

Блог нашего семинара

http://sfedu_ctseminar.livejournal.com

Блог нашего семинара

http://sfedu_ctseminar.livejournal.com

http://sfedu_ctseminar.livejournal.com/profile

Блог нашего семинара

http://sfedu_ctseminar.livejournal.com

http://sfedu_ctseminar.livejournal.com/profile

http://sfedu_ctseminar.livejournal.com/831.html

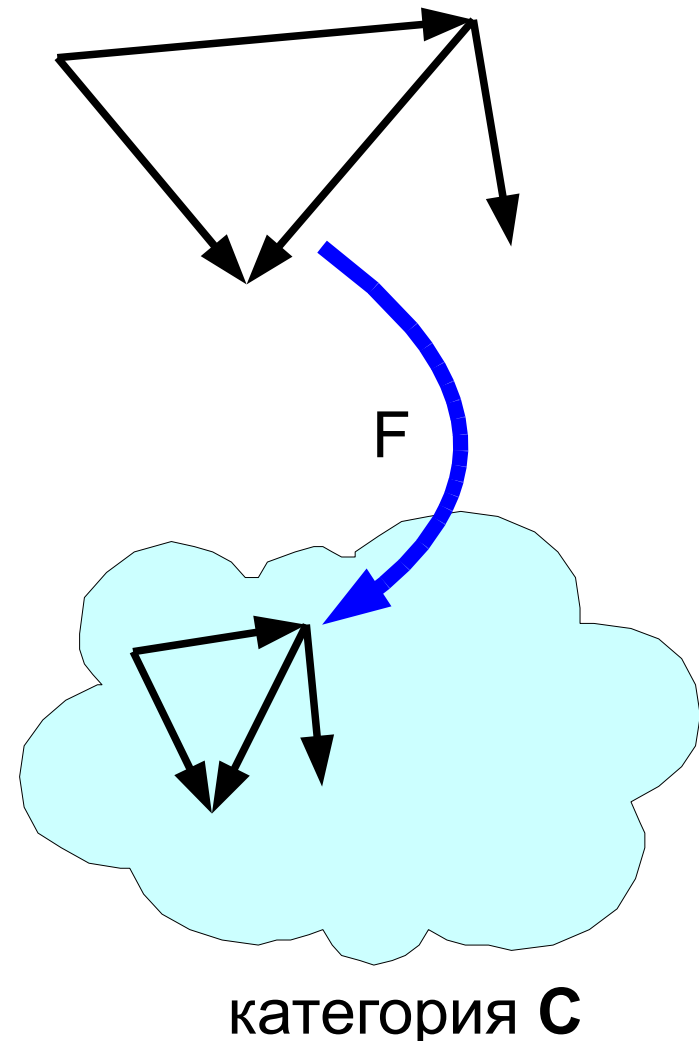
Замечательный курс лекций по ТК

Michael Barr, Charles Wells

Category Theory Lecture Notes for ESSLLI

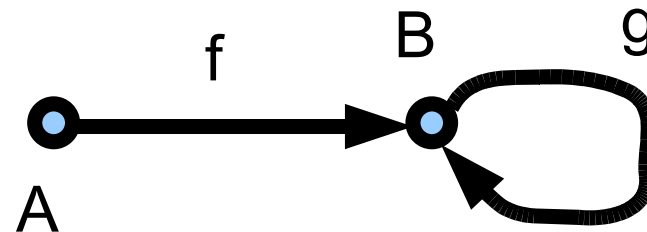
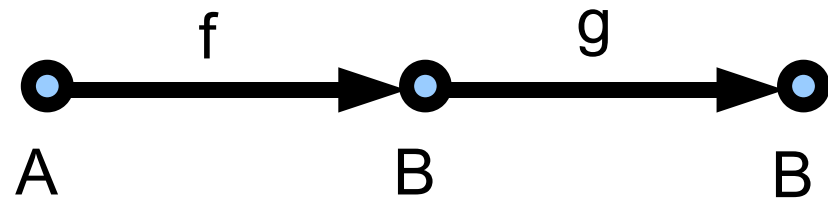
Диаграмма

- Категории соответствует некоторый (ор)граф
- Гомоморфизм из некоторого конечного графа в граф категории называется **диаграммой**
- Область определения этого гомоморфизма называется **формой диаграммы**

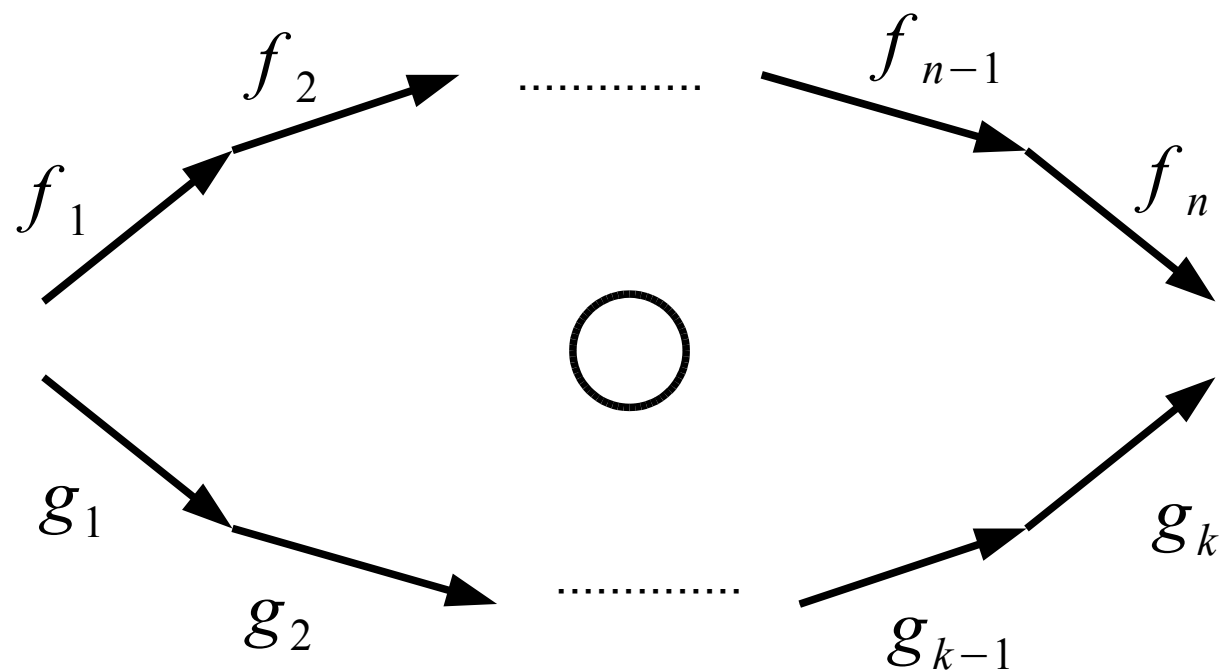


Диаграмма

На рисунке изображены две разные диаграммы, поскольку у них разные формы



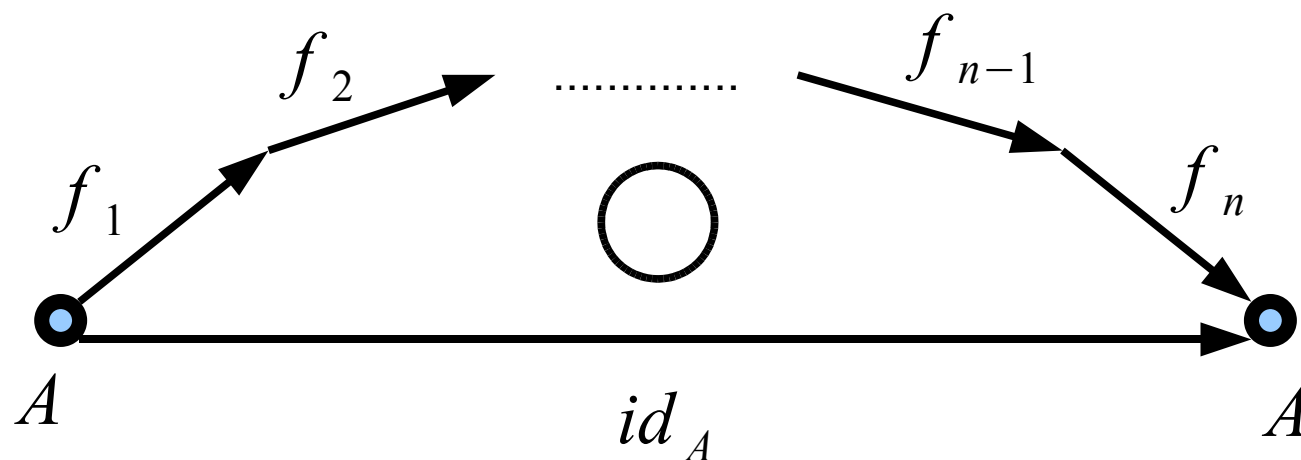
Коммутативная диаграмма



$$f_n \circ f_{n-1} \cdots \circ f_2 \circ f_1 = g_k \circ g_{k-1} \cdots \circ g_2 \circ g_1$$

