ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ РФ

Федеральное государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования “Южный федеральный университет”

факультет математики, механики и компьютерных наук

Рассмотрено и рекомендовано
на заседании кафедры
математического анализа ЮФУ
протокол №1 от 01.09.2009г.,
зав. кафедрой А.В. Абанин

Утверждаю
Декан ф-та математики, механики
и компьютерных наук ЮФУ
М.И. Карякин
“ ” 2009г.

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЙ КОМПЛЕКС

учебной дисциплины

“ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ И РАЗНОСТНЫЕ УРАВНЕНИЯ”

федерального компонента ОПД для бакалаврской
образовательной программы по направлению
511900 – “Информационные технологии”

Составитель:
доцент кафедры математического анализа ЮФУ, к.ф.-м.н. Богачёв В.А.

Ростов-на-Дону

2010

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

АННОТАЦИЯ

Дифференциальные и разностные уравнения составляют часть классической математики и так или иначе связаны со всеми математическими дисциплинами. Посредством указанных функциональных уравнений осуществляется моделирование разнообразных процессов, изучаемых в естественных, технических, экономических и других науках. Перефразируя Г. Галилея, можно сказать, что это – язык, на котором человек разговаривает с природой.

ЗАДАЧИ КУРСА

Сообщить студентам достаточный запас знаний по теории обыкновенных дифференциальных уравнений, уравнений в частных производных и разностных уравнений. Выработать у них навыки решения основных типов указанных функциональных уравнений. Привить соответствующие методики математического моделирования при решении прикладных задач. Научить, оперируя абстрактными понятиями, решать конкретные задачи, в том числе в плане их специализации.

УЧЕБНЫЕ ЦЕЛИ

Создать запас знаний, занимающий существенное место в математическом образовании студентов. Продолжить развивать у них логическое и алгоритмическое мышление, навыки соответствующего математического моделирования. Показать единство математической науки и её органическую связь с другими науками.

УЧЕБНЫЕ ДИСЦИПЛИНЫ, НЕОБХОДИМЫЕ ДЛЯ ИЗУЧЕНИЯ ДАННОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

Математический анализ-I, Математический анализ-II, Кратные интегралы и ряды, а также ряд разделов высшей алгебры (матрицы, определители, системы линейных уравнений, векторная алгебра, квадратичные формы) и аналитической геометрии (прямая линия и кривые 2-го порядка на плоскости, прямая линия, плоскость и поверхности 2-го порядка в пространстве).

Учебно-тематический план курса

Выписка из ГОС:

Обыкновенные дифференциальные уравнения (задача Коши, методы решений). Уравнения в частных производных первого порядка. Дифференциальные уравнения высших порядков и системы уравнений. Уравнения математической физики: классификация, волновое уравнение, телеграфное уравнение, уравнение Лапласа, уравнение теплопроводности.

Число часов
Всего: 116
Аудиторно: лекции: 32
практические занятия: 32
Самостоятельная работа: 52

Содержание курса
“Дифференциальные и разностные уравнения”

№ модуля	тема модуля	кол-во лекц. часов	кол-во часов практ. занятий	кол-во часов самост. работы
1	Обыкновенные дифференциальные уравнения	18	22	30
2	Уравнения в частных производных	8	8	12
3	Разностные уравнения	6	2	10
	Итого	32	32	52

Содержание модулей

Модуль 1. Обыкновенные дифференциальные уравнения

Задачи из геометрии, механики, физики, техники и экономики, приводящие к дифференциальным и разностным уравнениям. Обыкновенные дифференциальные уравнения 1-го порядка, основные исходные понятия. Замечание о функциональных уравнениях, не являющихся дифференциальными. Д. у. 1-го порядка, разрешённые относительно производной. Область определения и решение д. у., перевёрнутое д. у. Задача Коши, начальное условие, геометрическая интерпретация. Д. у. с разделяющимися переменными и уравнения, приводящиеся к нему. Задача о распаде радия. Теорема Коши-Пикара существования и единственности решения д. у. 1-го порядка.

