Ч А С Т Ь В

В.С.Пилиди

ЛОКАЛЬНЫЙ МЕТОД В ТЕОРИИ ОПЕРАТОРОВ ТИПА БИСИНГУЛЯРНЫХ

ВВЕДЕНИЕ

В этой части рассматриваются приложения локального принципа к исследованию операторов типа бисингулярных ("билокальных" операторов). Основным объектом изучения является банахова алгебра операторов, действующих в пространстве функций двух переменных, порожденная тензорными произведениями операторов локального типа. Коммутаторы операторов из этой алгебры и операторов умножения на непрерывные функции, вообще говоря, не являются компактными. Следовательно, такие операторы не обязательно будут операторами локального типа, и для их исследования нельзя непосредственно применить схему, изложенную в части А. Поэтому используется иной подход. Проводятся две локализации с помощью функций, зависящих только от одной из двух переменных. Коммутаторы операторов типа бисингулярных и операторов умножения на функции, зависящие от фиксированной переменной, принадлежат некоторому идеалу рассматриваемой алгебры, содержащему идеал компактных операторов как собственное подмножество. Локальный анализ применяется к фактор-алгебрам анализируемой алгебры по идеалам, связанным с каждой из двух переменных. В качестве метода исследования мы используем локальный принцип И.Ц.Гохберга-Н.Я.Крупника. В данном случае этот принцип и локальный метод И.Б.Симоненко (часть А) являются взаимозаменяемыми, и наш выбор связан лишь с удобством формулировок. К используемому локальному принципу мы добавляем также соответствующий аналог понятия квазиэквивалентности (часть А).

В качестве приложения предлагаемого подхода исследуется алгебра бисингулярных операторов. Для этой алгебры построено символическое исчисление (в частности, получен критерий фредгольмовости операторов из этой алгебры), рассмотрены некоторые смежные вопросы, получена формула для вычисления индекса. Другие приложения "билокального" подхода и альтернативные методы исследования операторов типа бисингулярных упомянуты в разделе "Литературные указания и дополнения".

ГЛАВА. 1. АЛГЕБРА БИЛОКАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

1°. *Основные определения*

Пусть $\mathfrak{X}$ - комплексное банахово пространство. Введем следующие обозначения:

$\mathcal{B}(\mathfrak{X})$ - множество всех линейных непрерывных операторов[1], действующих в $\mathfrak{X}$;

$\mathcal{K}(\mathfrak{X})$ - множество всех компактных (вполне непрерывных) операторов, действующих в $\mathfrak{X}$;

$[A,B]$ ($\overset{def}{=} AB-BA$) - коммутатор операторов A, $B(\in\mathcal{B}(\mathfrak{X}))$;

$\mathfrak{X}^*$ - пространство, сопряженное с $\mathfrak{X}$;

A^* - оператор, сопряженный к A.

Напомним некоторые основные понятия теории фредгольмовых операторов [2, 3, 15, 19].

Определение. Оператор $A(\in\mathcal{B}(\mathfrak{X}))$ называется Ф-оператором (фредгольмовым оператором[2], оператором Нетера), если его образ $\mathrm{im}A(\subset\mathfrak{X})$ замкнут, и подпространства $\ker A(\subset\mathfrak{X})$, $\ker A^*$ $(\subset\mathfrak{X}^*)$ конечномерны. Число

$$\mathrm{Ind}\, A \overset{def}{=} \dim\ker A - \dim\ker A^*$$

называется индексом Ф-оператора A.

Фредгольмовость оператора $A(\in\mathcal{B}(\mathfrak{X}))$ равносильна существованию таких операторов R_1, $R_2(\in\mathcal{B}(\mathfrak{X}))$, что

=====================================

[1] В дальнейшем, говоря об операторах, слова "линейный непрерывный" мы, как правило, опускаем.

[2] Терминология здесь не установилась; иногда фредгольмовым называют Ф-оператор с нулевым индексом ([15], с.47; [16], с. 18).

$$R_1 A = I + T_1, \; A R_2 = I + T_2,$$

где T_1, $T_2 \in \mathcal{K}(\mathfrak{X})$. Операторы R_1, R_2 называются соответственно *левым и правым регуляризаторами оператора* A. Последнее свойство на языке банаховых алгебр формулируется так: смежный класс $A+\mathcal{K}(\mathfrak{X})(\in \mathcal{B}(\mathfrak{X})/\mathcal{K}(\mathfrak{X}))$ обратим.

Пусть X - пространство с (неотрицательной) мерой ([32], с.27-34; [12], с.28). Мы будем рассматривать банахово пространство $L_p(X)$ и действующие в нем операторы. Всюду ниже предполагается, что $1<p<\infty$. Вместо $\mathcal{B}(L_p(X))$ и $\mathcal{K}(L_p(X))$ мы пишем соответственно $\mathcal{B}_p(X)$ и $\mathcal{K}_p(X)$. Единичный оператор, действующий в $L_p(X)$, обозначается через I_X или I, если ясно, какое X имеется в виду. Норму элемента пространства $L_p(X)$ или оператора из $\mathcal{B}_p(X)$ обозначаем через $\|\cdot\|_p$, опуская индекс p в случаях, когда это число выбрано и зафиксировано.

Для $A(\in \mathcal{B}_p(X))$, через A^* обозначается действующий в $L_q(X)$ $(q=p/(p-1))$ *сопряженный к* A *оператор*, удовлетворяющий условию:

$$\int\limits_X Af\cdot\overline{g}\; d\mu = \int\limits_X f\cdot\overline{A^*g}\; d\mu$$

для всех $f(\in L_p(X))$, $g(\in L_q(X))$.

Предположим дополнительно, что X является еще и компактным хаусдорфовым топологическим пространством, причем все открытые подмножества пространства X измеримы.

Как обычно, через $C(X)$ обозначается множество всех определенных и непрерывных на компакте X комплекснозначных функций с нормой $\|\varphi\|_C \overset{def}{=} \max\{|\varphi(x)|: x\in X\}$.

Дадим определение оператора локального типа (часть A, п.1°) в удобной для нас формулировке (часть A, теорема 1.4.1).

Определение. Оператор $A(\in \mathcal{B}_p(X))$ называется оператором локального типа, если для любой функции $\varphi(\in C(X))$ коммутатор

$[\varphi I, A]\in\mathcal{K}_p(X)$.

Множество всех действующих в $L_p(X)$ операторов локального типа обозначается через $\Lambda_p(X)$. Множество $\Lambda_p(X)$ является замкнутой подалгеброй алгебры $\mathcal{B}_p(X)$; если оператор $A(\in\Lambda_p(X))$ обратим, то $A^{-1}\in\Lambda_p(X)$ (часть А, теорема 1.4.2). Очевидно, что $\mathcal{K}_p(X)\subset\Lambda_p(X)$.

Пусть Y - топологическое пространство с мерой, удовлетворяющее тем же ограничениям, что и X. Как обычно, для f $(\in L_p(X))$, $g(\in L_p(Y))$ обозначаем $(f\otimes g)(x,y)\overset{def}{=}f(x)g(y)$ $(x\in X,$ $y\in Y)$. Отметим, что в этом случае $f\otimes g\in L_p(X\times Y)$ и $\|f\otimes g\|_p=$ $=\|f\|_p\cdot\|g\|_p$. Обозначим через $L_p(X)\otimes L_p(Y)$ множество всех определенных на $X\times Y$ функций вида $\sum\limits_i f_i\otimes g_i$, где $f_i\in L_p(X)$, $g_i\in L_p(Y)$ для всех значений индекса i; здесь и всюду далее, если границы изменения индекса суммирования не указаны, считается, что сумма содержит конечное число слагаемых. Множество $L_p(X)\otimes L_p(Y)$ является линейным многообразием в $L_p(X\times Y)$.

В дальнейших построениях предполагаются выполненными следующие условия, которые выполняются во всех имеющихся приложениях излагаемого билокального метода.

1. Для любого p $(1<p<\infty)$ пространство $L_p(X)$ $(L_p(Y))$ бесконечномерно, и существует последовательность действующих в этом пространстве конечномерных проекторов, сильно сходящаяся к единичному оператору.

В главе 1 эти последовательности мы обозначаем через $\{P_n\}$ и $\{Q_n\}$ соответственно.

2. Линейное многообразие $L_p(X)\otimes L_p(Y)$ плотно в $L_p(X\times Y)$ $(1<p<\infty)$.

Из условия 2) следует, что для любых операторов A $(\in\mathcal{B}_p(X))$, $B(\in\mathcal{B}_p(Y))$ отображение

$$A\otimes B:\ \sum_i f_i\otimes g_i \dashrightarrow \sum_i Af_i\otimes Bg_i,$$

определенное на линейном многообразии $L_p(X)\otimes L_p(Y)$, продолжается по непрерывности до линейного ограниченного оператора, действующего в $L_p(X\times Y)$. Этот оператор мы обозначаем тем же символом $A\otimes B$. Отметим, что $\|A\otimes B\|_p=\|A\|_p\cdot\|B\|_p$.

Пусть $M_1(\subset\mathcal{B}_p(X))$, $M_2(\subset\mathcal{B}_p(Y))$ - произвольные непустые множества. Через $M_1\hat{\otimes}M_2$ обозначим замыкание в равномерной операторной топологии множества всех действующих в $L_p(X\times Y)$ операторов, представимых в виде конечных сумм $\sum\limits_i A_i\otimes B_i$, , где $A_i\in M_1$, $B_i\in M_2$ для всех значений индекса i. Очевидно, что если множества M_1 и M_2 являются подалгебрами $\mathcal{B}_p(X)$ и $\mathcal{B}_p(Y)$ соответственно, то $M_1\hat{\otimes}M_2$ является банаховой подалгеброй алгебры $\mathcal{B}_p(X\times Y)$.

Введем следующие множества:

$$\Lambda_p(X,Y) = \Lambda_p(X)\ \hat{\otimes}\ \Lambda_p(Y),\ \mathcal{K}_p^1(X,Y) = \mathcal{K}_p(X)\ \hat{\otimes}\ \Lambda_p(Y),$$

$$\mathcal{K}_p^2(X,Y) = \Lambda_p(X)\ \hat{\otimes}\ \mathcal{K}_p(Y),\ \mathcal{K}_p(X,Y) = \mathcal{K}_p(X)\ \hat{\otimes}\ \mathcal{K}_p(Y).$$

Операторы из алгебры $\Lambda_p(X,Y)$ будем называть *билокальными*.

Рассмотрим некоторые свойства введенных множеств.

Нам понадобится следующее вспомогательное утверждение, ([13], с.323, доказательство необходимости условий теоремы 3).

Лемма 1.1.1. Пусть T-компактный оператор, действующий в банаховом пространстве $\mathfrak{X}$, $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$-последовательность операторов в этом пространстве, сильно сходящаяся к оператору A. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty}\|A_nT-AT\| = 0$.

Доказательство. В силу теоремы Банаха-Штейнгауза ([13], с. 271), $c \overset{def}{=} \sup\limits_n\|A_n\| < \infty$. Тогда $\|A\| \le c$. Обозначим: $B=\{x:$ $x\in\mathfrak{X},\ \|x\|=1\}$. Зафиксируем число $\varepsilon(>0)$ и найдем конечную ε-сеть для (относительно компактного в $\mathfrak{X}$) множества $T(B)$, то есть такую систему элементов y_1, $y_2,\ldots y_m(\in\mathfrak{X})$, что для любого $y(\in T(B))$ найдется элемент y_i этой системы, удовлетворяющий условию $\|y-y_i\|<\varepsilon$. Найдем такое $N(>0)$, что для всех $n(>N)$ и всех $i(=1,\dots m)$ $\|A_n y_i- Ay_i\|<\varepsilon$. Возьмем произвольный элемент $x(\in B)$. Выберем такой элемент $y_i(i=1,\dots m)$, что $\|Tx-y_i\|<\varepsilon$. Тогда для $n>N$

$$\|A_nTx-ATx\|\le\|A_nTx-A_ny_i\|+\|A_ny_i-Ay_i\|+\|Ay_i-ATx\|\le(2c+1)\varepsilon.$$

В силу произвольности $x(\in B)$, $\|A_nT-AT\|\le(2c+1)\varepsilon$.

Лемма доказана.

Лемма 1.1.2. Пусть $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}(\subset\mathcal{B}_p(X))$ - последовательность, сильно сходящаяся к оператору B. Если $T\in\mathcal{K}_p^1(X,Y)$, то

$$\lim_{n\to\infty}\|(B_n\otimes I)T - (B\otimes I)T\| = 0.$$

Доказательство. Достаточно ограничиться случаем $T= T_0\otimes C$, где $T_0\in\mathcal{K}_p(X)$, $C\in\Lambda_p(Y)$. Тогда

$$\|(B_n\otimes I)T - (B\otimes I)T\| = \|B_nT_0-BT_0\|\cdot\|C\|,$$

и требуемое утверждение вытекает из леммы 1.1.1.

Лемма доказана.

Аналогичное утверждение справедливо для операторов из идеала $\mathcal{K}_p^2(X,Y)$.

Лемма 1.1.3. $\Lambda_p(X,Y)$ является банаховой подалгеброй алгебры $\mathcal{B}_p(X\times Y)$; $\mathcal{K}_p^1(X,Y)$, $\mathcal{K}_p^2(X,Y)$, $\mathcal{K}_p(X,Y)$ суть ее собственные замкнутые двусторонние идеалы; для любых $A(\in\mathcal{K}_p^1(X,Y))$, $B(\in\mathcal{K}_p^2(X,Y))$ операторы AB, $BA\in\mathcal{K}_p(X,Y)$; $\mathcal{K}_p(X,Y)$ совпадает с множеством всех действующих в $L_p(X\times Y)$ компактных операторов; $\mathcal{K}_p(X,Y) = \mathcal{K}_p^1(X,Y) \cap \mathcal{K}_p^2(X,Y)$.

Доказательство. Очевидно, что $\Lambda_p(X,Y)$ является замкнутой подалгеброй алгебры $\mathcal{B}_p(X\times Y)$, а $\mathcal{K}_p^1(X,Y)$, $\mathcal{K}_p^2(X,Y)$, $\mathcal{K}_p(X,Y)$ суть замкнутые двусторонние идеалы в ней, причем $\mathcal{K}_p(X,Y)\subset\mathcal{K}_p^i(X,Y)$, $i=1,2$. Легко видеть, что оператор $I_{X\times Y}$ не удовлетворяет заключению леммы 1.1.2. Поэтому идеал $\mathcal{K}_p^1(X,Y)$ является собственным. Аналогично для идеала $\mathcal{K}_p^2(X,Y)$.

Непосредственно из определений вытекает, что для $A(\in\mathcal{K}_p^1(X,Y))$, $B(\in\mathcal{K}_p^2(X,Y))$ операторы AB, $BA\in\mathcal{K}_p(X,Y)$ и что $\mathcal{K}_p(X,Y) \subset \mathcal{K}_p^1(X,Y)\cap\mathcal{K}_p^2(X,Y)$. Докажем обратное вложение. Пусть

$A\in\mathcal{K}^1_p(X,Y)\cap\mathcal{K}^2_p(X,Y)$. В силу леммы 1.1.2,

$$\lim_{n\to\infty}\|A-(P_n\otimes I)A\|=0.$$

Остается заметить, что $(P_n\otimes I)A\in\mathcal{K}_p(X,Y)$, так как $(P_n\otimes I)\in\in\mathcal{K}^1_p(X,Y)$, и учесть замкнутость множества $\mathcal{K}_p(X,Y)$.

Покажем что $\mathcal{K}_p(X,Y)$ совпадает с множеством всех компактных операторов в $L_p(X\times Y)$. Легко видеть, что для любого оператора $T(\in\mathcal{K}_p(X,Y))$ выполняется равенство $\lim\limits_{n\to\infty}\|(P_n\otimes Q_n)T-T\|==0$, то есть оператор T, будучи пределом по норме конечномерных операторов $(P_n\otimes Q_n)T$, является компактным.

Обратно. Докажем, что все компактные операторы, действующие в $L_p(X\times Y)$, принадлежат $\mathcal{K}_p(X,Y)$. Достаточно ограничиться случаем одномерного оператора T. Он может быть записан в виде

$$(Tf)(z)=h(z)\int\limits_{X\times Y}f(\zeta)g(\zeta)d\zeta,\ f\in L_p(X\times Y),\ z\in X\times Y,$$

где $h(\in L_p(X\times Y))$, $g(\in L_q(X\times Y),\ q=p/(p-1))$ - фиксированные элементы, определяющие T.

Имеет место оценка $\|T\|_p\le\|g\|_q\cdot\|h\|_p$.

Аппроксимируем функции g и h функциями из линейных многообразий $L_q(X)\otimes L_q(Y)$ и $L_p(X)\otimes L_p(Y)$ соответственно. Этой аппроксимации отвечает аппроксимация оператора T по норме операторами, представимыми в виде сумм вида

$$\sum_i T_i\otimes T'_i,$$

где T_i, T'_i - одномерные операторы в $L_p(X)$ и $L_p(Y)$ соответственно. Поэтому $T\in\mathcal{K}_p(X,Y)$.

Лемма доказана.

С идеалом $\mathcal{K}^1_p(X,Y)$, свяжем полунорму в $\Lambda_p(X,Y)$, определяемую так:

$$|A|_1=\inf\{\|A-T\|:\ T\in\mathcal{K}^1_p(X,Y)\}.$$

Полунормы, аналогично определяемые идеалами $\mathcal{K}^2_p(X,Y)$ и

$\mathcal{K}_p(X,Y)$, будем обозначать соответственно через $|\cdot|_2$ и $|\cdot|$. Из вложений $\mathcal{K}_p(X,Y)\subset\mathcal{K}_p^i(X,Y)$ $(i=1,\ 2)$ следует, что для любого $A(\in\Lambda_p(X,Y))$ $|A|\geq|A|_1$, $|A|\geq|A|_2$.

Учитывая полноту фактор-пространства банахова пространства по его (замкнутому) подпространству ([18], с.97), получаем, что алгебра $\Lambda_p(X,Y)$ полна по каждой из этих полунорм, а идеалы $\mathcal{K}_p^1(X,Y)$, $\mathcal{K}_p^2(X,Y)$ полны по полунорме $|\cdot|$.

Лемма 1.1.4. Существует такая константа c $(0<c<\infty)$, что для любого $A(\in\mathcal{K}_p^1(X,Y))$ имеет место оценка $|A|\leq c|A|_2$.

Доказательство. Обозначим: $M = \sup\limits_n \|P_n\|$ $(<\infty)$. Если $A\in$ $\in\mathcal{K}_p(X,Y)$, то $|A|=0$, и неравенство справедливо при любой константе c. Пусть $A\in\mathcal{K}_p^1(X,Y)$, $A\notin\mathcal{K}_p(X,Y)$. Выберем произвольное ε $(0<\varepsilon<1)$. В силу леммы 1.1.2, существует такое n, что

$$\|A - (P_n\otimes I)A\| < \varepsilon|A|.$$

Возьмем произвольный оператор $T(\in\mathcal{K}_p^2(X,Y))$. Тогда

$$(P_n\otimes I)T \in \mathcal{K}_p(X,Y),$$

$$|A| \leq \|A - (P_n\otimes I)T\| \leq \|A - (P_n\otimes I)A\| + \|(P_n\otimes I)(A-T)\| \leq$$
$$\leq \varepsilon|A| + M\|A-T\|,$$
$$(1-\varepsilon)|A| \leq M\|A-T\|.$$

Учитывая произвольность $\varepsilon(0<\varepsilon<1)$ и $T(\in\mathcal{K}_p^2(X,Y))$, отсюда получаем, что $|A|\leq M|A|_2$.

Лемма доказана.

Замечание. В случае $p=2$ можно считать, что $M=1$. С учетом указанной выше оценки, из леммы 1.1.4 получаем, что для $A(\in\mathcal{K}_2^1(X,Y))$ $|A|=|A|_2$.

Введем следующее множество:

$$\mathcal{K}_p^{12}(X,Y) = \{A+B\colon\ A\in\mathcal{K}_p^1(X,Y),\ B\in\mathcal{K}_p^2(X,Y)\}.$$

Лемма 1.1.5. Множество $\mathcal{K}_p^{12}(X,Y)$ есть собственный замкнутый двусторонний идеал в алгебре $\Lambda_p(X,Y)$.

Доказательство. Очевидно, что $\mathcal{K}_p^{12}(X,Y)$ является двусторонним идеалом в $\Lambda_p(X,Y)$. Докажем его замкнутость. Предположим, что последовательность $\{A_n+B_n\}_{n=1}^{\infty}$ ($A_n\in\mathcal{K}_p^1(X,Y)$, $B_n\in\mathcal{K}_p^2(X,Y)$, $n=1,2\ldots$) фундаментальна (по норме). В силу леммы 1.1.4,

$$|A_m-A_n| \le c|A_m-A_n|_2 = c|(A_m+B_m) - (A_n+B_n)|_2 \le$$
$$\le c\|(A_m+B_m) - (A_n+B_n)\| \to 0$$

при m, $n \to \infty$. Тогда существует такой оператор $A_0(\in\mathcal{K}_p^1(X,Y))$, что $\lim\limits_{n\to\infty}|A_n-A_0| = 0$. Найдем последовательность $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ $(\in\mathcal{K}_p^1(X,Y))$, для которой

$$\lim_{n\to\infty} \|(A_n+T_n) - A_0\| = 0.$$

Тогда фундаментальной (по операторной норме) будет последовательность $\{B_n-T_n\}_{n=1}^{\infty}$, следовательно, она сходится по норме к некоторому оператору $B_0(\in\mathcal{K}_p^2(X,Y))$. Отсюда получаем, что

$$\lim_{n\to\infty} \|(A_n+B_n) - (A_0+B_0)\| = 0.$$

Замкнутость идеала $\mathcal{K}_p^{12}(X,Y)$ доказана.

Введем последовательность проекторов

$$R_n = =(I-P_n)\otimes(I-Q_n),\ n=1,2,\ldots$$

Из леммы 1.1.2 следует, что для любого оператора T $(\in\mathcal{K}_p^{12}(X,Y))$ $\lim\limits_{n\to\infty}\|R_nT\| = 0$. Единичный оператор не удовлетворяет такому условию, поэтому $I\notin\mathcal{K}_p^{12}(X,Y)$, и рассматриваемый идеал является собственным.

Лемма доказана.

Полунорму в $\Lambda_p(X,Y)$ по модулю идеала $\mathcal{K}_p^{12}(X,Y)$ будем обозначать $|\cdot|_{12}$.

Лемма 1.1.6. В алгебре $\Lambda_p(X,Y)$ полунормы $|A|$ и $\max\{|A|_1,|A|_2\}$ эквивалентны.

Доказательство. Для любого $A(\in\Lambda_p(X,Y))$ имеет место оценка $\max\{|A|_1,|A|_2\} \le |A|$. Докажем, что существует такая константа c, что для любого $A(\in\Lambda_p(X,Y))$

$$|A| \le c\cdot\max\{|A|_1,|A|_2\}.$$

Обозначим: $M = \sup\limits_n\|P_n\|$ $(<\infty)$, $M' = \sup\limits_n\|Q_n\|$ $(<\infty)$. Выберем произвольные операторы $T_i(\in\mathcal{K}_p^i(X,Y))$, $i=1,\ 2$. Учтем, что для всех n $(P_n\otimes Q_n)A\in\mathcal{K}_p(X,Y)$. Тогда для любого n

$$\begin{aligned}|A| &\le \|A-(P_n\otimes Q_n)A\| \le \|A-(P_n\otimes I)A\| + M\cdot\|A-(I\otimes Q_n)A\| \le \\ &\le \|A-T_1\| + \|T_1-(P_n\otimes I)T_1\| + M\cdot\|A-T_1\| + \\ &+ M\cdot(\|A-T_2\| + \|T_2-(I\otimes Q_n)T_2\| + M'\cdot\|A-T_2\|).\end{aligned}$$

Переходя к пределу при $n\to\infty$ и учитывая лемму 1.1.2, получаем, что

$$|A| \le (1+M)\cdot\|A-T_1\| + M\cdot(1+M')\cdot\|A-T_2\|.$$

В силу произвольности T_1 и T_2,

$$\begin{aligned}|A| &\le (1+M)\cdot|A|_1 + M\cdot(1+M')\cdot|A|_2 \le \\ &\le (1+2M+MM')\cdot\max\{|A|_1,|A|_2\}.\end{aligned}$$

Лемма доказана.