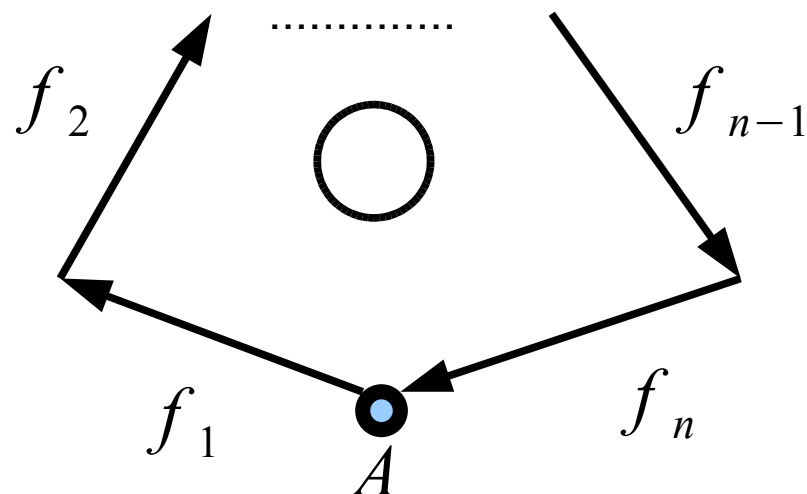
А что если $k = 0$?

Коммутативная диаграмма



$$f_n \circ f_{n-1} \dots \circ f_2 \circ f_1 = id_A$$

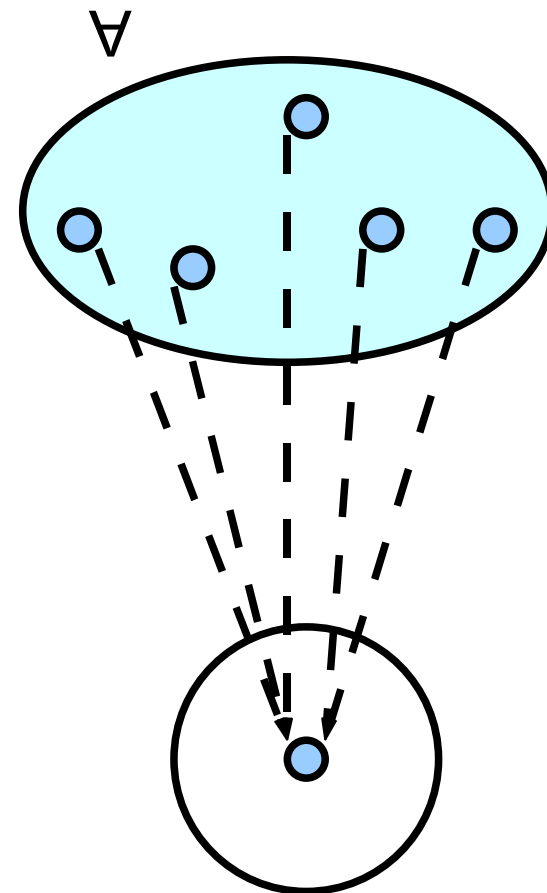
Коммутативная диаграмма



$$f_n \circ f_{n-1} \cdots \circ f_2 \circ f_1 = id_A$$

«Работа без элементов»

- Многие свойства математических объектов можно определить без упоминания элементов соответствующих множеств
- Например, вместо «**множество содержит лишь один элемент**» можно говорить «**из любого множества в данное существует лишь одна функция**»
- Для теории категорий характерна «**работа без элементов**»



«Работа без элементов»

- Как определить ассоциативность моноида, не упоминая его элементов?

$$\mathit{mult} : S \times S \rightarrow S$$

$$\mathit{mult}(x, y) = xy$$

- Пусть S — моноид (или множество его элементов)
- Определим 3 стрелки в категории **Set**

«Работа без элементов»

- Как определить ассоциативность моноида, не упоминая его элементов?

$$\mathit{mult} : S \times S \rightarrow S$$

$$\mathit{mult}(x, y) = xy$$

- Пусть S — моноид (или множество его элементов)

$$S \times \mathit{mult} : S \times S \times S \rightarrow S \times S$$

$$\mathit{mult}(x, y, z) = (x, yz)$$

- Определим 3 стрелки в категории **Set**

«Работа без элементов»

- Как определить ассоциативность моноида, не упоминая его элементов?
- Пусть S — моноид (или множество его элементов)
- Определим 3 стрелки в категории **Set**

$$\mathit{mult} : S \times S \rightarrow S$$

$$\mathit{mult}(x, y) = xy$$

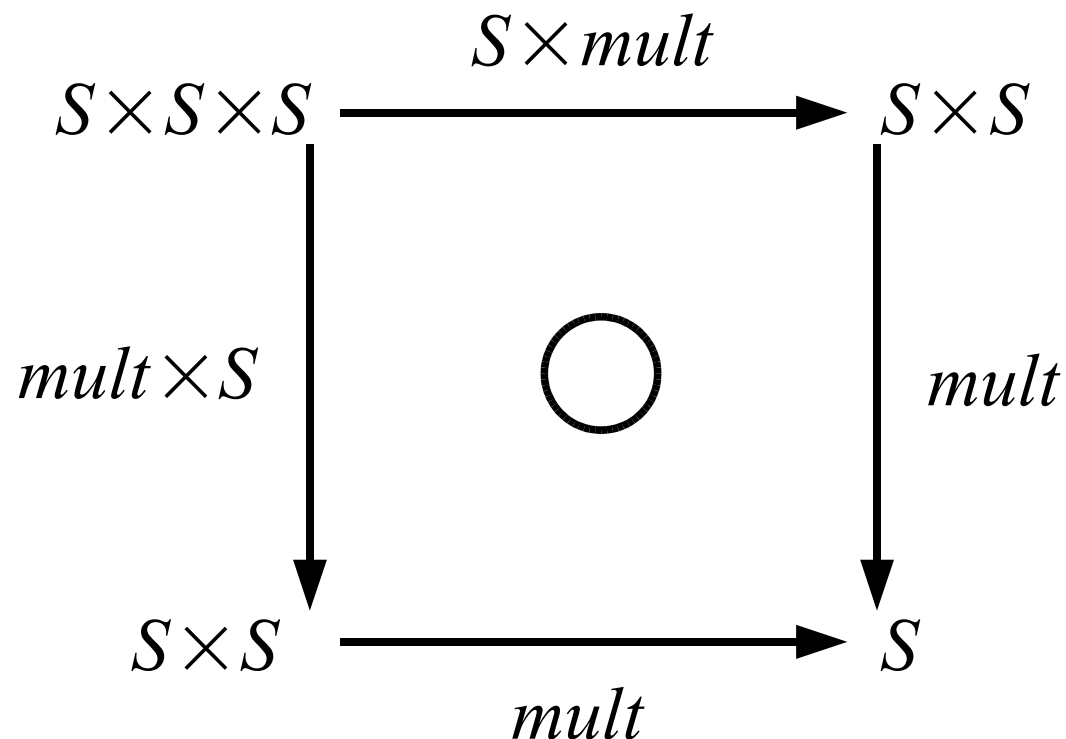
$$S \times \mathit{mult} : S \times S \times S \rightarrow S \times S$$

