Блог нашего семинара

http://sfedu_ctseminar.livejournal.com

http://sfedu_ctseminar.livejournal.com/**profile**

http://sfedu_ctseminar.livejournal.com/**831.html**

Поправка к предыдущему докладу

- Как определить ассоциативность моноида, не упоминая его элементов?
- Пусть S — моноид (или множество его элементов)
- Определим 3 стрелки в категории **Set**

$$mult : S \times S \to S$$

$$mult(x, y) = xy$$

$$S \times mult : S \times S \times S \to S \times S$$

$$(S \times mult)(x, y, z) = (x, yz)$$

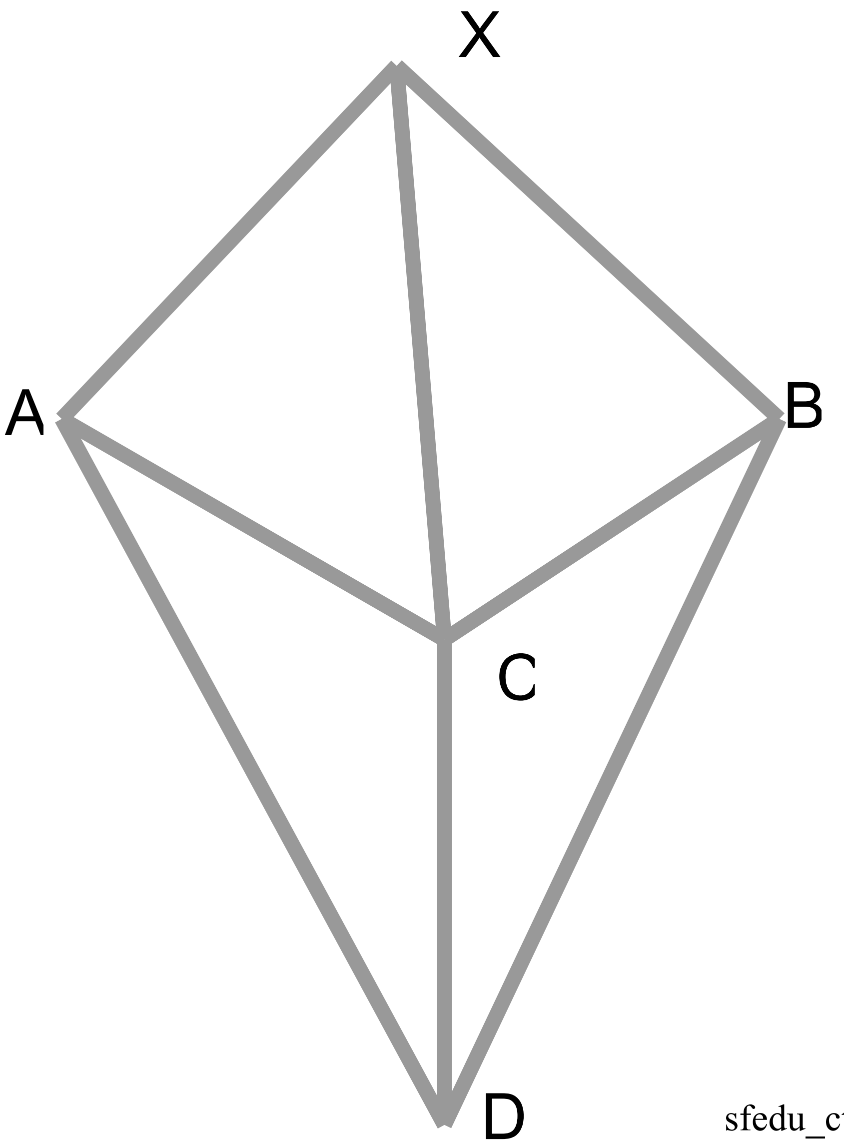
$$\cancel{mult}(x, y, z) = (x, yz)$$

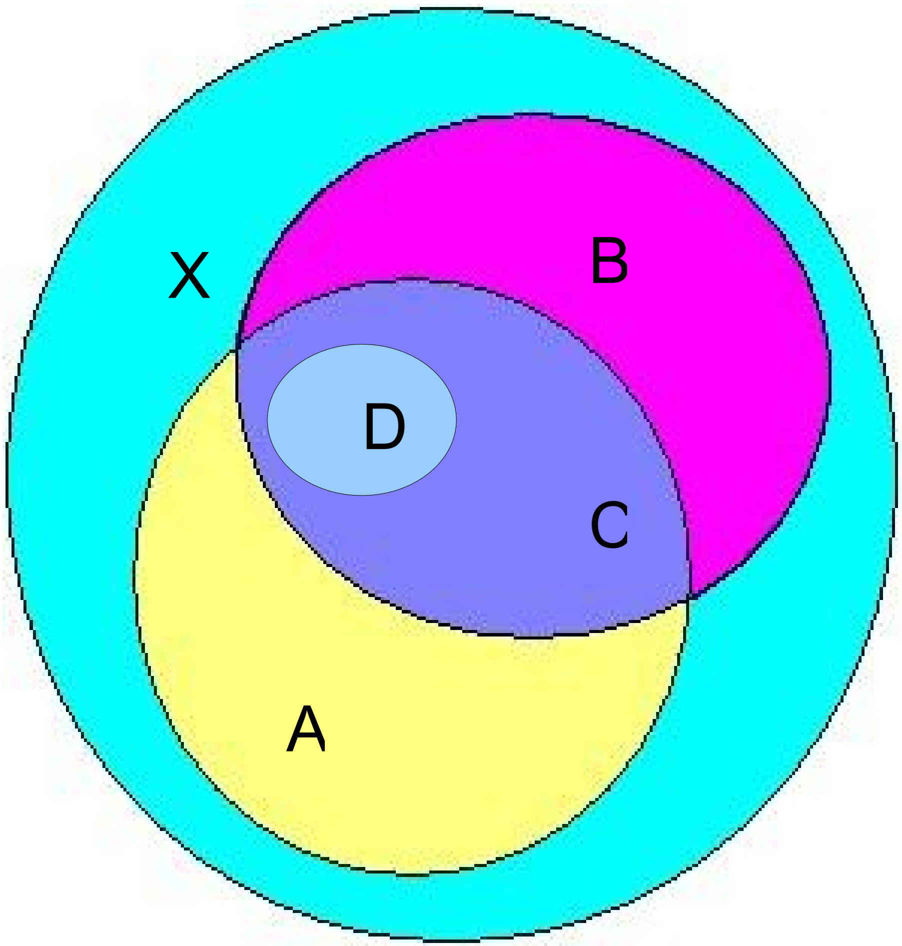
$$mult \times S : S \times S \times S \to S \times S$$

