110011 \rightleftharpoons \{1,2,3,4,7,8\} \end{array}$$

Однородное скрещивание

Обмен генами осуществляется с заданной вероятностью:

$$\begin{array}{ccc} \{1,3,4,6\} \rightleftharpoons \mathbf{10110100} & & \\ \text{обмен?} & \text{TFTFFTTF} & \\ \{1,2,5,7,8\} \rightleftharpoons \mathbf{11001011} & & \end{array}$$

Генетический алгоритм: скрещивание

Одноточечное скрещивание

Случайная точка разрыва, обмен концами:

$$\begin{array}{ccc} \{1,3,4,6\} \rightleftharpoons 10110\mathbf{100} & & 10110011 \rightleftharpoons \{1,3,4,7,8\} \\ k = 5 & \updownarrow & \mapsto \\ \{1,2,5,7,8\} \rightleftharpoons 11001\mathbf{011} & & 11001100 \rightleftharpoons \{1,2,5,6\} \end{array}$$

Двухточечное скрещивание

Две случайные точки разрыва, обмен серединами:

$$\begin{array}{ccc} \{1,3,4,6\} \rightleftharpoons 10\mathbf{11}0100 & & 10001100 \rightleftharpoons \{1,5,6\} \\ k_1 = 2, k_2 = 5 & \updownarrow & \mapsto \\ \{1,2,5,7,8\} \rightleftharpoons 11\mathbf{00}1011 & & 11110011 \rightleftharpoons \{1,2,3,4,7,8\} \end{array}$$

Однородное скрещивание

Обмен генами осуществляется с заданной вероятностью:

$$\begin{array}{ccc} \{1,3,4,6\} \rightleftharpoons \mathbf{1}0\mathbf{1}10\mathbf{1}00 & & \\ & \updownarrow \updownarrow \updownarrow & \mapsto \\ \{1,2,5,7,8\} \rightleftharpoons \mathbf{1}1\mathbf{0}01\mathbf{0}11 & & \end{array}$$

Генетический алгоритм: скрещивание

Одноточечное скрещивание

Случайная точка разрыва, обмен концами:

$$\begin{array}{ccc} \{1,3,4,6\} \Leftarrow 10110\mathbf{100} & & 10110011 \Leftarrow \{1,3,4,7,8\} \\ k = 5 & \updownarrow & \mapsto \\ \{1,2,5,7,8\} \Leftarrow 11001\mathbf{011} & & 11001100 \Leftarrow \{1,2,5,6\} \end{array}$$

Двухточечное скрещивание

Две случайные точки разрыва, обмен серединами:

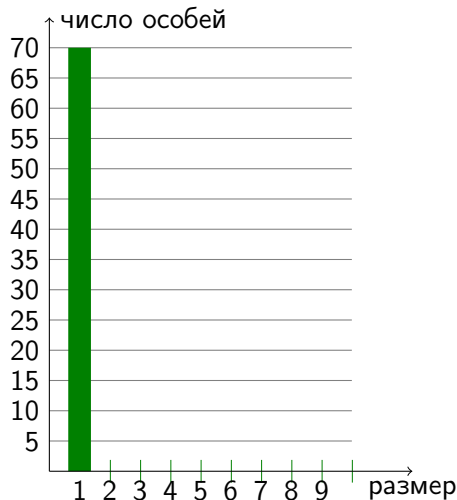
$$\begin{array}{ccc} \{1,3,4,6\} \Leftarrow 10\mathbf{11}0100 & & 10001100 \Leftarrow \{1,5,6\} \\ k_1 = 2, k_2 = 5 & \updownarrow & \mapsto \\ \{1,2,5,7,8\} \Leftarrow 11\mathbf{00}1011 & & 11110011 \Leftarrow \{1,2,3,4,7,8\} \end{array}$$

Однородное скрещивание

Обмен генами осуществляется с заданной вероятностью:

$$\begin{array}{ccc} \{1,3,4,6\} \Leftarrow \mathbf{10110100} & & 10010010 \Leftarrow \{1,4,7\} \\ & \updownarrow \updownarrow \updownarrow & \mapsto \\ \{1,2,5,7,8\} \Leftarrow \mathbf{11001011} & & 11101101 \Leftarrow \{1,2,3,5,6,8\} \end{array}$$

Генетический алгоритм: демонстрация



Начальная популяция.

