1 p-адические числа

1.1 Нормированные поля

Определение абсолютного значения (нормы) на поле. Примеры: евклидова норма на $\mathbb{C}$ ($\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$), тривиальная норма. Единственная норма в конечном поле — тривиальная. p-адическая норма на $\mathbb{Q}$.

Неархимедовы нормы. Эквивалентное определение. Эквивалентность норм и теорема Островского. Формула произведения:

$$\prod_{2 \leqslant p \leqslant \infty} |a|_p = 1.$$

Последовательности Коши, полные поля, пополнение: определение и существование.

1.2 Представление p-адических чисел в виде степенных рядов

Свяжем с каждым «неархимедовым нормированным полем» несколько важных алгебраических объектов.

Определение 1 (+утверждение)**.** Пусть $(K, |\cdot|)$ — нормированное поле с неархимедовой нормой.

(1) Множество $\mathcal{O} = \{a \in K \mid |a| \leqslant 1\}$ называется *кольцом нормирования* $(K, |\cdot|)$ и является подкольцом K.

(2) Множество $\mathfrak{P} = \{a \in K \mid |a| < 1\}$ называется *идеалом нормирования* $(K, |\cdot|)$ и является единственным максимальным идеалом $\mathcal{O}$.

(3) Поле $k = \mathcal{O}/\mathfrak{P}$ называется *полем вычетов нормирования* $(K, |\cdot|)$.

Замечание. Кольцо с единственным максимальным идеалом называется *локальным*.

Утверждение 1. Для нормированного поля $(\mathbb{Q}, |\cdot|_p)$

$$\mathcal{O} = \mathbb{Z}_{(p)} = \left\{ \frac{a}{s} \mid s \not\equiv 0 \bmod p \right\}, \qquad \mathfrak{P} = p\mathbb{Z}_{(p)}, \qquad k \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}.$$

Доказательство. Первые два равенства очевидны. Для доказательства третьего рассмотрим гомоморфизм $\mathbb{Z} \to \mathcal{O}/\mathfrak{P}$, являющийся композицией вложения и канонического гомоморфизма в факторкольцо. Его ядро равно $p\mathbb{Z}$ и значит, гомоморфизм $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \to \mathcal{O}/\mathfrak{P}$ является вложением, остаётся показать его сюръективность.

Пусть $a/s \in \mathcal{O}$, тогда s обратимо в кольце $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, а значит существует такое b, что $bs \equiv a \bmod p\mathbb{Z}$. Эта сравнимость продолжается до $bs \equiv a \bmod p\mathcal{O}$. Для s существует обратный элемент $1/s$ в R, который также принадлежит R, домножая последнее сравнение на него находим $b \equiv a/s \bmod p\mathcal{O}$. ∎

Оказывается, что в случае неархимедового нормирования поле вычетов нормирования данного нормированного поля не меняется при пополнении этого поля. Для доказательства этого сформулируем сначала одно важное свойство неархимедовых норм.

Лемма 1. *Пусть* $(K, |\cdot|)$ *— нормированное поле с неархимедовой нормой,* $a, b \in K$. *Тогда*

$$|a| \neq |b| \Longrightarrow |a+b| = \max(|a|, |b|).$$

Доказательство. Пусть $|b| < |a|$ и предположим противное: $|a+b| < |a|$. Тогда

$$|a| = |a+b-b| \leqslant \max(|a+b|, |b|) < |a|.$$

Противоречие. ■

Теорема 1. *Пусть* $(K, |\cdot|)$ *— нормированное поле с неархимедовой нормой, а* $(\hat{K}, |\cdot|)$ *— его пополнение,* $\mathcal{O}$, $\hat{\mathcal{O}}$, $\mathfrak{P}$, $\hat{\mathfrak{P}}$, k, $\hat{k}$ *— соответствующие поля вычетов. Тогда* $k \cong \hat{k}$.

Доказательство. Пусть $\alpha \in \hat{K}$ и последовательность $\{a_n\} \subset K$ сходится к α. Тогда начиная с некоторого номера $N \in \mathbb{N}$ для всех $n > N$ имеем $|a_n - \alpha| < |\alpha|$, а значит $|a_n| = |a_n - \alpha + \alpha| = |\alpha|$ (по предыдущей лемме).

Пусть $\mathcal{O}$, $\hat{\mathcal{O}}$, $\mathfrak{P}$, $\hat{\mathfrak{P}}$ — соответствующие кольца и идеалы нормирований. Для $\alpha \in \hat{\mathcal{O}}$ существует $a \in K$, такое что $|a| = |\alpha|$, возьмём такое a. Очевидно, $a \in \mathcal{O}$ и $|a - \alpha| \leqslant 1$, а значит $a \equiv \alpha \bmod \hat{\mathfrak{P}}$ и a, таким образом, является прообразом α про очевидном гомоморфизме $\mathcal{O}/\mathfrak{P} \to \hat{\mathcal{O}}/\hat{\mathfrak{P}}$. ■

Прежде чем сформулировать основную теорему о представлении p-адических чисел степенными рядами, докажем одно важное свойство рядов в полных неархимедовых полях.

Лемма 2. *Пусть* $(\hat{K}, |\cdot|)$ *— полное нормированное поле с неархимедовой нормой и* $\{a_n\} \subset \hat{K}$. *Тогда*

$$\sum_n a_n \text{ сходится} \Longleftrightarrow a_n \to 0.$$

Доказательство. Импликация $\Rightarrow$ известна из классического анализа. Пусть $a_n \to 0$. Обозначим через $\{b_n = \sum_0^n a_n\}$ последовательность частичных сумм данного ряда, она является последовательностью Коши ввиду неравенства

$$|b_n - b_{n+k}| \leqslant \max\{|a_n|, \ldots, |a_{n+k}|\},$$

а значит, имеет предел в $\hat{K}$ — ввиду его полноты. ■

Следствие 1. *Если* $\{a_n\} \subset \hat{\mathcal{O}}$ *и* $x \in \hat{K}$, *то для сходимости ряда* $\sum a_n x^n$ *достаточно, чтобы* $x \in \hat{\mathfrak{P}}$.

Определение 2. Кольцо нормирования поля $\mathbb{Q}_p$ обозначается $\mathbb{Z}_p$ и имеет специальное название — *кольцо p-адических целых*. (Иногда, чтобы избежать путаницы, кольцо $\mathbb{Z}$ называют *кольцом рациональных целых*.)

Теорема 2. *Каждое $a \in \mathbb{Z}_p$ имеет единственное представление в виде суммы ряда*

$$a = \sum_{n=0}^{\infty} a_i p^i, \quad a_i \in \{0, \dots, p-1\}.$$

Каждое $a \in \mathbb{Q}_p$ имеет единственное представление в виде суммы ряда

$$a = \sum_{n=-k}^{\infty} a_i p^i, \quad k \in \mathbb{N}_0, a_i \in \{0, \dots, p-1\}.$$