

## Листок 4: $\lambda$ -исчисление с простыми типами

**Упражнение 1.** Доказать утверждения о типах.

$$(1) \vdash (\lambda x : \text{Nat} . \text{succ } x)4 : \text{Nat}$$

$$(2) \vdash (\lambda x : \text{Nat} . \text{is\_zero? } (\text{pred } x))1 : \text{Bool}$$

$$(3) f : \text{Bool} \rightarrow \text{Bool} \vdash \lambda x : \text{Bool} . \text{succ } (f x) : \text{Bool} \rightarrow \text{Nat}$$

$$(4) g : \text{Nat} \rightarrow \text{Bool} \vdash g ((\lambda x : \text{Nat} . \text{succ } (\text{succ } x))42) : \text{Bool}$$

$$(5) \vdash \lambda x, y : \text{Nat} . \text{if } (\text{is\_zero? } x) \text{ then } y \text{ else } (\text{succ } y) : \text{Nat} \rightarrow \text{Nat} \rightarrow \text{Nat}$$

$$(6) \vdash \lambda x : \text{Nat}, y : \text{Bool} . \text{if } y \text{ then } (\text{pred } x) \text{ else } \text{succ } x : \text{Nat} \rightarrow \text{Bool} \rightarrow \text{Nat}$$

(7)

$$\begin{aligned} f : \text{Nat} \rightarrow \text{Nat}, g : \text{Nat} \rightarrow \text{Bool} \vdash \\ \lambda x : \text{Nat} . f (\text{if } g x \text{ then } \text{false} \text{ else } \text{true}) : \\ \text{Nat} \rightarrow \text{Bool} \end{aligned}$$

(8)

$$\begin{aligned} f : \text{Nat} \rightarrow \text{Nat}, g : \text{Nat} \rightarrow \text{Nat} \vdash \\ \lambda x : \text{Bool}, y : \text{Nat} . \text{if } x \text{ then } (f y) \text{ else } (\text{succ } (g y)) : \\ \text{Bool} \rightarrow \text{Nat} \rightarrow \text{Nat} \end{aligned}$$

(9)

$$\begin{aligned} f : \text{Nat} \rightarrow \text{Nat} \rightarrow \text{Bool}, g : \text{Nat} \rightarrow \text{Bool} \\ \vdash (\lambda x : \text{Bool}, y : \text{Nat} . \text{if } x \text{ then } (f y) \text{ else } g) \text{true } 10 \\ : \text{Nat} \rightarrow \text{Bool} \end{aligned}$$

$$(10) x : \text{Nat}, f, g : \text{Nat} \rightarrow \text{Nat} \vdash (\text{if } \text{is\_zero? } x \text{ then } f \text{ else } g)5 : \text{Nat}$$

**Упражнение 2** (самоприменение). Доказать утверждения о типах.

$$(1) \text{ Пусть } \mathbf{I}_N \equiv \lambda x : \text{Nat} . x : \text{Nat} \rightarrow \text{Nat}, \mathbf{I}_{NN} \equiv \lambda x : \text{Nat} \rightarrow \text{Nat} . x : (\text{Nat} \rightarrow \text{Nat}) \rightarrow \text{Nat} \rightarrow \text{Nat}. \text{ Тогда } \vdash \mathbf{I}_{NN}\mathbf{I}_N : \text{Nat} \rightarrow \text{Nat}.$$

$$(2) \text{ Аналогично (1) найти корректные аннотации типов и приписать тип для самоприменения бестипового комбинатора } \mathbf{K} \equiv \lambda xy . x.$$

$$(3) (*) \text{ Показать, что в } \lambda\text{-исчислении с простыми типами нельзя приписать тип терму } \lambda x . xx, \text{ какую бы аннотацию типа не выбрать для } x.$$