Н. Н. Леонов

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СОЦИОЛОГИЯ
структурно-аппроксимационный подход

УДК 316:519.876.5

Рекомендовано к изданию Редакционно-издательской комиссией НАН Беларуси и Ученым советом Института социологии НАН Беларуси

Научные редакторы: академик, доктор философских наук, профессор *Е. М. Бабосов*; доктор физико-математических наук, профессор *Я. В. Радыно*

Рецензенты: доктор физико-математических наук, профессор *В. И. Берник*; доктор социологических наук, профессор *С. А. Шавель*

Леонов Н. Н.

Математическая социология: структурно-аппроксимационный подход. Научное издание. / Н. Н. Леонов. — Мн.: , 2003. — ??? с.

Книга посвящена изложению единого подхода к построению и анализу математических моделей, позволяющего проводить моделирование как в теоретических, так и в эмпирических исследованиях. Этот подход опирается на некоторую общую схему аппроксимаций в различных математических структурах. Особую роль играют определенные структуры иерархического типа. Приведены способы задания структур на совокупностях социальных объектов и различные способы аппроксимаций. Даны приложения к конкретным задачам социологического исследования. Книга предназначена как для социологов, интересующихся возможностями использования математических методов в своих исследованиях, так и для математиков, применяющих или желающих применять достижения своей науки в социологии.

УДК 316:519.876.5

Оглавление

Предисловие **4**

Введение **6**

1 Социальные пространства и моделирующие их математические структуры **9**

1.1 Социальные пространства 9

1.1.1 Два подхода к пониманию социального пространства 9

1.1.2 Социальные объекты как типы 10

1.1.3 Типы в эмпирических исследованиях 12

1.2 Порядковые структуры 13

1.3 Алгебраические структуры 15

1.3.1 Булевы алгебры 15

1.3.2 Идемпотентные структуры 16

1.4 Топологические структуры 16

1.4.1 Метрические пространства. Метрические социальные пространства 16

1.4.2 Неархимедовы метрические пространства. Неархимедовы социальные пространства 21

1.5 Структуры, связанные с мерой и вероятностью 38

1.6 Комбинированные структуры 39

1.6.1 Структуры, получающиеся сочетанием порядковых и топологических конструкций 39

1.6.2 Структуры с топологией и мерой (вероятностью) . 46

1.7 Выводы 78

2 Задачи аппроксимации **80**

2.1 Общая задача аппроксимации 80

2.2 Конечные приближения 81

2.2.1 Конечные представления социальных типов 81

2.2.2 Экстремальное определение средних значений . . 84

2.2.3 Обобщенные средние. Представительный рейтинг 85

2.2.4 Множественные представления 89

2.3 Задачи классификации 98
2.3.1 Общая задача классификации 98
2.3.2 Задачи классификации по векторному критерию и математические модели маргинальности 98
2.3.3 Классификация в метрических пространствах и социальная маргинальность 103
2.4 Описание зависимостей 106
2.4.1 Использование функций Хаара для приближений в неархимедовых пространствах 106
2.4.2 Использование нейронных сетей для решения задач исследования зависимостей 110
2.5 Выводы 117

3 Применение эволюционных (генетических) алгоритмов к построению и исследованию моделей 119
3.1 Выводы 120

4 Математические модели некоторых социальных явлений 121
4.1 Метод представительного рейтинга в анализе общественно-политической ситуации 121
4.2 Анализ электоральных групп методом метрических социальных геометрий 128
4.3 Выводы 131

5 О методике построения математических моделей в социологии 133
5.1 Общая характеристика структур на множествах 133
5.2 Способы задания структур на множествах социальных объектов 136
5.3 Аппроксимации структур как метод построения моделей . 140
5.4 Выводы 141

Дополнение. Некоторые сведения о задачах выбора 143

Литература 148

Resume 149

Предисловие

Поскольку термин "математическая социология" еще довольно нов, следует сказать несколько слов о его содержании. Хотя научная дисциплина с этим названием находится в стадии формирования, уже можно констатировать, что она представляет собой явление, аналогичное математической физике и математической экономике, а именно — математическая социология занимается построением, изучением и применением математических моделей в социологии, причем, следует подчеркнуть, математические модели здесь являются не только средством, но и объектом изучения.

Читатель вправе найти в предисловии ответы, по крайней мере, на два вопроса: зачем и для кого написана книга? Ответ на первый вопрос таков: чтобы изложить некоторый математический аппарат, позволяющий строить модели социальных процессов и явлений на основе единого методологического подхода, и показать возможные его применения. Ответ на второй — для социологов, которые интересуются возможностями использования математических моделей и методов в своих исследованиях, и математиков, интересующихся применением своей науки в гуманитарной области. Понятно, что социологов может интересовать как построение теоретических моделей, так и применение математики при проведении эмпирических исследований. Точно так же математиков могут интересовать используемые теоретические конструкции либо алгоритмическая сторона вопроса. Ориентация на столь разную читательскую аудиторию породила очевидные трудности, для преодоления которых, во-первых, математические понятия вводятся, как правило, с немедленной их иллюстрацией примерами из социологии. Во-вторых, отдельные вопросы излагаются неоднократно в разных местах книги в разном стиле; эта особенность позволяет также читателю обращаться к интересующим его главам в значительной мере независимо от остальных. Некоторые места книги содержат более сложные математические результаты, в основном принадлежащие автору и служащие базой для приложений. Читатель-социолог, однако, может пропустить этот материал без ущерба для понимания прикладных возможностей развиваемого подхода. Мы используем традиционную терминологию и обозначения. Конец рассуждения, доказательства и т. д. отмечаются знаком $\blacksquare$.

Идея написания этой книги принадлежит директору Института социологии Национальной академии наук Беларуси Г. М. Евелькину; на протяжении всей работы я ощущал его неизменное внимание и поддержку. В. В. Бущик предоставил в мое распоряжение данные проведенных под его руководством исследований и обсудил полученные результаты. Соображения по проблемам, которым посвящена книга, высказывавшиеся в разное время М. И. Артюхиным, Н. А. Барановским, Э. К. Дорошевичем, В. А. Клименко, О. В. Кобяком, Л. И. Науменко, В. П. Оргишем, В. И. Русецкой, В. И. Секуном, Р. А. Смирновой, Г. Н. Соколовой, В. Н. Тихоновым, были весьма полезны. Е. М. Бородачева, А. Н. Данилов, А. Д. Егоров, О. В. Терещенко ознакомились с материалом, вошедшим в книгу; я постарался учесть их суждения и конструктивную критику. Программную реализацию методов, вошедших в книгу, и расчеты на ЭВМ выполнили Н. Г. Лазарева, П. В. Палстюк и В. С. Студент. Большую помощь в организации работы над рукописью оказала Т. Д. Горбарук. Обязанности редакторов книги согласились взять на себя Е. М. Бабосов и Я. В. Радыно. Хочу отметить также, что именно Е. М. Бабосов привлек меня в свое время к работе в социологии, а многолетнее общение с Я. В. Радыно всегда было источником знаний, идей и вдохновения. В. И. Берник и С. А. Шавель далеко не формально отнеслись к рецензированию рукописи; их замечания существенно способствовали улучшению изложения. Всем названным лицам выражаю самую искреннюю признательность. Я благодарен также своей жене за помощь и долготерпение.

Введение

Мы будем рассматривать социальную действительность как совокупность объектов, между которыми имеются некоторые отношения. Наш подход близок к методологии П. Бурдье [11–13] в той ее части, которая называется *социальной топологией*. Прежде всего необходимо сказать несколько слов о терминологии. Дело в том, что здесь в очередной раз проявилось то обстоятельство, что в той или иной области науки (в данном случае — в математике) некоторые термины нередко означают не то, что они значат буквально и (или) не то, что в других областях науки и практики. П. Бурдье, по-видимому, исходил из латинского названия топологии *analysis situs*, что можно перевести как "анализ положений" или "анализ расположения и термин "социальная топология" у него является производным от термина "топология" именно в таком смысле. В современной же математике топология также занимается задачами взаимного расположения, но лишь определенным их классом. Тем содержательным проблемам, которые рассматривает П. Бурдье, в математике соответствуют, наряду с топологией, теория упорядоченных множеств, некоторые ветви функционального анализа и т. д. Это, к сожалению, не всеми было понято, что и привело к высказываниям вроде следующего: "... социальная топология — это такая система подмножеств множества всех явлений социального мира, что объединение и пересечение любого числа подмножеств будет принадлежать данной системе" [47]. Приведенная формулировка — не что иное, как попытка установить некий "изоморфизм" между социальной топологией П. Бурдье и топологией в узко-математическом смысле. На наш взгляд, "гомоморфным образом" социальной топологии следует считать теорию структур в смысле Н. Бурбаки, т. е. теорию множеств с заданными на них отношениями в наиболее общем виде. Это, в свою очередь, порождает вопрос о соотношении социальной топологии с теорией социальных систем, ибо трактовка общей теории систем как теории множеств некоторых объектов с отношениями между ними известна. Здесь мы придерживаемся позиции авторов [20, 49], которые считают, что система не сводится к совокупности ее элементов и связям между ними — это лишь одна из составляющих триады описания системы, куда входят также описание того, на какие составные части разложимы элементы системы и в какие целостные системы они могут включаться, и того, каким образом отдельные составные части системы включаются в родовидовые системы понятий. Авторы [49] полагают, что адекватным математическим аппаратом для общей теории систем является скорее теория категорий. Таким образом, используемый нами подход не претендует на звание "математической теории социальных систем" — наши цели скромнее, и тому есть следующие основания. Во-первых, попытки создать общую теорию систем к желаемой цели не привели и, как считает Э. М. Сороко, по существу перешли в иные направления исследований. Во-вторых, между математическими моделями, используемыми в теоретической и эмпирической социологии, наблюдается очевидный разрыв — рассуждения о социальной синергетике, фрактальных структурах в обществе и т. п. никак не подкрепляются эмпирическими исследованиями, где применяется существенно более скромная математика, причем между этими уровнями явно не хватает "переходов". Таким образом, ситуация в социологии принципиально отличается от ситуации в физике, где можно протянуть непрерывную цепочку от эксперимента через сложные уравнения до теории представлений групп, суперсимметрий и других весьма абстрактных теорий. Здесь уместно вспомнить, что российский академик А. А. Самарский рекомендовал использовать в различных науках опыт физики в части использования математики. В соответствии со сказанным выше мы стремимся построить систему моделей, которая могла бы быть использована на разных уровнях социологического исследования.

Теперь рассмотрим вопрос о том, как понимаются далее математическое моделирование и его цели. Не претендуя на глубокие методологические новации, скажем, что в известном смысле хорошая модель — это такое приближенное представление изучаемого явления, что соотношение степени упрощения, с одной стороны, и точности — с другой, — позволяют исследователю сформировать новый образ этого явления. В случае математической модели мы говорим о пространственно-количественном представлении (мы не считаем нужным, следуя моде, отказываться от данного Ф. Энгельсом определения математики как науки о пространственных формах и количественных отношениях). Исходя из этого, мы далее предполагаем, что имеется некоторая исходная сравнительно подробная модель, для которой строятся более простые модели, называемые аппроксимациями или приближениями данной, которые в свою очередь могут подвергаться той же процедуре, и так далее. При этом существенно, что шкала моделей — многомерная, т. е. упрощение может делаться в разных аспектах и даже со сменой типа моделирующей структуры. Очевидно, далее, что здесь мы касаемся информационного аспекта исследования, и, обратившись к нему, мы обнаруживаем некий, на первый взгляд, парадокс. С одной стороны, упрощенная модель несет меньше информации, нежели исходная, с другой — позволяет увидеть нечто, не обнаруживаемое прежде, что заставляет предположить, что в каком-то смысле исследователь получает больше информации. Разделение информации на полезную и "шум" здесь неуместно, так как при построении некоторой модели может отбрасываться информация, весьма полезная и даже необходимая для другой модели. Указанный парадокс объясняется тем, что при построении модели обязательно используется некоторая априорная информация (информация тут понимается в достаточно широком смысле) в форме либо накопленного знания, либо исследовательской гипотезы; в последнем случае модель, естественно, оказывается удачной, если удачна гипотеза. Как будет показано далее, строящиеся нами модели отражают и эту сторону дела. Мы будем говорить о социальных объектах, социальных единицах и так далее, понимая под ними, грубо говоря, все что угодно — индивидов, социальные группы, институты, связи и отношения между ними и так далее. Модели мы будем строить, отправляясь от множеств этих единиц, поэтому далее даже в более "социологических" частях книги в определенной мере используется теоретико-множественный и другой математический язык (впрочем, довольно простой), что, скажем, в математической физике или математической экономике давно стало нормой. Согласно соответствующей терминологической традиции, объекты, составляющие множество, называются его элементами или точками.

Глава 1

Социальные пространства и моделирующие их математические структуры

1.1. Социальные пространства

1.1.1. Два подхода к пониманию социального пространства

Как пишет В. Ильин [25], "Есть два подхода к пониманию социального пространства: субстанциалистский и структуралистский". Первый восходит к П. А. Сорокину [44,45], который мыслил социальное прстранство состоящим из социальных субстанций — идивидов, их групп и организаций. Второй связывают с именем П. Бурдье [13]. При этом подходе считается, что социальное пространство образовано отношениями и связями между индивидами, а сами индивиды играют лишь роль носителей этих отношений и связей и в явном виде не рассматриваются. Такое понимание более абстрактно, и не удивительно, что оно оказывается родственным другим теориям, использующим пространственные представления; здесь можно назвать теорию социальных полей К. Левина [30] и, как показал Е. М. Бабосов [7], некоторые касающиеся экономической системы общества конструкции П. Самуэльсона.

Мы развиваем подход, который позволяет строить математические модели, исходя из любого понимания социального пространства. Суть этого подхода в следующем. Рассмотрим некоторое множество (совокупность) индивидов (сразу же скажем, что с таким же успехом можно рассматривать множество социальных групп, институтов и т. д.). На этом множестве мы можем рассматривать различные структуры, например, порядок, расстояние и другие — более общее и полное изложение приведено ниже. Существенно, однако, что на множестве структур (порядков, расстояний и т. д.) в свою очередь можно вводить различные структуры.

Более того, можно вводить в одно рассмотрение множества как исходных субстанций, так и множества отношений на тех же или на других субстанциях. В силу этого мы будем далее говорить о социальных объектах, понимая этот термин в достаточно общем смысле, т. е. имея в виду субстанции, отношения между ними и прочее.

При этом мы используем для представления социальных пространств разнообразные пространственные математические конструкции. Здесь находят применение и собственно топологические понятия. Например, там, где существенную роль играет некоторый количественный показатель различия между социальными объектами, который можно трактовать как некоторое расстояние, мы используем одну из важнейших разновидностей топологического пространства, а именно — метрическое пространство. Если этот показатель различия отражает некоторую иерархию, используется весьма интересный и своеобразный случай метрического пространства, а именно так называемое неархимедово метрическое пространство. Если показатель различия носит многомерный или качественный характер, мы прибегаем к конструкциям обобщенного метрического и обобщенного неархимедова метрического пространства. Однако, как уже было отмечено во введении, одной топологии для наших целей недостаточно. Так, иногда приходится одновременно учитывать как наличие социального расстояния, так и некоторые "объемные" или вероятностные характеристики рассматриваемых объектов. Это приводит к использованию аппарата другой области математики — функционального анализа, а именно конструкции метрического пространства с мерой. Применимы в наших целях и пространственные соображения, связанные с порядковыми отношениями, т. е. отношениями типа "больше — меньше". Это особенно важно для рассмотрения проблем социальной стратификации.

Кроме того, пространственный язык широко используется в математическом аппарате, с помощью которой строятся и реализуются на ЭВМ модели социальных процессов. При этом пространство, возникающее как результат моделирования и которое строится в соответствии с целями исследования, может довольно сильно отличаться по характеру от исходного социального пространства, но отражать те его особенности, которые в данном случае важны для социолога.

1.1.2. Социальные объекты как типы

Предположим, что мы изучаем некоторую совокупность социальных объектов; не исключается, что эта совокупность состоит из одного объекта. В процессе изучения мы оперируем некоторым набором характеристик этих объектов. Возможно, опять-таки, что наборы этих характеристик — подчеркнем, самих характеристик, а не их значений — у разных объектов не полностью совпадают; тем не менее, полное несовпадение этих наборов вряд ли представляет практический интерес. Приведем сразу же пример. Предположим, что объектами изучения являются промышленные предприятия какого-то региона, а характеристиками — отрасль, общая численность работающих, численность управленческого персонала, выпускаемая продукция, годовой денежный оборот и так далее. Пусть также рассматривается такая характеристика, как текущая рыночная стоимость акций предприятия. Понятно, что такой характеристикой обладают не все предприятия, поскольку не все они выпускают акции. Предположим, что заданы некоторые условия (ограничения) на значения характеристик. Множество объектов из рассматрииваемой совокупности, которые удовлетворяют этим условиям, назовем *формальным типом* (слово "формальный" далее, как правило, будет опускаться). Так, типом является множество предприятий, у которых численность управленчекого персонала составляет более 10 % общей численности работающих. Отметим, что мы можем рассматривать как тип и индивидуальный объект. Для этого нужно указать значения определенных характеристик. Например, предприятие, расположенное в Минске и выпускающее автопоезда — это Минский автомобильный завод. Индивид однозначно определяется занчениями такого множества характеристик, как имя, фамилия, год рождения и адрес, либо вовсе значением одной характеристики — номера паспорта. Характеристики, используемые для задания типа, называются *типообразующими*. Их количество называется *размерностью* типа. Тип называется *простым*, если он описывается ограничениями на значения типообразующих характеристики по отдельности, т. е. его описание не содержит связей между значениями различных характеристик. В противном случае тип называется *сложным*. Например, предприятия, выпускающие продукты питания и имеющие не мнее 100 работающих, образуют простой тип, а приведенный выше пример типа с заданием соотношения между общей численностью работающих и численностью управленческого персонала — пример сложного типа. Выделим, наконец, такую разновидность простого типа, как *элементарный*. Это тип, для каждой типообразующей характеристики которого задается одно значение. Например, если в качестве одной из типообразующих характеристик политической партии взять год ее регистрации, то политические партии, зарегистрированные в 1998-м году, образуют элементарный тип, а зарегистрированные в последние пять лет — не образуют. Мы будем использовать еще такой термин, как *охватывающее* множество характеристик (или охватывающие характеристики). Это множество характеристик социальных объектов, используемых для описания рассматриваемых типов. Для каждого типа, однако, не все эти характеристики могут входить в число типообразующих. Например, если охватывающими характеристиками индивидов являются пол, регион проживания и образование, мы можем рассматривать такие типы, как "минчане с высшим образованием" (типообразующими являются вторая и третья характеристики) и "мужчины, живущие в Гомельской области" (первая и вторая характеристики). Число типообразующих характеристик назовем *размерностью* типа. Таким образом, только что приведены примеры двумерных типов.

1.1.3. Типы в эмпирических исследованиях

Теперь отдельно покажем, как применяется изложенный подход к анализу данных эмпирических социологических исследований; для простоты мы будем говорить о данных некоторого выборочного анкетного опроса. Все закрытые вопросы, т. е. такие, где респонденту предлагается множество (список) возможных ответов, мы считаем альтернативными, т. е. такими, где респондент должен выбрать один ответ из предложенных. Для включения в нашу схему неальтернативных вопросов (т. е. таких, где респондент может выбрать несколько вариантов ответа) существует, по крайней мере, два способа. Во-первых, таокй вопрос можно подвергнуть известной процедуре дихотомизации, т. е. заменить набором вопросов с ответами 0 и 1. Количество новых вопросов равно числу возможных ответов исходного вопроса. Если при ответе на исходный вопрос некоторый вариант ответа выбран, то значение соответствующего нового вопроса считается равным единице, в противном случае его полагают равным нулю. Второй способ — считать ответом весь набор (вектор) вариантов ответа с отметкой — выбран он или нет. Мы будем рассматривать также вопросы, в которых предполагается проранжировать (упорядочить) какие-либо объекты, скажем, некоторые ценности, и считать такие вопросы разновидностью альтернативных, ответами на которые являются ранжировки (упорядочения). Кроме того, рассматриваются открытые вопросы, ответы на которые представляют собой свободные тексты.

Покажем, как формулируются применительно к данным эмпирического исследования введенные выше понятия. Будем называть *типом* множество анкет, в которых ответы на определенные вопросы удовлетворяют некоторым заданным условиям. Примерами таких условий могут быть: ответ на вопрос "Пол" — "Мужской" и ответ на вопрос "Возраст" — "Не менее 30 лет"; ответ на вопрос "Место проживания" — "Город" и ответ на вопрос "Образование" — "Среднее" или "Высшее"; значение ответа на вопрос "Стаж на последнем месте работы (лет)" составляет не менее половины значения ответа на вопрос "Общий стаж (лет)". Как правило, мы предполагаем, что для проведения анализа выбирается некоторая группа вопросов, которые мы называем *охватывающими*, в терминах которых описываются типы. Для описания того или иного типа могут быть использованы не все охватывающие вопросы. Например, при охватывающих вопросах "Пол "Возраст "Образование" может рассматриваться тип "Мужчины со средним образованием". Вопросы, которые реально используются для описания типа, называются *типообразующими*, а их количество — *размерностью* типа. Так, в приведенном примере типообразующими являются вопросы "Пол" и "Образование а размерность типа равна двум. Выделим разновидность типов, которые задаются значениями ответа на каждый вопрос в отдельности без соотношений (связей) между ответами на различные вопросы. Такие типы мы назовем *простыми.* Например, тип "Женщины рабочие или пенсионерки" — простой, а "Мужчины со средним образованием и женщины с высшим" — нет, так как в его описании пол связан с образованием: у мужчин этого типа образование может быть только средним, а у женщин — только высшим. Выделим такую разновидность простого типа, как *элементарный* тип, задаваемый одним значением ответа на каждый типообразующий вопрос. Так, предыдущий простой тип — не элементарный, пример элементарного — "Пенсионеры, проживающие в деревне". Отметим, что всякий простой тип может быть получен как объединение элементарных. Далее мы будем оперировать в основном с типами и анкеты, совпадающие по ответам на типообразующие вопросы, будем считать неразличимыми (эквивалентными), даже если по каким-либо из остальных вопросам они различаются. Методологически такой подход оправдывается тем, что даже по полному набору вопросов анкеты ответы двух респондентов могут совпадать. Кроме того, далее будет показано, как учесть количество респондентов, "скрывающихся" за тем или иным типом.

1.2. Порядковые структуры

В социологии хорошо известны порядковые (ординальные) признаки или, как их еще называют, признаки, измеренные в порядковых шкалах. Это признаки, о значениях которых можно сказать лишь, какое из них больше (лучше, выше и т. д.), а какое — меньше (хуже, ниже). По традиции для отношения порядка мы употребляем термины "меньше — больше а не "хуже — лучше" или что-либо еще. Точное математическое определение отношения порядка таково [48]. Отношение $<$ (читается "меньше") называется отношением *строгого порядка*, если оно *антирефлексивно*, т. е. если $x < y$, то $x \neq y$, и *транзитивно*, т. е. если $x < y$ и $y < z$, то $x < z$. Запись $x \leqslant y$ (читается "не больше") означает, что либо $x < y$, либо $x = y$. Можно пойти несколько иным путем. Будем говорить, что отношение $\leqslant$ является отношением *нестрогого порядка*, если оно *рефлексивно*, т. е. $x \leqslant x$, и транзитивно, т. е. если $x \leqslant y$ и $y \leqslant z$, то $x \leqslant z$. Отношение $<$ определяется естественным образом: $x < y$, если $x \leqslant y$ и $x \neq y$. Нетрудно убедиться, что как в случае, когда понятие строгого порядка является исходным, а понятие нестрогого порядка — производным от него, так и в противоположном случае, мы приходим к равносильным определеням. Поэтому далее мы будем говорить просто об отношении порядка; множество, на котором задано такое отношение, называется *упорядоченным.* Записи $y > x$ и $y \geqslant x$ равносильны $x < y$ и $x \leqslant y$ соответственно. Два элемента упорядоченного множества, из которых один не больше другого, называются *сравнимыми.* Если в упорядоченном множестве любые два элемента сравнимы, то оно называется *линейно* упорядоченным, а порядок на нем — линейным. В противном случае, т. е. при наличии *несравнимых* элементов, множество называется *частично* упорядоченным, а порядок — частичным. Приведем два источника возникновения частичных порядков (существуют, разумеется, и другие). Первый — это векторные величины. Начнем с простого примера. Предположим, что семья при выборе городского района для поселения руководствуется тремя критериями: расстояние до места работы главы семьи, уровень преступности и загазованность воздуха. Предположим, что есть два района, одинаково удаленные от места работы, но в одном меньше преступность, а в другом — загазованность. Какой выбрать? Можно сказать — смотря какова разница. Но что это значит? Как-то автор, читая лекцию студентам, привел такой пример. Некая девушка озабочена поисками жениха. Она любит богатых и высоких. Есть два претендента: один с доходом в 2000 долларов в месяц и ростом 185 см, другой — с доходом в 1000 долларов и ростом 190 см. Кого предпочесть? Один из слушателей (мужского пола) сказал: "Ну, за тысячу баксов на пять сантиметров можно и рукой махнуть". Я ответил, что это зависит от важности критериев для данного лица, и привел пример встретившегося мне брачного объявления женщины пенсионного возраста с весьма жесткими требованиями к росту предполагаемого избранника. Итак, формализуем сказанное. Рассмотрим множество векторов одинаковой размерности с числовыми компонентами (координатами). Рассмотрим два вектора $\overline{t} = (t_1, \ldots, t_n)$ и $\overline{s} = (s_1, \ldots, s_n)$. Равенство векторов понимается тривиальным образом: $\overline{t} = \overline{s}$, если $t_i = s_i$ для всех i. Роль нуля в пространстве таких векторов играет вектор со всеми нулевыми компонентами $\overline{0} = (0, \ldots, 0)$. Скажем, что вектор $\overline{t}$ меньше вектора $\overline{s}$ и будем писать $\overline{t} < \overline{s}$, если $t_i \leqslant s_i$ для всех i и, кроме того, существует хотя бы одно i_0 такое, что $t_{i_0} < s_{i_0}$, т. е. вектор $\overline{t}$ меньше вектора $\overline{s}$, если все компоненты вектора $\overline{t}$ не больше соответствующих компонент вектора $\overline{s}$, а хотя бы одна компонента — строго меньше. Отсюда следует, что векторы $\overline{t}$ и $\overline{s}$ несравнимы, если существуют два индекса i и j такие, что $t_i < s_i$ и $t_j > s_j$. Таким образаом, несравнимы, скажем, трехмерные векторы $\overline{t} = (1,\ 5,\ 3)$ и $\overline{s} = (6,\ 7,\ 2)$, так как $t_1 < s_1$, $t_2 < s_2$, но $t_3 > s_3$. Другой источник частичного порядка — шкалы со словесными значениями категорий. Предположим, речь идет о характеризации величины (размера). Ясно, что "маленький" меньше "большого". Но что меньше — "мизерный" или "ничтожный"? Что больше — "огромный" или "гигантский"? Таким образом, здесь также есть несравнимые значения и порядок является частичным.

Структуры порядка и линейного порядка дают пример струтур так называемой различной силы. В общем случае говорят, что структура A *строго сильнее* структуры B, если всякая структура типа A является структурой типа B, но существуют струтуры типа B, не относящиеся к типу A. В данном случае линейный порядок является более сильной структурой, т. е. всякий линейный порядок является порядком, но существуют порядки, не являющиеся линейными.

Выделим один вид порядка, который будет играть большую роль в дальнейшем. Назовем порядок на множестве *иерархическим*, если из того, что $x < y$ и $x < z$, следует, что x и y сравнимы, т. е. что либо $z < y$, либо $y < z$. Иерархический порядок назовем *древесным*, если в X существует наибольший элемент, т. е. такой, котрый больше любого другого. Более формально, элемент x_0 называется *наибольшим*, если для любого $x \neq x_0$ имеет место $x < x_0$.

1.3. Алгебраические структуры

1.3.1. Булевы алгебры

Булевой алгеброй называется множество X с двумя *бинарными*, т. е. совершаемыми над двумя элементами (*операндами*), операциями $\vee$, $\wedge$, которые иногда называют *булевым сложением* и *булевым умножением* соответственно, *унарной*, т. е. совершаемой над одним элементом, операцией C, которую называют *отрицанием* или *дополнением*, и двумя выделенными (отмеченными) элементами $\mathbf{0}$, $\mathbf{1}$, причем выполняются следующие условия (аксиомы).

1. $x \vee x = x, \qquad x \wedge x = x;$

2a. $x \vee y = y \vee x, \qquad x \wedge y = y \wedge x;$

3a. $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z,$

3b. $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z;$

4a. $x \wedge (x \vee y) = x,$

4b. $x \vee (x \wedge y) = x;$

5a. $x \wedge [y \vee (x \wedge z)] = (x \wedge y) \vee (x \wedge z),$

5b. $x \vee [y \wedge (x \vee z)] = (x \vee y) \wedge (x \vee z);$

6a. $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z),$

6b. $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z);$

7a. $x \wedge \mathbf{0} = \mathbf{0}, \qquad x \vee \mathbf{0} = x,$

7b. $x \wedge \mathbf{1} = x, \qquad x \vee \mathbf{1} = \mathbf{1};$

8. $x \vee \mathsf{C}x = \mathbf{1}, \qquad x \wedge \mathsf{C}x = \mathbf{0};$

9. $\mathsf{C}(\mathsf{C}x) = x;$

10a. $\mathsf{C}(x \vee y) = \mathsf{C}x \wedge \mathsf{C}y,$

10b. $\mathsf{C}(x \wedge y) = \mathsf{C}x \vee \mathsf{C}y.$

Структура булевой алгебры играет в социологических приложениях важную роль по двум причинам. Во-первых, булеву алгебру образуют всевозможные подмножества некоторого фиксированного множества. В качестве такого фиксированного множества могут выступать то или другое множество индивидов, социальных институтов какого либо вида, и так далее. Во-вторых, булеву алгебру образуют случайные события в рамках любой, опять же фиксированной, вероятностной схемы. Понятно, что это важно как для изучения социальных явлений, подверженных влиянию случая, а также в тех случаях, когда случайность порождается методом исследования — например, при использовании случайных выборок при проведении опросов.

1.3.2. Идемпотентные структуры

Теория этих структур был развита одним из крупнейших математиков современности российским академиком В. П. Масловым [37], его учениками и последователями. Идея их заключается в том, что в качестве алгебраических операций, аналогичных сложению и умножению, можно рассматривать. Например, оперции взятия максимума и минимума. Значение этого подхода для социологии обусловлена, в частности, тем, что оно позволяет рассматривать как частные случаи одной схемы анализа данных такие, казалось бы, разные методы, как факторный и кластерный анализ [24].

1.4. Топологические структуры

1.4.1. Метрические пространства. Метрические социальные пространства

Определение метрического пространства

В этой главе мы будем использовать, в сущности, одно исходное топологическое понятие, а именно понятие расстояния, или метрики. Оказывается, однако, что получающиеся при этом структуры достаточно богаты и предоставляют широкие возможности для математического моделирования социальных объектов. Пусть X — некоторое множество. Предположим, что паре точек (элементов) x, y этого множества сопоставлено некоторое неотрицательное число $d(x, y)$. Говорят, что d — *расстояние* или *метрика* на X [21, 27], если выполняются следующие условия (аксиомы).

1. $d(x, x) = 0$ и, наоборот, если $d(x, y) = 0$, то $x = y$.

Смысл этой аксиомы вполне прозрачен: расстояние от точки до самой себя равно нулю, а расстояние между двумя различными точками нулевым быть не может.

2. $d(x,y) = d(y,x)$.
Это свойство расстояния называют его симметричностью. Оно означает, что расстояние не зависит от направления, в котором оно измерялось — "от Москвы до Ленинграда" или "обратно до Москвы как пелось в некогда популярной песне "Ленинградский рок-н-ролл".

3. $d(x,y) \leqslant d(x,z) + d(z,y)$
для любых трех точек x, y, z. Это неравенство называют *неравенством треугольника.* В самом деле, если считать x, y, z вершинами треугольника, то $d(x,y)$ — расстояние между x и y — можно считать длиной стороны, соединяющей эти вершины. Аналогичное рассуждение применимо, естественно, к $d(x,z)$ и $d(z,y)$. Таким образом, неравенство треугольника выражает известный геометрический факт: длина стороны треугольника не больше суммы длин двух других сторон. В сущности, из этого факта выводится известное более общее утверждение: "кратчайший путь между точками есть прямая".

Пример 1.4.1

Множество всех подмножеств фиксированного конечного множества. Структура метрического пространства может быть задана на нем следующим образом. Пусть X — конечное множество, $\mathcal{X}$ — множество всех его подмножеств, $A, B \subset X$, т. е. $A, B \in \mathcal{X}$. *Симметрической разностью* множеств A и B называется множество элементов, которые принадлежат только одному из множеств A, B, т. е. либо принадлежат A, но не принадлежат B, либо наоборот. Симметрическая разность множеств A и B обозначается символом $A\Delta B$. Теперь определим расстояние между A и B формулой:

$$d(A,B) = \sum_{x \in A\Delta B} 1 \equiv |A\Delta B|,$$

т. е. расстояние между множествами — это суммарное количество элементов, входящих в первое из них и не входящих во второе либо, наоборот, входящих во второе множество и не входящих в первое. Введенное таким образом расстояние превращает множество всех подмножеств $\mathcal{X}$ в метрическое пространство. Эту конструкцию можно обобщить. Пусть v — строго положительная функция на X. Положим

$$d(A,B) = \sum_{x \in A\Delta B} v(x).$$

Очевидно, предыдущая формула соответствует случаю $v(x) \equiv 1$. Можно ввести нормированный вариант этого расстояния:

$$d(A,B) = \frac{\sum\limits_{x \in A\Delta B} v(x)}{\sum\limits_{x \in X} v(x)}.$$

Другой важный случай — когда на X задано распределение вероятностей p и $v(x) = p(x)$.