Геометрическая интерпретация к д. у. 1-го порядка. Интегральные кривые, поле направлений и изоклины поля направлений д. у. Огибающие семейств кривых, их связь с особыми решениями д. у. Особые точки д. у. Интегральные кривые д. у., примыкающие к его особой точке.

Общее и частное решения д. у. 1-го порядка. Особое решение д. у. Общий интеграл и интеграл д. у. 1-го порядка. Общие замечания о выражении решений о. д. у. Уравнения, интегрируемые в элементарных функциях и в квадратурах. Д. у. Риккати. Интегрирование д. у. с помощью степенных рядов. Использование ряда Тейлора. Приближённое решение д. у. численными и аналитическими методами. Метод изоклин и метод ломаных Эйлера. Метод последовательных приближений Пикара. Реализация приближённых методов решения д. у. в математически ориентированных программных средах.

Однородная (положительно однородная) функция двух переменных. Однородное д. у. 1-го порядка и уравнения, приводящиеся к нему. Линейное д. у. 1-го порядка и его свойства. Д. у. Бернулли. Решение их методами Лагранжа и Бернулли. Задача о силе тока в электрической цепи с явлением самоиндукции. Экстратоки размыкания и замыкания. Дифференциальные уравнения в полных дифференциалах. Признак д. у. в полных дифференциалах, связь с потенциальностью векторного (силового) поля. Нахождение первообразной (потенциальной) функции посредством криволинейных интегралов 2-го типа и непосредственно. Метод интегрирующего множителя, связь с линейными д. у. в частных производных.

Дифференциальные уравнения 2-гопорядка, основные понятия. Уравнения 2-го порядка, допускающие понижение порядка (неполные д. у. 2-го порядка). Составление дифференциальных уравнений семейств кривых. Линейное однородное дифференциальное уравнение 2-го порядка с постоянными коэффициентами. Характеристическое уравнение и структура общего решения однородного уравнения. Линейное неоднородное дифференциальное уравнение 2-го порядка с постоянными коэффициентами. Структура общего решения. Нахождение частного решения д. у. с правой частью специального вида методом неопределённых коэффициентов. Принцип наложения решений. Метод вариации произвольных постоянных (метод Лагранжа) решения линейного неоднородного д. у. 2-го порядка с переменными коэффициентами.

Обыкновенные дифференциальные уравнения n-го порядка. Задача Коши, начальные условия. Существование и единственность решения задачи Коши для уравнения, разрешённого относительно производной n-го порядка. Общее и частное решения, общий интеграл. Линейное однородное и неоднородное д. у. n-го порядка с переменными коэффициентами. Линейный дифференциальный оператор n-го порядка с переменными коэффициентами и его свойства. Линейная независимость функций. Фундаментальная система решений линейного однородного д. у. n-го порядка с переменными коэффициентами. Определитель Вронского системы решений линейного однородного д. у. n-го порядка и его свойства. Структура общего решения линейного однородного д. у. n-го порядка.

Нормальные системы обыкновенных д. у. 1-го порядка. Решение системы. Задача Коши, начальные условия. Общее решение системы д. у. Сведение д. у. n-го порядка к нормальной системе д. у. Линейные однородные и неоднородные системы д. у. Нахождение общего решения линейной неоднородной системы д. у. с постоянными коэффициентами методом исключения. Нахождение общего решения линейной однородной системы д. у. с постоянными коэффициентами методом Эйлера. Характеристическое уравнение и характеристические числа однородной системы д. у.

Модуль 2. Уравнения в частных производных

Дифференциальные уравнения с частными производными. Порядок, решение и интегральная поверхность уравнения. Уравнения с частными производными 1-го и 2-го порядков. Структура семейства решений. Линейное уравнение с частными производными 1-го порядка. Однородное и неоднородное линейные уравнения. Задача Коши и начальные условия. Геометрический смысл решения задачи Коши. Нахождение общего решения однородного линейного уравнения.