Входные данные:

$$G = (V, E)$$

$$\#V = 100$$

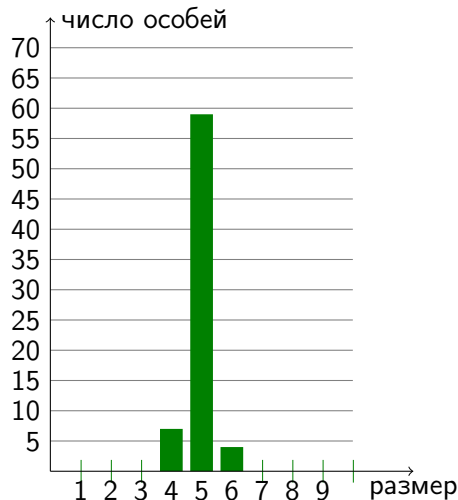
$$\text{density} = 50\%$$

$$NP = 70$$

$$P_{\text{mutation}} = 0.1$$

$$P_{\text{crossover}} = 0.2$$

Генетический алгоритм: демонстрация



5-ое поколение.

Входные данные:

$$G = (V, E)$$

$$\#V = 100$$

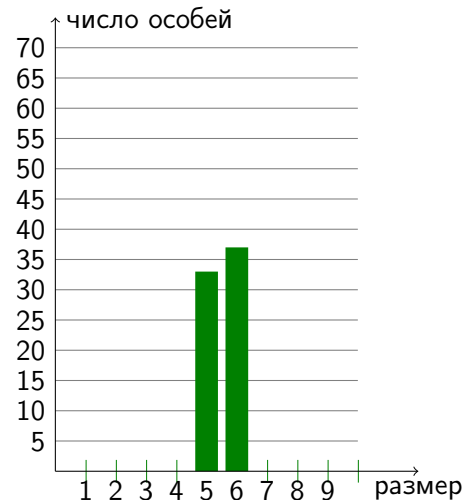
$$\text{density} = 50\%$$

$$NP = 70$$

$$P_{\text{mutation}} = 0.1$$

$$P_{\text{crossover}} = 0.2$$

Генетический алгоритм: демонстрация



10-ое поколение.

Входные данные:

$$G = (V, E)$$

$$\#V = 100$$

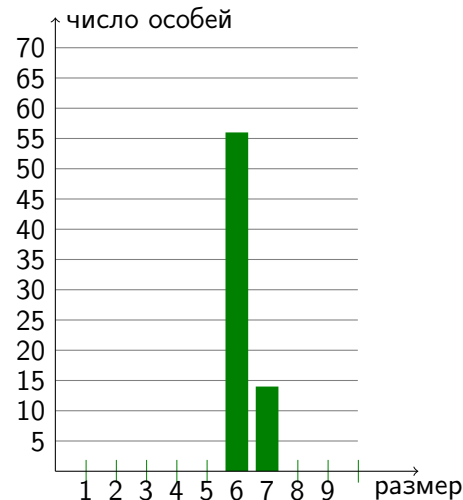
$$\text{density} = 50\%$$

$$NP = 70$$

$$P_{\text{mutation}} = 0.1$$

$$P_{\text{crossover}} = 0.2$$

Генетический алгоритм: демонстрация



15-ое поколение.