Пример 1.4.2

МНОЖЕСТВО ВСЕХ ПОДМНОЖЕСТВ МЕТРИЧЕСКОГО ПРОСТРАНСТВА С РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ ВЕРОЯТНОСТЕЙ. Пусть X — конечное множество, на котором заданы расстояние ρ и вероятность p; можно сказать, что (X, ρ, p) — конечное метрическое и конечное вероятностное пространство. Для любых подмножеств $A, B \subset X$ через $A \setminus B$ обозначим множество элементов из A, которые не являются элементами B. Разумеется, аналогичный смысл имеет выражение $B \setminus A$. Полагаем

$$d(A, B) = \sum_{x \in A \setminus B;\, y \in B \setminus A} \rho(x, y) p(x) p(y).$$

Это — также расстояние на $\mathcal{X}$. Для него опять-таки может быть введена нормировка.

Пример 1.4.3

МНОЖЕСТВО УПОРЯДОЧЕНИЙ (РАНЖИРОВОК) КОНЕЧНОГО МНОЖЕСТВА. Можно рассматривать только полные упорядочения, когда относительно любых двух элементов указывается, который из них "меньше" или "идет раньше". Другими словами, если мощность (количество элементов) множества равна n, то на каждом из n последовательных мест стоит один элемент. Можно рассматривать частичные упорядочения, когда относительно некоторых пар элементов нельзя сказать, который из них "меньше т. е. эти элементы несравнимы. В этом случае элементы как бы стоят на $m \leqslant n$ последовательных местах, и на одном месте может стоять более одного элемента, т. е. некоторое подмножество несравнимых между собой элементов. Расстоянием между двумя различными упорядочениями будем считать наименьшее число парных перестановок (т. е. перестановок двух элементов), с помощью которого из одного упорядочения можно получить другое. Это расстояние можно пронормировать, разделив на число всевозможных упорядочений (полных либо частичных) данного множества. К задаче определения расстояния между упорядочениями можно подойти несколько иначе. Пусть A — полное упорядочение конечного множества X (ранжировка на X). Положим $a(x, y) = 1$, $a(x, y) = -1$ и $a(x, y) = 0$, если соответственно $x \geqslant y$, $x \leqslant y$ и x, y несравнимы. Аналогично для упорядочения B введем функцию $b(x, y)$. Тогда между A и B можно ввести так называемое расстояние Кемени [26] по формуле:

$$d(A, B) = \frac{1}{2} \sum_{x, y \in X} |a(x, y) - b(x, y)|.$$

Можно показать, что расстояние Кемени с эквивалентно предыдущему, т. е. эти расстояния различаются не более чем на постоянный множитель (этим замечанием я обязан В. С. Студенту).

Метрические пространства в социологии

Приведем примеры расстояний, возникающих в социологии. Рассмотрим множество объектов с некоторым набором признаков. Пусть, скажем, это индивиды с признаками "пол "этническая принадлежность "род занятий "наличие дачного участка". Пусть общее число признаков равно n (в нашем примере $n = 4$). Назовем *элементарным типом с полным набором типообразующих признаков* (в этом параграфе для краткости просто *типом*) множество индивидов, у которых значение каждого из признаков равно одному и тому же определенному значению. Например, такой тип образуют женщины-белоруски, работающие на государственной службе и не имеющие дачного участка. В качестве расстояния между типами возьмем количество признаков, значения которых у этих типов не совпадают. Например, расстояние между типом, описанным выше, и типом "женщины-польки, работающие на государственной службе и имеющие дачный участок равно 2. Назовем такое расстояние *хэмминговым*. Если значение такого расстояния разделить на общее число признаков n, то его можно назвть *нормированным хэмминговым*. В данном примере оно равно $2 : 4 = 1/2$.

Пусть S — некоторое конечное множество (например, множество совершеннолетних граждан Республики Беларусь), а X — некоторое множество его подмножеств (например, множество некоторых социально-демографических групп). Пусть A и B — элементы множества X, т. е. подмножества S. Определим расстояние между A и B как число элементов, которые принадлежат только одному из множеств A и B, т. е. либо принадлежат A, но не принадлежат B, либо наоборот. Математическое множество таких элементов называется *симметрической разностью* A и B. Оно равно объединению множеств минус их пересечение. Таким образом, симметрическая разность непересекающихся множеств равна их объединению.

Введем расстояние между множествами ответов на вопрос. Если это обычный альтернативный вопрос, например, "Образование" с множеством возможных ответов, состоящим из пяти вариантов: "Начальное и без образования "Базовое (неполное среднее) "Общее среднее "Среднее специальное "Высшее и незаконченное высшее то расстояние определяется одним из трех способов. Самое простое — дискретное расстояние, равное нулю, если множества совпадают (т. е. состоят в точности из одних и тех же вариантов ответа), и единице в противном случае. При втором способе расстояние определяется как суммарное число вариантов, входящих в первое множество и не входящих во второе, и вариантов, входящих во второе множество и не входящих в первое. Третье расстояние отличается от второго нормировкой к общему возможному числу вариантов ответа. Например, пусть первое множество ответов есть "Начальное и без образования "Базовое (неполное среднее)" и "Общее среднее а второе — "Общее среднее "Среднее специальное "Высшее и незаконченное высшее". Первое расстояние между ними, очевидно, равно единице, ибо они не совпадают. Значение второго расстояния между этими множествами ответов равно 4, ибо ответы "Начальное и без образования" и "Базовое (неполное среднее)" входят в первое множество и не входят во второе, а ответы "Среднее специальное "Высшее и незаконченное высшее" — наоборот, входят во второе и не входят в первое. Наконец, третье расстояние равно $4 : 5 = 0,8$. Всюду в этих схемах количество вариантов в том или ином множестве вариантов ответа можно заменить суммарным весом этих вариантов. Расстояние между ответами на вопрос типа упорядочения вводится по одному из правил, описанных в примере 1.4.3. Напомним, что первое и содержательно самое простое из них определяется как минимальное число парных перестановок (т. е. перестановок двух объектов), с помощью которых из одного упорядочения можно получить другое. Пусть, скажем, респонденту предлагается упорядочить по важности для него следующие ценности: интересная работа, хорошая семья, материальный достаток, крепкое здоровье. Тогда первое расстояние между упорядочениями "1) интересная работа, 2) хорошая семья, 3) материальный достаток, 4) крепкое здоровье" и "1) хорошая семья, 2) интересная работа, 3) крепкое здоровье, 4) материальный достаток" равно 2, ибо одно из этих упорядочений может быть получено из другого двумя парными перестановками и не может быть получено меньшим числом перестановок. Расстояние между двумя ответами на открытый вопрос введем по правилу примера 1.4.1, т. е. положим его равным суммарному количеству слов, входящих в один из ответов и не входящих в другой. Это расстояние также можно пронормировать к максимально возможному количеству слов в ответе, которое можно оценить, исходя из практических соображений. Можно учесть синонимию слов, т. е. считать синонимы одним словом. Надо признать, что подход к тексту просто как к множеству слов, без учета их порядка и тем более смысла текста (в частности, без учета омонимии), достаточно примитивен, тем не менее, проведенные эксперименты показали, что он может быть использован как средство анализа.

Пример 1.4.4

Рассмотрим множество всевозможных типов для данного множества охватывающих вопросов. Расстояние между двумя типами определяется как суммарный вес анкет, относящихся лишь к одному из этих типов (т. е. либо только к первому, либо только ко второму).

Пример 1.4.5

Рассмотрим множество простых типов. Разумеется, на нем можно рассматривать расстояние из предыдущего примера. Возможны, однако, специальные способы. Введем расстояние, рассматривая тип как функцию, аргументом которой является охватывающий вопрос, а значением на вопросе — некоторое подмножество вариантов ответа на этот вопрос. Далее один из способов введения расстояния изложим на примере. Пусть охватывающая группа состоит из четырех вопросов: "Пол" с вариантами ответа "Мужской" и "Женский"; "Возраст" со значениями 18, 19,. . . ,100; "Образование" с вариантами ответа "Начальное и без образования "Базовое (неполное среднее) "Общее среднее "Среднее специальное "Высшее и незаконченное высшее"; "Место жительства" с вариантами ответа "Город" и "Село". Пусть один из типов описывается множествами значений ответов "Женский "До 50 лет включительно "Высшее "Город а в другой — "Мужской "Старше 40 лет "Высшее". По вопросу "Пол" каждый из вариантов ответа "Мужской" и "Женский" входит в описание одного типа и не входит в описание другого. Следовательно, суммарное число вариантов ответа, входящих в описание одного из типов и не входящих в описание другого, равно двум. Общее число вариантов ответа также равно двум. Нормируя, получаем, что вклад вопроса "Пол" в предварительное (не нормированное к числу вопросов) расстояние равно 1. По вопросу "Возраст" варианты значений ответа, входящие в описание только первого типа, суть 18,. . . ,40 общим числом 23, а входящие в описание только второго типа — 51,52,. . . общим числом $100 - 50 = 50$, что в сумме дает $23 + 50 = 73$. Полное число возможных значений ответа на этот вопрос равно $100 - 17 = 83$. Нормируя, получаем, что вклад вопроса "Возраст" в расстояние равен $73 : 83 = 0,88$. По вопросу "Образование" описания типов совпадают. Следовательно, вклада в расстояние этот вопрос не вносит. Наконец, значения ответов на вопрос "Место жительства" входят в описания только первого типа, причем такое значение одно. Нормируя к общему числу возможных ответов на вопрос, равному двум, получаем, что вклад этого вопроса равен $0,5$. Предварительное значение расстояния есть $1+0,88+0,5 = 2,38$. Нормируя к числу охватывающих вопросов, получаем окончательное значение расстояния $2,38 : 4 = 0,595$.

1.4.2. Неархимедовы метрические пространства. Неархимедовы социальные пространства

Определение неархимедова метрического пространства

Неархимедово метрическое (или *ультраметрическое*) пространство [17, 21] определяется аналогично метрическому с единственным отличием: неравенство треугольника

3. $d(x, y) \leqslant d(x, z) + d(z, y)$

заменяется так называемым *ультраметрическим* неравенством:

$3'$. $d(x,y) \leqslant \max[d(x,z), d(z,y)]$.

Здесь и далее $\max(a,b)$ означает максимум (наибольшее из) чисел a и b. Поскольку, очевидно, максимум двух чисел не больше их суммы, то ультраметрическое неравенство представляет собой более сильное (жесткое) условие, чем неравенство треугольника. Следовательно, неархимедово метрическое пространство является частным случаем метрического. С другой стороны, очевидно, что существуют метрические пространства, не являющиеся неархимедовыми — например, прямая, плоскость, трехмерное пространство с обычным (евклидовым) расстоянием. Таким образом, структура неархимедова метрического пространства строго сильнее структуры метрического пространства. Расстояние в нархимедовом метрическом пространстве называется неархимедовым расстоянием, неархимедовой метрикой, ультрарасстоянием, ультраметрикой. Заметим, что термин "неархимедово расстояние" не вполне удачен в следующем смысле. Неархимедово расстояние является частным случаем "просто" расстояния, оно удовлетворяет некоторому дополнительному условию, и было бы естественно, чтобы такое расстояние характеризовалось дополнительным "положительным" термином. При существующей же терминологии такое естественное словосочетание, как "архимедово расстояние означает расстояние, не являющееся неархимедовым, т. е. расстояние, для которого существует по крайней мере одна тройка точек x, y, z, для которой не выполняется ультраметрическое неравенство $3'$. Тем не менее, эта исторически сложившаяся терминология уже устоялась, и мы будем ее придерживаться.

Таким образом, треугольник в неархимедовом метрическом пространстве обладает таким свойством: любая сторона не больше наибольшей из двух остальных или, что равносильно, не больше хотя бы одной из двух остальных. Отсюда нетрудно прийти к окончательному выводу: все треугольники в неархимедовом метрическом пространстве либо равносторонние, либо равнобедренные, но такие, у которых основание меньше боковых сторон, треугольники же разносторонние либо равнобедренные, у которых основание больше боковых сторон, невозможны. Эта неархимедова геометрия настолько экзотична, что возникает вопрос — а существуют ли неархимедовы метрические пространства? Ответ на этот вопрос утвердителен. Во-первых, в качестве такого пространства можно взять множество из трех точек с расстояниями между ними, порождающими треугольник "допустимого" вида, например,

$$X = \{a,\, b,\, c\}, \qquad d(a,b) = d(a,c) = 4, \qquad d(b,c) = 2.$$

Пример 1.4.6

Далее описана "неархимедова" модификация расстояния, приведенного выше. Пусть X — конечное множество, $\mathcal{X}$ — множество всех его подмножеств, v — строго положительная функция на X, $A, B \subset X$. Определим расстояние между A и B формулой:

$$d(A,B) = \begin{cases} 1, & \text{если } A = B, \\ \max[\mu(A), \mu(B)], & \text{если } A \neq B. \end{cases}$$

Таким образом, расстояние между множествами — это максимальное из взвешенных количеств элементов, входящих в первое и во второе множество. Повторим, что самые простые примеры функции v — это $v(x) \equiv 1$ и $v(x) \equiv 1/|X|$, где $|X|$ — количество элементов (мощность) множества X, причем второе из этих двух расстояний является нормированным вариантом первого, а одним из важнейших является случай $v(x) = p(x)$, где $p(x)$ — вероятность значения x.

К анализу данных эмпирических социологических исследований эта конструкция может быть применена следующим образом. Возьмем два различных типа и для каждого из них найдем суммарное количество или суммарный процент (при использовании перевзвешивания — соответственно суммарное взвешенное количество или суммарный взвешенный процент) входящих в него анкет. В качестве расстояния возьмем наибольшее из эти двух чисел.

Более сложные примеры неархимедовых пространств, вохникающих в социологии, приводятся далее.

Неархимедовы пространства в социологии

Рассмотрим введенное выше множество типов индивидов, определяемых четырьмя признаками — "пол "этническая принадлежность "род занятий" и "наличие дачного участка причем считаем признаки упорядоченными так, как они здесь перечислены. Положим, что расстояние между типами равно 1, если они различаются по первому признаку, 1/2 — если совпадают по первому признаку и различаются по второму. При этом совершенно не важно совпадение или различие по последующим признакам! Подобным образом расстояние равно 1/3, если совпадают значения первого и второго признаков и различаются значения третьего независимо от значения четвертого и, наконец, расстояние равно 1/4, если типы различаются лишь по четвертому признаку. Можно показать, что это расстояние — неархимедово. Покажем, что оно порождает другую конфигурацию, нежели рассмотренное выше нормированное хэммингово. В дополнение к определенным выше типам, которые мы для краткости назовем типами 1 и 2, рассмотрим еще тип 3: мужчины-белорусы, предприниматели, не имеющие дачного участка. Нормированное хэммингово расстояние между типами 1 и 3 равно 1/2 (несовпадение по двум признакам), а между типами 2 и 3 оно равно 1 (несовпадение по всем признакам). Что же касается бэровского расстояния, то между типами 1 и 2 оно равно 1/2 (расхождение во втором признаке), а между 1 и 3, так же как между 2 и 3, оно равно 1 (расхождение в первом признаке). Таким образом, введенное расстояние отражает некоторую иерархию признаков, которую можно понимать как их относительную важность. Здесь может возникнуть естественный вопрос: а нельзя ли учесть эту иерархию каким-либо иным образом, например, не просто вычислять количество несовпадающих признаков, как это делается в нормированном хэмминговом расстоянии, а присвоить каждому признаку вес и суммировать веса несовпадающих признаков? Разумеется, это возможно и вполне резонно. Можно показать, однако, что в точности такой геометрии, как при бэровском расстоянии, мы не получим. Кроме того, использование неархимедовых метрических расстояний доставляет существенные удобства, о которых впоследствии будет сказано.

В дальнейшем мы будем использовать понятие *иерархии множеств*. Приведем пример, который будет использоваться и в дальнейшем. Рассматривается сельское население нашей страны, Разделим его по областям, далее — по районам, сельсоветам и деревням. Избегая излишних подробностей, не будем выделять поселки сельского типа и т. п. Будем также для краткости население области (района и т. д.) называть просто областью (районом и т. д.). Таким образом, все население делится на области, области — на районы, те — на сельсоветы, далее — на деревни и, наконец, деревни делятся на отдельные элементы, т. е. индивиды. Вся страна, области, районы, сельсоветы, деревни и одноэлементные множества (т. е. состоящие из одного индивида) образуют иерархию множеств, причем вся страна называется множеством нулевого уровня, области — множествами первого уровня, районы — второго, и так далее. В общем случае иерархия строится в принципе так же — все множество берется за множество, принадлежащее иерархии и имеющее нулевой уровень, оно делится на множества первого уровня и так далее. Теперь заметим, что множества из иерархии обладают следующим свойством: если множества A, B, C являются "членами" иерархии и A принадлежит как B, так и C, то либо B принадлежит C, либо наоборот. Например, если сельсовет A принадлежит некоторому району B и области C, то район B принадлежит области C, а не какой-то другой. Таким образом, если принадлежность множеств трактовать как подчиненность, то можно сказать, что у одного "подчиненного" не может быть двух независимых "начальников т. е. один из них непременно подчинен другому. Это свойство можно выразить в следующей равносильной более простой, хотя, возможно, и менее наглядной, форме: два множества, принадлежащие иерархии, либо не пересекаются (т. е. не имеют общих точек), либо одно из них принадлежит другому. Это свойство является характеристическим для иерархий, состоящих из конечного числа множеств. Оно позволяет выделить уровни иерархии, где каждое множество более высокого уровня (т. е. с меньшим номером) разбивается на множества более низкого уровня. Это разделение на уровни, как можно показать, является единственным, т. е. полностью определяется набором множеств, составляющих иерархию. В случае иерархии, состоящей из бесконечного числа множеств, появляются некоторые сложности, например, не всегда оказывается целесообразным определять наивысший уровень, но эти сложности носят скорее технический, нежели принципиальный, характер.

А теперь рассмотрим иерархии на весьма важном для нас множестве элементарных типов, определяемых набором признаков. Пусть, скажем, типы образуются индивидами с признаками "пол "этническая принадлежность "род занятий" и "наличие дачного участка". Упорядочим эти признаки каким-либо образом — скажем, по важности для целей исследования. Мы будем считать, что признаки упорядочены так, как они здесь перечислены. Множество всех типов (слово "элементарный" в этом параграфе для краткости опускается) считаем множеством нулевого уровня. Множеств первого уровня у нас будет два — для которых значение признака "пол" есть "мужской" или "женский" соответственно. Далее, каждое множество первого уровня делится на множества второго уровня по признаку "этническая принадлежность". Так, множествами второго уровня будут женщины-белоруски, мужчины-поляки и так далее. Подчеркнем, что сами по себе множества белорусов, поляков, русских (точнее, типов с соответствующими значениями признака "этническая принадлежность") в иерархию не входят! Продолжая процесс, на последнем, четвертом, уровне получаем множества, состоящие каждое из одного типа, например, "мужчины, русские, предприниматели, имеющие дачный участок". Эта конструкция является весьма общей и, как можно показать, при достаточно широких предположениях любую иерархию можно представить в таком виде; скажем, в предыдущем примере это можно сделать с помощью признаков "область "район "сельсовет "деревня "номер паспорта или свидетельства о рождении отдельного жителя". Разумеется, иерархия не обязана содержать типы со всевозможными сочетаниями значений признаков. Так, в первом примере невозможны сочетания значения признака "область" — "Минская" и "район" — "Горецкий а во втором, скорее всего, реально отсутствует тип со значениями соответствующих признаков "грузин" и "колхозник" (напомним, речь идет о Республике Беларусь).

Обратимся к описанным выше иерархиям типов по значениям признаков. Тогда введенное неархимедово расстояние можно описать следующим образом. Присвоим каждому уровню иерархии числовую положительную метку, причем более низкому уровню присваивается меньшая метка. В нашем случае это метки 1, 1/2, 1/3, 1/4. Тогда расстоянием между типами является метка наивысшего уровня, на котором типы расходятся, т. е. принадлежат разным иерархическим множествам этого уровня.

Некоторые результаты теории иерархических и неархимедовых метрических пространств

Далее мы иногда повторяем некоторые из введенных выше понятий в более строгих формулировках. В рассмотренных выше примерах неархимедовы расстояния вводились через иерархии признаков или множеств. Нетрудно заметить, что эти способы равносильны. В самом деле, если мы исходим из иерархии признаков, то каждое множество первого уровня иерархии — это множество, образованное элементами, у которых значение первого признака одно и то же, второго уровня — у которрых совпадают значения первого уровня иерархии, и так далее. Наоборот, если имеется иерархия множеств, то можно ввести упорядоченную систему признаков, где значение первого (соответственно второго и так далее) признака элемента — это "имя" множества первого (второго и так далее) уровня, которому этот элемент принадлежит. Оказывается, так может быть задано любое неархимедово расстояние. Чтобы показать это, введем некоторые понятия, которые понадобятся и для других целей. Пусть на некотором множестве X задано расстояние d (пока не обязательно неархимедово), т. е. пусть задано метрическое пространство (X, d). Пусть x — некоторая точка в этом пространстве, r — положительное число. *Замкнутым шаром* радиуса r с центром в точке x называется множество точек, расстояние от каждой из которых до x не больше r. Этот замкнутый шар обозначается $B[x, r]$. Таким образом,

$$B[x, r] = \{y \in X \mid d(y, x) \leqslant r\}.$$

Открытым шаром $B(x, r)$ радиуса r с центром в точке x называется множество точек, расположенных от x на расстоянии, строго меньшем r:

$$B[x, r] = \{y \in X \mid d(y, x) < r\}.$$

Наконец, *сфера* радиуса r с центром в x — это множество $S(x, r)$ точек, удаленных от x на расстояние r:

$$S[x, r] = \{y \in X \mid d(y, x) = r\}.$$

Таким образом, замкнутый шар является объединением открытого шара и сферы с теми же центром и радиусом. Эти понятия естественно обобщают понятия шара и сферы в трехмерном пространстве и, соответственно, круга и окружности на плоскости, однако в общем случае могут иметь место эффекты, неожиданные с точки зрения обычной геометрической интуиции. Например, сфера может отсутствовать или, говоря математическим языком, представлять собой пустое множество. Рассмотрим, например, множество целых чисел с обычным расстоянием между ними, равным абсолютной величине разности. Тогда сфера с центром 10 и радиусом 1,5 — пустое множество, ибо нет целых чисел, расположенных от 10 на расстоянии 1,5. В таком случае, как это следует из сказанного выше о соотношении замкнутого шара, открытого шара и сферы, открытый шар совпадает с замкнутым. Открытый (и замкнутый) шар радиуса 1,5 с центром 10 состоит из точек (чисел) 9, 10, 11. А теперь пусть имеется некоторое неархимедово метрическое пространство. Мы уже отмечали одну интересную особенность таких пространств: в них возможны треугольники либо равносторонние, либо равнобедренные с основанием, меньшим боковых сторон. Оказывается, шары в неархимедовом метрическом пространстве обладают следующим свойством: любые два шара (безразлично — открытые или замкнутые) либо не пересекаются (т. е. не имеют общих точек), либо один из них принадлежит другому.

Более точно, известен следующий результат [17].

Теорема 1.4.7 *Пусть* (X, d) *— неархимедово метрическое пространство и* $B_1, B_2 \subset X$ *— шары (замкнутые или открытые). Тогда либо* B_1, B_2 *не пересекаются, либо один из них принадлежит другому.*

Таким образом, множество всех шаров неархимедова метрического пространства образует иерархию! Если мы рассмотрим множество только открытых (либо только замкнутых) шаров, то оно также образует иерархию. Можно показать, что иерархические пространства с числовыми метками уровней, убывающими при снижении уровня, и неархимедовы метрические пространства суть одно и то же — с точностью до некоторых условий технического характера. Свойство шаров в неархимедовом метрическом пространстве при пересечении поглощать друг друга можно назвать "агрессивностью" или "хватательной наклонностью". Оно является характеристическим для неархимедовых метрических пространств, т. е. если в некотором метрическом пространстве всякие два шара либо не пересекаются, либо один из них принадлежит другому, то это пространство — неархимедово. Все сказанное о треугольниках и шарах переносится на обобщенные неархимедовы метрические пространства с линейно упорядоченным множеством значений расстояния. По-видимому, именно свойство "агрессивности" шаров делает неархимедовы метрические пространства удобным средством исследования.

Для целей дальнейшего изложения уточним понятие иерархии. Для любого множества X через $Exp(X)$ обозначим множество всех подмножеств X. Предположим, что X — множество и $\mathcal{H}$ — подмножество $Exp(X)$ такое, что выполняются следующие условия:

(H1) $X = \bigcup\limits_{A \in \mathcal{H}} A$.

(H2) Если $A_1, A_2 \in \mathcal{H}$ и $A_1 \bigcap A_2 \neq \varnothing$, тогда либо $A_1 \subset A_2$, либо $A_2 \subset A_1$.

(H3) Для любых $x, y \in X$ существует $A \in \mathcal{H}$ такое, что $x, y \in A$.

(H4) $\varnothing \notin \mathcal{H}$.

Мы говорим, что $\mathcal{H}$ — *иерархия* и $(X, \mathcal{H})$ — *иерархическое пространство.*

Пример 1.4.8

Для любого метрического пространства (X, d) через $\mathcal{BL}(X, d)$, $\mathcal{OBL}(X, d)$, $\mathcal{CBL}(X, d)$ обозначим множество всех шаров, всех открытых шаров и всех замкнутых шаров соответственно. Как уже говорилось, если (X, d) — неархимедово метрическое пространство, то $\mathcal{BL}(X, d)$, $\mathcal{OBL}(X, d)$, $\mathcal{CBL}(X, d)$ — иерархии на X.

Нам понадобятся следующие утверждения [17].

Теорема 1.4.9 *Каждый шар (замкнутый или открытый) в неархимедовом метрическом пространстве — как замнутое, так и открытое множество.*

Следствие 1.4.10 *Предположим, что (X, d) — компактное неархимедово метрическое пространство. Для любого $r > 0$ существует единственное конечное разбиение X, образуемое замкнутыми шарами с радиусом r.*

Обозначим это разбиение через S_0 и мощность этого разбиения (число шаров в нем) через ν_0. Далее, для шара $B[x, r]$ в некотором компактном неархимедовом метрическом пространстве через $S(B[x, r], s)$ или через $S(B[x, r], s)$ обозначим разбиение шара, образуемого шарами с радиусом s, $s \leqslant r$, и через $\nu(B[x, r], s)$ или через $\nu(x, r, s)$ — мощность этого разбиения. Если $\nu(x, r, s)$ одно и то же для всех шаров с радиусом r, мы опускаем x.

Пусть (X, d) — метрическое пространство. Если $x \in X$ и $A \subset X$, то

$$d(x, A) \triangleq \inf_{y \in A} d(x, y)$$

называется *расстоянием* между x и A. Говорят, что если $A_1, A_2 \subset X$ то

$$\delta\left(A_1, A_2\right) \triangleq \sup_{x \in A_1} d(x, A_2)$$

— *отклонение* A_1 от A_2. Через $BCNE(X, d)$ обозначим множество всех ограниченных замкнутых непустых подмножеств $\dot{X}$. Для $A_1, A_2 \in BCNE(X, d)$ *хаусдорфово расстояние* между A_1 и A_2 определяется равенством

$$d_H\left(A_1, A_2\right) \triangleq \max\left[\delta\left(A_1, A_2\right), \delta\left(A_2, A_1\right)\right].$$

Известно, что $(BCNE(X, d), d_H)$ — метрическое пространство.

Предложение 1.4.11 *Если (X, d) — неархимедово метрическое пространство, то $(BCNE(X, d), d_H)$ — также неархимедово метрическое пространство.*

Доказательство. Пусть $U, V, W \in BCNE(X,d)$, $d_H(V,W) \leqslant r$, $d_H(W,U) \leqslant r$. Зафиксируем некоторое произвольное $u \in U$, $v \in V$. Пусть $\epsilon > 0$. Тогда существует w_1, w_2 такое, что $d(u,w_1) < r+\varepsilon$, $d(w_2,v) < r+\varepsilon$. Из ультраметрического неравенства $d(u,v) < r+\varepsilon$. Так как ϵ произвольно, $d(u,v) \leqslant r$, откуда $\delta(U,V) \leqslant r$ и $\delta(U,V) \leqslant r$. Это завершает доказательство.

Теорема 1.4.12 *Предположим, что (X,d) — неархимедово метрическое пространство и $B[r_1], B[r_2] \subset X$, $B[r_1] \cap B[r_2] = \varnothing$. Тогда $d_H(B[r_1], B[r_2]) = d(x_1,x_2)$ для каждого $x_1 \in B[r_1]$, $x_2 \in B[r_2]$.*

Доказательство. Достаточно доказать, что если $x_1, x_1' \in B[r_1]$, $x_2, x_2' \in B[r_2]$, то $d(x_1,x_2) = d(x_1',x_2')$. Ясно, что $d(x_1,x_2), d(x_1,x_2') > \max(r_1,r_2)$. Следовательно, $d(x_1,x_2), d(x_1,x_2') > d(x_2,x_2')$, и из свойства треугольника в неархимедовом пространстве $d(x_1,x_2) = d(x_1,x_2')$. Подобным образом $d(x_1,x_2'), d(x_1',x_2') > d(x_1,x_1')$, откуда $d(x_1,x_2') = d(x_1',x_2')$. Следовательно, $d(x_1,x_2) = d(x_1',x_2')$.

Иерархическое пространство $(X,\mathcal{H})$ и иерархия $\mathcal{H}$ называются *хаусдорфовыми,* если для любых $x, y \in X$, $x \neq y$, существуют $A, B \in \mathcal{H}$ такие, что $A \bigcap B = \varnothing$, $x \in A$, $y \in B$. Пусть $(X,\mathcal{H})$ — иерархическое пространство. Обозначим

$$\mathcal{U}(\mathcal{H}) = \Bigg\{ \bigcup_{s\in S} A_s \mid (A_s)_{s\in S} \text{ — некоторое семейство множеств, } A_s \in \mathcal{H} \quad \forall s \in S \Bigg\}.$$

Примечание. Мы имеем в виду, что $(A_s)_{s\in\varnothing} = \varnothing$.

Теорема 1.4.13 *$(X,\mathcal{U}(\mathcal{H}))$ — топологическое пространство и $\mathcal{H}$ — база топологии $\mathcal{U}(\mathcal{H})$. Если $\mathcal{H}$ — хаусдорфово, то топология хаусдорфова.*

В силу хорошо известного факта ([51], 1.2.1) достаточно доказать следующие два утверждения.

1. Для любых $A_1, A_2 \in \mathcal{H}$ таких, что $A_1 \bigcap A_2 \neq \varnothing$ и каждого $x \in A_1 \bigcap A_2$ существует $A \in \mathcal{H}$ такое, что $x \in A \subset A_1 \bigcap A_2$.

2. Для каждого $x \in X$ существует $A \in \mathcal{H}$ такое, что $x \in A$ и либо $A_1 \subset A_2$, либо $A_2 \subset A_1$. Пусть $A_1 \subset A_2$. Тогда множество $A = A_1$. Второе утверждение следует из (H1).

Очевидно следующее

Предложение 1.4.14 *Каждое множество $A \in U(\mathcal{H})$ является как замкнутым, так и открытым.*

Пусть $(X, \mathcal{H})$ — иерархическое пространство. Для любого $x, y \in X$ обозначим $\mathcal{H}(x, y) \triangleq \{A \in \mathcal{H} \mid x, y \in A\}$.

Теорема 1.4.15 *Для любого $x, y, z \in X$ выполняется по меньшей мере одно из соотношений $\mathcal{H}(x, z) \subset \mathcal{H}(z, y)$, $\mathcal{H}(z, y) \subset \mathcal{H}(x, z)$.*

Доказательство. Предположим, что $\mathcal{H}(x, z) \not\subseteq \mathcal{H}(z, y)$. Тогда существует $A_{xz} \in \mathcal{H}(x, z)$ такое, что $A_{xz} \notin \mathcal{H}(z, y)$. Отсюда $y \notin A_{xz}$. Докажем, что $\mathcal{H}(z, y) \subset \mathcal{H}(x, z)$. Предположим противное. Тогда существует $A_{zy} \in \mathcal{H}(z, y)$ такое, что $A_{zy} \notin \mathcal{H}(x, z)$. Отсюда $x \notin A_{zy}$. Тогда $A_{xz} \not\subseteq A_{zy}$. Аналогично из $y \notin A_{xz}$следует, что $A_{zy} \not\subseteq A_{xz}$. Но $A_{xz} \cap A_{zy}$ содержит z и, следовательно, оно не пустое. Это противоречие доказывает теорему.

Обозначим $\mathcal{E} = Exp(\mathcal{H})$. Снабдим $\mathcal{E}$ отношением порядка $\prec$ следующим образом: мы говорим, что $\mathcal{A}_1 \prec \mathcal{A}_2$ если $\mathcal{A}_2 \subset \mathcal{A}_1$. Ясно, что $\mathcal{H}$ — наименьший элемент $\mathcal{E}$. Определим отображение $d\colon X^2 \to \mathcal{E}$ как $d(x, y) \triangleq \mathcal{H}(x, y)$.