$$\mathit{mult}(x, y, z) = (x, yz)$$

$$\mathit{mult} \times S : S \times S \times S \rightarrow S \times S$$

$$\mathit{mult}(x, y, z) = (xy, z)$$

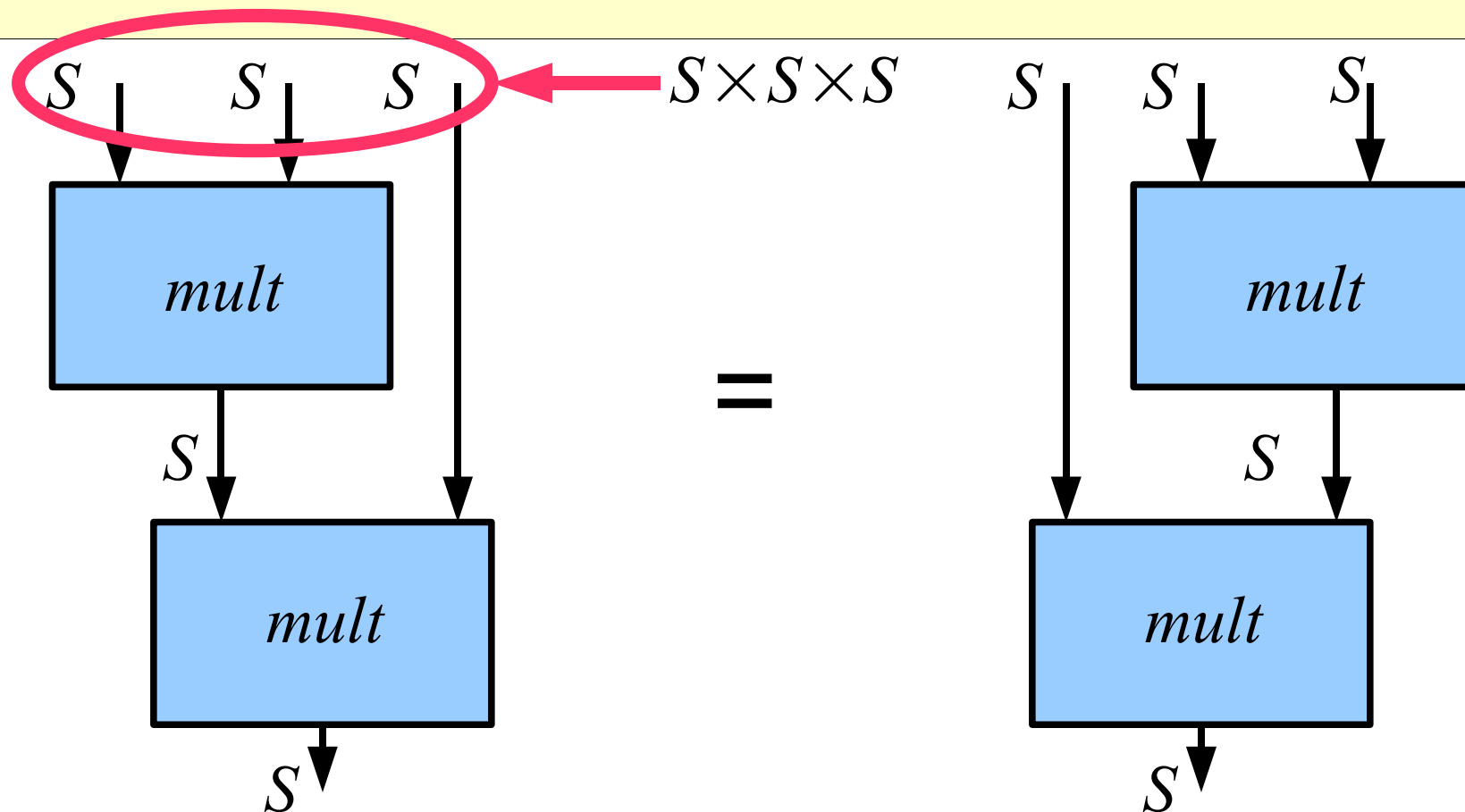
«Работа без элементов»



Ассоциативность умножения моноида

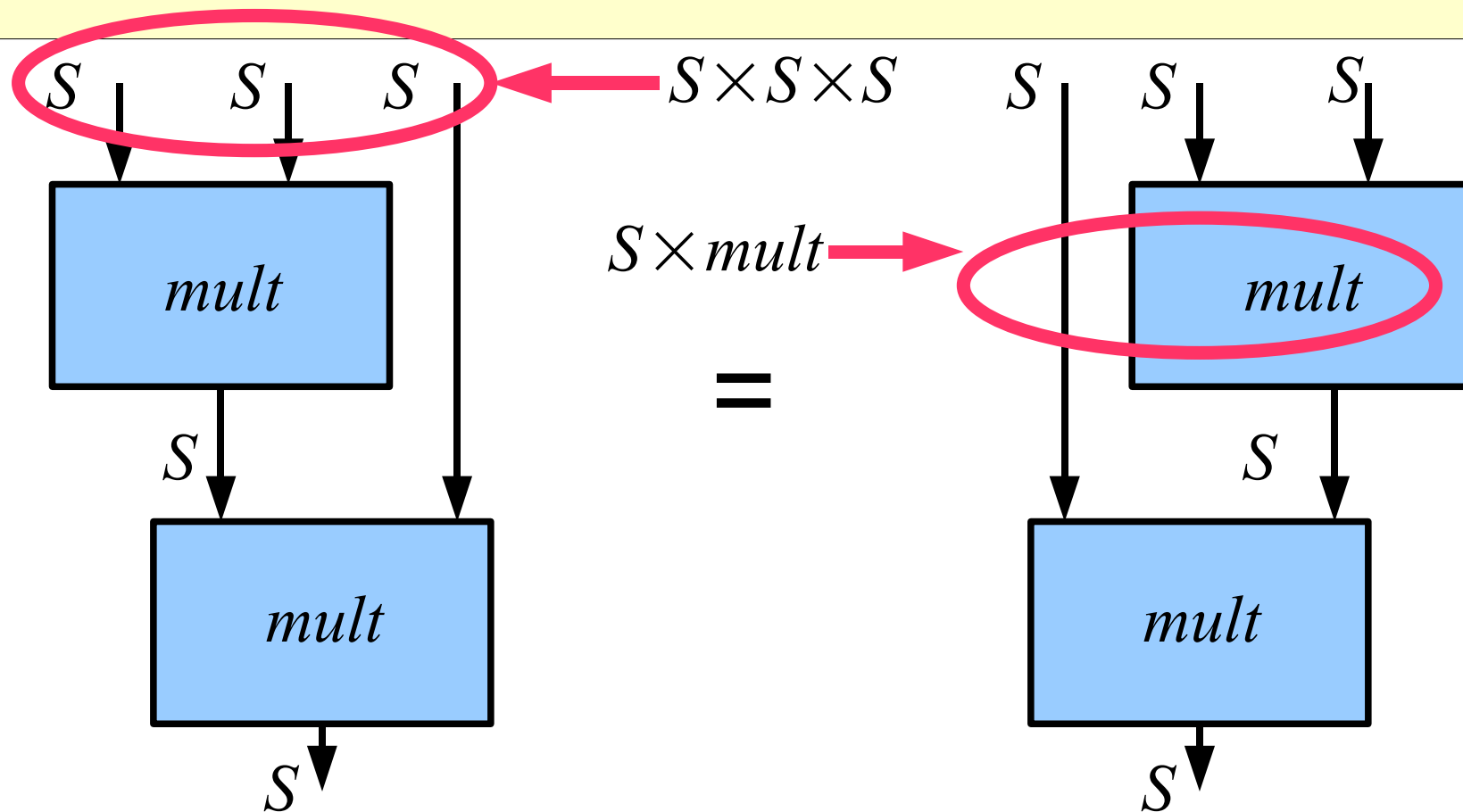
**декартово произведение тоже
определяется через диаграммы!!!**

«Работа без элементов»



