Блог нашего семинара

http://sfedu_ctseminar.livejournal.com

Блог нашего семинара

http://sfedu_ctseminar.livejournal.com

http://sfedu_ctseminar.livejournal.com/**profile**

Блог нашего семинара

http://sfedu_ctseminar.livejournal.com

http://sfedu_ctseminar.livejournal.com/**profile**

http://sfedu_ctseminar.livejournal.com/**831.html**

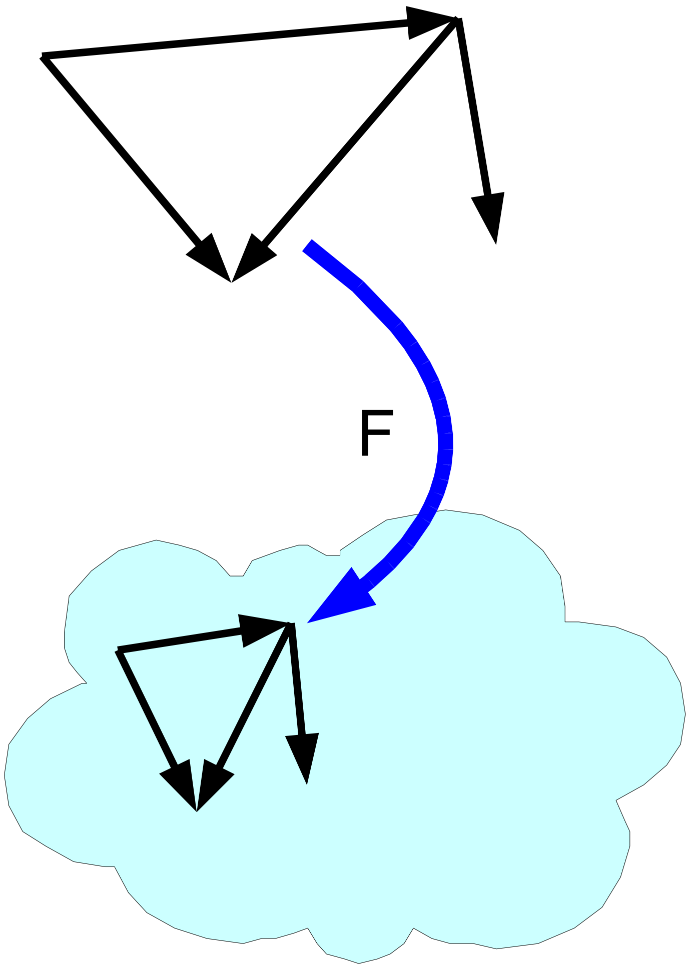
Замечательный курс лекций по ТК

Michael Barr, Charles Wells

Category Theory
Lecture Notes
for ESSLLI

Диаграмма

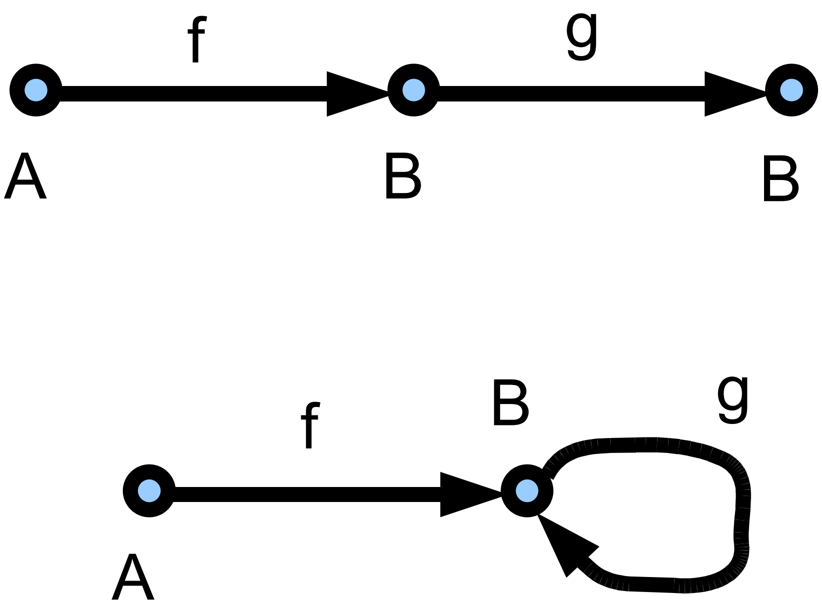
- Категории соответствует некоторый (ор)граф
- Гомоморфизм из некоторого конечного графа в граф категории называется **диаграммой**
- Область определения этого гомоморфизма называется графом **формы диаграммы**



