

### Листок 3: Комбинаторная логика

**Упражнение 1.** Редуцировать следующие комбинаторные термы.

- |  |  |
|--|--|
| (1) $\mathbf{B}xyz$ , если $\mathbf{B} \equiv \mathbf{S}(\mathbf{KS})\mathbf{K}$ ;     | (4) $\mathbf{SSK}xy$ ;                       |
| (2) $\mathbf{C}xyz$ , если $\mathbf{C} \equiv \mathbf{S}(\mathbf{BBS})(\mathbf{KK})$ ; | (5) $\mathbf{S}(\mathbf{SK})xy$ ;            |
| (3) $\mathbf{W}xy$ , если $\mathbf{W} \equiv \mathbf{SS}(\mathbf{K}(\mathbf{SKK}))$ ;  | (6) $\mathbf{S}(\mathbf{KS})\mathbf{S}xyz$ . |

**Упражнение 2.** Вычислить термы:

- |                          |                         |
|--------------------------|-------------------------|
| (1) $[x, y].x$ ;         | (3) $[x, y, z].y(xz)$ ; |
| (2) $[x, y, z].xz(yz)$ ; |                         |

Определим три  $\lambda$ -терма:

- |   |  |
|---|--|
| (1) $\mathbf{B}_\lambda \equiv \lambda xyz.x(yz)$ , | (3) $\mathbf{W}_\lambda \equiv \lambda xy.xyu$ . |
| (2) $\mathbf{C}_\lambda \equiv \lambda xyz.xzy$ ,   |  |

Перевести их в комбинаторные термы. Сравнить с результатами пп. 1–3 упражнения 1.

**Упражнение 3.** Пусть комбинатор  $\mathbf{Y}$  задан так:  $\mathbf{Y} \equiv \mathbf{WS}(\mathbf{BWB})$ . Показать, что  $\mathbf{Y}F$  в комбинаторном исчислении редуцируется к  $F(\mathbf{Y}F)$ .

**Упражнение 4.**  $\beta$ -редукция в  $\lambda$ -исчислении обладает свойством:

$$(\xi) \quad M =_\beta N \implies \lambda x.M =_\beta \lambda x.N.$$

Покажите, что для комбинаторных термов не выполнено аналогичное свойство:

$$M = N \implies [x].M = [x].N.$$

*Указание:* положите  $M = \mathbf{S}xyz$ ,  $N = xz(yz)$ .

## Основные определения

**Определение 1.** Пусть задано счётное множество имён переменных  $\mathcal{V} = \{x, y, z, \dots\}$  и счётное множество символов, называемых *атомарными константами*, в том числе три *базовых комбинатора* **I**, **K**, **S**. Множество *комбинаторных термов* — это наименьшее множество, удовлетворяющее следующим условиям:

- (1) переменные и атомарные константы являются комбинаторными термами;
- (2) если  $X$  и  $Y$  — комбинаторные термы, то  $(XY)$  — комбинаторный терм.

Для комбинаторных термов используются соглашения по опусканию скобок, аналогичные соглашениям  $\lambda$ -исчисления:

- (1) Внешние скобки терма опускаются.
- (2) Аппликация ассоциирует влево:  $UVWX$  означает  $((UV)W)X$ .

**Определение 2** (редукция). Каждый терм одного из трёх видов, **IX**, **KXY**, **SXYZ** называется *редексом* и может быть *сокращён (редуцирован)*, то есть заменён:

- (1) **IX** на  $X$ ,
- (2) **KXY** на  $X$ ,
- (3) **SXYZ** на  $XZ(YZ)$ .

**Определение 3** (абстракция). Для любых комбинаторного терма  $M$  и переменной  $x$  определим комбинаторный терм  $[x].M$  следующим образом:

- (1)  $[x].M \equiv \mathbf{KM}$ , если  $x \notin \text{FV}(M)$ ,
- (2)  $[x].x \equiv \mathbf{I}$ ,
- (3)  $[x].Ux \equiv U$ , если  $x \notin \text{FV}(U)$ ,
- (4)  $[x].UV \equiv \mathbf{S}([x].U)([x].V)$ , если не применимы ни (1), ни (3).

Кроме того, используется сокращение

$$[x_1, \dots, x_n].M \equiv [x_1].([x_2].(\dots([x_n].M))).$$