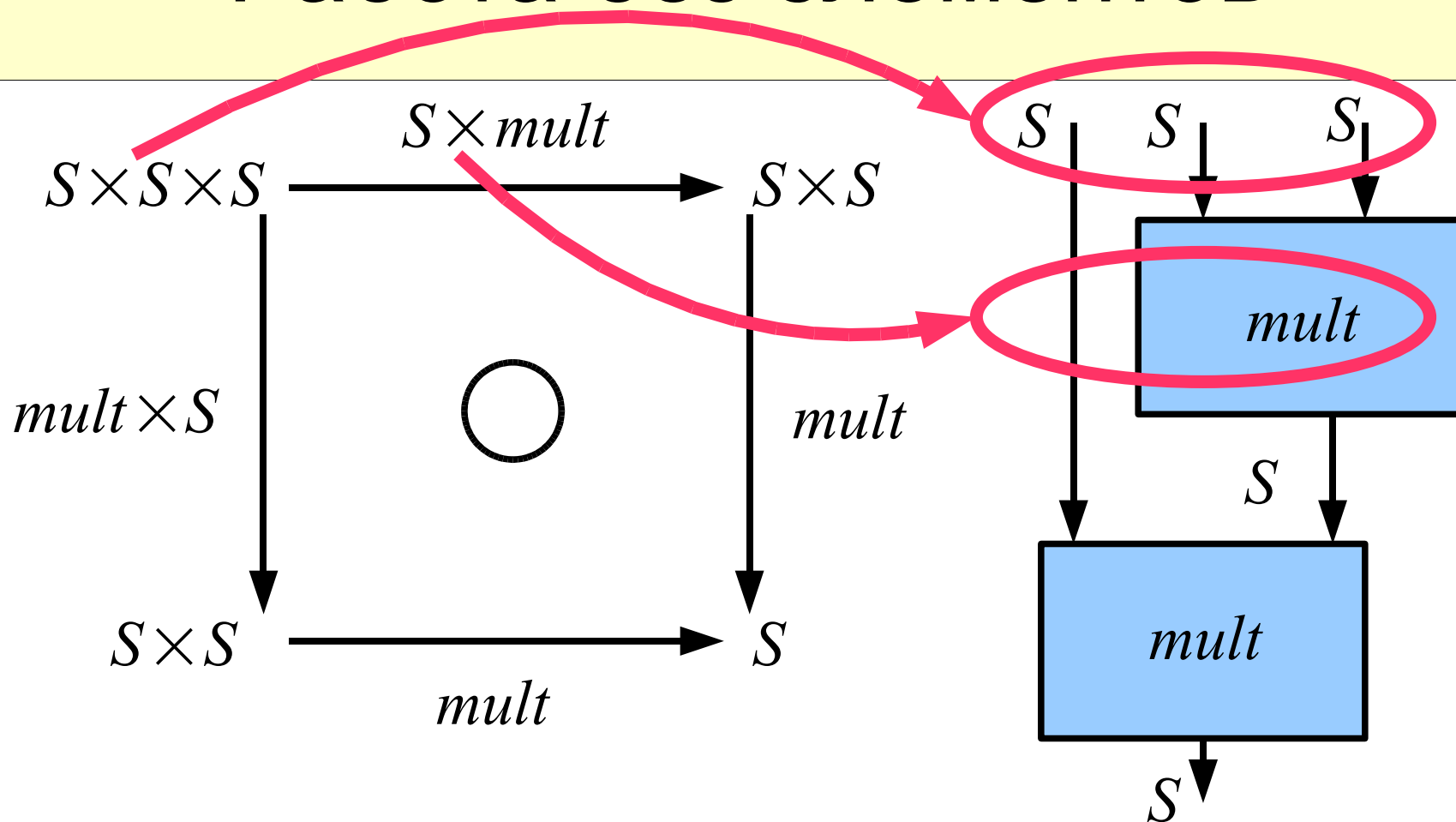
Ассоциативность в виде моноидальной диаграммы

«Работа без элементов»



Ассоциативность в виде моноидальной
диаграммы

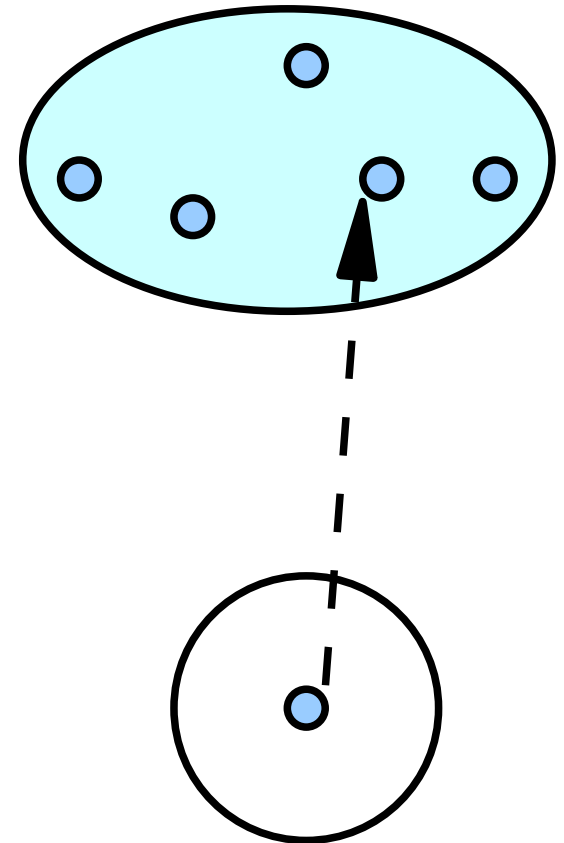
«Работа без элементов»



Ассоциативность в виде моноидальной
диаграммы

Элемент = стрелка

- Подсказка для «работы без элементов»: стрелку можно считать обобщенным элементом
- Это очевидно для морфизмов из одноэлементного множества в категории **Set**



Элемент = стрелка

- Подсказка для «работы без элементов»: стрелку можно считать обобщенным элементом
- Это очевидно для морфизмов из одноэлементного множества в категории **Set**
- Можно выбрать произвольный объект **X** категории и считать стрелки из него в объект **A** (обобщенными) элементами **A**



Мономорфизм

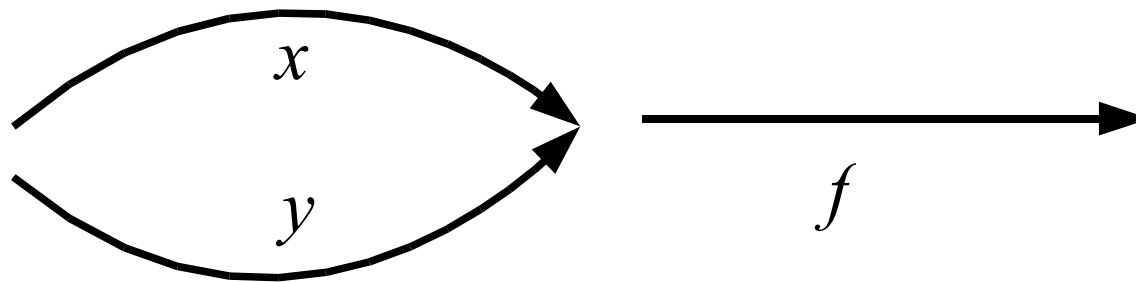
- Инъективное отображение f :
 - если $f(x) = f(y)$ то $x = y$

Мономорфизм

- Инъективное отображение f :
 - если $f(x) = f(y)$ то $x = y$
- Вспоминаем что элементы можно считать стрелками
 - если $f \circ x = f \circ y$ то $x = y$

Мономорфизм

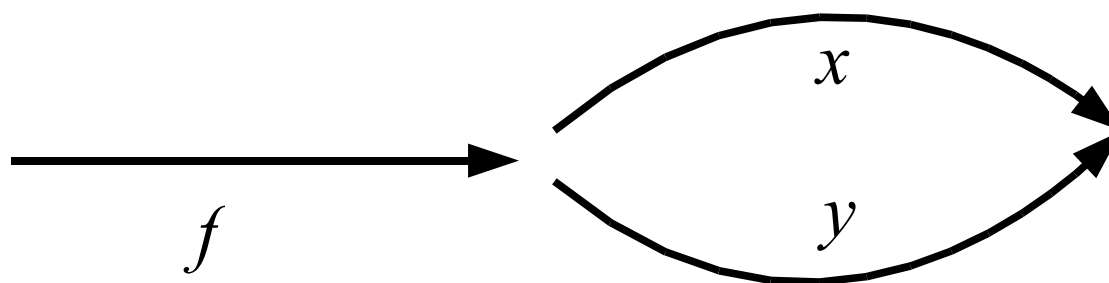
- Инъективное отображение f :
 - если $f(x) = f(y)$ то $x = y$
- Вспоминаем что элементы можно считать стрелками
 - если $f \circ x = f \circ y$ то $x = y$
- Получаем определение мономорфизма



Эпи- и биморфизмы

- Нужно «перевернуть» определение мономорфизма
- Получим определение эпиморфизма:

– если $x \circ f = y \circ f$ то $x = y$



- Моно + Эпи = Биморфизм

Эпи-, моно- и биморфизмы

- В категориях структурированных множеств вложения являются **мономорфизмами**, а наложения **эпиморфизмами** (*справочник под. ред. Скорнякова*)
- В категории множеств **Set**, топологических пространств **Top** и однотипных универсальных алгебр (группы, кольца) мономорфизмы совпадают с вложениями
- В категории ассоциативных колец вложение кольца целых чисел в поле рациональных чисел является как мономорфизмом, так и эпиморфизмом (но **не наложением**). Это пример биморфизма.