Замечание. При $p=2$ оценку приведенной леммы можно уточнить. Действительно, $\Lambda_2(X,Y)$ является C^*-алгеброй [6]. Из предложения 1.8.2 упомянутой книги и леммы 1.1.6 следует, что $\Lambda_2(X,Y)/\mathcal{K}_2(X,Y)$ является C^*-алгеброй с любой из двух эквивалентных норм

$$A + \mathcal{K}_2(X,Y) \to |A|,$$
$$A + \mathcal{K}_2(X,Y) \to \max\{|A|_1,|A|_2\}.$$

В силу предложения 1.8.1 из [6], эти нормы совпадают.

Приведем теперь определение обобщенной фредгольмовости.

Определение. Оператор $A(\in\Lambda_p(X,Y))$ назовем Φ_1 - оператором, если смежный класс $A + \mathcal{K}_p^1(X,Y)$ $(\in \Lambda_p(X,Y)/\mathcal{K}_p^1(X,Y))$ обратим.

Приведенное определение Φ_1 - оператора равносильно следующему: существует такой оператор $R(\in\Lambda_p(X,Y))$, что

$$RA = I + T_1,\ AR = I + T_2,$$

где T_1, $T_2 \in \mathcal{K}_p^1(X,Y)$. Оператор R будем называть *частичным* *регуляризатором* (по первой переменной) оператора A. Подчеркнем, что частичный регуляризатор *по определению* принадлежит алгебре $\Lambda_p(X,Y)$.

Аналогично с идеалом $\mathcal{K}_p^2(X,Y)$ связываются понятия Φ_2 - оператора и частичного регуляризатора по второй переменной.

Замечание. Обобщенная фредгольмовость операторов (то есть обратимость по модулю некоторого идеала) изучалась рядом авторов. Из этих работ упомянем лишь статьи Кордеса [34, 35]. В частности, в [34] рассматривалась подалгебра $\mathcal{B}(H_1)\hat{\otimes}\mathcal{B}(H_2)$ алгебры $\mathcal{B}(H_1\hat{\otimes}H_2)$ (H_1, H_2 - гильбертовы пространства) и ее идеалы $\mathcal{K}(H_1)\hat{\otimes}\mathcal{B}(H_2)$ и т.п. Отмечены свойства этих идеалов, подобные леммам 1.1.3, 1.1.5. В отличие от упомянутых работ, где обобщенная фредгольмовость была основным объектом исследования, для нас это понятие является вспомогательным, и мы анализируем его только в связи с Φ - свойством.

Прежде, чем формулировать утверждение, связывающее Φ_1 - и Φ_2 - свойства с обычной фредгольмовостью, приведем следующее утверждение.

Лемма 1.1.7. Пусть R - кольцо с единицей, J_1, J_2 - собственные двусторонние идеалы в R, $J_0=J_1\cap J_2$, $x\in R$. Смежный класс $x+J_0(\in R/J_0)$ обратим тогда и только тогда, когда обратимы смежные классы $x+J_1(\in R/J_1)$ и $x+J_2(\in R/J_2)$.

Доказательство. Из обратимости $x+J_0$ непосредственно следует обратимость $x+J_1$ и $x+J_2$. Докажем обратное утверждение.

Предположим, что смежные классы $x+J_1(\in R/J_1)$ и $x+J_2$ $(\in R/J_2)$ обратимы,

$$(x+J_1)^{-1} = y_1+J_1,\ (x+J_2)^{-1} = y_2+J_2,$$

где y_1, $y_2\in R$.
Тогда $y_1x=e+u_1$, $y_2x=e+u_2$, где e - единица кольца R, $u_1\in J_1$, $u_2\in J_2$. Рассмотрим элемент $y = y_1+y_2-y_1xy_2$. Имеем:

$$yx-e = -(y_1x-e)(y_2x-e) = -u_1u_2.$$

Элемент $u_1u_2 \in J_1 \cap J_2 = J_0$, и смежный класс $x+J_0 (\in R/J_0)$ обратим слева. Точно так же доказываем, что $(xy-e) \in J_0$, то есть смежный класс $x+J_0$ обратим справа.

Лемма доказана.

Теорема 1.1.1. Для оператора $A(\in \Lambda_p(X,Y))$ следующие условия равносильны:

1) A является Φ - оператором, и его регуляризатор R принадлежит алгебре $\Lambda_p(X,Y)$.

2) A является Φ_1 - и Φ_2 - оператором.

Доказательство. Свойство 1) равносильно обратимости смежного класса

$$A + \mathcal{K}_p(X,Y) \ (\in \Lambda_p(X,Y)/\mathcal{K}_p(X,Y)).$$

Поэтому доказываемое утверждение вытекает из равенства

$$\mathcal{K}_p(X,Y) = \mathcal{K}_p^1(X,Y) \cap \mathcal{K}_p^2(X,Y)$$

и леммы 1.1.7.

Замечание. Дополнительное ограничение в свойстве 1) - требование принадлежности регуляризатора алгебре $\Lambda_p(X,Y)$ - при $p=2$ может быть снято. В этом случае $\mathcal{B}_2(X,Y)/\mathcal{K}_2(X,Y)$ является C^*-алгеброй, $\Lambda_2(X,Y)/\mathcal{K}_2(X,Y)$-ее C^*-подалгеброй. Поэтому для $A(\in\Lambda_2(X,Y))$ обратимость смежного класса $A+\mathcal{K}_2(X,Y)$ в $\Lambda_2(X,Y)/\mathcal{K}_2(X,Y)$ (свойство 1)) равносильна его обратимости в $\mathcal{B}_2(X,Y)/\mathcal{K}_2(X,Y)$ (то есть тому, что A является Φ - оператором без предположения о классе регуляризатора) ([5], с. 28, следствие IX.3.10; [6], с. 20).

Отметим также следующее важное утверждение, непосредственно вытекающее из доказательства леммы 1.1.7.

Лемма 1.1.8. Если $A(\in\Lambda_p(X,Y))$ является Φ_1 - и Φ_2 - оператором, то его регуляризатор R может быть выражен через его частичные регуляризаторы R_1 и R_2 по формуле

$$R = R_1+R_2-R_1AR_2.$$

2°. *Локальный принцип И.Ц.Гохберга - Н.Я.Крупника. Квазиэквивалентность.*

Следуя [3], гл.12, приведем основные положения локального метода И.Ц.Гохберга-Н.Я.Крупника.

Пусть $\mathfrak{A}$ - банахова алгебра с единицей. Множество $M(\subset\mathfrak{A})$ называется *локализующим классом*, если $0\notin M$, и для любых элементов a_1, $a_2(\in M)$ существует такой элемент $a(\in M)$, что

$$a_1 a = a a_1 = a, \quad a_2 a = a a_2 = a.$$

Элементы x,y называются *M-эквивалентными слева (справа)*, если

$$\inf_{a\in M} \|(x-y)a\| = 0 \qquad (\inf_{a\in M} \|a(x-y)\| = 0).$$

Элементы, M-эквивалентные слева и справа, называются *M-эквивалентными*; в этом случае мы пишем $x \overset{M}{\sim} y$.

Отметим, что если x, y, x_n, $y_n\in\mathfrak{A}$, $n=1, 2,\ldots$,

$$\lim_{n\to\infty} \|x-x_n\| = 0, \quad \lim_{n\to\infty} \|y-y_n\| = 0, \quad x_n \overset{M}{\sim} y_n,$$

то $x \overset{M}{\sim} y$.

Элемент $x(\in\mathfrak{A})$ называется *M-обратимым слева (справа)*, если существуют такие элементы $y(\in\mathfrak{A})$, $a(\in M)$, что $yxa=a$ $(axy=a)$. Элемент $x(\in\mathfrak{A})$ называется *M-обратимым*, если он M-обратим слева и справа.

Если элементы x, $y(\in\mathfrak{A})$ M-эквивалентны, то они одновременно M-обратимы или нет.

Система локализующих классов $\{M_\tau\}_{\tau\in T}$ называется *покрывающей*, если из любой системы $\{a_\tau\}_{\tau\in T}$ элементов $a_\tau\in M_\tau$ можно выделить конечную подсистему, сумма элементов которой является обратимым в $\mathfrak{A}$ элементом.

Пусть $\{M_\tau\}_{\tau\ T}$ - покрывающая система локализующих классов в алгебре $\mathfrak{A}$. Обозначим через $\mathfrak{A}_0$ множество всех элементов из $\mathfrak{A}$, каждый из которых коммутирует со всеми элементами из $\bigcup_{\tau\ T} M_\tau$. Нетрудно проверить следующие утверждения.

1) $\mathfrak{A}_0$ является замкнутой подалгеброй алгебры $\mathfrak{A}$.

2) Если элемент $x(\in\mathfrak{A}_0)$ обратим в $\mathfrak{A}$, то $x^{-1}\in\mathfrak{A}_0$.

3) Если x, $y\in\mathfrak{A}_0$, то для любого $\tau(\in T)$ эти элементы M_τ-эквивалентны слева тогда и только тогда, когда они M_τ-эквивалентны справа.

4) Если x_1, x_2, y_1, y_2 $\in$ $\mathfrak{A}_0$, $x_1 \overset{M}{\sim} x_2$, $y_1 \overset{M}{\sim} y_2$, то $x_1y_1 \overset{M}{\sim} x_2y_2$, $x_1+y_1 \overset{M}{\sim} x_2+y_2$.

Основным результатом локального метода И.Ц.Гохберга-Н.Я.Крупника является следующее утверждение ([3], гл. 12, теорема 1.1).

Предложение 1.2.1. Пусть $x\in\mathfrak{A}_0$ и для каждого $\tau(\in T)$ элемент x M_τ-эквивалентен элементу $y_\tau(\in\mathfrak{A})$. Тогда следующие условия равносильны:

1) элемент x обратим в $\mathfrak{A}$;

2) элемент x обратим в $\mathfrak{A}_0$;

3) для каждого $\tau(\in T)$ элемент y_τ M_τ-обратим.

Вернемся теперь к объектам, введенным в п.1°. Для $x_0(\in X)$ обозначим через $\mathfrak{M}_{x_0}(X)$ множество всех функций $f(\in C(X))$, удовлетворяющих следующим условиям:

1) $0\le f(x)\le 1$ для всех $x\in X$;

2) множество $f^{-1}(1)$ является окрестностью[1] точки x_0 в X.

Если ясно, какое X имеется в виду, мы пишем $\mathfrak{M}_{x_0}$ вместо $\mathfrak{M}_{x_0}(X)$.

Через M'_{x_0} $(x_0\in X)$ обозначим множество всех смежных классов фактор-алгебры $\Lambda_p(X,Y)/\mathcal{K}_p^1(X,Y)$ вида

==

[1] Под окрестностью точки мы понимаем любое измеримое множество, внутренность которого содержит эту точку.

$$(\varphi I_X \otimes I_Y) + \mathcal{K}_p^1(X,Y),\ \varphi \in \mathfrak{M}_{x_0}(X).$$

Из компактности пространства X следует, что семейство $\{M'_x\}_{x\in X}$ является покрывающей системой локализующих классов в $\Lambda_p(X,Y)/\mathcal{K}_p^1(X,Y)$.

Из определения оператора локального типа следует, что для любых $A(\in\Lambda_p(X,Y))$, $\varphi(\in C(X))$ смежные классы $A+\mathcal{K}_p^1(X,Y)$ и $\varphi I_X\otimes I_Y+\mathcal{K}_p^1(X,Y)$ $(\in\Lambda_p(X,Y)/\mathcal{K}_p^1(X,Y))$ коммутируют. Тогда любой элемент $A+\mathcal{K}_p^1(X,Y)(\in\Lambda_p(X,Y)/\mathcal{K}_p^1(X,Y))$ коммутирует со всеми элементами локализующих классов M'_x $(x\in X)$, то есть к решению вопроса о его обратимости (наличии Φ_1-свойства для оператора A) можно применить локальный принцип.

Определение. Точку $x_0(\in X)$ назовем точкой непрерывного типа, если существует последовательность $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ ее окрестностей в X, обладающая такими свойствами:

a) $u_1\supset u_2\supset\ldots\supset u_n\supset\ldots$;

b) для любой окрестности $u(\subset X)$ точки x_0 найдется такое n, что $u_n\subset u$.

c) для любого $p(1<p<\infty)$ последовательность операторов $P_{u_n}(\in\mathcal{B}_p(X))$, $n=1,2,\ldots)$ при $n\to\infty$ сильно сходится к нулевому оператору.

Из свойства c) и леммы 1.1.2 вытекает справедливость следующего свойства:

d) для любого $T(\in\mathcal{K}_p^1(X,Y))$

$$\lim_{n\to\infty}\|(P_{u_n}\otimes I)T\| = \lim_{n\to\infty}\|T(P_{u_n}\otimes I)\| = 0.$$

Наличие M'_{x_0}-эквивалентности смежных классов

$$A+\mathcal{K}_p^1(X,Y),\ B+\mathcal{K}_p^1(X,Y)(\in\Lambda_p(X,Y)/\mathcal{K}_p^1(X,Y))$$

отмечается так: $A \overset{1,x_0}{\sim} B$. Заметим, что последнее свойство равносильно равенству

$$\inf_{u} |(A-B)(P_u \otimes I)|_1 = 0,$$

где нижняя грань берется по множеству всех окрестностей u точки x_0 в X. Если x_0 - точка непрерывного типа, то полунорму $|\cdot|_1$ в последнем равенстве можно заменить операторной нормой.

В операторных терминах M'_{x_0}-обратимость смежного класса $A + \mathcal{K}_p^1(X,Y) (\in \Lambda_p(X,Y)/\mathcal{K}_p^1(X,Y))$ равносильна существованию таких элементов $\varphi (\in \mathfrak{M}_{x_0}(X))$, $B (\in \Lambda_p(X,Y))$, $T (\in \mathcal{K}_p^1(X,Y))$, что выполняется равенство

$$BA(\varphi I_X \otimes I_Y) = (\varphi I_X \otimes I_Y) + T.$$

Если, кроме того, x_0 - точка непрерывного типа, то, заменяя φ и B подходящими элементами φ_1 и B_1 из тех же классов, можно добиться выполнения равенства

$$B_1 A(\varphi_1 I_X \otimes I_Y) = \varphi_1 I_X \otimes I_Y.$$

Симметричным образом определяются соответствующие понятия для идеала $\mathcal{K}_p^2(X,Y)$. В частности, для $y_0 (\in Y)$ мы обозначаем:

$$M''_{y_0} = \{(I_X \otimes \psi I_Y) + \mathcal{K}_p^2(X,Y) \colon \psi \in \mathfrak{M}_{y_0}(Y)\}.$$

Наличие соответствующего этому локализующему классу отношения эквивалентности обозначается так: $A \overset{2,y_0}{\sim} B$.

Нам потребуется также следующее обозначение. Пусть $A, B \in \Lambda_p(X,Y)$, $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$. Тогда запись

$$A \overset{(x_0,y_0)}{\sim} B$$

означает, что

$$\inf\{|(A-B)((\varphi I_X \otimes \psi I_Y)|_{12} \colon \varphi \in \mathfrak{M}_{x_0}(X),\ \psi \in \mathfrak{M}_{y_0}(Y)\} = 0.$$

Отметим, что последнее равенство равносильно следующему:

$$\inf_{u,v} |(A-B)(P_u \otimes P_v)|_{12} = 0.$$

Здесь нижняя грань берется по множеству всех пар (u,v), где $u(\subset X)$ - окрестность точки x_0, $v(\subset Y)$ - окрестность точки y_0.

Если x_0, y_0 являются точками непрерывного типа, то в приведенном выше определении полунорму $|\cdot|_{12}$ можно заменить операторной нормой.

Определение. Пусть $x(\in X)$ является точкой непрерывного типа, $A\in\Lambda_p(X,Y)$. Смежный класс

$$A + \mathcal{K}_p^1(X,Y) \ (\in \Lambda_p(X,Y)/\mathcal{K}_p^1(X,Y))$$

назовем обобщенно M'_x-обратимым слева, если существуют оператор $R(\in\mathcal{B}_p(X\times Y))$ и функция $\varphi(\in\mathfrak{M}_x(X))$, такие, что

$$RA(\varphi I_X \otimes I_Y) = \varphi I_X \otimes I_Y.$$

Корректность определения (независимость этого свойства от оператора A, определяющего смежный класс) легко выводится из свойства d) точек непрерывного типа по аналогии с приводимым ниже доказательством леммы 1.2.1.

Аналогично определяется обобщенная M'_x-обратимость справа. Смежный класс, обобщенно обратимый слева и справа, будем называть *обобщенно M'_x-обратимым*. Приведенное определение отличается от определения M'_x-обратимости лишь отсутствием ограничения на класс оператора R.

Из общего результата локального метода следует, что если A, $B\in\Lambda_p(X,Y)$, $x\in X$, $A \overset{1,x}{\sim} B$ и смежный класс $A+\mathcal{K}_p^1(X,Y)$ M'_x-обратим, то таким же является смежный класс $B+\mathcal{K}_p^1(X,Y)$. В силу приводимого ниже утверждения, этот факт остается в силе и для обобщенной M'_x-обратимости.

Лемма 1.2.1. Предположим, что $x(\in X)$ является точкой непрерывного типа, A, $B\in\Lambda_p(X,Y)$, $A \overset{1,x}{\sim} B$. Пусть смежный класс

$A+\mathcal{K}_p^1(X,Y)$ обобщенно M'_x - обратим. Тогда таким же свойством обладает смежный класс $B+\mathcal{K}_p^1(X,Y)$.

Доказательство. Из условия следует, что для подходящих оператора $R(\in\mathcal{B}_p(X\times Y))$ и окрестности $u(\subset X)$ точки x выполняется равенство

$$RA(P_u\otimes I) = P_u\otimes I.$$

Тогда

$$RB(P_u\otimes I) = (I+R(B-A)(P_u\otimes I))(P_u\otimes I).$$

Уменьшая в случае необходимости окрестность u, можно считать, что $\|R(B-A)(P_u\otimes I)\| < 1$. Тогда оператор

$$I + R(B-A)(P_u\otimes I)$$

обратим. Из последнего равенства следует, что

$$R_1B(P_u\otimes I) = (P_u\otimes I),$$

где

$$R_1 = (I+R(B-A)(P_u\otimes I))^{-1}R\in\mathcal{B}_p(X\times Y).$$

Полученное соотношение по определению означает, что смежный класс $B+\mathcal{K}_p^1(X,Y)$ обобщенно M'_x - обратим.

Так же рассматривается "правый" случай.

Лемма доказана.

Рассмотрим еще одно важное понятие. Введем для рассматриваемого случая аналог понятия квазиэквивалентности, следуя данному в части A, 1, п. 8^0 определению для операторов локального типа.

Пусть $\tilde{X}$ - топологическое пространство с мерой, обладающее теми же свойствами, что и X, $u(\subset X)$, $\tilde{u}(\subset\tilde{X})$ - некоторые окрестности, $\varphi(u\to\tilde{u})$ - гомеоморфное измеримое отображение, причем φ^{-1} также измеримо. Через μ, $\tilde{\mu}$ будем обозначать меры на X и $\tilde{X}$ соответственно.

Определение. Будем говорить, что отображение φ не искажает меру, если существуют такие положительные константы c_1 и c_2, что для любого измеримого множества $E(\subset u)$ имеет место оценка

$$c_1\tilde{\mu}(\varphi(E)) \le \mu(E) \le c_2\tilde{\mu}(\varphi(E)).$$

Пусть $\varphi(u\to\tilde{u})$ - не искажающее меру отображение. Обозначим через T_φ отображение, которое каждой функции $f(\in L_p(\tilde{X}))$, равной нулю вне множества $\tilde{u}$, ставит в соответствие определенную на X функцию $T_\varphi f$ вида

$$(T_\varphi f)(x) = \begin{cases} f(\varphi(x)), & \text{если } x\in u, \\ 0 & \text{, если } x\in X\ u. \end{cases}$$

Отображение T_φ является, очевидно, линейным непрерывным оператором из $L_p(\tilde{u})$ в $L_p(u)$.[1]

Предположим теперь, что u является окрестностью точки $x_0(\in X)$ и $\varphi(x_0)=x_1(\in\tilde{X})$. Обозначим через

$$\tilde{M}'_{x_1}\ (\subset\Lambda_p(\tilde{X},Y)/\mathcal{K}^1_p(\tilde{X},Y)))$$

локализующий класс, который строится по точке x_1 $(\in\tilde{X})$ по аналогии с предыдущим.

Определение. Пусть $A\in\Lambda_p(X,Y)$, $B\in\Lambda_p(\tilde{X},Y)$, $x_0\in X$, $x_1\in\tilde{X}$. Будем говорить, что оператор A в точке x_0 квазиэквивалентен (по первой переменной) оператору B в точке x_1, если существуют окрестности $u(\subset X)$, $\tilde{u}(\subset\tilde{X})$ этих точек и не искажающее меру отображение $f(u\to\tilde{u})$, такие, что $f(x_0)=x_1$ и

====================================

[1] Для измеримого множества $F(\subset X)$ мы отождествляем пространство $L_p(F)$ с подпространством пространства $L_p(X)$, состоящим из функций, равных нулю вне F.

$$(P_{\tilde u}T_{f^{-1}}P_u \otimes I)\ A\ (P_uT_fP_{\tilde u} \otimes I) \overset{1,x_1}{\sim} (P_{\tilde u} \otimes I)\ B\ (P_u \otimes I).$$

Сокращенно наличие квазиэквивалентности по первой переменной отмечаем так: $A \overset{x_0}{\sim}{}_1 \overset{x_1}{\sim} B$ или $A \overset{x_0}{\sim}{}_{1,f} \overset{x_1}{\sim} B$, если нужно отметить отображение f.

Аналогично вводится квазиэквивалентность по второй переменной (запись $A \overset{y_0}{\sim}{}_2 \overset{y_1}{\sim} B$ или $A \overset{y_0}{\sim}{}_{2,g} \overset{y_1}{\sim} B$).

Справедливо следующее утверждение.

Лемма 1.2.2. Предположим, что $x_0(\in X)$ является точкой непрерывного типа, $A\in\Lambda_p(X,Y)$, $B\in\Lambda_p(\tilde X,Y)$, $A \overset{x_0}{\sim}{}_{1,f} \overset{x_1}{\sim} B$. Если смежный класс $A+\mathcal{K}_p^1(X,Y)$ M'_{x_0} -обратим, то смежный класс $B+\mathcal{K}_p^1(\tilde X,Y)$ $\tilde M'_{x_1}$ - обратим. Аналогично для обобщенной M - обратимости.

Доказательство этого утверждения по существу, не отличается от доказательства леммы 1.2.1.

Сформулируем теперь основное утверждение локального принципа для билокальных операторов.

Буквами X, Y (с индексами и знаком ~ или без них) мы обозначаем топологические пространства с мерой, удовлетворяющие перечисленным в п.1° условиям. Предположим также, что все точки пространств X, Y являются точками непрерывного типа.

