Экзаменационная программа по курсу «Дифференциальные и разностные уравнения», мехмат, 2 курс, специальность «Информационные технологии», 2 семестр 2006-2007 учебного года

Обыкновенные дифференциальные уравнения

Нормальная система дифференциальных уравнений. Сведение уравнения, разрешенного относительно $y^{(n)}$ к нормальной системе дифференциальных уравнений. Частное решение. Общий интеграл. Уравнения с разделяющимися переменными вида $f(x)dx+g(y)dy=0$. Уравнения вида $y'=f(y/x)$. Общий вид уравнений с разделяющимися переменными. Уравнение $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$, где M и N — однородные функции одного порядка.

Линейные уравнения первого порядка. Решение однородного уравнения, задача Коши для однородного уравнения. Метод вариации произвольной постоянной. Уравнение Бернулли: $y'+p(x)y=f(x)y^n$. Уравнение Риккати: $y'+p(x)y+q(x)y^2=f(x)$, нахождение общего решения в случае, когда известно одно решение.

Уравнение в полных дифференциалах. Методы решения (прямое интегрирование, использование криволинейных интегралов). Интегрирующий множитель, дифференциальное уравнение для интегрирующего множителя. Уравнение для интегрирующего множителя вида $\mu=\varphi(\omega(x,y))$, где функция ω задана, а φ подлежит нахождению. Случай $\omega(x,y)=x+y$.

Принцип сжимающих отображений. Метрическое пространство. Предел последовательности элементов метрического пространства. Полнота. Теорема о неподвижной точке. Оценка скорости сходимости. Теорема существования и единственности решения задачи Коши для нелинейного уравнения первого порядка. Следствие для нормальной системы дифференциальных уравнений, следствие для уравнения вида

$$y^{(n)}=f(x,y,y',\dots,y^{(n-1)}).$$

Уравнения, неразрешенные относительно производной: интегрирование уравнения, разрешенного относительно y.

Линейные дифференциальные уравнения. Однородное и неоднородное уравнения. Теорема существования и единственности решения задачи Коши. Свойства решений однородных и неоднородных дифференциальных уравнений.

Линейная зависимость и независимость решений на интервале. Определитель Вронского. Теорема о связи линейной независимости и значений определителя Вронского. Фундаментальная система решений. Теорема существования фундаментальной системы решений. Теорема о выражении произвольного решения через фундаментальную систему решений.

Линейные однородные уравнения с постоянными коэффициентами. Лемма о линейной независимости семейств вида $x^{k_i}e^{\lambda_i}$. Характеристический полином уравнения с постоянными коэффициентами. Лемма о решениях уравнения, определяемых корнем характеристического полинома кратности k. Теорема о фундаментальной системе решений уравнения с постоянными коэффициентами. Случай комплексных корней. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения, метод вариации произвольной постоянной.

Устойчивые многочлены. Связь условия $\lim_{n\to\infty} y(x)=0$ и распределения корней характеристического уравнения. Устойчивый многочлен. Оценка решения на бесконечности в случае устойчивого многочлена. Критерий устойчивости многочлена второй степени.

Уравнения в частных производных.

Линейное дифференциальное уравнение первого порядка. Задача Коши для дифференциального уравнения первого порядка Характеристическая система для уравнения первого порядка. Понятие автономной системы, фазовые траектории, фазовая плоскость (пространство). Лемма о дифференцировании вдоль характеристики. Теорема существования и единственности решения задачи Коши для уравнения первого порядка.

Классификация уравнений второго порядка. Вывод уравнения струны. Уравнение мембраны.

Неограниченная струна, решение д′Аламбера. Свободные колебания конечной струны, метод Фурье.

Уравнение теплопроводности, принцип максимума для уравнения теплопроводности (две леммы и теорема, следствия).

Метод разделения переменных для уравнения теплопроводности.

Уравнение Лапласа и уравнение Пуассона. Принцип максимума для уравнения Пуассона. Решение уравнения Лапласа в круге.