$$(mult \times S)(x, y, z) = (xy, z)$$

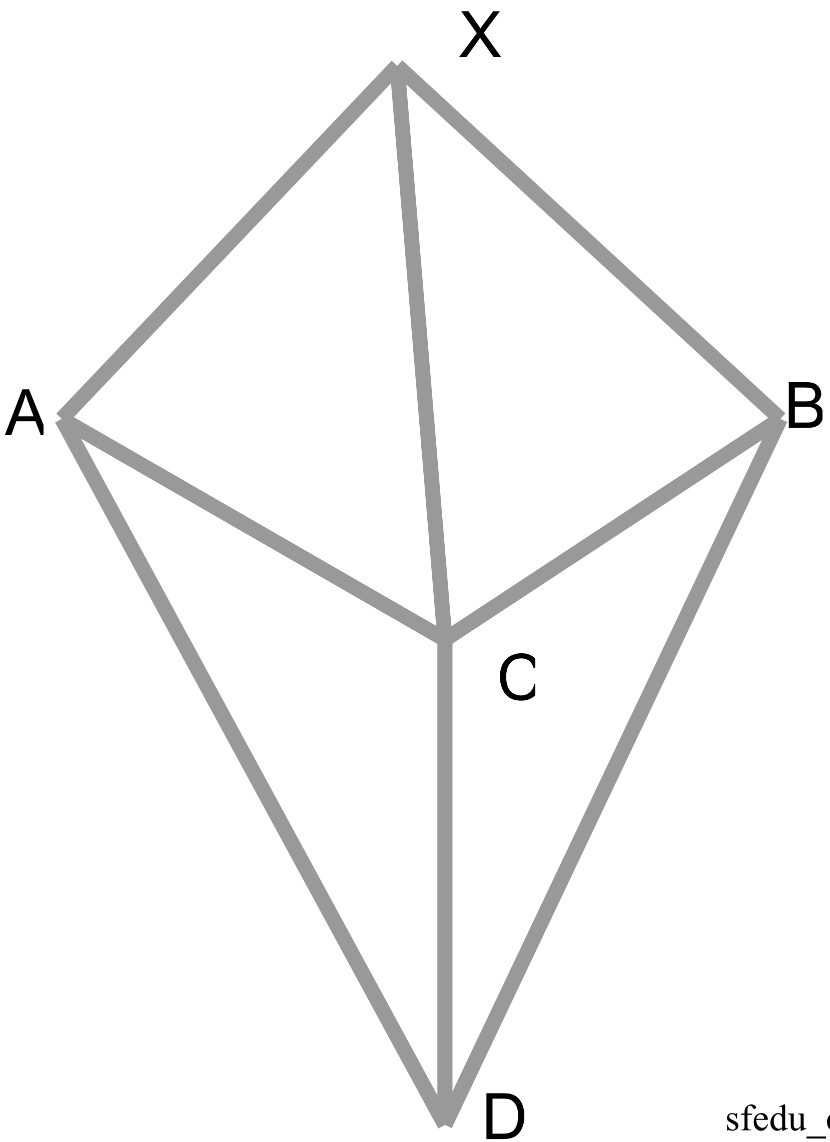
$$\cancel{mult}(x, y, z) = (xy, z)$$

Решетки





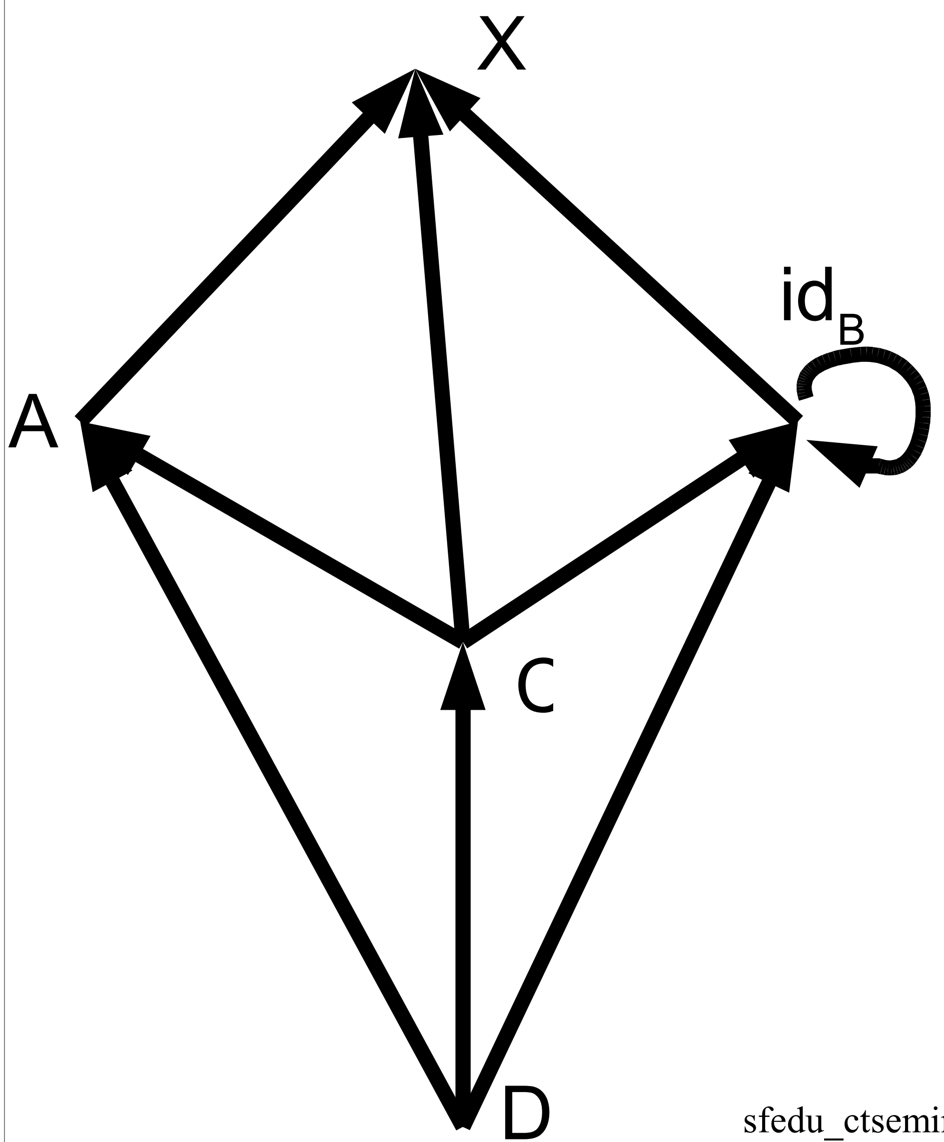
Решетки

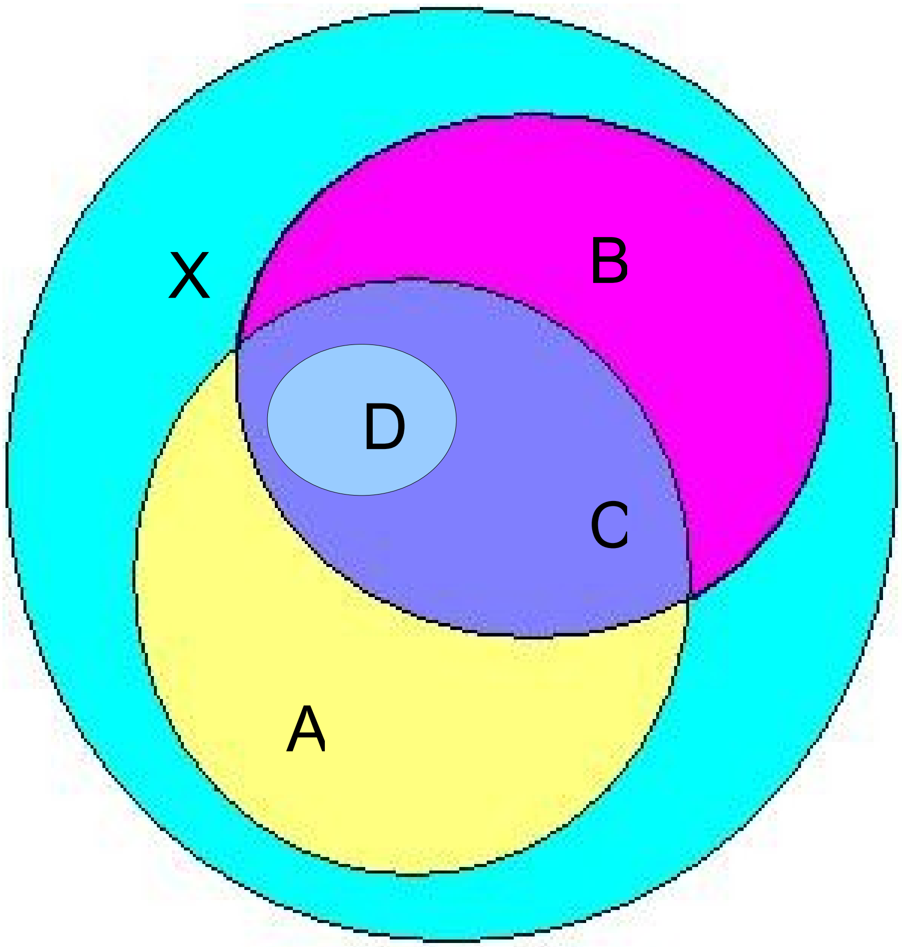


C является точной нижней гранью множества {A, B}:

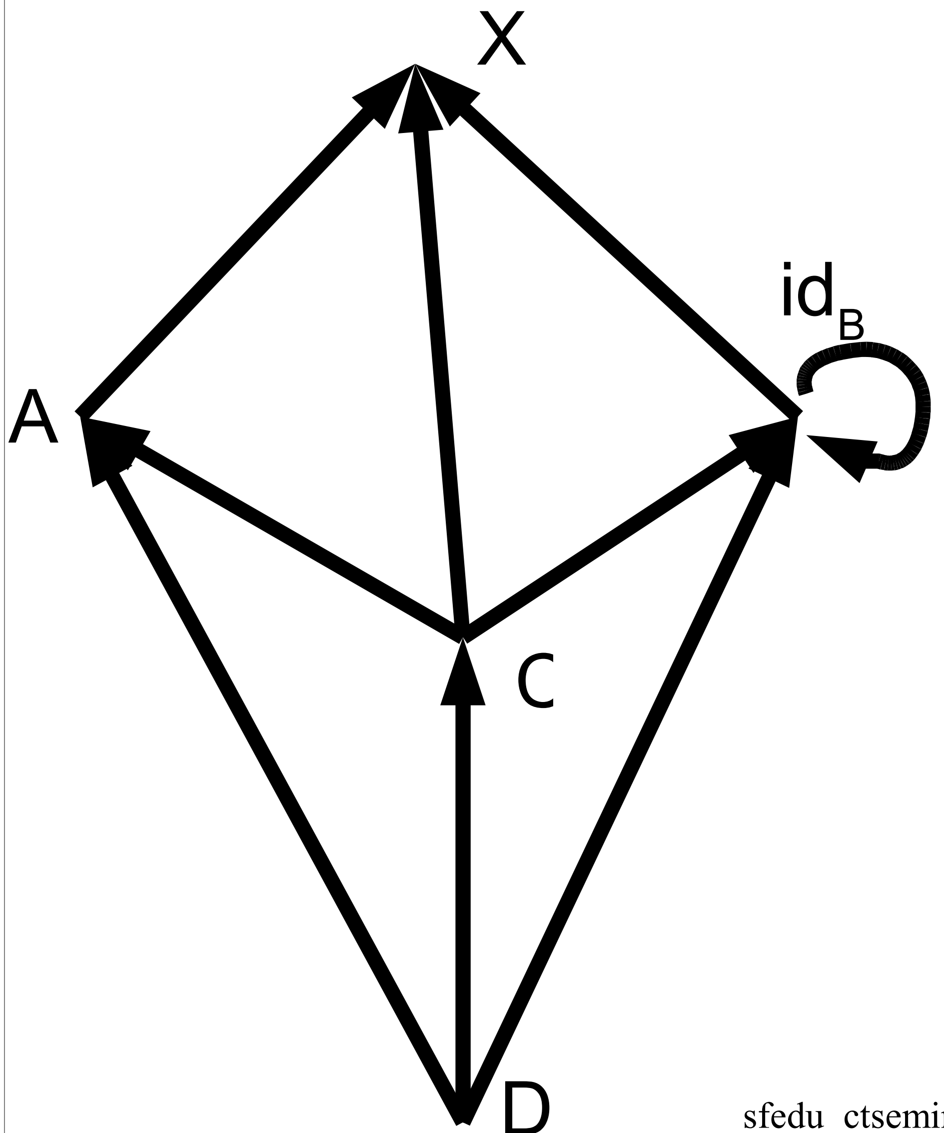
- C ≤ A и C ≤ B
- Как только для некоторого D верно D ≤ A и D ≤ B, то D ≤ C.

Тонкие категории





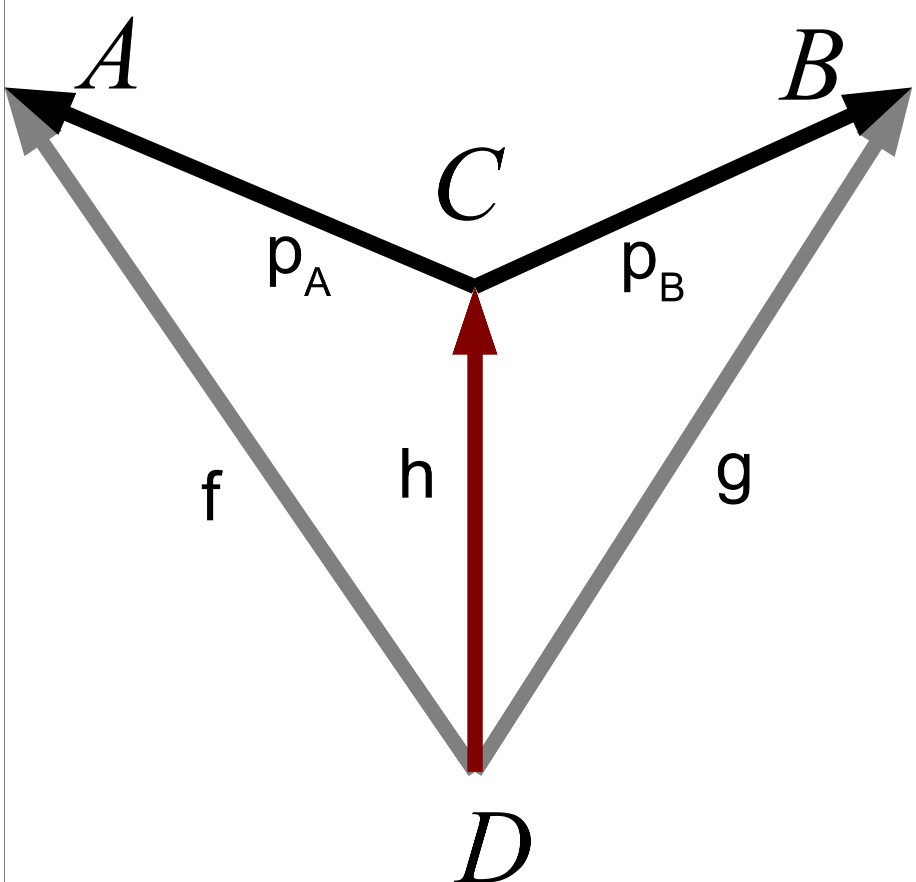
Тонкие категории



C является точной нижней гранью множества {A, B}:

- Существуют стрелки из C в A и в B
- Как только для некоторого D существуют стрелки в A и в B, то есть и стрелка из D в C.

Категорное произведение



Объект C является произведением A и B если:

- Существуют стрелки p_A:C → A и p_B:C → B.
- Если для некоторого D существуют стрелки f:D → A и g:D → B, то есть и **единственная** стрелка h:D → C такая, что $g = p_B \circ h$ и $f = p_A \circ h$.

На С-подобном языке

```
struct prod_A_B {
    A proj_A;
    B proj_B;
};
```

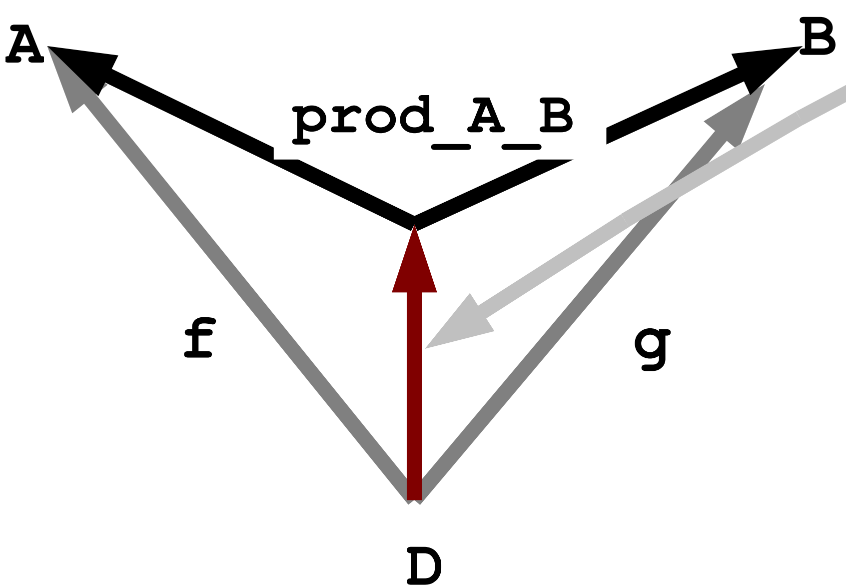
```
A Proj_A(prod_A_B x)
{
    return x.proj_A;
}

B Proj_B(prod_A_B x)
{
    return x.proj_B;
}
```

Это будет произведением только если запретить побочные эффекты!
(**Упражнение: почему?**)

На С-подобном языке

```
struct prod_A_B {
    A proj_A;
    B proj_B;
};
```




```
A f(D x);
B g(D x);

prod_A_B factor_f_g(D x)
{
    prod_A_B rslt;
    rslt.proj_A = f(x);
    rslt.proj_B = g(x);
    return rslt;
}
```