Основные типы уравнений математической физики. Линейные неоднородные и однородные уравнения с частными производными 2-го порядка в случае неизвестной функции, зависящей от двух независимых переменных. Линейные однородные уравнения с постоянными коэффициентами, их классификация. Дискриминант уравнения. Уравнения гиперболического, параболического и эллиптического типов. Волновое уравнение, уравнение теплопроводности (Фурье) и уравнение Лапласа как соответствующие примеры. Задача о малых поперечных колебаниях струны. Граничные и начальные условия. Интегрирование волнового уравнения методом Фурье. Задача о распространении тепла в ограниченном стержне. Начальное и граничные условия. Интегрирование уравнения теплопроводности методом Фурье. Решение волнового уравнения методом Даламбера (методом характеристик).

Телеграфное уравнение математической физики, сведение его к уравнению 2-го порядка гиперболического типа. Задача о напряжении тока в электрическом проводе.

Модуль 3. Разностные уравнения

Функциональные уравнения, в которые неизвестная функция входит при различных значениях независимой переменной. Обыкновенные разностные уравнения. Отклонения аргумента (разности). Решение разностного уравнения. Специфика области определения решения. Уравнения с целыми разностями, их разностный порядок. Начальная задача и начальные условия. Конечные разности n-го порядка функции в точке. Уравнения в конечных разностях, их связь с разностными уравнениями. Разностный порядок уравнения в конечных разностях и порядок соответствующего разностного уравнения. Применение разностных уравнений к исследованию процессов с дискретным (скачкообразным) изменением независимой переменной. Связь разностных уравнений с другими функциональными уравнениями. Линейные однородные и неоднородные разностные уравнения, дифференциально-разностные уравнения и дифференциальные уравнения бесконечного порядка с линейными и постоянными коэффициентами. Гамма-функция Эйлера как решение уравнения с целыми разностями 1-го порядка, порождённого формулой понижения для этой функции. Связь гамма-функции с интегралом Эйлера-Пуассона. Рекуррентные соотношения как частный случай разностных уравнений.

Технология обучения студентов при модульном построении курса

Лекционный материал и материал практических занятий разбит на 3 модуля. Для каждого модуля разработаны формы промежуточного контроля, приведённые в следующей таблице.

№ модуля	Название модуля	Форма контроля по практике
1	Обыкновенные дифференциальные уравнения	Контрольная работа
2	Уравнения в частных производных	Контрольная работа
3	Разностные уравнения	Тестирование

Календарный план

практических занятий

1. Д. у. с разделяющимися переменными и приводящиеся к нему. Задачи, приводящие к д. у. 1-го порядка. Составление д. у. по условиям геометрических, механических, физических задач.
2. Однородное д. у. 1-го порядка и приводящиеся к нему.
3. Линейное д. у. 1-го порядка и д. у. Бернулли.
4. Д. у. в полных дифференциалах. Метод интегрирующего множителя.
5. Д. у. 2-го порядка, допускающие понижение порядка (неполные д. у. 2-го порядка).
6. Линейное однородное д . у. 2-го порядка с постоянными коэффициентами. Решение неоднородного д . у. 2-го порядка с постоянными коэффициентами с правой частью специального вида методом неопределённых коэффициентов.
7. Решение д . у. 2-го порядка с постоянными коэффициентами методом вариации произвольных постоянных.
8. Интегрирование д.у. с помощью степенных рядов. Приближённое решение д. у. 1-го порядка методом изоклин и методом ломаных Эйлера.
9. Контрольная работа.
10. Решение нормальных систем двух д. у. 1-го порядка методом исключения.
11. Решение однородных линейных систем д. у. с постоянными коэффициентами методом Эйлера.
12. Решение уравнений в частных производных 1-го порядка.
13. Решение линейного однородного д. у. в частных производных 2-го порядка методом Фурье.
14. Решение волнового уравнения методом Даламбера (методом характеристик).
15. Контрольная работа.
16. Решение уравнений в конечных разностях 1-го и 2-го порядков.

Список рекомендуемой литературы

Основная литература

1 **Еругин, Н. П.** Курс обыкновенных дифференциальных уравнений / Н.П. Еругин, И. З. Штокало и др. – Киев.: Вища школа, 1974.

2 **Матвеев, Н. М.** Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. – М. : Наука, 1962.

