Листок 4

Теорема 1. *Класс регулярных языков замкнут относительно операций: объединения, конкатенации, итерации, дополнения, пересечения, разности.*

Доказательство. Для регулярных языков L_1, L_2 рассмотрим описывающие их регулярные выражения $\mathrm{RE}(L_1)$, $\mathrm{RE}(L_2)$. Язык объединения (соответственно, конкатенации, итерации) описывается выражением $\mathrm{RE}(L_1)+\mathrm{RE}(L_2)$ (соответственно, $\mathrm{RE}(L_1)\,\mathrm{RE}(L_2)$, $\mathrm{RE}(L_1)^*$), а значит, регулярен.
Для регулярного языка L построим распознающий его детерминированный[1] конечный автомат $\mathcal{A}(L) = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$. Легко проверить, что автомат $\widetilde{\mathcal{A}}(L) = (Q, \Sigma, \delta, q_0, Q \setminus F)$ допускает дополнение $\overline{L} = \Sigma^* \setminus L$ языка L $\otimes$, которое является, таким образом, регулярным языком.
Поскольку справедливо $L_1 \cap L_2 = \overline{\overline{L_1} \cup \overline{L_2}}$, язык $L_1 \cap L_2$ регулярен по доказанному выше[2]. Аналогичное можно заключить из равенства $L_1 \setminus L_2 = L_1 \cap \overline{L_2}$. ∎

Доказать (не)регулярность:

(1) $\{0^n 1^m \mid n \neq m\}$;

(2) $\{w \in \{0,1\}^* \mid w$ содержит одинаковое число 0 и 1$\}$;

(3) языка из слов $w \in \{0, \ldots, 9\}^*$, которые являются десятичной записью чисел, делящихся на 2 или на 3, без лишних лидирующих нулей;

(4) $\{0^n 1^m 2^{n-m} \mid n \geqslant m\}$;

(5) $\{a^n b a^m b a^{n+m} \mid n, m \in \mathbb{N}\}$.

Контрпример к достаточности леммы о накачке
Для языка
$$L = \{a^i b^j c^k \mid i, j, k \in \mathbb{N}_0 \wedge (i = 1 \Rightarrow j = k)\}$$
покажите, что

(1) L нерегулярен,

(2) L удовлетворяет условию леммы о накачке.

[1] Сделанное дальше утверждение, однако, неверно для недетерминированного конечного автомата — постройте соответствующий контрпример. $\otimes$

[2] Имеется более полезная конструкция, которая строит ДКА, допускающий $L_1 \cap L_2$, внутри которого «параллельно» работают $\mathcal{A}(L_1)$ и $\mathcal{A}(L_2)$ — попытайтесь придумать её или разберите Теорему 4.8 раздела 4.2.1 книги Хопкрофта и др. *Введение в теорию автоматов…* $\otimes$