Теория формальных языков. Рубежный контроль №1

Вариант №11

Банников Арсений

Теоретическая информатика и компьютерные технологии
МГТУ им. Н.Э. Баумана
ноябрь 2023

Содержание

Задача 1

Язык всех завершающихся систем переписывания строк из одного правила. Алфавит: $\{f, g, \rightarrow\}$

Решение

Докажем нерегулярность при помощи отрицания леммы о накачке для регулярных языков. Рассмотрим слово $f^{n+1} \rightarrow f^n$, очевидно то что накачка не может содержать символ $\rightarrow$, так как при положительной накачке количество таких символов увеличивается, но оно должно оставаться равным одному. Следовательно накачку можно выбрать только либо слева, либо справа от $\rightarrow$. При выборе накачки из фрагмента справа положительная накачка выводит слово из языка, а при выборе накачки из левого фрагмента отрицательная накачка выводит слово из языка.

Примеры накачек:

$$f^{n_1} f^{i(n+1-n_1-n_2)} f^{n_2} \rightarrow f^n \tag{1}$$

В такой накачке $n + 1 - n_1 - n_2 \geq 1 \Rightarrow n_1 + n_2 < n + 1$. Следовательно при отрицательной накачке ($i = 0$) мы получим слово $f^{n_1+n_2} \rightarrow f^n$. Полученное слово не пренадлежит языку так как $n_1 + n_2 \leq n$.

$$f^{n+1} \rightarrow f^{n_1} f^{i(n-n_1-n_2)} f^{n_2} \tag{2}$$

Данное слово эквивалентно $f^{n+1} \rightarrow f^{i(n-n_1-n_2)+n_1+n_2}$. Так как длина накачки ненулевая, то $n - n_1 - n_2 \geq 1$. Взяв $i = n+1$ получим $(n+1)(n-n_1-n_2) \geq n \Rightarrow (n+1)(n-n_1-n_2)+n_1+n_2 \geq n$. А заначит полученное от положительной накачки слово не пренадлежит языку.

Мы рассмотрели все варианты накачки, а значит выбранное слово не накачивается, следовательно язык не регулярен.

Задача 2

Язык $\{a^{\frac{n}{\log_2 n}} b^n\}$

Решение

Заметим что область значений n не равна $\mathbb{N}$, так как например при $n = 8$ степень при a имеет нецелое значение. Найдем область допустимых значений n. Очевидно, что $n \in \mathbb{N} \cap \{x \mid \frac{x}{\log_2 x} \in \mathbb{N}\}$. Рассмотрим множество $\{x \mid \frac{x}{\log_2 x} \in \mathbb{N}\}$, в него входят только x такие, что $\log_2 x \in \mathbb{N}$. Для доказательства последнего утверждения допустим, что $\log_2 x \in \mathbb{R}$, возможны два случая: либо $\log_2 x \in \mathbb{I}$, либо $\log_2 x \in \mathbb{Q}$. Если $\log_2 x \in \mathbb{I}$, то $\frac{x}{\log_2 x} \in \mathbb{I}$, но такое невозможно в силу правила построения множества. Если $\log_2 x \in \mathbb{Q}$, то пусть $\log_2 x \notin \mathbb{N}$ что означает, что $\log_2 x = a + b, a \in \mathbb{N}, b \in (0; 1) \cap \mathbb{Q}$. Заметим что $x = 2^{\log_2 x} = 2^a 2^b$, но $2^a \in \mathbb{N}$, а $2^b \in \mathbb{I}$, из чего следует, что $2^a 2^b \in \mathbb{I}$, а значит и $x \in \mathbb{I}$, но так как $x \in \mathbb{N}$, получили противоречие. Следовательно $x = 2^p, p \in \mathbb{N}$.

Получаем, что множество $\{x \mid \frac{x}{\log_2 x} \in \mathbb{N}\}$ состоит из элементов вида $x = \frac{2^p}{p}, p \in \mathbb{N}$, следовательно $2^p = 0 \pmod p$. Это значит, что $p = 2^m, m \in \mathbb{N}$. Следовательно $n = 2^{2^m}, m \in \mathbb{N}$. Теперь заметим что при увеличении m количество символов a растет медленнее чем количество символов b (имеется в виду порядок роста). Но при накачке (если первый накачиваемый фрагмент состоит только из символов a, а второй только из символов b) рост количества букв у обеих частей линейный, следовательно в какой то момент нарушится отношение количества символов. Если же рассматривать вариант разбиения такой, что первый и второй фрагменты накачки состоят только из одинаковых букв, то очевидно что положительная накачка разрушает соотношение количества букв.

Итак, ниодно слово языка (при достаточно больших n) не накачивается, а значит язык не является КС

Задача 3

Грамматика

$$
\begin{align}
S &\to SbbabSbaaabS \tag{1}\\
S &\to SSbS \tag{2}\\
S &\to a \tag{3}
\end{align}
$$

Решение

Будем рассматривать только правила (2) и (3). Рассмотрим слово $a^{n+1}(ba)^n$. Оно получается раскрытием второго нетерминала по правилу (2), сентенциальные формы следующие:

$$
\begin{array}{l}
S\\
SSbS\\
SSSbSbS\\
SSSSbSbSbS\\
\ldots
\end{array}
$$

Заметим, что если раскрывать только по второму и третьему правилу то количество букв то для слова ω верно, что $|\omega|_a = 2m+1$ и $|\omega|_b = m$.

Рассмотрим пересечение данной граматики с регулярным языком $a^*(ba)^*$. Раскрытие по правилу (1) не лежит в пересечении из-за фрагмента $baaab$. Очевидно что мы должны выбирать такую накачку ω_2, что $|\omega_2|_a = 2m$ и $|\omega_2|_b = m$, но такой фрагмент может быть только на границе фрагментов звездочных групп. Мы очевидно мы не можем выбрать такой фрагмент, так как положительная накачка породит слово где справа от первой встретившейся b будет последовательность из a длиной хотя бы 2, что не соответствует пересекаемому регулярному языку. Следовательно исходный язык не регулярен.

Задача 4

Язык всех скобочных последовательностей, являющихся сдвигами слов из языка Дика (скобки только круглые).

Решение

Исходный язык можно переписать как $\{\omega \mid |\omega|_(= |\omega|_)\}$