3 **Матвеев, Н. М.** Сборник задач и упражнений по обыкновенным диф-

ференциальным уравнениям. – М. : Росвузиздат, 1962.

4 **Матвеев, Н. М.** Дифференциальные уравнения: Учеб. пособие для студентов пед. ин-тов по физ.-мат спец. – М. : Просвещение, 1988.

5 **Гюнтер, Н.М.** Сборник задач по высшей математике, Том 2 / Н.М. Гюнтер, Р.О. Кузьмин – М.: ГИФМЛ, 1958.

6 Задачи и упражнения по математическому анализу. Для втузов / Под ред. Демидовича Б.П. – М.: Наука, 1978.

7 **Гельфонд, А.О.** Исчисление конечных разностей. – М.: Наука, 1967.

8 **Миролюбов, А.А.** Линейные однородные разностные уравнения / А.А. Миролюбов, М.А. Солдатов. – М.: Наука, 1981.

Дополнительная литература

9 **Фихтельгольц, Г.М.** Курс дифференциального и интегрального исчисления, Том 2/ – М.: Наука, 1970.

10 **Петровский, И.Г.** Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. – М. : Наука, 1970.

11 **Владимиров, В.С.** Сборник задач по уравнениям математической физики / В.С. Владимиров, В.П. Михайлов и др. – М.: Наука, 1982.

12 **Тихонов, А.Н.** Рассказы о прикладной математике / А.Н. Тихонов, Д.П.Костомаров. – М. : Наука, 1979.

Методическая литература

13 **Богачев, В.А.** Изучение основ математического анализа с помощью специализированных программ. Предел последовательности : учеб.-метод. пособие / В.А. Богачев, Ю.А. Кирютенко, Т.В. Богачев. – Ростов н/Д : РГУ, 2006.

Контрольные вопросы

К модулю 1

1. Найти кривые, у которых точка пересечения любой касательной с осью абсцисс имеет абсциссу, вдвое меньшую абсциссы точки касания. Выделить и изобразить кривую, проходящую через точку $M(-1,-1)$.

2. Найти кривые, у которых отрезок касательной, заключенный между осями координат, делится пополам в точке касания. Выделить и изобразить кривую, проходящую через точку $M(-2, 1)$.

3. Найти кривые, у которых отрезок нормали в любой точке кривой, заключенный между осями координат, делится пополам в этой точке. Выделить и изобразить кривую, проходящую через точку $M(-5, 4)$.

4. Согласно закону Ньютона скорость охлаждения тела, находящего в некоторой среде, пропорциональна разности температуры тела и этой среды. Найти зависимость, выражающую охлаждение тела с течением времени, если известно, что температура среды постоянна и равна 20° C, а тело за 20 мин охладилось с 100^0 C до 60^0 C. Через сколько времени температура тела понизится до 30° C ?

Решить дифференциальные уравнения:

1. $\left(x^2+y^2\right)dx-2xy\,dy=0$;
2. $(x-y)\,y\,dx-x^2dy=0$;
3. $y\,dx+\left(2\sqrt{xy}-x\right)dy=0$;
4. $(2x+1)y'=4x+2y$;
5. $xy'-4y-x^2\sqrt{y}=0$;
6. $y'-y\,\mathrm{tg}x=\dfrac{1}{\cos x}$;
7. $\dfrac{dy}{dx}+2y=y^2e^x$;
8. $(x\,\mathrm{tg}y+\cos y)y'=1$;
9. $\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{y}{x}+xy^2=0$;
10. $xy'=y-xe^{\frac{y}{x}}$;
11. $xy'-y=x\,\mathrm{tg}\dfrac{y}{x}$;
12. $xy'=y\cos\ln\dfrac{y}{x}$.
13. $y''-2y=2xe^x(\cos x-\sin x)$;
14. $y''=xe^x+y$;
15. $yy''+y'^2=1$;
16. $y''-y=\dfrac{e^x}{e^x+1}$.
17. $y''+y'+y=3-13\sin 2x$;
18. $y''+4y=2\sin 2x-3\cos 2x+1$;
19. $y''+y=\sin x+\cos 2x$;
20. $y''+4y=\dfrac{1}{\cos 2x}$;
21. $y''-2y'=3x+2xe^x$;
22. $y''+y=2\sin x-5$;