Пусть $A\in\Lambda_p(X,Y)$ и для каждого $x(\in X)$ заданы пространство $\tilde X_x$, точка $\tilde x(\in\tilde X)$ и оператор $A_{1,x}(\in\Lambda_p(\tilde X,Y))$, такие, что

$$A \overset{x}{\sim}{}_1 \overset{\tilde x}{\sim} A_{1,x};$$

для каждого $y(\in Y)$ заданы пространство $\tilde Y_y$, точка $\tilde y(\in\tilde Y_y)$ и оператор $A_{2,y}(\in\Lambda_p(X,\tilde Y_y))$, такие, что

$$A \overset{y}{\sim}{}_2 \overset{\tilde y}{\sim} A_{1,y}.$$

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1.2.1. Если A является Ф - оператором, то для каждого $x(\in X)$ смежный класс

$$A_{1,x}+\mathcal{K}_p^1(\tilde{X}_x,Y)(\in\Lambda_p(\tilde{X}_x,Y)/\mathcal{K}_p^1(\tilde{X}_x,Y))$$

обобщенно $\tilde{M}_{\tilde{x}}$ - обратим; для каждого $y(\in Y)$ смежный класс

$$A_{2,y}+\mathcal{K}_p^2(X,\tilde{Y}_y)(\in\Lambda_p(X,\tilde{Y}_y)/\mathcal{K}_p^2(X,\tilde{Y}_y))$$

обобщенно $\tilde{M}_{\tilde{y}}$ - обратим. Если для каждого $x(\in X)$ смежный класс

$$A_{1,x}+\mathcal{K}_p^1(\tilde{X}_x,Y)\ (\in\Lambda_p(\tilde{X}_x,Y)/\ \mathcal{K}_p^1(\tilde{X}_x,Y))$$

$\tilde{M}_{\tilde{x}}$ - обратим и для каждого $y(\in Y)$ смежный класс

$$A_{2,y}+\mathcal{K}_p^2(X,\tilde{Y}_y)\ (\in\Lambda_p(X,\tilde{Y}_y)/\mathcal{K}_p^2(X,\tilde{Y}_y))$$

$\tilde{M}_{\tilde{y}}$ - обратим, то A является Ф - оператором, и все его регуляризаторы принадлежат $\Lambda_p(X,Y)$.

Доказательство. Предположим, что A является Ф - оператором. Выберем точку $x(\in X)$. Смежный класс $A+\mathcal{K}_p^1(X,Y)$ обобщенно M'_x- обратим. Тогда, в силу леммы 1.2.2, смежный класс $A_{1,x}+\mathcal{K}_p^1(\tilde{X}_x,Y)$ обобщенно $\tilde{M}_{\tilde{x}}$- обратим. Аналогично рассматривается вторая переменная.

Докажем второе утверждение формулировки. Пусть $x\in X$. В силу леммы 1.2.2, из $\tilde{M}_{\tilde{x}}$ - обратимости смежного класса $A_{1,x}+\mathcal{K}_p^1(\tilde{X}_x,Y)$ следует M'_x - обратимость смежного класса $A+\mathcal{K}_p^1(X,Y)$. Из предложения 1.2.1 получаем, что смежный класс $A+\mathcal{K}_p^1(X,Y)(\in\Lambda_p(X,Y)/\mathcal{K}_p^1(X,Y))$ обратим, то есть A является Φ_1-оператором. Аналогично доказываем, что A является Φ_2 - оператором. В силу теоремы 1.1.1, A является Ф - оператором с регуляризатором $R\in\Lambda_p(X,Y)$. Тогда все регуляризаторы оператора A

(которые могут отличаться от R лишь компактным слагаемым) принадлежат $\Lambda_p(X,Y)$.

Теорема доказана.

Замечание. При $p=2$ второе утверждение теоремы является не только достаточным, но и необходимым для фредгольмовости (см. замечание к теореме 1.1.1).

3°. *Теоремы об огибающем операторе.*

В этом пункте приводятся теоремы об огибающем операторе для билокальных операторов.

Для $A\in\Lambda_p(X,Y)$, $x\in X$, $y\in Y$, положим

$$q_1(A,x) = \inf_u |(P_u\otimes I)A|_1 (=\inf_u |A(P_u\otimes I)|_1),$$

$$q_2(A,y) = \inf_v |(I\otimes P_v)A|_2 (=\inf_v |A(I\otimes P_v)|_2),$$

$$q_{12}(A,x,y) = \inf_{u,v} |(P_u\otimes P_v)A|_{12} (=\inf_{u,v} |A(P_u\otimes P_v)|_{12}),$$

где u (v) пробегает множество всех окрестностей точки x в X (y в Y); обозначим также

$$q_1(A) = \sup\{q_1(A,x):\ x\in X\},$$

$$q_2(A) = \sup\{q_2(A,y):\ y\in Y\},$$

$$q_{12}(A) = \sup\{q_{12}(A,x,y):\ x\in X,\ y\in Y\}.$$

Справедливо следующее утверждение.

Предложение 1.3.1. Для любого оператора $A(\in\Lambda_p(X,Y))$ имеют место равенства $|A|_1=q_1(A)$, $|A|_2=q_2(A)$, $|A|_{12}=q_{12}(A)$.

Доказательство этого утверждения с точностью до обозначений совпадает с доказательством теоремы 1.2.1 части A.

Следствие 1. Для оператора $A(\in\Lambda_p(X,Y))$ следующие условия равносильны:

1) $A\in\mathcal{K}_p^1(X,Y)$ $(A\in\mathcal{K}_p^2(X,Y))$;

2) для всех $x\in X$ $(y\in Y)$ $A\ {}^{1}{\sim}^{x}\ 0$ $(A\ {}^{2}{\sim}^{y}\ 0)$.

Из следствия 1 и равенства

$$\mathcal{K}_p(X,Y) = \mathcal{K}_p^1(X,Y)\cap\mathcal{K}_p^2(X,Y)$$

получаем такой результат.

Следствие 2. Для оператора $A(\in\Lambda_p(X,Y))$ следующие условия равносильны:

1) $A\in\mathcal{K}_p(X,Y)$;

2) для всех $x(\in X)$ $A \ {}^{1}{\sim}^{x}\ 0$, для всех $y(\in Y)$ $A \ {}^{2}{\sim}^{y}\ 0$.

Следствие 3. Для оператора $A(\in\Lambda_p(X,Y))$ следующие условия равносильны:

1) $A\in\mathcal{K}_p^{12}(X,Y)$;

2) для всех $x(\in X)$, $y(\in Y)$ $A \overset{(x,y)}{\sim} 0$.

Приводимая ниже теорема 1.3.1 является аналогом теоремы об огибающем операторе для операторов локального типа (часть А, теорема 1.5.1).

Пусть задано семейство операторов $\{A_x^{(1)}\}_{x\in X}(\subset\Lambda_p(X,Y))$.

Определение. Оператор $A(\in\Lambda_p(X,Y))$ назовем огибающим семейства $\{A_x^{(1)}\}_{x\in X}$ (по первой переменной), если в каждой точке $x(\in X)$ выполняется соотношение $A \ {}^{1}{\sim}^{x}\ A_x^{(1)}$.

Определение. Семейство операторов $\{A_x^{(1)}\}_{x\in X}(\subset\Lambda_p(X,Y))$ будем называть локально полунепрерывным, если для любых $x_0(\in X)$, $\varepsilon(>0)$ найдется такая окрестность $u(\subset X)$ точки x_0, что для каждой точки $x(\in u)$ существует ее окрестность $v(\subset u)$, для которой

$$|(A_{x_0}^{(1)}-A_{x_1}^{(1)})(P_u\otimes I)|_1 < \varepsilon.$$

Теорема 1.3.1. Семейство $\{A_x^{(1)}\}_{x\in X}(\subset\Lambda_p(X,Y))$ обладает огибающим оператором $A(\in\Lambda_p(X,Y))$ тогда и только тогда, когда оно локально полунепрерывно. При выполнении последнего условия огибающий оператор A определяется однозначно с точностью до слагаемого из $\mathcal{K}_p^1(X,Y)$, и имеет место равенство

$$|A|_1 = \sup\{q_1(A_x^{(1)},x),\ x\in X\}.$$

Доказательство этой теоремы лишь обозначениями отличается от доказательства теоремы 1.5.1 части А.

Аналогично определяется огибающий оператор по второй переменной. Мы не будем приводить очевидные переформулировки предшествующих определений и теоремы на этот случай. Возможен также вариант определений и теоремы об огибающем операторе с семейством, параметризованным точками множества $X\times Y$, отношением $\overset{(x,y)}{\sim}$ и полунормой $|\cdot|_{12}$.

Перейдем теперь к огибающему оператору для пары семейств.

Определение. Оператор $A(\in\Lambda_p(X,Y))$ назовем огибающим пары семейств $\{A_x^{(1)}\}_{x\in X}$, $\{A_y^{(2)}\}_{y\in Y}$ операторов из $\Lambda_p(X,Y)$, если для каждого $x(\in X)$ $A \overset{1,x}{\sim} A_x^{(1)}$, для каждого $y(\in Y)$ $A \overset{1,y}{\sim} A_y^{(2)}$.

Теорема 1.3.2. Пусть заданы семейства $\{A_x^{(1)}\}_{x\in X}$, $\{A_y^{(2)}\}_{y\in Y}$ операторов из $\Lambda_p(X,Y)$. Огибающий оператор из $\Lambda_p(X,Y)$ для этой пары семейств существует тогда и только тогда, когда они локально полунепрерывны, и для любых $x(\in X)$, $y(\in Y)$ $A_x^{(1)} \overset{(x,y)}{\sim} A_y^{(2)}$. Если эти условия выполняются, то огибающий оператор определяется однозначно с точностью до компактного слагаемого, и для него выполняется оценка

$$c|A| \le \max\left\{ \sup_{x\in X} q_1(A_x^{(1)},x),\ \sup_{y\in Y} q_2(A_y^{(2)},y) \right\} \le |A|$$

с константой $c(>0)$, не зависящей от семейств $\{A_x^{(1)}\}_{x\in X}$, $\{A_y^{(2)}\}_{y\in Y}$.

Доказательство. 1) Предположим, что для семейств $\{A_x^{(1)}\}_{x\in X}$, $\{A_y^{(2)}\}_{y\in Y}$ существует огибающий оператор A. Тогда он является огибающим семейства $\{A_x^{(1)}\}_{x\in X}$ по первой переменной. Из теоремы 1.3.1 следует локальная полунепрерывность этого семейства. Аналогично для второго семейства.

Выберем произвольную точку $(x,y)(\in X\times Y)$. По числу $\varepsilon(>0)$ найдем окрестности $u(\subset X)$, $v(\subset Y)$ точек x, y соответственно и операторы $T_1(\in\mathcal{K}_p^1(X,Y))$, $T_2(\in\mathcal{K}_p^2(X,Y))$ так, чтобы

$$\|(A-A_x^{(1)})(P_u\otimes I)-T_1\| < \frac{\varepsilon}{2},$$

$$\|(A-A_y^{(2)})(I\otimes P_v)-T_2\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Тогда

$$|(A_x^{(1)}-A_y^{(2)})(P_u\otimes P_v)|_{12} \le$$

$$\le \|(A_x^{(1)}-A_y^{(2)})(P_u\otimes P_v) + T_1(I\otimes P_v) - T_2(P_u\otimes I)\| \le$$

$$\le \|(A-A_x^{(1)})(P_u\otimes I) - T_1\|\cdot\|I\otimes P_v\| +$$

$$+ \|(A-A_y^{(2)})(I\otimes P_v) - T_2\|\cdot\|P_u\otimes I\| < \varepsilon.$$

Мы доказали, что для любой точки $(x,y)(\in X\times Y)$ $A_x^{(1)} \overset{(x,y)}{\sim} A_y^{(2)}$.

2) Докажем достаточность приведенных в формулировке условий.

В силу теоремы 1.3.1, для каждого из двух заданных семейств существует огибающий оператор по соответствующей переменной. Обозначим эти операторы через A_1 и A_2:

$$A_1,\ A_2\in\Lambda_p(X,Y);\ A \overset{1,x}{\sim} A_x^{(1)}\ (x\in X);\ A \overset{2,y}{\sim} A_y^{(2)}\ (y\in Y).$$

Зафиксируем точку $(x,y)(\in X\times Y)$. Выберем число $\varepsilon(>0)$ и найдем окрестности u_1, v_1 $(u_1\subset X,\ v_1\subset Y)$ точек x, y соответственно и операторы $T_1(\in\mathcal{K}_p^1(X,Y))$, $T_2(\in\mathcal{K}_p^2(X,Y))$ так, чтобы

$$\|(A_1-A_x^{(1)})(P_{u_1}\otimes I) - T_1\| < \frac{\varepsilon}{3},$$

$$\|(A_2-A_y^{(2)})(I\otimes P_{v_1}) - T_2\| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

По условию найдутся окрестности u_2, v_2 точек x, y соответственно и оператор $T_3(\in\mathcal{K}_p^{12}(X,Y))$, такие, что

$$\|(A_x^{(1)}-A_y^{(2)})(P_{u_2}\otimes P_{v_2}) - T_3\| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Обозначим: $u_0=u_1\cap u_2$, $v_0=v_1\cap v_2$. Тогда

$$|(A_1-A_2)(P_{u_0}\otimes P_{v_0})|_{12} \le$$

$$\le \|((A_1-A_x^{(1)})(P_{u_1}\otimes I) - T_1)(P_{u_0}\otimes P_{v_0}) +$$

$$+ ((A_x^{(1)}-A_y^{(2)})(P_{u_2}\otimes P_{v_2}) - T_3)(P_{u_0}\otimes P_{v_0}) -$$

$$- ((A_2-A_y^{(2)})(I\otimes P_{v_1}) - T_2)(P_{u_0}\otimes P_{v_0})\| < \varepsilon,$$

то есть $(A_1-A_2) \overset{(x,y)}{\sim} 0$.

Поскольку $(A_1-A_2)\in\Lambda_p(X,Y)$, из следствия 3 предложения 1.3.1 получаем, что $(A_1-A_2)\in\mathcal{K}_p^{12}(X,Y)$. Тогда $A_1-A_2 = T_1'-T_2'$, где $T_1'\in\mathcal{K}_p^{1}(X,Y)$, $T_2'\in\mathcal{K}_p^{2}(X,Y)$.

В силу следствия 1 предложения 1.3.1, оператор $A= =A_1-T_1'=A_2-T_2'$ является искомым огибающим обоих семейств. Единственность оператора A вытекает из следствия 2 предложения 1.3.1, оценку его существенной нормы получаем из теоремы 1.3.1 и леммы 1.1.6.

Теорема полностью доказана.

ГЛАВА 2. АЛГЕБРА БИСИНГУЛЯРНЫХ ОПЕРАТОРОВ

1°. *Бисингулярные интегральные операторы.*

Пусть Γ - простая замкнутая кривая типа Ляпунова[1] в комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Контур Γ разбивает расширенную комплексную плоскость на две области D_Γ^+ и D_Γ^-, границей каждой из которых он является. Мы предполагаем, что $\infty\in D_\Gamma^-$. Очевидно, что контур Γ с топологией, индуцированной из $\mathbb{C}$, и линейной лебеговой мерой удовлетворяет условиям главы 1. Слово "контур" и обозначения Γ, $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots$ всюду далее означают контуры, удовлетворяющие указанным выше условиям. Для $n (\in\mathbb{N})$ обозначим

$$\Gamma^n = \underbrace{\Gamma\times\Gamma\times\ldots\times\Gamma}_{n \text{ раз}} .$$

Через Γ_0 всюду далее мы обозначаем единичную окружность

$$\Gamma_0 = \{t:\ t\in\mathbb{C},\ |t|=1\}.$$

Пусть $n\in\mathbb{N}$, $1\le k\le n$, $1\le i_1\le i_2\le\ldots\le i_k\le n$, $0<\lambda<1$. Обозначим через $H_\lambda^{(i_1,\ldots i_k)}(\Gamma_1\times\Gamma_2\times\ldots\times\Gamma_n)$ множество всех определенных на $\Gamma_1\times\Gamma_2\times\ldots\times\Gamma_n$ непрерывных комплекснозначных функций, удовлетворяющих по каждой переменной t_{i_1}, $t_{i_2}, \ldots t_{i_k}$ условию Гельдера порядка λ равномерно по остальным переменным. В линейном пространстве $H_\lambda^{(i_1,\ldots i_k)}(\Gamma_1\times\Gamma_2\times\ldots\times\Gamma_n)$ определим

=====================================

[1] Говорят, что гладкая линия Γ удовлетворяет условию Ляпунова, если функция $\theta_\Gamma(t)$ $(t\in\Gamma)$, равная величине угла наклона касательной к кривой Γ в точке t к оси абсцисс, удовлетворяет на Γ условию Гельдера ([3], с.14, [17], с. 28).

норму формулой:

$$\|f\|_\lambda^{(i_1,\dots i_k)} = \max\{|f(t)|:\ t\in\Gamma_1\times\dots\times\Gamma_n\} +$$

$$+\sum_{p=1}^{k} \sup \frac{|(\Delta_p f)(t_1,\dots t_{i_p-1},t'_{i_p},t''_{i_p},t_{i_p+1},\dots t_n)|}{|t'_{i_p}-t''_{i_p}|^\lambda},$$

где

$$(\Delta_p f)(t_1,\dots t_{i_p-1},t'_{i_p},t''_{i_p},t_{i_p+1},\dots t_n) \overset{def}{=}$$

$$= |f(t_1,\dots t_{i_p-1},t'_{i_p},t_{i_p+1},\dots t_n)-$$

$$-f(t_1,\dots t_{i_p-1},t''_{i_p},t_{i_p+1},\dots t_n)|,$$

$t=(t_1,t_2\dots t_n)$, при каждом $p(=1,\dots k)$ верхняя грань под знаком суммы берется по всем $t_1(\in\Gamma_1)$, $t_2(\in\Gamma_2),\dots t'_{i_p}$, $t''_{i_p}(\in\Gamma_{i_p}),\dots t_n(\in\Gamma_n)$, причем $t'_{i_p}\neq t''_{i_p}$.

Если ясно, какое пространство имеется в виду, будем обозначать эту норму $\|f\|_\lambda$. Вместо $H_\lambda^{(1,\dots n)}(\Gamma_1\times\Gamma_2\times\dots\times\Gamma_n)$ будем писать $H_\lambda(\Gamma_1\times\Gamma_2\times\dots\times\Gamma_n)$. Отметим, что при $0<\mu<\lambda<1$ имеет место непрерывное вложение

$$H_\lambda^{(i_1,\dots i_k)}(\Gamma_1\times\Gamma_2\times\dots\times\Gamma_n) \subset H_\mu^{(i_1,\dots i_k)}(\Gamma_1\times\Gamma_2\times\dots\times\Gamma_n).$$

Обозначим также

$$H_{\lambda-0}(\Gamma_1\times\Gamma_2\times\dots\times\Gamma_n) = \bigcap_{0<\mu<\lambda} H_\mu(\Gamma_1\times\Gamma_2\times\dots\times\Gamma_n).$$

Обозначим через $\mathcal{P}_n$ множество всех тригонометрических полиномов от n переменных, то есть определенных на Γ_0^n функций вида

$$f(t) = \sum_{m\in\mathbb{Z}^n} a_m t^m,\ t\in\Gamma_0^n,$$

где $m=(m_1,\dots m_n)$, $t=(t_1,\dots t_n)$, $t^m=t^{m_1}\dots t^{m_n}$, коэффициенты $a_m(\in\mathbb{Z}^n)$ принимают комплексные значения и равны нулю, если

$|m_1|+\ldots|m_n|>N(=N(f))$.

Справедливо следующее утверждение.

Лемма 2.1.1.[1] Пусть $f\in H_\lambda^{(i_1,\ldots i_k)}(\Gamma_1\times\Gamma_2\times\ldots\times\Gamma_n)$. Тогда существует последовательность определенных на $\Gamma_1\times\Gamma_2\times\ldots\times\Gamma_n$ функций $\{f_r\}_{r=1}^{\infty}$, обладающая такими свойствами: каждая из этих функций представима в виде конечной суммы

$$f_r(t_1,\ldots t_n) = \sum_i a_{r1i}(t_1)a_{r2i}(t_2)\ldots a_{rni}(t_n), \quad (2.1.1)$$

где функции $a_{rji}(t_j)$ непрерывно дифференцируемы по $t_j(\in\Gamma_j)$, и для любого μ $(0<\mu<\lambda)$ $\lim\limits_{r\to\infty}\|f - f_r\|_\mu^{(i_1,\ldots i_k)} = 0$.

Докажем сначала следующие два вспомогательных утверждения.

Лемма 2.1.2. Пусть $0<\mu<\lambda<1$. Тогда существует такая константа $c_0=c_0(\lambda,\mu,n,k)$, что для любой функции

$$f(\in H_\lambda^{(i_1,\ldots i_k)}(\Gamma_0^n))$$

выполняется оценка

$$\|f\|_\mu^{(i_1,\ldots i_k)} \le c_0\ \|f\|_C^{1-t}\cdot\Big(\ \|f\|_\lambda^{(i_1,\ldots i_k)}\ \Big)^t,$$

где $t=\mu/\lambda$.

Доказательство. Ограничимся случаем пространства $H_\lambda(\Gamma_0)$. Общий случай отличается от него лишь более громоздкими обозначениями и несущественными деталями.

Легко видеть, что для каждого $\alpha(>0)$ существует такая константа $c_\alpha(<\infty)$, что для любых x, $y(\ge 0)$

[1] Идею доказательства этого утверждения любезно предложил автору И.Б.Симоненко.

$$(x+y)^{\alpha} \le c_{\alpha}(x^{\alpha}+y^{\alpha}).$$

В последующих оценках константы зависят только от λ и μ. Для $f(\in H_{\lambda}(\Gamma_0))$, учитывая указанную оценку, имеем:

$$\|f\|_{\mu}^{1/t} = \left(\|f\|_C + \sup_{t'\ne t} \frac{|f(t')-f(t'')|}{|t'-t''|^{\mu}} \right)^{1/t} \le$$

$$\le const \left(\|f\|_C^{1/t} + \sup_{t'\ne t} \frac{|f(t')-f(t'')|^{1/t}}{|t'-t''|^{\lambda}} \right) \le$$

$$\le const \ \|f\|_C^{1/t-1} \left(\|f\|_C + \sup_{t'\ne t} \frac{|f(t')-f(t'')|}{|t'-t''|^{\lambda}} \right) =$$

$$= const \ \|f\|_C^{1/t-1} \ \|f\|_{\lambda}.$$

Мы получили требуемую оценку.

Лемма доказана.

Лемма 2.1.3. Пусть $f\in H_{\lambda}^{(i_1,\dots i_k)}(\Gamma_0^n)$, $0<\lambda<1$. Тогда существует такая последовательность $\{f_r\}_{r=1}^{\infty}(\subset P_n)$, что для любого $\mu(0<\mu<\lambda)$

$$\lim_{r\to\infty} \|f-f_r\|_{\mu}^{(i_1,\dots i_k)}=0.$$

Доказательство. Здесь мы снова используем обозначения:

$$t=(t_1,\dots t_n)\in\Gamma_0^n,\ m=(m_1,\dots m_n)\in\mathbb{Z}^n,\ t^m=t^{m_1}\dots t^{m_n}.$$

Пусть $T_h^{(p)}(p=1,\dots n;\ -\infty<h<\infty)$ -оператор, действующий в $C(\Gamma_0^n)$ по формуле:

$$T_h^{(p)}:\ f(t_1,\dots t_n) \to f(t_1,\dots t_{p-1},e^{ih}t_p,t_{p+1},\dots t_n),$$

P_r $(r=1,\ 2,\dots)$ - оператор, действующий в $C(\Gamma_0^n)$ и сопоставляющий функции $f(t)$ фейеровские средние ее ряда Фурье по формуле

$$P_r:\ f(t) \to \frac{1}{(r+1)^n} \sum_{l=0}^{r} \sum_{\substack{|m_i|\le l,\\ 1\le i\le n}} f_m t^m,\ t\in\Gamma_0^n,$$

где $f_m (m\in\mathbb{Z}^n)$ - коэффициенты ряда Фурье функции f:

$$f(t) \sim \sum_{m\in\mathbb{Z}} f_m t^m, \quad t\in\Gamma_0^n.$$

Из определения оператора P_r следует, что $[P_r, T_h^{(p)}]=0$ для всех $r(\in\mathbb{N})$, $p(=1,\ldots n)$, $h(\in(-\infty,\infty))$.

Функции $f(\in H_\lambda^{(i_1,\ldots i_k)}(\Gamma_0^n))$ сопоставим последовательность тригонометрических полиномов $f_r=P_r f$, $r=1,2,\ldots$ Докажем сходимость f_r к f при $r\to\infty$ в метрике пространства $H_\mu^{(i_1,\ldots i_k)}(\Gamma_0^n)$ при любом μ $(0<\mu<\lambda)$.