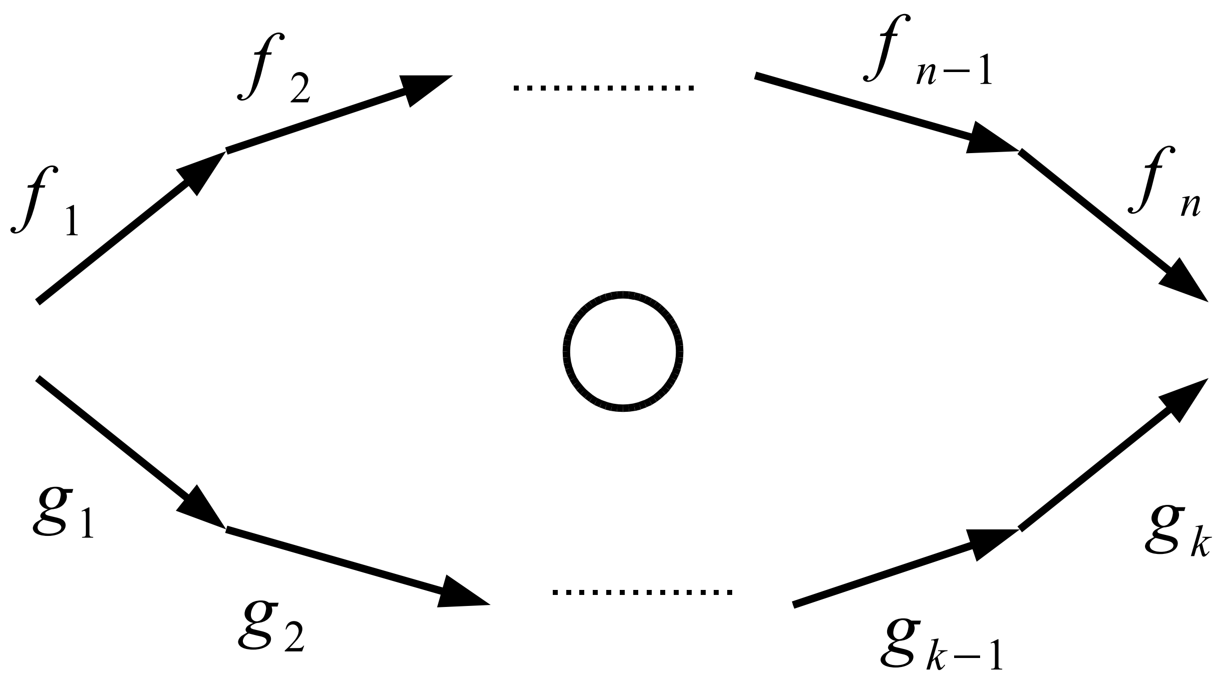
категория **C**

Диаграмма

На рисунке изображены две разные диаграммы, поскольку у них разные графы формы



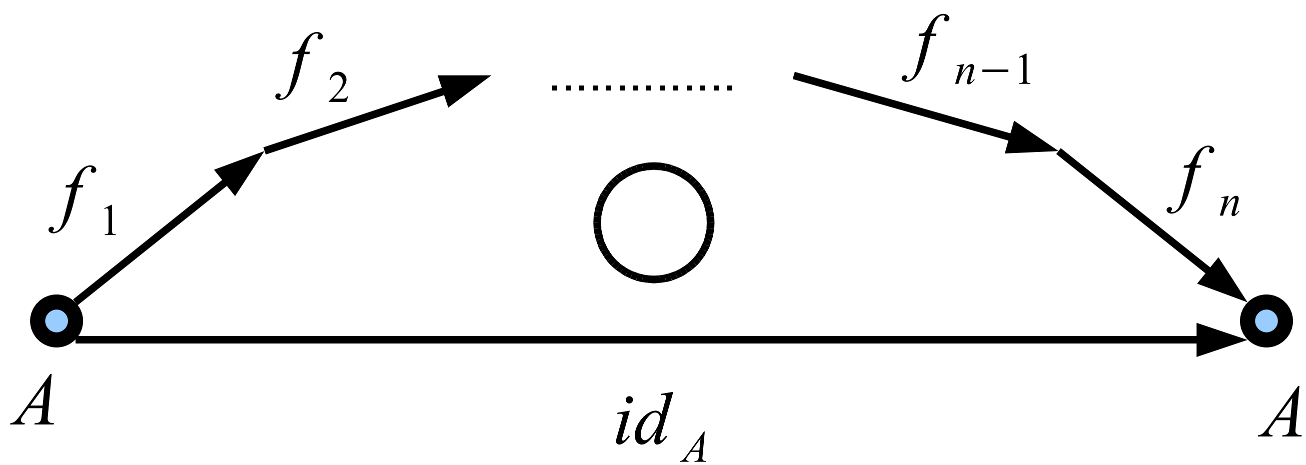
Коммутативная диаграмма



$$f_n \circ f_{n-1} \ldots \circ f_2 \circ f_1 = g_k \circ g_{k-1} \ldots \circ g_2 \circ g_1$$

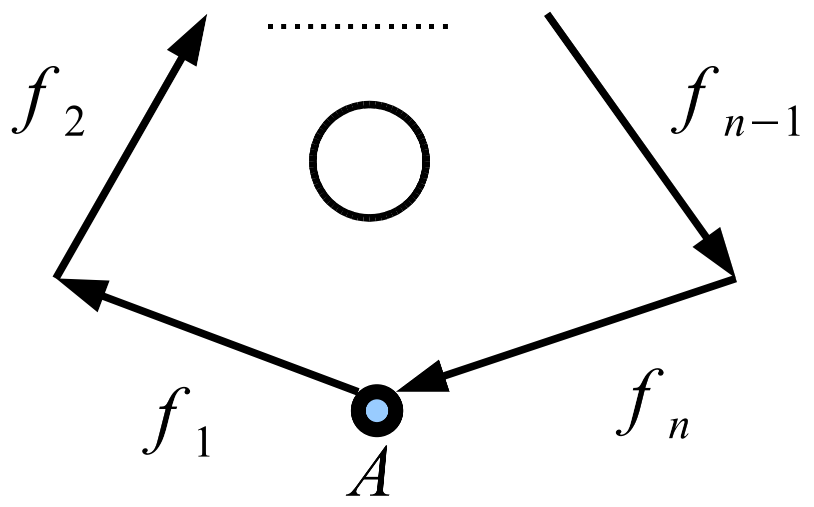
А что если k = 0?

Коммутативная диаграмма



$$f_n \circ f_{n-1} \ldots \circ f_2 \circ f_1 = id_A$$

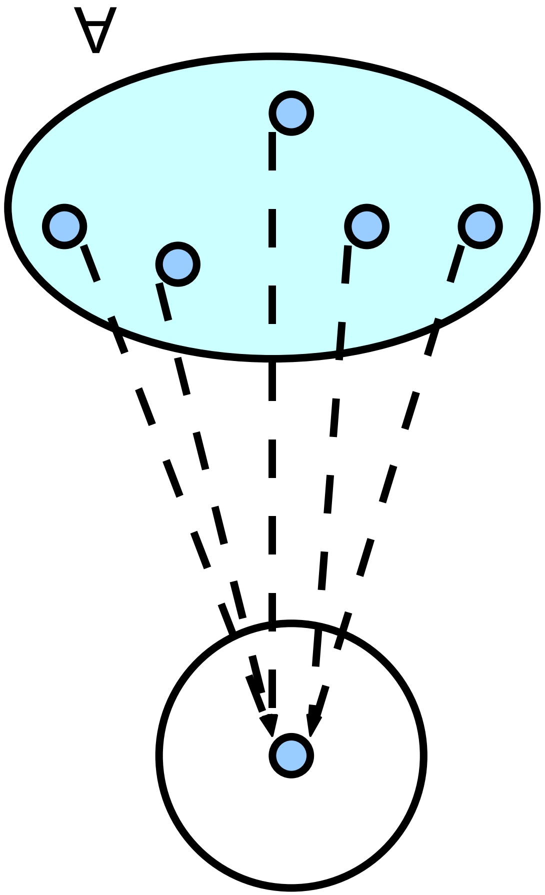
Коммутативная диаграмма



$$f_n \circ f_{n-1} \ldots \circ f_2 \circ f_1 = id_A$$

«Работа без элементов»

- Многие свойства математических объектов можно определить без упоминания элементов соответствующих множеств
- Например, вместо «**множество содержит лишь один элемент**» можно говорить «**из любого множества в данное существует лишь одна функция**»
- Для теории категорий характерна «**работа без элементов**»



«Работа без элементов»

- Как определить ассоциативность моноида, не упоминая его элементов?
- Пусть S — моноид (или множество его элементов)
- Определим 3 стрелки в категории **Set**

$$mult: S \times S \to S$$

$$mult(x, y) = xy$$

«Работа без элементов»

- Как определить ассоциативность моноида, не упоминая его элементов?
- Пусть S — моноид (или множество его элементов)
- Определим 3 стрелки в категории **Set**

$$mult : S \times S \to S$$
$$mult(x, y) = xy$$

$$S \times mult : S \times S \times S \to S \times S$$
$$(S \times mult)(x, y, z) = (x, yz)$$

«Работа без элементов»

- Как определить ассоциативность моноида, не упоминая его элементов?
- Пусть S — моноид (или множество его элементов)
- Определим 3 стрелки в категории **Set**