Найти общие решения систем дифференциальных уравнений:

23. $\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = 2y_1 - 3y_2, \\ \dfrac{dy_2}{dx} = 3y_1 + 2y_2. \end{cases}$ 24. $\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = y_1 + y_2, \\ \dfrac{dy_2}{dx} = -2y_1 + 4y_2. \end{cases}$ 25. $\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = -2y_1 - 4y_2 + 1 + 4x, \\ \dfrac{dy_2}{dx} = -y_1 + y_2 + \dfrac{3}{2}x^2. \end{cases}$

<u>К модулю 2</u>

26. Проинтегрировать уравнение $y\dfrac{\partial z}{\partial x} = x\dfrac{\partial z}{\partial y}$ и найти его решение, удовлетворяющее начальным условиям: $z = y^2$ при $x = 0$.

27. Проинтегрировать уравнение $y\dfrac{\partial z}{\partial x} + x\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$ и найти его решение, удовлетворяющее начальным условиям: $z = 2y$ при $x = 0$.

28. Проинтегрировать уравнение $\left(1 + x^2\right)\dfrac{\partial z}{\partial x} + xy\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$ и найти его решение, удовлетворяющее начальным условиям: $z = y^2$ при $x = 0$.

<u>К модулю 3</u>

29. Найти решение уравнения в конечных разностях (с шагом, равным 1)

$$\Delta y(x) + (1 - x)\, y(x) = 0,$$

удовлетворяющее начальному условию: $y(1) = 2$.

30. Найти решение уравнения в конечных разностях (с шагом, равным 1)

$$(1 - x)\, y(x) + (2 - x)\,\Delta y(x) + \Delta^2 y(x) = 0,$$

удовлетворяющее начальному условию: $y(2) = -3$.

Примеры контрольных работ

№ 1

1. Найти кривые, у которых точка пересечения любой касательной с осью абсцисс имеет абсциссу, вдвое меньшую абсциссы точки касания. Выделить и изобразить кривую, проходящую через точку $M(-1,-1)$.

Решить дифференциальные уравнения:

2. $\left(x^2+y^2\right)dx-2xy\,dy=0$; 3. $(2x+1)y'=4x+2y$; 4. $xy'-4y-x^2\sqrt{y}=0$.

№ 2

1. Найти кривые, у которых отрезок касательной, заключенный между осями координат, делится пополам в точке касания. Выделить и изобразить кривую, проходящую через точку $M(-2,1)$.

Решить дифференциальные уравнения:

2. $y\,dx+\left(2\sqrt{xy}-x\right)dy=0$; 3. $y'-y\,\mathrm{tg}x=\dfrac{1}{\cos x}$; 4. $\dfrac{dy}{dx}+2y=y^2e^x$.

№ 3

1. Найти кривые, у которых отрезок нормали в любой точке кривой, заключенный между осями координат, делится пополам в этой точке. Выделить и изобразить кривую, проходящую через точку $M(-5,4)$.

Решить дифференциальные уравнения:

2. $(x-y)\,y\,dx-x^2dy=0$; 3. $(x\,\mathrm{tg}y+\cos y)y'=1$; 4. $\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{y}{x}+xy^2=0$.

Экзаменационная программа

Задачи из геометрии, механики, физики, техники и экономики, приводящие к дифференциальным и разностным уравнениям. Обыкновенные дифференциальные уравнения 1-го порядка, основные исходные понятия. Замечание о функциональных уравнениях, не являющихся дифференциальными. Д. у. 1-го порядка, разрешённые относительно производной. Область определения и решение д. у., перевёрнутое д. у. Задача Коши, начальное условие, геометрическая интерпретация. Д. у. с разделяющимися переменными и уравнения, приводящиеся к нему. Задача о распаде радия. Теорема Коши-Пикара существования и единственности решения д. у. 1-го порядка.