Входные данные:

$$G = (V, E)$$

$$\#V = 100$$

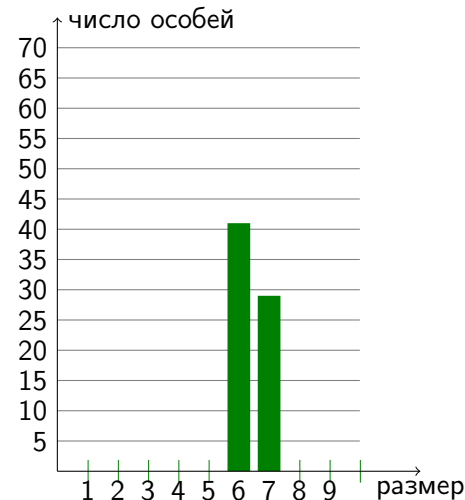
$$\text{density} = 50\%$$

$$NP = 70$$

$$P_{\text{mutation}} = 0.1$$

$$P_{\text{crossover}} = 0.2$$

Генетический алгоритм: демонстрация



20-ое поколение.

Входные данные:

$$G = (V, E)$$

$$\#V = 100$$

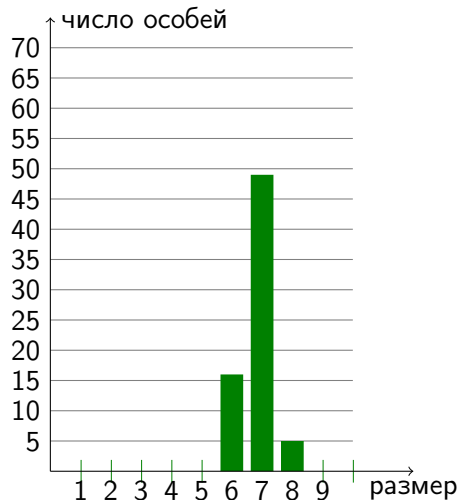
$$\text{density} = 50\%$$

$$NP = 70$$

$$P_{\text{mutation}} = 0.1$$

$$P_{\text{crossover}} = 0.2$$

Генетический алгоритм: демонстрация



25-ое поколение.

Входные данные:

$$G = (V, E)$$

$$\#V = 100$$

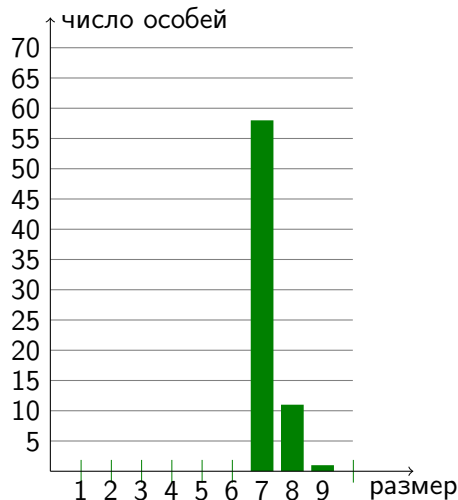
$$\text{density} = 50\%$$

$$NP = 70$$

$$P_{\text{mutation}} = 0.1$$

$$P_{\text{crossover}} = 0.2$$

Генетический алгоритм: демонстрация



30-ое поколение.

Входные данные:

$$G = (V, E)$$

$$\#V = 100$$

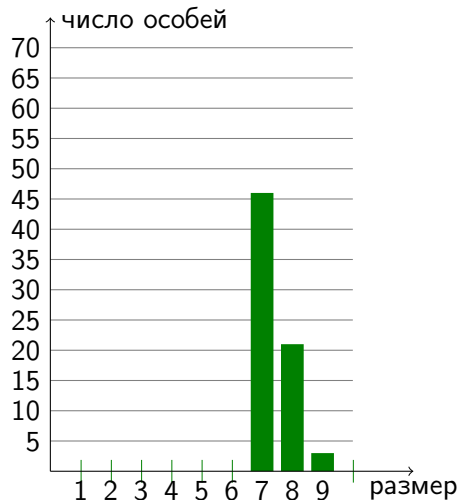
$$\text{density} = 50\%$$

$$NP = 70$$

$$P_{\text{mutation}} = 0.1$$

$$P_{\text{crossover}} = 0.2$$

Генетический алгоритм: демонстрация



35-ое поколение.

