Блог нашего семинара

http://sfedu_ctseminar.livejournal.com

http://sfedu_ctseminar.livejournal.com/**profile**

http://sfedu_ctseminar.livejournal.com/**831.html**

Подкатегории

- Категория ***D*** является подкатегорией ***C***:
  - $\mathrm{Ob}(\boldsymbol{D}) \subseteq \mathrm{Ob}(\boldsymbol{C})$

Подкатегории

- Категория ***D*** является подкатегорией ***C***:
  - $\mathrm{Ob}(\boldsymbol{D}) \subseteq \mathrm{Ob}(\boldsymbol{C})$
  - $\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{D}}(A, B) \subseteq \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{C}}(A, B)$

Подкатегории

- Категория ***D*** является подкатегорией ***C***:
  - $\mathrm{Ob}(\boldsymbol{D}) \subseteq \mathrm{Ob}(\boldsymbol{C})$
  - $\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{D}}(A, B) \subseteq \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{C}}(A, B)$
  - Композиция морфизмов в ***D*** совпадает с их же композицией в ***C***

Подкатегории

- Категория ***D*** является подкатегорией ***C***:
  - $\mathrm{Ob}(\boldsymbol{D}) \subseteq \mathrm{Ob}(\boldsymbol{C})$
  - $\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{D}}(A, B) \subseteq \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{C}}(A, B)$
  - Композиция морфизмов в ***D*** совпадает с их же композицией в ***C***
  - Тождественный морфизм каждого объекта в ***D*** совпадает с его же тождественным в ***C***

Подкатегории

- Категория ***D*** является подкатегорией ***C***:
  - $\mathrm{Ob}(\boldsymbol{D}) \subseteq \mathrm{Ob}(\boldsymbol{C})$
  - $\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{D}}(A, B) \subseteq \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{C}}(A, B)$
  - Композиция морфизмов в ***D*** совпадает с их же композицией в ***C***
  - Тождественный морфизм каждого объекта в ***D*** совпадает с его же тождественным в ***C***
- Если $\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{D}}(A, B) = \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{C}}(A, B)$ для любых A и B, то ***D*** называется **полной** подкатегорией ***C***

Примеры подкатегорий

- Категория ***Fin*** конечных множеств является полной подкатегорией ***Set***

Примеры подкатегорий

- Категория ***Fin*** конечных множеств является полной подкатегорией ***Set***
- Категория ***Set*** является подкатегорией категории множеств и **частичных** отображений

Примеры подкатегорий

- Категория ***Fin*** конечных множеств является полной подкатегорией ***Set***
- Категория ***Set*** является подкатегорией категории множеств и **частичных** отображений
- Вышеперечисленные категории являются подкатегориями ***Rel*** множеств и отношений

Примеры подкатегорий

- Категория ***Fin*** конечных множеств является полной подкатегорией ***Set***
- Категория ***Set*** является подкатегорией категории множеств и **частичных** отображений
- Вышеперечисленные категории являются подкатегориями ***Rel*** множеств и отношений
- Категория абелевых групп — полная подкатегория ***Grp***

Примеры подкатегорий

- Категория ***Fin*** конечных множеств является полной подкатегорией ***Set***
- Категория ***Set*** является подкатегорией категории множеств и **частичных** отображений
- Вышеперечисленные категории являются подкатегориями ***Rel*** множеств и отношений
- Категория абелевых групп — полная подкатегория ***Grp***
- Категория хаусдорфовых пространств — полная подкатегория ***Top***

Функторы

- Пусть ***C*** и ***D*** — две категории. Определим функтор F: ***C*** → ***D*** как пару отображений
  - F_{Ob}: Ob(***C***) → Ob(***D***)
  - F_{Mor}: Mor(***C***) → Mor(***D***)