Теорема 1.4.16 *Предположим, что $(X, \mathcal{H})$ — хаусдорфово иерархическое пространство. Тогда $(X, d, \mathcal{E})$ — обобщенное неархимедово метрическое пространство.*

Доказательство. Очевидно, что $d(x, y) = d(y, x)$. Из свойства хаусдорфовости следует, что $d(x, y) = \mathcal{H}$ тогда и только тогда, когда $x = y$. Докажем ультраметрическое неравенство. Пусть $x, y, z \in X$. Мы докажем, что выполняется по меньшей мере одно из соотношений $\mathcal{H}(x, z) \subset \mathcal{H}(x, y)$, $\mathcal{H}(z, y) \subset \mathcal{H}(x, y)$. В силу предыдущей теоремы каждые два из значений $\mathcal{H}(x, y)$, $\mathcal{H}(x, z)$, $\mathcal{H}(z, y)$ сравнимы. Достаточно рассмотреть случай $\mathcal{H}(x, y) \subset \mathcal{H}(x, z)$, $\mathcal{H}(x, y) \subset \mathcal{H}(z, y)$. Предположим для определенности, что $\mathcal{H}(x, y) \subset \mathcal{H}(x, z) \subset \mathcal{H}(z, y)$. Пусть $A \in \mathcal{H}(x, z)$, т. е. $x, z \in A$. Тогда из второго включения $A \in \mathcal{H}(z, y)$, т. е. $y \in A$. Отсюда $A \in \mathcal{H}(x, y)$. Следовательно, $\mathcal{H}(x, z) \subset \mathcal{H}(x, y)$. Таким образом, $\mathcal{H}(x, y) = \mathcal{H}(x, z) \subset \mathcal{H}(z, y)$, т. е. $\mathcal{H}(z, y) \prec \mathcal{H}(x, y) = \mathcal{H}(x, z)$. Отсюда сразу же следует усльтраметрическое неравенство.■

Частично упорядоченное множество называется *верхней полурешеткой*, если в нем для любых двух элементов существует верхняя грань. Допустим, что $(X, \mathcal{H})$ — иерархическое пространство, Λ — верхняя полурешетка с наименьшим элементом θ и $\phi\colon \mathcal{H} \to \Lambda$ — строго убывающее отображение такое, что для любого $\lambda \in \phi(\mathcal{H})$ выполняется

$$\bigcup_{A \in \phi^{-1}(\lambda)\mathcal{H}} A = X.$$

Тогда мы говорим, что $(X, \mathcal{H}, \Lambda, \phi)$ — *шкалированное* иерархическое пространство. Назовем $\phi(A)$ *уровнем* множества A. Если Λ — некоторое подмножество множества неотрицательных целых чисел с обычным отношением порядка, то скажем, что $(X,\mathcal{H},\Lambda,\phi)$ — *дискретно шкалированное* пространство. В последнем случае, если $\Lambda=\{0,1,2,\ldots$ или $\Lambda=\{1,2,\ldots$, а способ задания ϕ ясен из котекста, символы Λ,ϕ в обозначении дискретно шкалированного иерархического пространства иногда будут опускаться. Для каждого $\lambda\in\Lambda$ назовем $\phi^{-1}(\lambda)$ — *слоем* или λ-*слоем.* Из определения шкалированного иерархического пространства сразу же следует следующий результат.

Предложение 1.4.17 *Если* $(X,\mathcal{H},\Lambda,\phi)$ — *шкалированное пространство, то каждый слой является разбиением* X.

Если $(X,\mathcal{H},\Lambda,\phi)$ — шкалированное пространство, то мы обозначаем $\mathcal{H}_\lambda=\phi^{-1}(\lambda)$ для любого $\lambda\in\phi(\mathcal{H})$, $\Gamma(A)=\sup\{\lambda\,|A\in\mathcal{H}_\lambda\}$ для любого $A\in\mathcal{H}$, и для $x\in X$ $D_k(x)=A\in\mathcal{H}_k$ такое, что $x\in A$.

Мы говорим, что дискретно шкалированное иерархическое пространство $(X,\mathcal{H})$ *компактно,* если выполняются следующие условия:

(C1) Каждое $\mathcal{H}_k$ конечно.

(C2) Если $A_1\supset A_2\supset\ldots\in\mathcal{H}$, то $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}A_i\neq\varnothing$.

Далее мы используем символ $\sum$ для объединения непересекающихся множеств.

Предложение 1.4.18 *Если* $(X,\mathcal{H})$ — *дискретно шкалированное иерархическое пространство, то для любого* $A\in\mathcal{H}_k$ *и каждого* $l\geqslant k$ *семейство множеств* $\{B\in\mathcal{H}_l\,|B\bigcap A\neq\varnothing\}=\{B\in\mathcal{H}_l\,|B\subset A\}$ *является разбиением* A. *Представление* $A=\sum\limits_{s=S}B_s$, $B_s\in\mathcal{H}_l$, $s\in S$, *является единственным.*

Доказательство тривиально. ■

Пусть $(X,\mathcal{H})$ — иерархическое пространство и φ — вещественная функция, определенная на $\mathcal{H}$. Мы говорим, что φ — *калибровочная функция,* если выполняются следующие аксиомы.

(GF1) φ неотрицательна.

(GF2) φ строго монотонна, т. е. $A\supset B$, $A\neq B$, влечет $\varphi(A)>\varphi(B)$.

(GF3) Для каждого $x\in X$ и $\varepsilon>0$ существует $A\in\mathcal{H}$ такое, что $x\in A$, $\varphi(A)<\varepsilon$.

Примечание. Возможно заменить свойство строгой монотонности свойством монотонности и отказаться от (GF3) с сохранением части результатов, излагаемых ниже.

Предположим, что $(X,\mathcal{H})$ — хаусдорфово дискретно шкалированное иерархическое пространство. Введем обозначение:

$$D(x,y)=\{A\in\mathcal{H}_{\gamma(x,y)}\mid A\ni x,y\}.$$

Эта величина определяется корректно в силу свойства хаусдорфововости, (DS2) и (DS2). Далее, для любого $x, y \in X$ обозначим

$$\gamma\left(x,y\right)=\max\{k \mid \forall l\leqslant k \ \exists\ A_l\in\mathcal{H}_l:\ x,y\in A_l\},\ x,y\in X,$$

и для калибровочной функции φ положим

$$d_{\varphi}\left(x,y\right)=\begin{cases}0, & \text{если } x=y,\\ \varphi\left(D\left(x,y\right)\right), & \text{если } x\neq y.\end{cases} \tag{1.1}$$

Пусть $\mathbb{Z}^{+}$ — множество всех неотрицательных целых чисел. Предположим, что ψ — строго положительная строго убывающая функция на $\mathbb{Z}^{+}$. Мы говорим, что ψ — *функция длины*. Положим

$$d_{\psi}\left(x,y\right)=\begin{cases}0, & x=y,\\ \psi\left(\Gamma\left(x,y\right)\right), & x\neq y.\end{cases}$$

Функция d_{ψ} может быть представлена в виде (1.1) где $\varphi\left(A\right)=\psi\left(\Gamma\left(A\right)\right)$, $A\in\mathcal{H}$. Говорят, что функция $b\left(k\right)=\frac{1}{k+1}$, — *бэровская* функция длины.

Пусть (X,d) — метрическое пространство. Через $\mathcal{T}(d)$ обозначим топологию, индуцированную d и для $x\in X,\ r>0$ через $B[x,r]$ или $B_d[x,r]$ обозначим замкнутый шар с центром x и радиусом r.

Теорема 1.4.19 *Предположим, что $(X,\mathcal{H})$ — дискретно шкалированное иерархическое пространство и φ — калибровочная функция. Тогда*

(i) d_{φ} — неархимедово расстояние на X.

(ii) $\mathcal{CBL}\left(X,d_{\varphi}\right)=\mathcal{H}$ и $B_{d_{\varphi}}\left[x,r\right]=B_{d_{\varphi}}\left[x,\varphi\left(B\left[x,r\right]\right)\right]$ для любого $x\in X,\ \ r>0$.

(iii) $\mathcal{T}\left(d_{\varphi}\right)=\mathcal{U}\left(\mathcal{H}\right)$.

(iv) Топологическое пространство $(X,\mathcal{U}\left(\mathcal{H}\right))$ и неархимедово метрическое пространство (X,d_{φ}) компактны тогда и только тогда, когда $(X,\mathcal{H})$ компактно.

Доказательство. Аксиомы неархимедова метрического пространства $d_{\varphi}(x,y)\geqslant 0,\ d_{\varphi}(x,y)=d_{\varphi}(y,x)\ \forall x,y$, и $d_{\varphi}(x,x)=0$, очевидно, выполняются. Чтобы доказать, что $d_{\varphi}(x,y)>0$ для $x\neq y$,, отметим, что в силу хаусдорфова свойства существует k такое, что $D_k\left(x\right)=D_k\left(y\right)$, $D_{k+1}\left(x\right)\neq D_{k+1}\left(y\right)$ и, следовательно, $d_{\psi}\left(x,y\right)=\varphi\left(D_k\left(x\right)\right)>0$. Теперь докажем ультраметрическое неравенство. Пусть $x,y,z\in X$. Предположим, что $\gamma\left(x,z\right)\leqslant\gamma\left(x,y\right)$. Значит, $D_{\gamma(x,y)}(x)\subset D_{\gamma(x,z)}(x)$ в силу $D_{\gamma(x,y)}\cap D_{\gamma(x,z)}\supset\{x\}$. Таким образом, $\varphi\left(D\left(x,y\right)\right)\leqslant\varphi\left(D\left(x,z\right)\right)$. Пусть, наоборот, $\gamma\left(x,z\right)>\gamma\left(x,y\right)$. Тогда $z\in D_{\gamma(x,y)+1}(x)$. Но $D_{\gamma(x,y)+1}(x)\neq D_{\gamma(x,y)+1}(y)$. Следовательно, $z\notin D_{\gamma(x,y)+1}(x)$ и поэтому $\gamma\left(z,y\right)=\gamma\left(x,y\right)$. Таким образом, $d_{\psi}\left(x,y\right)=d_{\psi}\left(z,y\right)$. Ультраметрическое неравенство доказано.

Чтобы доказать (ii), зафиксируем $B_{d_\varphi}[x,r]$. Нетрудно показать, что для $x \neq y$

$$d_\psi(x,y) = \min\{\varphi(A)\,|A \in \mathcal{H} : x, y \in A\}.$$

Пусть

$$k_0 = \min\{k\,|\varphi(D_k(x)) \leqslant r\}.$$

Отметим, что k_0 определено корректно в силу (GF3). Мы имеем:

$$B_{d_\varphi}[x,r] = D_{k_0}(x) = B_{d_\varphi}[x, \varphi(D_{k_0}(x))] = \\ = B_{d_\varphi}[x, \varphi(B[x,r])].$$

Таким образом, $\mathcal{CBL}(X, d_\varphi) \subset \mathcal{H}$ и $B_{d_\varphi}[x,r] = B_{d_\varphi}[x, \varphi(B[x,r])]$. С другой стороны, пусть $A \in \mathcal{H}$. Выберем $x \in A$. Тогда $A = B_{d_\varphi}[x, \varphi(A)]$. Далее, отметим, что (iii) сразу же следует из (ii) и теоремы 1.4.13. Наконец, докажем (iv). Предположим, что $(X, \mathcal{H})$ компактно. В силу (iii) достаточно доказать, что (X, d_φ) компактно. Пусть $x_1, x_2, \ldots \in X$. Докажем, что существует сходящаяся подпоследовательность этой последовательности. Если существует k_0 такое, что $x_k = x_{k_0}$ для всех $k > k_0$, доказательства не требуется. В противном случае существует $A_1 \in \mathcal{H}_1$ содержащая бесконечное число членов (x_i). Далее, существует $A_2 \in \mathcal{H}_2$ такое, что $A_1 \supset A_2$ и A_2 содержит бесконечное число членов (x_i), и так далее. Согласно (C2) и свойству хаусдорфовости существует x^0 такое, что $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i = \left\{x^0\right\}$. Выберем $x_{i_k} \in \mathcal{H}_k$, $k = 1, 2, \ldots$ С учетом (GF3) $(x_{i_k})_{k=1}^{\infty}$ сходится к x^0. Теперь пусть $(X, \mathcal{U}(\mathcal{H}))$ и неархимедово метрическое пространство (X, d_φ) компактны. Ясно, что, (C1) выполняется, поскольку $\mathcal{H}_k$ — открытое покрытие X. Пусть $A_1 \supset A_2 \supset \ldots \in \mathcal{H}$. Каждое A_k является замкнутым множеством в (X, d_φ), так что в силу теоремы Кантора $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i \neq \varnothing$.

Рассмотрим тепрь, как устроено множество значений расстояния в неархимедовом метрическом пространстве, и связанный с этим вопрос об изометрических вложениях таких пространств. Нам потребуется следующее известное и просто доказывамое утверждение.

Лемма 1.4.20 *Пусть (X, d) — сепарабельное неархимедово метрическое пространство. Тогда для любого $r > 0$ существует и единственно разбиение X на шары радиуса r, состоящее из не более чем счетного числа шаров. Каждый шар радиуса r входит в это разбиение. Если (X, d) компактно, то разбиение конечно.*

Пусть (X, d) — неархимедово метрическое пространство и $Y \subset X$. Мы обозначим $D(Y) = \big\{d(x,y) \mid x, y \in Y,\, x \neq y\big\}$.

Для $T \subset \overline{\mathbb{R}}^+$ и $x, y \in T$ положим

$$d_M(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{если } x = y, \\ \max(x,y), & \text{если } x \neq y. \end{cases}$$

Очевидно, что (T, d_M) — неархимедово метрическое пространство и

$$D(T) = T. \tag{1.2}$$

Пусть $T \subset \mathbb{R}^+$, S — произвольное множество и a — некоторый фиксированный элемент S. Обозначим $H(T, S, a)$ множество функций из T в S, где для каждого $u \in H(T, S, a)$ существует t_u такое, что $u(t) = a$ если $t \geqslant t_u$. Мы введем метрику ρ на $H(T, S, a)$ следующим образом: для $u, v \in H(T, S, a)$ положим $\rho(u, u) = 0$ и $\rho(u, v) = \{s| \ u(t) = v(t) \quad \forall t > s\}$ если $u \neq v$. Известно [31], что $(H(T, S, a), \rho)$ — неархимедово метрическое пространство.

Теорема 1.4.21 *Пусть (X, d) — сепарабельное неархимедово метрическое пространство и Y — не более чем счетное подмножество X. Тогда $D(X) = D(Y)$ и, следовательно, $D(X)$ не более чем счетно. Для любого не более чем счетного множества $T \subset \mathbb{R}^+$ существует не более чем счетное (X, d) такое, что $D(X) = T$.*

Доказательство. Чтобы доказать первое утверждение, нам нужно показать, что для любого $z_1, z_2 \in X, z_1 \neq z_2$, существуют $y_1, y_2 \in Y$ такие, что $d(y_1, y_2) = d(z_1, z_2)$. Выберем $y_1, \ y_2 \in Y$ посредством условия $d(y_i, z_i) < d(x_1, x_2), \ \ i = 1, 2$. Рассмотрим точки x_1, x_2, y_1. Поскольку $d(y_1, x_1) < d(x_1, x_2)$,, то в силу свойства треугольников в неархимедовых пространствах $d(y_1, x_2) = d(x_1, x_2)$. Отсюда $d(y_2, x_2) < d(y_1, x_2)$, и, применяя то же свойство еще раз, получим $d(y_1, y_2) = d(y_1, x_2) = d(x_1, x_2)$. Чтобы доказать второе утверждение, достаточно рассмотреть неархимедово метрическое пространство (T, d_M) и применить 1.2.■

Теорема 1.4.22 *Предположим, что (X, d) — компактное неархимедово метрическое пространство. Если X конечно, то $D(X)$ также конечно. В противном случае $D(X) = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots\}$, где $\alpha_k \downarrow 0$, или, другими словами, 0 является единственной предельной точкой $D(X)$. Для любого множества $T \subset \mathbb{R}^+$ такого, что T имеет по меньшей мере одну предельную точку $\overline{\mathbb{R}}^+$, а именно 0, существует компактное неархимедово метрическое пространство (X, d) той же мощности, что и T, причем $D(X) = T$.*

Доказательство. Первое утверждение теоремы очевидно. Докажем второе. Пусть (x_i) — сходящаяся последовательность различных точек. Тогда $d(x_{i_k}, x_{i_{k+1}}) \downarrow 0$. Чтобы доказать, что $D(X)$ не имеет ненулевых предельных точек, предположим противное, а именно, пусть ε — предельная точка $D(X)$ и $\varepsilon > 0$. Тогда в силу компактности существуют сходящиеся последовательности $(x_n), (y_n)$ такие, что $d(x_n, y_n)$ строго монотонна и сходится к ε. Положим $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n, \ \ y = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$. Тогда $d(x, y) = \varepsilon$. Пусть n таково, что $d(x_n, x) < \varepsilon$, $d(y_n, y) < \varepsilon$. В соответствии со свойством треугольников, $d(x,y)=\varepsilon$ и $d(x_n,x)<\varepsilon$ влечет $d(x_n,y)=\varepsilon$; из этого равенства и неравенства $d(y_n,y)<\varepsilon$ следует, что $d(x_n,y_n)=\varepsilon$. Это противоречит строгой монотонности последовательности $(d(x_n,y_n))$. Второе утверждение теоремы доказано. Чтобы доказать третье, рассмотрим неархимедово метрическое пространство (T,d_M), которое, очевидно, компактно, и применим 1.2. Теорема доказана. Это усиливает некоторые результаты из [53].■

С другой стороны, никакое условие на $D(X)$ не обеспечивает компактности или сепарабельности (X,d).

Теорема 1.4.23 *Для любого множества $T\subset\mathbb{R}^+$ существует несепарабельное неархимедово метрическое пространство (X,d) такое, что $D(X)=T$.*

Доказательство. Пусть X — подпространство пространства $H(T,\overline{\mathbb{R}}^+,0)$, определяемое следующим условием: для каждой функции $x\in X$ существует $a_x\in\mathbb{R}^+$ и $t_x\in T$ такое, что

$$x(t)=\begin{cases}a_x, & \text{если } t\leqslant t_x,\\ 0, & \text{если } t\leqslant t_x.\end{cases}$$

Для произвольного $s\in T$ рассмотрим множество $X_s=\{x\in X\ |t_x=s\}$. Это множество имеет мощность континуума. С другой стороны, если $x,y\in X_s$ и $x\neq y$, то $d(x,y)=s$. Таким образом, X не сепарабельно, $T\subset D(X)$, и для любых различных $x,y\in X$ мы имеем $d(x,y)=\max(t_x,t_y)$. Отсюда $D(X)\subset T$. Теорема доказана.

Теперь рассмотрим множество шаров в сепарабельном неархимедовом метрическом пространстве. Прежде всего, отметим, что результат из [53], утверждающий, что это множество счетно, неверен. Чтобы привести контрпример, рассмотрим неархимедово метрическое пространство $\left(\overline{\mathbb{Q}}^+,d_M\right)$. Очевидно, оно сепарабельно, однако для любого вещественного положительного r

$$B[0,r]=\left\{q\in\overline{\mathbb{Q}}^+\mid q\leqslant r\right\}.$$

Следовательно, если $r_1\neq r_2$, то $B[0,r_1]\neq B[0,r_2]$, т. е. множество всех шаров формы $B[0,r]$ имеет мощность континуума. Таким образом, для сепарабельного неархимедова метрического пространства множество значений расстояния и множество всех шаров имеют, вообще говоря, различную мощность. Для бесконечных компактных неархимедовых метрических пространств, однако, это не так.

Теорема 1.4.24 *Пусть (X,d) — компактное неархимедово метрическое пространство. Тогда множество $\mathcal{B}$ всех шаров совпадает с множеством всех шаров с радиусами, принадлежащими $D(X)$. Если X конечно, то $\mathcal{B}$ также конечно. В противном случае $\mathcal{B}$ счетно.*

Доказательство. Если X конечно, утверждения теоремы очевидны. Пусть X бесконечно. В соответствии с 1.4.22 $D(X) = \{r_0, r_1, \ldots\}$, где $r_i \downarrow 0$. Пусть $r \in (0, r_0)$, i такое, что $r_i \leqslant r < r_{i-1}$,и x произвольно. Тогда

$$B[x,r] \backslash B[x,r_i] = \{y \mid r_i < d(x,y) \leqslant r\} \subset$$
$$\subset \{y \mid r_i < d(x,y) \leqslant r_{i-1}\} = \varnothing,$$

т. е. $B[x,r] = B[x,r_i]$. Это доказывает первое утверждение. Для каждого i множество шаров с радиусом r_i конечно вследствие 1.4.20. Отсюда мы получаем последнее утверждение.

Теперь обсудим существование универсального пространства в классе всех сепарабельных неархимедовых метрических пространств. Мы говорим, что метрическое пространство (X,d) называется *универсальным пространством для некоторого класса метрических пространств* $\mathfrak{X}$. если каждое пространство из $\mathfrak{X}$ может быть изометрически вложено в (X,d). Если в дополнение к этому (X,d) принадлежит $\mathfrak{X}$, мы говорим, что (X,d) является *универсальным пространством в классе* $\mathfrak{X}$.

Теорема 1.4.25 *В классе сепарабельных неархимедовых метрических пространств нет универсальных пространств.*

Доказательство. Предположим противное, и пусть (X,d) — универсальное сепарабельное неархимедово метрическое пространство. Для любого $t > 0$ рассмотрим пространство $X(t)$, состоящее из двух точек с расстоянием t между ними. Ясно, что это — неархимедово метрическое пространство, и оно может быть вложено в (X,d). Отсюда $t \in D(X)$. Так как t произвольно, получаем $D(X) = (0,\infty)$,но в силу 1.4.21 $D(X)$ не более чем счетно. Это противоречие доказывает теорему.

Теперь мы дадим пример универсального пространства для класса всех сепарабельных неархимедовых метрических пространств. Другой пример см. в [16]. Пусть H_0 — подпространство пространства $H(\mathbb{R}^+, \overline{\mathbb{Z}}^+, 0)$, состоящее из всех невозрастающих функций. Мы докажем, что каждое сепарабельное неархимедово метрическое пространство может быть изометрически вложено в H_0.

Пусть (X,d) — сепарабельное неархимедово метрическое пространство и $\{x_0, x_1, \ldots\}$ всюду плотно в (X,d). Для каждого $t > 0$ пусть $\{B_{r,1}, B_{r,2}, \ldots\}$ — семейство шаров с радиусом r, которое образует разбиение X (это возможно в силу 1.4.20). Положим

$$\gamma(r,i) = \min\{m \mid x_m \in B_{r,i}\}. \tag{1.3}$$

Если $i \neq j$, то $B_{r,i} \cap B_{r,j} = \varnothing$. Отсюда $\gamma(r,i) \neq \gamma(r,j)$ для $i \neq j$. Обозначим $\Gamma(r) = \{\gamma(r,i) \mid i = 1, 2, \ldots\}$ и для каждого $k \in \Gamma(r)$ положим $B'_{r,k} = B_{r,i}$, где $k = \gamma(r,i)$. Шары $B'_{r,k}$ определены корректно в силу 1.3. Для множеств $\Gamma(r)$ и шаров $B'_{r,k}$ справедливы следующие утверждения.

1. Для каждого r шары $B'_{r,k},\ \ k \in \Gamma(r)$, образуют разбиение X.
2. Если $r < s$ и $B'_{r,k} \subset B'_{s,l}$, то $l \leqslant k$.
В самом деле, положим $B'_{r,k} = B_{r,i},\ \ B'_{s,l} = B_{s,j}$. Тогда $B_{r,i} \subset B_{s,j}$ и

$$k = \gamma(r,i) = \min\{m \mod x_m \in B_{r,i}\} \geqslant \gamma(r,i) =$$

$$= \min\{m \mid x_m \in B_{s,j}\} = \gamma(s,j) = l.$$

3. Для каждого x существует r_x такое, что $x \in B_{r,0}$ для всех $r \geqslant r_x$.
Чтобы доказать это, достаточно положить $r_x = d(x, x_0)$.

Теперь для $x \in X$ определим функцию u_x на $\mathbb{R}^+$ такую, что $u_x(t) = k$,где $x \in B'_{t,k}$. Эта функция корректно определена в силу 1. Очевидно, значения u_x — целые и неотрицательные. Далее, функция u_x — невозрастающая. Действительно, пусть $r < s,\ \ x \in B'_{r,k},\ \ x \in B'_{s,l}$. Тогда в силу 1.4.22 $B'_{r,k} \subset B'_{s,l}$, и из 2 $l \leqslant k$, т. е. $u_x(s) \leqslant u_x(r)$. Наконец, из 3 следует , что существует t_u такое, что $u_x(t) = 0$ для всех $t \geqslant t_u$. Следовательно, $u_x \in H_0$. Покажем, что $\rho(u_x, u_y) = d(x,y)$. Ясно, что, $d(x,y)$ — минимальный радиус шара, содержащего как x, так и y. Тогда, используя определение u_x, получим

$$d(x,y) = \min\{s \mid \forall t \geqslant s \quad \exists k \in \Gamma(t) : x, y \in B'_{t,k}\} =$$

$$= \min\{s \mid \forall t \geqslant s \quad \exists k \in \Gamma(t) : u_x(t) = k,\ u_y(t) = k\} =$$

$$= \min\{s \mid \forall t \geqslant s \quad u_x(t) = u_y(t)\} = \rho(u_x, u_y).$$

Непрерывные функции на неархимедовых метрических пространствах

Пусть (X,d) — неархимедово метрическое пространство, $C(X)$ — линейное пространство всех вещественнозначных непрерывных функций, определенных на X, и $C_F(X)$ — подпространство $C(X)$, состоящее из кусочно-постоянных функций (мы говорим, что функция u — кусочно-постоянна, если множество $u(X)$ конечно). Поскольку каждый шар (как замкнутый, так и открытый) является как замкнутым, так и открытым множеством, имеем следующий результат.

Предложение 1.4.26 *Индикатор каждого шара — непрерывная функция.*

Теорема 1.4.27 *Пусть (X,d) — компактное неархимедово метрическое пространство. Функция u принадлежит $C_F(X)$, тогда и только тогда, когда существует конечное разбиение X, состоящее из шаров и такое, что u постоянна на каждом шаре из этого разбиения. Другими словами, функция u принадлежит $C_F(X)$, тогда и только тогда, когда она является линейной комбинацией индикаторов некоторых шаров.*

Доказательство. Пусть

$$u \in C_F(X), \quad u(X) = \{u_1, \dots, u_n\}, \quad \varepsilon < \min_{i \neq j} |u_i - u_j|.$$

Поскольку u равномерно непрерывна, существует $\delta > 0$ такое, что $d(x, y) \leqslant \delta \Rightarrow |u(x) - u(y)| \leqslant \varepsilon$. Пусть S — разбиение X, состоящее из шаров с радиусом δ. Если x, y принадлежат одному и тому же шару из S, то в силу ультраметрического неравенства $d(x, y) \leqslant \delta$ и, следовательно, $|u(x) - u(y)| \leqslant \varepsilon$,откуда $u(x) = u(y)$ в соответствии с выбором ε.

Теперь пусть $X = B_1 + \ldots + B_n$ и u постоянна на каждом B_i. Тогда $u = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{B_i}$, $\alpha_i \in \mathbb{R}$. Остается применить 1.4.26.■

Если (X, d) — компактное неархимедово метрическое пространство, мы рассматриваем $C(X)$ как банахово пространство, наделенное обычной sup-нормой.

Теорема 1.4.28 *Предположим, что (X, d) — компактное неархимедово метрическое пространство. Тогда $C_F(X)$ всюду плотно в $C(X)$.*

Доказательство. Пусть $u \in C(X)$, $\varepsilon > 0$. Поскольку u — равномерно непрерывна, существует $\delta > 0$ такое, что $d(x, y) \leqslant \delta \Rightarrow |u(x) - u(y)| \leqslant \varepsilon$. Пусть $S = \{B[x_1, \delta], \dots, B[x_n, \delta]\}$ — разбиение X. Определим функцию u_0 равенством $u_0(x) = u(x_i)$ для $x \in B[x_i, \delta]$. В силу 1.4.27 $u_0 \in C_F(X)$. Пусть $x \in B[x_i, \delta]$. Тогда $|u(x) - u_0(x)| = |u(x) - u(x_i)| \leqslant \varepsilon$, так как $d(x, x_i) \leqslant \delta$.

1.5. Структуры, связанные с мерой и вероятностью

Понятие *меры* в математике возникло как обобщение геометрических понятий длины, площади и объема. Впоследствии оказалось, что это обобщение является весьма широким и включает, в частности, понятие *вероятности*. Именно в таком качестве мера чаще всего используется в социологии. Чаще всего это происходит при использовании случайных выборок в социологических исследованиях. Так, при использовании простой случайной выборки каждая анкета рассматривается как реализация некоторого случайного объекта, имеющая вероятность $\frac{1}{N}$, где N — объем выборки. Если к выборке применялась процедура перевзвешивания, то величина $\frac{1}{N}$ умножается на вес анкеты. Каждому варианту (значению) ответа на тот или иной вопрос также присваивается вероятность, равная суммарной вероятности анкет, в которых выбран этот вариант ответа, и так далее.

1.6. Комбинированные структуры

1.6.1. Структуры, получающиеся сочетанием порядковых и топологических конструкций

Расстояния с линейно упорядоченным множеством значений. В социологии хорошо известны порядковые (ординальные) признаки или, как их еще называют, признаки, измеренные в порядковых шкалах. Это признаки, о значениях которых можно сказать лишь, какое из них больше (лучше, выше и т. д.), а какое — меньше (хуже, ниже). Было бы естественно попытаться применить к математическому моделированию в социологии некие обобщенные метрические пространства, значение расстояния в которых — не число, а элемент какого-то упорядоченного множества. Сначала, однако, необходимо построить аксиоматику таких пространств. Итак, предположим, что в качестве шкалы, по которой измеряется расстояние между точками некоторого множества, выбрано некоторое линейно упорядоченное множество Λ, т. е. такое множество, в котором о любых двух элементах можно сказать, какой из них меньше (по традиции для отношения порядка мы употребляем термины "меньше — больше а не "хуже — лучше" или что-либо еще). Условие линейной упорядоченности довольно ограничительно, но в социологии такие шкалы весьма употребительны. Впрочем, впоследствии мы откажемся от этого условия. Далее, предположим, что в шкале есть наименьший элемент; обозначим его θ. Он будет играть ту же роль, какую играет нуль для обычного расстояния. Приступим к формулированию аксиом. С первыми двумя проблем не возникает.

1. $d(x, x) = 0$ и, наоборот, если $d(x, y) = 0$, то $x = y$.

2. $d(x, y) = d(y, x)$.

Но как быть с обобщением неравенства треугольника $d(x, y) \leqslant d(x, z) + d(z, y)$? В правой части стоит знак сложения, но для элементов нашей шкалы эта операция, вообще говоря, не определена. Пойдем таким путем: будем обобщать понятия не метрического, а неархимедова метрического пространства! Поскольку по сделанному нами предположению линейной упорядоченности любые два элемента сравнимы, то тем самым одно из значений $d(x, z), d(z, y)$ (или оба, если они равны) является максимальным. Таким образом, третья аксиома переносится на общий случай дословно: для любых точек x, y, z из множества X

$$d(x, y) \leqslant \max[d(x, z), d(z, y)].$$

Множество с обобщенным расстоянием естественно называть *обобщенным неархимедовым метрическим пространством*. Покажем, как можно использовать такие обобщенные расстояния. Возвратимся к рассмотренному выше примеру с типами индивидов, определяемыми упорядоченным набором из четырех признаков. Напомним, что расстояние между типами полагалось равным 1, $1/2$, $1/3$ или $1/4$ в зависимости от наименьшего номера признака, значения которого у этих типов различаются. Легко показать, однако, что вместо чисел 1, $1/2$, $1/3$, $1/4$ мы могли бы взять любую убывающую последовательность положительных чисел — например, 101, 73, 11, $1/100$ — и также получили бы неархимедово расстояние. Продолжим аналогию с порядковыми признаками. Хорошо известно, что присвоение градациям таких признаков числовых меток и количественная интерпретация этих меток недопустимы. Другое дело, что существуют методы обоснованного выбора (как говорят, оцифровки) этих меток по определенным критериям, но критерии эти различны, а потому различны сами наборы меток (наиболее популярные подходы к этой проблеме связаны с многомерным шкалированием [22, 46] и оцифровкой [23]). Поэтому рассмотрение порядковых признаков как таковых, без оцифровки, необходимо. Следуя аналогии, построим сугубо порядковые значения расстояния между двумя типами. Если они различаются уже по первому признаку, назовем это расстояние максимальным, если совпадают по первому, но различаются по второму — большим, если различие наблюдается впервые только в третьем признаке — умеренным и, наконец, если оно имеется только в значении четвертого признака — малым. Наконец, в качестве минимального значения шкалы возьмем отсутствие расстояния. Таким образом, в порядке возрастания значения расстояния суть "отсутствует "малое "умеренное "большое "максимальное". Расстояния между определенными выше типами 1 и 3, так же, как и между 2 и 3, максимальное, а между 1 и 2 — большое. Такое расстояние, можно сказать, "мягче" традиционного (термин в духе подхода В. И. Арнольда [6]). В силу использованной аналогии естественно поставить вопрос о присвоении числовых меток значениям нечисловых расстояний. Насколько нам известно, эта проблема до сих пор практически не рассматривалась.

Расстояния с частично упорядоченным множеством значений

До сих пор мы говорили о расстояниях, множества значений которых линейно упорядочены, т. е. о любых двух значениях, о которых можно сказать какое из них меньше, а какое — больше. Существуют, однако, множества с частичными порядками (частично упорядоченные), т. е. такие, в которых наряду с парами сравнимых элементов, из которых один меньше другого, существуют элементы несравнимые (см. 1.2).

Попытаемся сначала построить расстояния с векторными значениями. Естественно считать, что это векторы с неотрицательными компонентами, т. е. векторы вида $\bar{t} = (t_1, \ldots, t_n)$, у которых $t_1 \geqslant 0, \ldots, t_n \geqslant 0$. Согласно определению отношения порядка в пространстве векторов, это можно записать просто как $\overline{t} \geqslant \overline{0}$. Итак, считаем, что значением векторного расстояния $d(x,y)$ является n-мерный вектор $\overline{t} = (t_1,\ldots,t_n)$. Мы будем записывать это еще так: $\overline{d}(x,y) = (d_1(x,y),\ldots,d_n(x,y))$. Теперь аксиомы обычного метрического пространства можно перенести на случай обобщенного метрического пространства X с векторным расстоянием дословно.

