

Олимпиада НИУ—ВШЭ для поступающих в
магистратуру 2011. Математика.

1. В некотором царстве есть 39 городов. Между ними проложены односторонние дороги. Хотя бы в один город (столица) можно добраться из всех других городов. Хотя бы из одного города (промзона) идут две дороги. Каково минимально возможное число дорог?
2. G — группа. G точно действует на пятиэлементном множестве и имеет две орбиты: из двух и из трёх элементов. Найти все такие группы G .
3. При каких a ряд сходится? К чему?

$$x_1 = a$$
$$x_{n+1} = \frac{x_n^2}{2x_n + 1}$$

4. $f_i: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ($i = 1, \dots, 4$) — многочлены второй степени (необязательно однородные). $A_i \in \mathbb{R}^2$ ($i = 1, \dots, 4$) — точки на одной прямой. Показать, что определитель матрицы $(f_i(A_j))$ ($i = 1, \dots, 4, j = 1, \dots, 4$) равен нулю.
5. Существует ли такое множество $X \subset \mathbb{R}^3$, что выполнены следующие условия:
 - (а) Для каждой точки a из \mathbb{R}^3 существует последовательность $\{x_n\}$ из X , такая что $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$.
 - (б) Каждая прямая, проходящая через начало координат, пересекает X не более чем в одной точке.