Функторы

- Пусть $\boldsymbol{C}$ и $\boldsymbol{D}$ — две категории. Определим функтор F: $\boldsymbol{C} \to \boldsymbol{D}$ как пару отображений
  - F_{Ob}: $Ob(\boldsymbol{C}) \to Ob(\boldsymbol{D})$
  - F_{Mor}: $Mor(\boldsymbol{C}) \to Mor(\boldsymbol{D})$
- Образом f: $A \to B$ является $F_{Mor}(f)$: $F_{Ob}(A) \to F_{Ob}(B)$

Функторы

- Пусть ***C*** и ***D*** — две категории. Определим функтор F: ***C*** → ***D*** как пару отображений
  - F_{Ob}: Ob(***C***) → Ob(***D***)
  - F_{Mor}: Mor(***C***) → Mor(***D***)
- Образом f: A → B является $F_{Mor}(f): F_{Ob}(A) \to F_{Ob}(B)$
- $F_{Mor}(id_A) = id_{F_{Ob}(A)}$

Функторы

- Пусть ***C*** и ***D*** — две категории. Определим функтор F: ***C*** → ***D*** как пару отображений
  - F_{Ob}: Ob(***C***) → Ob(***D***)
  - F_{Mor}: Mor(***C***) → Mor(***D***)
- Образом f: A → B является $F_{Mor}(f)$: $F_{Ob}(A) \to F_{Ob}(B)$
- $F_{Mor}(id_A) = id_{F_{Ob}(A)}$
- $F_{Mor}(f \circ g) = F_{Mor}(f) \circ F_{Mor}(g)$

Контравариантный функтор

- Пусть ***C*** и ***D*** — две категории. Определим **контравариантный** функтор F: ***C*** → ***D*** как пару
  - F_{Ob}: Ob(***C***) → Ob(***D***)
  - F_{Mor}: Mor(***C***) → Mor(***D***)
- Образом f: A → B является F_{Mor}(f): $\mathbf{F_{Ob}(B)} \rightarrow \mathbf{F_{Ob}(A)}$
- $F_{Mor}(id_A) = id_{F_{Ob}(A)}$
- $F_{Mor}(f \circ g) = \mathbf{F_{Mor}(g)} \circ \mathbf{F_{Mor}(f)}$

Функторы

- Пусть ***C*** и ***D*** — две категории. Определим функтор F: ***C*** → ***D*** как пару отображений
  - F_{Ob}: Ob(***C***) → Ob(***D***)
  - F_{Mor}: Mor(***C***) → Mor(***D***)
- Образом f: A → B является $F_{Mor}(f)$: $F_{Ob}(A) \to F_{Ob}(B)$
- $F_{Mor}(id_A) = id_{F_{Ob}(A)}$
- $F_{Mor}(f \circ g) = F_{Mor}(f) \circ F_{Mor}(g)$
- Для краткости будем писать F(f) и F(A) вместо $F_{Mor}(f)$ и $F_{Ob}(A)$

Примеры функторов

- Объект категории ***C*** как функтор ***1***$\to$***C***

Примеры функторов

- Объект категории ***C*** как функтор ***1→C***
- Граф как функтор в категорию ***Set***

Примеры функторов

- Объект категории ***C*** как функтор ***1→C***
- Граф как функтор в категорию ***Set***
- Забывающие функторы

Примеры функторов

- Объект категории ***C*** как функтор ***1→C***
- Граф как функтор в категорию ***Set***
- Забывающие функторы
- Свободные конструкции

Примеры функторов

- Объект категории ***C*** как функтор ***1→C***
- Граф как функтор в категорию ***Set***
- Забывающие функторы
- Свободные конструкции
- Гомоморфизмы групп

Примеры функторов

- Объект категории ***C*** как функтор ***1→C***
- Граф как функтор в категорию ***Set***
- Забывающие функторы
- Свободные конструкции
- Гомоморфизмы групп
- Предпучки над топологическими пространствами

