2

Локализация

Локальное кольцо это кольцо с единственным максимальным идеалом. Со времён выхода статьи Крулла [1938] локальные кольца заняли центральное место в коммутативной алгебре. Метод **локализации** сводит многие задачи коммутативной алгебры к задачам о локальных кольцах. Зачастую это оказывается чрезвычайно полезным: большинство успешно решённых задач коммутативной алгебры это именно те, которые могут быть сведены к локальному случаю.

Несмотря на это, локализация как общая процедура была описана довольно поздно: в случае областей целостности она была описана Греллом, студентом Нётер, в [1927], и определения для произвольного коммутативного кольца отсутствовало до работы Шевалле [1944] и Узкова [1948], спустя много времени после того, как были заложены базовые идеи коммутативной алгебры. Возможно, это результат того, что интерес был направлен на конечно порождённые алгебры, с одной стороны, и кольца степенных рядов, с другой, и ни один из этих классов колец не замкнут относительно локализации. Вместо перехода к локализованному кольцу, как бы мы сделали сейчас, люди обычно использовали идеал вычетов как замену. (Мы объясним, как это делается в Упражнении 2.3.)

Идея локализации, также как само название, появляется из специальной геометрической задачи: для данной точки p алгебраического множества $X \subset \mathbf{A}_k^r$ мы можем интересоваться поведением X «вблизи» p. Иными словами мы хотим исследовать произвольно малые окрестности p в топологии Зарисского. Открытые окрестности p по Зарисскому это множества вида $X - Y$, где Y это алгебраическое подмножество X, не содержащее p. Далее, $X - Y$ в общем случае не изоморфно аффинному алгебраическому множеству — например, плоскость без одной точки (см., к примеру, Хартсхорн [1977], Упражнение 3.5). Однако малые окрестности p в X соответствуют большим алгебраическим подмножествам Y, потому мы можем считать, что Y это множество, определённое одной зануляющейся функцией f, не равной нулю в p. В этом случае мы увидем, что $X - Y$ изоморфно алгебраическому множеству, вложенному в $\mathbf{A}_k^{r+1}$, и по этой причине мы называем такое множество $X - Y$ **открытой аффинной окрестностью** p. Аффинное кольцо $A(X-Y)$ получается из $A(X)$ присоединением мультипликативно обратных для f; мы называем это **обращением** f. Если мы обратим все функции $A(X)$, не равные нулю в p, соответствующий объект, хотя больше не являющийся конечно порождённой k-алгеброй, будет хорошим алгебраическим представителем «ростка X в p»: это и есть **локальное кольцо** X **в** p.

В этой главе мы объясним, как строить новые кольца из имеющихся при помощи инвертирования произвольных множеств элементов. Мотивировкой этих конструкций будет служить удаление алгебраического подмножества Y, определённого одним уравнением $f = 0$, из множества-алгебры X. Точки $X - Y$ это такие точки x, в которых $f(x) \neq 0$, то есть такие, для которых имеется число, назовём его $z(x)$, со свойством: $z(x)f(x) = 1$. Идея состоит в том, что $z(x)$ должна быть регулярной функцией на $X - Y$. Если $X \subset \mathbf{A}_k^r$ соответствует идеал

$$I \subset k[x_1, \dots, x_r],$$

тогда точки $X-Y$ будут соответствовать — при помощи проекции на первые r координат — подмножеству $\mathbf{A}^{r+1}$, определённому идеалом

$$J = I + (zf - 1) \subset k[x_1, \dots, x_r, z].$$

Таким образом, мы можем определить $X - Y$ как аффинное алгебраическое множество $\mathbf{A}^r \times \mathbf{A}^1 = \mathbf{A}^{r+1}$, соответствующее J, с вложением $X - Y \subset X$, заданное как указано выше проекцией на $\mathbf{A}^r$. Следующая картинка описывает простейший случай, когда мы вычитаем $Y = \{0\}$ из $X = \mathbf{A}^r$ и множество $X - Y$ вкладывается как гипербола в плоскость.

В терминах колец мы можем записать:

$$\begin{aligned} A(X - Y) &= k[x_1, \dots, x_r, z]/J \\ &= A(X)[z]/(zf - 1). \end{aligned}$$

Таким образом, мы можем описать $A(X-Y)$ как результат присоединения к $A(X)$ обратных f «наиболее свободным» образом.