Двойственные категории

- Мономорфизмы и эпиморфизмы — пример двойственных понятий

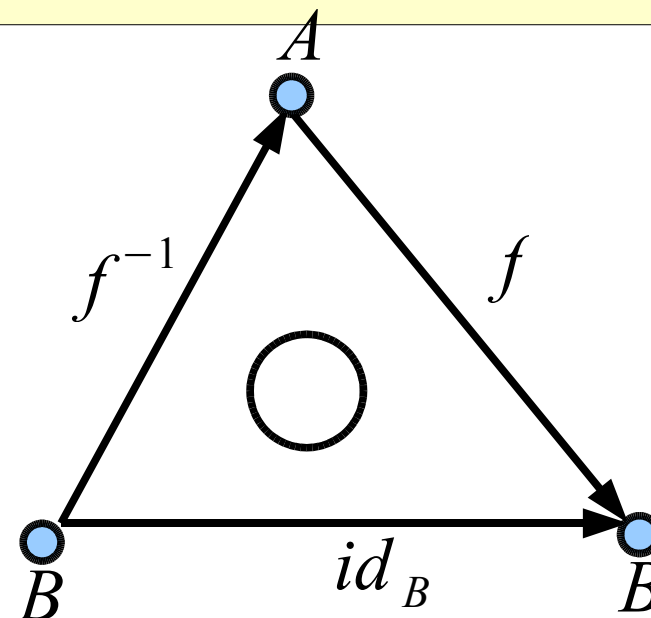
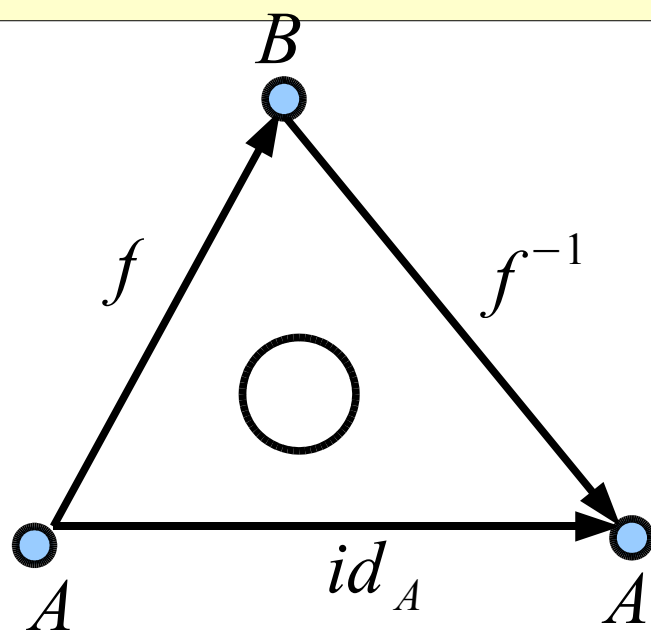
Двойственные категории

- Мономорфизмы и эпиморфизмы — пример двойственных понятий
- Двойственная категория \mathbf{C}^{op} к данной категории \mathbf{C} :
 - $dom(f^{op}) = cod(f)$
 - $cod(f^{op}) = dom(f)$
 - $f^{op} \circ g^{op} = (f \circ g)^{op}$

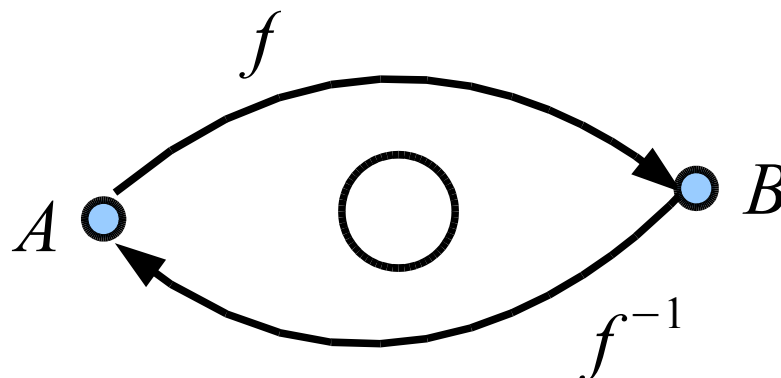
Двойственные категории

- Мономорфизмы и эпиморфизмы — пример двойственных понятий
- Двойственная категория \mathbf{C}^{op} к данной категории \mathbf{C} :
 - $dom(f^{op}) = cod(f)$
 - $cod(f^{op}) = dom(f)$
 - $f^{op} \circ g^{op} = (f \circ g)^{op}$
- Эпиморфизмы — это мономорфизмы в двойственной категории

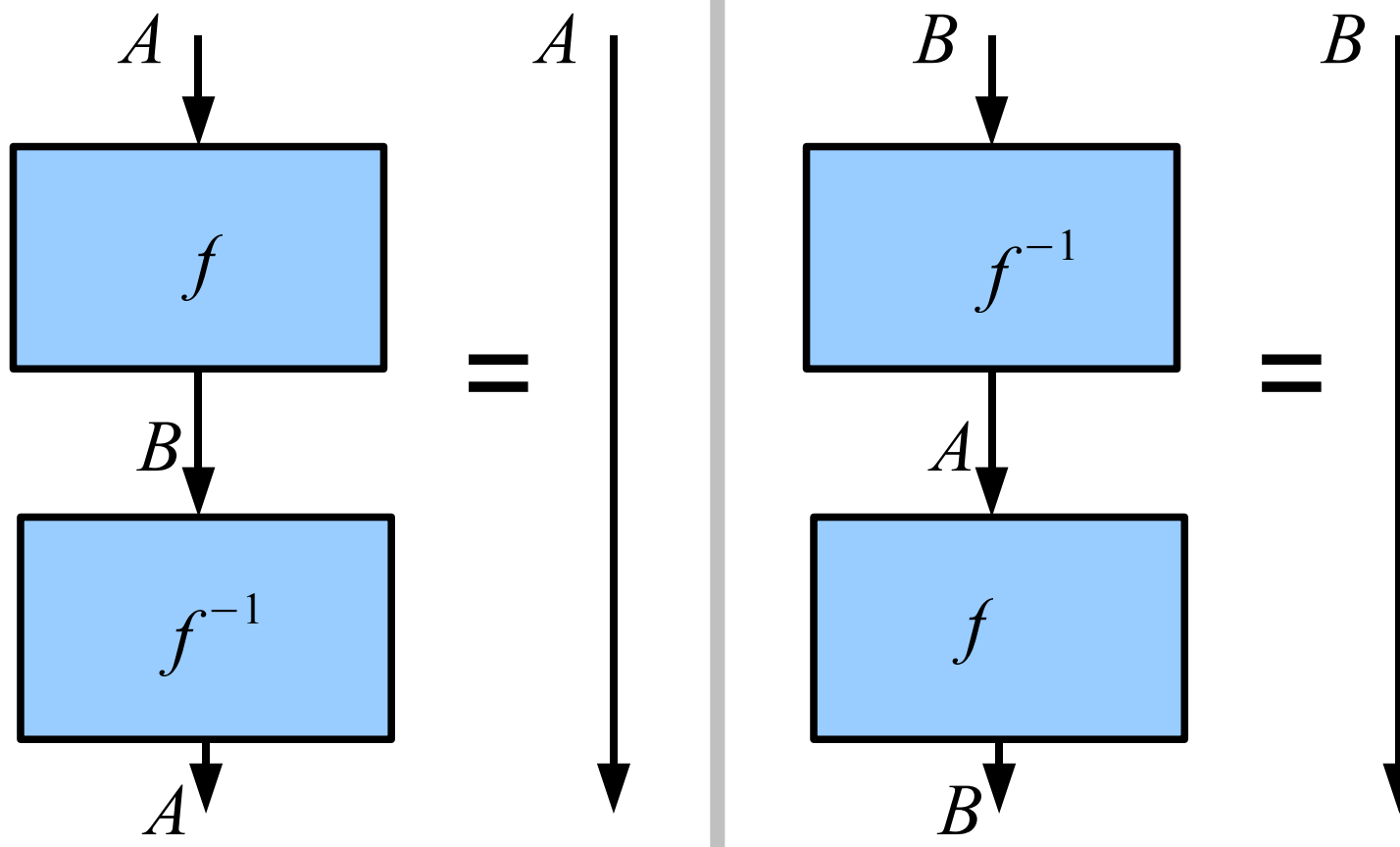
Изоморфизмы



ИЛИ

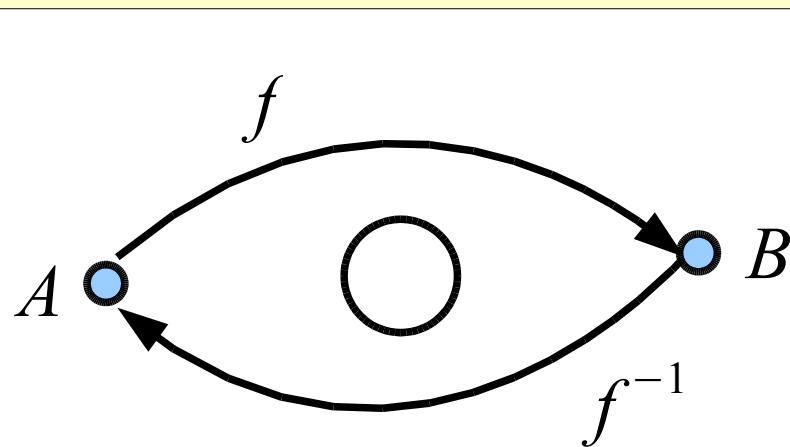


Изоморфизмы



В виде моноидальной диаграммы

Изоморфизмы



- Такие объекты называются изоморфными
- Обозначение $A \cong B$
- Изоморфизм — это отношение эквивалентности
- В группоиде все морфизмы - изоморфизмы