Примеры функторов

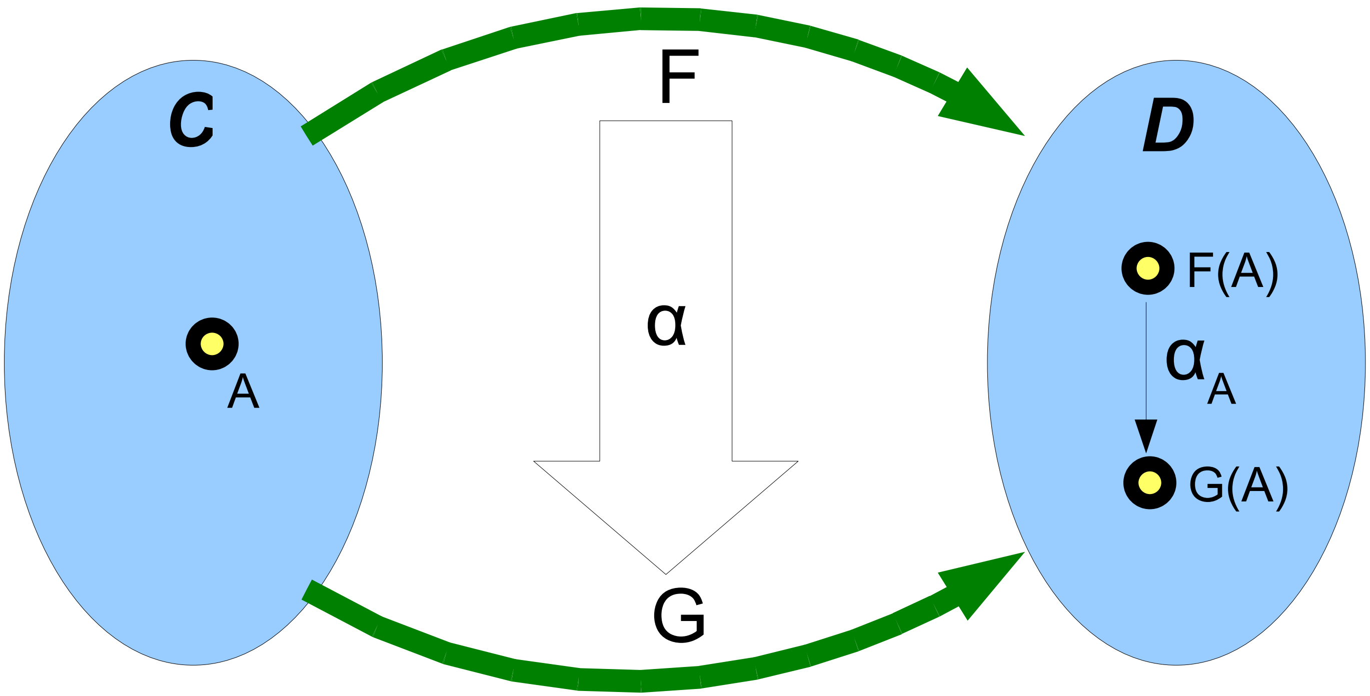
- Объект категории ***C*** как функтор ***1→C***
- Граф как функтор в категорию ***Set***
- Забывающие функторы
- Свободные конструкции
- Гомоморфизмы групп
- Предпучки над топологическими пространствами
- Функтор вложения подкатегории

Примеры функторов

- Объект категории ***C*** как функтор ***1→C***
- Граф как функтор в категорию ***Set***
- Забывающие функторы
- Свободные конструкции
- Гомоморфизмы групп
- Предпучки над топологическими пространствами
- Функтор вложения подкатегории
- Группы когомологий и соотв. функторы ***Top*** → ***Ab***

Естественные преобразования

- Пусть F: ***C*** → ***D*** и G: ***C*** → ***D*** — два функтора. Определим естественное преобразование α:F → G как отображение, сопоставляющее каждому объекту A из ***C*** морфизм из $\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{C}}(F(A), G(A))$



