Алгоритмическое решение одной комбинаторной задачи А. В. Козака - И. Б. Симоненко

Лукин Александр

Южный федеральный университет

Факультет математики, механики и компьютерных наук
Кафедра алгебры и дискретной математики

Научный руководитель: к.ф.-м.н., доц. Деундяк В.М.

11.11.2011

Постановка задачи

Были получены следующие результаты:

- доказано существование конечного множества, принадлежащего $\mathfrak{M}(r, R)$ для любых положительных действительных чисел r, R;
- разработан алгоритм построения такого множества;
- доказана геометрическая теорема, обосновывающая корректность этого алгоритма.

Определение полупространства

Определение

Подмножество $\Pi \subset \mathbb{Z}^2$ будем называть **каноническим дискретным полупространством**, если множество Π и его дополнение замкнуты относительно сложения. Сдвиг канонического дискретного полупространства на целочисленный вектор будем называть **дискретным полупространством**.

Определение базового множества

Определение

Пусть r, R — положительные действительные числа. Через $\mathfrak{M}(r)$ обозначим семейство подмножеств $M \subset \mathbb{Z}^2$, удовлетворяющих условию: для любой точки $X \in \mathbb{R}^2$ существует дискретное полупространство или пространство Π такое, что

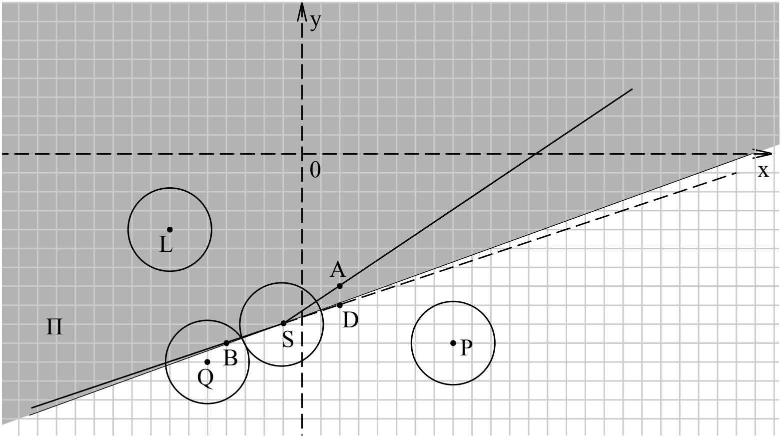
$$M \cap B(X, r) = \Pi \cap B(X, r).$$

Семейство множеств $M \in \mathfrak{M}(r)$, для которых выполняется условие

$$M \supset B(0, R) \cap \mathbb{Z}^2,$$

обозначим через $\mathfrak{M}(r, R)$.

Пример базового множества



Зафиксируем произвольное действительное число $r(>1)$ и точки $S \in \mathbb{Z}^2$; $A,\ B,\ D \in B(S,r) \cap \mathbb{Z}^2$ так, что $B \notin l(S,A)$, точка D симметрична точке B относительно S и выполняется условие:

$$\frac{\pi}{2} \leqslant |\angle ASB| < \pi.$$

Положим

$$r' = \frac{r}{\sin \varkappa/2},$$

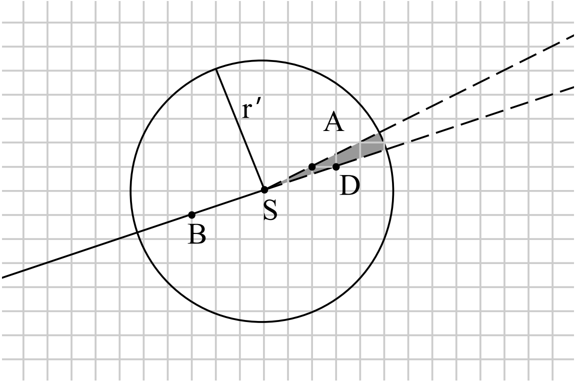
где $\varkappa = |\angle ASB|$. Если выполняется условие

$$B(S,r') \cap (\angle DSA_{\mathbb{Z}} \setminus (\vec{l}(S,D) \cup \vec{l}(S,A))) = \varnothing,$$

то для любой точки $X \in \mathbb{R}^2$ существует дискретное полупространство или пространство Π такое, что

$$\angle ASB_{\mathbb{Z}} \cap B(X,r) = \Pi \cap B(X,r).$$

Иллюстрация условия теоремы



Алгоритм 1.
Вход: $r(>\sqrt{2})$ — фиксированное действительное число.
Выход: множество $M \in \mathfrak{M}(r)$.
Описание алгоритма.