Входные данные:

$$G = (V, E)$$

$$\#V = 100$$

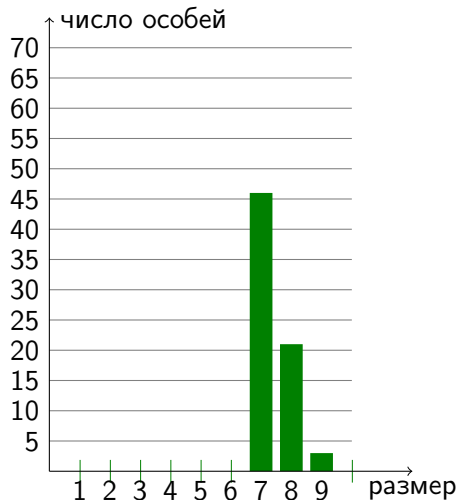
$$\text{density} = 50\%$$

$$NP = 70$$

$$P_{\text{mutation}} = 0.1$$

$$P_{\text{crossover}} = 0.2$$

Генетический алгоритм: демонстрация



Входные данные:

$$G = (V, E)$$

$$\#V = 100$$

$$\text{density} = 50\%$$

$$NP = 70$$

$$P_{\text{mutation}} = 0.1$$

$$P_{\text{crossover}} = 0.2$$

9 вершин в максимальном независимом множестве.

План доклада

Основные определения и формулировка

Неориентированный граф, смежность

Определение независимого множества

Формулировка задачи и пример

Точные методы решения

Алгоритм Брона-Кербоша

Метод ветвей и границ

Неточные методы решения

Расширение и урезание

Генетический алгоритм

Эффективность различных методов

Алгоритм Брона-Кербоша

Метод ветвей и границ

Генетический алгоритм

Эффективность алгоритма Брона-Кербоша

Случайный граф с плотностью 70%.

Число вершин	Размер	Время
50	5	0.03 сек
100	6	0.3 сек
150	6	1.5 сек

Случайный граф с плотностью 50%.

Число вершин	Размер	Время
50	11	3.6 сек
100	15	7.2 мин
150	17	> 1 ч

Случайный граф с плотностью 20%.

Число вершин	Размер	Время
50	16	50.5 сек
100	20	> 1 ч
150	23	> 1 ч

Эффективность метода ветвей и границ

Случайный граф с плотностью 70%.

Число вершин	Размер	Время
50	5	0 сек
100	6	0 сек
150	6	0.03 сек

Случайный граф с плотностью 50%.

Число вершин	Размер	Время
50	11	0.02 сек
100	15	0.4 сек
150	17	10 сек

Случайный граф с плотностью 20%.

Число вершин	Размер	Время
50	16	0.02 сек
100	20	3.6 сек
150	23	2.5 мин

Эффективность генетического алгоритма

Случайный граф $G = (V, E)$ с плотностью 50%.

#V	T	NP	P_{mutation}	$P_{\text{crossover}}$	Размер	Время
150	60	150	0.07	0.2	17 (17)	20 сек
200	60	200	0.06	0.2	16 (17)	40 сек

Случайный граф $G = (V, E)$ с плотностью 30%.

#V	T	NP	P_{mutation}	$P_{\text{crossover}}$	Размер	Время
150	60	150	0.06	0.2	16 (16)	19 сек
200	60	200	0.07	0.2	17 (19)	46 сек

Тестовый граф frb30-15-1.mis в DIMACS формате.

#V	T	NP	P_{mutation}	$P_{\text{crossover}}$	Размер	Время
450	10	600	0.1	0.2	24 (30)	2.6 мин

Спасибо за внимание!