Теория категорий, первый семинар

В одной из сетевых бесед мой оппонент, работающий математик, сравнил теорию категорий (ТК) с мулом, на котором можно перевозить тяжести, но сам по себе он, как живое существо, бесплоден. Вопрос о плодовитости теории категорий я оставляю на рассмотрение профессионалов, для меня она интересна в качестве именно такого тяжеловеса, который способен быстро перевозить тяжелые грузы – то есть идеи, подходы и даже результаты – внутри математического хозяйства. Продолжая сравнение: трактор тоже бесплоден, однако может принести немало пользы для «плодовитых математических коров».

Я хотел бы, чтобы эта тема осталась важной для нашего семинара и в дальнейшем, чтобы мы продолжали рассматривать теорию категорий как междисциплинарный внутриматематический язык, как способ самопроверки с одной стороны и удобную мнемонику для расширения математического кругозора с другой. Для меня лично теория категорий является еще и частью гносеологии математики. Она позволяет мне видеть, как в совершенно разных, казалось бы, неродственных областях математического знания появляются подобные и одинаково важные категорные конструкции: сопряжения, дуализмы, монады и так далее. Это позволяет видеть мне математику как бы в целом, конечно с потерей каких-то деталей, но ухватывая некоторую структуру и процесс.

Строгий алгебраист скажет, что базовым в ТК является само понятие алгебраической категории. Я с этим конечно согласен, но все же позволю себе некоторую вольность философского характера и скажу, что для меня очень важным понятием является морфизм или, на математическом жаргоне, стрелка. И обращая внимание на любую область знания, математического или нематематического, я прежде всего пытаюсь понять какие там имеются морфизмы, то есть процессы, действия, преобразования, метаморфозы, сравнения и т.д.. Однако я должен уже сделать первоначальные определения.

В понятие алгебраической категории входят две совокупности (я не буду уточнять пока, это множества или классы): объекты и морфизмы. Каждой упорядоченной паре объектов поставлено в соответствие некоторое семейство морфизмов (***обозначение***). Такие семейства не пересекаются, т.е. каждый морфизм соответствует строго определенной паре объектов, первый из которых называется доменом (***обозначение***) а второй кодоменом (***обозначение***) морфизма. Кроме того, для каждого объекта определен морфизм, называемый тождественным или единичным (***обозначение***), причем этот объект является одновременно доменом и кодоменом для своего тождественного морфизма.

Далее, для таких морфизмов, домен одного из которых совпадает с кодоменом другого, определена ассоциативная операция «композиция» или «произведение» морфизмов **(нарисовать)**. Тождественный морфизм при композиции с любым другим действует тривиально **(нарисовать)**, это свойство унитарности композиции. Иными словами, определено отображение из декартова произведения двух множеств морфизмов **(нарисовать)**. Вам это ничего не напоминает? Действительно, это очень похоже на неравенство треугольника. Эта аналогия приобретает точный смысл в теории обогащенных категорий. В частности любое метрическое пространство оказывается просто обогащенной категорией над неотрицательными действительными числами.

Итак, мы дали определение. Такое определение удобно, однако возможно и другое, которое вообще не вводит никаких объектов. Действительно, у нас каждый объект однозначно определен своим единичным морфизмом, поэтому для описания алгебраической категории должно быть достаточно одних морфизмов. Это определение можно сделать достаточно аккуратно, но здесь я этого делать не буду. Я сказал о такой возможности лишь для того, чтобы подчеркнуть важность морфизмов и маловажность объектов. Интересующиеся более точным определением могут обратиться, например, к справочнику по общей алгебре под редакцией Скорнякова, второй том. В издании 1991-го года страница 370.

Легко заметить, что определение категории чем-то напоминает определение ориентированного графа. И действительно, определение категории через ориентированный граф довольно часто встречается (в частности, в курсе лекций Барра-Уэллса). Обозначим семейство вершин графа как C_0, семейство дуг как C_1, и далее семейство путей длины n как C_n. Дуги будем считать морфизмами, а вершины объектами категории. Собственно категория будет определена лишь тогда, когда будет задана пара отображений, одно из C_0 в C_1, т.е. это взятие тождественного морфизма, а другое из C_2 в C_1, это композиция морфизмов. Свойства ассоциативности и унитарности композиции определяются так же, как и раньше. Для меня это определение ценно тем, что напоминает, хотя бы синтаксически, о другой важной конструкции теории категорий, о монадах. Действительно, монада для функтора F тоже состоит из двух стрелок, одна из F^0 в F^1, другая из F^2 в F^1. Причем для монад тоже заданы свойства ассоциативности и унитарности.