Естественные преобразования

- Пусть F: ***C*** → ***D*** и G: ***C*** → ***D*** — два функтора. Определим естественное преобразование α:F → G как отображение, сопоставляющее каждому объекту A из ***C*** морфизм из $Hom_{\boldsymbol{C}}(F(A), G(A))$
- При этом для любого морфизма f: A → B категории ***C*** должна коммутировать диаграмма

$$\begin{tikzcd}
F(B) \arrow[r, "\alpha_B"'] & G(B) \\
F(A) \arrow[u, "F(f)"] \arrow[r, "\alpha_A"] & G(A) \arrow[u, "G(f)"']
\end{tikzcd}$$

Примеры естественных преобразований

- Морфизм категории ***C*** как естественное преобразование между двумя функторами A, B: $\mathbf{1}\to\mathbf{C}$

Примеры естественных преобразований

- Морфизм категории ***C*** как естественное преобразование между двумя функторами A, B: ***1***→***C***
- Гомоморфизм графов как е.п. функторов

Примеры естественных преобразований

- Морфизм категории ***C*** как естественное преобразование между двумя функторами A, B: ***1***→***C***
- Гомоморфизм графов как е.п. функторов
- Е.п. и полиморфные функции в функциональных языках

Примеры естественных преобразований

- Морфизм категории ***C*** как естественное преобразование между двумя функторами A, B: ***1***→***C***
- Гомоморфизм графов как е.п. функторов
- Е.п. и полиморфные функции в функциональных языках
- Определитель матрицы

Категории функторов

- Пусть α: F → G и β: G → H — два естественных преобразования функторов, действующих из категории ***C*** в категорию ***D***. Определим их композицию $\beta \circ \alpha$ как естественное преобразование с компонентой $\beta_A \circ \alpha_A$ для каждого A из ***C***

Категории функторов

- Пусть α: F → G и β: G → H — два естественных преобразования функторов, действующих из категории ***C*** в категорию ***D***. Определим их композицию $\beta \circ \alpha$ как естественное преобразование с компонентой $\beta_A \circ \alpha_A$ для каждого A из ***C***

$$
\begin{tikzcd}
F(B) \arrow[r, "\alpha_B"'] & G(B) \arrow[r, "\beta_B"'] & H(B) \\
F(A) \arrow[u, "F(f)"] \arrow[r, "\alpha_A"] & G(A) \arrow[u, "G(f)"'] \arrow[r, "\beta_A"] & H(A) \arrow[u, "H(f)"']
\end{tikzcd}
$$

Категории функторов

- Пусть α: F → G и β: G → H — два естественных преобразования функторов, действующих из категории ***C*** в категорию ***D***. Определим их композицию $\beta \circ \alpha$ как естественное преобразование с компонентой $\beta_A \circ \alpha_A$ для каждого A из ***C***
- Для каждого функтора F: ***C*** → ***D*** определено естественное преобразование Id_F: F → F с компонентой $id_{F(A)}$ для каждого A категории ***C***

Категории функторов

- Пусть α: F → G и β: G → H — два естественных преобразования функторов, действующих из категории ***C*** в категорию ***D***. Определим их композицию $\beta \circ \alpha$ как естественное преобразование с компонентой $\beta_A \circ \alpha_A$ для каждого A из ***C***
- Для каждого функтора F: ***C*** → ***D*** определено естественное преобразование Id_F: F → F с компонентой $id_{F(A)}$ для каждого A категории ***C***
- Таким образом, задана категория функторов из ***C*** в ***D***, обозначаемая $\boldsymbol{D}^{\boldsymbol{C}}$ или Funct(***C, D***)

Примеры категорий функторов

- Произвольная категория ***C*** и категория функторов ***1***$\to$***C***

Примеры категорий функторов

- Произвольная категория ***C*** и категория функторов ***1→C***
- Категория графов

Примеры категорий функторов

- Произвольная категория ***C*** и категория функторов ***1***$\rightarrow$***C***
- Категория графов
- Категория представлений группы