1. $\overline{d}(x,x) = \overline{0}$ и, наоборот, если $\overline{d}(x,y) = \overline{0}$, то $x = y$.

2. $\overline{d}(x,y) = \overline{d}(y,x)$.

Для аксиомы треугольника необходима операция сложения. Определение суммы векторов хорошо известно: суммой векторов $\overline{t}$ и $\overline{s}$ называется вектор $\overline{u} = (u_1,\ldots,u_n)$, для которого $u_1 = t_1 + s_1,\ldots,u_n = t_n + s_n$, т. е. векторы складываются покомпонентно. Таким образом,

3. $\overline{d}(x,y) \leqslant \overline{d}(x,z) + \overline{d}(z,y)$.

Итак, определение метрического пространства с векторным расстоянием сформулировано. Заметим, что векторная функция $\overline{d}$ является расстоянием тогда и только тогда, когда является расстоянием каждая из ее компонент d_i. Прежде чем перейти к примерам, попытаемся определить неархимедово метрическое пространство с векторным расстоянием. Решить эту задачу "в лоб" не удается, ибо в силу наличия несравнимых векторов операция взятия максимума двух векторов, вообще говоря, не определена, так что буквальная переформулировка ультраметрического неравенства некорректна. Можно, однако, заменить максимум так называемой верхней гранью. Что это такое? В произвольном частично упорядоченном множестве верхней гранью элементов λ и μ называется элемент, который, так сказать, предельно плотно огибает (облегает) сверху λ и μ в совокупности, т. е. такой элемент ν, что всякий элемент, больший как λ, так и μ, будет больше и чем ν. Во множестве чисел верхняя грань совпадает с максимумом, а во множестве векторов, как можно убедиться, она определяется весьма просто: верхняя грань векторов $\overline{t} = (t_1,\ldots,t_n)$ и $\overline{s} = (s_1,\ldots,s_n)$ — это вектор $\overline{u} = (u_1,\ldots,u_n)$ с компонентами $u_1 = \max\{t_1,s_1\},\ldots,u_n = \max\{t_n,s_n\}$. Мы приходим к следующей формулировке обобщенного ультраметрического неравенства:

$$\overline{d}(x,y) \leqslant \max[\overline{d}(x,z),\overline{d}(z,y)],$$

т. е. если

$$\overline{d}(x,y) = (d_1(x,y),\ldots,d_n(x,y)), \quad \overline{d}(x,z) = (d_1(x,z),\ldots,d_n(x,z)),$$
$$\overline{d}(z,y) = (d_1(z,y),\ldots,d_n(z,y)),$$

то

$$d_1(x,y) \leqslant \max[d_1(x,z), d_1(z,y)], \ \ldots, \ d_n(x,y) \leqslant \max[d_n(x,z), d_n(z,y)].$$

Надо сказать, что в некоторых пространствах бесконечномерных векторов (т. е. векторов с бесконечным числом компонент) верхняя грань может и не существовать; с проблемой отсутствия верхней грани мы столкнемся также при рассмотрении расстояний с "качественными" значениями. В таких случаях приходится применять другой подход, который будет продемонстрирован далее. Выше было отмечено, что векторная функция $\overline{d}$ является расстоянием тогда и только тогда, когда является расстоянием каждая из ее компонент d_i. Подобным образом векторная функция $\overline{d}$ является неархимедовым рарасстоянием тогда и только тогда, когда является неархимедовым расстоянием каждая компонента d_i. Это замечание позволяет строить примеры векторных метрик и неархимедовых расстояний. Здесь может возникнуть резонный вопрос: а нужны ли эти векторные расстояния? Не проще ли рассматривать их компоненты по отдельности, как обычные расстояния? Ниже мы убедимся, что векторный подход дает определенные преимущества.

Рассмотрим теперь некоторое множество X и попытаемся ввести аксиомы определенного на нем расстояния со значениями в частично упорядоченным множестве Λ, о котором известно лишь, что в нем есть наименьший элемент, т. е. такой элемент θ, который сравним с любым другим элементом λ и $\theta < \lambda$. Нетрудно усмотреть, что наименьший элемент единствен. Как и ранее, первые две аксиомы переформулируются практически дословно.

1. $d(x,y) = \theta$ равносильно $x = y$.

2. $d(x,y) = d(y,x)$.

Понятно, что про обобщение неравенства треугольника речи не идет: никакой операцией сложения на Λ мы не располагаем. Не получается, однако, и непосредственно переформулировать ультраметрическое неравенство, как это мы сделали для линейно упорядоченного множества значений метрики. Наконец, невозможно и использование верхней грани, как это было сделано только что для векторных неархимедовых расстояний, ибо эта верхняя грань, вообще говоря, может не существовать. Применим следующий прием [52]. Заметим, что в определении обычного неархимедова метрического пространства ультраметрическое неравенство можно заменить следующей равносильной аксиомой: если для некоторого неотрицательного числа r справедливо $d(x,z) \leqslant r$ и $d(z,y) \leqslant r$, то тогда $d(x,y) \leqslant r$. Эта аксиома может быть перенесена на общий случай почти дословно.

3. Если $d(x,z) \leqslant \lambda$, $d(z,y) \leqslant \lambda$ для некоторого λ, то $d(x,y) \leqslant \lambda$.

Снова обращаясь к иерархии признаков, можно сказать, что здесь мы присваиваем уровням иерархии не числовые, а порядковые метки, где более низкому уровню соответствует меньшее значение метки, и расстоянием между типами опять-таки считаем метку самого высокого уровня, на котором они расходятся.

Предположим, что Λ, M — частично упорядоченные множества и ϕ — отображение Λ в M. Мы говорим, что отображение ϕ — *возрастающее* (соответственно *строго возрастающее*), если для $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$ $\lambda_1 < \lambda_2$ следует $\phi(\lambda_1) \leqslant \phi(\lambda_2)$ (соответственно$\phi(\lambda_1) < \phi(\lambda_2)$). Определение *убывающих* и *строго убывающих* отображений аналогично. Частично упорядоченное множество Λ называется *верхней полурешеткой*, если для любой пары элементов $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$ существует верхняя грань $\sup(\lambda_1, \lambda_2)$. Пусть X — множество, $(\Lambda, \leqslant)$ — частично упорядоченное множество с наименьшим элементом θ. Если для $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$ выполняется по меньшей мере одно из соотношений $\lambda_1 \leqslant \lambda_2$, $\lambda_2 \leqslant \lambda_1$, мы говорим, что λ_1, λ_2 являются *сравнимыми* и если, например, $\lambda_1 \leqslant \lambda_2$, то $\sup[\lambda_1, \lambda_2] = \lambda_2$ и мы пишем $\max[\lambda_1, \lambda_2] = \lambda_2$. Предположим, что $d\colon X \times X \to \Lambda$ — такое отображение, что

(GMS1) $d(x, y) = d(y, x)$,

(GMS2) $d(x, y) = \theta$, если $x = y$.

Определим $\Lambda^* = \Lambda \setminus \{\theta\}$. Мы говорим, что $B[x, \lambda] \triangleq \{y \in X : d(x, y) \leqslant \lambda\}$ (соответственно $B[x, \lambda] \triangleq \{y \in X : d(x, y) < \lambda\}$) — *замкнутый* (соответственно *открытый*) *шар с центром* x *и радиусом* λ для $x \in X$, $\lambda \in \Lambda$. Отметим, что замкнутый (открытый) шар не является, в общем, замкнутым (открытым) множеством в топологии, индуцированной расстоянием d. Иногда мы опускаем символ x и (или) λ.

Мы говорим, что частично упорядоченное множество Λ с бинарной операцией $\oplus$ является *частично упорядоченным коммутативным моноидом*, если Λ является коммутативным моноидом по отношению к $\oplus$ и существует элемент $\mathbf{0} \in \Lambda$ такой, что $\mathbf{0} \leqslant \lambda$ и $x \oplus \mathbf{0} = \lambda$ для всех $\lambda \in \Lambda$. Мы говорим, что $\mathbf{0}$ — это *нуль* моноида. Существует только один нулевой элемент в Λ. Операция $\oplus$ называется обобщенным сложением. Пусть Λ — частично упорядоченный коммутативный моноид, X — множество и $d\colon X \times X \to \Lambda$. Мы говорим, что $(X, \Lambda, \leqslant, \oplus, d)$ — *обобщенное метрическое пространство* если оно удовлетворяет (GMS1), (GMS2), и, кроме того,

(GMS3) $d(x, y) \leqslant d(x, z) \oplus d(z, y) \quad \forall x, y, z \in X$.

Если $\Lambda = \overline{\mathbb{R}^+}$ и $\oplus$ — обычное сложение, (X, Λ, d) называется *метрическим пространством.*

Обобщенное неархимедово расстояние на X является отображением $d\colon X \times X \to \Lambda$, таким, что оно удовлетворяет (GMS1), (GMS2), и, кроме того,

(GMS3′) если $d(x,y) \leqslant \lambda$ и $d(y,z) \leqslant \lambda$, то $d(x,z) \leqslant \lambda$.

В этом случае (X, Λ, d) называется *обобщенным неархимедовым метрическим пространством*. Если $(\Lambda, \leqslant)$ — решетка, (GMS3′) эквивалентно

$$d(x,y) \leqslant \sup\left[d(y,z), d(x,z)\right].$$

С другой стороны, решетка $(\Lambda, \leqslant)$ с наименьшим элементом является коммутативным моноидом по отношению к операции $\lambda_1 \oplus \lambda_2 \triangleq \sup(\lambda_1, \lambda_2)$, которая играет, таким образом, роль обобщенного сложения. Следовательно, мы можем рассматривать обобщенное неархимедово метрическое пространство $(X, \Lambda, \leqslant, d)$ как обобщенное метрическое пространство $(X, \Lambda, \leqslant, \sup, d)$. Если $\Delta = \overline{\mathbb{R}^+}$ с обычным упорядочением, мы говорим, что (X, Λ, d) является *неархимедовым метрическим пространством*. В этом случае мы можем заменить sup на max:

$$d(x,y) \leqslant \max\left[d(x,z), d(z,y)\right] \quad \forall x, y, z \in X.$$

Как было сказано выше, это неравенство называется ультраметрическим. Оно сильнее, чем неравенство треугольника с обычным сложением, и поэтому неархимедово метрическое пространство — частный случай метрического пространства.

Теорема 1.6.1 *Каждая точка замкнутого шара в обобщенном неархимедовом метрическом пространстве есть центр этого шара. Более точно, если $y \in B[x,\lambda]$, то $B[x,\lambda] = B[y,\lambda]$.*

Доказательство. Пусть $z \in B[x,\lambda]$. Тогда $d(x,y), d(x,z) \leqslant \lambda$.В силу (GMS3′) $d(y,z) \leqslant \lambda$. Тогда $B[x,\lambda] \subset B[y,\lambda]$. Аналогичным образом, $B[y,\lambda] \subset B[x,\lambda]$ ■

Следствие 1.6.2 *Если два замкнутых шара со сравнимыми радиусами в обобщенном неархимедовом метрическом пространстве пересекаются, то один из них принадлежит другому.*

Следствие 1.6.3 *Если два замкнутых шара в обобщенном неархимедовом метрическом пространстве имеют одинаковый радиус и пересекаются, то они совпадают.*

Теорема 1.6.4 *Предположим, что (X, Λ, d) — обобщенное неархимедово метрическое пространство, $x, y, z \in X$ и каждые два значения $d(x,y), d(x,z), d(z,y)$ сравнимы. Пусть, для определенности, $d(x,y) \leqslant d(x,z) \leqslant d(z,y)$. Тогда $d(x,z) = d(z,y)$.*

Доказательство. Достаточно заметить, что из ультраметрического неравенства

$$d(z,y) \leqslant \max[d(x,y), d(x,z)] = d(x,z).$$

■

Теорема 1.6.5 *Пусть (X,d) — неархимедово метрическое пространство, $x,y,z \in X$. Если $d(x,y) > d(z,y)$, тогда $d(x,z) = d(x,y)$.*

Доказательство. Из ультраметрического неравенства $d(x,z) \leqslant \max[d(x,y), d(z,y)] = d(x,y)$. С другой стороны, $d(x,y) \leqslant \max[d(x,z), d(z,y)]$, т. е., по меньшей мере одно из неравенств $d(x,y) \leqslant d(x,z)$, $d(x,y) \leqslant d(z,y)$ выполняется. По предположению, $d(x,y) > d(z,y)$, следовательно, $d(x,y) \leqslant d(z,y)$. Тогда $d(x,z) = d(x,y)$. Доказательство.

Теорема 1.6.6 *Каждая точка открытого шара в неархимедовом метрическом пространство есть центр этого шара. Более точно, если $y \in B(x,r)$, тогда $B(x,r) = B(y,r)$.*

Доказательство. Предположим, что $z \in B(y,r)$. Тогда $d(x,y), d(z,y) < r$, откуда

$$d(z,x) \leqslant \max[d(x,y), d(z,y)] < r.$$

■

Мы определяем открытые и замкнутые шары в обобщенном метрическом пространстве точно так же, как в обычном метрическом пространстве и в обобщенном неархимедовом метрическом пространстве.

Теорема 1.6.7 *Пусть X — множество, Λ — частично упорядоченное множество с наименьшим элементом, и $d\colon X \times X \to \Lambda$ удовлетворяет (MS1), (MS2). Предположим, что каждые два замкнутых шара в обобщенном неархимедовом метрическом пространстве) (X,Λ) либо не совпадают, либо один из них принадлежит другому. Тогда (X,Λ,d) — обобщенное неархимедово метрическое пространство.*

Доказательство. Предположим противное. Тогда существует $\lambda \in \Lambda$, $x,y,z \in X$ такое, что

$$d(x,z), d(z,y) \leqslant \lambda, \tag{1.4}$$

$$d(x,y) \nleqslant \lambda. \tag{1.5}$$

Рассмотрим шары $B[x, d(x,z)]$, $B[y, d(z,y)]$. Они пересекаются, так как z принадлежит каждому из них. Докажем, что $y \notin B[x, d(x,z)]$. Предположим противное. Тогда $d(x,y) \leqslant d(x,z)$, из которого в силу 1.4 $d(x,y) \leqslant \lambda$. Это противоречит 1.5. Следовательно, $B[y, d(z,y)] \nsubseteq B[x, d(x,z)]$. Аналогично, $B[x, d(x,z)] \nsubseteq B[y, d(z,y)]$.

Теорема 1.6.8 *Предположим, что X — множество, Λ_i — частично упорядоченное множество с наименьшим элементом θ_i, $i = 1, 2$, $\eta\colon \Lambda_1 \to \Lambda_2$ — неубывающее отображение, такое, что $\eta(\theta_1) = \theta_2$, и $d_1\colon X^2 \to \Lambda_1$ — неархимедово расстояние. Тогда отображение $d_2\colon X^2 \ni (x, y) \to \eta(d_1(x, y)) \in \Lambda_2$ — также неархимедово расстояние. Если $\Lambda_1 = \Lambda_2 = \overline{\mathbb{R}^+}$, $\lim\limits_{t\to 0} \eta(t) = 0$, и $\eta(t) = 0$ тогда и только тогда, когда $t = 0$, то d_1 и d_2 определяет ту же самую топологию на X.*

Доказательство. Первое утверждение очевидно. Обозначим $B_{d_i}[x, r] = \{y \mid d_i(x, y) \leqslant r\}$, $i = 1, 2$. Пусть $B_{d_1}[x, r]$ произвольны. В силу предположения существует $t > 0$ такое, что $\eta(t) < \eta(r)$. Тогда $B_{d_2}[x, \eta(t)] \subset B_{d_1}[x, r]$. Обратно, для любого $B_{d_2}[x, s]$ существует r такое, что $\eta(r) < s$. Тогда $B_{d_1}[x, r] \subset B_{d_2}[x, s]$.

1.6.2. Структуры с топологией и мерой (вероятностью)

Предварительные замечания

В этом параграфе изложен тот подход, на базе которого далее развиваются методы построения моделей. Главное здесь — связи между различными и даже разнотипными структурами. При этом в "центре событий" оказываются описанные выше иерархические и неархимедовы метрические пространства. Связи, о которых идет речь, достаточно разнообразны. Так, мы показываем, что на неархимедовых метрических пространствах естественным образом задается мера. Это позволяет производить всевозможные операции усреднения, т. е. вводить средние величины — среднее расстояние, например. Кроме того, оказывается возможным выявлять некоторые эффекты, имеющие место, как говорят в математике, "почти наверное" или "почти всегда а на практике — просто всегда. Оказывается, что всякое метрическое пространство при некоторых естественных предположениях в определенном смысле близко к неархимедову метрическому, а именно — сходимость относительно исходного расстояния равносильна сходимости относительно некоторого ультрарасстояния как в среднем, так и почти наверное. Последнее обстоятельство, в свою очередь, позволяет выявлять латентные иерархические структуры. Мы сохраняем прежние обозначения.

Связь обычных расстояний с неархимедовыми (содержательный аспект)

Выше на одном и том же множестве типов мы ввели хэмминговское расстояние, котороя не является неархимедовым, и бэровское неархимедово расстояние. Это порождает естественный вопрос: как соотносятся между собой заданные на одном и том же множестве неархимедовы и "обычные" расстояния? Начнем с относительно простого примера, который, тем не менее, отражает сущность проблемы и подходы к ее решению. Рассмотрим множество вещественных чисел, больших или равных нулю и меньших единицы, т. е. полуинтервал $I = [0, \infty)$. Каждое число $x \in I$ может быть представлено в виде десятичной дроби $x = 0, x_1 x_2 \ldots$, где x_i — i-я десятичная цифра или, как говорят, i-й десятичный *знак* после запятой. Мы будем называть эту дробь *десятичным разложением* числа x и для единообразия всегда считать его бесконечным, продолжая, если необходимо, нулями, т. е. вместо 0,43 будем писать 0,4300... Известно, что для некоторых чисел имеются два разложения: оканчивающееся нулями и оканчивающееся девятками. Скажем, число 0,4300... можно записать еще в виде 0,42999... Такие числа называются десятично-рациональными. Условимся для них выбирать разложение, оканчивающееся нулями. Обычно на множестве вещественных чисел рассматривается расстояние $d(x, y) = |x - y|$. Введем на этом множестве неархимедово расстояние. Пусть $x = 0, x_1 x_2 \ldots$, $y = 0, y_1 y_2 \ldots$ — различные числа из I. Обозначим $\gamma(x, y)$ номер первого разряда (десятичного знака), в котором эти числа различаются. Например, для $x = 0,329176\ldots$ и $y = 0,328325\ldots$ $\gamma(x, y) = 3$. Теперь неархимедово метрическое расстояние d_u определим так: $d_u(x, x) = 0$, а для $x \neq y$ $d(x, y) = 10^{-\gamma(x,y)+1}$. Таким образом, это расстояние для рассмотренной только что пары чисел равно 10^{-2}. Если разложения некоторых двух чисел x, y, впервые различаются в k-м разряде и, следовательно, $d_u(x, y) = 10^{k+1}$, то до $k - 1$-го разряда включительно они совпадают, а отсюда, как нетрудно показать, абсолютная величина разности этих чисел не превосходит единицы $k - 1$-го разряда, т. е. $10^{-(k-1)}$. Итак, если $d_u(x, y) = 10^k$, то $d(x, y) \leqslant 10^{-(k-1)} = 10^{-k+1} = 10 \cdot d_u(x, y)$. Таким образом, обычное расстояние не может превосходить введенного неархимедова. Отсюда следует важный качественный вывод: если некоторая последовательность чисел $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots$ стремится к x относительно неархимедова расстояния d_u, т. е. величина $d_u(x^{(n)}, x)$ неограниченно уменьшается, то неограниченно уменьшается и величина $d(x^{(n)}, x)$, т. е. последовательность $x^{(n)}$ стремится к x и в метрике d_u. К сожалению, обратное не имеет места. Пусть $x = 0,7000\ldots$ и $x^{(1)} = 0,6900\ldots$, $x^{(2)} = 0,69900\ldots$, $x^{(3)} = 0,699900\ldots$, ... Любое из чисел $x^{(n)}$ не совпадает с x уже в первом знаке после запятой, так что $\gamma(x, x^{(n)}) = 1$ и $d(x, x^{(n)}) = |x - x^{(n)}|$. С другой стороны, $|x - x^{(n)}| = 10^{-(n-1)}$, а последняя величина с ростом n неограниченно уменьшается. Таким образом, последовательность $x^{(n)}$ стремится к x относительно обычной метрики d и не стремится к x относительно метрики d_u. Число $x = 0,7000\ldots$, использованное в этом примере — десятично-рациональное. Интуитивно ясно и далее доказывается, что только для таких чисел подобное явление и может иметь место. Таким образом, если из множества $I = [0,\ 1)$ "выбросить" десятично-рациональные числа, то на оставшихся числах сходимость по обеим метрикам будет равносильной.

Оценим внимательнее, что мы "выбрасываем" и что оставляем. Десятично-рациональное число — это конечная десятичная дробь, оно может быть записано в виде $\frac{m}{10^k}$, где m, k — натуральные числа. Таким образом, десятично-рациональные числа являются просто рациональными. Обратное же неверно: например, рациональное число $\frac{1}{3}$ имеет десятичное разложение $0{,}333\ldots$, т. е. десятично-рациональным не является. "Много" или "мало" десятично-рациональных чисел? С прикладной точки зрения, если трактовать число, скажем, как результат измерения, то случай, когда этот результат окажется в точности равен определенной конечной десятичной дроби и не изменится при увеличении точности измерений, представляется практически невозможным. Здесь, правда, возникает аспект принципиальной физической ограниченности точности измерений, но это связано с такими малыми величинами, которые практически не встречаются в рассматриваемых нами задачах. С математической точки зрения множество десятично-рациональных чисел является "малым" в том смысле, что имеет нулевую меру. Математическое понятие меры формализует понятие длины линии, площади фигуры, объема тела. Оно допускает вероятностную интерпретацию, в соответствии с которой можно сказать, что если мы рассмотрим равномерное распределение вероятностей на $I = [0,\ 1)$ и в соответствии с ним случайно выберем число из I, то вероятность того, что оно окажется десятично-рациональным, равна нулю.

Позже мы продолжим рассмотрение вероятностного аспекта проблемы, а пока обратимся к многомерному случаю. Для некоторого натурального числа s рассмотрим s-мерный куб I^s, т. е. множество векторов $\overline{x} = (x^{(1)}, \ldots, x^{(s)})$, где значение каждой компоненты $x^{(i)}$ принадлежит $I = [0,\ 1)$. Обычно на I^s рассматриваются такие расстояния: если $\overline{x} = (x^{(1)}, \ldots, x^{(s)})$ и $\overline{y} = (y^{(1)}, \ldots,\ y^{(s)})$, то в качестве расстояния между ними берется либо

$$\left[\sum_{i=1}^{s} |x^{(i)} - y^{(i)}|^p\right]^{\frac{1}{p}}, \tag{1.6}$$

где $p \geqslant 1$ (при $p = 2$ получается обычное евклидово расстояние), либо

$$\max_{1 \leqslant i \leqslant s} |x^{(i)} - y^{(i)}|, \tag{1.7}$$

Все эти расстояния эквивалентны; это означает, что если d_1, d_2 — два расстояния указанного вида, то для них можно указать такие положительные константы c и C, что для любой пары векторов $\overline{x}$, $\overline{y}$ выполняются неравенства:

$$d_1(x, y) \leqslant c d_2(x, y), \quad d_2(x, y) \leqslant C d_1(x, y).$$

Таким образом, не только сходимость относительно любого из этих расстояний равносильна сходимости относительно любого другого, но и скорость сходимости относительно всех этих расстояний одинакова. По этой причине мы зафиксируем некоторое расстояние d указанного вида и с ним будем сравнивать строящееся неархимедово расстояние. Итак, пусть

$$\overline{x} = (x^{(1)}, \dots, x_2^{(s)}), \qquad \overline{y} = (y^{(1)}, \dots, y^{(s)})$$

— векторы с компонентами из $I = [0,\ 1)$. Пусть

$$x^{(i)} = 0, x_1^{(i)} x_2^{(i)} \dots, \qquad y^{(i)} = 0, y_1^{(i)} y_2^{(i)} \dots$$

— десятичные разложения компонент. Так же, как и выше, для десятично-рациональных компонент, обладающих двумя разложениями — заканчивающимися нулями и девятками — выберем первые из них. Занумеруем разряды (знаки) разложений компонент естественным образом: сначала первые после запятой рзряды компонент с первой по s-ю, затем — вторые, и так далее. Обозначим $\gamma(\overline{x}, \overline{y})$ наименьший номер разряда, в котором различаются десятичные разложения хотя бы одной компоненты векторов $\overline{x}, \overline{y}$. Приведем пример. Пусть $s = 3$, $\overline{x} = 0$. Разложения первой компоненты различаются в пятом разряде, второй — в третьем, третьей — в четвертом. Таким образом, $\gamma(\overline{x}, \overline{y}) = 3$. Теперь полагаем $d_u(\overline{x}, \overline{x}) = 0$, а для $\overline{x} \neq \overline{y}$ положим $d_u(\overline{x}, \overline{y}) = 10^{-\gamma(\overline{x}, \overline{y})+1}$. То, что это — неархимедово расстояние, можно, как и выше, сравнительно просто доказать.

Выясним соотношения между ним и традиционными расстояниями — 1.6, 1.7. Пусть $\gamma(\overline{x}, \overline{y}) = k$ и, следовательно, $d_u(\overline{x}, \overline{y}) = 10^{-k+1}$. Тогда для любого i разложения одномерных компонент $x^{(i)} = 0, x_1^{(i)} x_2^{(i)} \dots$ и $y^{(i)} = 0, y_1^{(i)} y_2^{(i)} \dots$ совпадают вплоть до $(k-1)$-го разряда включительно. Значит, абсолютная величина разности этих компонент не превосходит единицы $(k-1)$-го разряда после запятой, т. е. $|x^{(i)} - y^{(i)}|$. Отсюда нетрудно вывести, что любое из выражений 1.6, 1.7 не превосходит 10^{-k+1}. Таким образом, как и в одномерном случае, традиционное расстояние не превосходит введенного неархимедова метрического. Можно повторить и рассуждения о том, что из сходимости относительно неархимедова расстояния вытекает сходимость относительно традиционного расстояния; так же, как и там, имеется "плохое" множество, на котором из традиционной сходимости не вытекает неархимедова. Это множество векторов, у которых значения хотя бы одной компоненты — десятично-рациональное. Это множество опять-таки есть множество нулевой меры, т. е. нулевой вероятности.

Обсудим подробнее вероятностный аспект соотношения между обычными расстояниями и ультрарасстояниями. Как уже говорилось, тому, чтобы сходимость относительно этих расстояний была эквивалентной, "мешают" десятично-рациональные значения. Если вернуться к интерпретации значений величин как результатов измерений, их можно считать случайными в том смысле, что они зависят от единицы измерения и начала отсчета, каковые можно считать результатом "исторической случайности вроде выбора в качестве меры длины одной десятимиллионной части четверти парижского меридиана или в качестве нулевой температуры — точки замерзания воды. Видимо, интуитивно это всегда ощущали физики и инженеры, которые используют выражения типа "величины совпадают до третьего знака после запятой имея в виду, что разница между величинами не превосходит 10^{-3}. Это выражение применяется, скажем, к величинам 0,7996 и 0,8003, хотя буквально они не совпадают уже в первом знаке. Введенное нами неархимедово расстояние d_u есть не что иное, как формализация буквального понимания процитированного выражения. Так вот, оказывается, что это выражение действительно в среднем справедливо. Говоря точнее, ниже мы доказываем, что если единица измерения или начало отсчета случайны и имеют некоторое естественное с точки зрения приложений распределение, то среднее значение (математическое ожидание) введенных неархимедовых расстояний с точностью до постоянного множителя не превосходит традиционных метрик. Поскольку, напомним, обратное соотношение верно всегда, то в среднем традиционные и неархимедовы расстояния эквивалентны. А теперь попробуем извлечь из этих рассмотрений какую-нибудь пользу для анализа более характерных для социологии нечисловых объектов. Во-первых, результат о том, что для произвольного расстояния можно построить такое неархимедово расстояние, что первое не больше второго с точностью до множества нулевой меры (вероятности), переносится на довольно общий с точки зрения приложений случай так называемых компактных пространств. Мера, о которой идет речь, может быть различной, но в том числе и такой, которая некоторым естественным образом обобщает понятия длины, площади и объема. Результат о том, что для исходного расстояния существует некоторое случайное неархимедово метрическое расстояние, которое в среднем эквивалентно исходному, также обобщается, хотя и при более жестких ограничениях. Тем не менее, с точки зрения приближенных методов анализа он, пожалуй, более интересен, ибо ведет к более полезным конструкциям, в том числе и не носящим явно вероятностного характера. Начнем с простого примера. Рассмотрим множество X, состоящее всего из трех точек a, b, c. Пусть на X задано расстояние d, причем

$$d(a,b) = 5, \quad d(b,c) = 7, \quad d(a,c) = 6.$$

Понятно, что (X, d) — ненеархимедово расстояние, ибо, напомним, в неархимедовом метрическом пространстве разносторонние треугольники невозможны. Рассмотрим, однако, два неархимедовых расстояния d_1 и d_2, где

$$d_1(a,b) = 3, \quad d_1(b,c) = 6, \quad d_1(a,c) = 6;$$

$$d_2(a,b) = 9, \quad d_2(b,c) = 9, \quad d_2(a,c) = 6.$$

Нетрудно видеть, что для любой пары точек $x, y \in X$ имеет место

$$d(x,y) = \frac{2}{3}\, d_1(x,y) + \frac{1}{3}\, d_2(x,y).$$

Поскольку $\frac{2}{3} + \frac{1}{3} = 1$, то можно сказать, что d — математическое ожидание случайного неархимедова расстояния, которое с вероятностью $\frac{2}{3}$ есть d_1, а с вероятностью $\frac{1}{3}$ — d_2. Можно отказаться от возможности вероятностного представления и просто искать представление исходного расстояния в виде линейной комбинации неархимедовых расстояний, не требуя, чтобы коэффициенты представления образовывали распределение вероятностей, т. е. были положительны и в сумме равны единице. Например, для расстояния d' на том же трехточечном множестве, где

$$d'(a,b) = 15, \quad d'(b,c) = 21, \quad d'(a,c) = 18,$$

имеет место представление

$$d'(x,y) = 2d_1(x,y) + d_2(x,y).$$

Наконец, можно искать не точные, а приближенные представления (аппроксимации). Ниже будет изложена математическая теория, уточняющая изложенные здесь соображения.

