Листок 6: нормальная форма Хомского

Определение. Пусть дана КС-грамматика $G = (\Sigma, N, \mathcal{P}, S \in N)$. Говорят, что символ $X \in \Sigma \cup N$

(1) *полезный в* G, если

$$\exists \alpha, \beta \in (\Sigma \cup N)^* \; \exists w \in \Sigma^*: \quad S \Rightarrow_G^* \alpha X \beta \Rightarrow_G^* w.$$

(2) *порождающий в* G, если

$$\exists w \in \Sigma^*: \quad X \Rightarrow_G^* w$$

(3) *достижимый в* G, если

$$\exists \alpha, \beta \in (\Sigma \cup N)^*: \quad S \Rightarrow_G^* \alpha X \beta$$

Бесполезным называется любой символ, не являющийся полезным.

Теорема 1. *Если к КС грамматике* G последовательно *применить два преобразования:*

(1) удалить символы, не являющиеся порождающими,

(2) удалить символы, не являющиеся достижимыми,

то будет получена грамматика, не содержащая бесполезных символов.

Замечание. Порядок действий в **теореме** существенен.

Задача. Удалить бесполезные символы в грамматиках с продукциями:

$$(1)\quad \begin{array}{l} S \to 0 \mid A, \\ A \to AB, \\ B \to 1; \end{array} \qquad (2)\quad \begin{array}{l} S \to AB \mid CA, \\ A \to a, \\ B \to BC \mid AB, \\ C \to aB \mid \varepsilon. \end{array}$$

Определение (Хомский, 1959)**.** Говорят, что КС-грамматика $G = (\Sigma, N, \mathcal{P}, S \in N)$ находится в *нормальной форме Хомского (НФХ)*, если она не содержит бесполезных символов и каждая продукция грамматики имеет один из двух видов:

1) $A \to a$,

2) $A \to BC$,

где $A, B, C \in N$, $a \in \Sigma$.

Схема приведения грамматики к НФХ:

(1) удалить ε-продукции;

(2) удалить цепные продукции (продукции вида $A \to B$);

(3) удалить бесполезные символы;

(4) привести грамматику к НФХ, используя метод «разбиения слов на слоги».

Замечание. Порядок действий в **схеме** существенен.

Определение. Нетерминал $A \in N$ КС-грамматики $G = (\Sigma, N, \mathcal{P}, S \in N)$ называется *ε-порождающим*, если существует вывод $A \Rightarrow_G^* \varepsilon$.

Задача. Привести к нормальной форме Хомского грамматики с продукциями:

(1) $S \to ASB \mid \varepsilon,$ $A \to aAS \mid a,$ $B \to SbS \mid A \mid bb;$	(2) $S \to 0A0 \mid 1B1 \mid BB,$ $A \to C,$ $B \to S \mid A,$ $C \to S \mid \varepsilon;$
(3) $S \to AAA \mid B,$ $A \to aA \mid B,$ $B \to \varepsilon;$	(4) $S \to aAa \mid bBb \mid \varepsilon,$ $A \to C \mid a,$ $B \to C \mid b,$ $C \to CDE \mid \varepsilon,$ $D \to A \mid B \mid ab.$