В силу леммы 2.1.2, сходимость будет доказана, если мы убедимся в том, что

$$\lim_{r\to\infty} \|f - f_r\|_C = 0,$$

$$\sup_{r\ge 1} \|f - f_r\|_\lambda^{(i_1,\ldots i_k)} < \infty. \qquad (2.1.2)$$

Первое соотношение следует из аналога теоремы Фейера для кратных рядов Фурье ([10], с. 456, теорема 1.20). Тогда

$$\sup_{r\ge 1} \|I - P_r\|_C < \infty.$$

Здесь I- единичный оператор в $C(\Gamma_0^n)$, $\|\cdot\|_C$ - норма оператора, действующего в пространстве $C(\Gamma_0^n)$.

Для доказательства оценки (2.1.2) нам остается убедиться в том, что для $m=1,\ldots k$

$$\sup \left\{ \frac{\|(T_h^{(i_m)}-I)(f-f_r)\|_C}{|h|^\lambda} : r\geq 1,\ h\in\mathbb{R},\ h\neq 0 \right\} < \infty.$$

Имеем:

$$\|(T_h^{(i_m)}-I)(f-f_r)\|_C=\|(T_h^{(i_m)}-I)(I-P_r)f\|_C=\|(I-P_r)(T_h^{(i_m)}-I)f\|_C\leq$$

$$\leq \sup_{s\geq 1} \|I-P_s\|_C\cdot\|(T_h^{(i_m)}-I)f\|_C \leq const\ |h|^\lambda,$$

где константа не зависит от r и h.

Отсюда следует требуемая оценка.

Лемма доказана.

Лемма 2.1.1 очевидным образом выводится из леммы 2.1.3 с помощью замены переменных.

Перейдем теперь к основному объекту этого пункта - бисингулярным интегральным операторам.

Рассмотрим действующий в пространстве $L_p(\Gamma_1\times\Gamma_2)$ интегральный оператор следующего вида:

$$\begin{aligned}(Af)(t_1,t_2) &= a_0(t_1,t_2)\ f(t_1,t_2)\ + \\ &+ \frac{1}{\pi i}\int\limits_{\Gamma_1} \frac{a_1(t_1,\tau_1,t_2)}{\tau_1-t_1}\ f(\tau_1,t_2)\ d\tau_1\ + \\ &+ \frac{1}{\pi i}\int\limits_{\Gamma_2} \frac{a_2(t_1,t_2,\tau_2)}{\tau_2-t_2}\ f(t_1,\tau_2)\ d\tau_2\ + \\ &+\left(\frac{1}{\pi i}\right)^2\int\limits_{\Gamma_1}\int\limits_{\Gamma_2} \frac{a_{12}(t_1,\tau_1,t_2,\tau_2)}{(\tau_1-t_1)(\tau_2-t_2)}\ f(\tau_1,\tau_2)\ d\tau_1 d\tau_2,\end{aligned} \tag{2.1.3}$$

где $f\in L_p(\Gamma_1\times\Gamma_2)$, $t_1\in\Gamma_1$, $t_2\in\Gamma_2$, определяющие оператор функции

a_0, a_1, a_2 a_{12} удовлетворяют следующим условиям: $a_0 \in C(\Gamma_1\times\Gamma_2)$, $a_1 \in H_\lambda^{(2)}(\Gamma_1^2\times\Gamma_2)$, $a_2 \in H_\lambda^{(3)}(\Gamma_1\times\Gamma_2^2)$, $a_{12} \in H_\lambda^{(2,4)}(\Gamma_1^2\times\Gamma_2^2)$, $(0<\lambda<1)$, интегралы понимаются в смысле главного значения по Коши[1].

Если функции a_1, a_2, a_{12} в выражении (2.1.3) не зависят соответственно от τ_1, τ_2, (τ_1,τ_2), то их можно вынести из-под интегралов. Такой оператор называется *бисингулярным интегральным оператором с внешними (непрерывными) коэффициентами*.

Пусть S - действующий в $L_p(\Gamma)$ $(1<p<\infty)$ оператор сингулярного интегрирования [3]

$$(Sf)(t) = \frac{1}{\pi i}\int\limits_\Gamma \frac{f(\tau)}{\tau-t}\,d\tau,\ f\in L_p(\Gamma),\ t\in\Gamma,$$

где интеграл понимается в смысле главного значения по Коши. Введем связанные с оператором S стандартные проекторы в $L_p(\Gamma)$: $P_\pm = \frac{1}{2}(I\pm S)$. Очевидно, что S, $P_\pm\in\Lambda_p(\Gamma)$. Мы будем обозначать через S, $P_\pm$ такие же операторы, действующие в $L_p(\Gamma_1)$, $L_p(\Gamma_2)$. Из контекста всегда будет ясно, какой контур имеется в виду. Определим следующие операторы, действующие в $L_p(\Gamma_1\times\Gamma_2)$:

$$P_{+\pm} = P_+\otimes P_\pm,\ P_{-\pm} = P_-\otimes P_\pm.$$

Отметим, что бисингулярный интегральный оператор с внешними коэффициентами может быть однозначно представлен в виде

===================================

[1] Существование этих интегралов в смысле главного значения по Коши легко сводится к аналогичному вопросу для одномерного сингулярного интегрального оператора по аналогии с преобразованиями, указанными пв доказательстве приводимой ниже теоремы 2.1.1.

$$A = a_{++}P_{++} + a_{+-}P_{+-} + a_{-+}P_{-+} + a_{--}P_{--},$$

где функции $a_{\pm\pm}\in C(\Gamma_1\times\Gamma_2)$.

Справедливо такое утверждение.

Теорема 2.1.1. Интегральный оператор A вида (2.1.3) принадлежит классу $\Lambda_p(\Gamma_1\times\Gamma_2)$ и для любых $t_1^0\in\Gamma_1$, $t_2^0\in\Gamma_2$ удовлетворяет следующим условиям:

$$A \overset{1,t_1^0}{\sim} P_+\otimes A_1^+(t_1^0) + P_-\otimes A_1^-(t_1^0),$$

$$A \overset{2,t_2^0}{\sim} A_2^+(t_2^0)\otimes P_+ + P_-\otimes A_2^-(t_2^0)\otimes P_-,$$

где операторы $A_1^\pm(t_1^0)$, $(A_2^\pm(t_2^0))$ являются полными сингулярными интегральными операторами в $L_p(\Gamma_1)$ $(L_p(\Gamma_2))$ вида

$$(A_1^\pm(t_1^0)g)(t_2) = (a_0(t_1^0,t_2)\pm a_1(t_1^0,t_1^0,t_2))g(t_1) +$$

$$+ \frac{1}{\pi i}\int_{\Gamma_2} \frac{a_2(t_1^0,t_2,\tau_2)\pm a_{12}(t_1^0,t_1^0,t_2,\tau_2)}{\tau_2-t_2}\, g(\tau_2)\, d\tau_2,$$

$g\in L_p(\Gamma_2)$, $t_2\in\Gamma_2$;

$$(A_2^\pm(t_2^0)h)(t_1) = (a_0(t_1,t_2^0)\pm a_2(t_1,t_2^0,t_2^0))h(t_1) +$$

$$+ \frac{1}{\pi i}\int_{\Gamma_1} \frac{a_2(t_1,\tau_1,t_2^0)\pm a_{12}(t_1,\tau_1,t_2^0,t_2^0)}{\tau_1-t_1}\, h(\tau_1)\, d\tau_1,$$

$h\in L_p(\Gamma_1)$, $t_1\in\Gamma_1$.

Доказательство. Для оператора вида (2.1.3) справедлива оценка

$$\|A\|_p \le c_{\lambda,p}\,(\|a_0\|_C + \|a_1\|_\lambda^{(2)} + \|a_2\|_\lambda^{(3)} + \|a_{12}\|_\lambda^{(2,4)}),$$

где константа $c_{\lambda,p}$ зависит только от числа p и λ. Доказательство этой оценки проводится путем рассмотрения отдельно каждого из четырех слагаемых. Для первого слагаемого оценка очевидна. Второе и третье слагаемое оцениваются путем выделения характеристической части сингулярного интегрального оператора. Используя для функции a_{12} представление

$$a_{12}(t_1,\tau_1,t_2,\tau_2) = (a_{12}(t_1,\tau_1,t_2,t_2) - a_{12}(t_1,t_1,t_2,t_2)) + \\ +(a_{12}(t_1,t_1,t_2,\tau_2) - a_{12}(t_1,t_1,t_2,t_2)) + (a_{12}(t_1,\tau_1,t_2,\tau_2) - \\ - a_{12}(t_1,\tau_1,t_2,t_2) - a_{12}(t_1,t_1,t_2,\tau_2) + a_{12}(t_1,t_1,t_2,t_2)) + \\ + a(t_1,t_1,t_2,t_2)$$

([1], гл. 1, пункт 9.5), получаем оценку нормы четвертого слагаемого.

Утверждения теоремы тривиальны в случае, когда

$$a_0 \in C(\Gamma_1)\otimes C(\Gamma_2), \qquad a_1 \in C(\Gamma_1)\otimes H_\lambda(\Gamma_1)\otimes C(\Gamma_2),$$
$$a_2 \in C(\Gamma_1)\otimes C(\Gamma_2)\otimes H_\lambda(\Gamma_2), \qquad a_{12} \in C(\Gamma_1)\otimes H_\lambda(\Gamma_1)\otimes C(\Gamma_2)\otimes H_\lambda(\Gamma_2).$$

В общем случае они выводятся отсюда с помощью указанной оценки нормы и леммы 2.1.1.

Теорема доказана.

2°. *Вспомогательные сведения.*

В этом пункте приводятся некоторые используемые в дальнейшем вспомогательные результаты.

Определение. Оператор $A(\in\mathcal{B}(\mathfrak{X}))$ называется ограниченным снизу, если существует такое число $\alpha(>0)$, что для всех $x(\in\mathfrak{X})$ $\|Ax\|\ge\alpha\|x\|$.

Ограниченность снизу оператора A равносильна тому, что величина

$$d_A \stackrel{def}{=} \inf\{\|Ax\|:\ x\in\mathfrak{X},\ \|x\|=1\}$$

положительна. Из теоремы Банаха об обратном операторе следует, что оператор $A(\in\mathcal{B}(\mathfrak{X}))$ ограничен снизу тогда и только тогда, когда он имеет тривиальное ядро и замкнутый образ. Отсюда получаем, что обратимость оператора $A(\in\mathcal{B}(\mathfrak{X}))$ равносильна ограниченности снизу операторов A и $A^*(\in\mathcal{B}(\mathfrak{X}^*))$.

Лемма 2.2.1. Пусть операторы A, B, P, $T(\in\mathcal{B}(\mathfrak{X}))$ удовлетворяют соотношению

$$BAP = P+T \tag{2.2.1}$$

и выполняется следующее условие: для любых $x(\in\mathfrak{X})$, $\varepsilon(>0)$ найдется такой изометрический оператор $U(\in\mathcal{B}(\mathfrak{X}))$, что $\|TUx\|<\varepsilon$, $\|PUx-Ux\|<\varepsilon$, $\|AU-UA\|<\varepsilon$. Тогда оператор A ограничен снизу.

Доказательство. Допустим, что условия леммы выполнены и предположим, что оператор A неограничен снизу. Выберем такой элемент $x(\in\mathfrak{X})$, что $\|x\|=1$, $\|B\|\cdot\|Ax\|<1/5$. Найдем изометрический оператор $U(\in\mathcal{B}(\mathfrak{X}))$, для которого

$$\|TUx\|<1/5,\ \|PUx-Ux\|<1/5,\ \|BA\|\cdot\|PUx-Ux\|<1/5,$$
$$\|B\|\cdot\|AU-UA\|<1/5.$$

Тогда из (2.2.1) получаем:

$$BAPUx = PUx + TUx. \tag{2.2.2}$$

Имеем оценки:

$$\|BAPUx\|\le\|BAUx\|+\|BA\|\cdot\|PUx - Ux\|<$$
$$<\|BUAx\| + \|B\|\cdot\|AU - UA\| + 1/5 <$$
$$< \|B\|\cdot\|Ax\| + 2/5 < 3/5\ ;$$
$$\|PUx + TUx\| \ge \|Ux\| - \|PUx - Ux\| - \|TUx\| \ge 3/5.$$

Полученные оценки противоречат (2.2.2).

Лемма доказана.

Замечание. Доказанное утверждение охватывает большинство ситуаций, возникающих в приложениях локального подхода: из некоторого локального свойства оператора требуется вывести его обратимость. При этом оператор обычно удовлетворяет некоторым условиям коммутирования или "почти коммутирования" ($\|AU-UA\|<\varepsilon$). В данном контексте лемма 2.2.1 используется лишь в доказательстве леммы 2.2.2, причем в простейшей ситуации: $T=0$, A коммутирует со всеми рассматриваемыми изометрическимим операторами U.

Рассмотрим действующий в пространстве $L_p(\mathbb{R})$ изометрический оператор U_λ $(\lambda>0)$:

$$U_\lambda:\ f(x) \dashrightarrow \lambda^{1/p}\cdot f(\lambda x),\ x\in\mathbb{R}.$$

Число p считаем фиксированным. Поэтому зависимость U_λ от p не отмечается.

Пусть Y - топологическое пространство с мерой, удовлетворяющее условиям пункта 1° главы 1.

Определение. Линейный оператор $A(\in\mathcal{B}_p(\mathbb{R}\times Y))$ назовем однородным по первой переменной, если для всех $\lambda(>0)$

$$(U_\lambda\otimes I)A = A(U_\lambda\otimes I).$$

Напомним, что *однородным* [26] называется оператор A $(\in\mathcal{B}_p(\mathcal{R}))$, удовлетворяющий условию $AU_\lambda=U_\lambda A$ для любого $\lambda(>0)$. Очевидно, что оператор $S_\mathbb{R}$ сингулярного интегрирования в пространстве $L_p(\mathbb{R})$

$$(S_\mathbb{R}f)(x) = \frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(y)}{y-x}\,dy,\ x\in\mathbb{R}$$

является однородным. Тогда однородными являются и связанные с ним проекторы $\tilde{P}_\pm \overset{def}{=} \frac{1}{2}(I_\mathbb{R} \pm S_\mathbb{R})$. Отсюда следует, что для любых A_+, $A_-(\in\mathcal{B}_p(Y))$ оператор $A = \tilde{P}_+\otimes A_+ + \tilde{P}_-\otimes A_-$ $(\in\mathcal{B}_p(\mathbb{R}\times Y))$ однороден по первой переменной.

Ниже мы будем использовать одноточечную компактификацию

$\dot{\mathbb{R}}(\in\mathbb{R}\cup\{\infty\})$ вещественной прямой $\mathbb{R}$. Напомним, что по определению фундаментальную систему окрестностей точки ∞ в $\dot{\mathbb{R}}$ образуют множества вида $\dot{\mathbb{R}}\setminus K$, где K - замкнутое ограниченное множество в $\mathbb{R}$. Лебегову меру продолжаем на $\dot{\mathbb{R}}$, полагая меру множества $\{\infty\}$ равной нулю. Поэтому можно отождествить пространства $L_p(\mathbb{R})$ и $L_p(\dot{\mathbb{R}})$ и, следовательно, алгебры $\mathcal{B}_p(\mathbb{R})$ и $\mathcal{B}_p(\dot{\mathbb{R}})$. Отметим, что оператор $S_{\mathbb{R}}$ принадлежит классу $\Lambda_p(\dot{\mathbb{R}})$.

Рассмотрим локализующий класс

$$\tilde{M}'_0 = \{\varphi I_{\mathbb{R}}\otimes I_Y + \mathcal{K}^1_p(\dot{\mathbb{R}},Y):\ \varphi\in\mathfrak{M}_0(\dot{\mathbb{R}})\}$$

в алгебре $\Lambda_p(\dot{\mathbb{R}},Y)/\mathcal{K}^1_p(\dot{\mathbb{R}},Y)$.[1]

Лемма 2.2.2. Пусть $A(\in\Lambda_p(\dot{\mathbb{R}},Y))$ - оператор, однородный по первой переменной. Если смежный класс

$$A + \mathcal{K}^1_p(\dot{\mathbb{R}},Y)\ \ (\in\Lambda_p(\dot{\mathbb{R}},Y)/\mathcal{K}^1_p(\dot{\mathbb{R}},Y))$$

обобщенно $\tilde{M}'_0$ - обратим, то оператор A обратим.

Доказательство. По определению обобщенной $\tilde{M}'_0$-обратимости смежного класса $A + \mathcal{K}^1_p(\dot{\mathbb{R}},Y)$ слева, существуют оператор $B(\in\mathcal{B}_p(\mathbb{R}\times Y))$ и функция $\varphi(\in\mathfrak{M}_0(\dot{\mathbb{R}}))$ такие, что

$$BA(\varphi I_{\mathbb{R}}\otimes I_Y) = \varphi I_{\mathbb{R}}\otimes I_Y.$$

Обозначим $P = \varphi I_{\mathbb{R}}\otimes I_Y$, и перепишем последнее равенство в виде $BAP = P$. Покажем, что для операторов B, A, P выполняются условия леммы 2.2.1.

Выберем функцию $f(\in L_p(\mathbb{R}\times Y))$ и число $\varepsilon(>0)$. Найдем $f_0(\in L_p(\mathbb{R}\times Y))$, удовлетворяющую условию $\|f-f_0\|<\varepsilon/2$ и имеющую носитель в множестве $[-N;N]\times Y$ при некотором $N(>0)$. Тогда для всех $\lambda>\lambda_0(=\lambda_0(N,\varphi))$

---

1 Класс $\mathfrak{M}_0$ определен в пункте 2° главы 1.

$$\mathrm{supp}(U_\lambda \otimes I)f_0 \subset \varphi^{-1}(\{1\})\times Y.$$

Для любого $\lambda(>\lambda_0)$ условиям леммы 2.2.1 удовлетворяет оператор $U = U_\lambda \otimes I$. В силу леммы 2.2.1, A ограничен снизу.

Аналогично доказывается ограниченность снизу оператора A^*.

Лемма доказана.

Замечание. Лемма 2.2.2 является обобщением теоремы 1.2 из [26], в которой рассматриваются однородные операторы.

Пусть $\Gamma(\subset\mathbb{C})$ - контур, удовлетворяющий условиям, наложенным в п. 1°, S_Γ - оператор сингулярного интегрирования в пространстве $L_p(\Gamma)$, $P_\pm = \frac{1}{2}(I_\Gamma \pm S_\Gamma)$, Y - то же, что и выше.

Рассмотрим действующий в пространстве $L_p(\Gamma\times Y)$ оператор A следующего вида:

$$A = P_+ \otimes A_+ + P_- \otimes A_-, \tag{2.2.3}$$

где A_+, $A_- \in \Lambda_p(Y)$. Тогда $A\in\Lambda_p(\Gamma,Y)$. Напомним также, что для $t(\in\Gamma)$ локализующий класс $M'_t(\subset\Lambda_p(\Gamma,Y))$ состоит из всех смежных классов вида

$$\varphi I_\Gamma \otimes I_Y + \mathcal{K}_p^1(\Gamma,Y),\ \varphi\in\mathfrak{M}_t(\Gamma).$$

Пусть A - оператор вида (2.2.3), $t\in\Gamma$. Справедливо такое утверждение.

Теорема 2.2.1. Следующие условия равносильны:

1) оператор A обратим;

2) операторы A_+ и A_- обратимы;

3) смежный класс $A+\mathcal{K}_p^1(\Gamma,Y)(\in\Lambda_p(\Gamma,Y)/\mathcal{K}_p^1(\Gamma,Y))$ M'_t - обратим;

4) смежный класс $A+\mathcal{K}_p^1(\Gamma,Y)(\in\Lambda_p(\Gamma,Y)/\mathcal{K}_p^1(\Gamma,Y))$ обобщенно M'_t - обратим.

Доказательство. 1) $\Rightarrow$ 2). Пусть оператор A обратим. Тогда $d_A>0$. Выберем такую функцию $\varphi(\in L_p(\Gamma))$, что $P_+\varphi=\varphi$, $\|\varphi\|=1$. Тогда для любой $g\in L_p(Y)$ $A(\varphi\otimes g) = \varphi\otimes A_+g$, $\|A(\varphi\otimes g)\| = = \|A_+g\|$ и

$$d_A = \inf\{\|Af\|: f\in L_p(\Gamma\times Y),\ \|f\|=1\}\le$$

$$\le \inf\{\|A(\varphi\otimes g)\|: g\in L_p(Y),\ \|g\|=1\} =$$

$$= \inf\{\|A_+g\|: g\in L_p(Y),\ \|g\|=1\} = d_{A_+},$$

следовательно, $d_{A_+}>0$, оператор A_+ ограничен снизу. Аналогично получаем, что ограничен снизу оператор A_+^*, то есть A_+ обратим. Так же доказывается обратимость оператора A_-.

2) $\Rightarrow$ 3). Если операторы A_+, A_- обратимы, то, в силу теоремы 1.4.2 части 1, A_+^{-1}, $A_-^{-1}\in\Lambda_p(Y)$. Тогда оператор $P_+\otimes A_+^{-1}$ + $P_-\otimes A_-^{-1}\in\Lambda_p(\Gamma,Y)$. Он является обратным к A, то есть A обратим в $\Lambda_p(\Gamma,Y)$. Отсюда вытекает, что смежный класс A + $\mathcal{K}_p^1(\Gamma,Y)(\in\Lambda_p(\Gamma,Y)/\mathcal{K}_p^1(\Gamma,Y))$ обратим, и, следовательно, M'_t - обратим.

Импликация 3) $\Rightarrow$ 4) следует из определений локальной и обобщенной локальной обратимости (глава 1).

4) $\Rightarrow$ 1). Рассмотрим касательную к контуру Γ в точке t. Отождествим эту касательную с вещественной прямой $\mathbb{R}$, совмещая начало координат на $\mathbb{R}$ с точкой t. Пусть $u(\subset\Gamma)$ - окрестность точки t, являющаяся разомкнутой кривой, $\alpha(u\to\mathbb{R})$ - изометрическое отображение, разворачивающее эту окрестность на $\mathbb{R}$. Будем предполагать, что при отображении α положительное направление на u переходит в положительное направление на $\mathbb{R}$. Тогда имеет место квазиэквивалентность (часть А, 1, пункт 8°):

$$I_\Gamma \overset{t}{\sim}{}_\alpha \overset{0}{\sim} I_{\mathbb{R}},\quad S_\Gamma \overset{t}{\sim}{}_\alpha \overset{0}{\sim} S_{\mathbb{R}},$$

поэтому

$$P_{\pm} \overset{t}{\sim}_{\alpha} \overset{0}{\sim} \tilde{P}_{\pm}\,[1].$$

и далее:

$$P_{+}\otimes A_{+} + P_{-}\otimes A_{-} \overset{t}{\sim}_{1,\alpha} \overset{0}{\sim} \tilde{P}_{+}\otimes A_{+} + \tilde{P}_{-}\otimes A_{-}.$$

Из леммы 1.2.2 следует, что смежный класс

$$\tilde{P}_{+}\otimes A_{+}+\tilde{P}_{-}\otimes A_{-}+\mathcal{K}_{p}^{1}(\dot{\mathbb{R}},Y)(\in\Lambda_{p}(\dot{\mathbb{R}},Y)/\mathcal{K}_{p}^{1}(\dot{\mathbb{R}},Y))$$

обобщенно $\tilde{M}'_{t}$ - обратим. Оператор $\tilde{P}_{+}\otimes A_{+}+\tilde{P}_{-}\otimes A_{-}$ однороден по первой переменной. Из леммы 2.2.2 следует, что этот оператор обратим.

Теорема доказана.

Пусть X - компактное хаусдорфово топологическое пространство, $\mathfrak{A}$ - некоторая банахова алгебра. Через $C(X,\mathfrak{A})$ обозначим множество всех непрерывных по норме вектор-функций $f(X\to\mathfrak{A})$. Множество $C(X,\mathfrak{A})$ с естественными операциями и нормой $\|f\|_{C} = \max\{\|f(x)\|_{\mathfrak{A}} : x\in X\}$ является банаховой алгеброй.