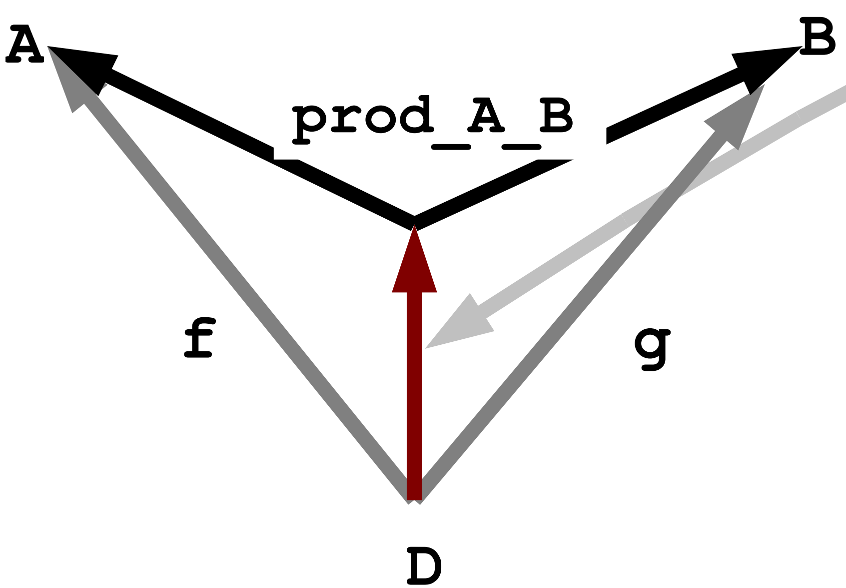
На С-подобном языке

```
Proj_A(factor_f_g(x))
== f(x)

Proj_B(factor_f_g(x))
== g(x)
```

```
A f(D x);
B g(D x);

prod_A_B factor_f_g(D x)
{
    prod_A_B rslt;
    rslt.proj_A = f(x);
    rslt.proj_B = g(x);
    return rslt;
}
```



Примеры произведений

- Декартово произведение в Set

Примеры произведений

- Декартово произведение в Set
- Точная нижняя грань в тонких категориях

Примеры произведений

- Декартово произведение в Set
- Точная нижняя грань в тонких категориях
- Топология произведения в Top

Примеры произведений

- Декартово произведение в Set
- Точная нижняя грань в тонких категориях
- Топология произведения в Top
- Прямые произведения групп и моноидов
- Прямое произведение модулей

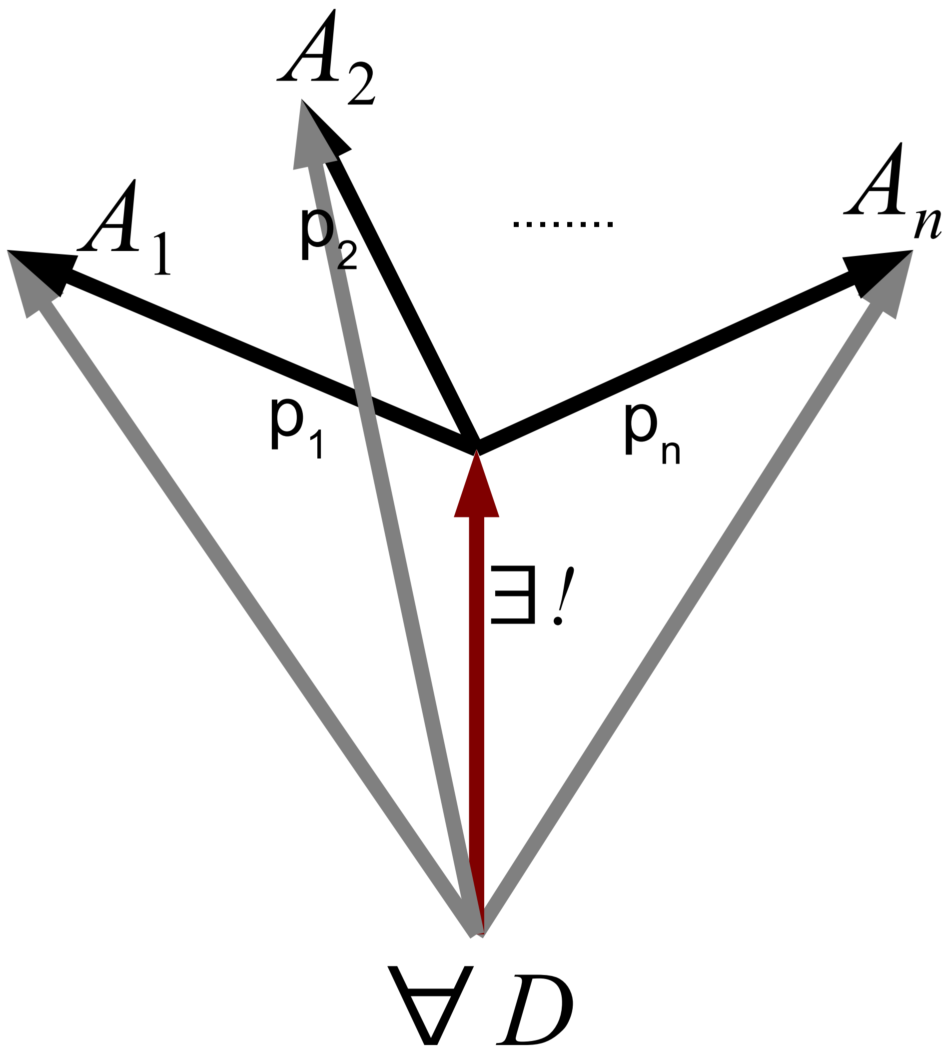
Примеры произведений

- Декартово произведение в Set
- Точная нижняя грань в тонких категориях
- Топология произведения в Top
- Прямые произведения групп и моноидов
- Прямое произведение модулей
- Прямое произведение графов

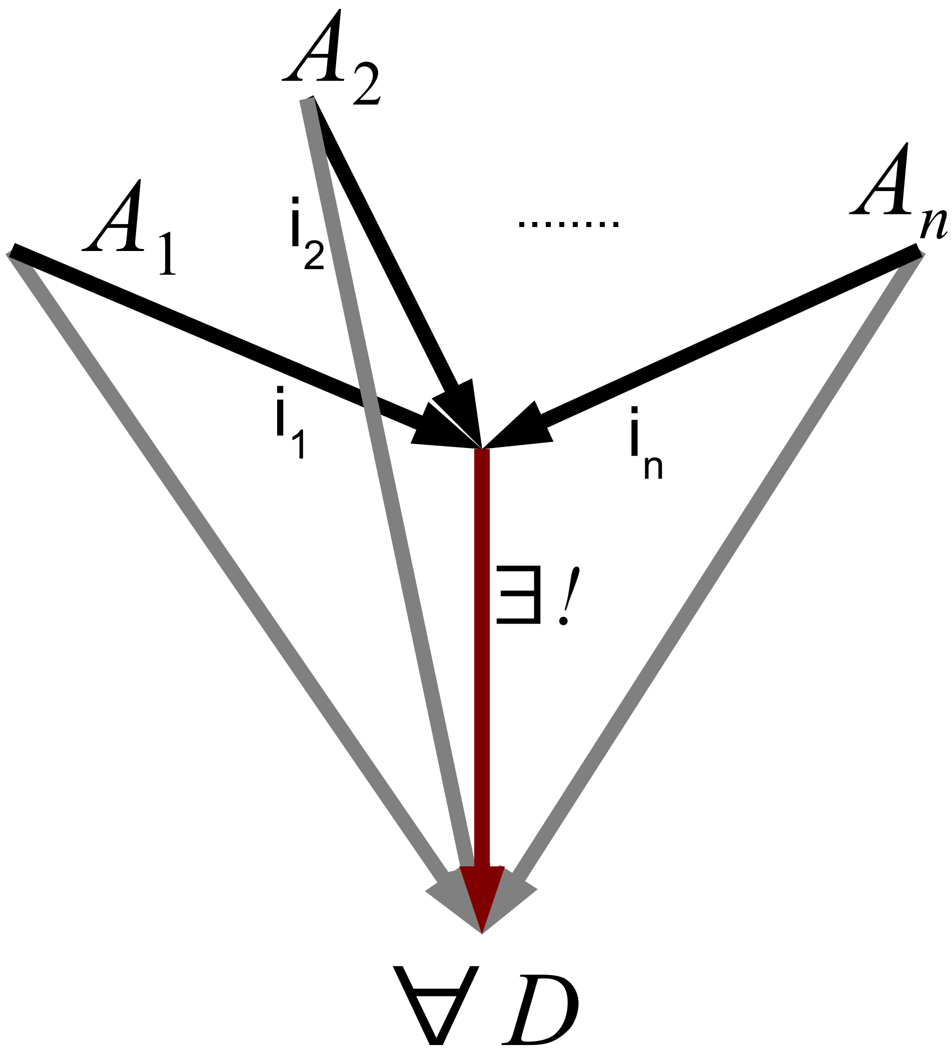
Примеры произведений

- Декартово произведение в Set
- Точная нижняя грань в тонких категориях
- Топология произведения в Top
- Прямые произведения групп и моноидов
- Прямое произведение модулей
- Прямое произведение графов
- Но: **категорное произведение определено лишь с точностью до изоморфизма!**