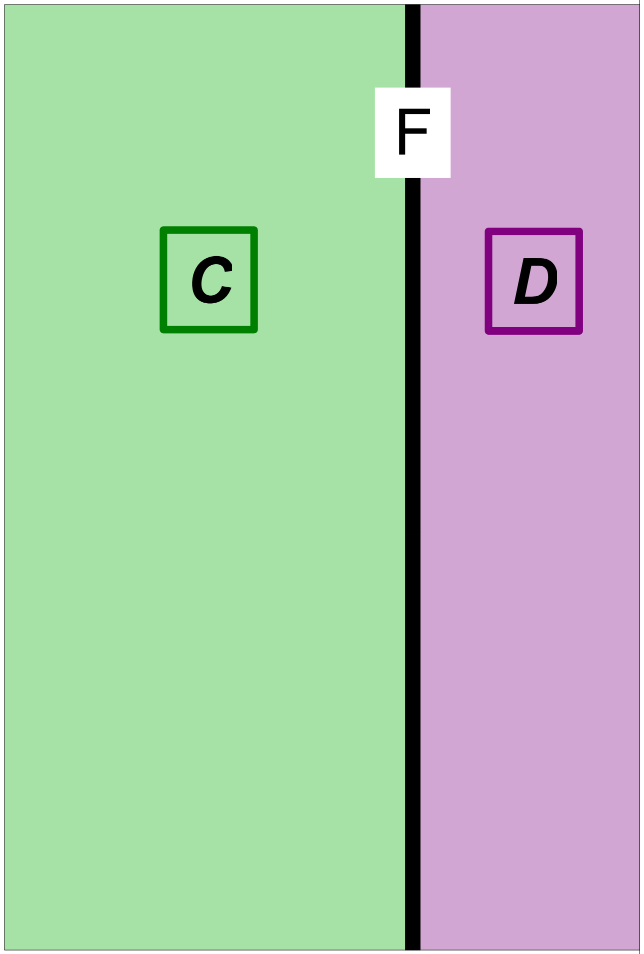
Примеры категорий функторов

- Произвольная категория ***C*** и категория функторов ***1***$\rightarrow$***C***
- Категория графов
- Категория представлений группы
- Категории предпучков

Бикатегорные диаграммы

- Функтор из ***C*** в ***D*** изображается вертикальной линией, разделяющей полуплоскости