Изучая теорию категорий, можно заметить, и я стараюсь это продемонстрировать, что она постоянно отражается в себе самой, одни конструкции истолковываются через другие, все части теории как бы постоянно стремятся прояснить друг друга. Я думаю, у вас еще будет возможность в этом убедиться. Это видно уже в первых определениях понятия категории: одно из них обладает сходством с метрическим пространством и таким образом указывает на обогащенные категории, другое напоминает нам о монадах.

Думается, определений уже достаточно, пора привести несколько примеров. На мой взгляд, простейший из всех возможных примеров это обычный моноид. Для тех, кто больше знаком с понятием группы, скажу, что определение моноида получается, если из аксиом теории групп убрать требование обратимости каждого элемента. Рассмотрим теперь категорию, в которой всего лишь один объект. Морфизмы этой категории будут представлять собой ни что иное, как элементы моноида. Действительно, операция композиции морфизмов по определению ассоциативна и единицей моноида является тождественный морфизм.

Следующий пример: свободная категория над ориентированным графом. Рассмотрим произвольный ориентированный граф и всевозможные пути на нем, включая пустые. Эти пути и будут морфизмами нашей категории. Произведение морфизмов в такой категории определяется как добавление к одному пути другого, начало которого совпадает с концом первого. Единичными же морфизмами являются пустые пути из любой вершины в себя.

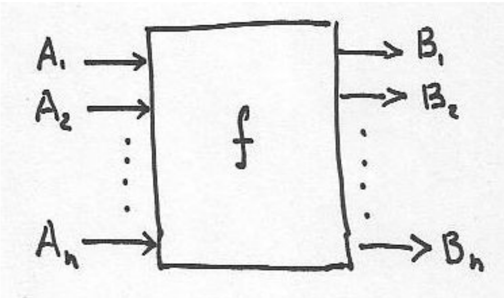
Как часто это случается в математике, свободная структура позволяет нам сконструировать из нее множество других, задавая конгруэнции, они же стабильные эквивалентности. Так можно сделать и со свободной категорией над графом, задавая на каждом hom-множестве некоторое отношение эквивалентности, стабильное относительно композиции морфизмов (**нарисовать**). Например, для категории, морфизмами которой являются направленные дороги в городе, естественно задать отношение так, что эквивалентными будут все пути из точки А в точку Б, время следования по которым одинаково. Если пренебречь некоторыми особенностями проезда перекрестков, то эта эквивалентность будет стабильной относительно композиции и мы получим, таким образом, новую категорию (**нарисовать**).

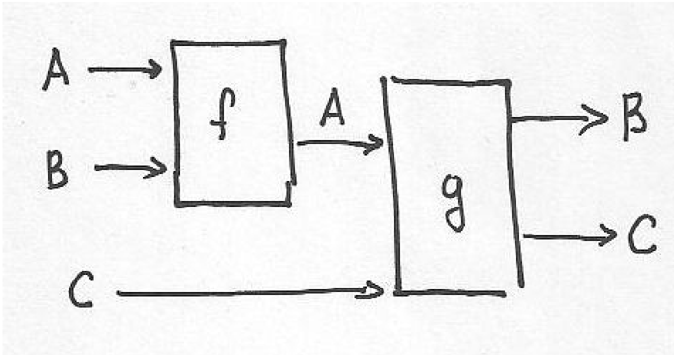
Другой пример, достаточно простой и в то же время очень важный для приложений – это категория множеств Set. Объектами этой категории являются всевозможные множества, морфизмами – всевозможные отображения между множествами. Единичным морфизмом является всегда тождественное отображение множества в себя (**нарисовать**). Вы видите, что в данном случае набор объектов не может быть множеством, это привело бы к парадоксам. Поэтому часто пользуются терминологией аксиоматики теории множеств Геделя-Бернайса и говорят о классе объектов и классе морфизмов. Небольшое введение в эту систему понятий содержится в учебнике Цаленко и Шульфейгера. Если все-таки категория такова, что класс объектов и класс морфизмов являются множествами, то говорят о малой категории. Но Set не является малой категорией, поскольку мы не можем говорить о множестве всех множеств.