$$mult : S \times S \to S$$

$$mult(x, y) = xy$$

$$S \times mult : S \times S \times S \to S \times S$$

$$(S \times mult)(x, y, z) = (x, yz)$$

$$mult \times S : S \times S \times S \to S \times S$$

$$(mult \times S)(x, y, z) = (xy, z)$$

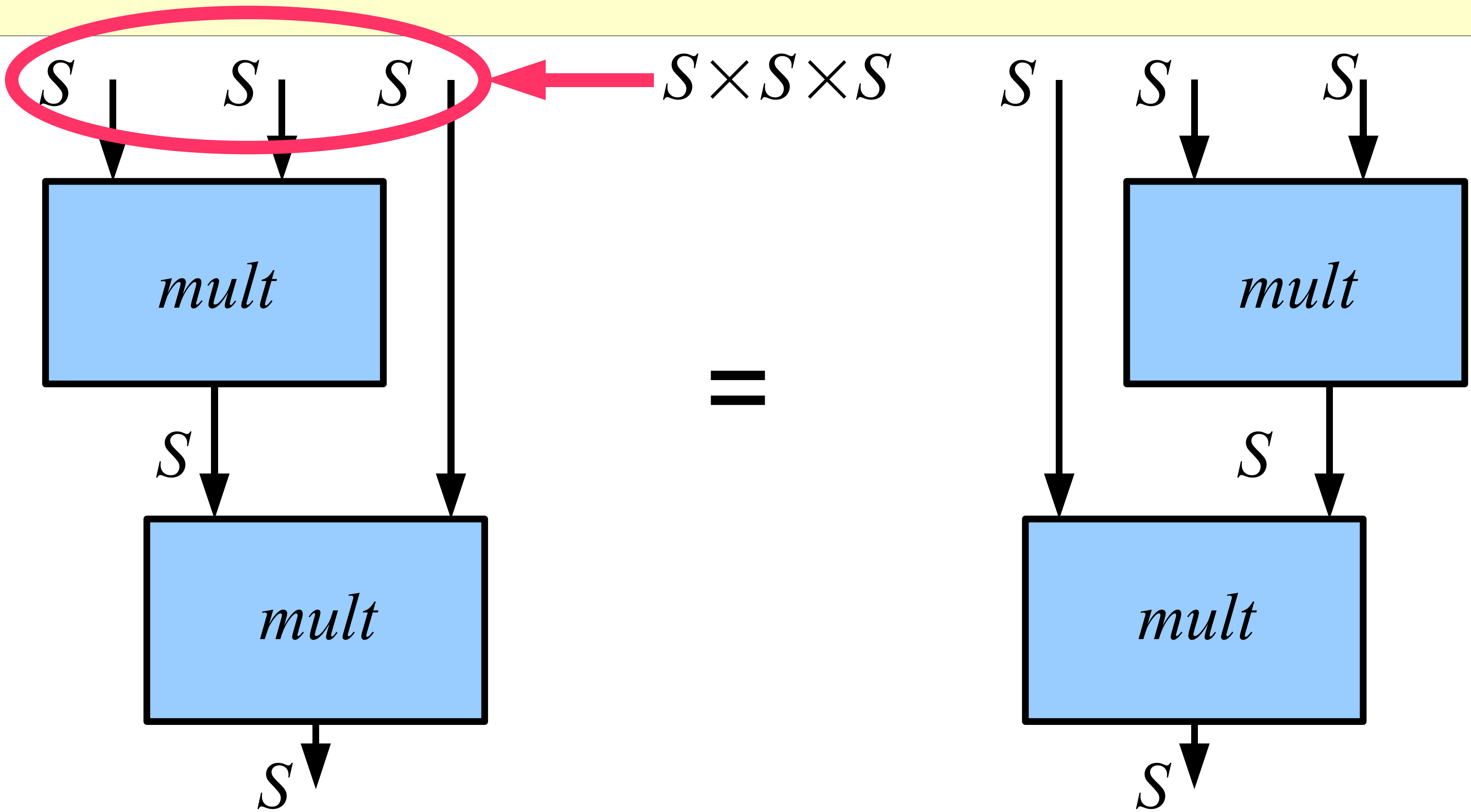
«Работа без элементов»

$$\begin{tikzcd}
S\times S\times S \arrow[r, "S\times mult"] \arrow[d, "mult\times S"'] \arrow[dr, phantom, "\bigcirc"] & S\times S \arrow[d, "mult"] \\
S\times S \arrow[r, "mult"'] & S
\end{tikzcd}$$

Ассоциативность умножения моноида

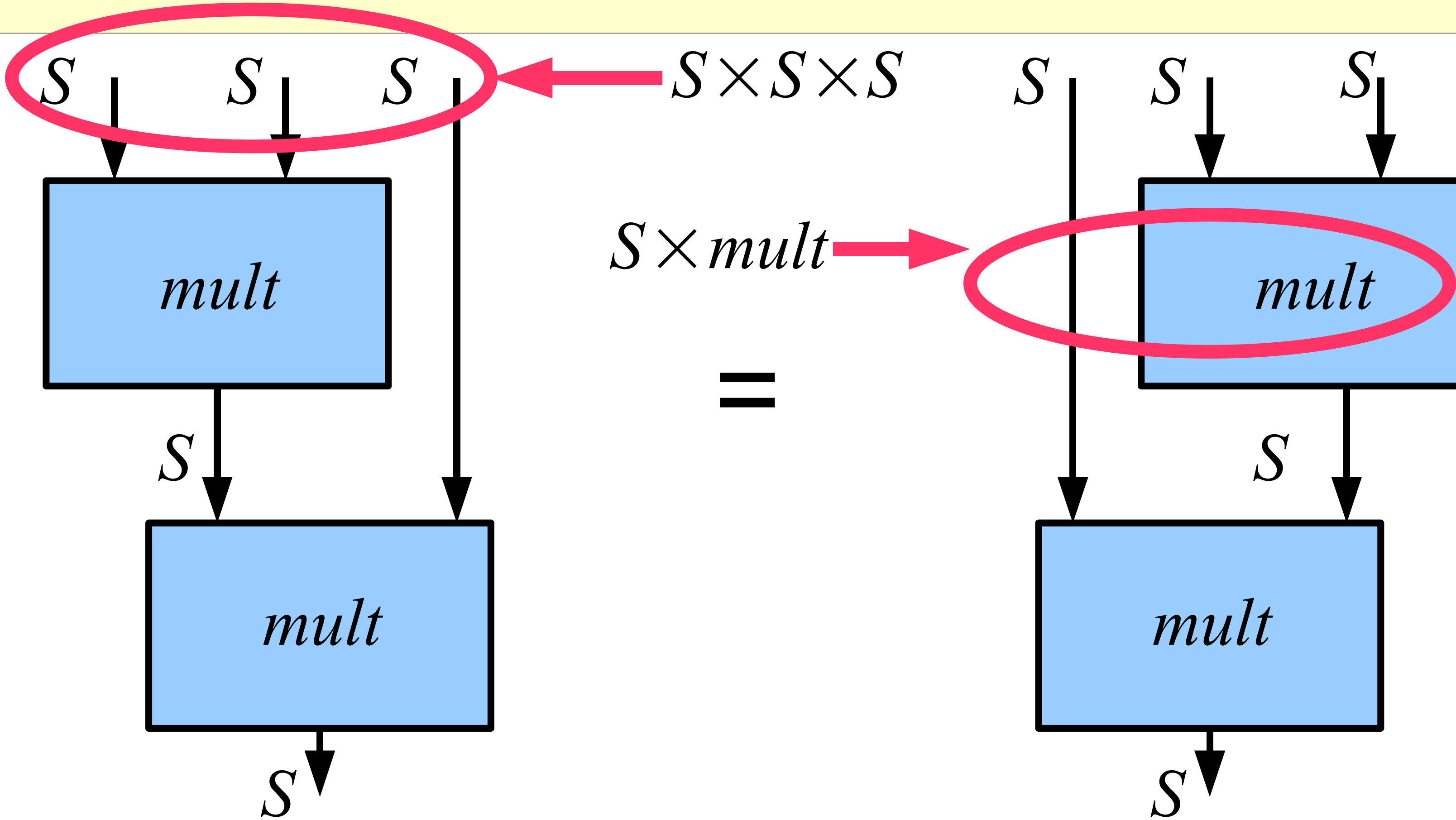
декартово произведение тоже определяется через диаграммы!!!

«Работа без элементов»



Ассоциативность в виде моноидальной диаграммы

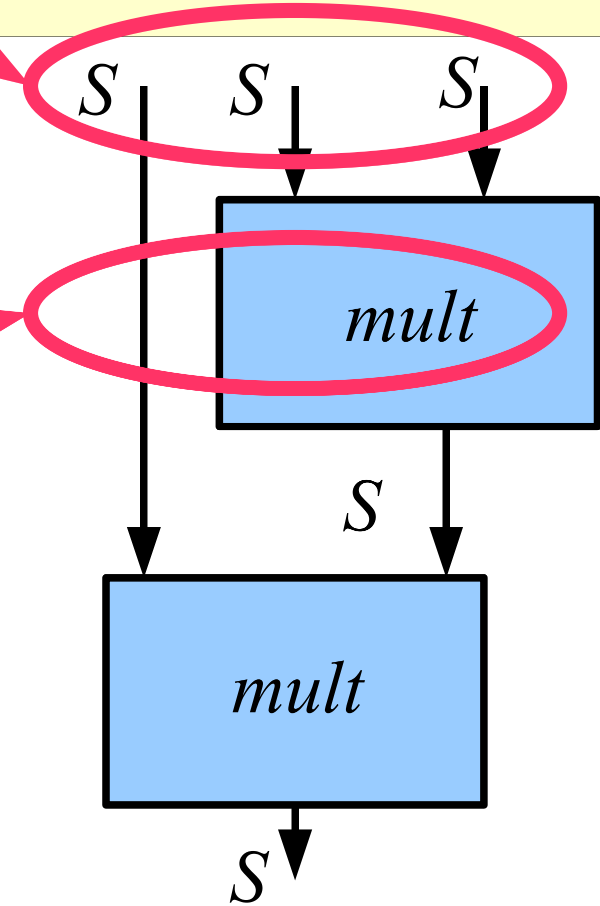
«Работа без элементов»