Меры на иерархических пространствах

Обозначим через $\mathcal{FU}\,(\mathcal{H})$ подмножество $\mathcal{U}\,(\mathcal{H})$ такое, что

$$\mathcal{FU}\,(\mathcal{H}) = \left\{ \bigcup_{i=1}^{k} A_i \mid k \in \mathbb{N},\ A_1, \ldots, A_k \in \mathcal{H} \right\} \bigcup \varnothing.$$

Лемма 1.6.9 *$\mathcal{FU}\,(\mathcal{H})$ — алгебра подмножеств.*

Доказательство. Пусть $A_k = \sum\limits_{k=1}^{n_k} A_{k,i}$, $A_{k,i} \in \mathcal{H}$, $i = \overline{1, n_k}$, $k = 1, 2$. Ясно, что $A_1 \cup A_2 \in \mathcal{FU}\,(\mathcal{H})$. Далее,

$$A_1 \cap A_2 = \left(\sum_{i=1}^{n_1} A_{1,i} \right) \bigcap \left(\sum_{i=1}^{n_2} A_{2,i} \right) =$$

$$= \bigcup_{i=1}^{n_1} \bigcup_{j=1}^{n_2} (A_{1,i} \cap A_{2,j}) = \bigcup_{(i,j) \in K} (A_{1,i} \cap A_{2,j}),$$

где

$$K = \big\{ (i,j) \mid i \in \{1, \ldots, n_1\},\ j \in \{1, \ldots, n_2\}, \\ A_{1,i} \cap A_{2,j} \neq \varnothing \big\}.$$

Но для $(i,j) \in K$ или $A_{1,i} \cap A_{2,j} = A_{1,i}$ или $A_{1,i} \cap A_{2,j} = A_{2,j}$. Наконец, рассмотрим $X \diagdown A$, где $A = \sum\limits_{i=1}^{n} A_i, \quad A_i \in \mathcal{H}, \quad i = \overline{1,n}$. Пусть $k = \max\left\{\Gamma\left(A_i\right) \mid i = \overline{1,n}\right\}$. Тогда $\mathcal{H}_k = \{A'_1, \ldots, A'_m\}$, и в силу предложения $X = \sum\limits_{i \in I} A'_i$, где $I \subset M = \{1, \ldots, m\}$. Следовательно, $X \diagdown A = \sum\limits_{M \diagdown I} A_i$.■

Определим продолжение μ на $\mathcal{FU}\left(\mathcal{H}\right)$ по правилу

$$\mu\left(A\right) = \begin{cases} 0, & \text{если } A = \varnothing, \\ \sum\limits_{i=1}^{n} \mu\left(A_i\right), & \text{если } A = \sum\limits_{i=1}^{n} A_i,\ A_i \in \mathcal{H},\ i = \overline{1,n}. \end{cases}$$

Покажем, что это продолжение определено корректно, т. е. если $A = \sum\limits_{i=1}^{n_1} A_{1i} = \sum\limits_{i=1}^{n_1} A_{2i}, \quad A_{1i}, A_{2i} \in \mathcal{H}$, то $\sum\limits_{i=1}^{n_1} \mu\left(A_{1i}\right) = \sum\limits_{i=1}^{n_1} \mu\left(A_{2i}\right)$. Пусть $m = \max\left\{\Gamma\left(A_{ki}\right) \mid i = \overline{1,n_k},\ k = 1,2\right\}$. Имеем:

$$A_{ki} = \sum_{j=1}^{n_{ki}} A_{kij}, \quad A_{kij} \in \mathcal{H},\ j = \overline{1,n_{ki}},\ i = \overline{1,n_k},\ k = 1,2.$$

Поскольку μ аддитивна на $\mathcal{H}$, то

$$\mu\left(A_{ki}\right) = \sum_{j=1}^{n_{ki}} \mu\left(A_{kij}\right), \quad i = \overline{1,n_k},\ k = 1,2, \tag{1.8}$$

Следовательно,

$$\sum_{i=1}^{n_k} \mu\left(A_{ki}\right) = \sum_{i=1}^{n_k}\sum_{j=1}^{n_{ki}} \mu\left(A_{kij}\right), \quad k = 1,2.$$

Но

$$\sum_{i=1}^{n_1}\sum_{j=1}^{n_{1i}} A_{1ij} = \sum_{i=1}^{n_2}\sum_{j=1}^{n_{2i}} A_{2ij} = A,$$

откуда

$$\sum_{i=1}^{n_k}\sum_{j=1}^{n_{ki}} A_{kij} = \sum_{s \in I} B_s, \quad k = 1,2,$$

где $\{B_1, \ldots, B_n\} = \mathcal{H}_m, \quad I = \{s \in \{1, \ldots, n\} \,|B_s \subset A\}$. Тогда правая часть 1.8 равняется $\sum\limits_{s \in I} \mu\left(B_s\right)$ как для $k = 1$, так и для $k = 2$. ■

Лемма 1.6.10 *Если дискретно шкалированное иерархическое пространство $(X, \mathcal{H})$ компактно, то μ — мера на $\mathcal{FU}\left(\mathcal{H}\right)$.*

Доказательство. Пусть $A_1, A_2 \in \mathcal{FU}(\mathcal{H})$, $A_1 \cap A_2 \neq \varnothing$, $A_k = \sum\limits_{i=1}^{n_k} A_{ki}$, $A_{ki} \in \mathcal{H}$, $i = \overline{1, n_k}$, $k = 1, 2$. По определению, положим $\mu(A_k) = \sum\limits_{i=1}^{n_k} \mu(A_{ki})$, $k = 1, 2$. Так как $A_{1,i} \cap A_{2,j} = \varnothing$ $\forall i, j$, и μ аддитивна на $\mathcal{H}$, то

$$\mu(A_1 + A_2) = \mu\left(\sum_{k=1}^{2}\sum_{i=1}^{n_k} A_{ki}\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{2}\sum_{i=1}^{n_k} \mu(A_{ki}) = \mu(A_1) + \mu(A_2).$$

Предположим, что $A_1 \supset A_2 \supset \ldots \in \mathcal{FU}(\mathcal{H})$ и $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i = \varnothing$. Тогда в силу свойства компактности существует k_0 такое, что $\bigcap\limits_{i=1}^{k_0} A_i = \varnothing$. Следовательно, $\lim\limits_{k\to\infty} \mu\left(\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \mu\left(\bigcap\limits_{i=1}^{k_0} A_i\right) = \varnothing$. Это завершает доказательство. ■

Для метрического пространства (X, d) через $\mathcal{B}(d)$ обозначим σ-алгебру всех борелевских подмножеств X и для иерархического пространства $(X, \mathcal{H})$ через $\sigma(\mathcal{H})$ обозначим σ-алгебру подмножеств X, образованных $\mathcal{H}$. Из теоремы следует

Предложение 1.6.11 *Предположим, что $(X, \mathcal{H})$ — хаусдорфово компактное иерархическое пространство. Тогда $\mathcal{B}(d_\varphi) = \sigma(\mathcal{H})$ для любой калибровочной функции φ.*

Из леммы следует

Предложение 1.6.12 *Пусть $(X, \mathcal{H})$ — хаусдорфово компактное дискретно шкалированное иерархическое пространство. Тогда любая аддитивная функция на $\mathcal{H}$ может быть продолжена до меры на $\sigma(\mathcal{H})$. Это продолжение единственно.*

Предложение 1.6.13 *Предположим, что $(X, \mathcal{H})$ — хаусдорфово компактное дискретно шкалированное иерархическое пространство, $\{x\} \notin \mathcal{H}$ $\forall x \in X$, и μ — строго положительная аддитивная функция на $\mathcal{H}$. Тогда μ строго монотонна.*

Доказательство. Пусть $A, A_1 \in \mathcal{H}$, $A \supset A_1$, $A \neq A_1$. Тогда $A \in \mathcal{H}_k$, $A_1 \in \mathcal{H}_l$, $k < l$. В силу предположения, предложения и предложения $\mathcal{H}_l = \{A_1, A_2, \ldots, A_m\}$, $m > 1$, и $A = \sum\limits_{i\in I} A_i$, $I \subset \{1, \ldots, m\}$, $1 \in I$, $I \diagdown \{1\} \neq \varnothing$. Тогда $\mu(A) - \mu(A_1) = \sum\limits_{I\diagdown\{1\}} \mu(A_i) > 0$.

Некоторые конструкции мер на компактных неархимедовых метрических пространствах

Далее (X,d) — компактное неархимедово метрическое пространство и h — неотрицательная неубывающая функция на $(0,\infty)$. Для шара B пусть S — произвольное не более чем счетное семейство замкнутых шаров $B[x_1,r_1], B[x_2,r_2],\ldots$, такое, что $r_i \leqslant \varepsilon \quad \forall i$ и $B \subset \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} B[x_i,r_i]$. Обозначим $\zeta_h(S) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} h(r_i)$. Положим

$$m_{H,d,h}(B,\varepsilon) = \inf_S \zeta_h(S), \tag{1.9}$$

В силу свойства компактности и иерархичности замкнутых шаров в неархимедовом метрическом пространстве мы можем ограничиться конечными семействами непересекающихся шаров такими, что $B = \sum\limits_{i=1}^{|S|} B[x_i,r_i]$, т. е. семействами, которые являются разбиениями B. Если мы дополнительно потребуем, что каждое семейство S состоит из шаров одинакового радиуса, то соответствующая величина обозначается через $m_{E,d,h}(B,\varepsilon)$. Очевидно, что $m_{H,d,h}(B,\varepsilon)$ и $m_{E,d,h}(B,\varepsilon)$ не убывают, когда ε стремится к нулю. Следовательно, существуют конечные или бесконечные пределы

$$\mu_{H,d,h}(B) = \lim_{\varepsilon\to 0} m_{H,d,h}(B,\varepsilon), \tag{1.10}$$

$$\mu_{E,d,h}(B) = \lim_{\varepsilon\to 0} m_{E,d,h}(B,\varepsilon). \tag{1.11}$$

Здесь и далее, говоря, что предел 1.10 или 1.11 существует, мы имеем в виду, что он существует и конечен.

Предложение 1.6.14 *Предположим, что предел 1.11 существует. Тогда* $\mu_{E,d,h}(B) = \varliminf\limits_{\varepsilon\to 0} \zeta_h(S(B,\varepsilon))$.

Доказательство. Следует из 1.10.

Теорема 1.6.15 *Если предел 1.10 существует для каждого* $B \in \mathcal{CBL}(X,d)$*, то функция* $\mu_{H,d,h}$ *аддитивна на* $\mathcal{CBL}(X,d)$.

Доказательство. Пусть $B = \sum\limits_{i=1}^{n} B_i$, $B_i = B[x,r_i]$, $r = \min r_i$, $\varepsilon \leqslant r$. Обозначим через S произвольное разбиение B, образуемое шарами с радиусами не большими, чем ε. Ясно, что существует представление $S = \sum S_i$, где S_i — разбиение B_i, образуемое шарами с радиусами $\leqslant \varepsilon$. Тогда мы имеем $\zeta_h(S) = \sum\limits_{i=1}^{n} \zeta_h(S_i)$. Так как S_i для различных i никак не связаны, то

$$\inf_{S_1,\ldots,S_n} \sum_{i=1}^{n} \zeta_h(S_i) = \sum_{i=1}^{n} \inf_{S_1,\ldots,S_n} \zeta_h(S_i).$$

Но

$$\inf_{S_1,\ldots,S_n}\sum_{i=1}^{n}\zeta_h(S_i)=m_{H,d,h}(B,\varepsilon)$$

и

$$\sum_{i=1}^{n}\inf_{S_1,\ldots,S_n}\zeta_h(S_i)=\sum_{i=1}^{n}m_{H,d,h}(B_i,\varepsilon).$$

Таким образом, мы получаем

$$m_{H,d,h}(B,\varepsilon)=\sum_{i=1}^{n}m_{H,d,h}(B_i,\varepsilon).$$

Отсюда

$$\mu_{H,d,h}(B)=\sum_{i=1}^{n}\mu_{H,d,h}(B_i),$$

поскольку ε произвольно. ■

Из этой теоремы и 1.6.12 получаем следующее

Следствие 1.6.16 *Существует некоторая мера на $\mathcal{B}$, являющаяся продолжением $\mu_{H,d,h}$.*

Эта мера называется *хаусдорфовой* мерой относительно d и h и также обозначается $\mu_{H,d,h}$. Если существует мера на $\mathcal{B}$ такая, что она является продолжением $\mu_{E,d,h}$, то мы говорим, что она является *энтропийной* мерой относительно d и h и обозначаем ее $\mu_{E,d,h}$. Далее, если $h(t)=t$, мы пишем $\mu_{H,d}$ вместо $\mu_{H,d,h}$.

Определение 1.6.17 *Неархимедово метрическое пространство назовем сферически однородным, если в нем любые два замкнутых шара одинакового радиуса изометричны. Множество в неархимедовом метрическом пространстве назовем сферически однородным, если оно сферически однородно как неархимедово метрическое пространство относительно индуцированного расстояния.*

Легко доказать следующее

Предложение 1.6.18 *В сферически однородном неархимедовом метрическом пространстве каждый замкнутый шар — сферически однородное множество.*

Пусть (X,d) — компактное сферически однородное неархимедово метрическое пространство, $B[x,r]$ — произвольный замкнутый шар в X, $s\in(0,\ r)$. В силу предыдущего утверждения и 1.4.20 существует единственное разбиение шара $B[x,r]$ на замкнутые шары радиуса s, причем в силу сферической однородности каждый шар радиуса r разбивается на одно и то же количество шаров радиуса s. Мы будем обозначать это количество $\nu(r,s)$. Если $r = \operatorname{diam} X$, т. е. то вместо $\nu(r,s)$ будем писать $\nu_0(s)$. Очевидно, что при $t < s < r$

$$\nu(r,t) = \nu(r,s)\nu(s,t); \qquad \nu_0(s) = \nu_0(r)\nu(r,s). \tag{1.12}$$

Теорема 1.6.19 *Предположим, что (X,d) сферически однородно. Тогда $\mu_{H,d,h} = \mu_{E,d,h}$.*

Доказательство. Достаточно доказать, что для любого шара B^0 и любого семейства $S^0 = \{B[x_1,r_1],\ldots, B[x_n,r_n]\}$, являющегося разбиением B^0, существует разбиение $S^=$, состоящее из шаров с одинаковым радиусом $r^= \leqslant \max(r_1,\ldots,r_n)$ и такое, что $\zeta_h(S^=) \leqslant \zeta_h(S^0)$. Предположим для определенности, что $r_1^{(0)} \geqslant \ldots \geqslant r_{n^{(0)}}^{(0)}$. Пусть $r > s$, $B \subset X$ — шар с радиусом r и S — разбиение B, образуемое шарами одинакового радиуса s. Мы будем писать $s \prec r$, если $\zeta_h(S) < h(r)$, и $s \not\prec r$ в противном случае. Эти отношения являются корректно определенными в силу сферической однородности. Если $r_n \not\prec r_{n-1}$, заменим все шары из S^0 с радиусом r_n шарами с радиусом r_{n-1}, содержащими их. Если $r_n \prec r_{n-1}$, то, наоборот, заменим каждый шар радиуса r_{n-1} шарами радиуса r_n содержащимися в нем. Затем рассмотрим r_{n-1} и r_{n-2}, и так далее. В результате мы получим искомое разбиение. ■

Пусть $D = \{r^{(0)}, r^{(1)},\ldots\}$, $r^{(i)} \downarrow 0$. Занумеруем все шары из $\mathcal{CBL}(X,d)$ следующим образом. Пусть $B^{(0)} = X$, $B_1^{(1)},\ldots,B_{\nu^{(0)}}^{(1)}$ — все шары радиуса r_1, $B_{i_1,1}^{(2)},\ldots, B_{i_1,\nu_i^{(1)}}^{(2)}$ — все шары радиуса r_2, принадлежащие шару $B_i^{(1)}$, и так далее. Положим

$$\mu_{I,d}(B^{(0)}) = 1, \quad \mu_{I,d}(B_i^{(1)}) = 1/\nu^{(0)},$$

$$\mu_{I,d}(B_{i_1,i_2,\ldots,i_k,i}^{(k)}) = 1/\prod_{l=0}^{k-1} \nu_{i_1,\ldots,i_l}^{(l)}, \quad k = 2,3,\ldots$$

Другими словами,

$$\mu_{I,d}(B_{i_1,i_2,\ldots,i_k,i}^{(k)}) = \mu_{I,d}(B_{i_1,i_2,\ldots,i_k}^{(k-1)}) = 1/\nu_{i_1,\ldots,i_{k-1}}^{(k-1)}.$$

Нетрудно показать, что $\mu_{I,d}$ аддитивна на $\mathcal{CBL}(X,d)$, и в силу 1.6.12 она может быть продолжена до меры на $\mathcal{B}$. Подобно предыдущему, используем то же обозначение $\mu_{I,d}$ для этой меры и назовем ее *иерархической* мерой.

Предположим, что (X,d) — компактное неархимедово метрическое пространство, $\operatorname{diam}(X) = r^{(0)}$, и для произвольного $\varepsilon \in (0, r^{(0)}]$ пусть $S = \{B[x_1,\varepsilon],\ldots, B[x_{\nu_0},\varepsilon]\}$ — разбиение X. Пусть $\varepsilon > 0$. Множество $A \subset X$ называется *ε-сетью* в X, если для каждого $x \in X$ существует $y \in A$

такое, что $d(x, y) \leqslant \varepsilon$. Известно [21], что в компактном метрическом пространстве для каждого $\varepsilon > 0$ существует конечная ε-сеть. Конечная ε-сеть называется *минимальной*, если не существует ε-сети с меньшим числом элементов. Минимальная ε-сеть, вообще говоря, не единственна, однако можно легко доказать следующее

Предложение 1.6.20 *Пусть* (X, d) *— компактное неархимедово метрическое пространство,* $B[x_1, \varepsilon], \ldots, B[x_{\nu_0(\varepsilon)}, \varepsilon]$ *— разбиение* X *на шары радиуса* ε *(в силу 1.4.20 оно существует и единственно). Тогда множество минимальных* ε*-сетей не пусто, и любая такая сеть* A *имеет вид:* $A = \{y_1, \ldots, y_{\nu_0(\varepsilon)}\}$*, где* $y_i \in B[x_i, \varepsilon]$*,* $i = 1, \ldots, \nu_0(\varepsilon)$.

Пусть u — непрерывная функция на X, и для каждого $\varepsilon \in (0, r^{(0)}]$ $U_\varepsilon = \{x_{\varepsilon,1}, \ldots, x_{\varepsilon,\nu_0(\varepsilon)}\}$ — некоторая минимальная ε-сеть. Обозначим

$$\widehat{J}(U_\varepsilon, u) = \frac{1}{\nu_0(\varepsilon)} \sum_{i=1}^{\nu_0(\varepsilon)} u(x_{\varepsilon,i})$$

и положим

$$J(u) = \lim_{\varepsilon \to 0} \widehat{J}(U_\varepsilon, u), \tag{1.13}$$

если предел в правой части существует и не зависит от выбора U_ε для каждого ε. Последнее условие, однако, является излишним, как показывает следующая теорема.

Теорема 1.6.21 *Предположим, что* $\operatorname{diam}(X) = r^{(0)}$*, для каждого* $\varepsilon \in (0, r^{(0)}]$ $U'_\varepsilon, U''_\varepsilon$ *— минимальные* ε*-сети в* X*,* $u \in C(X)$*, и предел*

$$J'(u) = \lim_{\varepsilon \to 0} \widehat{J}(U'_\varepsilon, u)$$

существует. Тогда предел

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \widehat{J}(U''_\varepsilon, u)$$

существует и равен $J'(u)$.

Доказательство. Пусть $\alpha > 0$ произвольно. Поскольку u равномерно непрерывна, то существует $\varepsilon_1 > 0$ такое, что $d(x, y) < \varepsilon_1 \Rightarrow |u(x) - u(y)| < \alpha/2$. Далее, существует $\varepsilon_2 > 0$ такое, что $\varepsilon < \varepsilon_2 \Rightarrow |\widehat{J}(U'_\varepsilon, u) - J'(u)| < \alpha/2$. Положим $\varepsilon' = \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$. Предположим, что $\varepsilon < \varepsilon'$. Пусть $U'_\varepsilon = \{x'_{\varepsilon,1}, \ldots, x'_{\varepsilon,\nu_0(\varepsilon)}\}$, $U''_\varepsilon = \{x''_{\varepsilon,1}, \ldots, x''_{\varepsilon,\nu_0(\varepsilon)}\}$. В силу 1.6.20 мы можем считать, что $d(x'_{\varepsilon,i}, x''_{\varepsilon,i}) \leqslant \varepsilon$, $i = \overline{1, \nu_0(\varepsilon)}$, без потери общности. Тогда

$$|\widehat{J}(U''_\varepsilon, u) - J'(u)| \leqslant$$
$$\leqslant |\widehat{J}(U''_\varepsilon, u) - \widehat{J}(U'_\varepsilon, u)| + |\widehat{J}(U'_\varepsilon, u) - J'(u)| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\nu_0(\varepsilon)} \sum_{i=1}^{\nu_0(\varepsilon)} |u(x'_{\varepsilon,i}) - u(x''_{\varepsilon,i})| + \frac{\alpha}{2} \leqslant \alpha.$$

■

Следующее утверждение очевидно.

Предложение 1.6.22 *Для любой минимальной ε-сети U_ε отображение $\widehat{J}(U_\varepsilon, \cdot)\colon C(X) \ni u \to \widehat{J}(U_\varepsilon, u)$ является линейным ограниченным функционалом с единичной нормой.*

Предложение 1.6.23 *Пусть $C_J(X)$ — множество функций и такое, что для каждой функции $u \in C_J(X)$ предел 1.13 существует. Тогда $C_J(X)$ — полное подпространство пространства $C(X)$, J — линейный ограниченный функционал на банаховом пространстве $(C_J(X), \|\cdot\|_{C(X)})$, и $\|J\| = 1$.*

Доказательство. Пусть U_ε — ε-сеть, $u, v \in C_J(X)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Используя предыдущее предложение, мы получим

$$J(\alpha u + \beta v) = \lim_{\varepsilon\to 0} \widehat{J}(U_\varepsilon, \alpha u + \beta v) =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} [\alpha \widehat{J}(U_\varepsilon, u) + \beta \widehat{J}(U_\varepsilon, v)] = \alpha J(u) + \beta J(v),$$

$$|J(u)| = |\lim_{\varepsilon\to 0} \widehat{J}(U_\varepsilon, u)| \leqslant \|u\|_{C(X)},$$

поскольку $|(U_\varepsilon, u)| \leqslant \|u\|_{C(X)}$ $\forall \varepsilon$.

Следствие 1.6.24 *Пусть компактное неархимедово метрическое пространство (X, d) таково, что предел 1.13 существует для каждого $u \in C(X)$. Тогда J является линейным ограниченным функционалом на банаховом пространстве $C(X)$ и $\|J\| = 1$.*

В условиях предыдущего следствия мы можем обозначить $\mu_{R,d}(B) = J(\chi_B)$, так как индикатор любого шара B является непрерывной функцией (см. 1.4.26). Мы назовем соответствующую меру $\mu_{R,d}$ на $\mathcal{B}$ *мерой Рвачевых.*

Следующие три результата дают достаточные условия существования предела 1.13 для всех $u \in C(X)$.

Предложение 1.6.25 *Если предел 1.13 существует для всех $u \in C_F(X)$, то он существует для всех $u \in C(X)$.*

Доказательство. Пусть $u \in C(X)$. В силу 1.4.28 существует последовательность $u_i \in C_F(X)$ такая, что $\|u_i - u\|_{C(X)} \underset{i\to\infty}{\to} 0$, и в силу 1.6.23 существует $J^* = \lim_{i\to\infty} J(u_i)$. Предположим, что $\alpha > 0$ произвольно и i^* таково, что $i > i^* \Rightarrow \|u_i - u\| < \alpha,\ \ |J(u_i) - J^*| < \alpha$. Зафиксируем $i > i^*$. Для произвольной минимальной ε-сети U_ε имеем:

$$\left|\widehat{J}(U_\varepsilon, u) - J^*\right| \leqslant \left|\widehat{J}(U_\varepsilon, u) - \widehat{J}(U_\varepsilon, u_i)\right| +$$

$$+ \left|\widehat{J}(U_\varepsilon, u_i) - J(u_i)\right| + |J(u_i) - J^*|\,.$$

Первое слагаемое в правой части не больше, чем α, в силу 1.6.22, и третье также не больше, чем α. Существует ε_0 такое, что для всех $\varepsilon < \varepsilon_0$ второе слагаемое меньше, чем α. Таким образом, для $\varepsilon < \varepsilon_0$ получаем $\left|\widehat{J}(U_\varepsilon, u) - J^*\right| < 3\alpha$. Это завершает доказательство. ■

Используя 1.4.27, получим

Следствие 1.6.26 *Если предел существует для каждого индикатора шара, то он существует для всех $u \in C(X)$.*

Теорема 1.6.27 *Предположим, что (X, d) — сферически однородное компактное неархимедово метрическое пространство. Тогда предел 1.13 существует для каждого $u \in C(X)$.*

Доказательство. В силу предыдущего результата достаточно доказать утверждение для $u = \chi_B$, где B — произвольный шар, r — радиус B и $S_0(r) = \{B_{r,1}[r], \ldots, B_{r,\nu_0(r)}[r]\}$ — разбиение X. Для определенности пусть $B = B_1[r]$. Далее, пусть $\varepsilon < r$ и $S(\varepsilon) = \{B_{\varepsilon,1}[\varepsilon], \ldots, B_{\varepsilon,\nu_0(\varepsilon)}[\varepsilon]\}$ — разбиение X. На основании 1.6.20 любая минимальная ε-сеть U_ε может быть представлена в виде $U_\varepsilon = \{x_{\varepsilon,1}, \ldots, x_{\varepsilon,m}\}$, где $x_{\varepsilon,i} \in B_{\varepsilon,i}[\varepsilon]$, $i = \overline{1, \nu_0(\varepsilon)}$. В силу сферической однородности все шары $B_{r,k}[r]$ содержат одинаковое число $\nu(r, \varepsilon)$ шаров $B_{\varepsilon,i}[\varepsilon]$ и, следовательно, точек $x_{\varepsilon,i}$. Следовательно,

$$\sum_{i=1}^{\nu_0(\varepsilon)} u(x_{\varepsilon,i}) = \sum_{x_{\varepsilon,i} \in B} u(x_{\varepsilon,i}) + \sum_{k=2}^{\nu_0(r)} \left[\sum_{x_{\varepsilon,i} \in B_{r,k}[r]} u(x_{\varepsilon,i})\right] =$$

$$= \sum_{x_{\varepsilon,i} \in B} 1 + \sum_{k=2}^{\nu_0(r)} \left[\sum_{x_{\varepsilon,i} \in B_{r,k}[r]} 0\right] = \nu(r, \varepsilon).$$

Поскольку согласно 1.12 $\nu_0(\varepsilon) = \nu_0(r)\nu(r, \varepsilon)$, мы получаем. что

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \widehat{J}(U_\varepsilon, u) = \frac{1}{\nu_0(\varepsilon)}\, \nu(r, \varepsilon) = \frac{1}{\nu_0(r)}.$$

Это завершает доказательство. ■

Выберем функцию h некоторым специальным образом, а именно, положим $h_0(r) = \frac{1}{\nu_0(r)}$, и рассмотрим соотношения между μ_{H,d,h_0}, μ_{E,d,h_0}, μ_{I,d,h_0}, μ_{R,d,h_0}.

Лемма 1.6.28 *Для любого $r > 0$ выполняется равенство $\zeta_{h_0}(S_0(r)) = 1$.*

Доказательство.

$$\zeta_{h_0}(S_0(r)) = \sum_{i=1}^{\nu_0(r)} h_0(r) = \nu_0(r)\frac{1}{\nu_0(r)} = 1.$$

■

Предложение 1.6.29 *$\mu_{H,d,h_0}(X)$ и $\mu_{E,d,h_0}(X)$ существуют и равны 1.*

Доказательство. Для $\mu_{H,d,h_0}(X)$ это утверждение сразу следует из предыдущей леммы. Далее, $\zeta_{h_0}(S_0(\varepsilon)) = \sum\limits_{i=1}^{\nu_0(r)} h_0(r) = \nu_0(r)\frac{1}{\nu_0(r)} = 1$. Отсюда и из 1.6.14 $\mu_{E,d,h_0}(X) = \varliminf\limits_{\varepsilon\to 0} \zeta_{h_0}(S_0(\varepsilon)) = 1$.

Теорема 1.6.30 *Если существует мера μ_{E,d,h_0} на σ-алгебре борелевских множеств $\mathcal{B}$, то для каждого шара B предел $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\zeta_{h_0}(S_0^B(\varepsilon))$ существует и равен $\mu_{E,d,h_0}(B)$.*

Доказательство. Пусть $B = B[x,r]$ — произвольный шар, $S_0(r) = \{B_1 = B[x,r], B_2, \dots, B_{\nu_0(r)}\}$, $\varepsilon \leqslant r$ произвольно и $S_0^{B_i} = \{B' \in S_0(\varepsilon) \mid B \subset B_i\}$. Тогда $S(B,\varepsilon) = S_0^B(\varepsilon)$. Покажем, что $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\zeta_{h_0}(S_0^B(\varepsilon))$ существует. Предположим противное. Тогда существует $\delta > 0$ такое, что

$$\varlimsup_{\varepsilon\to 0}\zeta_{h_0}(S_0^B(\varepsilon)) - \varliminf_{\varepsilon\to 0}\zeta_{h_0}(S_0^B(\varepsilon)) > \delta. \tag{1.14}$$

Имеем:

$$\sum_{i=1}^{\nu_0(r)} \varliminf_{\varepsilon\to 0}\zeta_{h_0}(S_0^{B_i}(\varepsilon)) \leqslant \varliminf_{\varepsilon\to 0}\zeta_{h_0}(S_0^B(\varepsilon)) + \varliminf_{\varepsilon\to 0}\sum_{i=2}^{\nu_0(r)}\zeta_{h_0}(S_0^{B_i}(\varepsilon)). \tag{1.15}$$

В силу 1.6.28

$$\varliminf_{\varepsilon\to 0}\sum_{i=2}^{\nu_0(r)}\zeta_{h_0}(S_0^{B_i}(\varepsilon)) = 1 - \zeta_{h_0}(S_0^B(\varepsilon)).$$

Следовательно, правая часть 1.15 не больше, чем

$$\begin{gathered}\varliminf_{\varepsilon\to 0}\zeta_{h_0}(S_0^B(\varepsilon)) + \varliminf_{\varepsilon\to 0}(1 - \zeta_{h_0}(S_0^B(\varepsilon))) = \\ = \varliminf_{\varepsilon\to 0}\zeta_{h_0}(S_0^B(\varepsilon)) + 1 - \varlimsup_{\varepsilon\to 0}\zeta_{h_0}(S_0^B(\varepsilon)) = \\ = 1 - [\varlimsup_{\varepsilon\to 0}\zeta_{h_0}(S_0^B(\varepsilon)) - \varliminf_{\varepsilon\to 0}\zeta_{h_0}(S_0^B(\varepsilon))] \leqslant 1 - \delta\end{gathered}$$

в силу 1.14. С другой стороны, используя 1.6.14, аддитивность μ_{E,d,h_0}и 1.6.29 , получаем:

$$\sum_{i=1}^{\nu_0(r)} \varliminf_{\varepsilon\to 0} \zeta_{h_0}(S_0^{B_i}(\varepsilon)) = \sum_{i=1}^{\nu_0(r)} \mu_{E,d,h_0}(B_i) = \mu_{E,d,h_0}(X) = 1.$$

Это противоречие доказывает существование $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \zeta_{h_0}(S_0^B(\varepsilon))$, где согласно 1.6.14

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \zeta_{h_0}(S_0^B(\varepsilon)) = \mu_{E,d,h_0}(B). \tag{1.16}$$

Ясно, что

$$\zeta_{h_0}(S_0^B(\varepsilon)) = \sum_{i=1}^{\nu(x,r,\varepsilon)} h_0(\varepsilon) = \nu(x,r,\varepsilon)h_0(\varepsilon) = \frac{\nu(x,r,\varepsilon)}{\nu_0(\varepsilon)}. \tag{1.17}$$

Таким образом, используя 1.6.14, получаем:

$$\mu_{E,d,h_o}(B) = \lim_{\varepsilon\to 0} \tfrac{\nu(x,r,\varepsilon)}{\nu_0(\varepsilon)}.$$

■

Теорема 1.6.31 *Если одна из мер μ_{E,d,h_0} и μ_R существует, то существует и другая, и эти эти меры равны.*

Доказательство. Воспользуемся обозначениями и формулами из доказательства предыдущей теоремы. Пусть $U_\varepsilon = \{x_{\varepsilon,1}, \ldots, x_{\varepsilon,\nu_0(\varepsilon)}\}$ — минимальная ε-сеть в X. В силу 1.6.20 $|B \cap U_\varepsilon| = \nu(x,r,\varepsilon)$. Отсюда

$$\widehat{J}(U_\varepsilon, \chi_B) = \frac{1}{\nu_0(\varepsilon)} \sum_{i=1}^{\nu_0(\varepsilon)} \chi_B(x_{\varepsilon,i}) = \frac{\nu(x,r,\varepsilon)}{\nu_0(\varepsilon)}. \tag{1.18}$$

Используя 1.17 и 1.16, получаем, что $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \widehat{J}(U_\varepsilon, \chi_B)$ существует и равен $\mu_{E,d,h_0}(B)$.

Пусть теперь $\mu_{R,d,h_o}(B)$ существует для любого шара B. В силу 1.17

$$\zeta_{h_0}(S(B,\varepsilon)) = \tfrac{\nu(x,r,\varepsilon)}{\nu_0(\varepsilon)}.$$

Согласно 1.18 и 1.16 $\mu_{E,d,h_0}(B)$ существует и равна $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \widehat{J}(U_\varepsilon, \chi_B)$.■

Теорема 1.6.32 *Предположим, что (X,d) — сферически однородное компактное неархимедово метрическое пространство. Тогда меры μ_{H,d,h_0}, μ_{E,d,h_0}, μ_{R,d,h_0}, $\mu_{I,d}$ существуют, равны между собой и обладают свойством лебеговской меры, а именно: все шары одного радиуса имеют одну и ту же меру.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку справедливы 1.6.19, 1.6.27, и 1.6.31, остается доказать, что $\mu_{E,d,h_0} = \mu_{I,d}$. Мы по-прежнему используем обозначения и формулы из доказательства теоремы 1.6.30. В силу сферической однородности всякий шар радиуса r разбивается на одно и то же число $\nu(r,s)$ шаров радиуса $s < r$, поэтому, во-первых, для шара $B = B[r]$ $\mu_I(B) = \frac{1}{\nu_0(r)}$, а во-вторых, поскольку при $\varepsilon < r$ согласно 1.12 $\nu_0(\varepsilon) = \nu_0(r) \cdot \nu_0(r,\varepsilon)$, то $\mu_I(B) = \nu_0(r,\varepsilon)/\nu_0(\varepsilon)$ при всех $\varepsilon < r$, откуда следует существование предела и равенство

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\nu(r,\varepsilon)}{\nu_0(\varepsilon)} = \mu_I(B).$$

Теперь осталось применить 1.17 и 1.16. Последнее утверждение теоремы следует из конструкции $\mu_{I,d}$ и сферической однородности.■

Теперь покажем, что свойство сферической однородности существенно для предыдущего результата.