Пусть $A(t_1)\in C(\Gamma_1,\mathcal{B}_p(\Gamma_2))$. Рассмотрим линейный оператор $\hat{A}(\cdot)$, действующий в $L_p(\Gamma_1\times\Gamma_2)$ по формуле

$$(\hat{A}(\cdot)f)(t_1,t_2) = (A(t_1)f)(t_1,\cdot))(t_2),\ f\in L_p(\Gamma_1\times\Gamma_2),$$

$t_1\in\Gamma_1$, $t_2\in\Gamma_2$.

Справедливо такое утверждение.

Лемма 2.2.3. Пусть $A(t_1)\in C(\Gamma_1,\mathcal{B}_p(\Gamma_2))$. Тогда $\hat{A}(\cdot)\in$ $\in\mathcal{B}_p(\Gamma_1\times\Gamma_2)$, причем

$$\|\hat{A}(\cdot)\| = \max_{t_1\ \Gamma_1} \|A(t_1)\|.$$

Если $A(t_1)\in C(\Gamma_1,\Lambda_p(\Gamma_2))$, то $\hat{A}(\cdot)\in\Lambda_p(\Gamma_1\times\Gamma_2)$ и для каждого

[1] Мы не доказываем эту квазиэквивалентность. Близкие построения в более общей ситуации многомерных сингулярных интегральных операторов приведены в [25], 4, п. 3.

$t_1 \in \Gamma_1$

$$\widehat{A}(\cdot) \overset{1,t_1}{\sim} I \otimes A(t_1).$$

Если $A(t_1) \in C(\Gamma_1, \mathcal{K}_p(\Gamma_2))$, то $\widehat{A}(\cdot) \in \mathcal{K}_p^2(\Gamma_1 \times \Gamma_2)$.

Доказательство этого утверждения элементарно, и мы его опускаем.

3^0. *Бисингулярные операторы.*

Приведем сначала некоторые сведения о сингулярных интегральных операторах с непрерывными коэффициентами [1, 3, 17].

Через $\mathfrak{A}_p(\Gamma)$ мы обозначаем множество всех действующих в $L_p(\Gamma)$ полных сингулярных интегральных операторов с непрерывными коэффициентами, то есть операторов вида:

$$A = a_+P_+ + a_-P_- + T,$$

где $a_\pm \in C(\Gamma)$, $T \in \mathcal{K}_p(\Gamma)$. Множество $\mathfrak{A}_p(\Gamma)$ является банаховой подалгеброй алгебры $\mathcal{B}_p(\Gamma)$. Известно ([3], гл. 4, теорема 7.3), что указанный оператор является Φ - оператором тогда и только тогда, когда для всех $t(\in\Gamma)$ $a_+(t)\neq 0$, $a_-(t)\neq 0$. При выполнении этих условий индекс оператора A вычисляется по формуле:

$$\operatorname{Ind} A = \operatorname{ind} \frac{a_-}{a_+},$$

где ind b - *индекс функции* b - деленное на 2π приращение аргумента этой функции, когда t пробегает контур Γ в положительном направлении.

Оператор $a_+P_+ + a_-P_-$ $(P_+a_+I + P_-a_-I)$, $a_\pm \in C(\Gamma)$ называется *сингулярным интегральным оператором с внешними (внутренними) коэффициентами*. Для обратимости оператора $a_+P_+ + a_-P_-$ необходимо и достаточно, чтобы $a_+(t)\neq 0$, $a_-(t)\neq 0$ для всех $t(\in\Gamma)$ и ind a_+ = ind a_-. Такой же факт справедлив и для оператора с внутренними коэффициентами ([3], гл.3, 7).

Оператор $A^0 = a_+P_+ + a_-P_-$ называется *характеристическим оператором, соответствующим оператору* $A = a_+P_+ + a_-P_- + T$. В силу приведенных выше результатов, справедливо такое утверждение: если A является Φ - оператором с нулевым индексом (например, если A обратим), то оператор A^0 обратим.

Пусть $\Lambda(\subset\mathbb{C})$ - компакт; рассмотрим семейство действующих в $L_p(\Gamma)$ сингулярных интегральных операторов вида:

$$(A(\lambda)f)(t) = a_+(t,\lambda)(P_+f)(t) + a_-(t,\lambda)(P_-f)(t), \ t\in\Gamma,$$

где параметр $\lambda\in\Lambda$. Предположим, что $a_\pm(t,\lambda)\in H_\alpha(\Gamma\times\Lambda)$ при некотором $\alpha(0<\alpha<1)$ и для каждого $\lambda(\in\Lambda)$ оператор $A(\lambda)$ обратим. Обратный оператор имеет следующий вид ([1], с. 178; [17], с. 167):

$$(A^{-1}(\lambda)f)(t) = \frac{1}{2}\,(a_+(t,\lambda) + a_-(t,\lambda))f(t) -$$

$$- \frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \frac{(a_+(t,\lambda) - a_-(t,\lambda))Z(t,\lambda)}{2\,Z(\tau,\lambda)\,(\tau - t)}\, f(\tau)\, d\tau,$$

где

$$Z(t,\lambda) = \exp\left(\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\ln \dfrac{a_-(\tau,\lambda)}{a_+(\tau,\lambda)}}{\tau - t}\, d\tau \right), \ t\in\Gamma.$$

Если $b(t,\lambda)\in H_\alpha(\Gamma\times\Lambda)$, то функция

$$c(t,\lambda) = \frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \frac{b(\tau,\lambda)}{\tau - t}\, d\tau, \ t\in\Gamma, \ \lambda\in\Lambda$$

удовлетворяет по переменной t условию Гельдера порядка α равномерно по $\lambda(\in\Lambda)$ и условию Гельдера по переменной λ порядка $\alpha-\varepsilon$ равномерно по $t(\in\Gamma)$ при любом $\varepsilon(0<\varepsilon<\lambda)$ ([17], 18, п.3^0). Тогда $c(t,\lambda)\in H_{\alpha-0}(\Gamma\times\Lambda)$. Переписывая $A^{-1}(\lambda)$ в виде

$$(A^{-1}(\lambda)f)(t) = b(t,\lambda)\, f(t) + \frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \frac{c(t,\tau,\lambda)}{\tau - t}\, f(\tau)\, d\tau,$$

получаем, что $b(t,\lambda)\in H_\alpha(\Gamma\times\Lambda)$, $c(t,\tau,\lambda)\in H_{\alpha-0}(\Gamma^2\times\Lambda)$.

Справедливо следующее утверждение.

Лемма 2.3.1. Пусть Q - один из двух операторов P_+, P_-, действующих в пространстве $L_p(\Gamma)$ $(1<p<\infty)$.Тогда для любой точки $t_0(\in\Gamma)$, существует последовательность $\{\varphi_n\}(\subset L_p(\Gamma))$, обладающая такими свойствами:

а) $Q\varphi_n = \varphi_n$, $n = 1, 2, \ldots$;

b) $\|\varphi_n\|_p = 1$, $n = 1, 2, \ldots$;

c) для любой окрестности $u(\subset\Gamma)$ точки t_0

$$\lim_{n\to\infty} \|(I - P_u)\varphi_n\|_p = 0.$$

Доказательство. Как обычно ([3], гл. 2, 4) через $C^+(\Gamma)$ ($\overset{o}{C}{}^-(\Gamma)$) обозначаем совокупность всех функций, аналитических в области D_Γ^+ (D_Γ^-), непрерывных в ее замыкании $\overline{D}_\Gamma^\mp$ ($\overline{D}_\Gamma^-$ и удовлетворяющих условию $f(\infty)=0$). Условие a) будет выполнено, если для всех n $\varphi_n\in C^+(\Gamma)$ (в случае $Q=P_+$) или $\varphi_n\in\overset{o}{C}{}^-(\Gamma)$ (в случае $Q=P_-$). Мы докажем существование функций φ_n из указанных классов.

Пусть $D = \{z\colon |z|<1\}$, Γ_0 - граница области D; f - функция, конформно отображающая область D_Γ^+ (D_Γ^-) на область D так, что $f(t_0)=1$, $f(\infty)=0$ в случае области D_Γ^-. Производная $f'(z)$ ($z\in D_\Gamma^\pm$) непрерывна вплоть до границы Γ области $D_\Gamma^\pm$ и, в силу теоремы Келлога о соответствии границ ([33, с. 230), не обращается на Γ в нуль. Тогда отображение $U(L_p(\Gamma_0)\to L_p(\Gamma))$, задаваемое формулой

$$(U\varphi)(t) = \varphi(f(t)),\ \varphi\in L_p(\Gamma_0),\ t\in\Gamma_0,$$

является изоморфизмом этих пространств.

Теперь нам достаточно построить последовательность $\{\varphi_n\}$ $(\subset C^+(\Gamma_0))$, обладающую свойствами b) и c) (на контуре Γ_0, выделенная точка $t_0=1$) и удовлетворяющую дополнительному условию $\varphi_n(0) = 0$, $n=1, 2, \ldots$.

Рассмотрим последовательности

$$\psi_n(t) = t\left(\frac{1+t}{2}\right)^n,\ \varphi_n(t) = \frac{\psi_n(t)}{\|\psi_n\|_p},\ n=1, 2,\ldots,\ t\in\Gamma,$$

и докажем, что $\{\varphi_n\}$ удовлетворяет всем требуемым условиям.

В проверке нуждается только свойство c). Имеем равенство

$$\|\psi_n\|_p^p = 4\int_0^{\pi/2}\cos^{np}\vartheta\, d\vartheta = 2^{np+1}\frac{\left(\Gamma\left(\frac{np+1}{2}\right)\right)^2}{\Gamma(np+1)} =$$

$$= 2\sqrt{\frac{2\pi}{p}}\; n^{-1/2}\,(\omega(n))^p,$$

где

$$(\omega(n))^p = \sqrt{\frac{np}{np+1}}\;\exp\left(\frac{\tau(n)}{12(np+1)}\right),\quad -1<\tau(n)<4.$$

Здесь интеграл выражен через гамма-функции по формуле из [4], с. 770, а гамма-функции разложены по формуле Стирлинга [4], с. 796.

Пусть $u(\subset\Gamma)$ - окрестность точки $t_0=1$. Величина

$$q = \max_{t\in\Gamma_0\ u}\left|\frac{1+t}{2}\right|$$

удовлетворяет условию $0\le q<1$. Имеет место оценка

$$\|(I - P_u)\psi_n\|_p \le c_1\; q^n,$$

где константа c не зависит от n, и далее:

$$\|(I - P_u)\varphi_n\|_p \le \frac{c\; q^n}{\|\psi_n\|_p} \le \frac{c\; q^n}{(8\pi/p)^{1/2p}\; n^{-1/2p}\;\omega(n)},$$

Из последней оценки следует выполнение свойства с).

Лемма доказана.

Лемма 2.3.2. Для произвольной окрестности $u(\subset\Gamma)$ и любого $p(1<p<\infty)$ имеют место неравенства $\|P_+P_u\|_p\ge 1$, $\|P_-P_u\|_p\ge 1$.

Доказательство. Воспользуемся леммой 2.3.1. Для произвольного $\varepsilon(>0)$ существует функция $f(\in L_p(\Gamma))$, для которой $P_+f=f$, $\|f\|_p=1$, $\|P_uf\|_p\ge 1-\varepsilon$. Отсюда

$$\|P_+P_u\|_p\ge\|P_+P_uf\|_p\ge\|P_+f\|_p-\|P_+\|_p\cdot\|P_{\Gamma\ u}f\|_p\ge 1-\|P_+\|_p\cdot\varepsilon.$$

В силу произвольности ε, первое неравенство доказано. Второе неравенство доказывается аналогично.

Лемма доказана.

Перейдем теперь к бисингулярным операторам.

Определение. Оператор $A(\in\Lambda_p(\Gamma_1,\Gamma_2))$ назовем полным бисингулярным интегральным оператором с непрерывными коэффициентами, если для всех $t_1(\in\Gamma_1)$, $t_2(\in\Gamma_2)$ выполняются соотношения

$$A \overset{1,t_1}{\sim} P_+\otimes A_1^+(t_1) + P_-\otimes A_1^-(t_1),$$
$$A \overset{2,t_2}{\sim} A_2^+(t_2)\otimes P_+ + A_2^-(t_2)\otimes P_-, \tag{2.3.1}$$

где $A_1^{\pm}(t_1)\in\mathfrak{A}_p(\Gamma_2)$, $A_2^{\pm}(t_2)\in\mathfrak{A}_p(\Gamma_1)$.

Напомним, что этому определению удовлетворяет любой интегральный оператор вида (2.1.3) (теорема 2.1.1). Операторы, удовлетворяющие этому определению, мы в дальнейшем для краткости называем *бисингулярными*.

Лемма 2.3.3. Пусть A - бисингулярный оператор в пространстве $L_p(\Gamma_1\times\Gamma_2)$. Тогда операторы $A_1^{\pm}(t_1)$, $A_2^{\pm}(t_2)$, удовлетворяющие соотношениям (2.1.3) определяются точками t_1 и t_2 однозначно. Отображения $t_1\to A_1^{\pm}(t_1)$, $(\Gamma_1\to\mathfrak{A}_p(\Gamma_2))$, $t_2\to A_2^{\pm}(t_2)$, $(\Gamma_2\to\mathfrak{A}_p(\Gamma_1))$ непрерывны в равномерной операторной топологии.

Доказательство. Рассмотрим оператор-функцию $A_1^+(t_1)$. Зафиксируем произвольную точку $t_1(\in\Gamma_1)$. По числу $\varepsilon(>0)$ найдем такую окрестность $u(\subset\Gamma_1)$ точки t_1, что

$$\|(A - (P_+\otimes A_1^+(t_1) + P_-\otimes A_1^-(t_1)))(P_u\otimes I)\| < \frac{\varepsilon}{2\|P_+\|}\ .$$

Тогда

$$\|((P_+\otimes I)\ A - P_+\otimes A_1^+(t_1))(P_u\otimes I)\| < \frac{\varepsilon}{2}\ .$$

Возьмем произвольную точку $t_1'(\in u)$. Можно подобрать такую окрестность $v(\subset\Gamma_1)$ этой точки, что

$$\|[(P_+\otimes I)A - P_+\otimes A_1^+(t_1'))](P_v\otimes I)\| < \frac{\varepsilon}{2}\ .$$

Рассмотрим окрестность $w = u\cap v$ точки t_1'. Из последних двух неравенств следует, что

$$\|(P_+\otimes A_1^+(t_1') - P_+\otimes A_1^+(t_1'))(P_w\otimes I)\| < \varepsilon,$$

$$\|P_+P_w\|\cdot\|A_1^+(t_1) - A_1^+(t_1')\| < \varepsilon.$$

В силу леммы 2.3.2, $\|A_1^+(t_1) - A_1^+(t_1')\| < \varepsilon$. Отсюда следует однозначность определения $A_1^+(t_1)$ и непрерывность оператор-функции A_1^+ в точке t_1.

Остальные оператор-функции рассматриваются аналогично.

Лемма доказана.

Четыре оператор-функции $A_1^\pm(t_1)$, $A_2^\pm(t_2)$ назовем *символом* бисингулярного оператора A. Напомним, что две первые оператор-функции принимают значения в $\mathfrak{A}_p(\Gamma_2)$, две другие – в $\mathfrak{A}_p(\Gamma_1)$.

Основным результатом этого параграфа является следующее утверждение.

Теорема 2.3.1. Бисингулярный оператор $A(\in\mathcal{B}_p(\Gamma_1\times\Gamma_2)$ является Ф – оператором тогда и только тогда, когда все операторы $A_i^\pm(t_i)$ $(i=1,2;\ t_i\in\Gamma_i)$ обратимы.

Это утверждение вытекает из определения бисингулярного оператора, предложения 1.2.1 и теоремы 2.2.1.

Следствие. Пусть A – действующий в $L_p(\Gamma_1\times\Gamma_2)$ бисингулярный интегральный оператор вида (2.1.3). Оператор A является Ф – оператором тогда и только тогда, когда для всех $t_1(\in\Gamma_1)$ обратимы действующие в $L_p(\Gamma_2)$ операторы

$$(A_1^\pm(t_1)g)(t_2) = (a_0(t_1,t_2)\pm a_1(t_1,t_1,t_2))g(t_1) +$$

$$+\ \frac{1}{\pi i}\int\limits_{\Gamma_2}\frac{a_2(t_1,t_2,\tau_2)\pm a_{12}(t_1,t_1,t_2,\tau_2)}{\tau_2-t_2}\,g(\tau_2)\,d\tau_2,\quad t_2\in\Gamma_2;$$

для всех $t_2\in(\Gamma_2)$ обратимы действующие в $L_p(\Gamma_1)$ операторы:

$$(A_2^\pm(t_2)h)(t_2) = (a_0(t_1,t_2)\pm a_2(t_1,t_2,t_2))h(t_2) +$$

$$+\ \frac{1}{\pi i}\int\limits_{\Gamma_1}\frac{a_2(t_1,\tau_1,t_2)\pm a_{12}(t_1,\tau_1,t_2,t_2)}{\tau_1-t_1}\,h(\tau_1)\,d\tau_1,\quad t_1\in\Gamma_1.$$

Это утверждение является непосредственным следствием теорем 2.3.1 и 2.1.1.

4°. *Задача линейного сопряжения аналитических функций двух комплексных переменных.*

Частным случаем бисингулярного оператора является бисингулярный интегральный оператор с внешними коэффициентами:

$$A = a_{++}P_{++} + a_{+-}P_{+-} + a_{-+}P_{-+} + a_{--}P_{--},$$

где функции a_{++}, a_{+-}, a_{-+}, a_{--} непрерывны на $\Gamma_1\times\Gamma_2$, $P_{+\pm} = P_+\otimes P_\pm$, $P_{-\pm} = P_-\otimes P_\pm$. Для оператора такого вида из теоремы 2.3.1 можно получить вполне эффективный критерий фредгольмовости.

Введем сначала некоторые обозначения. Пусть комплекснозначная функция $b(t_1,t_2)$ определена и непрерывна на $\Gamma_1\times\Gamma_2$ и нигде не обращается в ноль. Зафиксируем точку $t_2^0(\in\Gamma_2)$ и обозначим через $\mathrm{ind}_1 b$ деленное на 2π приращение аргумента функции $b(t_1,t_2^0)$ переменной t_1, когда t_1 пробегает контур Γ_1 в положительном направлении. Очевидно, что эта величина не зависит от зафиксированного значения t_2^0. Число $\mathrm{ind}_1 b$ называется *частичным индексом функции* b *по первой переменной*. Симметричным образом определяется *частичный индекс по второй переменной* $\mathrm{ind}_2 b$.

Теорема 2.4.1. Действующий в $L_p(\Gamma_1\times\Gamma_2)$ бисингулярный интегральный оператор

$$A = a_{++}P_{++} + a_{+-}P_{+-} + a_{-+}P_{-+} + a_{--}P_{--}$$

с непрерывными внешними коэффициентами является Ф - оператором тогда и только тогда, когда

1) коэффициенты a_{++}, a_{+-}, a_{-+}, a_{--} не обращаются в ноль на $\Gamma_1\times\Gamma_2$;

2) $$\mathrm{ind}_1 a_{++} = \mathrm{ind}_1 a_{-+},\ \mathrm{ind}_1 a_{+-} = \mathrm{ind}_1 a_{--},$$
$$\mathrm{ind}_2 a_{++} = \mathrm{ind}_2 a_{+-},\ \mathrm{ind}_2 a_{-+} = \mathrm{ind}_2 a_{--}.$$

Доказательство. Операторы, составляющие символ рассматриваемого оператора, имеют вид:

$$A_1^+(t_1) = a_{++}(t_1,\cdot)P_+ + a_{+-}(t_1,\cdot)P_- \quad (\in\mathcal{B}_p(\Gamma_2));$$

$$A_1^-(t_1) = a_{-+}(t_1,\cdot)P_+ + a_{--}(t_1,\cdot)P_- \quad (\in\mathcal{B}_p(\Gamma_2));$$

$$A_2^+(t_2) = a_{++}(\cdot,t_2)P_+ + a_{-+}(\cdot,t_2)P_- \quad (\in\mathcal{B}_p(\Gamma_1));$$

$$A_2^-(t_2) = a_{+-}(\cdot,t_2)P_+ + a_{--}(\cdot,t_2)P_- \quad (\in\mathcal{B}_p(\Gamma_1)).$$

В силу приведенного в начале п.3^o критерия обратимости сингулярного интегрального оператора с непрерывными внешними коэффициентами, обратимость операторов, составляющих символ A, равносильна условиям 1) и 2).

Замечание. Из теоремы 2.3.1 можно получить критерий фредгольмовости бисингулярного оператора *с внутренними коэффициентами*, то есть оператора вида

$$A = P_{++}a_{++}I + P_{+-}a_{+-}I + P_{-+}a_{-+}I + P_{--}a_{--}I,$$

где a_{++}, a_{+-}, a_{-+}, $a_{--}\in C(\Gamma_1\times\Gamma_2)$. Символ этого оператора образуют сингулярные интегральные операторы с внутренними коэффициентами (с теми же комбинациями индексов, что в доказательстве теоремы 2.4.1). Тогда, учитывая критерий обратимости сингулярного интегрального оператора с непрерывными внутренними коэффициентами, получаем, что условия 1) и 2) теоремы 2.4.1 являются необходимыми и достаточными для фредгольмовости рассматриваемого оператора A.

Используя стандартную связь между сингулярными интегральными операторами и краевыми задачами, можно получить из теоремы 2.4.1 соответствующий результат для задачи линейного сопряжения аналитических функций двух комплексных переменных.

Обозначим: $D_{+\pm} = D^+_{\Gamma_1}\times D_{\Gamma_2}$, $D_{-\pm} = D^-_{\Gamma_1}\times D^{\pm}_{\Gamma_2}$. Через E_p^{++} будем обозначать класс функций двух комплексных переменных, аналитических в области D_{++} и представимых там интегралом типа Коши с плотностью из $L_p(\Gamma_1\times\Gamma_2)$:

$$f(z_1,z_2) = \frac{1}{(2\pi i)^2}\int\limits_{\Gamma_1}\int\limits_{\Gamma_2}\frac{\varphi(\tau_1,\tau_2)}{(\tau_1-z_1)(\tau_2-z_2)}\,d\tau_1 d\tau_2,\ z_1\in D_1^+,\ z_2\in D_2^+.$$

Пусть $f\in E_p^{++}$. Тогда почти для всех $(t_1,t_2)(\in\Gamma_1\times\Gamma_2)$ существуют конечные пределы по некасательным направлениям

$$f(t_1,t_2) \overset{def}{=} \lim_{\substack{z_1\to t_1,\, z_1\in D_1^+\\ z_2\to t_2,\, z_2\in D_2^+}} f(z_1,z_2).$$

В силу аналога формул Сохоцкого-Племеля ([1], с. 38; [17], с. 55), остающихся верными и для плотности φ $(\in L_p(\Gamma_1\times\Gamma_2))$, $f=P_{++}f$.

Аналогично определяются классы E_p^{+-}, E_p^{-+}, E_p^{--} функций, аналитических в областях D_{+-}, D_{-+}, D_{--}.

Мы рассмотрим задачу линейного сопряжения в следующей стандартной постановке: даны четыре коэффициента $G^{+\pm}$, $G^{-\pm}$ $(\in C(\Gamma_1\times\Gamma_2))$ и функция $g(\in L_p(\Gamma_1\times\Gamma_2))$. Требуется найти четыре функции $\Phi^{+\pm}(\in E_p^{+\pm})$, $\Phi^{-\pm}(\in E_p^{-\pm})$, предельные значения которых удовлетворяют почти для всех $(t_1,t_2)(\in\Gamma_1\times\Gamma_2)$ условию

$$\begin{aligned}&G^{++}(t_1,t_2)\Phi^{++}(t_1,t_2) + G^{+-}(t_1,t_2)\Phi^{+-}(t_1,t_2) +\\ &+ G^{-+}(t_1,t_2)\Phi^{-+}(t_1,t_2) + G^{--}(t_1,t_2)\Phi^{--}(t_1,t_2) =\\ &= g(t_1,t_2).\end{aligned}\tag{2.4.1}$$

С помощью аналога формул Сохоцкого-Племеля для кратных интегралов типа Коши задача стандартным образом сводится к решению бисингулярного уравнения

$$(G^{++}P_{++} + G^{+-}P_{+-} + G^{-+}P_{++} + G^{--}P_{--})\varphi = g,\ \varphi\in L_p(\Gamma_1\times\Gamma_2).$$

Более того, рассматриваемая краевая задача *равносильна* этому уравнению.