Категорификация $2 \times 2 = 4$

\sqcup – дизъюнктивное объединение

\times – декартово произведение

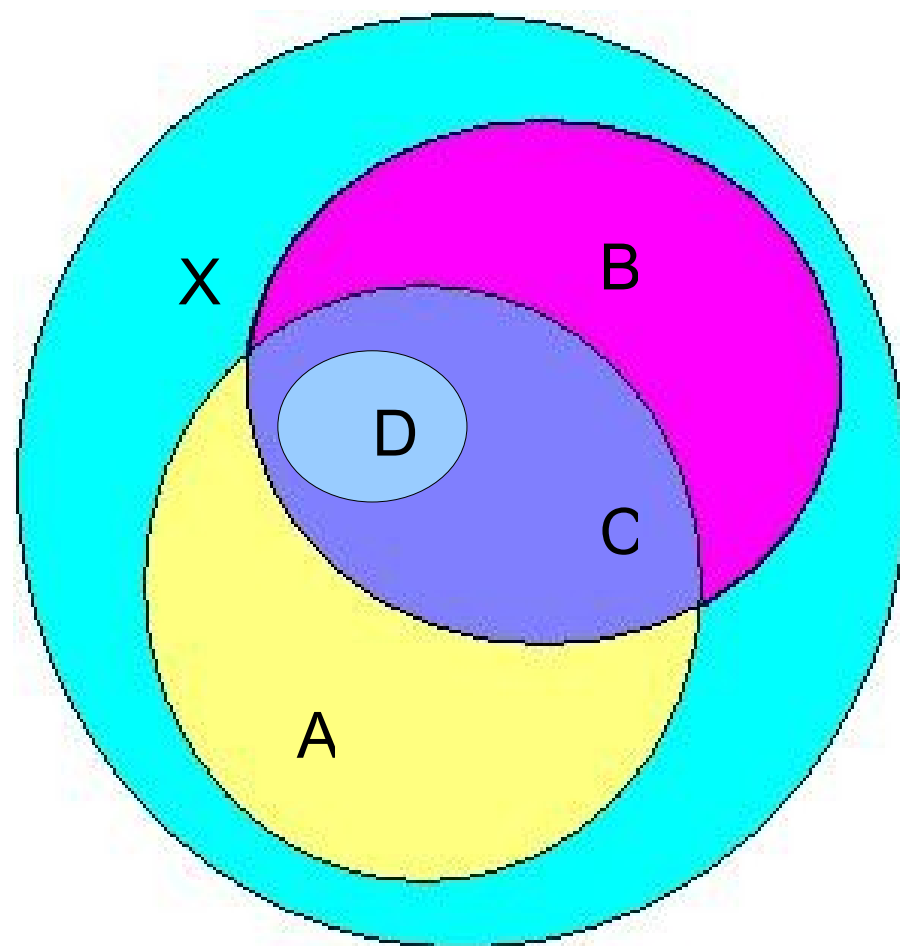
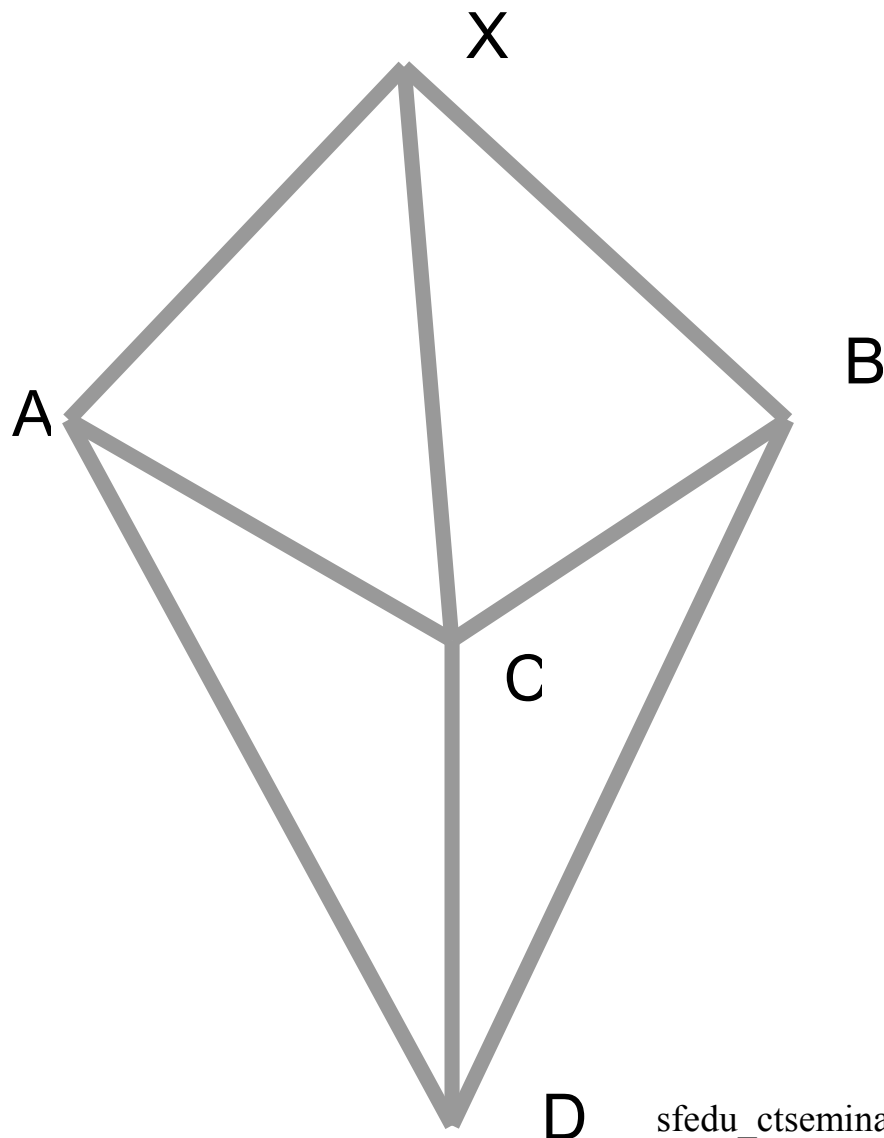
$\bar{1}$ – одноэлементное множество

$$(\bar{1} \sqcup \bar{1}) \times (\bar{1} \sqcup \bar{1}) \cong \bar{1} \sqcup \bar{1} \sqcup \bar{1} \sqcup \bar{1}$$