Пример 1.6.33

Обозначим

$$d_M(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{если } x = y, \\ \max(x,y), & \text{если } x \neq y, \end{cases}$$

$$A^+ = \{(x_1, x_2, \ldots)\},$$

$$\text{где } x_i = \begin{cases} 1 \text{ или } 2, & \text{если } i = 2j+1 \text{ для j=1,2,\ldots}, \\ 1, & \text{если } i{=}2j \text{ для j=1,2,\ldots или i=1}, \end{cases}$$

$$A^- = \{(x_1, x_2, \ldots)\},$$

$$\text{где } x_i = \begin{cases} -1, & \text{если } i = 2j+1 \text{ для j=0,1,2,\ldots}, \\ -1 \text{ или } -2, & \text{если } i = 2j \text{ для j=1,2,\ldots}, \end{cases}$$

$$X{=}A^+ \cup A^-,\ d(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{если } x = y, \\ 1/k(x,y) & \text{в противном случае}, \end{cases}$$

где

$$k(x,y) = \min\{i \mid x_i \neq y_i\}.$$

Ясно, что X — компактное неархимедово метрическое пространство, $X = B[1]$, $S_0(\frac{1}{2}) = \{B_1(\frac{1}{2}), B_2(\frac{1}{2})\}$, где $B_1(\frac{1}{2}) = A^+$, $B_2(\frac{1}{2}) = A^-$, откуда

$$\mu_{I,d}(A^+) = \mu_{I,d}(A^-) = \frac{1}{2}. \tag{1.19}$$

Однако, $\operatorname{diam}(A^+) = \frac{1}{2}$, $\operatorname{diam}(A^-) = \frac{1}{3}$. Таким образом, X не является сферически однородным. Определим:

$$\nu\left(A^+,\frac{1}{2j-1}\right)=\nu\left(B_1\Big(\frac{1}{2}\Big),\frac{1}{2j-1}\right)=$$
$$=|\{(x_1,x_2,\ldots)|x_1\in\{1\},x_2\in\{1\},x_3\in\{\,1,2\},$$
$$x_4\in\{1\},\ldots,x_{2j-1}\in\{1,2\}\}|=$$
$$=|\{1\}|\cdot|\{1\}|\cdot|\{1,2\}|\cdot|\{1\}|\cdot\ldots\cdot|\{1,2\}|=\prod_{s=1}^{j-1}2=2^{j-1},$$
$$\nu\left(A^+,\frac{1}{2j}\right)=$$
$$=|\{(x_1,x_2,\ldots)\mid x_1\in\{1\}\,,x_2\in\{1\}\,,x_3\in\{1,2\}\,,$$
$$x_4\in\{1\}\,,\ldots,x_{2j-1}\in\{1,2\}\,,x_{2j}\in\{1\}\}|=$$
$$=|\{1\}|\cdot|\{1\}|\cdot|\{1,2\}|\cdot|\{1\}|\cdot\ldots\cdot|\{1,2\}|\cdot|\{1\}|=$$
$$=\nu\left(A^+,\frac{1}{2j-1}\right)=2^{j-1}.$$

Аналогичным образом

$$\nu\left(A^-,\frac{1}{2j-1}\right)=\nu\left(B_2(\frac{1}{2}),\frac{1}{2j-1}\right)=$$
$$=|\{(x_1,x_2,\ldots)|x_1\in\{-1\}\,,x_2\in\{-1,-2\}\,,x_3\in\{-1\}\,,$$
$$x_4\in\{-1,-2\}\,,\ldots,x_{2j-1}\in\{-1\}\}|=$$
$$=|\,\{-1\}\,|\cdot|\,\{-1,-2\}\,|\cdot|\,\{-1\}\,|\cdot|\,\{-1,-2\}\,|\cdot\ldots\cdot$$
$$\cdot|\,\{-1\}\,|=\prod_{s=1}^{j-1}2=2^{j-1},$$
$$\nu\left(A^-,\frac{1}{2j}\right)=|\{(x_1,x_2,\ldots)|x_1\in\{-1\}\,,x_2\in\{-1,-2\}\,,$$
$$x_3\in\{-1\}\,,x_4\in\{-1,-2\}\,,\ldots,x_{2j-1}\in\{-1\}\,,$$
$$x_{2j}\in\{-1,-2\}\}|=|\,\{-1\}\,|\cdot|\,\{-1,-2\}\,|\cdot|\,\{-1\}\,|\cdot$$
$$\cdot|\,\{-1,-2\}\,|\cdot\ldots\cdot|\,\{-1\}\,|\cdot|\,\{-1,-2\}\,|=\prod_{s=1}^{j}2=2^{j}.$$

Отсюда

$$\nu_0\left(\frac{1}{2j-1}\right)=\nu\left(A^+,\frac{1}{2j-1}\right)+\nu\left(A^-,\frac{1}{2j-1}\right)=$$
$$=2^{j-1}+2^{j-1}=2^j,$$

$$\nu_0\left(\frac{1}{2j}\right) = \nu\left(A^+, \frac{1}{2j}\right) + \nu\left(A^-, \frac{1}{2j}\right) =$$
$$= 2^{j-1} + 2^j = 3 \cdot 2^{j-1}.$$

Применим 1.17 к $B = A^+$ и $\varepsilon = 1/i,\ \ i \geqslant 2$. Получим:

$$\zeta_{h_0}\left(S^{A^+}_{\frac{1}{2j-1}}\right) = \frac{\nu\left(A^+, \frac{1}{2j-1}\right)}{\nu_0\left(\frac{1}{2j-1}\right)} = \frac{2^{j-1}}{2^j} = \frac{1}{2},$$

$$\zeta_{h_0}\left(S^{A^+}_{\frac{1}{2j}}\right) = \frac{\nu\left(A^+, \frac{1}{2j}\right)}{\nu_0\left(\frac{1}{2j}\right)} = \frac{2^{j-1}}{3 \cdot 2^{j-1}} = \frac{1}{3}.$$

Таким образом, предел 1.16 не существует. Следовательно, согласно 1.6.30 и 1.6.31 меры μ_{E,d,h_0} и $\mu_{R,d}$ не существуют. Мера же μ_{H,d,h_0} в силу 1.6.16 существует, и $\mu_{H,d,h_0}(A^+) \leqslant \varliminf\limits_{k\to\infty} \zeta_{h_0}\big(S^{A^+}_{\frac{1}{2j}}\big) = \frac{1}{3}$. Но из 1.19 $\mu_{I,d}(A^+) = \frac{1}{2}$. Таким образом, меры μ_{H,d,h_0} и $\mu_{I,d}$ существуют, но не совпадают.

Связь обычных расстояний с неархимедовыми (элементы математической теории)

Вначале покажем, что мера на иерархии естественным образом порождает неархимедово расстояние. Предположим, что $(X, \mathcal{H})$ — хаусдорфово компактное дискретно шкалированное иерархическое пространство и μ — мера без атомов на $\sigma(\mathcal{H})$. Очевидно, μ — калибровочная функция на $\mathcal{H}$.

Теорема 1.6.34 *Предположим, что $(X, \mathcal{H})$ — хаусдорфово компактное дискретно шкалированное иерархическое пространство и ν — вероятностная мера без атомов на $\sigma(\mathcal{H})$ такая, что $\nu(A) > 0$ для всех $A \in \mathcal{H}$. Тогда (X, d_ν) — компактное неархимедово метрическое пространство и ν — хаусдорфова мера относительно неархимедова расстояния d_ν, т. е. $\nu = \mu_{H,d_\nu}$.*

Доказательство. Первое утверждение следует из предложения 1.4.19. Зафиксируем $B[x,r]$. Для каждого $\varepsilon > 0$ пусть $\mathcal{B}(\varepsilon)$ — множество всех конечных семейств $\{B[x_1,r_1], \ldots, B[x_n,r_n]\}$ непересекающихся шаров такое, что

$$B[x,r] = \sum_{i=1}^{n} B[x_i,r_i], \quad r_i \leqslant \varepsilon, \quad i = \overline{1,n}.$$

В силу предложения 1.6.13 ν строго монотонна. Тогда, если $\{B[x_1,r_1],\ldots,B[x_n,r_n]\} \in \mathcal{B}(\varepsilon)$, то $\nu(B[x_i,r_i]) \leqslant r_i$, $i=\overline{1,n}$, и $B[x,r]=\sum\limits_{i=1}^{n} B[x_i,\nu(B[x_i,r_i])]$. Таким образом,

$$\inf_{\{B[x_i,r_i],\ldots,B[x_n,r_n]\}\in B(\varepsilon)} \sum_{i=1} r_i =$$

$$= \inf_{\{B[x_i,r_i],\ldots,B[x_n,r_n]\}\in B(\varepsilon)} \sum_{i=1}^{n} \nu(B[x_i,r_i]) = \nu(B[x,r])$$

и по определению хаусдорфовой меры $\mu_{H,e}(B[x,r]) = \nu(B[x,r])$. Отсюда $\mu_{H,d_\nu} = \nu$.■

Предположим, что E — конечное множество. Обозначим $\overline{E}$ множество всех последовательностей $\overline{x} = (x_i)_{i=1}^{\infty}$, $x_1, x_2, \ldots \in E$. Говорят, что множество $C \subset \overline{E}$ — *цилиндр* если существуют $k \in \mathbb{N}$, $i_s \in \mathbb{N}$, $a_s \in E$, $s=\overline{1,k}$, такие, что

$$C = \left\{\overline{x} \mid x_{is} = a_s,\ s = \overline{1,k}\right\}.$$

По определению, цилиндр C — *элементарный,* если $i_1 = 1, \ldots, i_k = k$. В этом случае мы говорим, что k — *ранг* элементарного цилиндра C, и пишем $k = \operatorname{rank}(C)$. Рассмотрим $\overline{E}$ как элементарный цилиндр, и положим $\operatorname{rank}\left(\overline{E}\right) = 0$. Обозначим через $\overline{\mathcal{C}}$ множество всех цилиндров, через $\overline{\mathcal{EC}}$ — множество всех элементарных цилиндров, а через $\overline{\sigma(\mathcal{C})}$ — σ-алгебру, порожденную $\overline{\mathcal{C}}$. Хорошо известно, что $\overline{\sigma(\mathcal{C})}$ порождается $\overline{\mathcal{EC}}$. Обозначим

$$\overline{\mathcal{EC}}_k = \left\{C \in \overline{\mathcal{EC}} \mid \operatorname{rank}(C) = k\right\}.$$

Очевидно, что $\left(\overline{E}, \overline{\mathcal{EC}}\right)$ — хаусдорфово компактное дискретно шкалированное иерархическое пространство и $\overline{\mathcal{EC}}_k$ — k-слой.

Рассмотрим стохастический процесс ξ_t с дискретным временем $t = 1,2,\ldots$ и конечным пространством состояний E. Тогда $\overline{E}$ — множество всех траекторий этого процесса. Через ν обозначим вероятностную меру на $\overline{\sigma(\mathcal{C})}$, порожденную ξ_t.

Следствие 1.6.35 *Предположим, что для любых $k \in \mathbb{N}$ и $i_1, \ldots, i_k \in E$ $P\{\xi_1 = i_1, \ldots, \xi_k = i_k\} > 0$. Тогда $\nu = \mu_{H,d_\nu,}$.*

Пусть I=$[0,1)$. Далее для произвольного $\widetilde{x} \in I$ через $0,x_1x_2\ldots$ мы будем обозначать двоичное разложение $\widetilde{x}$: $\widetilde{x} = 0,x_1x_2\ldots \equiv \sum\limits_{i=0}^{\infty} x_i 2^{-i}$. Если $\widetilde{x}$ — двоично-рациональное число, то оно обладает двумя двоичными разложениями:

$$\widetilde{x} = 0,x_1'x_2'\ldots,\quad \exists k'\colon x_i' = 0 \text{ если } i > k',$$

$$\widetilde{x} = 0, x_1'' x_2'' \ldots, \quad \exists k''\colon x_i'' = 1 \text{ если } i > k''.$$

В таком случае мы выбираем первое из этих разложений. Обозначим

$$G = \{0, 1\}, \qquad \overline{G}_1 = \left\{ \overline{x} \in \overline{G} \mid \exists k\colon x_i = 1 \ \ \forall i > k' \right\},$$

$$\overline{G'} = \overline{G} \diagdown \overline{G}_1, \qquad \zeta' = \left\{ A \in \zeta \mid A \subset \overline{G}' \right\}.$$

Ясно, что $\overline{G}', \overline{G}_1 \in \overline{\mathcal{C}}$, и мы можем обозначить $\overline{\mathcal{C}}' = \left\{ A \in \overline{\mathcal{C}} \mid A \in \overline{\mathcal{C}}, A \subset \overline{G}' \right\} = \left\{ A \cap \overline{G}' \mid A \in \overline{\mathcal{C}} \right\}$. Для $C \in \overline{\mathcal{EC}}_k$ обозначим $\overline{\lambda_0}(C) = 2^{-k}$. Ясно, что $\overline{\lambda}_0$ аддитивна на $\overline{\mathcal{EC}}$ и по 1.6.12 она может быть продолжена до меры на $\overline{\sigma(\mathcal{C})}$. Хорошо известно, что

$$\xi_{I\overline{G}'}\colon I \ni \widetilde{x} = 0, x_1 x_2 \ldots \longrightarrow \overline{x} = (x_i)_{i=1}^{\infty} \in \overline{G'}$$

— изоморфизм измеримых пространств $(I, \mathcal{BR}, \lambda_0)$ и $\left(\overline{G'}, \overline{\mathcal{C}'}, \overline{\lambda_0}\right)$, где $\mathcal{BR}$ — σ-алгебра всех борелевских подмножеств I и λ_0 — ограничение лебеговской меры на $\mathcal{BR}$. Рассмотрим лебеговское продолжение $\overline{\lambda_0}$. Обозначим его $\overline{\lambda}$. Пусть $\mathcal{L}$ (соответственно $\overline{\mathcal{L}'}$) — σ-алгебра всех $\overline{\lambda}$-измеримых подмножеств $\overline{G}$ (соответственно $\overline{G'}$), $\mathcal{L}$ — σ-алгебра всех лебеговско-измеримых подмножеств I, и λ — лебеговская мера. Тогда измеримые пространства $(I, \mathcal{L}, \lambda)$ и $\left(\overline{S_1}, \overline{\mathcal{L}'}, \overline{\lambda}\right)$ также изоморфны. В соответствии со сказанным назовем $\overline{\lambda}$ мерой Лебега на $\overline{\mathcal{L}}$.

Положим $c_1(k) = 2^{-k}$, $k \in \mathbb{Z}$. Нетрудно доказать

Предложение 1.6.36 $\overline{\lambda} = \mu_{H, d_{c_1}}$.

Напомним, что измеримое пространство $(X, \mathcal{X}, \mu)$ называется *лебеговым пространством без атомов,* если существуют $X^{(1)} \in \mathcal{X}$, $I^{(1)} \in \mathcal{L}$ и $\zeta\colon X^{(1)} \to I^{(1)}$, такие, что $\mu\left(X \setminus X^{(1)}\right) = \lambda\left(I \setminus I^{(1)}\right) = \varnothing$ и ζ — изоморфизм измеримого пространства $\left(X^{(1)}, \mathcal{X}^{(1)}, \mu\right)$ на $\left(I^{(1)}, \mathcal{L}^{(1)}, \lambda\right)$, где $\mathcal{X}^{(1)} = \left\{A \in \mathcal{X} \mid A \subset X^{(1)}\right\}$, $\mathcal{L}^{(1)} = \left\{B \in \mathcal{L} \mid B \subset I^{(1)}\right\}$.

Из теоремы 1.6.34 вытекает

Следствие 1.6.37 *Если $(X, \mathcal{X}, \mu)$ — лебегово пространство без атомов, то существуют $X^{(1)} \in \mathcal{X}$ и неархимедово расстояние d на $X^{(1)}$ такие, что $\left(X \setminus X^{(1)}\right) = \varnothing$, такие, что неархимедово метрическое пространство $\left(X^{(1)}, d\right)$ вполне ограниченно и $\mu = \mu_{H,d}$.*

Пусть $\overline{\overline{G}}$ — множество всех двоичных двумерных последовательностей (т. е. бесконечных бинарных матриц) $\overline{\overline{x}} = (x_{ij})_{i,j=1}^{\infty}$, $x_{i,j} \in G \ \ \forall i, j$ и BS — множество всех вещественных последовательностей $\widetilde{\widetilde{x}} = (\widetilde{x}_i)_{i=1}^{\infty}$ таких, что $x_i \in I \ \ \forall i$. Для каждого $\widetilde{x}_i$ пусть $0, x_{i1} x_{i2} \ldots$ — двоичное разложение $\widetilde{x}_i$. Для $\overline{\overline{x}} = (x_{ij})_{i,j=1}^{\infty} \in \overline{\overline{G}}$ обозначим $\overline{x_i} = (x_{i,j})_{j=1}^{\infty} \in \overline{G}$. Положим

$\overline{\overline{G}}{}' = \left\{ \overline{\overline{x}} \in \overline{\overline{G}} \mid \overline{x_i} \in \overline{G}' \ \ \forall i \right\}$. Введем биективное отображение

$$\xi_{BG,\overline{\overline{G}}{}'} \colon BG \ni \widetilde{\widetilde{x}} = (\widetilde{x}_i)_{i=1}^{\infty} \to (x_{ij})_{i,j=1}^{\infty} = \overline{\overline{x}} \in \overline{\overline{G}}{}'.$$

Таким образом, $\overline{x_i} = \xi_{IG'}(\widetilde{x_i})$ для любого i. Снабдим BS расстоянием $\rho\left(\widetilde{x},\widetilde{y}\right) = \sup\limits_{i \in N} |x_i - y_i|$ и положим

$$\rho\left(\overline{\overline{x}},\overline{\overline{y}}\right) = \widetilde{\rho}\left(\xi^{-1}_{BG,\widetilde{G}}\left(\overline{\overline{x}}\right), \xi^{-1}_{BG,\overline{G}}\left(\overline{\overline{y}}\right)\right), \quad \overline{\overline{x}},\overline{\overline{y}} \in \overline{\overline{G}}{}'.$$

Пусть $k \in \mathbb{N}$, $(i_1, j_1), \ldots, (i_k, j_k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $a_{i_s j_s} \in \{0,1\}$, $s = \overline{1,k}$, $C = \left\{ \overline{\overline{x}} \in \overline{\overline{S}} \mid x_{i_s j_s},\ s = \overline{1,k} \right\}$. Мы говорим, что C — *цилиндр* в $\overline{\overline{G}}$. Если $\left\{(i_s, j_s) \mid s = \overline{1,k}\right\} = \{(i,j) \mid 1 \leqslant i,j \leqslant k\}$ мы говорим, что C — *элементарный цилиндр*, k — *ранг* C, и пишем $k = \operatorname{rank}(C)$. По аналогии с $\overline{G}$ рассмотрим $\overline{\overline{G}}$ как элементарный цилиндр и положим $\operatorname{rank}\left(\overline{\overline{G}}\right) = 0$. Далее, обозначим $\overline{\overline{\mathcal{CL}}}$ — множество всех цилиндров в $\overline{\overline{G}}, \overline{\overline{\mathcal{ECL}}}$ — множество всех элементарных цилиндров и $\overline{\overline{\mathcal{C}}}$ — σ-алгебру, образованную $\overline{\overline{\mathcal{CL}}}$. Нетрудно показать, что $\overline{\overline{\mathcal{C}}}$ образовано $\overline{\overline{\mathcal{ECL}}}$. Обозначим $\overline{\overline{\mathcal{ECL}_k}} = \left\{ C \in \overline{\overline{\mathcal{ECL}}} \mid \operatorname{rank}(C) = k \right\}$. Очевидно, что $\left(\overline{\overline{G}}, \overline{\overline{\mathcal{ECL}}}\right)$ — хаусдорфово компактное дискретно шкалированное иерархическое пространство и $\overline{\overline{\mathcal{ECL}_k}}$ — k-слой.

Предложение 1.6.38 *Предположим, что K — вполне ограниченное можество в метрическом пространстве $\left(\overline{\overline{G}}{}', \rho\right)$. Тогда существует функция длины ψ такая, что $\rho\left(\overline{\overline{x}},\overline{\overline{y}}\right) \leqslant d_{\psi}\left(\overline{\overline{x}},\overline{\overline{y}}\right)$ $\forall\, \overline{\overline{x}},\overline{\overline{y}} \in K$.*

Доказательство. Пусть $x_1, x_2, \ldots$ — счетное всюду плотное множество в K. Тогда $\{x_1, \ldots, x_i\}$ — ε_k-сеть в K, где $\varepsilon_i \downarrow 0$ при $i \to \infty$. Пусть $x', x'' \in \overline{\overline{G}}{}'$, $k = \gamma(x,y)$. Положим $\psi(x', x'') = 2^{-k} + 2\varepsilon_k$. Поскольку $x'_{ij} = x''_{ij}$, $i,j = \overline{1,k}$, то $\rho\left(\overline{x'_i}, \overline{x''_i}\right) = |0, x'_{i1}x'_{i2} \cdots - 0, x''_{i1}x''_{i2} \ldots| \leqslant 2^{-k}$, $i = \overline{1,k}$. Далее, существуют k', k'' такие, что $k', k'' \leqslant k$ и $\rho(x', x_{k'}), \rho(x'', x_{k''}) \leqslant \varepsilon_k$. Напомним, что для $x = (x_{ij})_{i,j=1}^{\infty} \in \overline{\overline{G}}{}'$ мы обозначаем $\widetilde{\widetilde{x}} = \xi^{-1}_{BG,\overline{\overline{G}}{}'}(x) = (\widetilde{x}_i)_{i=1}^{\infty}$, $\widetilde{x}_i \in I$, и для любого i $x_i = (x_{ij})_{i=1}^{\infty} \in \overline{G'}$, $\widetilde{x}_i = \xi^{-1}_{I,\overline{G}'}(x_i) = 0, x_{i1}x_{i2}\ldots$ Таким образом, $\rho(x,y) = \sup\limits_{1 \leqslant i < \infty} |\widetilde{x}_i - \widetilde{y}_i|$. Поскольку K вполне ограниченно и, следовательно, $\xi^{-1}_{B,G,\overline{\overline{G}}{}'}(K)$ вполне ограниченно в BS, то для любого $\varepsilon > 0$ существуют $N_1, \ldots, N_m \subset \mathbb{N}$ и $r_1, \ldots, r_m \in \mathbb{N}$ такие, что $\mathbb{N} = \sum\limits_{s=1}^{m} N_s$, $r_s \in N_s$, $s = \overline{1,m}$, и для любого $x \in K$ выполняется $|\widetilde{x}_i - \widetilde{x_{r_s}}| < \varepsilon$ при всех $i \in N_s$, $s = \overline{1,m}$ ([19], теорема IV.5.6). Для любого $l \in \mathbb{N}$ выберем $N_{l,1}, \ldots, N_{k,m_l} \subset N$,

$r_{l,1}, \ldots, rl_{,m_l} \in \mathbb{N}$ такие, что $\mathbb{N} = \sum\limits_{s=1}^{m_l} N_{k,s}$, $r_{ls} \in N_{l,s}$, $s = \overline{1, m_l}$, и для каждого $x \in K$ $\left|\widetilde{x}_i - \widetilde{x}_{r_{l,s}}\right| < 2^{-l}$ при всех $i \in N_s$, $s = \overline{1, m_l}$. Положим $\varsigma(k) = \max\left\{l \mid r_{l,s} \leqslant k, s = \overline{1, m_l}\right\}$, $\psi(k) = 2^{-[k+\varsigma(k)+1]}$. Очевидно, что $\varsigma(k) \to \infty$ при $k \to \infty$. Пусть $\gamma(x, y) = k$. Для $i \leqslant k$ имеем $x_{ij} = y_{ij}$, $i, j = \overline{1, k}$, и, следовательно, $|\widetilde{x}_i - \widetilde{y}_i| \leqslant 2^{-k}$, $i = \overline{1, k}$. Если $i > k$, то существует $j \in \left\{1, \ldots, r_{\varsigma(k), m_{\varsigma(k)}}\right\}$ такое, что $|\widetilde{z}_j - \overline{z_i}| \leqslant 2^{-\varsigma(k)}$ для всех $z \in K$. Следовательно, $|\widetilde{x}_i - \widetilde{y}_i| \leqslant |\widetilde{x}_i - \widetilde{y}_j| + |\widetilde{y}_j - \widetilde{y}_i| \leqslant 2^{-k} + 2 \cdot 2^{-\varsigma(k)}$. Таким образом, для любого i получаем $|\widetilde{x}_i - \widetilde{y}_i| \leqslant 2^{-[k+\varsigma(k)+1]} = d(x, y)$ и, следовательно, $\rho(x, y) \leqslant d(x, y)$.

Пусть $I_2 = \{x \in I \mid x$ — двоично-рациональное$\}$.

Лемма 1.6.39 *Предположим, что*

$$a, a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots \in I \setminus I_2, \qquad \lim_{n\to\infty} \left|a - a^{(n)}\right| = 0.$$

Тогда для любого $k \in \mathbb{N}$ *имеет место* $\lim\limits_{n\to\infty} a_k^{(n)} = a_k$, *т. е.* $\exists\, n_0$ *такое, что* $a_i^{(n)} = a_i$, $i = \overline{1, k}$, *для всех* $n > n_0$.

Доказательство. Предположим противное. Тогда существует $k \in \mathbb{N}$ и последовательность $n_1 < n_2 < \ldots$ такие, что $a_k^{(n_1)} = a_k^{(n_2)} = \ldots = a_k^{(n_s)} \neq a_k$. Зафиксируем произвольное $x^{(n_s)} = a'$. Если существует $r < k$ такое, что $a_r \neq a'_r$, то $|a - a'| \geqslant 2^{-k}$. Далее, предположим, что $a_i = a'_i$ для $i < k$. Тогда

$$a = 2^{-k} \cdot a_k + \sum_{i=k+1}^{\infty} 2^{-i} a_i, \quad a' = 2^{-k} \cdot a'_k + \sum_{i=k+1}^{\infty} 2^{-i} a'_i.$$

Поскольку $a \overline{\in} I_2$, существует $l > k$ такое, что $a_l = 1$. Если $a_k = 1, a'_k = 0$, то

$$a \geqslant 2^{-k} + 2^{-l}, \quad a' \leqslant \sum_{i=k+1}^{\infty} 2^{-i} \cdot 1 = 2^{-k},$$

и

$$a - a' \geqslant 2^{-l}.$$

Если $a_k = 0$, $a'_k = 1$, то $a' - a \geqslant 2^{-l}$. Таким образом,

$$\left|a - a'\right| \geqslant 2^{-l},$$

т. е.

$$\left|a - a^{(n_s)}\right| \geqslant 2^{-l}$$

для всех s. Это противоречие доказывает лемму.■

Обозначим $\overline{G_0} = \left\{\overline{x} \in \overline{G} \mid \exists\, k\colon x_i = 0\ \forall i \in k\right\}$.

Очевидно, что

$$\overline{G}'_0 = \xi_{I\overline{G}'}(I_2).$$

Далее, положим

$$\overline{G}'' = \overline{G}' \setminus \left(\overline{G_1} \cup \overline{G_0}\right), \qquad \overline{\overline{G}}'' = \left\{\overline{\overline{x}} \in \overline{\overline{G}} \mid \overline{x_i} \in \overline{G}'' \ \forall i\right\}.$$

Лемма 1.6.40 *$\overline{\overline{G}}''$ всюду плотно в $\overline{\overline{G}}$ относительно топологии $\mathcal{T}\left(\overline{\mathcal{ECL}}\right)$ и $\overline{\overline{G}}''$ всюду плотно в $\overline{\overline{G}}$ относительно топологии $\mathcal{T}\left(\overline{\overline{\mathcal{ECL}}}\right)$.*

Доказательство тривиально. ■

Предложение 1.6.41 *Предположим, что φ — калибровочная функция на иерархии $\overline{\overline{\mathcal{ECL}}}$. Тогда ρ и d_φ определяют на $\overline{\overline{G}}''$ одну и ту же топологию.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Достаточно доказать,что

$$\mathcal{T}(\rho) \supset \mathcal{T}(d_\varphi).$$

Предположим, что

$$\overline{\overline{x}}^{(0)}, \overline{\overline{x}}^{(1)}, \ldots \in \overline{\overline{G}}', \quad \lim_{k\to\infty} \rho\left(\overline{\overline{x}}^{(n)}, \overline{\overline{x}}^{(0)}\right) = 0.$$

Тогда по определению ρ

$$\lim_{n\to\infty}\left|0, x_{i1}^{(n)} x_{i2}^{(n)} \ldots - 0, x_{i1}^{(0)} x_{i2}^{(0)} \ldots\right| = 0$$

для каждого i. Согласно последней лемме для любого i существует $n(i)$ такое, что

$$x_{ij}^{(n)} = x_{ij}^{(0)}, \quad j = \overline{1,k},$$

коль скоро $n > n(i)$. Пусть

$$n_0 = \max\left\{n(i) \mid i = \overline{1,k}\right\}.$$

Тогда для $n > n_0$ имеем

$$x_{ij}^{(n)} = x_{ij}^{(0)}, \quad i,j = \overline{1,k}.$$

Следовательно,

$$d_b\left(\overline{\overline{x}}^{(n)}, \overline{\overline{x}}^{(0)}\right) \leqslant \frac{1}{k+1}.$$

Так как k произвольно, получаем

$$\lim_{n\to\infty} d_b\left(\overline{\overline{x}}^{(n)}, \overline{\overline{x}}^{(0)}\right) = 0.$$

Таким образом,
$$\mathcal{T}(\rho) > \mathcal{T}(d_b),$$
откуда
$$\mathcal{T}(\rho) \supset \mathcal{T}(d_\varphi).$$

Обозначим $c_2(k) = 2^{-k^2}$.

Лемма 1.6.42 $\mu_{H,d_{c_2}}\left(\overline{\overline{G}} \setminus \overline{\overline{G'}}\right) = 0.$

Доказательство. Выберем $k \in \mathbb{N}$, $\overline{a} \in \overline{G_1}$; рассмотрим множество $C(k,\overline{a}) = \left\{\overline{\overline{x}} \in \overline{\overline{G}} \mid \overline{x_k} = \overline{a}\right\}$ и для любого $n > k$ — множество
$$C_n(k,\overline{a}) = \left\{\overline{\overline{x}} \in \overline{\overline{G}} \mid x_{kj} = a_j,\ j = \overline{1,n}\right\}.$$
Пусть
$$\overline{\overline{A}}^{(n)}$$
— множество всех матриц
$$\overline{\overline{a}}^{(n)} = \left(a_{i,j}^{(n)}\right)_{i,j=1}^{n}, \quad a_{ij}^{(n)} \in G.$$
Отметим, что каждый замкнутый шар
$$B\left[\overline{\overline{a}}, 2^{-n^2}\right]$$
в неархимедовом метрическом пространстве $\left(\overline{\overline{G}}, d_c\right)$ однозначно определяется матрицей
$$\overline{\overline{a}}^{(n)} \in \overline{\overline{A}}^{(n)},$$
где
$$a_{ij}^{(n)} = a_{ij}, \quad i,j = \overline{1,n},$$
а именно,
$$B\left[\overline{\overline{a}}, 2^{-n^2}\right] = \left\{\overline{\overline{x}} \mid x_{ij} = a_{ij}^{(n)},\ i,j = \overline{1,n}\right\},$$
и, обратно, для каждого
$$\overline{\overline{a}}^{(n)} \in \overline{\overline{A}}^{(n)}$$
имеет место
$$\left\{\overline{\overline{x}} \mid x_{ij} = a_{ij}^{(n)},\ i,j = \overline{1,n}\right\} = B\left[\overline{\overline{a}}, 2^{-n}\right]$$
для всякого $\overline{\overline{a}}$ такого, что
$$a_{ij} = a_{ij}^{(n)}, \quad i,j = \overline{1,n}.$$

Мы будем обозначать такой шар

$$B\left[\overline{\overline{a}}^{(n)}, 2^{-n}\right].$$

Положим

$$\overline{\overline{A}}^{(n)}(k, \overline{a}) = \left\{\overline{\overline{a}}^{(n)} \in \overline{\overline{A}}^{(n)} \mid a_{kj}^{(n)} = a_j,\ j = \overline{1, n}\right\}.$$

Ясно, что

$$\left|\overline{\overline{A}}^{(n)}(k, \overline{a})\right| = 2^{n(n-1)}$$

и

$$C_n(k, \overline{a}) = \sum_{\overline{\overline{a}}^{(n)} \in A^{(n)}(k, \overline{a})} B\left[\overline{\overline{a}}^{(n)}, 2^{-n^2}\right].$$

Тогда

$$\mu(C_n(k, \overline{a})) = 2^{n(n-1)} \cdot 2^{-n^2} = 2^{-n} \to 0$$

при $n \to \infty$. Очевидно, что

$$C_n(k, \overline{a}) \supset C_{n+1}(k, \overline{a})$$

и

$$C(k, \overline{a}) = \bigcap_{n=k+1}^{\infty} C_n(k, \overline{a}).$$

Следовательно,

$$\mu(C(k, \overline{a})) = 0.$$

Так как

$$\overline{\overline{G}} \diagdown \overline{\overline{G}}'' = \bigcup_{k=1}^{\infty} \quad \bigcup_{\overline{a} \subset \overline{S_1} \cup \overline{S_0}} C(k, \overline{a})$$

и $\overline{G}_1$ счетно, получаем, что

$$\mu\left(\overline{\overline{G}} \diagdown \overline{\overline{G}}''\right) = 0.$$

Теорема 1.6.43 *Предположим, что* (X, d) *— вполне ограниченное метрическое пространство. Тогда существуют неархимедово расстояние* d_u *на* X *и множество* $X' \subset X$ *такие, что справедливы следующие утверждения:*

(i) *неархимедово метрическое пространство* (X, d_u) *вполне ограничено;*

(ii) $d(x, y) \leq d_u(x, y) \forall x, y \in X$*;*

(iii) X' *всюду плотно в* X *в топологии* $\mathcal{T}(d_u)$*;*

(iv) $\mu_{d_u, H}(X \diagdown X') = 0$*;*

(v) *Топологии* $\mathcal{T}(d)$ *и* $\mathcal{T}(d_u)$ *на* X' *эквивалентны. Более того, существует строго возрастающая функция* ζ *на* $[0, \infty)$ *такая, что*

$$d(x, y) \leqslant \zeta(d_u(x, y)) \quad \forall x, y \in X'.$$

Доказательство. Положим

$$d'(x,y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)} \quad \forall x,y \in X.$$

Тогда (X, d') — сепарабельное метрическое пространство, $\mathcal{T}(d) = \mathcal{T}(d')$, и существует изометрия X на некоторое подпространство метрического пространства $(BS, \widetilde{\rho})$. Следовательно, по определению ρ существует изометрия $\eta_{X,\overline{\overline{G}}'_X}$ пространства X в некоторое подпространство $\overline{\overline{G}}'$ метрического пространства $\left(\overline{\overline{G}}', \rho\right)$. Положим

$$\overline{\overline{G}}'_X = \overline{\overline{G}}_X \cap \overline{G}'', \quad X' = \eta^{-1}_{X,\overline{\overline{G}}'_X}\left(\overline{\overline{G}}''_X\right),$$

$$d_u(x,y) = d_{c_2}\left(\eta_{X,\overline{\overline{G}}'_X}(x), \eta_{X,\overline{\overline{G}}'_X}(y)\right) \quad \forall x,y \in X.$$

Утверждения (i) и (ii) тривиальны; (iii) следует из леммы 1.6.40; (iv) следует из леммы 1.6.42 и первая часть (v) следует из предложения 1.6.41. Согласно предложению 1.6.38, существует функция длины ψ такая, что

$$d'(x,y) \leqslant d_\psi\left(\eta_{X,\overline{\overline{G}}'_X}(x), \eta_{X,\overline{\overline{G}}'_X}(y)\right).$$

Очевидно, существуют строго возрастающие функции ζ_1 и ζ_2 такие, что

$$d(x,y) = \zeta_1\left(d'(x,y)\right)$$

и

$$C(k) = \zeta_2\left(C_2(k)\right).$$

Следовательно,

$$d(x,y) \leqslant \zeta_1\left(\zeta_2\left(d_\psi\left(\eta_{X,\overline{\overline{S}}'_X}(x), \eta_{X,\overline{\overline{S}}'_X}(y)\right)\right)\right).$$

Это завершает доказательство.■

Рассмотрим множество

$$I^s = \left\{\widetilde{\widetilde{x}} = (\widetilde{x}_1, \ldots, \widetilde{x}_s) \mid x_i \in I,\ i = \overline{1,s}\right\}$$

с расстоянием

$$\rho\left(\widetilde{\widetilde{x}}, \widetilde{\widetilde{y}}\right) = \max_{1 \leqslant i \leqslant s} |\widetilde{x}_i - \widetilde{y}_i|.$$

Обозначим через $\mathcal{L}^s$ и λ^s σ-алгебру всех измеримых по Лебегу подмножеств I^s и лебегову меру на I^s соответственно.