Ассоциативность в виде моноидальной диаграммы

«Работа без элементов»

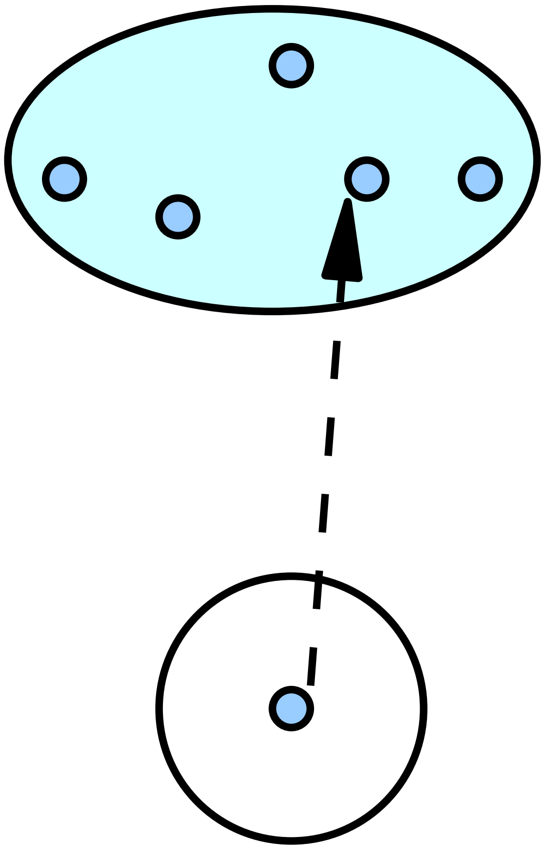
$$\begin{tikzcd}[column sep=huge, row sep=huge]
S\times S\times S \arrow[r, "S\times mult"] \arrow[d, "mult\times S"'] \arrow[dr, phantom, "\bigcirc"] & S\times S \arrow[d, "mult"] \\
S\times S \arrow[r, "mult"'] & S
\end{tikzcd}$$



Ассоциативность в виде моноидальной диаграммы

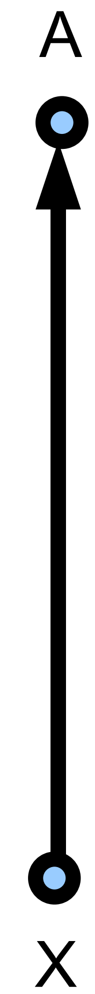
Элемент = стрелка

- Подсказка для «работы без элементов»: стрелку можно считать обобщенным элементом
- Это очевидно для морфизмов из одноэлементного множества в категории **Set**



Элемент = стрелка

- Подсказка для «работы без элементов»: стрелку можно считать обобщенным элементом
- Это очевидно для морфизмов из одноэлементного множества в категории **Set**
- Можно выбрать произвольный объект **X** категории и считать стрелки из него в объект **A** (обобщенными) элементами **A**



Мономорфизм

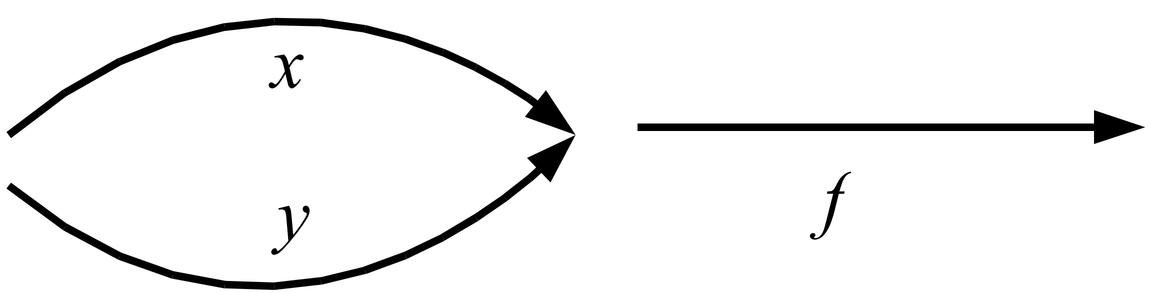
- Инъективное отображение f:
  - $если\ f(x) = f(y)\ то\ x = y$

Мономорфизм

- Инъективное отображение f:
  - $если\ f(x) = f(y)\ то\ x = y$
- Вспоминаем что элементы можно считать стрелками
  - $если\ f \circ x = f \circ y\ то\ x = y$

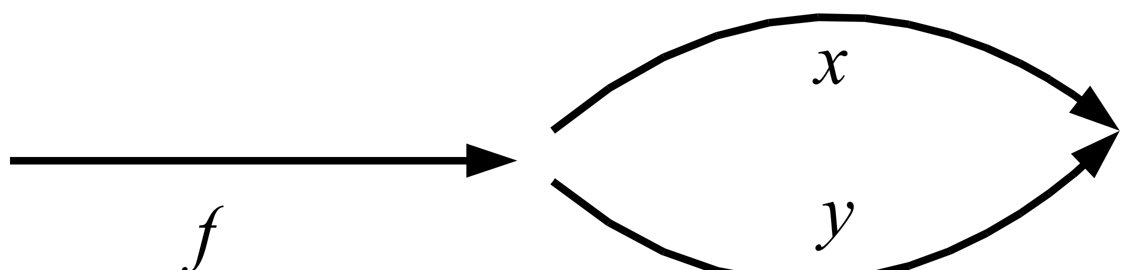
Мономорфизм

- Инъективное отображение f:
  - *если* $f(x)=f(y)$ *то* $x=y$
- Вспоминаем что элементы можно считать стрелками
  - *если* $f\circ x=f\circ y$ *то* $x=y$
- Получаем определение мономорфизма



Эпи- и биморфизмы

- Нужно «перевернуть» определение мономорфизма
- Получим определение эпиморфизма:
  - $\text{если } x \circ f = y \circ f \text{ то } x = y$



- Моно + Эпи = Биморфизм

Эпи-, моно- и биморфизмы

- В категориях структурированных множеств вложения являются **мономорфизмами**, а наложения **эпиморфизмами** (*справочник под. ред. Скорнякова*)
- В категории множеств **Set**, топологических пространств **Top** и однотипных универсальных алгебр (группы, кольца) мономорфизмы совпадают с вложениями
- В категории ассоциативных колец вложение кольца целых чисел в поле рациональных чисел является как мономорфизмом, так и эпиморфизмом (но **не наложением**). Это пример биморфизма.

