

Зададимся алфавитом  $\Sigma$ . Множество регулярных выражений над  $\Sigma$  обозначим  $RE(\Sigma)$ .  
Зафиксируем алфавит переменных:

$$\Delta = \{X_i \mid i \in \overline{1, n}\}, \quad \Sigma \cap \Delta = \emptyset.$$

Далее потребуется обозначение:

$$\Delta_j = \{X_i \mid i \in \overline{j, n}\}, \quad j \in \overline{1, n+1}.$$

В частности,  $\Delta_1 = \Delta$  и  $\Delta_{n+1} = \emptyset$ .

Пусть дана аффинная система уравнений с регулярными коэффициентами:

$$\mathcal{E} : \begin{cases} X_i = \sum_{j=1}^n \alpha_{i,j} X_j + \alpha_{i,0} & i \in \overline{1, n}, \end{cases}$$

где  $\alpha_{i,j} \in RE(\Sigma)$ ,  $i, j \in \overline{1, n}$ .  $i$ -ое уравнение системы будем обозначать  $\mathcal{E}[i]$ .

Обозначим операцию подстановки регулярного выражения  $\gamma \in RE(\Sigma)$  в  $i$ -ое уравнение системы  $\mathcal{E}$  вместо всех вхождений переменной  $X_j$  следующим образом:

$$\mathcal{E}[i] \leftarrow \gamma / X_j.$$

Решением системы уравнений  $\mathcal{E}$  называется набор  $(\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n) \in RE(\Sigma)^n$ , такой что при подстановке:

$$\forall i, j \in \overline{1, n} \quad \mathcal{E}[i] \leftarrow \hat{x}_j / X_j.$$

каждое  $\mathcal{E}[i]$  превратится в верное регулярное тождество.

Напомним, что решением аффинного уравнения с регулярными коэффициентами:

$$(1) : X = \alpha X + \beta$$

является регулярное выражение  $\hat{x} = \alpha^* \beta$ . Обозначим этот факт так:

$$(1) : X = \alpha X + \beta \mapsto \hat{x} = \alpha^* \beta.$$

Теперь мы готовы изложить алгоритм, реализующий метод Гаусса для системы  $\mathcal{E}$ .

**Алгоритм 1** *Вход: система  $\mathcal{E}$ ;*

*Выход: решение  $(\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n)$  системы  $\mathcal{E}$ ;*

*алгоритм представлен последовательностью шагов:*

*St.1:  $i = 1$ .*

*St.2:*

*if  $i = n$  then goto St.4;*

*else  $\mathcal{E}[i] : X_i = \alpha X_i + \beta \mapsto \hat{x}_i = \alpha^* \beta$ ,  $\alpha, \beta \in RE(\Sigma \cup \Delta_{i+1})$ ;*

*for  $j$  from  $i + 1$  to  $n$  do  $\mathcal{E}[j] \leftarrow \hat{x}_i / X_i$ .*

*St.3:  $++ i$ , goto St.2;*

*St.4:  $\mathcal{E}[i] : X_i = \alpha X_i + \beta \mapsto \hat{x}_i = \alpha^* \beta$ ,  $\alpha, \beta \in RE(\Sigma)$ ;*

*for  $j$  from  $i - 1$  downto 1 do:  $\mathcal{E}[j] \leftarrow \hat{x}_i / X_i$ ;*

*St.5: if  $i > 1 -- i$ ; goto St.4; else exit;*

По завершении работы алгоритма значения  $\hat{x}_i$  составляют искомый набор.