Будем говорить, что краевая задача (2.4.1) фредгольмова, если оператор в левой части уравнения (2.4.1), действующий из $E_p^{++}\oplus E_p^{+-}\oplus E_p^{-+}\oplus E_p^{--}$ в $L_p(\Gamma_1\times\Gamma_2)$, является фредгольмовым.

Из теоремы 2.4.1 получаем теперь следующее утверждение.

Теорема 2.4.2. Краевая задача (2.4.1) является фредгольмовой тогда и только тогда, когда

1) коэффициенты $G^{+\pm}$, $G^{-\pm}$ не обращаются в ноль на $\Gamma_1\times\Gamma_2$;

2) $$\mathrm{ind}_1 G^{++} = \mathrm{ind}_1 G^{-+},\ \mathrm{ind}_1 G^{+-} = \mathrm{ind}_1 G^{--},$$
$$\mathrm{ind}_2 G^{++} = \mathrm{ind}_2 G^{+-},\ \mathrm{ind}_2 G^{-+} = \mathrm{ind}_2 G^{--}.$$

5°. *Дальнейшее изучение бисингулярных операторов*.

Множество всех бисингулярных операторов, действующих в $L_p(\Gamma_1\times\Gamma_2)$, обозначим через $\mathfrak{A}_p(\Gamma_1,\Gamma_2)$. Введем банахову алгебру

$$\mathcal{A}_p(\Gamma_1,\ \Gamma_2) \overset{def}{=}$$

$$= C(\Gamma_1,\mathfrak{A}_p(\Gamma_2))\oplus C(\Gamma_1,\mathfrak{A}_p(\Gamma_2))\oplus C(\Gamma_2,\mathfrak{A}_p(\Gamma_1))\oplus C(\Gamma_2,\mathfrak{A}_p(\Gamma_1))$$

с покомпонентно выполняемыми операциями и нормой - наибольшей из норм четырех компонент. Символ оператора $A(\in\mathfrak{A}_p(\Gamma_1,\Gamma_2))$ является элементом алгебры $\mathcal{A}_p(\Gamma_1,\ \Gamma_2)$. Мы будем обозначать его через $\hat{A}$.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 2.5.1. Множество $\mathfrak{A}_p(\Gamma_1,\Gamma_2)$ является банаховой подалгеброй алгебры $\mathcal{B}_p(\Gamma_1\times\Gamma_2)$. Отображение $A \to \hat{A}$ является непрерывным гомоморфизмом из $\mathfrak{A}_p(\Gamma_1,\Gamma_2)$ в $\mathcal{A}_p(\Gamma_1,\ \Gamma_2)$. Ядро этого гомоморфизма совпадает с множеством $\mathcal{K}_p(\Gamma_1,\Gamma_2)$ всех компактных операторов, действующих в $L_p(\Gamma_1\times\Gamma_2)$. Индуцированный гомоморфизм

$$\mathfrak{A}_p(\Gamma_1,\Gamma_2)/\mathcal{K}_p(\Gamma_1,\Gamma_2) \to \mathcal{A}_p(\Gamma_1,\ \Gamma_2), \tag{2.5.1}$$

действующий по формуле

$$A + \mathcal{K}_p(\Gamma_1,\Gamma_2) \to \hat{A}$$

является (топологически) изоморфным вложением.

Доказательство. Из определения бисингулярного оператора и элементарных свойств отношения локальной эквивалентности следует, что $\mathfrak{A}_p(\Gamma_1,\Gamma_2)$ является подалгеброй алгебры $\mathcal{B}_p(\Gamma_1\times\Gamma_2)$, и отображение $A \to \hat{A}$ является гомоморфизмом из $\mathfrak{A}_p(\Gamma_1,\Gamma_2)$ в $\mathcal{A}_p(\Gamma_1, \Gamma_2)$. Из следствия 2 предложения 1.3.1 следует, что $\mathcal{K}_p(\Gamma_1,\Gamma_2) \subset \mathfrak{A}_p(\Gamma_1,\Gamma_2)$, и ядро рассматриваемого гомоморфизма совпадает с $\mathcal{K}_p(\Gamma_1,\Gamma_2)$.

По аналогии с доказательством леммы 2.3.3 легко убедиться в справедливости оценки

$$\|(P_+\otimes B + P_-\otimes C)(P_u\otimes I)\|_p \geq \max\{\|B\|,\|C\|\} \tag{2.5.2}$$

для любых p $(1<p<\infty)$, B, $C(\in\mathcal{B}_p(\Gamma_2))$ и окрестности $u(\subset\Gamma_1)$.

Пусть $A\in\mathfrak{A}_p(\Gamma_1,\Gamma_2)$. Зафиксируем точку $t_1(\in\Gamma_1)$. Выберем произвольное $\varepsilon(>0)$. Тогда по определению бисингулярного оператора существует такая окрестность $u(\subset\Gamma_1)$ точки t_1, что

$$\|(A-(P_+\otimes A_1^+(t_1)+P_-\otimes A_1^-(t_1)))(P_u\otimes I)\| < \varepsilon.$$

Отсюда и из (2.5.2) следует, что $\|A_1^\pm(t_1)\| \leq \|A\|+\varepsilon$ и, в силу произвольности ε, $\|A_1^\pm(t_1)\| \leq \|A\|$. Аналогичное неравенство справедливо и для точек Γ_2. Поэтому

$$\|\hat{A}\| \leq \|A\|, \tag{2.5.3}$$

то есть гомоморфизм $A\to\hat{A}$ является непрерывным. Отсюда, в частности, следует замкнутость алгебры $\mathfrak{A}_p(\Gamma_1\times\Gamma_2)$.

Из доказанного следует, что индуцированный гомоморфизм (2.5.1) является изоморфным алгебраическим вложением. Учитывая, что символ оператора из $\mathcal{K}_p(\Gamma_1\times\Gamma_2)$ является нулевым, из (2.5.3) получаем оценку: $\|\hat{A}\|\leq|A|$ для $A\in\mathfrak{A}_p(\Gamma_1\times\Gamma_2)$.

Для завершения доказательства теоремы нужно убедиться в существовании такой константы $c(>0)$, что для всех A $(\in\mathfrak{A}_p(\Gamma_1,\Gamma_2))$ $|A| \leq c\|\hat{A}\|$. Эта оценка следует из того, что бисингулярный оператор A является огибающим семейств

$$\left\{P_+\otimes A_1^+(t_1) + P_-\otimes A_1^-(t_1)\right\}_{t_1\in\Gamma_1}, \left\{A_2^+(t_2)\otimes P_+ + A_2^-(t_2)\otimes P_-\right\}_{t_2\in\Gamma_2},$$

теоремы 1.3.2, очевидной оценки

$$|P_+\otimes B + P_-\otimes C|_1 \le \left(\|P_+\|_p + \|P_-\|_p\right) \{\max\{\|B\|,\|C\|\}$$

для любых B, $C(\in\Lambda_p(\Gamma_2))$ и аналогичной "симметричной" оценки.

Теорема доказана.

Оператор-функции, составляющие символ бисингулярного оператора, не являются независимыми. Перейдем к выводу условий связи между ними.

Приведем сначала некоторые вспомогательные факты.

Для оператора $B = b_+P_+ + b_-P_- + T \in\mathfrak{A}_p(\Gamma)$ $(b_\pm\in C(\Gamma),\ T\in\mathcal{K}_p(\Gamma))$ справедлива оценка

$$\|B\|_p \ge \max\{\|b_+\|_C,\ \|b_-\|_C\}. \tag{2.5.4}$$

По аналогии с доказательством леммы 2.3.2 легко получить оценку

$$\max|\alpha_{\pm\pm}| \le \|(\alpha_{++}P_{++}+\alpha_{+-}P_{+-}+\alpha_{-+}P_{-+}+\alpha_{--}P_{--})(P_u\otimes P_v)\|_p \le \tag{2.5.5}$$
$$\le c_p\max|\alpha_{\pm\pm}|$$

для любых α_{++}, α_{+-}, α_{-+}, $\alpha_{--}\in\mathbb{C}$ и любых окрестностей $u(\subset\Gamma_1)$, $v(\subset\Gamma_2)$.

Пусть $B(t_1)(t_1\in\Gamma_1)$ - оператор-функция, принимающая значения в $\mathfrak{A}_p(\Gamma_2)$ и имеющая следующий вид:

$$(B(t_1)f(t_2) = b_+(t_1,t_2)(P_+f)(t_2) + b_-(t_1,t_2)(P_-f)(t_2) +$$
$$+ (T(t_1)f)(t_2),\ f\in L_p(\Gamma_2),\ t_2\in\Gamma_2,$$

где при любом фиксированном $t_1(\in\Gamma_1)$ функции $b_\pm(t_1,t_2)$ переменной t_2 принадлежат $C(\Gamma_2)$ и оператор $T(t_1)\in\mathcal{K}_p(\Gamma_2)$.

В этих обозначениях из оценки (2.5.4) получаем такое утверждение.

Лемма 2.5.1. Оператор-функция $B(t_1)$ принадлежит классу $C(\Gamma_1,\mathfrak{A}_p(\Gamma_2))$ тогда и только тогда, когда $b_\pm\in C(\Gamma_1\times\Gamma_2)$ и $T(\cdot)\in C(\Gamma_1,\mathcal{K}_p(\Gamma_2))$.

Рассмотрим четыре оператор-функции

$$A_1^\pm(t_1)(\in C(\Gamma_1,\mathfrak{A}_p(\Gamma_2))),\ A_2^\pm(t_2)(\in C(\Gamma_2,\mathfrak{A}_p(\Gamma_1))).$$

Пусть

$$(A_1^{\pm}(t_1)f(t_2) = a_1^{\pm +}(t_1,t_2)(P_+f)(t_2) + a_1^{\pm -}(t_1,t_2)(P_-f)(t_2) + + (T_1^{\pm}(t_1)f(t_2),\ f\in L_p(\Gamma_2),$$

$$(A_2^{\pm}(t_2)g(t_1) = a_2^{+\pm}(t_1,t_2)(P_+g)(t_1) + a_2^{-\pm}(t_1,t_2)(P_-g)(t_1) + + (T_2^{\pm}(t_2)g(t_1),\ g\in L_p(\Gamma_1). \tag{2.5.6}$$

Здесь $t_1\in\Gamma_1$, $t_2\in\Gamma_2$; для каждого $t_1(\in\Gamma_1)$ $T_1^{\pm}(t_1)\in\mathcal{K}_p(\Gamma_2)$ и $a_1^{\pm\pm}(t_1,t_2)\in C(\Gamma_2)$ как функция переменной $t_2(\in\Gamma_2)$; для каждого $t_2(\in\Gamma_2)$ $T_2^{\pm}(t_2)\in\mathcal{K}_p(\Gamma_1)$ $a_2^{\pm\pm}(t_1,t_2)\in C(\Gamma_1)$ как функция переменной $t_1(\in\Gamma_1)$. Из леммы 2.5.1 следует, что $a_i^{\pm\pm}(t_1,t_2)\in C(\Gamma_1\times\Gamma_2)$, $i=1,\ 2$, $T_1^{\pm}\in C(\Gamma_1,\mathcal{K}_p(\Gamma_2))$, $T_2^{\pm}\in C(\Gamma_2,\mathcal{K}_p(\Gamma_1))$.

Условия связи между оператор-функциями, составляющими символ бисингулярного оператора, даются следующим утверждением.

Теорема 2.5.2. Четыре оператор-функции

$$A_1^{\pm}(t_1)\ (\in C(\Gamma_1,\mathfrak{A}_p(\Gamma_2))),\ A_2^{\pm}(t_2)\ (\in C(\Gamma_2,\mathfrak{A}_p(\Gamma_1)))$$

вида (2.5.6) образуют символ некоторого оператора из $\mathfrak{A}_p(\Gamma_1,\Gamma_2)$ тогда и только тогда, когда $a_1^{+\pm} = a_2^{+\pm}$, $a_1^{-\pm} = a_2^{-\pm}$. Если эти условия выполняются, то соответствующий бисингулярный оператор определяется однозначно с точностью до компактного слагаемого.

Доказательство. По определению бисингулярный оператор является огибающим пары семейств

$$\left\{P_+\otimes A_1^+(t_1) + P_-\otimes A_1^-(t_1)\right\}_{t_1\in\Gamma_1},\ \left\{A_2^+(t_2)\otimes P_+ + A_2^-(t_2)\otimes P_-\right\}_{t_2\in\Gamma_2}.$$

Оба эти семейства по условию непрерывны по норме. В силу теоремы 1.3.2, огибающий оператор (единственный с точностью до компактного слагаемого) существует тогда и только тогда, когда для любых $t_1^0(\in\Gamma_1)$, $t_2^0(\in\Gamma_2)$

$$\inf_{u,v}\ \|((P_+\otimes A_1^+(t_1)+P_-\otimes A_1^-(t_1))- \tag{2.5.7}$$

$$- (A_2^+(t_2)\otimes P_+ + A_2^-(t_2)\otimes P_-))(P_u\otimes P_v)\| = 0,$$

где нижняя грань берется по множеству всех пар (u,v), $u(\subset\Gamma_1)$ - окрестность точки t_1^0, $v(\subset\Gamma_2)$ - окрестность точки t_2^0. Левая часть (2.5.7) равна

$$\inf_{u,v} \Big\| \Big(\sum (a_1^{\pm\pm}(t_1^0,t_2^0) - a_2^{\pm\pm}(t_1^0,t_2^0))P_{\pm\pm}\Big)(P_u\otimes P_v)\Big\|,$$

где сумма содержит четыре слагаемых со всевозможными комбинациями знаков, u и v пробегают те же множества. Тогда, в силу (2.5.5), равенство (2.5.7) равносильно тому, что

$$a_1^{+\pm}(t_1^0,t_2^0) = a_2^{+\pm}(t_1^0,t_2^0), \quad a_1^{-\pm}(t_1^0,t_2^0) = a_2^{-\pm}(t_1^0,t_2^0).$$

Остается заметить, что $t_1^0(\in\Gamma_1)$, $t_2^0(\in\Gamma_2)$ - произвольные точки.

Теорема доказана.

Следствие. Пусть $T_1^\pm\in C(\Gamma_1,\mathcal{K}_p(\Gamma_2))$, $T_2^\pm\in C(\Gamma_2,\mathcal{K}_p(\Gamma_1))$. Тогда существует оператор $A(\in\mathfrak{A}_p(\Gamma_1,\Gamma_2))$, единственный с точностью до компактного слагаемого, символом которого являются оператор-функции $T_1^+(t_1)$, $T_1^-(t_1)$, $T_2^+(t_2)$, $T_2^-(t_2)$.

Пусть символ оператора $A(\in\mathfrak{A}_p(\Gamma_1,\Gamma_2))$ имеет вид (2.5.6). Тогда, в силу теоремы 2.5.2, нижний индекс у функций $a_i^{\pm\pm}$ можно опустить; знаки будем теперь писать внизу. Бисингулярный оператор с внешними коэффициентами

$$A^0 = a_{++}P_{++} + a_{+-}P_{+-} + a_{-+}P_{-+} + a_{--}P_{--}$$

будем называть *характеристическим оператором, отвечающим оператору* A. Отметим, что если A - интегральный оператор вида (2.1.3), то оператор A^0 действует в $L_p(\Gamma_1\times\Gamma_2)$ по формуле:

$$\begin{aligned}(A^0 f)(t_1,t_2) &= a_0(t_1,t_2)\, f(t_1,t_2) + \\ &+ \frac{a_1(t_1,t_1,t_2)}{\pi i}\int_{\Gamma_1}\frac{f(\tau_1,t_2)}{\tau_1-t_1}\,d\tau_1 + \\ &+ \frac{a_2(t_1,t_2,t_2)}{\pi i}\int_{\Gamma_2}\frac{f(t_1,\tau_2)}{\tau_2-t_2}\,d\tau_2 + \end{aligned} \qquad (2.5.8)$$

$$+\frac{a_{12}(t_1,t_1,t_2,t_2)}{(\pi i)^2}\int\limits_{\Gamma_1}\int\limits_{\Gamma_2}\frac{f(\tau_1,\tau_2)}{(\tau_1-t_1)(\tau_2-t_2)}\,d\tau_1 d\tau_2,$$

Приведем также следующее утверждение, на котором основано вычисление индекса бисингулярного оператора (глава 3).

Теорема 2.5.3. Предположим, что оператор $A(\in\mathfrak{A}_p(\Gamma_1,\Gamma_2))$ является Ф - оператором. Тогда соответствующий характеристический оператор также является Ф - оператором, и имеет место равенство $A = A^0A_0 + T$, где $T\in\mathcal{K}_p(\Gamma_1,\Gamma_2)$, $A_0(\in \mathfrak{A}_p(\Gamma_1,\Gamma_2))$ - Ф - оператор с символом

$$I+T_1^+(t_1),\ I+T_1^-(t_1),\ I+T_2^+(t_2),\ I+T_2^-(t_2), \qquad (2.5.9)$$

$T_1^{\pm}(\cdot)\in C(\Gamma_1,\mathcal{K}_p(\Gamma_2))$, $T_2^{\pm}(\cdot)\in C(\Gamma_2,\mathcal{K}_p(\Gamma_1))$.

Доказательство. Рассмотрим символ $A_i^{\pm}(t_i)$ Ф - оператора A. Операторы $A_i^{\pm}(t_i)$ обратимы. Тогда обратимы и характеристические операторы $(A_i^{\pm}(t_i))^0$, образующие символ характеристического оператора A^0. Операторы $((A_i^{\pm}(t_i))^0)^{-1}A_i^{\pm}(t_i)$ обратимы и имеют вид (2.5.9). В силу следствия теоремы 2.5.2, существует оператор A_0 с символом (2.5.9). Он является Ф - оператором. Символ оператора $T = A - A^0A_0$ является нулевым, то есть $T\in\mathcal{K}_p(\Gamma_1,\Gamma_2)$.

Теорема доказана.

6°. *Теоремы о регуляризации и классах решений бисингулярных интегральных уравнений.*

Приведем общую схему построения регуляризатора бисингулярного оператора. Пусть $A(\in\mathfrak{A}_p(\Gamma_1,\Gamma_2))$ - Ф - оператор. Тогда все операторы $A_i^{\pm}(t_i)$, составляющие символ A, обратимы. Оператор-функции $(A_1^+(t_1))^{-1}$, $(A_1^-(t_1))^{-1}$ принадлежат $C(\Gamma_1,\mathfrak{A}_p(\Gamma_2))$. Рассмотрим оператор R_1, действующий в $L_p(\Gamma_1\times\Gamma_2)$:

$$R_1 = (\hat{A}_1^+(\cdot))^{-1}(P_+\otimes I) + (\hat{A}_1^-(\cdot))^{-1}(P_-\otimes I). \qquad (2.6.1)$$

В силу леммы 2.2.3, $R_1\in\Lambda_p(\Gamma_1,\Gamma_2)$ и для каждого $t_1(\in\Gamma_1)$ выполняется соотношение

$$R_1 \overset{1,t_1}{\sim} P_+\otimes(A_1^+(t_1))^{-1} + P_-\otimes(A_1^-(t_1))^{-1}.$$

Тогда для тех же t_1 имеем: $R_1A \overset{1,t_1}{\sim} I$, $AR_1 \overset{1,t_1}{\sim} I$. Из следствия 1 предложения 1.3.1 следует, что операторы (R_1A-I), (AR_1-I) принадлежат классу $\mathcal{K}_p^1(\Gamma_1,\Gamma_2)$, то есть R_1 является частичным регуляризатором оператора A по первой переменной. Отметим также, что $R_1\in\mathfrak{A}_p(\Gamma_1,\Gamma_2)$. Совершенно аналогично доказываем, что оператор

$$R_2 = (\hat{A}_2^+(\cdot))^{-1}(I\otimes P_+) + (\hat{A}_2^-(\cdot))^{-1}(I\otimes P_-)$$

является частичным регуляризатором оператора A по второй переменной; $R_2\in\mathfrak{A}_p(\Gamma_1,\Gamma_2)$.

Как было доказано в главе 1, регуляризатор R оператора A может быть найден по формуле

$$R = R_1+R_2-R_1AR_2. \qquad (2.6.2)$$

Из нее следует, в частности, что $R\in\mathfrak{A}_p(\Gamma_1,\Gamma_2)$. Учитывая, что регуляризатор Ф - оператора находится однозначно с точностью до компактного слагаемого и $\mathcal{K}_p(\Gamma_1,\Gamma_2)\subset\mathfrak{A}_p(\Gamma_1,\Gamma_2)$, получаем следующее утверждение.

Теорема 2.6.1. Если $A(\in\mathfrak{A}_p(\Gamma_1,\Gamma_2))$ является Ф - оператором, то любой его регуляризатор принадлежит множеству $\mathfrak{A}_p(\Gamma_1,\Gamma_2)$.

Приведенная схема дает возможность эффективного нахождения регуляризатора бисингулярного оператора A во всех случаях, когда есть способ нахождения операторов $(A_i^\pm(t_i))^{-1}$ в явном виде. Более точно. Предположим, что A - оператор вида (2.1.3). Допустим, что A является Ф - оператором и

$$((A_1^\pm(t_1))^{-1}f)(t_2) = b_\pm(t_1,t_2)f(t_2) + \\ + \frac{1}{\pi i}\int\limits_{\Gamma_2} \frac{k_\pm(t_1,t_2,\tau_2)}{\tau_2-t_2} f(\tau_2)\,d\tau_2, \qquad (2.6.3)$$

где $t_1\in\Gamma_1$, $t_2\in\Gamma_2$, $f\in L_p(\Gamma_2)$, $b_\pm\in C(\Gamma_1\times\Gamma_2)$, $k_\pm\in H_\alpha^{(3)}(\Gamma_1\times\Gamma_2^2)$ при некотором $\alpha(0<\alpha<1)$.Тогда частичный регуляризатор R_1, определяемый формулой (2.6.1), может быть записан так:

$$(R_1f)(t_1,t_2)(t_1,t_2) = \frac{1}{2}\ (b_+(t_1,t_2) + b_-(t_1,t_2))f(t_1,t_2) +$$

$$+ \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_2} \frac{k_+(t_1,t_2,\tau_2) + k_-(t_1,t_2,\tau_2)}{\tau_2 - t_2}\ f(t_1,\tau_2)\ d\tau_2 +$$

$$+ \frac{b_+(t_1,t_2) - b_-(t_1,t_2)}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_1} \frac{f(\tau_1,t_2)}{\tau_1 - t_1}\ d\tau_1 + \tag{2.6.4}$$

$$+ \frac{1}{(2\pi i)^2}\int\limits_{\Gamma_1}\int\limits_{\Gamma_2} \frac{k_+(t_1,t_2,\tau_2) - k_-(t_1,t_2,\tau_2)}{(\tau_1 - t_1)(\tau_2 - t_2)}\ f(\tau_1,\tau_2)\ d\tau_1 d\tau_2.$$

Если имеется подобное (2.6.3) представление для операторов $(A_2^{\pm}(t_2))^{-1}$, то аналогичным образом можно выписать частичный регуляризатор R_2. Тогда по формуле (2.6.2) получаем регуляризатор R оператора A в интегральной форме.

Ниже, следуя этой схеме, мы укажем вид регуляризатора бисингулярного интегрального оператора с внешними коэффициентами в предположении, что коэффициенты удовлетворяют условию Гельдера по совокупности переменных.