Двойственные категории

- Мономорфизмы и эпиморфизмы — пример двойственных понятий

Двойственные категории

- Мономорфизмы и эпиморфизмы — пример двойственных понятий
- Двойственная категория **C**^{op} к данной категории **C**:
  - $dom(f^{op}) = cod(f)$
  - $cod(f^{op}) = dom(f)$
  - $f^{op} \circ g^{op} = (f \circ g)^{op}$

Двойственные категории

- Мономорфизмы и эпиморфизмы — пример двойственных понятий
- Двойственная категория **C**^{op} к данной категории **C**:
  - $dom(f^{op}) = cod(f)$
  - $cod(f^{op}) = dom(f)$
  - $f^{op} \circ g^{op} = (f \circ g)^{op}$
- Эпиморфизмы — это мономорфизмы в двойственной категории

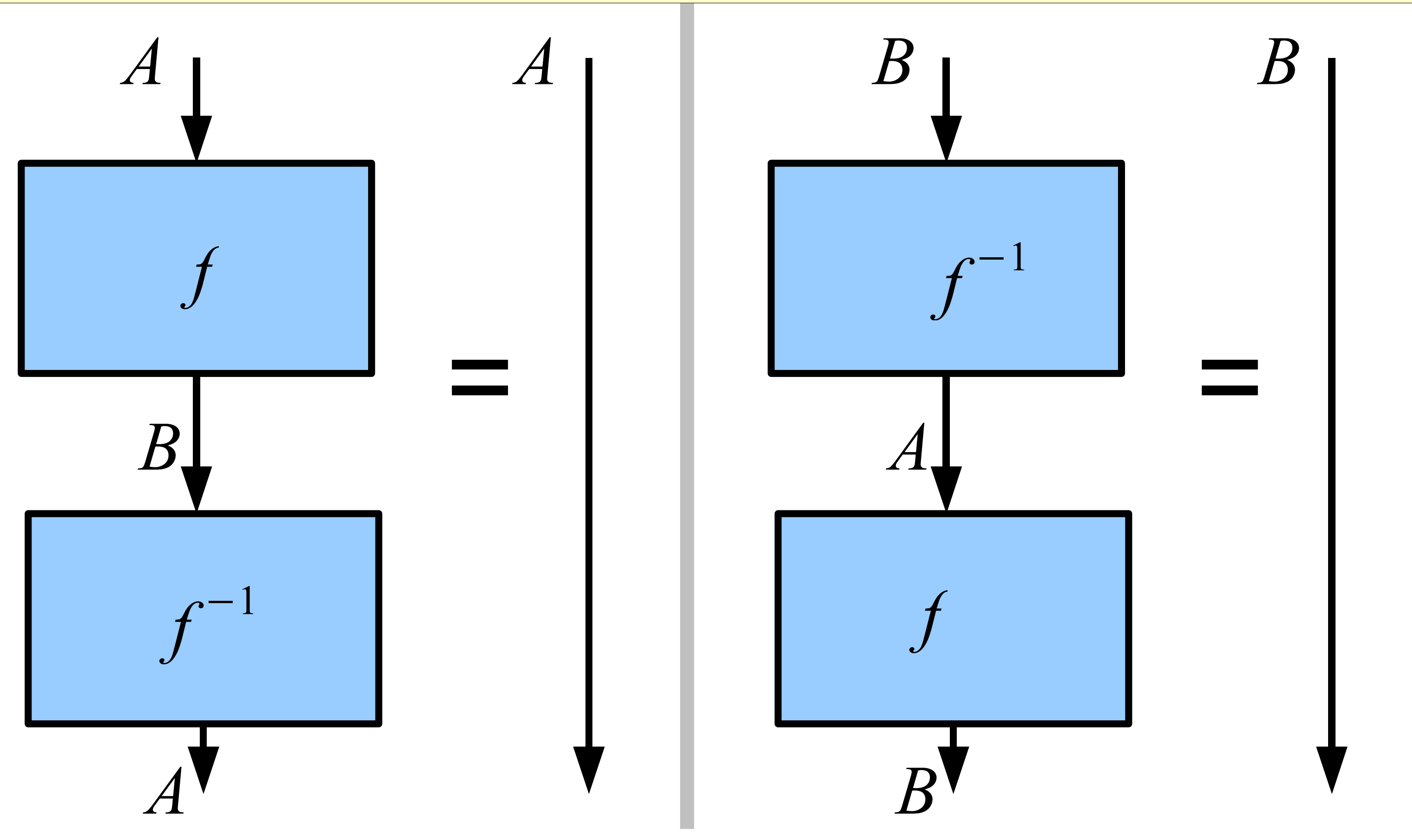
Изоморфизмы

$$\begin{tikzcd} & B \arrow[dr, "f^{-1}"] & \\ A \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "id_A"'] & \arrow[u, phantom, "\bigcirc"] & A \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & A \arrow[dr, "f"] & \\ B \arrow[ur, "f^{-1}"] \arrow[rr, "id_B"'] & \arrow[u, phantom, "\bigcirc"] & B \end{tikzcd}$$

или

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[r, phantom, "\bigcirc"] & B \arrow[l, bend left, "f^{-1}"] \end{tikzcd}$$

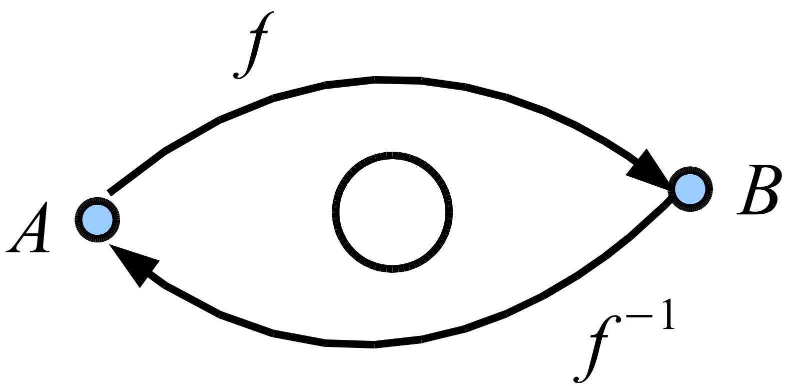
Изоморфизмы



В виде моноидальной диаграммы

Изоморфизмы

A



- Такие объекты называются изоморфными
- Обозначение $A \cong B$
- Изоморфизм — это отношение эквивалентности
- В **группоиде** все морфизмы - изоморфизмы

Категорификация 2x2=4

$\underline{\cup} - \textit{дизъюнктное объединение}$

$\times - \textit{декартово произведение}$

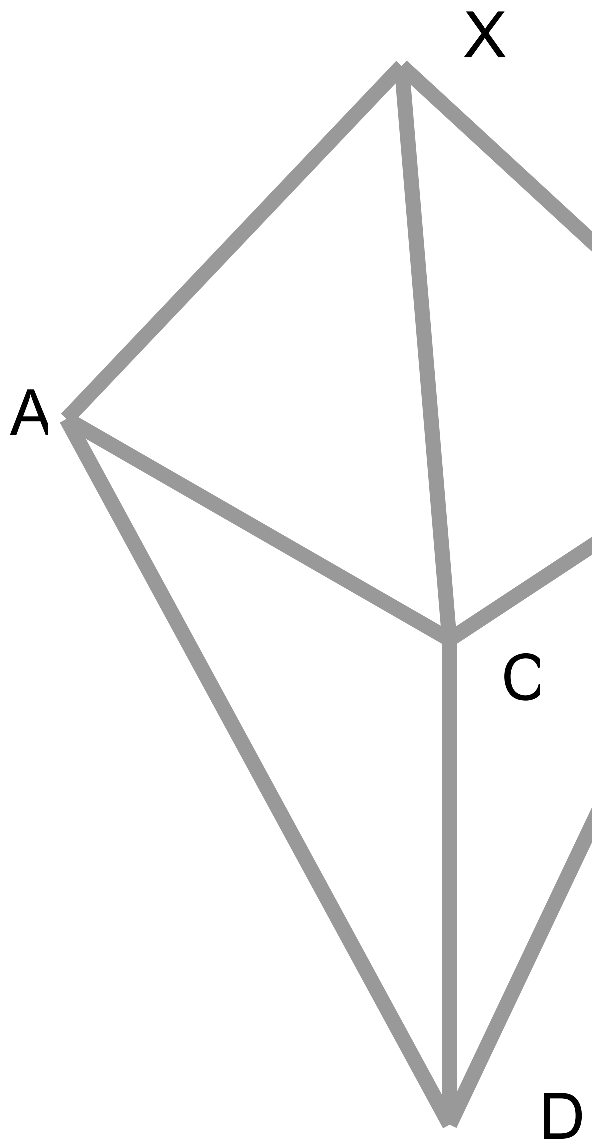
$\bar{1} - \textit{одноэлементное множество}$