Еще один пример категории, тоже очень важный, идет из программирования. Я не буду здесь говорить о функциональных языках, достаточно обычных императивных языков, чтобы понять, о чем речь. Объектами категории, которую представляет собой любой такой язык программирования, являются типы этого языка, а стрелками его функции. Композицией стрелок является функция, возвращающая результат применения одной функции к возвращаемому значению другой (**нарисовать**). Тождественная стрелка для объекта A (**нарисовать**). Повторяю, это не зависит от функциональной природы языка программирования, любой язык дает некоторую категорию, просто те категории, которые соответствуют чистым функциональным языкам, обладают некоторыми удобными свойствами.

Можно приводить еще очень много интересных и разнообразных примеров, и они будут приведены в дальнейшем, однако я хотел бы вернуться к определениям и дать некоторое неформальное представление о моноидальных категориях. Мне кажется естественным сделать это в самом начале, так как на практике многие интересные категории оказываются моноидальными. Такой является, в частности, описанная выше категория Set, да и в логике и современной теории вычислимости они применяются очень часто.

Опишу сначала некий графический язык, похожий на графические языки программирования, используемые в инженерии, особенно в системах автоматического управления. Такой язык обычно состоит из блоков, похожих на тот, что изображён на рисунке (a) ниже. У блока имеются условные гнезда, или "входы" и "выходы", причём эти гнезда "типизированы". Пример типизации легко вспоминается из инженерной практики АСУ: некоторые разъёмы принимают-передают дискретное значение, некоторые аналоговое. Но мы здесь от конкретных типов абстрагируемся.





(a) **(b)**

Каждый тип значений мы будем обозначать большой буквой латинского алфавита A, B, C, ... , а блоки и схемы, составленные из блоков - малыми f,g, h, ... Запись f: $A_1 \times A_2 \times ... \times A_n \rightarrow B_1 \times B_2 \times ... \times B_k$ означает, что блок f способен обрабатывать входные значения типов $A_1, A_2 ... A_n$, выдавая на выходе значения типов $B_1, B_2 ... B_k$.

Далее, из блоков можно составлять схемы, соединяя разъемы совпадающих типов. Каждая схема тоже имеет некоторый набор входных и выходных типов разъемов. Каждую такую упорядоченную пару списков типов мы будем называть попросту *типом схемы*. Например, схема, изображенная на рисунке (b), имеет тип $A \times B \times C \rightarrow B \times C$. Заметим, что разъем типа A, соединяющий между собой блоки f и g, из определения типа схемы исключен, поскольку он для данной схемы является *внутренним*.

Главным предметом нашего интереса будут, конечно же, схемы, а к ним, как частный случай, можно причислить и отдельные блоки. Так вот: то, что я только что здесь описал, т.е. некоторый набор описаний блоков и типов их разъемов - это *почти* и есть моноидальная категория. С одной поправкой: это строго-моноидальная категория. Кроме того, нет пока "единичного" типа I, поэтому вернее назвать ее строго-полугруппоидальной.

Вы наверное уже поняли, что наши схемы являются морфизмами категории, а тип схемы указывает на домен и кодомен морфизма. Единственное отличие от первоначального определения категории в том, что мы можем осуществлять теперь и композицию объектов (**нарисовать**) и новый вид композиции морфизмов (**нарисовать**).

Почему я назвал такую категорию строго-моноидальной (строго-полугруппоидальной)? Смотрите, мы воспринимаем составной тип независимо от порядка его формирования, т.е. моноидальное произведение ассоциативно. В реальности это не всегда так (**пример с категорией Set и с императивным языком программирования**). Поэтому, говоря о ассоциативности моноидального произведения, мы определяем ее с точностью то изоморфизма. И это один из тех путей, которые ведут нас прямиком к тематике категорификации. Но об этом мы поговорим на дальнейших семинарах.