Пусть m - целое неотрицательное число, $0<\lambda<1$. Как обычно, контур Γ отнесем к классу $C^{m+\lambda}$, если его можно задать параметрическим уравнением $t=t(s)$, $a\le s\le b$, причем продолжение периода $(b-a)$ функции $t(s)$ на всю вещественную ось $\mathbb{R}$ имеет m-ю производную, удовлетворяющую условию Гельдера порядка λ. Запись $\Gamma\in C^{\infty}$ означает, что это продолжение бесконечно дифференцируемо.

Пусть m, $n(\ge 0)$ -целые, $\Gamma_1\in C^{m+\lambda}$, $\Gamma_2\in C^{n+\lambda}$. Через $C_{mn}^{\lambda}(\Gamma_1\times\Gamma_2)$ будем обозначать множество всех определенных на $\Gamma_1\times\Gamma_2$ комплекснозначных функций $f(t_1,t_2)$, удовлетворяющих следующему условию: производные

$$(D_{k,l}f)(t_1,t_2) \overset{def}{=} \frac{\partial^{k+l} f(t_1,t_2)}{\partial t_1^k\, \partial t_2^l},\ 0\le k\le m,\ 0\le l\le n$$

непрерывны на $\Gamma_1\times\Gamma_2$, причем $(D_{mn}f)(t_1,t_2) \in H_\lambda(\Gamma_1\times\Gamma_2)$. В линейном пространстве $C^\lambda_{mn}(\Gamma_1\times\Gamma_2)$ определим норму формулой

$$\|f\|^\lambda_{mn} = \sum_{\substack{0\le k\le m\\ 0\le l\le n\\ k+l<m+n}} \|D_{kl}f\|_C + \|D_{mn}f\|^{(1,2)}_\lambda .$$

Пусть Γ_1, $\Gamma_2\in C^\infty$. Через $C^\infty(\Gamma_1\times\Gamma_2)$, как обычно, обозначается множество всех бесконечно дифференцируемых функций на $\Gamma_1\times\Gamma_2$.

Через $\mathfrak{A}^\lambda_p(\Gamma_1,\Gamma_2)$ $(0<\lambda<1,\ 1<p<\infty)$ обозначим множество всех действующих в $L_p(\Gamma_1\times\Gamma_2)$ бисингулярных интегральных операторов вида (2.1.3) в предположении, что $a_0\in H_{\lambda-0}(\Gamma_1\times\Gamma_2)$, $a_1\in H_{\lambda-0}(\Gamma_1^2\times\Gamma_2)$, $a_2\in H_{\lambda-0}(\Gamma_1\times\Gamma_2^2)$, $a_{12}\in H_{\lambda-0}(\Gamma_1^2\times\Gamma_2^2)$. Множество $\mathfrak{A}^\lambda_p(\Gamma_1,\Gamma_2)$ является операторной алгеброй. Это следует из формулы Пуанкаре-Бертрана ([1], 7; [17], 28), инвариантности класса $H_{\lambda-0}(\Gamma_1\times\Gamma_2)$ относительно операторов $S\otimes I$ и $I\otimes S$ и аналогичного факта для функций большего числа переменных.

Лемма 2.6.1. Пусть $A(\in\mathfrak{A}^\lambda_p(\Gamma_1,\Gamma_2))$ является ф - оператором. Если A имеет регуляризатор $R(\in\mathfrak{A}^\lambda_p(\Gamma_1,\Gamma_2))$, то $RA = I+T$, где T - действующий в $L_p(\Gamma_1\times\Gamma_2)$ оператор вида

$$(Tf)(t_1,t_2) = \int_{\Gamma_1}\int_{\Gamma_2} \frac{k(t_1,\tau_1,t_2,\tau_2)}{(\tau_1-t_1)(\tau_2-t_2)}\, d\tau_1 d\tau_2, \quad (2.6.5)$$

где $k\in H_{\lambda-0}(\Gamma_1^2\times\Gamma_2^2)$, причем $k(t_1,t_1,t_2,\tau_2)\equiv 0$, $k(t_1,\tau_1,t_2,t_2)\equiv 0$, $t_1\in\Gamma_1$, $t_2\in\Gamma_2$, $\tau_1\in\Gamma_1$, $\tau_2\in\Gamma_2$.

Доказательство. Так как $\mathfrak{A}^\lambda_p(\Gamma_1,\Gamma_2)$ является алгеброй, то $T\in\mathfrak{A}^\lambda_p(\Gamma_1,\Gamma_2)$. Пусть T определяется функциями c_0 ,c_1, c_2 и k из соответствующих классов (в частности, $k\in H_{\lambda-0}(\Gamma_1^2\times\Gamma_2^2)$). В силу компактности T и следствия 2 предложения 1.3.1, для $t_1\in\Gamma_1$ $T^{1,t_1} \sim 0$, для $t_2\in\Gamma_2$ $T^{1,t_2}\sim 0$. Приравнивая нулю операторы, составляющие символ бисингулярного интегрального оператора T, получим, что $c_0\equiv 0$, $c_1\equiv 0$, $c_2\equiv 0$, $k(t_1,t_1,t_2,\tau_2)\equiv 0$, $k(t_1,\tau_1,t_2,t_2)\equiv 0$.

Лемма доказана.

В приводимых ниже теоремах 2.6.2-2.6.4

$$A = a_{++}P_{++} + a_{+-}P_{+-} + a_{-+}P_{-+} + a_{--}P_{--} -$$

действующий в $L_p(\Gamma_1\times\Gamma_2)$ бисингулярный оператор с непрерывными внешними коэффициентами, являющийся Ф - оператором; Γ_1 и Γ_2 - простые замкнутые ориентированные контуры типа Ляпунова в $\mathbb{C}$; $1<p<\infty$. Дополнительные ограничения указываются в формулировках.

Теорема 2.6.2. Предположим, что коэффициенты оператора A принадлежат классу $H_\lambda(\Gamma_1\times\Gamma_2)$ для некоторого λ $(0<\lambda<1)$, $1<p<p_1<\infty$, $f\in L_p(\Gamma_1\times\Gamma_2)$, $Af\in L_{p_1}(\Gamma_1\times\Gamma_2)$. Тогда $f\in L_{p_1}(\Gamma_1\times\Gamma_2)$ и выполняется оценка

$$\|f\|_{p_1} \le const(\|Af\|_{p_1}+\|f\|_p)$$

с константой, не зависящей от f.

Теорема 2.6.3. Предположим, что коэффициенты оператора A принадлежат классу $H_\lambda(\Gamma_1\times\Gamma_2)$ для некоторого λ $(0<\lambda<1)$, $f\in L_p(\Gamma_1\times\Gamma_2)$, $Af\in H_\lambda(\Gamma_1\times\Gamma_2)$. Тогда $f\in H_{\lambda-0}(\Gamma_1\times\Gamma_2)$, и для любого λ' $(0<\lambda'<\lambda)$ выполняется оценка

$$\|f\|_{\lambda'} \le const(\|Af\|_\lambda+\|f\|_p)$$

с константой, не зависящей от f.

Теорема 2.6.4. Пусть m, $n(\ge 0)$ - целые числа, $0<\lambda<1$, $\Gamma_1\in C^{m+\lambda}$, $\Gamma_2\in C^{n+\lambda}$, коэффициенты оператора A принадлежат классу $C^\lambda_{mn}(\Gamma_1\times\Gamma_2)$, $f\in L_p(\Gamma_1\times\Gamma_2)$, $Af\in C^\lambda_{mn}(\Gamma_1\times\Gamma_2)$. Тогда любого λ' $(0<\lambda'<\lambda)$ $f\in C^{\lambda'}_{mn}(\Gamma_1\times\Gamma_2)$ и выполняется оценка

$$\|f\|^{\lambda'}_{m,n} \le const(\|Af\|^\lambda_{m,n} + \|f\|^{\lambda'}_{m,n})$$

с константой, не зависящей от f.

Доказательство теоремы 2.6.2. Операторы, составляющие символ оператора A, являются обратимыми сингулярными интегральными операторами с внешними гельдеровскими коэффициентами. Из формул обращения сингулярного интегрального оператора с внешними коэффициентами (пункт 3^o) следует, что оператор-функции $(A_1^{\pm}(t_1))^{-1}$ имеют вид (2.6.3), где $b_{\pm}\in H_{\lambda}(\Gamma_1\times\Gamma_2)$, $k_{\pm}\in H_{\lambda-0}(\Gamma_1\times\Gamma_2^2)$. Тогда частичный регуляризатор R_1 оператора A по первой переменной, находимый по формуле (2.6.4), принадлежит алгебре $\mathfrak{A}_p^{\lambda}(\Gamma_1,\Gamma_2)$. Аналогично строим частичный регуляризатор $R_2(\in\mathfrak{A}_p^{\lambda}(\Gamma_1,\Gamma_2))$ по второй переменной. Тогда этой алгебре принадлежит и находимый по формуле (2.6.2) регуляризатор R оператора A. В силу леммы 2.6.1, оператор $T = RA-I$ имеет вид (2.6.5), где $k\in H_{\lambda-0}(\Gamma_1^2\times\Gamma_2^2)$, $k(t_1,t_1,t_2,\tau_2)\equiv 0$, $k(t_1,\tau_1,t_2,t_2)\equiv 0$. Из утверждения, доказанного в [17], с.23, пункт 7°, следует, что для любого $\lambda'(0<\lambda'<\lambda/2)$ имеет место представление

$$\frac{k(t_1,\tau_1,t_2,\tau_2)}{(\tau_1-t_1)(\tau_2-t_2)} = \frac{a(t_1,\tau_1,t_2,\tau_2)}{|\tau_1-t_1|^{1-\lambda'}|\tau_2-t_2|^{1-\lambda'}},$$

где функция a (зависящая от λ') непрерывна на $\Gamma_1^2\times\Gamma_2^2$.

Зафиксируем число λ' $(0<\lambda'<\lambda/2)$. Из указанного выше представления ядра оператора T и теоремы 1.15 книги [11], с.108 (где нужно положить $k_1=k_2=\infty$, $r_1=1$, $r_2=\frac{p'}{p}$, $q=p'$, $\lambda=\frac{1}{p}$) следует что оператор T ограничен из $L_p(\Gamma_1\times\Gamma_2)$ в $L_{p'}(\Gamma_1\times\Gamma_2)$, если $1<p\le p'\le\frac{p}{1-\lambda'}$.

Тогда оператор T ограничен из $L_p(\Gamma_1\times\Gamma_2)$ в $L_{r_1}(\Gamma_1\times\Gamma_2)$, где

$$r_1 = \min\left(p_1,\ \frac{p}{1-\lambda'}\right).$$

В силу равенства $f=RAf-Tf$ и ограниченности оператора R во всех пространствах $L_r(\Gamma_1\times\Gamma_2)$ $(1<r<\infty)$, получаем, что $f\in L_{r_1}(\Gamma_1\times\Gamma_2)$ и имеет место оценка

$$\|f\|_{r_1} \le const(\|Af\|_{p_1}+\|f\|_p)$$

с константой, не зависящей от f. Если $r_1<p_1$, снова применяем тот же прием (с заменой p на r_1). После конечного числа шагов получим, что $f\in L_{p_1}(\Gamma_1\times\Gamma_2)$. Комбинируя получаемые оценки, выводим требуемую оценку для $\|f\|_{p_1}$.

Теорема доказана.

Теоремы 2.6.3 и 2.6.4 доказываются аналогично.

ГЛАВА 3. ВЫЧИСЛЕНИЕ ИНДЕКСА БИСИНГУЛЯРНОГО ОПЕРАТОРА

В этой главе мы получим формулу для нахождения индекса бисингулярного оператора. В основу этого вычисления положена теорема 2.5.3. В ней бисингулярный Ф - оператор выражается через характеристический оператор A^0 и бисингулярный оператор A_0 специального вида. При этом A^0 и A_0 являются Ф - операторами. В силу теоремы 2.5.3,

$$\operatorname{Ind} A = \operatorname{Ind} A^0 + \operatorname{Ind} A_0.$$

Индекс каждого из двух последних операторов вычисляется отдельно (пункты 1^o и 2^o). Оператор A_0 будем называть *остаточным оператором, отвечающим оператору* A.

Всюду ниже предполагается, что для каждого из рассматриваемых контуров точка $z=0$ принадлежит определяемой им ограниченной области в $\mathbb{C}$. Такое предположение не нарушает общность рассуждений.

1^o. *Индекс характеристической части.*

Рассмотрим бисингулярный оператор с внешними коэффициентами

$$(A^0 f)(t_1,t_2) = a_{++}(t_1,t_2)(P_{++}f)(t_1,t_2) +$$
$$+ a_{+-}(t_1,t_2)(P_{+-}f)(t_1,t_2) + a_{-+}(t_1,t_2)(P_{-+}f)(t_1,t_2) +$$
$$+ a_{--}(t_1,t_2)(P_{--}f)(t_1,t_2),$$

действующий в $L_p(\Gamma_1\times\Gamma_2)$. Необходимые и достаточные условия фредгольмовости этого оператора (которые в данном случае будем предполагать выполненными) имеют вид:

$$a_{+\pm}(t_1,t_2)\neq 0,\ a_{-\pm}(t_1,t_2)\neq 0,\ t_1\in\Gamma_1,\ t_2\in\Gamma_2,$$
$$\operatorname{ind}_1 a_{+\pm} = \operatorname{ind}_1 a_{-\pm},\ \operatorname{ind}_2 a_{\pm+} = \operatorname{ind}_2 a_{\pm-}.$$

Для каждой комбинации знаков функция

$$\frac{a_{\pm\pm}(t_1,t_2)}{t_1^{ind_1 a_{\pm\pm}}\cdot t_2^{ind_2 a_{\pm\pm}}}$$

не обращается в ноль на $\Gamma_1\times\Gamma_2$ и имеет нулевые частичные индексы. Поэтому можно выбрать однозначную и непрерывную ветвь функции

$$\ln\frac{a_{\pm\pm}(t_1,t_2)}{t_1^{ind_1 a_{\pm\pm}}\cdot t_2^{ind_2 a_{\pm\pm}}}.$$

Рассмотрим семейство A_λ^0 $(0\le\lambda\le1)$ бисингулярных операторов с внешними коэффициентами следующего вида

$$b_{\pm\pm}(t_1,t_2;\lambda) = t_1^{ind_1 a_{\pm\pm}}\cdot t_2^{ind_2 a_{\pm\pm}}\times$$

$$\times\exp\left(\lambda\ln\frac{a_{\pm\pm}(t_1,t_2)}{t_1^{ind_1 a_{\pm\pm}}\cdot t_2^{ind_2 a_{\pm\pm}}}\right),\ t_1\in\Gamma_1,\ t_2\in\Gamma_2.$$

Из теоремы 2.4.1 получаем, для любого $\lambda(\in[0,1])$ A_λ^0 является Ф - оператором в $L_p(\Gamma_1\times\Gamma_2)$. Кроме того, $A_1^0 = A^0$, и семейство A_λ^0 непрерывно (по норме) зависит от λ. В силу гомотопической устойчивости индекса, $\mathrm{Ind}\,A^0 = \mathrm{Ind}\,A_0^0$. Обозначая

$$\mathrm{ind}_1 a_{++} = a,\ \mathrm{ind}_2 a_{++} = b,\ \mathrm{ind}_1 a_{+-} = c,\ \mathrm{ind}_2 a_{-+} = d$$

и учитывая приведенные выше соотношения для частичных индексов, получим, что оператор A_0^0 имеет следующий вид:

$$(A_0^0 f)(t_1,t_2) = t_1^a\ t_2^b\ (P_{++}f)(t_1,t_2) +$$

$$+\ t_1^c\ t_2^b\ (P_{+-}f)(t_1,t_2) + t_1^a\ t_2^d\ (P_{-+}f)(t_1,t_2) +$$

$$+\ t_1^c\ t_2^d\ (P_{--}f)(t_1,t_2),\ t_1\in\Gamma_1,\ t_2\in\Gamma_2.$$

Умножая обе части слева на $t_1^{-a}t_2^{-b}$ (это соответствует умножению оператора A_0^0 слева на обратимый оператор), получим такой оператор:

$$(A_{\alpha,\beta}f)(t_1,t_2) \overset{def}{=} (P_{++}f)(t_1,t_2) +$$

$$+ t_1^{\alpha}\,(P_{+-}f)(t_1,t_2) + t_2^{\beta}(P_{-+}f)(t_1,t_2) + \tag{3.1.1}$$

$$+ t_1^{\alpha}\, t_2^{\beta}\,(P_{--}f)(t_1,t_2),\ t_1\in\Gamma_1,\ t_2\in\Gamma_2.$$

где $\alpha=c-a$, $\beta=d-b$. Тогда $\mathrm{Ind}A^0 = \mathrm{Ind}A_0^0 = \mathrm{Ind}A_{\alpha,\beta}$.

Введем некоторые обозначения и сформулируем вспомогательные результаты.

Обозначим через $Q_{\alpha}(\alpha\in\mathbb{Z})$ действующий в $L_p(\Gamma)$ оператор

$$Q_{\alpha}:\ f(t) \to t^{\alpha}\, f(t),\ t\in\Gamma.$$

Для α, $\beta\in\mathbb{Z}$ введем оператор $Q_{\alpha,\beta} = Q_{\alpha}\otimes Q_{\beta}(\in\mathcal{B}_p(\Gamma_1\times\Gamma_2))$. В этих обозначениях оператор $A_{\alpha,\beta}$ принимает вид:

$$A_{\alpha,\beta} = P_{++} + Q_{\alpha,0}\,P_{+-} + Q_{0,\beta}\,P_{-+} + Q_{\alpha,\beta}P_{--}.$$

Непосредственной проверкой доказываются следующие формулы, связывающие операторы, действующие в $L_p(\Gamma)$:

при $\alpha>0$

$$(P_+Q_{\alpha}P_-f)(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\tau^{\alpha}-t^{\alpha}}{\tau-t}\,f(\tau)\,d\tau,\ t\in\Gamma; \tag{3.1.2}$$

$$P_-Q_{\alpha}P_+ = 0; \tag{3.1.3}$$

при $\alpha<0$

$$(P_-Q_{\alpha}P_+f)(t) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\tau^{\alpha}-t^{\alpha}}{\tau-t}\,f(\tau)\,d\tau,\ t\in\Gamma; \tag{3.1.4}$$

$$P_+Q_{\alpha}P_- = 0. \tag{3.1.5}$$

Рассмотрим действующий в $L_p(\Gamma_1\times\Gamma_2)$ оператор $R_{\alpha,\beta}$ следующего вида:

$$R_{\alpha,\beta} = P_{++} + Q_{-\alpha,0}\,P_{+-} + Q_{0,-\beta}\,P_{-+} + Q_{\alpha,\beta}P_{--}.$$

В силу теоремы 2.4.1, $R_{\alpha,\beta}$ является Φ - оператором.

Лемма 3.1.1. Оператор $R_{\alpha,\beta}$ является регуляризатором оператора $A_{\alpha,\beta}$.

Доказательство. Нужно показать, что символы бисингулярных операторов $R_{\alpha,\beta}$ и $A_{\alpha,\beta}$ связаны соотношением

$$(R_{\alpha,\beta})_i^{\pm}(t_i) = ((A_{\alpha,\beta})_i^{\pm}(t_i))^{-1}.$$

Легко видеть, что для $t_1 \in \Gamma_1$

$$(R_{\alpha,\beta})_1^{+}(t_1) = P_+ + t_1^{\alpha}\ P_- \ (\in \mathcal{B}_p(\Gamma_2),$$

$$(A_{\alpha,\beta})_1^{+}(t_1) = P_+ + t_1^{-\alpha}\ P_- \ (\in \mathcal{B}_p(\Gamma_2),$$

операторы в правых частях являются взаимно обратными. Аналогично рассматриваются остальные компоненты символов.

Лемма доказана.

Ниже мы будем использовать следующие легко проверяемые соотношения:

$$R_{\alpha,\beta}\ A_{\alpha,\beta} = I + P_{++}Q_{\alpha,\beta}P_{--} + P_{+-}Q_{-\alpha,\beta}P_{-+} + P_{-+}Q_{\alpha,-\beta}P_{+-} + \\ + P_{--}Q_{-\alpha,-\beta}P_{++}, \qquad (3.1.6)$$

$$A_{\alpha,\beta}R_{\alpha,\beta} = P_{++} + Q_{\alpha,0}P_{+-}Q_{-\alpha,0} + Q_{0,\beta}P_{-+}Q_{0,-\beta} + \\ + Q_{\alpha,\beta}P_{--}Q_{-\alpha,-\beta}. \qquad (3.1.7)$$

Перейдем теперь непосредственно к вычислению индекса оператора $A_{\alpha,\beta}$. Будут разобраны три случая: $\alpha>0$, $\beta>0$; $\alpha>0$, $\beta<0$; $\alpha\neq 0$, $\beta=0$. Все остальные случаи исследуются аналогично.

Случай 1. $\alpha>0$, $\beta>0$

Из (3.1.6), учитывая (3.1.2)-(3.1.5), получаем:

$$(R_{\alpha,\beta}A_{\alpha,\beta}f)(t_1,t_2) = f(t_1,t_2) +$$

$$+ \frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{\Gamma_1}\int_{\Gamma_2} \frac{\tau_1^{\alpha}-t_1^{\alpha}}{\tau_1-t_1}\ \frac{\tau_2^{\beta}-t_2^{\beta}}{\tau_2-t_2}\ f(\tau_1,\tau_2)\ d\tau_1 d\tau_2 +$$

$$+ \frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{\Gamma_1}\int_{\Gamma_2} \frac{\tau_1^{-\alpha}-t_1^{-\alpha}}{\tau_1-t_1}\ \frac{\tau_2^{-\beta}-t_2^{-\beta}}{\tau_2-t_2}\ f(\tau_1,\tau_2)\ d\tau_1 d\tau_2 =$$

$$= f(t_1,t_2) +$$

$$+ \frac{1}{(2\pi i)^2} \sum_{\substack{0\le k\le\alpha-1\\ 0\le l\le\beta-1}} t_1^{\alpha-1-k}\ t_2^{\beta-1-l} \int_{\Gamma_1}\int_{\Gamma_2} f(\tau_1,\tau_2)\ \tau_1^{k}\ \tau_{2\_}^{l}\ d\tau_1 d\tau_{2\_} +$$

$$+ \frac{1}{(2\pi i)^2} \sum_{\substack{0\le k\le\alpha-1\\ 0\le l\le\beta-1}} t_1^{-1-k}\ \ t_2^{-1-l} \int_{\Gamma_1}\int_{\Gamma_2} f(\tau_1,\tau_2)\ \tau_1^{k-\alpha}\ \tau_{2\_}^{l-\beta}\ d\tau_1 d\tau_2,$$

$f\in L_p(\Gamma_1\times\Gamma_2)$, $t_1\in\Gamma_1$, $t_2\in\Gamma_2$.
Так как $\ker A_{\alpha,\beta}\subset\ker R_{\alpha,\beta}A_{\alpha,\beta}$, отсюда получаем, что любая функция из $\ker A_{\alpha,\beta}$ представима в виде линейной комбинации семейства следующих функций:

$$t_1^{\alpha-1-k}t_2^{\beta-1-l},\ t_1^{-1-k}\ t_2^{-1-l},\ k=0,1,\ldots\alpha-1;\ l=0,1,\ldots\beta-1.$$

Возьмем их линейную комбинацию

$$f(t_1,t_2) = \sum_{\substack{0\le k\le\alpha-1\\ 0\le l\le\beta-1}} (\lambda_{kl}t_1^{\alpha-1-k}\ t_2^{\beta-1-l} + \mu_{kl}t_1^{-1-k}\ t_2^{-1-l}),$$

где λ_{kl}, $\mu_{kl}\in\mathbb{C}$ $(0\le k\le\alpha-1,\ 0\le l\le\beta-1)$.
Тогда

$$(A_{\alpha,\beta}f)(t_1,t_2) = \sum_{\substack{0\le k\le\alpha-1\\ 0\le l\le\beta-1}} (\lambda_{kl} + \mu_{kl})\ t_1^{\alpha-1-k}\ t_2^{\beta-1-l};$$

равенство $A_{\alpha,\beta}f = 0$ равносильно тому, что $\lambda_{kl} = -\mu_{kl}$ для всех k, l. Таким образом, функции

$$t_1^{\alpha-k}\ t_2^{\beta-l} - t_1^{-k}\ t_2^{-l}\ (k=1,\ldots\alpha;\ l=1,\ldots\beta)$$

образуют базис в $\ker A_{\alpha,\beta}$, и

$$\dim\ker A_{\alpha,\beta} = \alpha\beta.$$

Исследуем теперь коядро оператора $A_{\alpha,\beta}$. Учитывая (3.1.3) и (3.1.5), из (3.1.7) получаем:

$$A_{\alpha,\beta}R_{\alpha,\beta} = (P_{++} + P_{++}\ Q_{\alpha,\beta}P_{--}Q_{-\alpha,-\beta}) +$$
$$+ (P_{+-}Q_{\alpha,0}P_{+-}Q_{-\alpha,0} + P_{+-}Q_{\alpha,\beta}P_{--}Q_{-\alpha,-\beta}) + \qquad (3.1.8)$$

$$+ (P_{-+}Q_{0,\beta}P_{-+}Q_{0,-\beta} + P_{-+}Q_{\alpha,\beta}P_{--}Q_{-\alpha,-\beta}) +$$
$$+P_{--}Q_{\alpha,\beta}P_{--}Q_{-\alpha,-\beta}.$$

Используя вытекающее из (3.1.3) равенство
$$P_{-}Q_{\alpha}P_{-}Q_{-\alpha} = P_{-} \ (\alpha>0),$$
получаем, что
$$P_{--}Q_{\alpha,\beta}P_{--}Q_{-\alpha,-\beta} = P_{--},$$
и суммы, стоящие во второй и третьей скобках в (3.1.8), равны соответственно P_{+-} и P_{-+}. Тогда $A_{\alpha,\beta}R_{\alpha,\beta} = I + P$, где $P = P_{++}\,Q_{\alpha,\beta}P_{--}Q_{-\alpha,-\beta}$. Используя (3.1.5), непосредственными вычислениями получаем, что $P^2 = P$. Отсюда
$$(I+P)(I-\tfrac{1}{2}P) = I, \ A_{\alpha,\beta}R_{\alpha,\beta}(I-\tfrac{1}{2}P) = I,$$
оператор $A_{\alpha,\beta}$ обратим справа, $\dim\operatorname{coker} A_{\alpha,\beta} = 0$. Окончательно получаем: при $\alpha>0$, $\beta>0$ $\operatorname{Ind} A_{\alpha,\beta} = \alpha\beta$.