Теорема 1.6.44 *Предположим, что ν — вероятностная мера на $\mathcal{L}^s$, эквивалентная λ. Тогда существуют неархимедово расстояние d на I^s и множество $A \in \mathcal{L}^s$ такие, что справедливы следующие утверждения:*

(i) *неархимедово метрическое пространство (I^s, d) вполне ограниченно;*

(ii) $d(x,y) \leq d_u(x,y) \forall x, y \in X$;

(iii) *A всюду плотно в I^s;*

(iv) $\nu = \mu_{H,d}$;

(v) $\nu\left(I^n \diagdown A\right) = 0$;

(vi) $\mathcal{T}(d) = \mathcal{T}(\rho)$ *на A.*

Доказательство. Для любого

$$\widetilde{\widetilde{x}}_i = \left(\widetilde{x}_1, \ldots, \widetilde{x}_s\right),$$

мы обозначаем

$$\widetilde{x}_i = 0, x_{i1}x_{i2}\ldots$$

Пусть

$$k \in \mathbb{N}, \quad a_{ij} \in G, \quad i = \overline{1,s}, \quad j = \overline{1,k}.$$

Мы говорим, что множество

$$C = \left\{\widetilde{\widetilde{x}} \mid x_{ij},\ i = \overline{1,s},\ j = \overline{1,k}\right\}$$

— элементарный цилиндр ранга k и пишем $\operatorname{rank}(\mathcal{C}) = k$. Через $\widetilde{\widetilde{\mathcal{ECL}}}$ обозначим множество всех элементарных цилиндров. По определению $I^n \in \widetilde{\widetilde{\mathcal{ECL}}}$, $\operatorname{rank}(I^n) = 0$. Положим

$$\widetilde{\widetilde{\mathcal{ECL}}}_k = \left\{C \in \widetilde{\widetilde{\mathcal{ECL}}} \mid \operatorname{rank}(C) = k\right\}.$$

Рассмотрим

$$\overline{G}^s = \left\{\overline{\overline{x}} = (\overline{x}_1, dots, \overline{x}_s) \mid \overline{x}_i \in \overline{G},\ i = \overline{1,s}\right\},$$

$$\overline{x}_i = (x_{ij})_{j=1}^{\infty}, \quad A_s = \left\{\overline{\overline{x}} \in \overline{G}^s \mid \overline{x}_i \in \overline{G}'',\ i = \overline{1,s}\right\}.$$

Очевидно, что

$$\xi_{I^s,\overline{G}^s} \colon I^s \ni \widetilde{\widetilde{x}} = (\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_s) \in \left(\overline{G}'\right)^s$$

— изоморфизм метрических пространств (I^s, λ^s) и $\left(\left(\overline{G}'\right)^s, \lambda^s\right)$, причем $\xi_{I^s,\overline{G}^s}\left((I \diagdown I_2)^s\right) = G''$. Положим

$$d\left(\widetilde{\widetilde{x}}, \widetilde{\widetilde{y}}\right) = d_\nu\left(\widetilde{\widetilde{x}}, \widetilde{\widetilde{y}}\right), \quad \widetilde{\widetilde{x}}, \widetilde{\widetilde{y}} \in I^s,$$

$$A = (I \diagdown I_2)^s \, .$$

Теперь доказатедьство может быть завершено простым применением предыдущих результатов.■

А теперь мы докажем результат, о котором на содержательном уровне речь шла выше, а именно: обычное расстояние "в среднем" равносильно некоторому неархимедову расстоянию. Начнем с расстояния на числовой прямой. Для произвольного $x \in I$ пусть $\sum\limits_{i=1}^{\infty} x_i 2^{-i}$ — его двоичное разложение x. Для $x, y, a \in I$ положим

$$\gamma(x,y) = \min\{i \mid x_i \neq y_i\} - 1,$$

$$d\,(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{если } x = y, \\ 2^{-\gamma(x,y)} & \text{в противном случае;} \end{cases}$$

$$d_a(x,y) = d(ax, ay).$$

Очевидно, что d — неархимедово расстояние и $|x-y| \leqslant d(x,y) \ \ \forall x, y \in I$. Отсюда d_a — также неархимедово расстояние и для каждого a $|x - y| = \frac{1}{a}\,|ax - ay| \leqslant \frac{1}{a}\,d(ax,\ ay) = d_a(x,y)$. Через ξ обозначим вещественную случайную величину, равномерно распределенную на $(0,1)$.

Теорема 1.6.45 *Существует $C > 0$ такое, что*

$$\mathsf{E}_\xi d(x,y) < C\,|x-y|\,.$$

Доказательство. Пусть $0 \leqslant y < x < 1$. Сначала рассмотрим $x \geqslant \frac{1}{2}$. Ясно, что $\gamma(\xi x, \xi y) = k$ в том и только том случае, когда

$$\xi x \in [2^{-k-1},\ 2^{-k}), \qquad \xi y < 2^{-k-1}. \tag{1.20}$$

Если $2y \geqslant x$, эти условия эквивалентны условию $\xi \in [2^{-k-1}/x,\ 2^{-k-1}/y)$. Следовательно,

$$\mathsf{P}\{\gamma(\xi x, \xi y) = k\} = 2^{-k-1}\,\frac{x-y}{xy} \leqslant$$

$$\leqslant 2^{-k-1}\,\frac{x-y}{2^{-3}} = 2^{-k+2}(x-y).$$

Далее, если $\gamma(\xi x, \xi y) = k$, то

$$d_\xi(x,y) \leqslant \frac{x}{2^{-k-1}} \cdot 2^{-k} \leqslant 2. \tag{1.21}$$

Следовательно,

$$\mathsf{E}d_\xi(x,y) = \sum_{k=0}^{\infty} 2 \cdot 2^{-k+2}(x-y) = 16(x-y).$$

Если $2y < x$, то условия (1.20) эквивалентны условию $\xi \in [2^{-k-1}/x, 2^{-k}/x)$. Следовательно, $\mathsf{P}\{\gamma(\xi x, \xi y) = k\} \leqslant 2^{-k-2}$, и используя (1.21), получаем

$$\mathsf{E}d_\xi(x,y) = \sum_{k=0}^{\infty} 2 \cdot 2^{-k-2} = 1.$$

В нашем случае $x - y \geqslant x/2 \geqslant 1/4$. Следовательно, $\mathsf{E}d_\xi(x,y) \leqslant 4(x-y)$. Таким образом, если $x \geqslant 1/2$, то $\mathsf{E}d_\xi(x,y) \leqslant 16(x-y)$. Теперь пусть $x < 1/2$. Тогда существуют $x' \in [1/2, 1)$, $y' \in I$, и $i \in \mathbb{Z}^+$, такие, что $x = 2^{-i}x'$, $y = 2^{-i}y'$. Имеем:

$$\gamma(\xi x, \xi y) = \gamma(2^{-i}\xi x', 2^{-i}\xi y') = \gamma(\xi x', \xi y') + i.$$

Следовательно, $d_\xi(x,y) = 2^{-i}d_\xi(x', y')$. С другой стороны, $x - y = 2^{-i}(x' - y')$. Это завершает доказательство. ■

Пусть теперь

$$x = (x_1, \ldots, x_s), \;\; y = (y_1, \ldots, y_s), \;\; a = (a_1, \ldots, a_s) \in I^s.$$

Пусть, далее, $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_s)$ — векторная случайная величина с независимыми равномерно распределенными на (0, 1) компонентами. Положим

$$d^{(s)}(x,y) = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} d(x_i, y_i),$$

$$d_a^{(s)}(x,y) = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} d_{a_i}(x_i, y_i).$$

Наконец, пусть ρ — произвольное эквивалентное эвклидову расстояние на I^s. Нетрудно показать, что $d^{(s)}$ и $d_a^{(s)}$ при каждом a — неархимедовы расстояния и что существует $C_1 > 0$ такое, что для каждого a

$$\rho(x,y) \leqslant C_1 d_a^{(s)}(x,y).$$

Из последней теоремы получаем

Следствие 1.6.46 *Существует $C_2 > 0$ такое, что*

$$\mathsf{E}d_\xi^{(s)}(x,y) \leqslant C_2 \rho(x,y).$$

Размерность неархимедовых метрических пространств

Пусть (X, d) — компактное неархимедово метрическое пространство. Рассмотрим хаусдорфову и энтропийную меры для специальной измеряющей функции h_ρ, $h_\rho = r^\rho$, $\rho \geqslant 0$. Известен следующий результат [10].

Теорема 1.6.47 *Если для некоторого ρ $\mu_{H,h_\rho}(X) = \infty$, то для всех $\rho' < \rho$ $\mu_{H,h_{\rho'}}(X) = \infty$. Если для некоторого ρ $\mu_{H,h_\rho}(X) < \infty$, то для всех $\rho' > \rho$ $\mu_{H,h_{\rho'}}(X) = 0$. Для $\mu_{E,h_\rho}(X)$ имеет место аналогичное свойство.*

Доказательство. Для μ_{H,h_ρ} приведено в [10], для μ_{E,h_ρ} оно полностью аналогично.■

Из этой теоремы следует, что или $\mu_{H,h_\rho}(X) = \infty \ \forall\rho$, или $\mu_{H,h_\rho}(X) = 0$ $\forall\rho$, или существует ρ_0 такое, что

$$\mu_{H,h_\rho}(X) = \infty \ \ \forall\rho < \rho_0 \tag{1.22}$$

и

$$\mu_{H,h_\rho}(X) = 0 \ \ \forall\rho > \rho_0. \tag{1.23}$$

Значение $\mu_{H,h_{\rho_0}}(X)$ здесь может быть нулевым, конечным положительным, или бесконечным. Таким образом, по меньшей мере одна из следующих величин:

$$\sup\{\rho \mid \mu_{H,h_\rho}(X) = \infty\}, \tag{1.24}$$

$$\inf\{\rho \mid \mu_{H,h_\rho}(X) = 0\}, \tag{1.25}$$

определена, и если обе из них определены, то они равны. Итак, мы можем дать следующее

Определение 1.6.48 *Одна из величин 1.24, 1.25, которая определена, называется хаусдорфовой размерностью пространства X и обозначается через $\dim_H(X)$. Эквивалентно, ρ_0, $0 \leqslant \rho_0 \leqslant \infty$, называется хаусдорфовой размерностью пространства X, если выполняется 1.22, 1.23.*

Энтропийная размерность $\dim_E(X)$ определяется совершенно аналогично. В силу доказанных выше результатов о компактных неархимедовых метрических пространствах мы можем использовать в этом определении вместо формул 1.22 — 1.25 формулы

$$\lim_{i\to\infty} \nu_0(r_i) r_i^\rho = \infty \ \ \forall\rho < \rho_0,$$

$$\lim_{i\to\infty} \nu_0(r_i) r_i^\rho = 0 \ \ \forall\rho > \rho_0.$$

$$\sup\{\rho \mid \lim_{i\to\infty} \nu_0(r_i) r_i^\rho = \infty\},$$

$$\inf\{\rho \mid \lim_{i\to\infty} \nu_0(r_i) r_i^\rho = 0\},$$

Определение 1.6.49 *Если предел*

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\ln \nu_0(r)}{\ln(1/r)} \tag{1.26}$$

существует, говорят, что это фрактальная размерность или размерность подобия, и обозначают через $\dim_F(X)$.

Очевидно, что если предел 1.26 существует, то

$$\dim_F(X) = \lim_{r\to\infty} \frac{\ln \nu_0(r_i)}{\ln(1/r_i)}.$$

Покажем, что существует компактное неархимедово метрическое пространство такое, что $\dim_F(X)$ не существует. Рассмотрим пространство $F(\mathbb{N}, \mathcal{M}, \psi)$ такое, что

$$|M_i| = \begin{cases} 1, & i = 2j-1, \\ 2^{2^j}, & i = 2j, \end{cases} \qquad \psi(i) = \begin{cases} 2^j, & i = 2j-1, \\ 2^j+1, & i = 2j, \end{cases}$$

$j = 1, 2, \ldots$
Обозначим $r_i = \psi(i)$. Тогда, используя, для $j \geqslant 2$

$$\nu(r_{2j-1}) = \prod_{s=1}^{j} |M_{2s-1}| \prod_{s=1}^{j-1} |M_{2s}| = \prod_{s=1}^{j-1} 2^{2^s},$$

$$\nu(r_{2j}) = \prod_{s=1}^{j} |M_{2s}| \prod_{s=1}^{j} |M_{2s}| = \prod_{s=1}^{j} 2^{2^s},$$

и для $i = 2j-1$ мы получим

$$\frac{\ln \nu_0(r_{2j-1})}{\ln(1/r_{2j-1})} = \frac{\sum\limits_{s=1}^{j-1} 2^s}{2^j} = \frac{2^j-2}{2^j} \to 1 \quad \text{при} \quad j \to \infty,$$

а для $i = 2j$ —

$$\frac{\ln \nu_0(r_{2j})}{\ln(1/r_{2j})} = \frac{\sum\limits_{s=1}^{j} 2^s}{2^j+1} = \frac{2^{j+1}-2}{2^j+1} \to 2 \quad \text{при} \quad j \to \infty.$$

Теорема 1.6.50 *Если фрактальная размерность определена, то она равна энтропийной размерности.*

Доказательство. Пусть $\rho > \dim_F(X)$. Тогда

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\ln \nu_0(r_i)}{\rho \ln(1/r_i)} < 1.$$

Отсюда

$$\ln \nu_0(r_i) < \ln(1/r_i)^\rho, \quad \nu_0(r_i) < (1/r_i)^\rho, \quad \nu_0(r_i) {r_i}^\rho < 1,$$

и, следовательно,

$$\mu_{E,h_\rho} = \lim_{i\to\infty} \nu_0(r_i) r_i^\rho < 1,$$

откуда $\mu_{E,h_\rho} = 0$. Аналогично, если $\rho < \dim_F(X)$, то $\mu_{E,h_\rho} = \infty$.

Теперь можно получить следующий результат.

Теорема 1.6.51 *Если X - SH и $\dim_F(X)$ определена, то хаусдорфова, энтропийная и фрактальная размерность X совпадают.*

Теорема 1.6.52 *Для каждого ρ_0, $0 \leqslant \rho_0 \leqslant \infty$, существует компактное неархимедово метрическое пространство такое, что $\dim_H(X) = \dim_E(X) = \dim_F(X) = \rho_0$.*

Доказательство. Достаточно сконструировать пространство, которое удовлетворяет последнему равенству. Рассмотрим пространство $F(\{t_0, t_1, \ldots\}, \{1, 2\})$, $t_i = 2^{i^{1-b}/a}$. Тогда $r_i = 1/t_i$, $\nu_0(r_i) = 2^i$, и

$$\frac{\ln \nu_0(r_{2j})}{\ln(1/r_{2j})} = \frac{\ln 2^i}{\ln 2^{i^{1-b}/a}} = \frac{i \ln 2}{a^{-1} i^{1-b} \ln 2} = \frac{a}{i^{-b}},$$

откуда

$$\dim_F(X) = \begin{cases} 0, & b > 0, \\ a, & b = 0, \\ \infty, & b < 0. \end{cases}$$

Это завершает доказательство ■

1.7. Выводы

1. Построена классификация иерархических и неархимедовых метрических пространств, ориентированная на социологические приложения, в частности, проблемы социальной стратификации, изучение маргинальных явлений, выявление латентных структур в неколичественных эмпирических данных и ряд других.
2. Для компактных неархимедовых метрических пространств полностью исследована структура метрик.
3. С использованием предыдущего результата построена теория меры в таких пространствах.
4. На компактном метрическом пространстве можно построить неархимедово расстояние, более сильное, чем исходное расстояние, и задающее ту же топологию почти всюду относительно некоторой естественно определяемой меры.
5. Расстояние на компактном неархимедовом метрическом пространстве при некоторых условиях в среднем эквивалентно некоторому случайному неархимедову расстоянию.
6. На пространстве с мерой без атомов можно построить неархимедово расстояние таким образом, что исходная мера совпадает с хаусдорфовой мерой относительно этого расстояния.

7. Эти результаты применимы к широкому кругу проблем изучения социальной структуры, комплексного рассмотрения социальных объектов и систем, системно-структурного анализа данных эмпирических исследований.

Глава 2

Задачи аппроксимации

2.1. Общая задача аппроксимации

Пусть имеется множество исследуемых объектов. Предполагается, что оно наделено одной или несколькими согласованными между собой структурами. Стоит задача приблизить (представить) это множество со структурами некоторым более простым множеством с набором структур, который бы как-то отражал исходные структуры. По-видимому, первое, что приходит на ум — применить, так сказать, "выборочный метод т. е.в качестве приближающего множества взять наугад конечное число точек исходного множества. Такой способ, однако, — не единственно возможный и не всегда наилучший, что будет видно в дальнейшем. Поэтому мы будем рассматривать следующий набор конструкций. Во-первых, это *исходное множество* со *структурами.* Во-вторых, *приближающий универсум* (*универсальное множество*) со структурами — вообще говоря, другими. Этот универсум определяет *аппарат приближения*, а конкретный его элемент называется *приближающим агрегатом.* Далее, задается некоторое *отношение* между элементами исходного множества и приближающего универсума. Назовем его *способом приближения.* Наконец, предполагается заданным *правило*, согласно которому должен быть выбран приближающий агрегат. Выделим важный вид приближений. Возьмем в качестве универсума совокупность подмножеств исходного множества конечной — фиксированной или произвольной — мощности. Множества эти могут предполагаться упорядоченными или нет. Такие приближения мы будем называть *парламентами.* Смысл термина в том, что совокупность объектов представляют (приближают) объекты из этой же совокупности.

Предположим, что Λ, Λ', M — решетки, $(X_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}, (Z_{\lambda'})_{\lambda'\in\Lambda'}$ — иерархия некоторых объектов, $\varphi\colon \Lambda \times \Lambda' \to M$, $\varphi(\cdot, \lambda')$ — неубывающее отображение для каждого λ', и $\varphi(\lambda, \cdot)$ — невозрастающее отображение для каждого λ.

Предположим, что X — множество с некоторой структурой, и $\mathcal{Z}$ — некоторое множество подмножеств X со структурой того же типа или без какой-либо структуры. Пусть Λ — частично упорядоченное пространство с наименьшим элементом θ and $\varphi\colon \mathcal{Z} \to \Lambda$. Тогда $\varphi(Z)$ показывает, насколько хорошо Z (с его структурой) аппроксимирует (представляет) X (с его структурой). Мы говорим, что $\mathcal{Z}$ — множество *представителей* X. Рассмотрим экстремальную задачу

$$\varphi(Z) \to \min .$$

Обозначим $Z^* = \arg\min \varphi(Z)$. Приведенную задаче мы назовем *обобщенной задачей аппроксимации*, а Z^* — ее *решением*. Отметим, что решение может не существовать, а если существует, то представляет собой, вообще говоря, не единичный элемент, а некоторое множество. Далее рассматрииваются частные случаи этой задачи.

2.2. Конечные приближения

2.2.1. Конечные представления социальных типов

Поясним на примере, какого рода задачи будут далее решаться. Предположим, стоит задача описать с той или иной степенью подробности доходы населения некоторой страны или региона. В качестве наиболее краткого, а именно, состоящего из одного числа, описания используется обычно среднее значение дохода или, проще говоря, средний доход. Однако в стране с резким расслоением населения по доходам людей со средними доходами может практически не быть, т. е. может иметь место следующая ситуация: основная масса людей имеет мизерный доход, в сумме сопоставимый с суммарным доходом незначительного меньшинства, а "средний класс" почти отсутствует. Таким образом, средний доход как таковой практически не наблюдается. Можно попытаться взять какую-либо другую числовую характеристику распределения, например, медиану или моду. Это, однако, не спасает положения. Так, медиана — это такое значение, что одна половина населения имеет доход меньше него, а другая половина — больше. Понятно, что в рассматриваемом случае, медиана будет располагаться в диапазоне низких доходов. То же касается и моды — наиболее часто встречающегося значения. Очевидно, однако, что любое значение, принадлежащее одному из двух диапазонов — очень низкие либо очень высокие доходы — также плохо представляет распределение. Для удовлетворительного представления необходимо минимум два значения — по одному из каждого диапазона. Мы можем рассуждать следующим образом. Каждая из традиционных характеристик — обычное среднее (математическое ожидание), среднее геометрическое, среднее гармоническое, медиана, мода и так далее — представляет собой в классическом случае числовых признаков некоторое значение признака, которое в том или ином смысле наилучшим среди всех значений образом представляет всю совокупность (распределение). Естественно предположить, что пара значений может представлять совокупность лучше, тройка — еще лучше и так далее. Можно попытаться, следовательно, построить иерархию таких "множественных" представлений, где каждое последующее требует для запоминания (фиксации) больше единиц информации, но полнее описывает всю совокупность. Используя естественную аналогию, мы называем представляющую совокупность "парламентом" (далее кавычки в подобных выражениях, как правило, будут опускаться). Возникает естественный вопрос: что понимать под словом "представляет т. е. как оценивать качество представления? Наиболее естественным представляется следующий подход: разобьем совокупность представляемых объектов ("избирателей") на некоторые классы близких друг к другу объектов ("избирательные округа") и в каждом выберем по представителю ("депутату"). От округов естественно при этом потребовать, чтобы они были примерно равной численности и как можно более "компактны а от представителя — чтобы он был в какомто смысле "средним" объектом в своем округе. Такой подход известен в теории автоматической классификации. Мы используем его, введя необходимые математические структуры на исследуемых объектах. Можно, однако, пойти дальше и, снова используя аналогию с избирательной системой, задаться вопросом: так ли необходимо, чтобы каждый депутат представлял определенную группу избирателей? Отметим, что наличие кандидатов в депутаты, обещающих в первую очередь "добиться" чеголибо для своего округа, оценивается обычно как издержка представительной демократии. Можно вспомнить и уж вовсе анекдотические, порожденные недомыслием и заведомой демагогией, хотя и довольно популярные в годы первых демократических выборов требования обеспечить представительство в выборных органах членов определенных социальных групп ("Кто будет защищать интересы пенсионеров (инвалидов, молодежи, национальных меньшинств)?"), тогда как, понятно, выборный орган должен быть в первую очередь не собранием лоббистов, а целостной системой, представляющей, а именно выражающей в законодательной форме, интересы всего общества. Оказывается, эти соображения допускают формализацию, обобщение и применение к достаточно широкому кругу социальных явлений, причем подходы к построению такого парламента могут быть весьма различными. Можно потребовать, например, чтобы парламент возможно точнее воспроизводил распределение некоторых, опять-таки выбранных исследователем, характеристик объектов, которые мы называем оценочными. Другой возможный подход, названный представительным рейтингом, заключается в том, что мы рассматриваем всевозможные объекты из числа кандидатов на роль представителя (об этом сказано ниже) и вычисляем некоторый показатель, характеризующий качество представления всей совокупности анализируемых объектов данным кандидатом. Парламент формируется из некоторого числа наиболее представительных кандидатов.

Теперь покажем, как этот подход применяется к анализу данных эмпирических социологических исследований. Как правило, при анализе данных социологических исследований объектом считается одна строка таблицы данных, т. е. респондент, ответивший на вопросы анкеты (опросника). Мы поступаем более общим образом и вводим понятие типа. *Типом* мы называем множество респондентов, чьи ответы на некоторые выбранные исследователем вопросы удовлетворяют определенным, опять-таки заданным исследователем, соотношениям. Таким образом, даже применительно ко всем вопросам анкеты типу может соответствовать более одного респондента, ибо ситуация, когда два или более человека ответят совершенно одинаково на все вопросы, не исключена. Это тем более возможно, если мы ограничиваемся частью вопросов анкеты. Учет количества респондентов, соответствующих тому или иному типу, производится с помощью использования некоторых специальных "весов". Типы, претендующие на членство в парламенте (кандидаты), подразделяются на три разновидности: табличные, существенные и возможные. Продолжая аналогию, эти разновидности можно сравнить с различными видами ценза для кандидатов. Тип называется *табличным*, если соответствующие ему строки (анкеты) реально имеются в таблице данных. Табличный тип называется *существенным*, если он достаточно многочислен, т. е. удовлетворяет некоторым заданным ограничениям на количество принадлежащих ему анкет. Эти ограничения могут накладываться, например, с целью обеспечить возможность последующего статистического анализа, а также могут отражать какие-либо содержательные соображения. Если продолжить аналогию с избирательной системой, это можно сравнить с требованием собрать некоторое число подписей для регистрации в качестве кандидата. Тип называется *возможным*, если анкеты, удовлетворяющие заданным соотношениям, в принципе возможны, хотя не обязательно встречаются в таблице данных. Этот тип, пожалуй, не имеет аналога в избирательной системе, но здесь возможны другие сравнения. Если табличные типы можно использовать, в частности, для создания реальных социальных портретов представителей тех или иных социальных групп, то возможные типы применимы для создания портретов, которые можно назвать идеальными. Такой портрет можно сравнить с художественным образом, когда изображенный человек или явление в действительности никогда не существовали, однако воспринимаются как весьма узнаваемые. Отметим, что, как это часто бывает при использовании математических методов, термин "тип" в данном изложении носит несколько специфический и, в общем, более узкий характер, нежели в общесоциологическом контексте.

2.2.2. Экстремальное определение средних значений

По-видимому, большинство задач обработки данных можно сформулировать в виде экстремальных задач, т. е. задач поиска экстремума (минимума или максимума) некоторой функции. Точнее, под экстремальной задачей понимается поиск экстремального значения и(или) точек, в которых экстремум достигается. Например, пусть ξ — числовой случайный признак, имеющий среднее значение (математическое ожидание)

$$\mathsf{M}\xi = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x\, dF_\xi(x),$$

где F_ξ — функция распределения признака ξ. Тогда $\mathsf{M}\xi$ равно такому a, при котором значение выражения

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} (a-x)^2\, dF_\xi(x)$$

минимально, т. е.

$$\mathsf{M}\xi = \arg\min_a \int\limits_{-\infty}^{\infty} (a-x)^2\, dF_\xi(x),$$

Медиана непрерывного признака также записывается в экстремальной форме:

$$\mathsf{Me}\xi = \arg\min_a \int\limits_{\infty}^{\infty} |a-x|\, dF_\xi(x).$$

Если вспомнить, что $|x-y|$ — расстояние между точками числовой прямой x и y, и ввести для этого расстояния обозначение $d(x,y)$, то

$$\mathsf{M}\xi = \arg\min_a \int\limits_{\infty}^{\infty} [d(x,y)]^2\, dF_\xi(x),$$

$$\mathsf{Me}\xi = \arg\min_a \int\limits_{\infty}^{\infty} d(x,y)\, dF_\xi(x).$$

Это открывает путь к обобщению понятий медианы и среднего для случайных признаков со значениями в метрическом пространстве.

2.2.3. Обобщенные средние. Представительный рейтинг

Пусть имеется метрическое пространство (X, d) и на нем задана вероятностная мера P. Тогда соответствующие этой мере среднее значение и медиана соответственно равны:

$$\mathsf{M}P = \arg\min_{a} \int\limits_{\infty}^{\infty} [d(x,y)]^2\, dF_{\xi}(x),$$

$$\mathsf{Me}P = \arg\min_{a} \int\limits_{\infty}^{\infty} d(x,y)\, dF_{\xi}(x).$$

Поясним, что интегралы в этих формулах и далее могут быть записаны для одномерного числового признака в форме интеграла Стилтьеса относительно функции распределения, как это сделано выше; для одномерного или многомерного непрерывного признака с распределением, имеющим плотность, — в виде традиционного интеграла с плотностью, а для дискретного признака с конечным или бесконечным числом значений — опять-таки традиционным образом в виде суммы или ряда соответственно. Отметим, что каждое из выражений под знаком минимума (интеграл) представляет собой некоторый показатель представительности соответствующего значения признака, которое тем более представительно, чем меньше значение показателя. Возможны и другие показатели, например,

$$\mathsf{M}\xi = \int\limits_{X} \phi(d(x,a))\, P(dx),$$

где ϕ — некоторая неубывающая числовая функция. Для математического ожидания $\phi(t) = t^2$, для медианы $\phi(t) = t$. Другой пример —

$$\sup_{x \in X} d(x,a).$$

Если $x_1, \ldots, x_n$ — выборочные значения случайной величины со значениями в (X, d), то выборочные среднее и медиана определяются как

$$\arg\min_{a} \sum_{i=1}^{n} [d(x,y)]^2\, dF_{\xi}(x),$$

и

$$\mathsf{Me}\xi = \arg\min_{a} \int\limits_{\infty}^{\infty} d(x,y)\, dF_{\xi}(x).$$

Эти выражения являются частными случаями приведенных выше, когда вероятность (мера) каждого из x_i равна $1/n$. Здесь n — число наблюдений, и, соответственно, среди значений x_i могут быть совпадающие.

Таким образом, в качестве обобщенного среднего в метрическом пространстве можно взять

$$\arg\min_{a\in X} \int\limits_X \phi(d(x,y))\, P(dx).$$

Сделаем существенное замечание. Здесь и далее имеется в виду, что минимум (максимум) функции может достигаться более чем в одной точке. Таким образом, $\arg\min$ ($\arg\max$) — не точка, а множество, которое в частном случае может состоять из одной точки, как, например, в случае среднего значения и медианы непрерывного числового признака (см. Дополнение).

А. И. Орлов [40–43] определил средние для конечных множеств и вероятностных мер в метрических пространствах несколько более общим образом. Пусть (X,d) — метрическое пространство. Для любой функции $g\colon X\to\mathbb{R}$ обозначим

$$\arg\min_{x\in X} g(x) = \{x\in X \mid g(x)\leqslant g(y)\ \forall y\in X\}.$$

Ясно, что это множество может быть пустым.

Предположим, что $\rho\colon X^2 \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция. Для $x_1,\ldots,x_n\in X$ определим

$$\mathbf{M}_n(x_1,\ldots,x_n;\rho) = \arg\min_{x\in X}\sum_{i=1}^n \rho(x_i,x).$$

Пусть $\mathcal{B}$ — σ-алгебра борелевских подмножеств X, и μ — строго положительная конечная мера на $\mathcal{B}$. Предположим, что $f(x)=\int\limits_X \rho(y,x)\,\mu(dy)$ конечно для любого x. Определим

$$\mathbf{M}(\mu,\rho) = \arg\min_{x\in X} f(x).$$

Если $X=\mathbb{R}$, $d(x,y)=|x-y|$, то для $\rho(y,x)=(x-y)^2$ $\mathbf{M}_n(x_1,\ldots,x_n;\rho)$ — арифметическое среднее $x_1,\ldots,x_n$, и если μ — вероятностная мера, то $\mathbf{M}(\mu,\rho)$ — математическое ожидание соответствующей случайной величины. Для $\rho(y,x)=|x-y|$ $\mathbf{M}_n(x_1,\ldots,x_n;\rho)$ и $\mathbf{M}(\mu,\rho)$ — выборочная медиана и медиана соответственно.

Как неархимедовы метрические пространства, так и средние в метрических пространствах используются в статистике нечисловых данных и их приложениях. Таким образом, естественно рассмотреть средние в неархимедовых метрических пространствах.

Для метрического пространства (X,d) обозначим через $d(x,A)$ расстояние между $x\in X$ и $A\subset X$: $d(x,A)=\inf\limits_{y\in A} d(x,y)$. Если μ — мера на $\mathcal{B}$, то $\operatorname{supp}(\mu)$ — носитель μ, т. е. наименьшее из всех замкнутых множеств A, для которых мера дополнения равна нулю: $\mu(X\setminus A)=0$.

