Листок 2

1. Системы линейных уравнений с регулярными коэффициентами

Решить системы уравнений:

(1) $$\begin{cases} X_1 = aX_1 + aX_2; \\ X_2 = bX_2 + b. \end{cases}$$

(2) $$\begin{cases} X_1 = 1X_1 + 0X_2 + \varnothing X_3; \\ X_2 = 1X_1 + \varnothing X_2 + 0X_3; \\ X_3 = 0X_1 + \varnothing X_2 + 1X_3. \end{cases}$$

(3) $$\begin{cases} X_1 = a^*X_1 + (a+b)^*X_2; \\ X_2 = (a+b^*)X_1 + aX_2 + b^*. \end{cases}$$

(4) $$\begin{cases} X_1 = (a+b)X_1 + \varnothing X_2 + a^*X_3; \\ X_2 = \varnothing X_1 + aX_2 + a^*; \\ X_3 = b^*X_1 + \varnothing X_2 + a^*X_3. \end{cases}$$

Написать регулярные выражения для языков, заданных грамматиками со следующими продукциями:

(5) $$\begin{aligned} &S \to 1A \mid 2S; \\ &A \to 0B \mid 0S \mid 1A; \\ &B \to 1C \mid 2C; \\ &C \to \varepsilon \mid 1S \mid 2A. \end{aligned}$$

(6) $$\begin{aligned} &S \to 0A \mid 1S \mid \varepsilon; \\ &A \to 0B \mid 1A; \\ &B \to 0S \mid 1B. \end{aligned}$$

2. Доказательство нерегулярности формальных языков

Теорема 1 («Лемма о накачке» / «Лемма о разрастании» / «Pumping Lemma», И. Бар-Хиллел — М. Пелис — Э. Шамир, 1961)**.** *Пусть L — регулярный язык. Тогда существует такая константа $n \in \mathbb{N}$, что для любого слова $w \in L$, такого что $|w| \geqslant n$, существует такое разбиение $w = xyz$ слова w, что:*

(1) $y \neq \varepsilon$;

(2) $|xy| \leqslant n$;

(3) $\{xy^kz \mid k \geqslant 0\} \subset L$.

Доказательство. $\otimes$ — найти в одной из предложенных электронных книг. ∎

Доказать, что следующие языки нерегулярны:

(1) $\{0^n1^n \mid n \in \mathbb{N}\}$;

(2) язык из всех слов $w \in \{0,1\}^*$, содержащих одинаковое количество 0 и 1;

(3) $\{ww \mid w \in \{0,1\}^*\}$;

(4) $\{0^n1^m \mid n \leqslant m\}$;

(5) $\{1^p \mid p$ — простое$\}$;

(6) $\{0^n10^n \mid n \in \mathbb{N}\}$;

(7) $\{1^{n^2} | n \in \mathbb{N}\}$;

(8) $\{1^{n!} | n \in \mathbb{N}\}$.