Случай 2. $\alpha>0$, $\beta<0$.

Из формулы (3.1.6) в этом случае имеем:
$$R_{\alpha,\beta}\,A_{\alpha,\beta} = I,$$
то есть $\dim\operatorname{coker} R_{\alpha,\beta} = 0$.

Проводя такие же вычисления, как при исследовании предыдущего случая, можно получить:
$$A_{\alpha,\beta}R_{\alpha,\beta} = I - P_{+-}Q_{\alpha,\beta}P_{-+}Q_{-\alpha,-\beta},$$
$$(A_{\alpha,\beta}R_{\alpha,\beta}f)(t_1,t_2) = f(t_1,t_2)$$
$$- \sum_{\substack{0\le k\le\alpha-1\\ 0\le l\le\beta-1}} t_1^k\,t_2^l\,\frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{\Gamma_1}\int_{\Gamma_2} f(\tau_1,\tau_2)\,\tau_1^{-1-k}\,\tau_{2\_}^{-1-l}\,d\tau_1 d\tau_2,$$
то есть $\ker R_{\alpha,\beta}(\subset L_p(\Gamma_1\times\Gamma_2))$ содержится в подпространстве, порожденном функциями
$$t_1^k\,t_2^l, \ \ 0\le k\le\alpha-1, \ \beta\le l\le -1, \ t_1\in\Gamma_1, \ t_2\in\Gamma_2.$$
Легко убедиться в том, что все эти функции принадлежат $\ker R_{\alpha,\beta}$, то есть $\dim\ker R_{\alpha,\beta} = |\alpha\beta|$. Оператор $R_{\alpha,\beta}$ является регуляризатором оператора $A_{\alpha,\beta}$. Поэтому

$$\operatorname{Ind} A_{\alpha,\beta} = - \operatorname{Ind} R_{\alpha,\beta} = - |\alpha\beta| = \alpha\beta.$$

Случай 3. $\alpha\neq 0$, $\beta=0$.

В этом случае

$$A_{\alpha,\beta} = P_{++} + (Q_{\alpha}\otimes I)P_{+-} + P_{-+} + (Q_{\alpha}\otimes I)P_{--} =$$
$$= I\otimes P_{+} + Q_{\alpha}\otimes P_{-}.$$

Оператор $I\otimes P_{+} + Q_{-\alpha}\otimes P_{-}$ является (двусторонним) обратным к $A_{\alpha,\beta}$, то есть $\operatorname{Ind} A_{\alpha,\beta} = 0$.

Полученные результаты резюмирует следующая теорема.

Теорема 3.1.1. Пусть

$$A = a_{++}P_{++} + a_{+-}P_{+-} + a_{-+}P_{-+} + a_{--}P_{--} \text{ -}$$

действующий в $L_p(\Gamma_1\times\Gamma_2)$ бисингулярный оператор с непрерывными внешними коэффициентами. Если A является Φ - оператором, то его индекс может быть вычислен по формуле

$$\operatorname{Ind} A = (\operatorname{ind}_1 a_{++} - \operatorname{ind}_1 a_{--})(\operatorname{ind}_2 a_{+-} - \operatorname{ind}_2 a_{-+}).$$

Отметим также следующее утверждение.

Теорема 3.1.1′. Пусть

$$B = P_{++}b_{++}I + P_{+-}b_{+-}I + P_{-+}b_{-+}I + P_{--}b_{--}I \text{ -}$$

действующий в $L_p(\Gamma_1\times\Gamma_2)$ $(1<p<\infty)$ бисингулярный оператор с внутренними непрерывными коэффициентами. Если B является Φ - оператором, то его индекс может быть вычислен по формуле

$$\operatorname{Ind} B = - (\operatorname{ind}_1 b_{++} - \operatorname{ind}_1 b_{--})(\operatorname{ind}_2 b_{+-} - \operatorname{ind}_2 b_{-+}).$$

Это утверждение выводится из теоремы 3.1.1. Сначала, используя замечание к теореме 2.4.1, задачу сводим к вычислению индекса оператора $R_{\alpha,\beta}$, где $\alpha = \operatorname{ind}_1 b_{++}-\operatorname{ind}_1 b_{--}$, $\beta = \operatorname{ind}_2 b_{+-}-\operatorname{ind}_2 b_{-+}$. Из равенства $\operatorname{Ind}R_{\alpha,\beta} = -\operatorname{Ind}A_{\alpha,\beta} = -\alpha\beta$ получаем требуемую формулу.

2°. Индекс остаточного оператора.

Приведем сначала некоторые вспомогательные обозначения и результаты.

Пусть X - топологическое пространство. Через $[X]$ будем обозначать множество компонент линейной связности пространства X. Если X, кроме того, является топологической группой, то в $[X]$ индуцируется групповая структура.

Пусть $\mathcal{G}(I+\mathcal{K}_p(\Gamma))$ - множество всех действующих в $L_p(\Gamma)$ обратимых операторов вида $I+T$ $(T\in\mathcal{K}_p(\Gamma))$. Обозначим через $C(\Gamma_1,\mathcal{G}(I+\mathcal{K}_p(\Gamma_2)))$ множество всех непрерывных по норме отображений Γ_1 в $\mathcal{G}(I+\mathcal{K}_p(\Gamma_2))$. С операцией умножения и нормой из $C(\Gamma_1,\mathcal{B}_p(\Gamma_2))$ это множество становится топологической группой.

Пусть $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ - монотонно возрастающая ограниченная по норме последовательность конечномерных проекторов в $L_p(\Gamma_2)$, такая, что при $n\to\infty$ операторы P_n (P_n^*) сильно сходятся к единичному оператору в $L_p(\Gamma_2)$ $((L_p(\Gamma_2))^*)$. Пусть $I+T(\cdot)\in C(\Gamma_1,\mathcal{G}(I+\mathcal{K}_p(\Gamma_2)))$. Из легко проверяемого равенства

$$\lim_{n\to\infty}\max_{t_1\in\Gamma_1}\|T(t_1) - P_nT(t_1)P_n\| = 0$$

вытекает существование такого числа n_0, что для всех $n(\ge n_0)$ операторы $I + P_nT(t_1)P_n$ обратимы для всех $t_1\in\Gamma_1$. Тогда для тех же n и t_1 обратимы операторы $P_n(I+T(t_1))P_n$, действующие в конечномерных пространствах $P_nL_p(\Gamma_2)$. Поэтому для $n\ge n_0$ определенная на Γ_1 непрерывная комплекснозначная функция $\det(P_n(I + T(t_1))P_n)$ нигде не обращается в ноль и, следовательно, определена величина

$$\operatorname{ind}\det(P_n(I + T(t_1))P_n).$$

Следующее утверждение является переформулировкой стандартных фактов о гомотопической структуре множества $\mathcal{G}(I+\mathcal{K}_p(\Gamma_2)))$ ([37], [38], [14], с.205, упр. 7.10а) в удобном для нас виде.

Лемма 3.2.1. Для $I + T(\cdot)(\in C(\Gamma_1,\mathcal{G}(I+\mathcal{K}_p(\Gamma_2))))$ существует предел

$$\deg\,(I+T(\cdot)) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n\to\infty}\operatorname{ind}\det(P_n(I + T(t_1))P_n).$$

Эта величина (принимающая целочисленные значения) является постоянной на компоненте $[C(\Gamma_1,\mathcal{G}(I+\mathcal{K}_p(\Gamma_2)))]$, содержащей $I+T(t_1)$. Индуцированное отображение

$$[C(\Gamma_1,\mathcal{G}(I+\mathcal{K}_p(\Gamma_2)))] \dashrightarrow \mathbb{Z}$$

является изоморфизмом этих групп.

Число $\deg(I+T(\cdot))$ мы будем называть *степенью* оператор-функции $I + T(\cdot)$. Легко показать, что эта величина на зависит от выбора последовательности $\{P_n\}$. В частности, это следует из доказываемой ниже теоремы 3.2.1.

Не нарушая общности рассуждений, можно предполагать, что P_1 - одномерный проектор в $L_p(\Gamma_2)$. Обозначим: $P = P_1$; $Q=I-P(\in\mathcal{B}_p(\Gamma_2))$. Для любого $k(\in\mathbb{Z})$ оператор-функция t_1^kP+Q принадлежит множеству $C(\Gamma_1,\mathcal{G}(I+\mathcal{K}_p(\Gamma_2)))$. Из леммы 3.2.1 следует, что ее степень равна k. Отсюда получаем такое утверждение.

Лемма 3.2.2. Пусть

$$I+T(t_1)\in C(\Gamma_1,\mathcal{G}(I+\mathcal{K}_p(\Gamma_2))),\ \deg(I+T(t_1)) = k.$$

Тогда оператор-функции $I+T(t_1)$ и t_1^kP+Q принадлежат одной компоненте множества $[C(\Gamma_1,\mathcal{G}(I+\mathcal{K}_p(\Gamma_2)))]$.

Перейдем теперь непосредственно к вычислению индекса.

Теорема 3.2.1. Пусть $I+T_1^{\pm}(\cdot)\in C(\Gamma_1,\mathcal{G}(I+\mathcal{K}_p(\Gamma_2)))$, $I+T_2^{\pm}(\cdot)\in C(\Gamma_2,\mathcal{G}(I+\mathcal{K}_p(\Gamma_1)))$, $A(\in\mathfrak{A}_p(\Gamma_1,\Gamma_2))$ - бисингулярный оператор с символом $I+T_1^+(t_1)$, $I+T_1^-(t_1)$, $I+T_2^+(t_2)$, $I+T_2^-(t_2)$. Тогда

$$\begin{aligned}\operatorname{Ind} A = &- \deg(I+T_1^+(\cdot)) + \deg(I+T_1^-(\cdot)) - \\ &- \deg(I+T_2^+(\cdot)) + \deg(I+T_2^-(\cdot)).\end{aligned} \tag{3.2.1}$$

Доказательство. Рассмотрим сначала оператор специального вида: $A(\in\mathfrak{A}_p(\Gamma_1,\Gamma_2))$ - бисингулярный оператор с символом $I+T_1(t_1)$, I, I, I, где $T_1(\cdot)\in C(\Gamma_1,\mathcal{K}_p(\Gamma_2))$.

Напомним, что, в силу следствия теоремы 2.5.2, для любой оператор-функции $T_1(t_1)$ из такого класса оператор A существует и находится однозначно с точностью до слагаемого из $\mathcal{K}_p(\Gamma_1,\Gamma_2)$. Предположим, что $I+T_1(t_1)\in C(\Gamma_1,\mathcal{G}(I+\mathcal{K}_p(\Gamma_2)))$. Тогда A является Ф - оператором. Покажем, что

$$\mathrm{Ind}\ A = -\deg(I+T_1(\cdot)).$$

Обозначим: $\deg(I+T_1(\cdot))=k$. Введем оператор-функцию $B(t_1)= = t_1^kP+Q$ $(\Gamma_1\dashrightarrow\mathcal{B}_p(\Gamma_2))$. Тогда оператор $\hat{B}(\cdot)$, действующий в $L_p(\Gamma_1\times\Gamma_2)$, имеет вид:

$$\hat{B}(\cdot) = t_1^kI\otimes P+I\otimes Q. \tag{3.2.2}$$

Рассмотрим оператор

$$B = \hat{B}(\cdot)(P_+\otimes I) + (P_-\otimes I). \tag{3.2.3}$$

В силу леммы 2.2.3, $B\in\mathfrak{A}_p(\Gamma_1,\Gamma_2)$ и символом оператора B является набор четырех оператор-функций $B(t_1)$, I, I, I. Из леммы 3.2.1 и гомотопической устойчивости индекса Ф - оператора следует, что Ind A = Ind B. Из (3.2.2) и (3.2.3) получаем:

$$B = (t_1^kP_++P_-)\otimes P+I\otimes Q. \tag{3.2.4}$$

Обозначим: $\mathfrak{X}_1= (I\otimes P)L_p(\Gamma_1\times\Gamma_2)$, $\mathfrak{X}_2= (I\otimes Q)L_p(\Gamma_1\times\Gamma_2)$. Тогда

$$L_p(\Gamma_1\times\Gamma_2) = \mathfrak{X}_1\oplus\mathfrak{X}_2.$$

Из (3.2.4) следует, что пространства $\mathfrak{X}_1$ и $\mathfrak{X}_2$ инвариантны относительно оператора B, причем $B|_{\mathfrak{X}_2}=I_{\mathfrak{X}_2}$. Поэтому

$$\mathrm{Ind}\ B = \mathrm{Ind}(B|_{\mathfrak{X}_1}).$$

Обозначим: $C=B|_{\mathfrak{X}_1}$ $(\in\mathcal{B}(\mathfrak{X}_1))$.

Пусть $e(\in L_p(\Gamma_2))$ - функция единичной нормы, порождающая (одномерное) подпространство $P(L_p(\Gamma_2))$. Отображение U: $f\dashrightarrow f\otimes e$ осуществляет изометрический изоморфизм между пространствами $L_p(\Gamma_1)$ и $(I\otimes P)(L_p(\Gamma_1\times\Gamma_2))$. Введем оператор $D=U^{-1}CU(\in\mathcal{B}_p(\Gamma_1))$. Тогда Ind C = Ind D, оператор D действует в $L_p(\Gamma_1)$ по формуле $D = t_1^kP_++P_-$. Остается заметить, что Ind$D$=$-k$ ([3], с.152, теорема 7.3).

Аналогично доказываем, что индекс бисингулярного оператора A с символом I, $I+T_1(t_1)$, I, I $(I+T_1(\cdot)\in \in C(\Gamma_1,\mathcal{G}(I+\mathcal{K}_p(\Gamma_2)))$ равен $+\deg\ (I+T(\cdot))$.

Из доказанного выше и теоремы 2.5.1 следует общая формула (3.2.1).

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРНЫЕ УКАЗАНИЯ И ДОПОЛНЕНИЯ

Впервые критерий фредгольмовости бисингулярных интегральных операторов был получен в работах [28] (операторы с внешними коэффициентами) и [29] в следующих предположениях: Γ_1 и Γ_2- окружности и p=2. Бисингулярный интегральный оператор, вообще говоря, не является оператором локального типа, однако таковым является оператор, двойственный ему по Фурье; для анализа последнего оператора используется локальный метод И.Б.Симоненко. Подобные соображения применяются для бисингулярных операторов с внешними коэффициентами в $L_2(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$ $(\mathbb{R}=(-\infty;\infty))$ [27]. Возможен перенос последнего результата на случай произвольного p $(1<p<\infty)$ [30], [31], что связано с техническими осложнениями. Кроме того, выбор метода вносит дополнительные ограничения на классы рассматриваемых операторов (например, в последнем случае коэффициенты оператора должны быть непрерывны на одноточечной компактификации пространства $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$).

Отметим также в данном направлении работу [36], в которой исследование операторов Теплица в четверть-плоскости проводится методами теории C^*-алгебр. Подходы этой работы могут быть применены и к анализу операторов других классов, но только в случае p=2.

Изложенный в 1 "билокальный" подход позволяет исследовать бисингулярные интегральные операторы общего вида без упомянутых выше ограничений. Впервые этот метод был изложен в [20] как модификация локального метода И.Б.Симоненко. Здесь мы излагаем этот метод как реализацию локального метода И.Ц.Гохберга-Н.Я.Крупника, дополнив его весьма важным аналогом вводимого в теории операторов локального типа понятия квазиэквивалентности. Такой выбор изложения связан исключительно с удобством формулировок.

Отметим, что теоремы 2.3.1 и 2.4.1 дословно переносятся на случай контуров, каждый из которых состоит из конечного числа замкнутых попарно непересекающихся кривых типа Ляпунова. Доказательство леммы 2.3.1 для случая такого контура имеется в [23].

Билокальный подход, помимо рассмотренного выше приложения к бисигулярным операторам с непрерывными коэффициентами, имеет и другие применения. В частности, он позволяет исследовать алгебры бисингулярных операторов с кусочно-непрерывными коэффициентами [7], [8], [9] .

Вычисление индекса бисингулярного оператора дано в [21], [7], [22].

ЛИТЕРАТУРА

1. Гахов Ф.Д. Краевые задачи. 3-е изд. перераб. и доп. - М.:Наука, 1977. - 640 с.
2. Гохберг И.Ц., Крейн М.Г. Основные положения о дефектных числах, корневых числах и индексах линейных операторов // УМН. 1957. Т. 12. Вып. 2. С. 43-118.
3. Гохберг И.Ц., Крупник Н.Я. Введение в теорию одномерных сингулярных интегральных операторов. - Кишинев:

Штиинца, 1973.-426 с.
4. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, рядов, сумм и произведений.-М.: ГИФМЛ, 1963.-1100 с.
5. Данфорд Н., Шварц Дж.Т. Линейные операторы. Общая теория. /Пер. с англ. - М.: Изд-во иностр. лит-ры. 1962. -896 с.
6. Диксмье Ж. C^*-алгебры и их представления: Пер.с франц.- М.:Наука, 1974.
7. Дудучава Р.В. О бисингулярных интегральных операторах и операторах типа свертки на квадранте // Докл. АН СССР 1975. Т. 201. № 2. С.279-282.
8. Дудучава Р.В. Бисингулярные интегральные операторы и граничные задачи теории аналитических функций в пространствах обобщенных функций // Докл. АН СССР. 1975. Т.224. № 5. С. 996-999.
9. Дудучава Р.В. О бисингулярных интегральных операторах с разрывными коэффициентами // Матем. сборник 1976. Т.101. № 4. С. 584-609.
10. Зигмунд А. Тригонометрические ряды: В 2-х т. - М.: Мир, 1965. Т. 2. - 537 с.
11. Интегральные уравнения / Забрейко П.П., Кошелев А.И., Красносельский М.А. и др. -М.: Наука, 1968. -448 с.
12. Иосида К. Функциональный анализ: Пер. с англ. - М: - Мир, 1967. -625 с.
13. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ. 2-е изд. перераб. - М.: Наука, 1977. - 744 с.
14. Каруби М. *К* - теория. Введение: Пер. с англ. - М.: - Мир, 1981. - 360 с.
15. Крейн С.Г. Линейные уравнения в банаховом пространстве. - М.: Наука, 1971. - 104 с.
16. Литвинчук Г.С. Краевые задачи и сингулярные интегральные уравнения со сдвигом.-М.:Наука, 1977,.-448 с.
17. Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения.

3-е изд. - М.: Наука, 1968. - 512 с.
18. Наймарк М.А. Нормированные кольца. - М.: Наука, 1969. -480 с.
19. Пале Р. Семинар по теореме Атьи-Зингера: Пер. с англ.- М.: Мир, 1970. -360 с.
20. Пилиди В.С. О многомерных бисингулярных операторах // Докл.АН СССР. 1971. Т. 201. № 4. С .789-789.
21. Пилиди В.С. Вычисление индекса бисингулярного оператора. //Функц. анализ и его прилож. 1973. Т.7. № 4. С.93-94.
22. Пилиди В.С. К вопросу об индексе бисингулярных операторов // Мат. анализ и его прилож. Т.7. - Ростов-на-Дону, 1975. С. 123-136.
23. Пилиди В.С. Априорные оценки для одномерных сингулярных интегральных операторов с непрерывными коэффициентами // Матем. заметки. 1975. Т. 17. № 6. С. 851-856.
24. Пилиди В.С. Локальный метод в теории линейных операторных уравнений типа бисингулярных интегралных уравнений. Дисс. ... канд. физ.-мат. наук. - Ростов-на-Дону, 1972. - 142 с.
25. Симоненко И.Б. Новый общий метод исследования линейных операторных уравнений типа сингулярных интегральных уравнений. I. // Изв.АН СССР. Сер. матем. 1965. Т. 29. № 3. С. 567-586.
26. Симоненко И.Б. Новый общий метод исследования линейных операторных уравнений типа сингулярных интегральных уравнений. II. // Изв.АН СССР. Сер. матем. 1965. Т. 29. № 4. С. 757-782.
27. Симоненко И.Б. Операторы свертки в конусах // Матем. сборник. 1967. Т. 74. № 2. с. 298- 313.
28. Симоненко И.Б. О многомерных дискретных свертках //Матем. исследования (Кишинев). 1968. Т. 3. № 1. С. 108-122.
29. Симоненко И.Б. К вопросу разрешимости бисингулярных и

полисингулярных уравнений // Функц. анализ и его прилож. 1971. Т.5. № 1. С. 93-94.

30. Симоненко И.Б. Краевые задачи аналитических функций двух переменных и связанные с ними интегральные уравнения // ДАН СССР. 1971. Т. 199. № С. 551-552.
31. Симоненко И.Б. Характеристические бисингулярные уравнения в пространствах суммируемых функций // Изв. вузов. Математика. 1974. №2. С. 115-120.
32. Халмош П. Теория меры: Пер. с англ. - М.: ИЛ, 1953. - 292с.
33. Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ. Часть 1. Функции одного переменного. 2-е изд., перераб. и доп. - М.:Наука, 1976. - 320 с.
34. Cordes H.O. On a class of C^*-algebras // Math. Ann.1967. V. 170. N. 4. P. 283-313.
35. Cordes H.O. On a generalized Fredholm theory // J. reine und angew. Math. 1967. B. 227. S. 121-149.
36. Douglas R.G., Howe R. On the C^* - algebras of Toeplitz operators on the quarter - plane // Trans. Amer. Math. Soc. 1971. V. 158. N 1. P. 203-217.
37. Palais R.S. On the homotopy type of certain groups of operators // Topology. 1965. V. 3. N 3. P. 217-279.
38. Singer I.M. Operator theory and periodicity // Indiana Univ. Math. J. V. 20. N 10. 1971. P. 949-950.