1. Находим число

$$\varkappa = \min\{|\angle PA_0Q| \ : \ P,\ Q(\neq P) \in B_{\mathbb{Z}}(A_0, r)\}.$$

Положим
$$r' = \frac{r}{\sin \varkappa/2}.$$

Зафиксируем точку $\tilde{Q} \in \angle X_0A_0Y_0$ так, что выполняется условие
$$|\angle X_0A_0\tilde{Q}| = \frac{\pi}{4}.$$

Зафиксируем на луче $\vec{l}(A_0, \tilde{Q})$ бесконечно удалённую целочисленную точку Q.

Алгоритм

2. На луче $\vec{l}(A_0, X_0)$ строим отрезок A_0A_1 такой, что
$$|A_0A_1| = [r'] + 1,$$
где $[r']$ — целая часть числа r'.
3. Положим $k = 1$. Выполняем следующую процедуру до тех пор, пока очередной построенный отрезок A_pA_{p+1} не будет лежать на прямой, параллельной лучу $\vec{l}(A_0, Q)$. В результате получим ломаную $A_0A_1A_2 \dots A_pA_{p+1}$.

Процедура

Процедура.

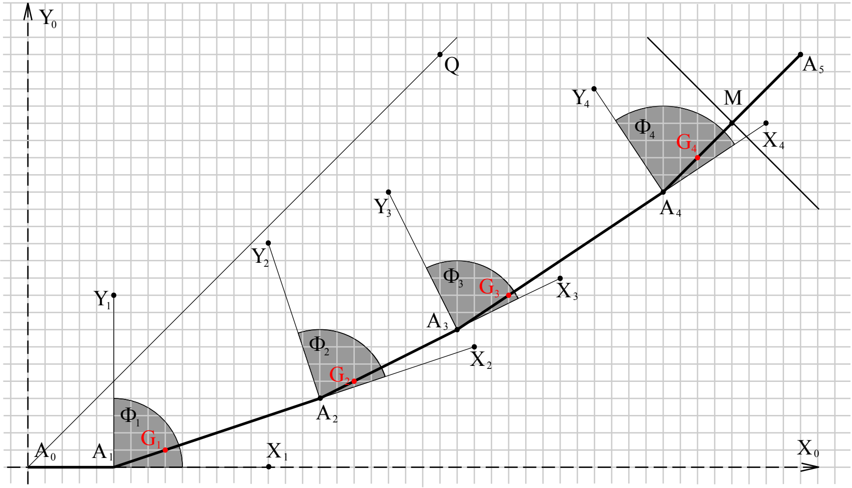
Вход: натуральное число k, действительное число $r'(>\sqrt{2})$, целочисленные точки A_{k-1}, A_k.

Выход: целочисленная точка A_{k+1}.

1. Зафиксируем на луче $\vec{l}(A_{k-1}, A_k)$ бесконечно удалённую целочисленную точку X_k. Рассмотрим перпендикуляр к прямой $l(A_{k-1}, A_k)$ в точке A_k, построенный в полуплоскости $\angle X_k A_k A_{k-1}$. Зафиксируем на этом перпендикуляре бесконечно удалённую точку Y_k. Определим множество

$$\Phi_k := \angle X_k A_k Y_k \cap B_{\mathbb{Z}}(A_k, r').$$

Иллюстрация к алгоритму



Процедура

2. Найдём точку G_k, для которой выполняется условие:

$$\gamma := |\angle X_k A_k G_k| = \min\{|\angle X_k A_k P| \mid P \in \Phi_k \setminus A_k X_k\}.$$

3. Для вектора $\overrightarrow{A_k G_k}$ запускаем итерационный процесс:

$$i := 1;$$

$$\overrightarrow{A_k G_k^1} := \overrightarrow{A_k G_k};$$

while $|A_k G_k^i| < r'$ **do**

$$i := i + 1;$$

$$\overrightarrow{A_k G_k^i} := \overrightarrow{A_k G_k^{i-1}} + \overrightarrow{A_k G_k};$$

end while.