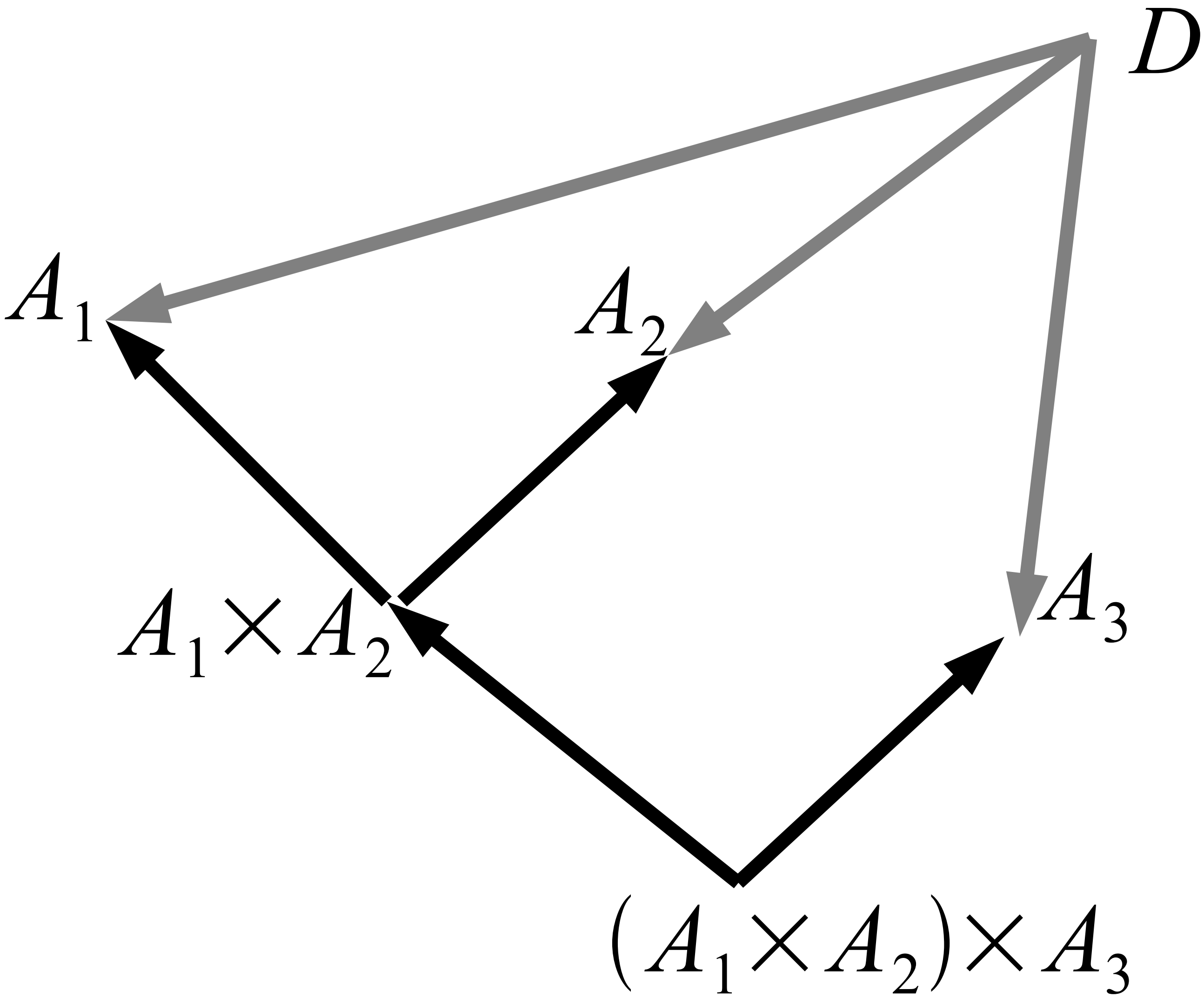
Конечное произведение



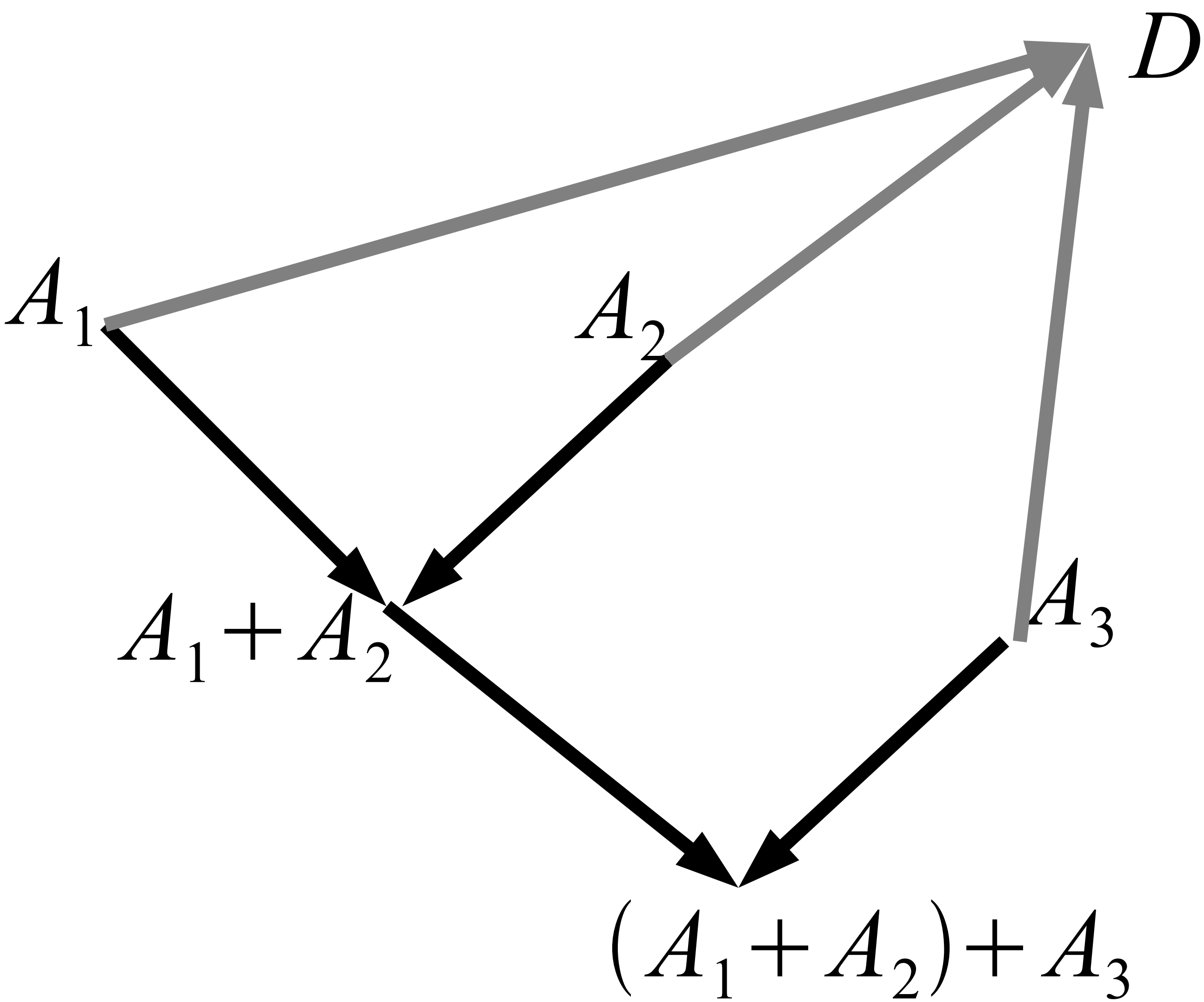
Конечное копроизведение



Конечное произведение из парного



Конечное копроизведение из парного

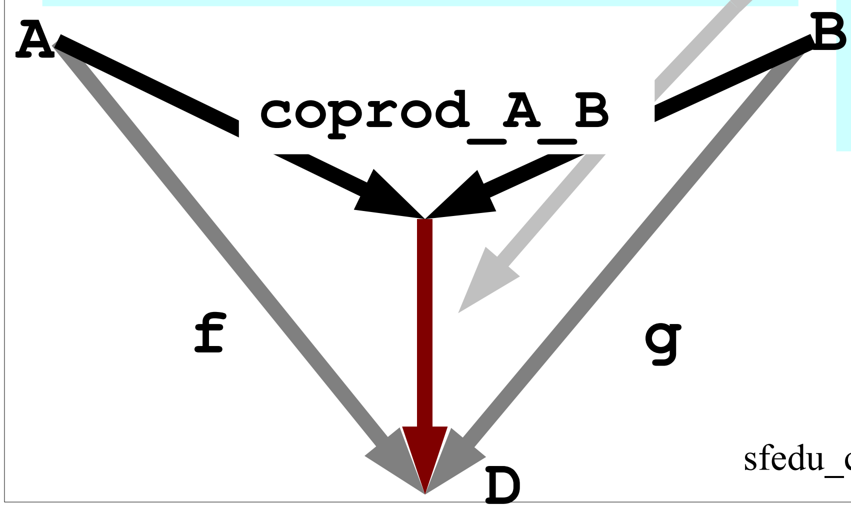


На С-подобном языке

```
struct coprod_A_B
{
    bool isFirst;
    union {
        A inj_A;
        B inj_B;
    }data;
};
```

```
D f(A x);
D g(B x);

D factor_f_g(coprod_A_B x)
{
    if (x.isFirst)
     return f(x.data.inj_A);
    else
     return g(x.data.inj_B);
}
```