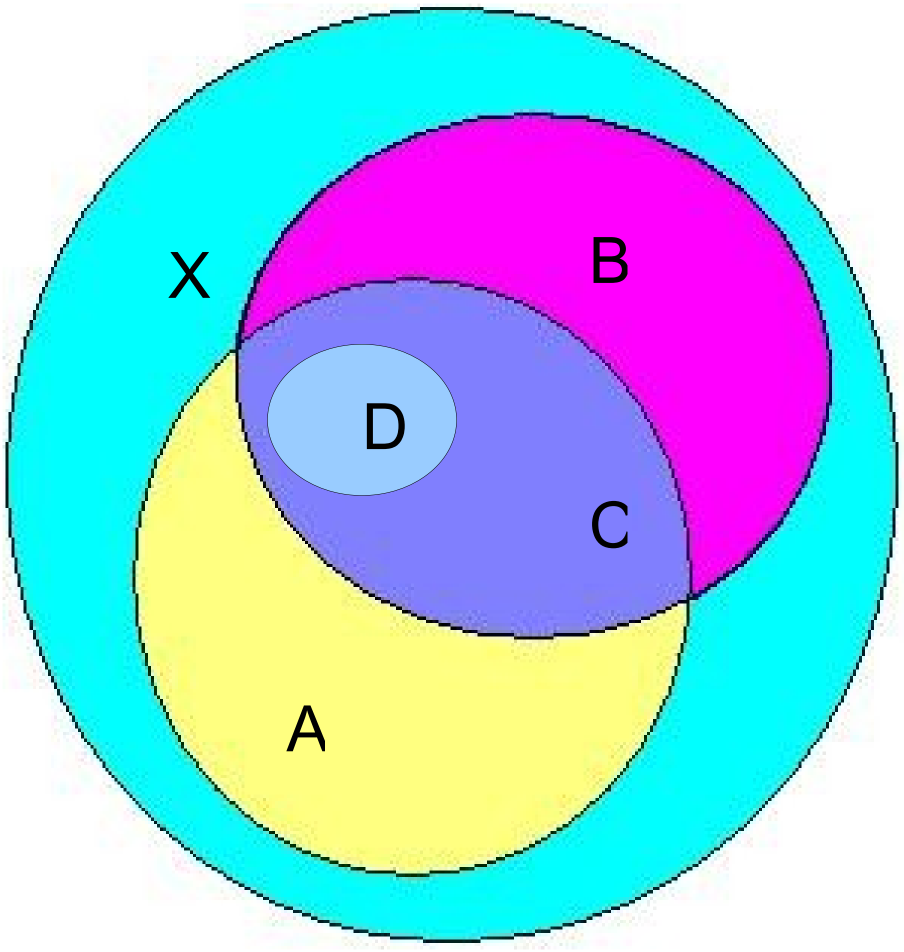
$$\boxed{(\bar{1} \,\underline{\cup}\, \bar{1}) \times (\bar{1} \,\underline{\cup}\, \bar{1}) \cong \bar{1} \,\underline{\cup}\, \bar{1} \,\underline{\cup}\, \bar{1} \,\underline{\cup}\, \bar{1}}$$

Тонкие категории и качум

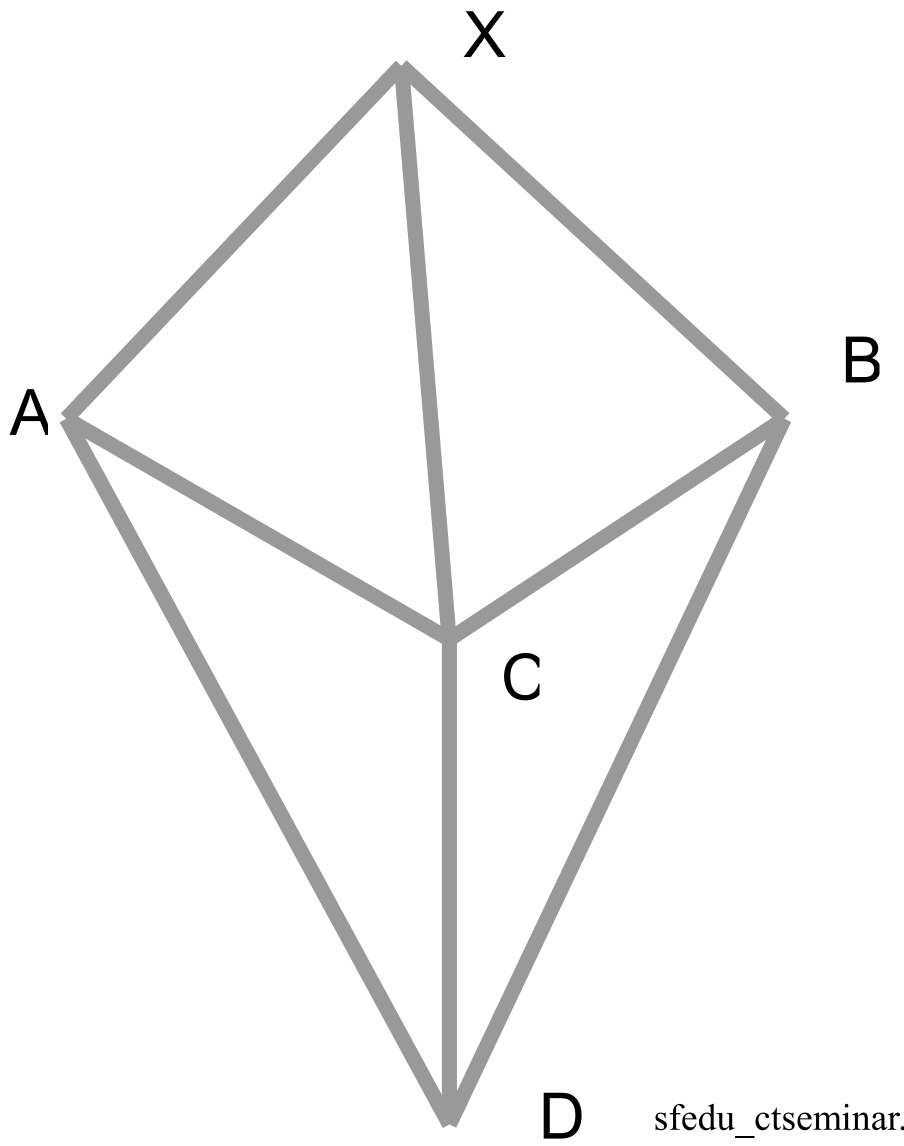
- Категория, где каждый Hom содержит не более одной стрелки, называется тонкой
- Каждая тонкая категория соответствует предупорядоченному классу
- Качум — частичный порядок как категория
- Решеточный качум — решетка как категория