Геометрическая интерпретация к д. у. 1-го порядка. Интегральные кривые, поле направлений и изоклины поля направлений д. у. Огибающие семейств кривых, их связь с особыми решениями д. у. Особые точки д. у. Интегральные кривые д. у., примыкающие к его особой точке.

Общее и частное решения д. у. 1-го порядка. Особое решение д. у. Общий интеграл и интеграл д. у. 1-го порядка. Общие замечания о выражении решений о. д. у. Уравнения, интегрируемые в элементарных функциях и в квадратурах. Д. у. Риккати. Интегрирование д. у. с помощью степенных рядов. Использование ряда Тейлора. Приближённое решение д. у. численными и аналитическими методами. Метод изоклин и метод ломаных Эйлера. Метод последовательных приближений Пикара. Реализация приближённых методов решения д. у. в математически ориентированных программных средах.

Однородная (положительно однородная) функция двух переменных. Однородное д. у. 1-го порядка и уравнения, приводящиеся к нему. Линейное д. у. 1-го порядка и его свойства. Д. у. Бернулли. Решение их методами Лагранжа и Бернулли. Задача о силе тока в электрической цепи с явлением самоиндукции. Экстратоки размыкания и замыкания. Дифференциальные уравнения в полных дифференциалах. Признак д. у. в полных дифференциалах, связь с потенциальностью векторного (силового) поля. Нахождение первообразной (потенциальной) функции посредством криволинейных интегралов 2-го типа и непосредственно. Метод интегрирующего множителя, связь с линейными д. у. в частных производных.

Дифференциальные уравнения 2-гопорядка, основные понятия. Уравнения 2-го порядка, допускающие понижение порядка (неполные д. у. 2-го порядка). Составление дифференциальных уравнений семейств кривых. Линейное однородное дифференциальное уравнение 2-го порядка с постоянными коэффициентами. Характеристическое уравнение и структура общего решения однородного уравнения. Линейное неоднородное дифференциальное уравнение 2-го порядка с постоянными коэффициентами. Структура общего решения. Нахождение частного решения д. у. с правой частью специального вида методом неопределённых коэффициентов. Принцип наложения решений. Метод вариации произвольных постоянных (метод Лагранжа) решения линейного неоднородного д. у. 2-го порядка с переменными коэффициентами.

Обыкновенные дифференциальные уравнения n-го порядка. Задача Коши, начальные условия. Существование и единственность решения задачи Коши для уравнения, разрешённого относительно производной n-го порядка. Общее и частное решения, общий интеграл. Линейное однородное и неоднородное д. у. n-го порядка с переменными коэффициентами. Линейный дифференциальный оператор n-го порядка с переменными коэффициентами и его свойства. Линейная независимость функций. Фундаментальная система решений линейного однородного д. у. n-го порядка с переменными коэффициентами. Определитель Вронского системы решений линейного однородного д. у. n-го порядка и его свойства. Структура общего решения линейного однородного д. у. n-го порядка.

Нормальные системы обыкновенных д. у. 1-го порядка. Решение системы. Задача Коши, начальные условия. Общее решение системы д. у. Сведение д. у. n-го порядка к нормальной системе д. у. Линейные однородные и неоднородные системы д. у. Нахождение общего решения линейной неоднородной системы д. у. с постоянными коэффициентами методом исключения. Нахождение общего решения линейной однородной системы д. у. с постоянными коэффициентами методом Эйлера. Характеристическое уравнение и характеристические числа однородной системы д. у.

Дифференциальные уравнения с частными производными. Порядок, решение и интегральная поверхность уравнения. Уравнения с частными производными 1-го и 2-го порядков. Структура семейства решений. Линейное уравнение с частными производными 1-го порядка. Однородное и неоднородное линейные уравнения. Задача Коши и начальные условия. Геометрический смысл решения задачи Коши. Нахождение общего решения однородного линейного уравнения.