Примеры копроизведений

- Дизъюнктное объединение в Set

Примеры копроизведений

- Дизъюнктное объединение в Set
- Точная **верхняя** грань в тонких категориях

Примеры копроизведений

- Дизъюнктное объединение в Set
- Точная **верхняя** грань в тонких категориях
- Дизъюнктное объединение топологических пространств

Примеры копроизведений

- Дизъюнктное объединение в Set
- Точная **верхняя** грань в тонких категориях
- Дизъюнктное объединение топологических пространств
- **Свободное произведение** групп

Примеры копроизведений

- Дизъюнктное объединение в Set
- Точная **верхняя** грань в тонких категориях
- Дизъюнктное объединение топологических пространств
- **Свободное произведение** групп
- Прямое произведение модулей

Примеры копроизведений

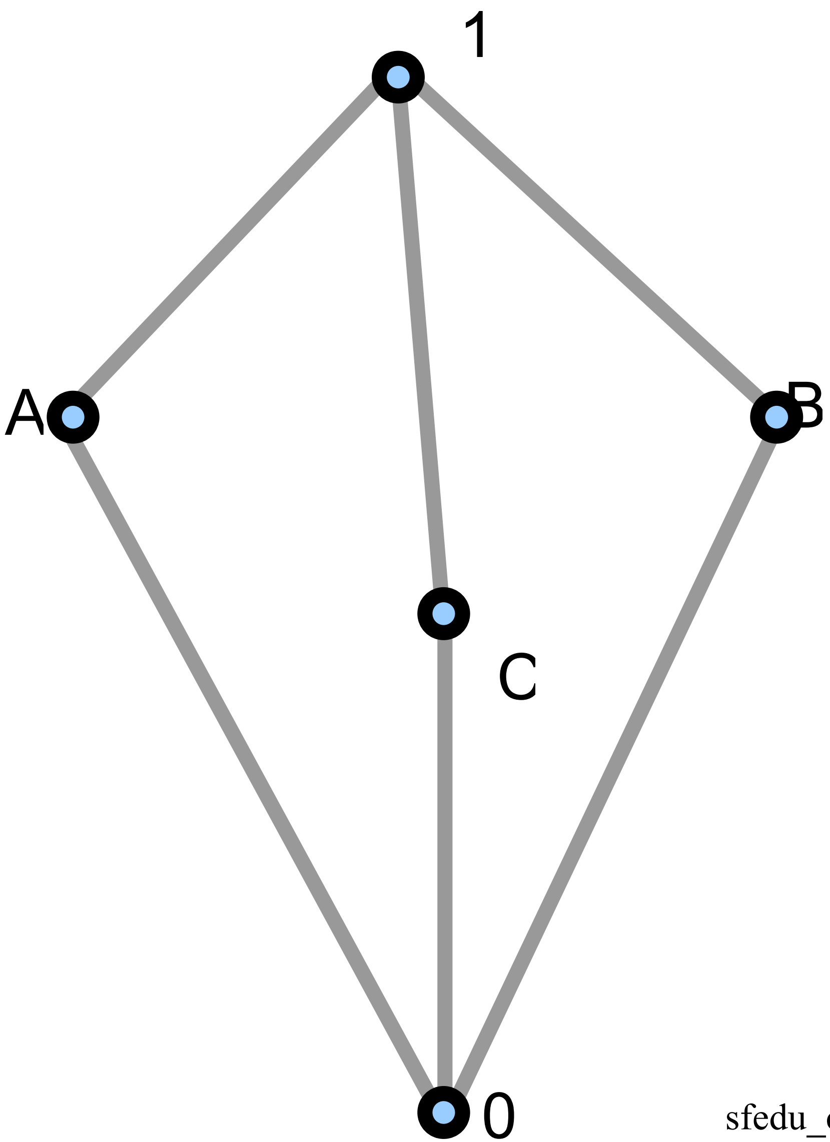
- Дизъюнктное объединение в Set
- Точная **верхняя** грань в тонких категориях
- Дизъюнктное объединение топологических пространств
- **Свободное произведение** групп
- Прямое произведение модулей
- Дизъюнктное объединение графов

Примеры копроизведений

- Дизъюнктное объединение в Set
- Точная **верхняя** грань в тонких категориях
- Дизъюнктное объединение топологических пространств
- **Свободное произведение** групп
- Прямое произведение модулей
- Дизъюнктное объединение графов

Но: **копроизведение определено лишь с точностью до изоморфизма!**

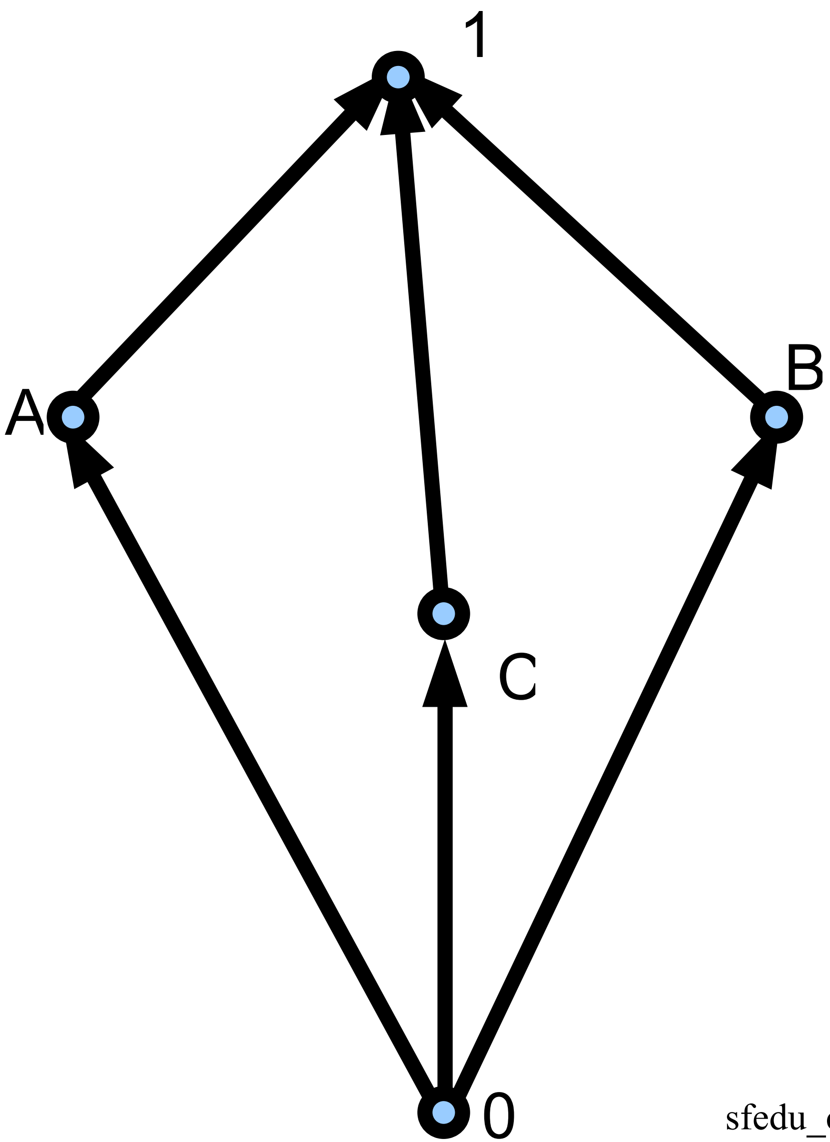
Решетки



В ограниченной (bounded) решетке существуют 0 и 1 (наименьший и наибольший элементы):