Конец процедуры

IV. Пусть $\tilde{i}$ — номер, на котором остановился итерационный процесс. Положим

$$\overrightarrow{A_k A_{k+1}} := 2\overrightarrow{A_k G_k^{\tilde{i}}}.$$

Конец процедуры.

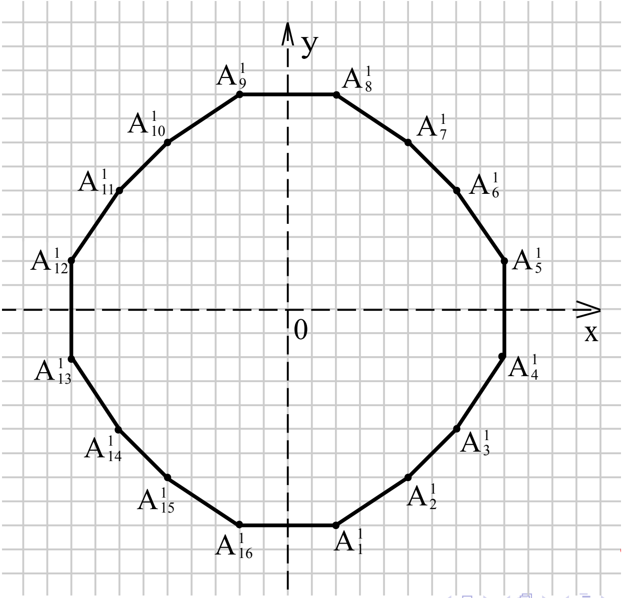
4. Пусть целочисленная точка M — середина отрезка $A_p A_{p+1}$. Построим в точке M прямую, перпендикулярную отрезку $A_p A_{p+1}$ и симметрично отразим каждую точку ломаной относительно этой прямой. Получим ломаную $A_0 A_1 A_2 \dots A_p A_{p+1} \dots A_{2p+1}$

Конец алгоритма

5. Пусть вектор $\overrightarrow{OA}_{2p+1}$ имеет в системе координат xOy координаты (ξ, η). Сдвинем каждую точку ломаной $A_0A_1A_2 \ldots A_{2p+1}$ на вектор $\overrightarrow{OS}$ с координатами $(0, -\eta)$.
6. Симметрично отразим ломаную относительно оси Oy (получим ломаную $A_{-2p+1}A_{-2p} \ldots A_{-1}A_0A_1 \ldots A_{2p}A_{2p+1}$), а затем относительно оси Ox, получим замкнутый многоугольник. Часть дискретной решётки $\mathbb{Z}^2$, ограниченная построенным многоугольником и является искомым множеством M.

Конец алгоритма 1.

Иллюстрация к алгоритму



Лемма 1

Рассмотрим на плоскости $\mathbb{R}^2$ декартову систему координат xOy и дискретную решётку $\mathbb{Z}^2$, порождённую этой системой координат. Пусть $A(\neq O)$ — произвольная целочисленная точка плоскости $\mathbb{Z}^2$; C — целочисленная точка, симметричная точке A относительно точки O; $\vec{l}(O,B)$ — перпендикуляр к прямой $l(O,A)$, построенный в полуплоскости $\angle AOC$, где $B(\neq O)$ — произвольная точка плоскости $\mathbb{R}^2$, лежащая на этом перпендикуляре. Тогда для любого действительного числа $r > 1$ каждое из множеств вида

$$(\angle AOB \setminus \vec{l}(O,A)) \cap B_{\mathbb{Z}}(O,r), \ (\angle AOB \setminus \vec{l}(O,B)) \cap B_{\mathbb{Z}}(O,r)$$

содержит хотя бы одну целочисленную точку.

Лемма 2

Угол $\angle G_k A_k A_{k-1}$, построенный на шаге II процедуры, принадлежит семейству $\mathfrak{M}(r)$.

Доказательство

Ясно, что выполнено равенство

$$(\angle X_k A_k G_k \setminus (\vec{l}(A_k, X_k) \cup \vec{l}(A_k, G_k))) \cap B_{\mathbb{Z}}(A_k, r') = \varnothing,$$

Положим

$$r'' = \frac{r}{\sin |\angle G_k A_k A_{k-1}|/2}.$$

Из пустоты пересечения угла $\angle X_k A_k G_k$ с дискретным кругом $B_{\mathbb{Z}}(A_k, r')$ и неравенства $r' \geqslant r''$ вытекает равенство:

$$\angle X_k A_k G_k \cap B_{\mathbb{Z}}(A_k, r'') = \varnothing.$$

Лемма 3

Пусть A_0Q — луч, построенный на шаге 1 алгоритма 1. Тогда после конечного числа итераций процедуры отрезок A_pA_{p+1}, построенный в результате очередной итерации p, будет лежать на луче, параллельном лучу A_0Q.