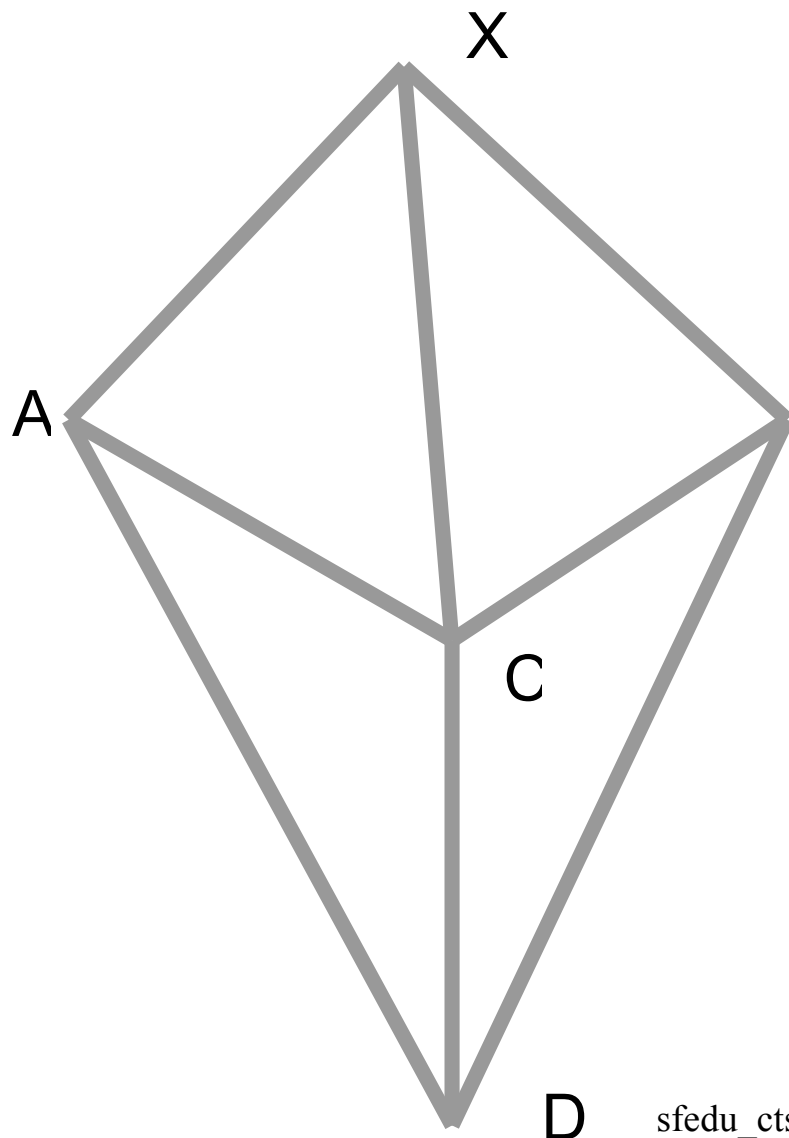
Тонкие категории и качум

- Категория, где каждый Hom содержит не более одной стрелки, называется тонкой
- Каждая тонкая категория соответствует предпорядоченному классу
- Качум — частичный порядок как категория
- Решеточный качум — решетка как категория

Решетки

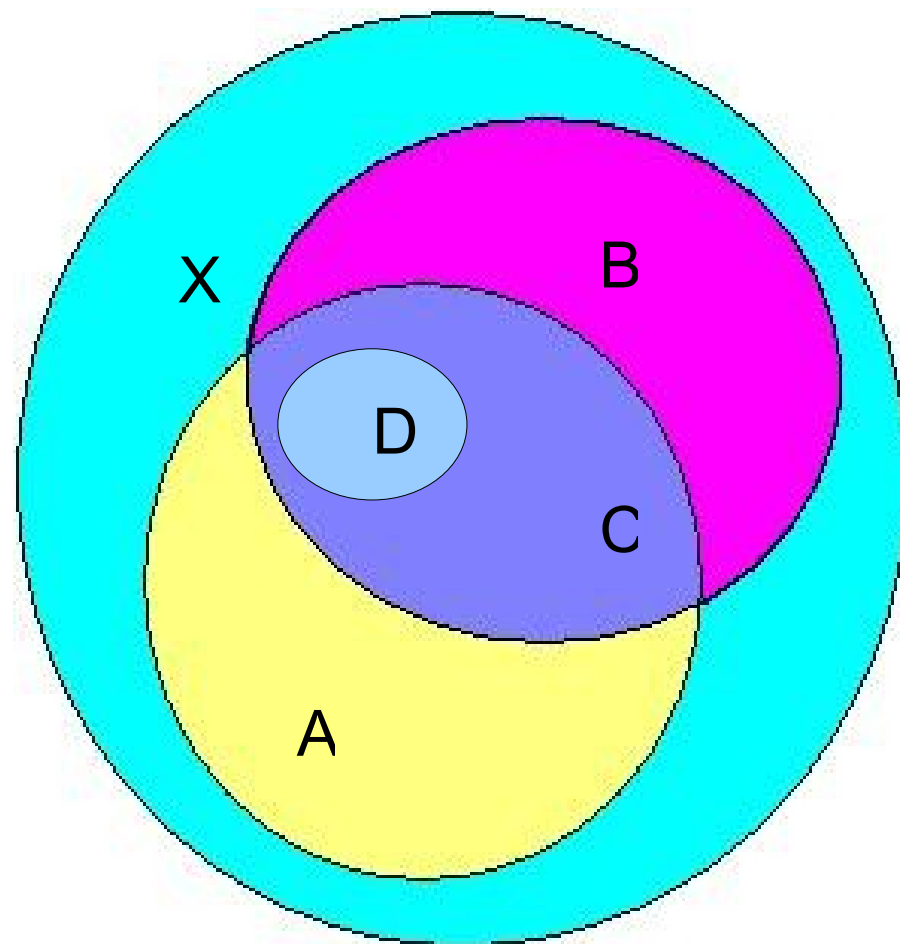
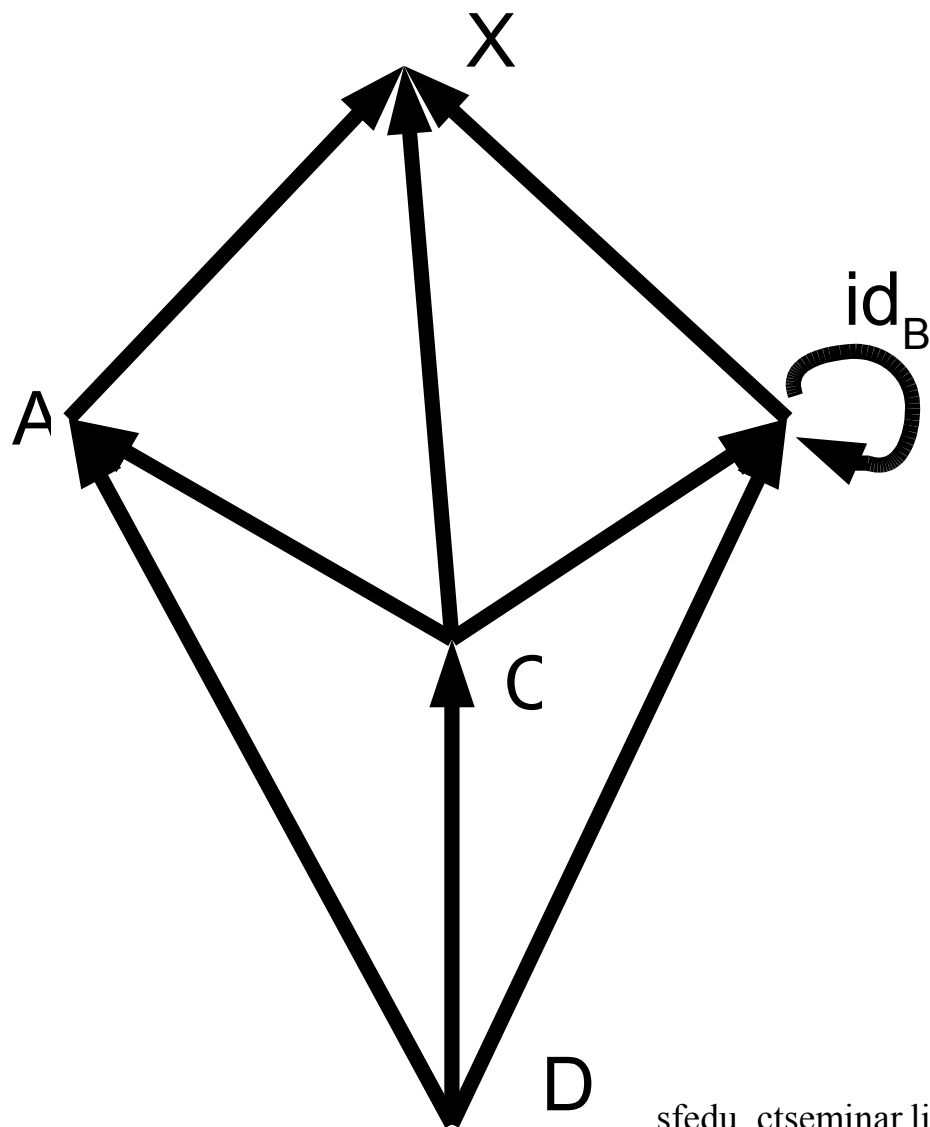


