Курс «**Математическая логика и теория алгоритмов**»

Составитель: ассистент кафедры ИВЭ механико-математического факультета РГУ Ячменева Н.Н.
Курс — 2
Семестр — 3
Лекции — 34 часов
Практические занятия – 34 часов
Форма отчетности — экзамен (зимняя сессия)

Общая характеристика курса «Математическая логика и теория алгоритмов»

Данный курс является продолжением курса дискретной математики и рассматривает вопросы математических доказательств и оснований математики. Предметом логики являются логические исчисления, в том числе и предикатов. Также исследуются некоторые вопросы теории алгоритмов, изучающие общие свойства алгоритмов.

Рабочая программа составлена в соответствии с государственным образовательным стандартом для направления 51900 информационные технологии.

Содержание рабочей программы

1. Математическая логика
   Определения исчисления, высказываний, алфавита, языка, формул, правил вывода. Эквивалентность формул, нормальные формы. Алгоритмы проверки общезначимости и противоречивости в исчислениях высказываний. Логика и исчисления предикатов, клаузальная логика, хорновские дизъюнкты. Секвенциальная нотация. Метод резолюций.
2. Элементы теории доказательств
   Теории первого порядка. Формальная арифметика.
3. Теория алгоритмов
   Вычислимые и рекурсивные функции. Машины Тьюринга. Тезис Черча. Характеристики сложности алгоритмов. Класс задач P и NP NP-полные задачи.

Программа

Предмет изучения мат. логики. Определение буквы, слова, алфавита, подслова, соединения слов, конечного множества. Последовательность, частичные n-местные операции, исчисление, правила вывода, теоремы исчисления, язык исчисления.

Исчисления высказываний генценовского типа(ИС). Алфавит, формулы ИС. Предложение об однозначно представимом виде формулы ИС. Секвенции ИС, схемы секвенций, аксиом. Правила вывода ИС, Линейное доказательство, теоремы ИС. Дерево вывода в ИС, высота дерева. Предложение о доказательстве теорем ИС.
Допустимые правила ИС, равносильные. Теорема о подстановке. Эквивалентные формулы, леммы об эквивалентности формул, теорема о замене.

Нормальные формы, дизъюнкты. Семантика ИС: интерпретация ИС, главная интерпретация. Непротиворечивость ИС, тождественно истинность секвенций.
Теорема о полноте ИС, разрешимость и независимость ИС. ИВ гильбертовского типа, гипотезы, теорема о дедукции. Теорема об эквивалентности ИС и ИВ.

Алгоритмы проверки общезначимости и противоречивости в ИВ. Алгоритмы Квайна, редукции, резолюций. Резольвента дизъюнктов, теорема о полноте метода резолюций.
Пример: проверить доказуемость секвенции:
$A \to (B \to C), C \wedge D \to E, \neg F \to D \wedge \neg E \vdash A \to (B \to F)$
$\neg$ — операция «не».
Метод резолюций для хорновских дизъюнктов. Пример: проверить на противоречивость $S = \{P \vee \neg R \vee \neg T, Q, R, T \vee \neg P \vee \neg R, T \vee \neg Q, \neg P \vee \neg Q \vee \neg R\}$.

Исчисления предикатов (ИП):
Алгебраические системы, алфавит, термы, формулы сигнатуры Σ, общезначимость формул сигнатуры. Свободные переменные, замкнутые формулы(предложения). Выполнимые, общезначимые формулы. Модель множества формул.
Секвенциальное $ИПС^{\Sigma}$, аксиомы, правила вывода, допустимые правила, отношение $\approx$, истинность секвенций в алгебраической системе. Теорема о непротиворечивости $ИПС^{\Sigma}$. Эквивалентность формул в $ИПС^{\Sigma}$. Нормальные формы, предклазуальная нормальная форма. Теорема о существовании модели, теорема Геделя о полноте. Локально выполнимые множества формул.
$ИП^{\Sigma}$, аксиомы, правила вывода, теорема об эквивалентности $ИПС^{\Sigma}$ и $ИП^{\Sigma}$.
Скулемизация алгебраической системы: обогащение АС, аксиомы Скулема, скулемизация Σ, АС, скулемовские функции. Клазуальная нормальная форма Пример скулемовских функций: $\forall x \exists z \forall y \exists u((y > z \to y > x) \wedge (u < z) \wedge \neg(u < x))$.

Метод резолюций в ИП. Подстановки, унификаторы, наиболее общий унификатор, множество рассогласований. Алгоритм унификации. Примеры:
$1) W = \{P(c, x, F_2(F_1(y))), P(z, F_2(z), F(u))\}$; $2) W = \{P(F_1(c), F_2(x)), P(y, y)\}$. Бинарная резольвента формул, резольвента дизъюнктов, Теорема о полноте метода. Примеры:

1. Выполнимо ли $W = \{\Phi_1, ..., \Phi_6\}$? $\Phi_1 = P_1(c_1, F(c_2), F(c_3))$, $\Phi_2 = P_2(c_1)$, $\Phi_3 = P_1(x, x, F(x))$, $\Phi_4 = \neg P_1(x, y, z) \vee P_3(x, z)$, $\Phi_5 = \neg P_2(x) \vee \neg P_1(y, z, u) \vee \neg P_3(x, u) \vee P_3(x, z) \vee P_3(x, y)$, $\Phi_6 = \neg P_3(c_1, c_3)$;
2. Выполнимо ли $\{\Phi_1, \Phi_2\}$? $\Phi_1 = \exists y \forall xz((P_1(x, z) \to (P_2(x) \wedge P_3(x))) \wedge P_4(y))$, $\Phi_2 = \forall x((P_4(x) \to \neg P_3(x)) \wedge \exists y P_1(x, y))$;
3. Доказать теорему: Если «Студенты - граждане», то «Голоса студентов – голоса граждан»

Элементы теории алгоритмов. Понятие алгоритма, его свойства. Тезис Черча. Машины Тьюринга: определение, примеры, функции, вычислимые на машинах Тьюринга. Теорема о правильно вычислимых функциях, примеры

Рекурсивные функции и отношения. Примитивно рекурсивные, частично рекурсивные функции, примеры
Эквивалентность моделей алгоритмов. Рекурсивно перечислимые отношения. Рекурсивные отношения, теорема Поста.
Неразрешимость ИП: геделевская нумерация, рекурсивность геделевских номеров. Элементарная теория арифметики, теорема о неразрешимости, неполноте.

Характеристики сложности алгоритмов. Верхняя граница сложности вычислений. Класс задач P и NP. Линейные, полиномиальные, экспоненциальные алгоритмы. Переборные задачи. NP-полные задачи.

Основная литература

1. Ершов Ю.Л., Палютин Е.А. Математическая логика. СПб, 2004
2. Колмогоров А.Н., Драгалин А.Г. Введение в математическую логику. М, 2005
3. Клини С.К. Математическая логика. М, 2002

Дополнительная литература

1. Судоплатов С.В., Овчинникова Е.В. Математическая логика и теория алгоритмов:Учебник. М.Инфра, 2004
2. Успенский В.А., Верещагин Н.К., Плиско В.Е. Вводный курс математической логики. М, 2002