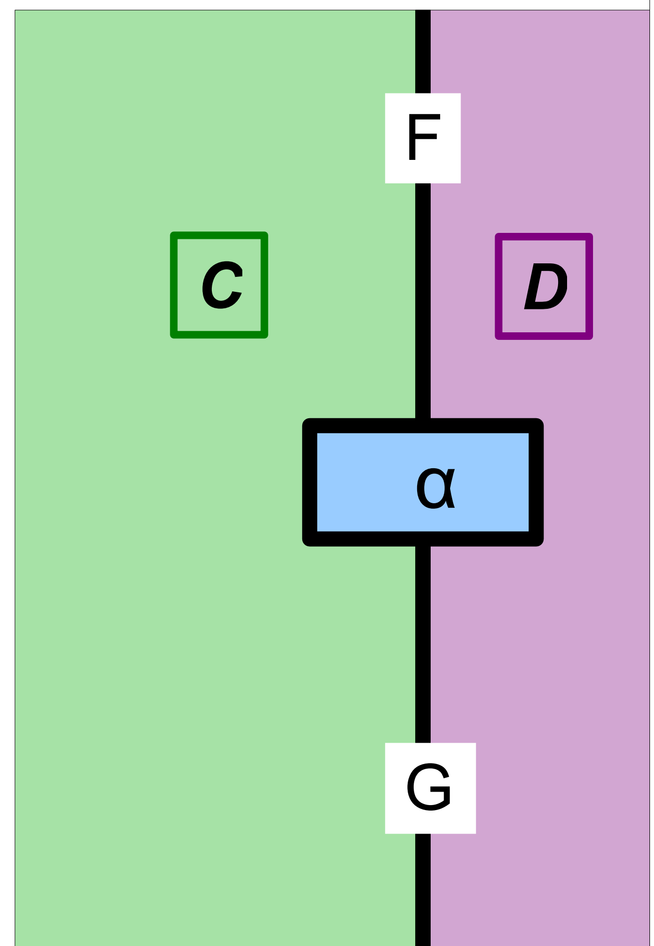
F: ***C***→***D***



Бикатегорные диаграммы

- Функтор из ***C*** в ***D*** изображается вертикальной линией, разделяющей полуплоскости
- Естественное преобразование изображается «блоком» а иногда и точкой на линии

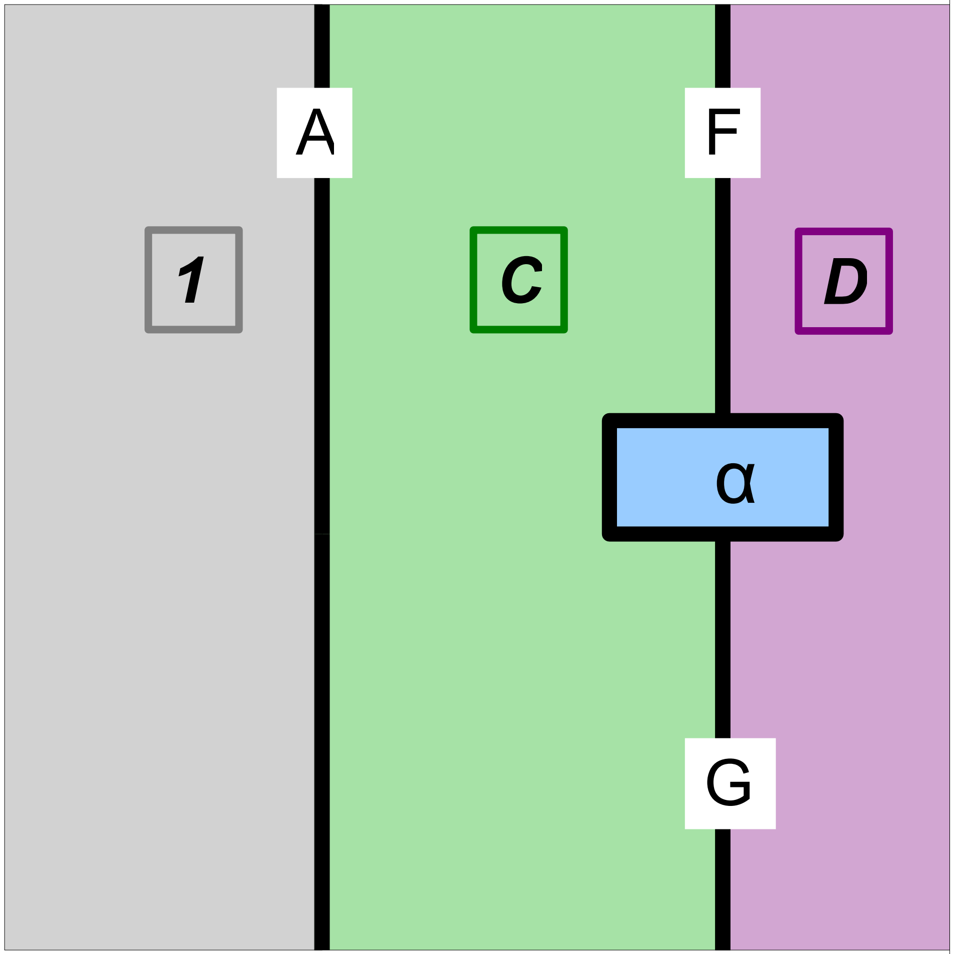
$\alpha\colon F \to G$



Бикатегорные диаграммы

- Функтор из ***C*** в ***D*** изображается вертикальной линией, разделяющей полуплоскости
- Естественное преобразование изображается «блоком» а иногда и точкой на линии
- Объект изображается как функтор из ***1*** в ***C***