- Для любого элемента X решетки 0 < X
- Для любого элемента X решетки 1 > X

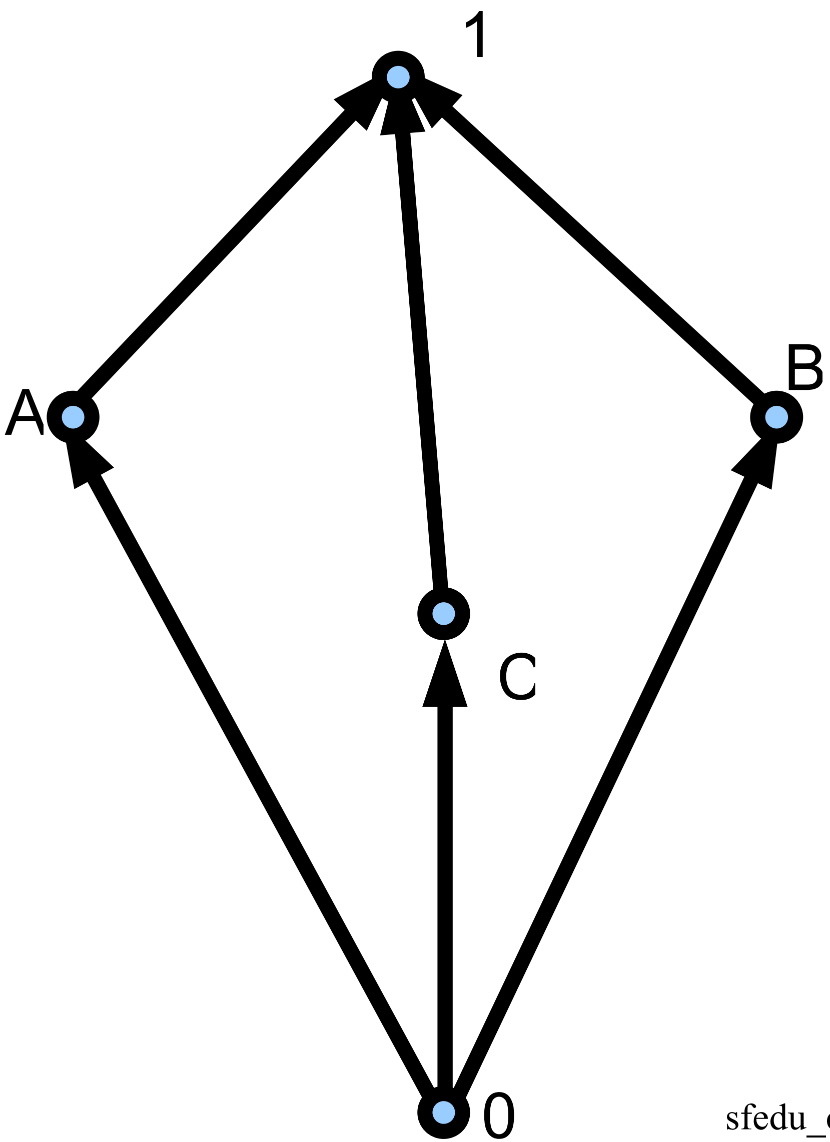
Тонкие категории



В решеточном качуме:

- Для любого элемента X существует стрелка из 0 в X
- Для любого элемента X существует стрелка из X в 1

Инициальный и терминальный объекты



Инициальный объект 0

- Для любого объекта X существует **единственная** стрелка из 0 в X

Терминальный объект 1

- Для любого объекта X существует **единственная** стрелка из X в 1

Примеры терминальных объектов

- Любое одноэлементное множество в Set

Примеры терминальных объектов

- Любое одноэлементное множество в Set
- 1 в решеточном качуме

Примеры терминальных объектов

- Любое одноэлементное множество в Set
- 1 в решеточном качуме
- Одноэлементная группа $\{e\}$
- Одноэлементный модуль {0}
- Одноэлементное кольцо {0}

Примеры терминальных объектов

- Любое одноэлементное множество в Set
- 1 в решеточном качуме
- Одноэлементная группа $\{e\}$
- Одноэлементный модуль $\{0\}$
- Одноэлементное кольцо $\{0\}$

Упражнение: доказать, что любые два терминальных объекта в категории изоморфны

Примеры инициальных объектов

- Пустое множество Ø в Set

Примеры инициальных объектов

- Пустое множество Ø в Set
- 0 в решеточном качуме

Примеры инициальных объектов

- Пустое множество Ø в Set
- 0 в решеточном качуме
- Одноэлементная группа $\{e\}$
- Одноэлементный модуль {0}

Примеры инициальных объектов

- Пустое множество Ø в Set
- 0 в решеточном качуме
- Одноэлементная группа {*e*}
- Одноэлементный модуль {0}
- Кольцо целых чисел Z

Примеры инициальных объектов

- Пустое множество Ø в Set
- 0 в решеточном качуме
- Одноэлементная группа {*e*}
- Одноэлементный модуль {0}
- Кольцо целых чисел Z

Упражнение: доказать, что любые два инициальных объекта в категории изоморфны

Инициальный и терминальный объекты

- Рассмотрим категорию множеств с отмеченной точкой

Инициальный и терминальный объекты

- Рассмотрим категорию множеств с отмеченной точкой
- Морфизмами в ней являются отображения, сохраняющие отмеченную точку

Инициальный и терминальный объекты

- Рассмотрим категорию множеств с отмеченной точкой
- Морфизмами в ней являются отображения, сохраняющие отмеченную точку
- **Вопрос:** что будет инициальным и терминальным объектами?

Терминальный объект = 0-арное произведение

- Терминальный объект можно считать произведением пустого множества объектов.

Терминальный объект = 0-арное произведение

- Терминальный объект можно считать произведением пустого множества объектов.
- Определение конечного произведения, данное выше, распространяется на пустые семейства объектов.

Терминальный объект = 0-арное произведение

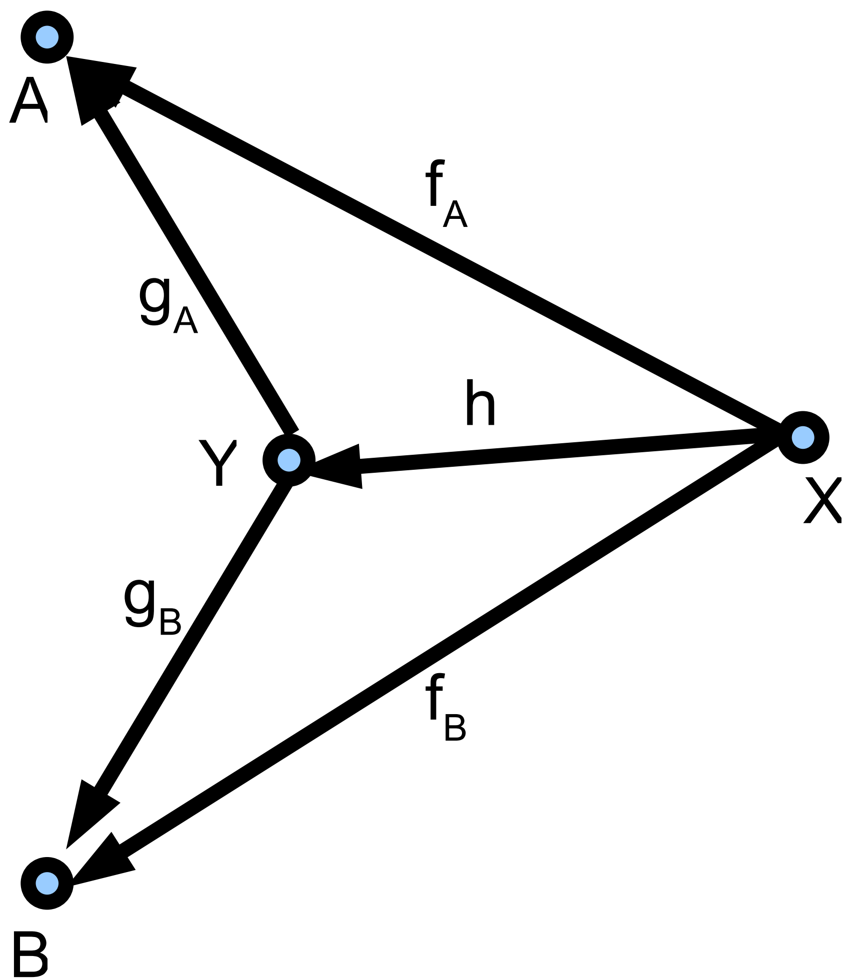
- Терминальный объект можно считать произведением пустого множества объектов.
- Определение конечного произведения, данное выше, распространяется на пустые семейства объектов.
- Категория с конечными произведениями: любое конечное (включая пустое) семейство объектов имеет произведение.

Терминальный объект = 0-арное произведение

- Терминальный объект можно считать произведением пустого множества объектов.
- Определение конечного произведения, данное выше, распространяется на пустые семейства объектов.
- Категория с конечными произведениями: любое конечное (включая пустое) семейство объектов имеет произведение.