Решетки



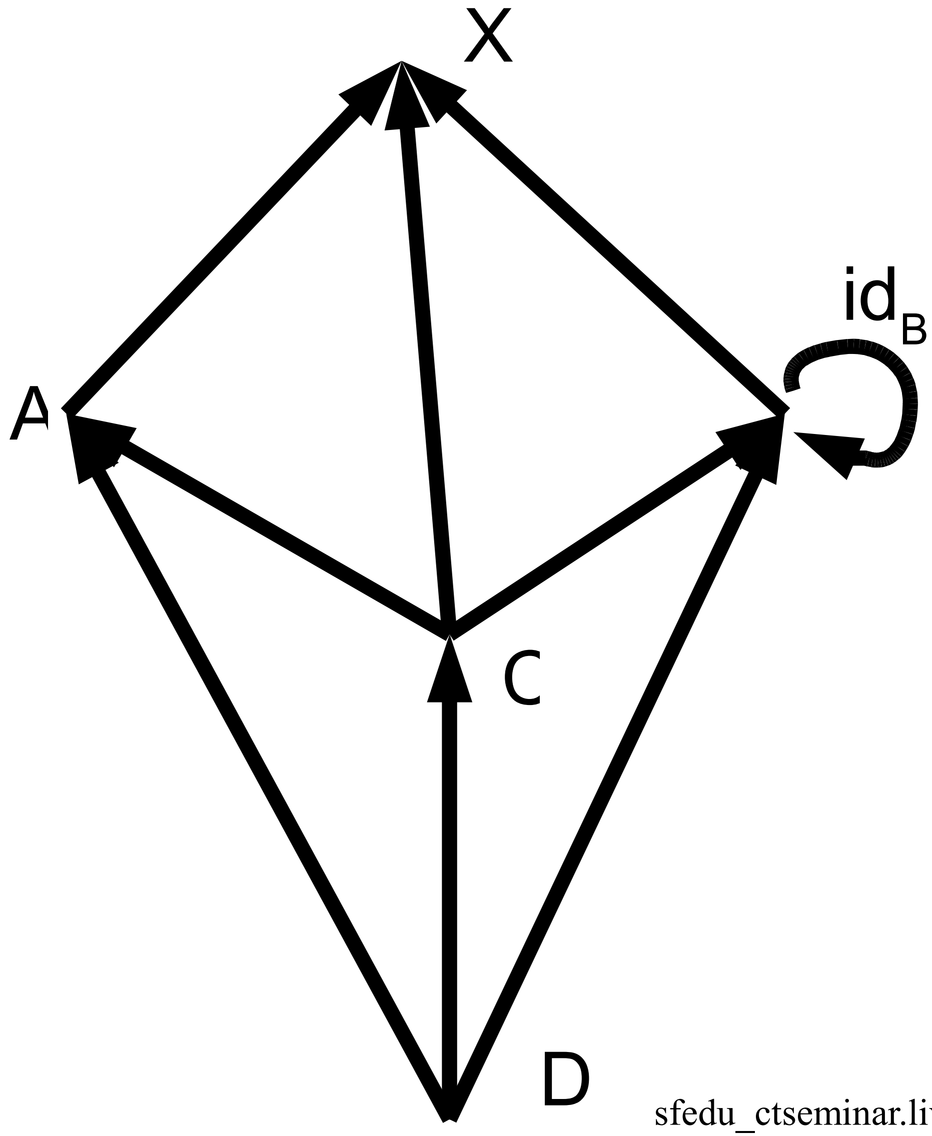


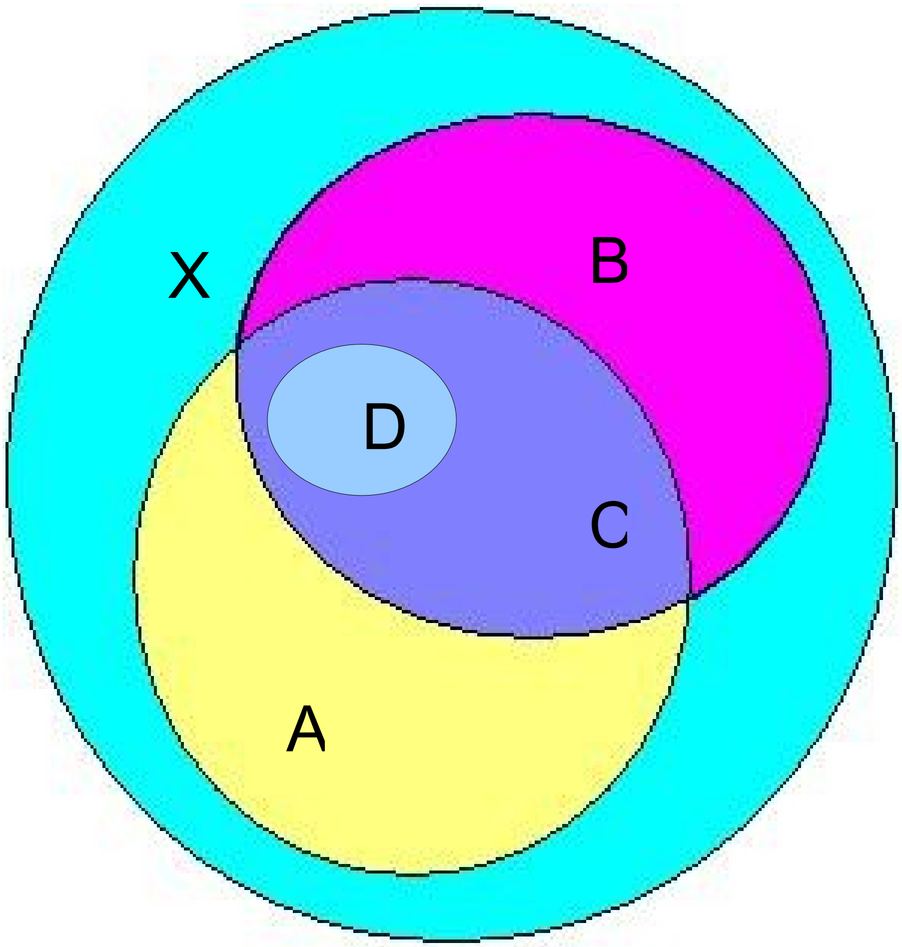
Решетки



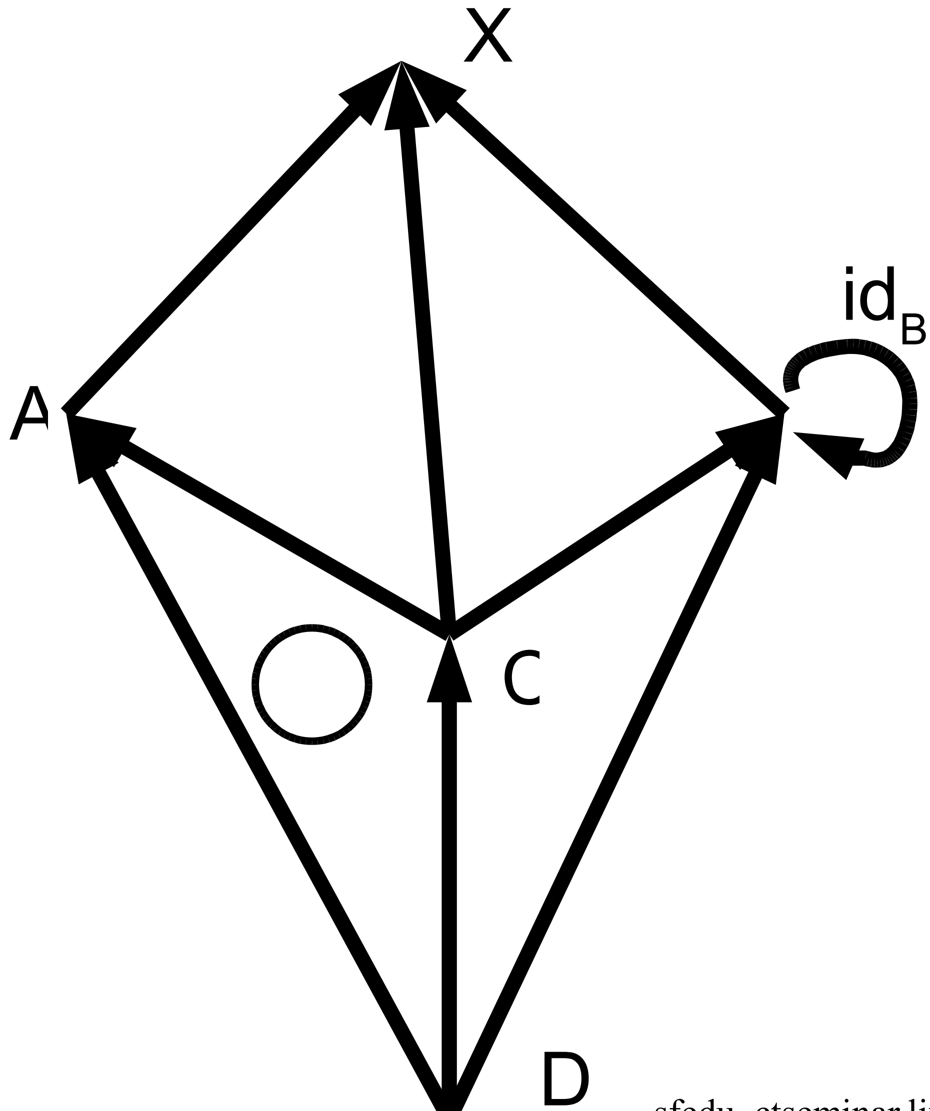
- C ≤ A и C ≤ B
- Для любого D из D ≤ A и D ≤ B, следует D ≤ C.