$\alpha_A: F(A) \to G(A)$



Бикатегорные диаграммы

- Функтор из ***C*** в ***D*** изображается вертикальной линией, разделяющей полуплоскости
- Естественное преобразование изображается «блоком» а иногда и точкой на линии
- Объект изображается как функтор из ***1*** в ***C***
- Морфизм изображается как е.п. функторов ***1→C***

$\alpha_B \circ F(f)$

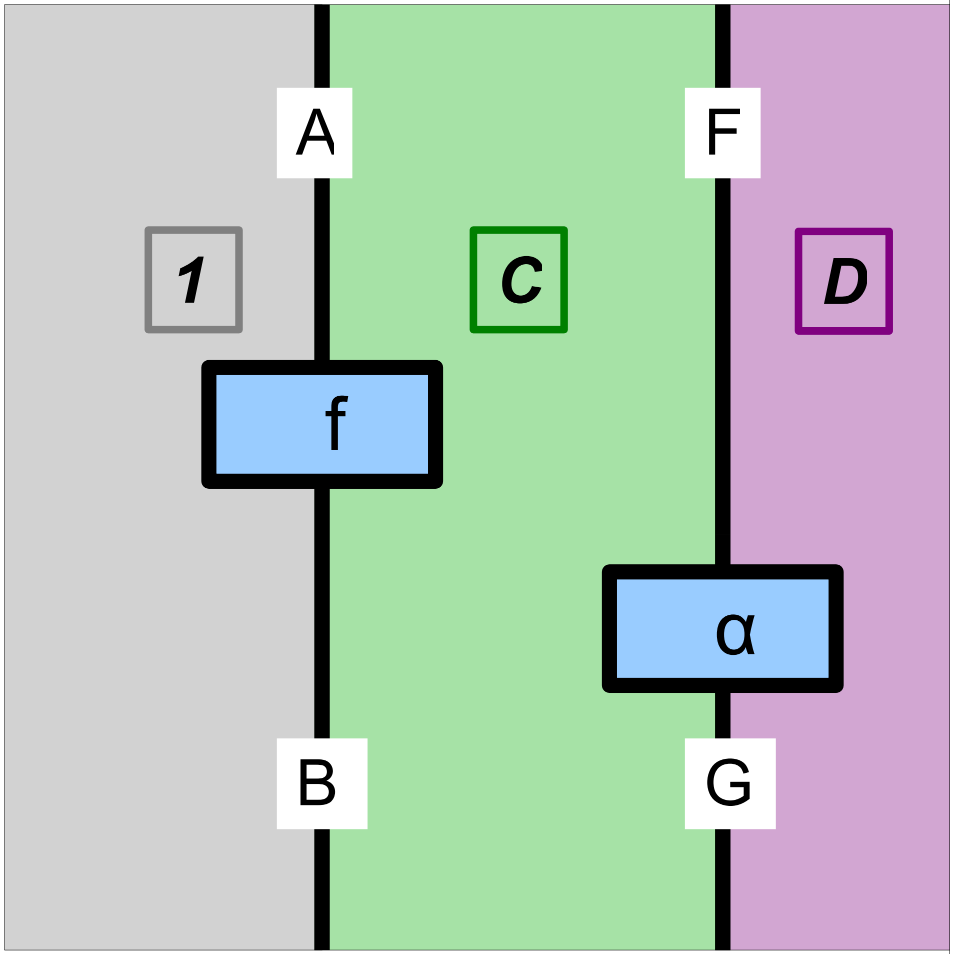


Диаграмма из определения естественного преобразования

$G(f)\circ\alpha_A$ $\qquad\qquad$ $\alpha_B\circ F(f)$