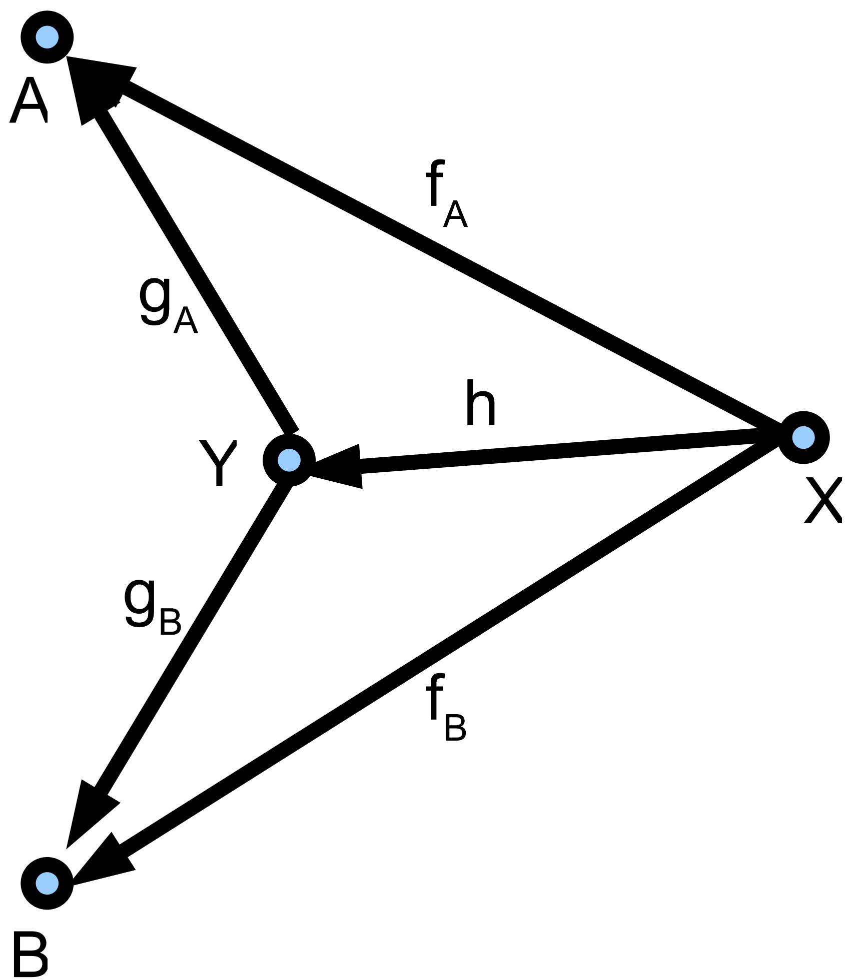
Доказать: достаточно иметь терминальный объект и все парные произведения.

Произведение как терминальный объект



Для объектов A и B построим категорию **пар стрелок в A и B.**

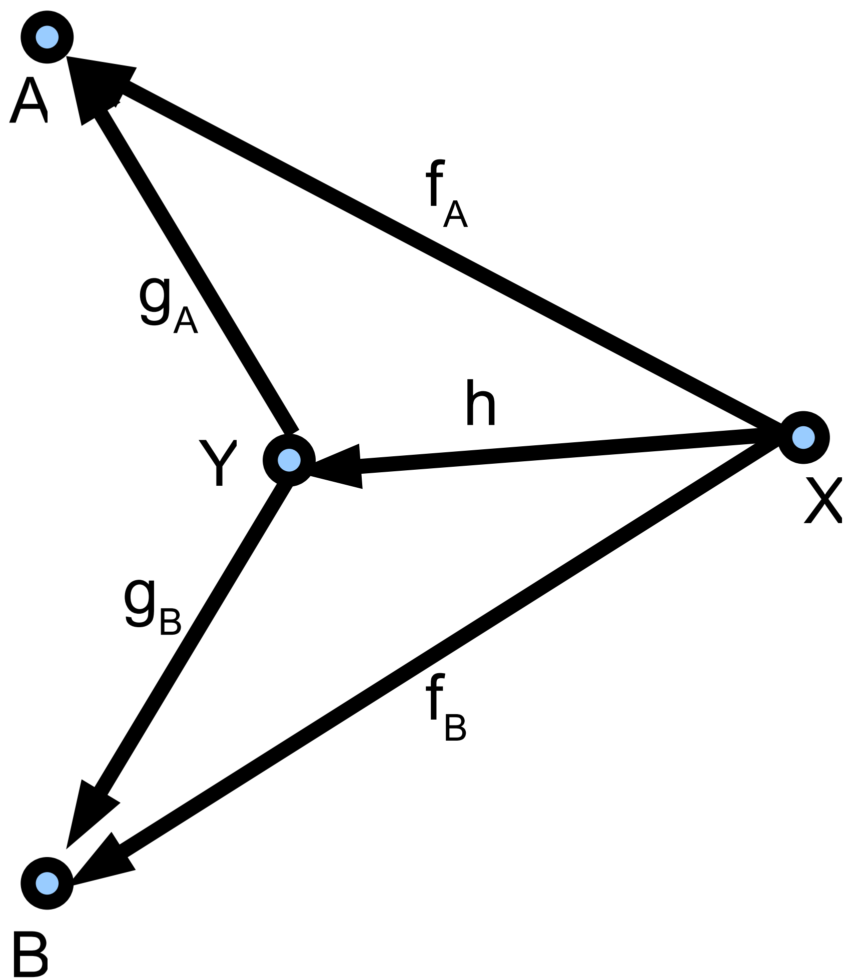
Произведение как терминальный объект



Для объектов A и B построим категорию **пар стрелок в A и B**:

- Объектом является пара (f_A: X→A, f_B: X→B)

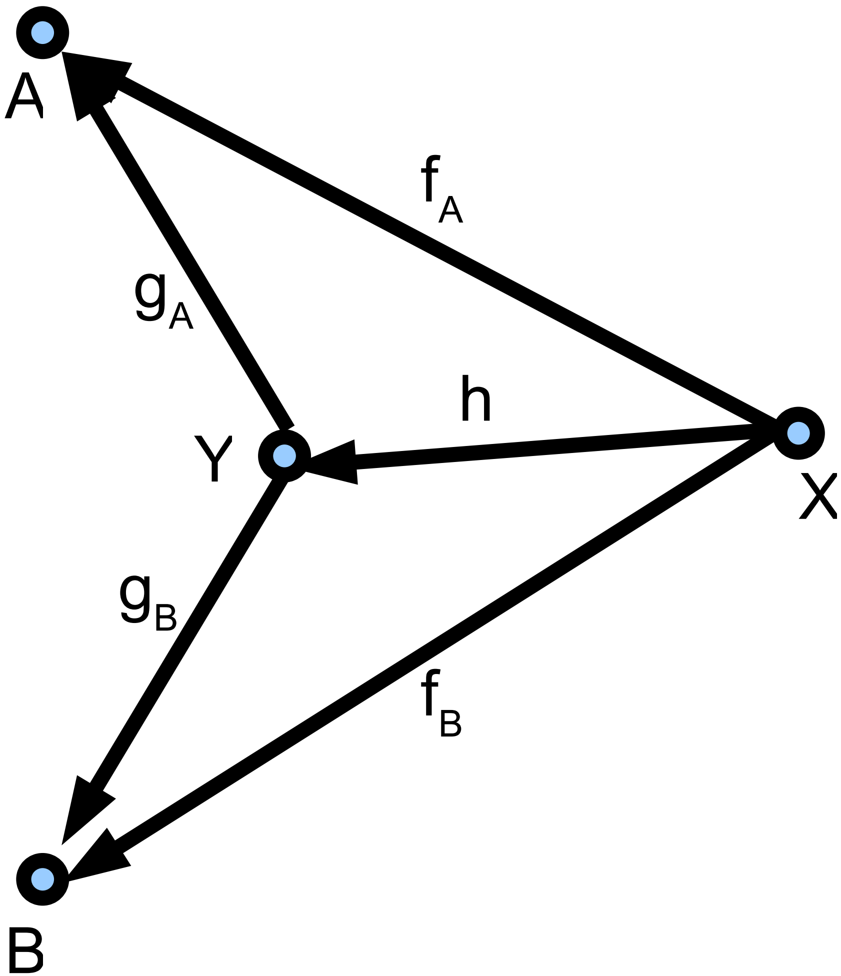
Произведение как терминальный объект



Для объектов A и B построим категорию **пар стрелок в A и B**:

- Объектом является пара (f_A: $X \to A$, f_B: $X \to B$)
- Морфизмом между (f_A: $X \to A$, f_B: $X \to B$) и (g_A: $Y \to A$, g_B: $Y \to B$) является любая стрелка h: $X \to Y$ такая, что каждая из получившихся треугольных диаграмм коммутирует

Произведение как терминальный объект



Эквивалентное определение произведения:

*это терминальный объект в полученной категории **пар стрелок в A и B**.*