Решетки

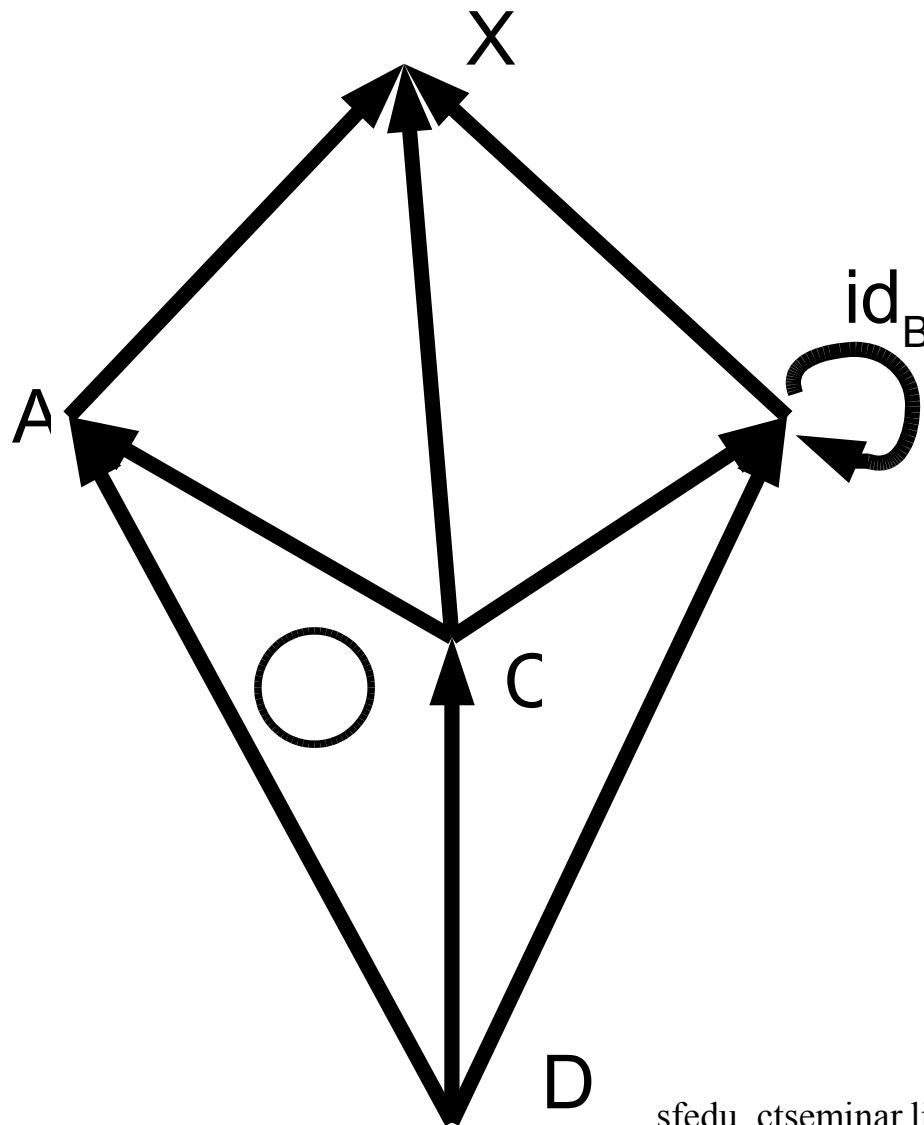


- $C \leq A$ и $C \leq B$
- Если подобное выполняется для любого D, то $D \leq C$.

Решетки

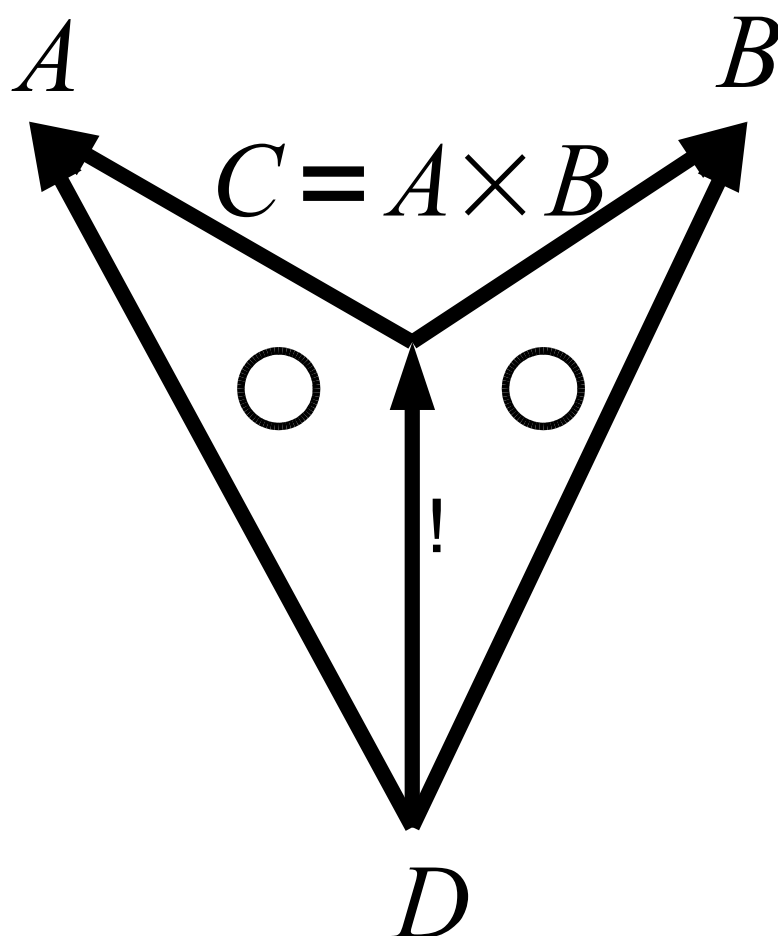


Решетки



- Из C существуют морфизмы в A и B
- Если есть стрелки из любого D в A и B, то есть стрелка из него и в C.

Категорное произведение



- Из C существуют морфизмы в A и B
- Они называются проекциями
- Если есть стрелки из любого D в A и B , то есть **единственная факторизующая** стрелка из него и в C .

Произведение и копроизведение

- Любое многообразие универсальных алгебр является категорией с произведениями
- В категории **Set** произведением является декартово произведение
- Копроизведение двойственно произведению
- В категории **Set** копроизведением является дизъюнктное объединение

Произведение на С-подобном языке

```
struct prod_A_B {  
    A proj_A;  
    B proj_B;  
};
```

```
A Proj_A(prod_A_B x)  
{  
    return x.proj_A;  
}
```

```
B Proj_B(prod_A_B x)  
{  
    return x.proj_B;  
}
```

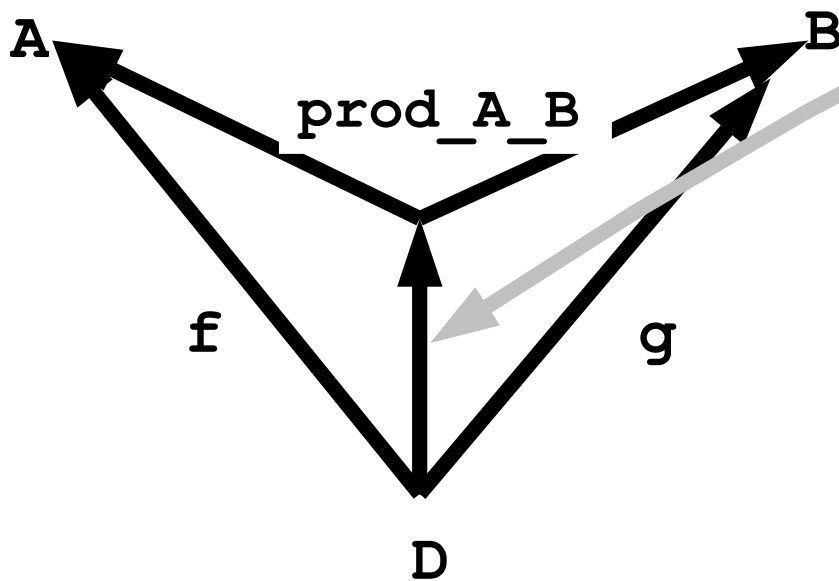
Это будет произведение только если запретить
побочные эффекты!

Факторизация

```
struct prod_A_B {  
    A proj_A;  
    B proj_B;  
};
```

```
A f(D x);  
B g(D x);
```

```
prod_A_B factor_f_g(D x)  
{  
    prod_A_B rslt;  
    rslt.proj_A = f(x);  
    rslt.proj_B = g(x);  
    return rslt;  
}
```



Факторизация

```
Proj_A(factor_f_g(x))  
== f(x)
```

```
Proj_B(factor_f_g(x))  
== g(x)
```

```
A f(D x);  
B g(D x);
```

```
prod_A_B factor_f_g(D x)  
{  
    prod_A_B rslt;  
    rslt.proj_A = f(x);  
    rslt.proj_B = g(x);  
    return rslt;  
}
```