Доказательство

1) Покажем, что количество итераций p конечно. Очевидно, что на любой итерации i процедуры выполняется неравенство $\gamma_i \geqslant \varkappa$, т. к. целочисленные точки, определяющие приращение γ_i, всегда принадлежат кругу $B(A_i, r')$. Из ограниченности снизу величины приращения следует существование натурального числа p, при котором имеет место неравенство

$$\sum_{i=1}^{p} \gamma_i \geqslant \frac{\pi}{4}.$$

Теорема 1

Пусть $r(> \sqrt{2})$ — произвольное действительное число, тогда множество M, построенное алгоритмом 1, принадлежит семейству $\mathfrak{M}(r)$.

Алгоритм 2.

Вход: множество M^1, полученное на выходе алгоритма 1; $R(> 0)$ — фиксированное действительное число.

Выход: множество $M \in \mathfrak{M}(r, R)$.

Описание алгоритма.

1. **if** $B(O, R) \subset M^1$
   then множество M^1 — искомое, алгоритм завершён;
   else переходим к шагу 2.

Алгоритм 2

2. Положим $p = 1$. Пусть $A_1^p A_2^p \dots A_k^p$ — граница многоугольника M^p, причём $A_1^p = A_k^p$, и (x_i^p, y_i^p) — координаты точки A_i^p. Запускаем итерационный процесс:

$$i := 0;$$

while $i < k$ **do**

$$i := i + 1;$$

$$x_i^{p+1} = 2x_i^p;$$

$$y_i^{p+1} = 2y_i^p;$$

$A_i^{p+1} = (x_i^{p+1}, y_i^{p+1});$

end while.

Получаем многоугольник M^{p+1}, ограниченный ломаной $A_1^{p+1} A_2^{p+1} \dots A_k^{p+1}$.

Теорема 2

3. **if** $B(O,R) \subset M^{p+1}$
then множество M^{p+1} — искомое, алгоритм завершён;
else положим $p := p + 1$, переходим к шагу 2.

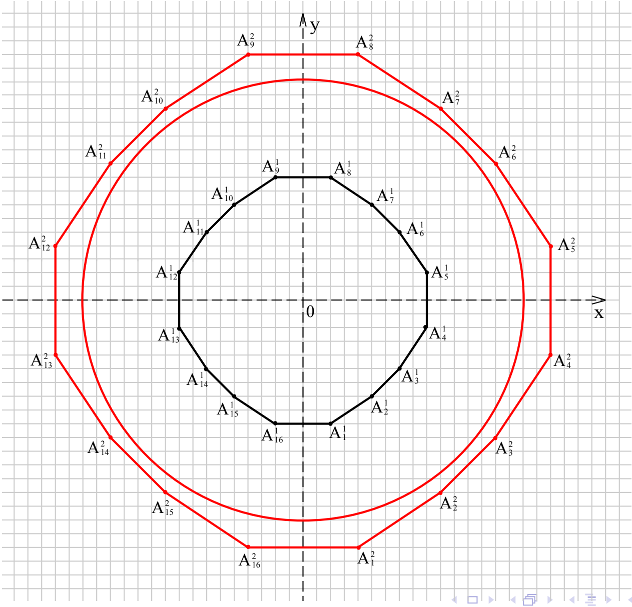
Конец алгоритма 2.

Из теоремы 2 и алгоритма 2 очевидным образом следует следующая теорема.

Теорема 2

Для любых действительных чисел $R > 0$ и $r > \sqrt{2}$ существует дискретное множество $M \in \mathfrak{M}(r, R)$.

Иллюстрация к алгоритму



Литература

Список литературы:

1. *Козак А. В.* Локальный принцип в теории проекционных методов. Докл. АН СССР, 1973, т. 212, № 6, с. 1287–1289.
2. *Козак А. В., Симоненко И. Б.* Проекционные методы решения многомерных дискретных уравнений в свёртках. Сибирский математический журнал, 1980, т. XXI, № 2, с. 119–127.