Решетки



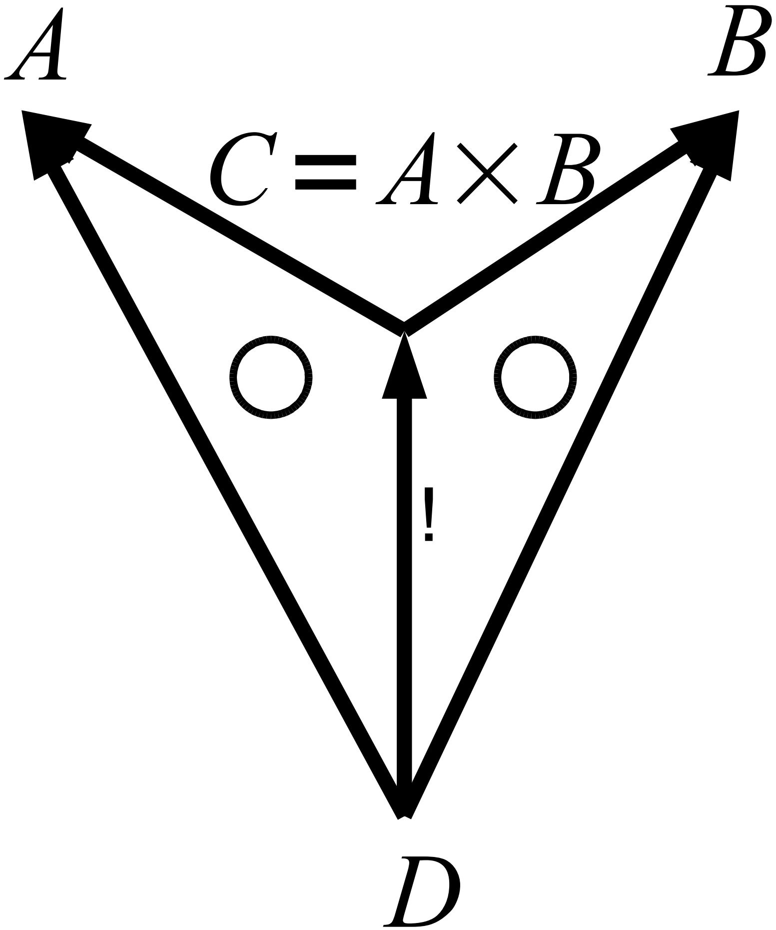


Решетки



- Из C существуют морфизмы в A и B
- Для любого D верно: если есть стрелки из D в A и B, то есть стрелка из D в C.

Категорное произведение



- Из C существуют морфизмы в A и B
- Они называются проекциями
- Для любого D верно: если есть стрелки из D в A и B, то есть **единственная факторизующая** стрелка из D в C.

Произведение и копроизведение

- Любое многообразие универсальных алгебр является категорией с произведениями
- В категории **Set** произведением является декартово произведение
- Копроизведение двойственно произведению
- В категории **Set** копроизведением является дизъюнктное объединение

На С-подобном языке

```
struct prod_A_B {
    A proj_A;
    B proj_B;
};
```

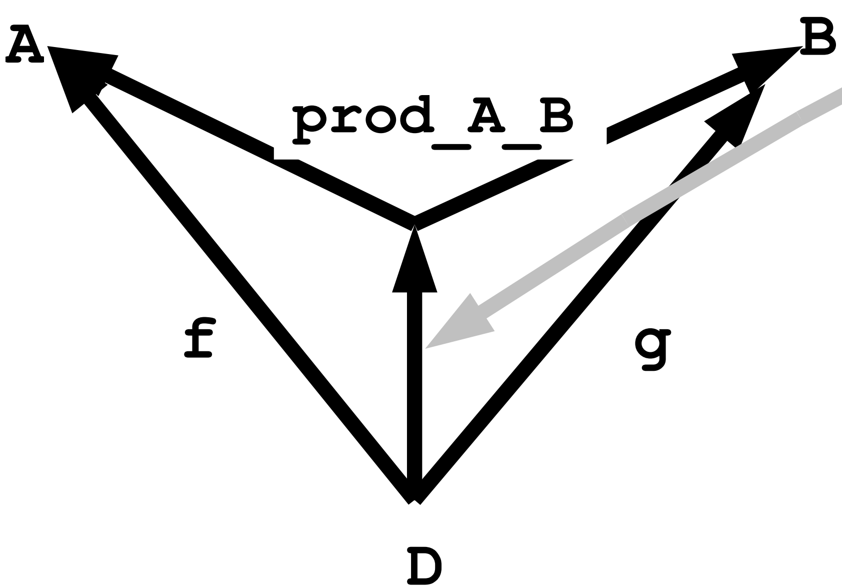
```
A Proj_A(prod_A_B x)
{
    return x.proj_A;
}

B Proj_B(prod_A_B x)
{
    return x.proj_B;
}
```

Это будет произведением только если запретить побочные эффекты!

На С-подобном языке

```
struct prod_A_B {
    A proj_A;
    B proj_B;
};
```



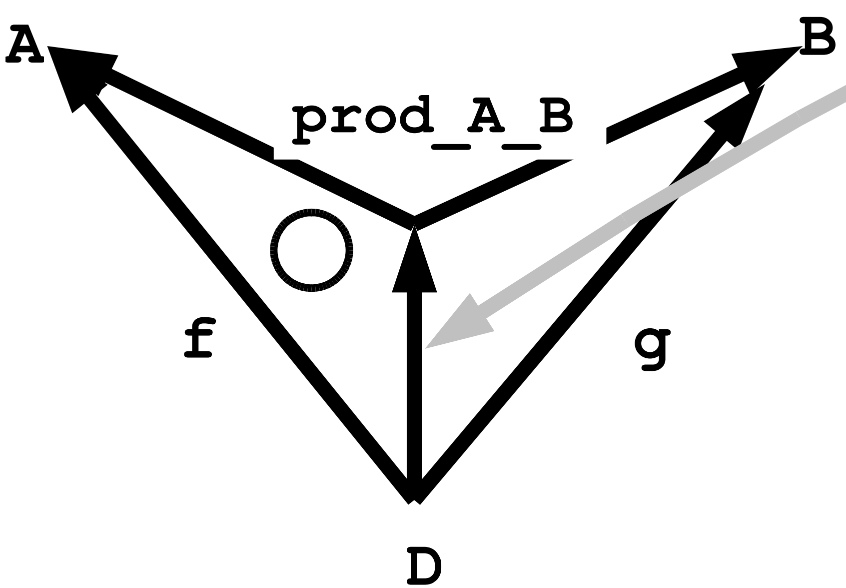

```
A f(D x);
B g(D x);

prod_A_B factor_f_g(D x)
{
    prod_A_B rslt;
    rslt.proj_A = f(x);
    rslt.proj_B = g(x);
    return rslt;
}
```

На С-подобном языке

```
Proj_A(factor_f_g(x))
== f(x)

Proj_B(factor_f_g(x))
== g(x)
```




```
A f(D x);
B g(D x);

prod_A_B factor_f_g(D x)
{
      prod_A_B rslt;
      rslt.proj_A = f(x);
      rslt.proj_B = g(x);
      return rslt;
}
```