Основные типы уравнений математической физики. Линейные неоднородные и однородные уравнения с частными производными 2-го порядка в случае неизвестной функции, зависящей от двух независимых переменных. Линейные однородные уравнения с постоянными коэффициентами, их классификация. Дискриминант уравнения. Уравнения гиперболического, параболического и эллиптического типов. Волновое уравнение, уравнение теплопроводности (Фурье) и уравнение Лапласа как соответствующие примеры. Задача о малых поперечных колебаниях струны. Граничные и начальные условия. Интегрирование волнового уравнения методом Фурье. Задача о распространении тепла в ограниченном стержне. Начальное и граничные условия. Интегрирование уравнения теплопроводности методом Фурье. Решение волнового уравнения методом Даламбера (методом характеристик). Телеграфное уравнение математической физики, сведение его к уравнению 2-го порядка гиперболического типа. Задача о напряжении тока в электрическом проводе.

Функциональные уравнения, в которые неизвестная функция входит при различных значениях независимой переменной. Обыкновенные разностные уравнения. Отклонения аргумента (разности). Решение разностного уравнения. Специфика области определения решения. Уравнения с целыми разностями, их разностный порядок. Начальная задача и начальные условия. Конечные разности n-го порядка функции в точке. Уравнения в конечных разностях, их связь с разностными уравнениями. Разностный порядок уравнения в конечных разностях и порядок соответствующего разностного уравнения. Применение разностных уравнений к исследованию процессов с дискретным (скачкообразным) изменением независимой переменной. Связь разностных уравнений с другими функциональными уравнениями. Линейные однородные и неоднородные разностные уравнения, дифференциально-разностные уравнения и дифференциальные уравнения бесконечного порядка с линейными и постоянными коэффициентами. Гамма-функция Эйлера как решение уравнения с целыми разностями 1-го порядка, порождённого формулой понижения для этой функции. Связь гамма-функции с интегралом Эйлера-Пуассона. Рекуррентные соотношения как частный случай разностных уравнений.

Примеры экзаменационных билетов

Билет № 1

1. Обыкновенные дифференциальные уравнения 1-го порядка, основные исходные понятия. Замечание о функциональных уравнениях, не являющихся дифференциальными. Д. у. 1-го порядка, разрешённые относительно производной. Область определения и решение д. у., перевёрнутое д. у. Задача Коши, начальное условие и геометрическая интерпретация.

2. Линейное неоднородное дифференциальное уравнение 2-го порядка с постоянными коэффициентами. Структура общего решения. Нахождение частного решения д. у. с правой частью специального вида методом неопределённых коэффициентов. Принцип наложения решений.

3. Найти решение уравнения в конечных разностях (с шагом, равным 1)

$$\Delta^2 y(x) - (x-2)\Delta y(x) - (x-1)\,y(x) = 0,$$

удовлетворяющее начальному условию: $y(2) = -1$.

Билет № 2

1. Геометрическая интерпретация к дифференциальным уравнениям 1-го порядка. Интегральные кривые, поле направлений и изоклины поля направлений д. у. Огибающие семейств кривых, их связь с особыми решениями д. у.

2. Метод вариации произвольных постоянных (метод Лагранжа) решения линейного неоднородного дифференциального уравнения 2-го порядка с переменными коэффициентами.

3. Проинтегрировать уравнение $y\dfrac{\partial z}{\partial x} = x\dfrac{\partial z}{\partial y}$ и найти решение, удовлетворяющее начальным условиям: $z = y^2$ при $x = 0$.

Билет № 3

1. Задачи из геометрии, механики, физики, техники и экономики, приводящие к дифференциальным и разностным уравнениям.

2. Обыкновенные дифференциальные уравнения n-го порядка. Задача Коши, начальные условия. Существование и единственность решения задачи Коши для уравнения, разрешённого относительно производной n-го порядка. Общее и частное решения, общий интеграл. Линейное однородное и неоднородное д. у. n-го порядка с переменными коэффициентами. Линейный дифференциальный оператор n-го порядка с переменными коэффициентами и его свойства.

3. Найти решение уравнения в конечных разностях (с шагом, равным 1)

$$(x-1)\,y(x)-\Delta y(x)=0,$$

удовлетворяющее начальному условию: $y(1)=3$.