Теорема 2.2.1 *Предположим, что (X, d) — неархимедово метрическое пространство, $\mathcal{B}$ — σ-алгебра борелевских подмножеств X, μ — конечная мера на $\mathcal{B}$ и $\operatorname{supp}(\mu)$ компактно. Тогда $\mathbf{M}(\mu, d) \neq \varnothing$ и $\mathbf{M}(\mu, d) \subset \operatorname{supp}(\mu)$.*

Доказательство. Сначала докажем второе утверждение. Предположим противное. Тогда существует $a \in \mathbf{M}(\mu, d)$ такое, что $a \notin \operatorname{supp}(\mu)$. В силу компактности $d(a, \operatorname{supp}(\mu)) = r > 0$ и существует $x \in \operatorname{supp}(\mu)$ такое, что $d(a, x) = r$. Из основных свойств неархимедова метрического пространства следует, что если $d(x, y) < d(a, x)$, то $d(a, y) = d(a, x)$, а если $d(x, y) > d(a, x)$, то $d(a, y) = d(x, y)$. Наконец, если $y \in \operatorname{supp}(\mu)$ и $d(x, y) = d(a, x)$, то $d(a, y) \leqslant d(a, x)$, а с другой стороны, $d(a, y) \geqslant d(a, x)$ по определению точки x, так что в этом случае также $d(a, y) = d(x, y)$. Тогда

$$f(a) - f(x) = \int\limits_{\operatorname{supp}(\mu)} [d(a, y) - d(x, y)]\, \mu(dy) =$$

$$= \int\limits_{\{y \in \operatorname{supp}(\mu) | d(x,y) < d(a,x)\}} [d(a, x) - d(x, y)]\, \mu(dy) +$$

$$+ \int\limits_{\{y \in \operatorname{supp}(\mu) | d(x,y) \geqslant d(a,x)\}} [d(x, y) - d(x, y)]\, \mu(dy).$$

Второй интеграл, очевидно, равен нулю, а первый можно записать в виде

$$\int\limits_{\operatorname{supp}(\mu) \cap B(x,r)} [d(a, x) - d(x, y)]\, \mu(dy), \tag{2.1}$$

где $B(x, r)$ — открытый шар с центром x и радиусом $r = d(a, x)$. Множество $S = \operatorname{supp}(\mu) \cap B(x, r)$ имеет положительную меру. В самом деле, предположив противное, мы получим, что дополнение замкнутого множества $\operatorname{supp}(\mu) \cap (X \setminus B(x, r)$, равное

$$(X \setminus \operatorname{supp}(\mu)) \cup B(x, r) =$$

$$= (X \setminus \operatorname{supp}(\mu)) \cup [B(x, r) \cap \operatorname{supp}(\mu)] \cup [B(x, r) \cap (X \setminus \operatorname{supp}(\mu))] =$$

$$= (X \setminus \operatorname{supp}(\mu)) \cup S,$$

имеет меру нуль, что противоречит определению носителя. Таким образом, выражение 2.1 представляет собой интеграл от положительной функции по множеству положительной меры и, следовательно, положительно, так что $f(a) > f(x)$, т. е. $a \notin \mathbf{M}(\mu, d)$. Это противоречие доказывает второе утверждение. Чтобы доказать первое, отметим, что функция

f непрерывна, потому что

$$|f(x) - f(y)| \leqslant \int\limits_X |d(x, z) - d(y, z)|\, \mu(dz) \leqslant d(x, y)\mu(X).$$

Отсюда в силу второго утверждения

$$\arg\min_{x \in X} f(x) = \arg\min_{x \in \operatorname{supp}(\mu)} f(x) \neq \varnothing,$$

так как множество $\operatorname{supp}(\mu)$ компактно. ■

Следствие 2.2.2 *Пусть (X, d) — неархимедово метрическое пространство и $x_1, \ldots, x_n \in X$. Тогда $\mathbf{M}_n(x_1, \ldots, x_n; d) \subset \{x_1, \ldots, x_n\}$.*

Доказательство. Отметим, что $\mathbf{M}_n(x_1, \ldots, x_n;\, d) = \mathbf{M}(\mu, d)$, где для $A \in \mathcal{B}$

$$\mu(A) = \begin{cases} 1, & \text{если } A = \{x_i\},\ i = \overline{1, n}, \\ 0, & \text{если } A \cap \{x_1, \ldots, x_n\} = \varnothing. \end{cases}$$

Теорема 2.2.3 *Предположим, что (X, d) — неархимедово метрическое пространство и μ — конечная мера на $\mathcal{B}$ такая, что $\operatorname{supp}(\mu)$ компактно, не более чем счетно и содержит более одной точки. Тогда $\mathbf{M}(\mu, d)$ содержит по меньшей мере две точки.*

Доказательство. Пусть $\operatorname{supp}(\mu) = \{x_1, x_2, \ldots\}$. В силу предыдущей теоремы $\mathbf{M}(\mu, d) \subset \{x_1, x_2, \ldots\}$. Пусть $(\mu, d), r = \min\limits_{i \neq k} d(x_1; x_k)$, и s является таким, что $d(x_k, x_s) = r$. Предположим, что $i \neq k,\ \ i \neq s$. Тогда $d(x_k, x_i) \geqslant d(x_k, x_s)$. Если $d(x_k, x_i) > d(x_k, x_s)$ то $d(x_s, x_i) = d(x_k, x_i)$ в силу того свойства равнобедренных треугольников в неархимедовых прстранствах, согласно которому боковые стороны не меньше основания. Если $d(x_k, x_i) = d(x_k, x_s)$, то $d(x_s, x_i) = d(x_k, x_i)$ в силу неравенства треугольника. Отсюда $d(x_s, x_i) < d(x_k, x_i)$ для всех $i \neq k,\ \ i \neq s$. Следовательно, $f(x_s) \leqslant f(x_k)$. Это завершает доказательство. ■

Примечание. Все вышеприведенные результаты верны для $\mathbf{M}(\mu, \rho)$, $\mathbf{M}_n(x_1, \ldots, x_n; \rho)$, где $\rho(x, y) = \psi(d(x, y))$ и ψ — строго возрастающая непрерывная функция на $\mathbb{R}^+$ такая, что $\psi(0) = 0$, так как $\rho(x, y)$ — неархимедово расстояние и ρ определяет на X ту же самую топологию.

Обратим теперь внимание на следующее обстоятельство. В случае, если множество анализируемых объектов дискретно, мы можем использовать для анализа не только то (те) значение, на котором показатель представительности достигает наилучшей, т. е. наименьшей, величины, но отобрать несколько наиболее представительных значений или даже упорядочить все возможные значения по степени представительности. Это упорядочение мы называем *представительным рейтингом.* Его применение продемонстрировано ниже.

2.2.4. Множественные представления

Теперь приступим к математической реализации высказанной выше на содержательном уровне идеи о том, что несколько элементов представляют исследуемую совокупность лучше, чем один. Вначале будем исходить из того, что на этой совокупности задано расстояние, т. е. она представляет собой метрическое пространство, и не предполагаем наличия какого-либо распределения вероятностей.

Пусть (X, d) — метрическое пространство, $Y \subset X$, $x \in X$. *Расстоянием* $d(x, Y)$ от точки x до множества Y называется величина

$$d(x, Y) = \inf_{y \in Y} d(x, y).$$

Если нижняя грань в правой части достигается (например, в случае так называемых компактных и, в частности, конечных множеств), то

$$d(x, Y) = \min_{y \in Y} d(x, y),$$

т. е. расстояние от точки x до множества Y равно минимальному из расстояний от x до точек множества Y. Далее, назовем *уклонением* множества $A \subset X$ от множества Y величину

$$\delta(A, Y) = \mathop{}_{x \in A} d(x, Y).$$

Пусть $\varepsilon > 0$. Множество Y называется *ε-сетью* для множества A, если $\delta(A, Y) \leqslant \varepsilon$, т. е. для каждого найдется $x \in A$ такое, что $d(x, y) \leqslant \varepsilon$. Таким образом, можно сказать, что ε-сеть приближает множество A с точностью ε, где под мерой точности приближения множества понимается наихудшее качество приближение элементами сети точек данного множества. Будем называть ε-сеть *минимальной* для данного ε, если не существует ε-сети, состоящей из меньшего числа точек. Двоичный логарифм количества точек в минимальной ε-сети называется ε-энтропией множества A относительно X. Минимальная ε-сеть, вообще говоря, не единственна. Сформулированное выше требование к повышению точности представления множества с увеличением числа "представителей" в данном случае естественно сформулировать так: для A при каждом существует конечная ε-сеть. Множества в метрических пространствах, для которых выполняется это свойство, называются *вполне ограниченными*. Их свойства хорошо изучены [21]. Понятно, что наиболее экономное представление обеспечивает минимальная ε-сеть.

Нетрудно показать, что если $(X, d), (X', d')$ — метрические пространства, $A \subset X$, $A' \subset X'$, A и A' изометричны и $\varepsilon > 0$, то минимальные ε-сети для A и A' имеют, вообще говоря, различную мощность. Другими словами, мощность минимальной ε-сети для множества A в метрическом пространстве зависит не только от метрики на A , но также и от метрики на объемлющем пространстве. Для неархимедова метрического пространства, однако, это не так.

Теорема 2.2.4 *Предположим, что (X, d) — неархимедово метрическое пространство, $A \subset X$, $\varepsilon > 0$, и существует конечная ε-сеть для A. Тогда существует ε-сеть с той же мощностью и принадлежащая A.*

Доказательство. Пусть U — минимальная ε-сеть для A, $y \in U$. Докажем, что существует $x \in A$ такое, что $d(x, y) \leqslant \varepsilon$. Предположим противное. Тогда $U \setminus \{y\}$ — ε-сеть. Это противоречит тому факту, что U минимальна. Заменим y на x в $\dot{U}$. Множество $(U \setminus \{y\}) \cup \{x\}$ — также ε-сеть, поскольку если $z \in U$, $d(z, y) \leqslant \varepsilon$, то $d(x, z) \leqslant \varepsilon$ в силу ультраметрического неравенства. Рассортируем все точки $y \in U$ этим способом. В результате получим ε-сеть с той же мощностью, что U, и принадлежащую A.

Теорема 2.2.5 *Пусть (X, d) — неархимедово метрическое пространство, $A \subset X$, U — конечная ε-сеть для A, $U \subset A$. Необходимым и достаточным условие того, чтобы эта сеть была минимальна, является то, что $d(x, y) > \varepsilon$ для каждого $x, y \in U$, $x \neq y$.*

Доказательство. *Необходимость.* Предположим противное, а именно, что $d(x, y) \leqslant \varepsilon$ для некоторых x, y. В этом случае, если $d(z, x) \leqslant \varepsilon$ для $z \in A$, то $d(z, y) \leqslant \varepsilon$ в силу ультраметрического неравенства, т. е. множество $U \setminus \{x\}$ — ε-сеть и,следовательно, ε-сеть U не минимальна.

Достаточность. Снова предположим противное. Пусть V — ε-сеть для A, $|V| < |U|$. Тогда существуют $x, y \in U$, $z \in V$, такие, что $x \neq y$, $d(x, z) \leqslant \varepsilon$, $d(y, z) \leqslant \varepsilon$. Однако из этого $d(x, y) \leqslant \varepsilon$ в силу ультраметрического неравенства.

Если (X, d) — метрическое пространство, $A \subset X$ и n — мощность минимальной ε-сети для A, то величина $\mathcal{H}_\varepsilon(A, X) = \log_2 n$ называется *ε-энтропией* A. Если (X, d) — неархимедово метрическое пространство, то зависимость X может быть опущена, и в этом случае мы пишем просто $\mathcal{H}_\varepsilon(A)$.

Рассмотрим несколько более общую конструкцию. Предположим, что (X, d_X) — метрическое пространство и (Y, d_Y) — метрическое пространство такое, что (X, d_X) может быть вложено в (Y, d_Y). Зафиксируем некоторое вложение $\eta\colon X \to Y$. Обозначим $\mathcal{Z} = \{Z \subset Y \mid Z \text{ конечно}\}$, $\mathcal{Z}_n = \{Z \in \mathcal{Z} \mid |Z| = n\}$, $n \in \mathbb{N}$. Пусть $Z = \{y_1, \ldots, y_n\} \in \mathcal{Z}_n$. Через $D_i^*(Z) \equiv D^*(Z, y_i)$ обозначим *область Дирихле* y_i относительно Z: $D_i^*(Z) \triangleq \{y \in Y \mid d_Y(y, y_i) \leqslant d_Y(y, y_j) \ \forall j \neq i\}$. Мы говороим, что $\widehat{D^*}(Z) \triangleq \{D_1^*(Z), \ldots, D_n^*(Z)\}$ — *семейство Дирихле*, соответствующее Z.

Обозначим $Y^\infty = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} Y^n$. Для $\overline{y} \in Y^\infty$ мы запишем $\dim(\overline{y}) = n$, если $\overline{y} \in Y^n$. Для $\overline{y} = (y_1, \ldots, y_n) \in Y^n$ обозначим $\lfloor \overline{y} \rfloor \equiv \lfloor (y_1, \ldots, y_n) \rfloor \triangleq \{y_1, \ldots, y_n\} \in \mathcal{Z}$. Положим $D_i(\overline{y}) \equiv D_i(\overline{y}, y_i) \triangleq D_1^*(\lfloor \overline{y} \rfloor)$ для $i = 1$ и $D_i(\overline{y}) \triangleq D_i^*(\lfloor \overline{y} \rfloor) \setminus \sum\limits_{j=1}^{i-1} D_j(\overline{y})$ для $i > 1$. Мы говорим, что $D_i(\overline{y})$ — *округ* y_i относительно $\overline{y}$, y_i — *представитель* D_i, и $\overrightarrow{D}(\overline{y}) \triangleq (D_1(\overline{y}), \ldots, D_n(\overline{y}))$ — *кортеж округов*, соответствующий $\overline{y}$. Ясно, что $D_i(\overline{y}) \cap \lfloor \overline{y} \rfloor = \{y_i\}$.

Предположим, что (X, d_X) компактно. Положим

$$Z^{(1)}\left((X, d_X), (Y, d_Y), \eta, n\right) = \\ = \arg\min_{Z \in \mathcal{Z}_n} \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \operatorname{diam}(D_i^*(Z) \cap \eta(X)),$$

$$Z^{(2)}\left((X, d_X), (Y, d_Y), \eta, n\right) = \\ = \left\lfloor \arg\min_{\overline{y} \in Y^n} \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \operatorname{diam}(D_i(\overline{y}) \cap \eta(X)) \right\rfloor,$$

$$Z^{(3)}\left((X, d_X), (Y, d_Y), \eta, \varepsilon\right) = \\ = \arg\min_{Z \in \mathcal{Z},\ \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \left[\operatorname{diam}\left(\widetilde{D}_i(Z) \cap \eta(X)\right)\right] \leqslant \varepsilon} |Z|\,,$$

$$Z^{(4)}\left((X, d_X), (Y, d_Y), \eta, \varepsilon\right) = \\ = \left\lfloor \arg\min_{\overline{y} \in Y^\infty,\ \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} [\operatorname{diam}(D_i(\overline{y}) \cap \eta(X))] \leqslant \varepsilon} \dim(\overline{y}) \right\rfloor.$$

Очевидно, что экстремальные задачи для $Z^{(3)}$, $Z^{(4)}$ в некотором смысле двойственны экстремальным задачам для $Z^{(1)}$, $Z^{(2)}$ соответственно. Далее, величина $d_n(X, Y, \eta) \triangleq \operatorname{diam}(\widetilde{D}_i(Z^{(1)}(n))) = \min\limits_{Z \in \mathcal{Z}_n} \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \operatorname{diam}(\widetilde{D}_i(Z))$ называется *энтропийным n-поперечником* X относительно Y, η; $Z^{(3)}(\varepsilon)$ называется *минимальной ε-сетью* X относительно Y, η, и величина $\mathcal{H}_\varepsilon(X, Y, \eta) \triangleq \log_2 \left| Z^{(3)}(\varepsilon) \right|$ называется *относительной ε-энтропией* X относительно Y, η.

Теперь перейдем к случаю, когда на исследуемой совокупности заданы как расстояние, так и распределение вероятностей (вероятностная мера). Предположим, что $\mathcal{B}$ — σ-алгебра борелевских подмножеств X,а P — вероятностная мера на $\mathcal{B}$. Положим $\mathcal{B}' = \{A \subset \eta(X) \mid \eta^{-1}(A) \in \mathcal{B}\}$, $P'(A) = P(\eta^{-1}(A))$. Ясно, что каждое множество Дирихле замкнуто в

(Y, d_Y). Следовательно, каждый округ является борелевским подмножеством Y. Отсюда для множества Дирихле $\widetilde{D}$, округа D, и $A \subset \mathcal{B}'$, мы имеем $\widetilde{D} \cap A \subset \mathcal{B}'$, $D \subset \mathcal{B}'$. Теперь для любого $p \geqslant 1$ можем определить

$$\operatorname{disp}_p(D_i^*(Z) \cap \eta(X)) \triangleq \left\{ \int\limits_{\widetilde{D}_i(Z) \cap \eta(X)} [d_Y(y, Z)]^p P'(dy) \right\}^{\frac{1}{p}},$$

$$\operatorname{disp}_p(D_i(\overline{y}) \cap \eta(X)) \triangleq \left\{ \int\limits_{D_i(\overline{y}) \cap \eta(X)} [d_Y(y, Z)]^p P'(dy) \right\}^{\frac{1}{p}}.$$

Мы говорим, что $\operatorname{disp}_p(D_i^*(Z) \cap \eta(X))$ (соответственно $\operatorname{disp}_p(D_i(\overline{y}) \cap \eta(X)))$ — *рассеяние* степени p множества D_i^* (соответственно D_i). Положим

$$Z^{(5)}\left((X, d_X), (Y, d_Y), \eta, P, p, n\right) = \\ = \underset{Z \in \mathcal{Z}_n}{\arg\min} \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \operatorname{disp}_p(D_i^*(Z) \cap \eta(X)),$$

$$Z^{(6)}\left((X, d_X), (Y, d_Y), \eta, P, p, n\right) = \\ = \left\lfloor \underset{\overline{y} \in Y^n}{\arg\min} \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \operatorname{disp}_p(D_i(\overline{y}) \cap \eta(X)) \right\rfloor,$$

$$Z^{(7)}\left((X, d_X), (Y, d_Y), \eta, P, p, \varepsilon\right) = \\ = \underset{Z \in \mathcal{Z},\ \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n}\left[\operatorname{disp}_p(D_i^*(Z) \cap \eta(X))\right] \leqslant \varepsilon}{\arg\min} |Z|,$$

$$Z^{(8)}\left((X, d_X), (Y, d_Y), \eta, P, p, \varepsilon\right) = \\ = \left\lfloor \underset{\overline{y} \in Y^\infty,\ \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n}\left[\operatorname{disp}_p(D_i(\overline{y}) \cap \eta(X))\right] \leqslant \varepsilon}{\arg\min} \dim(\overline{y}) \right\rfloor.$$

Если $(Y, d_Y) = (X, d_X)$, мы опускаем символы Y, η, выражение "относительно Y, η", и так далее.

Обозначим через $\mathcal{S}$ множество всех конечных $\mathcal{B}$-измеримых разбиений X:

$$\mathcal{S} = \left\{ S = \{A_{1, \dots,} A_n\} \mid X = \sum_{i=1}^{n} A_i,\ A_{1, \dots,} A_n \in \mathcal{B} \right\}.$$

Положим $(Y, d_Y) = (X, d_X)$. Для любого $n \in \mathbb{N}$, $Z \in \mathcal{Z}_n$, $\overline{x} \in X^n$, и любую вероятностную меру P на $\mathcal{B}$, определим

$$\mathrm{ud}(S, P) = \max_{1 \leqslant i,j \leqslant n} |P(A_i) - P(A_j)|\,.$$

Здесь "ud" означает "uniformity of the division" — "равномерность деления". Рассмотрим множество $\mathbb{R}^2$ с лексикографическим порядком $\prec$, т. е.

$$(t_1, t_2) \prec (s_1, s_2) \Longleftrightarrow (t_1 < s_1) \vee [(t_1 = s_1)\,\&\,(t_2 < s_2)]\,.$$

Положим

$$Z^{(9)}\left((X, d_X), P, p, n\right) = \\ = \operatorname*{arg\,min}_{Z \in \mathcal{Z}_n, \prec} \left(\mathrm{ud}(Z, P), \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \mathrm{disp}_p(A_i)\right).$$

Если $(X, P, \mathcal{B})$ — вероятностное пространство без атомов, то

$$Z^{(9)}\left((X, d_X), P, p, n\right) = \\ = \operatorname*{arg\,min}_{Z \in \mathcal{Z}_n,\, P(\widetilde{D}_1(Z)) = \ldots = P(\widetilde{D}_n(Z)) = \frac{1}{n}} \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \mathrm{disp}_p(A_i).$$

Пример 2.2.6

Приведем пример, показывающий, что в случае числовых признаков некоторые n-элементные средние совпадают с классическими характеристиками распределений. Предположим, что x_i — абсолютно непрерывный признак с плотностью q. Понятно, что области Дирихле точек $y_1 < y_2 < \ldots < y_n$ суть интервалы $I_1, I_2, \ldots, I_n$, где

$$I_1 = \left(-\infty,\ \frac{x_1 + x_2}{2}\right], \quad I_2 = \left(\frac{x_1 + x_2}{2},\ \frac{x_2 + x_3}{2}\right], \ldots,$$

$$I_n = \left(\frac{x_{n-1} + x_n}{2},\ \infty\right).$$

Будем искать представление $Y_p^{(9)}((-\infty,\ \infty),\ n)$. Тогда

$$Y_p^{(9)}((-\infty,\ \infty),\ n) = \operatorname*{arg\,min}_{Y \in X_n} \int\limits_{I_1} |x - y_1|^p q(x)\, dx +$$

$$+ \int\limits_{I_2} |x - y_2|^p q(x)\, dx + \ldots + \int\limits_{I_n} |x - y_n|^p q(x)\, dx$$

При $p = 1$ y_i представляют собой квантили порядка $(2i-1)/(2n)$, $i = \overline{i=1,\, n}$. При $n = 1$ y_1 — медиана. При $p = 2$ минимизируемое выражение равно

$$\int\limits_{I_1} |x - y_1|^2 q(x)\,dx + \int\limits_{I_2} |x - y_2|^2 q(x)\,dx + \ldots + \int\limits_{I_n} |x - y_n|^2 q(x)\,dx$$

и

$$y_i = \int\limits_{I_i} x p(x)\,dx \Big/ \int\limits_{I_i} p(x)\,dx,$$

т. е. y_i суть внутригрупповые средние интервалов I_i, а разбиение числовой прямой на интервалы I_i соответствует минимальной средней внутригрупповой дисперсии, взвешенной по вероятностям интервалов. При $n = 1$ мы получаем обычное математическое ожидание.

Одно из возможных требований к возрастанию точности представления признака ξ (или, что то же самое, его распределения P) формулируется так: для любой функции ϕ от значений признака среднее значение этой функции

$$\overline{\phi} = \int\limits_X \phi(x)\,P(dx)$$

может быть вычислено с любой точностью по n-элементному представлению при достаточно большом n. Отметим, что в виде такого интеграла выражаются, в частности, вероятности отдельных значений и множеств значений, а также моменты. Допустим, что конечные представления $\{y_1^{(n)}, \ldots, y_n^{(n)}\}$ удовлетворяют следующим условиям:

$$P\Big(D_i^*(y_1^{(n)}, \ldots, y_n^{(n)}) \bigcap D_j^*(y_1^{(n)}, \ldots, y_n^{(n)})\Big) = 0 \text{ при } i \neq j,$$

т. е. вероятность множества (суммарная вероятность) элементов, принадлежащих одновременно областям Дирихле различных элементов из $\{y_1^{(n)}, \ldots, y_n^{(n)}\}$, равна нулю;

$$\max_{1 \leqslant i \leqslant n} P(D_i^*(y_1^{(n)}, \ldots, y_n^{(n)})) \to 0 \text{ при } i \neq j,$$

т. е. с увеличением n вероятности областей Дирихле отдельных элементов неограниченно уменьшаются. Тогда при выполнении некоторых требований технического характера величина

$$\overline{\phi}_n^* = \sum_{i=1}^n \phi(y_i^{(n)}) P(D_i^*(y_1^{(n)}, \ldots, y_n^{(n)})),$$

с ростом n стремится к $\overline{\phi}$. Для стремления же к $\overline{\phi}$ величины

$$\overline{\phi}_n = \sum_{i=1}^n \phi(y_i^{(n)}) P(D_i^*(\overline{y}^{(n)})),$$

где $\overline{y}^{(n)} = (y_1^{(n)}, \ldots, y_n^{(n)})$, достаточно выполнения второго условия.

Нетрудно убедиться, что в рассмотренных выше примерах обобщенных n-членных математического ожидания и медианы для непрерывных числовых признаков оба условия удовлетворяются. В частности, для медианы $P(D_i^*(y_1^{(n)}, \ldots, y_n^{(n)})) \to 1/n,\ i = 1, \ldots, n$, откуда и следует выполнение второго из них.

Подойдем теперь к проблеме конечного представления несколько шире. Откажемся от предположения, что каждый элемент $y_i^{(n)}$ из множества $\{y_1^{(n)}, \ldots, y_n^{(n)}\}$ является представителем некоего множества близких к нему элементов (зоны притяжения), а просто потребуем, чтобы элементы в совокупности достаточно хорошо представляли распределение признака. При этом мы иногда рассматриваем только распределение вероятностей на исследуемой совокупности, и не предполагаем наличия расстояния, т. е. структуры метрического пространства, что будет видно из контекста. Покажем вначале, как можно решать эту задачу с помощью некоторого известного подхода, при котором математически указанные требования к представлению выражаются следующим образом: для каждого $\overline{y}^{(n)} = (y_1^{(n)}, \ldots, y_n^{(n)})$ существует набор коэффициентов (называемых весами) $\overline{\theta}^{(n)} = (\theta_1^{(n)}, \ldots,\ \theta_n^{(n)})$ такой, что для каждой функции ϕ

$$\sum_{i=1}^{n} \theta_i^{(n)} \phi(y_i^{(n)}) \to \overline{\phi} = \int\limits_X \phi(n)\, P(dx) \text{ при } n \to \infty,$$

причем для каждого n набор элементов $y_1^{(n)}, \ldots, y_n^{(n)}$ и весов $(\theta_1^{(n)}, \ldots, \theta_n^{(n)})$ выбран в некотором смысле наилучшим образом. Последняя формулировка требует уточнения. Поскольку выражение в левой части последнего равенства — не что иное, как квадратурная формула с узлами $y_i^{(n)}$ и весами $\theta_1^{(n)}$, то требуемое уточнение можно сделать одним из двух наиболее популярных способов, принятых в этой теории [9]. Обозначим множество весовых векторов $\Theta^{(n)}$. В первом из упомянутых способов задается некоторый достаточно широкий класс ϕ функций ϕ и ставится задача поиска

$$\operatorname*{arg\,min}_{\overline{y}^{(n)} \in X^{(n)}, \overline{\theta}^{(n)} \in \Theta} \sup_{\phi \in \Phi} \Big| \sum_{i=1}^{n} \theta_i^{(n)} \phi(y_i^{(n)}) - \overline{\phi} \Big|.$$

Во втором способе задаются некоторые функции $\phi_1, \ldots,\ \phi_m$ и ставится задача поиска таких $\overline{y}^{(n)} \in X^n$ и $\overline{\theta}^{(n)} \in \Theta^{(n)}$, при которых

$$\sum_{i=1}^{n} \theta_i^{(n)} \phi(y_i^{(n)}),$$

т. е. конечное представление в сочетании с соответствующими весами дает точные средние значения функций $\phi_i, \ldots, \phi_m$ от признака. Вопрос о том, как задавать класс Φ или функции $\phi_i, \ldots, \phi_m$ и как находить для них узлы и веса, изучен достаточно хорошо в случае, когда X — множество в пространстве векторов $x = (x_1, \ldots, x_s)$, где $x_1, \ldots, x_s$ — действительные числа и s не слишком велико (как правило, $s \leqslant 3$, иногда до $10-12$), а множество X в этом пространстве имеет достаточно простую форму. Для социологии же характерны задачи, в которых s достигает нескольких сотен, а компоненты x_i имеют различную и зачастую сложную природу. Далее предлагается способ решения задачи в важном частном случае. Пусть значение признака представляет собой вектор $x = (\widetilde{x}_1, \ldots, \widetilde{x}_s)$, а каждая из компонент $\widetilde{x}_k)$ есть значение некоторого "элементарного" признака в некоторой номинальной или порядковой шкале, т. е. $\widetilde{x}_k) \in \{1, \ldots, m_k\}$. Разделим отрезок $I = [0,\ 1]$ на $m_1 \geqslant 2$ отрезков равной длины. Обозначим их $I_1, \ldots, I_{m_1}$. Каждый из отрезков $I_{\widetilde{x}_1}$ разделим на $m_2 \geqslant 2$ отрезков равной длины $I_{\widetilde{x}_1 1}, \ldots, I_{\widetilde{x}_1 m_2}$, и так далее. Перебрав все компоненты $x_1, \ldots, x_s$, получим разбиение отрезка I на отрезки равной длины $I_{\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2, \ldots, \widetilde{x}_s}$. Число этих отрезков равно, очевидно, $m_1 \cdot m_2 \cdot \ldots \cdot m_s$. Каждому значению вектора x естественным образом соответствует отрезок $I_{\widetilde{x}_1, \ldots, \widetilde{x}_s}$. Пусть p — функция, на каждом из таких отрезков постоянная и равная $P((x_1, \ldots, x_s))$, т. е. вероятности значения $P((x_1, \ldots, x_s))$. Выберем тем или иным известным способом квадратурную формулу для отрезка I, т. е. найдем узлы $t_1^{(n)}, \ldots, t_n^{(n)} \in I$ и веса $\omega_1^{(n)}, \ldots, \omega_n^{(n)}$ формулы, позволяющие вычислять интегралы вида

$$\overline{\psi} = \int\limits_0^1 \psi(t) p(t)\, dt$$

с помощью приближенного равенства

$$\overline{\psi} \approx \sum_{i=1}^{n} \omega_i^{(n)} \psi(t_i^{(n)}).$$

Для каждой точки $t_i^{(n)}$ найдем отрезок $I_{x_{i,1}^{(n)}, \ldots, x_{i,s}^{(n)}}$, которому она принадлежит, и положим $y_i^{(n)} = (\widetilde{x}_{i,1}^{(n)}, \ldots, \widetilde{x}_{i,s}^{(n)})$, $\theta_i^{(n)} = \omega_i^{(n)}$. Существуют и более сложные приемы преобразования многомерного пространства в одномерное [2, 3], при которых отрезки, получающиеся при последовательном делении исходного отрезка I, нумеруются не обязательно в порядке возрастания, но эти приемы обычно используют предположение $m_1 = m_2 = \ldots = m_s$. Понятно, что на решение задачи, полученное предлагаемым способом, влияет порядок компонент $x_1, \ldots, x_s$. Чтобы избежать этого влияния, можно поступить следующим образом. Упорядочим компоненты несколько раз случайным образом, для каждого упорядочения вычислим приближенное значение $\overline{\psi}$, а затем найдем среднее арифметическое этих значений.

Существует, однако, способ кодирования значений признака действительными числами, не связанный с порядком компонент. Более того, этот способ пригоден для произвольного метрического пространства. Применение его к признакам, описанным выше, получается введением во множестве значений признака некоторой метрики, например, по правилу

$$d((\widetilde{x}_1^{(1)},\ldots,\widetilde{x}_s^{(1)}),(\widetilde{x}_1^{(2)},\ldots,\widetilde{x}_s^{(2)}))=\sum_{r=1}^{s}\delta(\widetilde{x}_r^{(1)},\widetilde{x}_r^{(2)}).$$

Выберем некоторую последовательность натуральных чисел $n_1, n_2, \ldots$, больших единицы, и пусть

$$\overrightarrow{D}^{(n_k)}(\overrightarrow{y}^{(n_k)})=(D_1^{(n_k)}(\overline{y}^{(n_k)}),\ldots,D_{n_k}^{(n_k)}(\overline{y}^{(n_k)}))$$

— кортеж, соответствующий n_k-элементному представлению. Рассмотрим произвольное $x\in X$. Пусть $\zeta_k(x)\in\{1,\ldots,n_k\}$ таково, что $x\in D_{\zeta_k(x)}^{(n_k)}(\overline{y}^{(n_k)})$. Положим

$$\eta(x)=\sum_{k=1}^{\infty}[\zeta_k(x)-1]\left(\prod_{s=1}^{k}\eta_k\right).$$

Понятно, что $0\leqslant\eta(x)<1$.

Рассмотрим еще один подход к построению конечных представлений. Пусть множество X не более чем счетно. Сделаем естественное предположение, что каждый элемент $x\in X$ имеет положительную вероятность. Вероятность, порождаемую мерой P, будем обозначать P. Пусть на X задана некоторая функция u со множеством значений $u_1,\ldots,u_J$. Будем искать конечное представление следующим образом:

$$Z^{(11)}=\operatorname*{arg\,min}_{Z\in X_n}\left[\max_{1\leqslant j\leqslant J}\left|\mathsf{P}\{u(x)=u_j\mid x\in Z\}-\mathsf{P}\{u(x)=u_j\}\right|\right]\equiv$$

$$\equiv\operatorname*{arg\,min}_{Z\in X_n}\left[\max_{1\leqslant j\leqslant J}\left|\frac{P(u^{-1}(\{u_j\}\bigcap Z))}{P(Z)}-P(u^{-1}(u_j))\right|\right],$$

$$Z^{(12)}=\operatorname*{arg\,min}_{Y\in X_n}\left[\sum_{j=1}^{J}\left|\mathsf{P}\{u(x)=u_j\mid x\in Z\}-\mathsf{P}\{u(x)=u_j\}\right|\right]\equiv$$

$$\equiv\operatorname*{arg\,min}_{Z\in X_n}\left[\sum_{j=1}^{J}\left|\frac{P(u^{-1}(\{u_j\}\bigcap Z))}{P(Z)}-P(u^{-1}(u_j))\right|\right],$$

Разумеется, вместо использованных в этих выражениях норм в J-мерном пространстве векторов можно применить и другие, например евклидову, однако в пространствах конечных распределений данные нормы представляются наиболее естественными.

2.3. Задачи классификации

2.3.1. Общая задача классификации

Пусть имеется некоторое множество объектов, которые подлежат классификации. Многообразие задач такого рода чрезвычайно велико, оно порождается различиями в математических структурах, которые могут быть заданы на множестве классифицируемых объектов; в критериях (правилах) классификации; в исходной информации, используемой для классификации. Мы далее излагаем некоторую схему классификации, которая, во-первых, является достаточно общей — во всяком случае, для социологических приложений, во-вторых, укладывается в общую аппроксимационную схему, и, в-третьих, хорошо приспособлена для решения некоторых конкретных социологических задач, о которых пойдет речь в последующем.

2.3.2. Задачи классификации по векторному критерию и математические модели маргинальности

Многомерная классификация

Рассмотрим так называемую многомерную аналитическую группировку. Пусть множество X значений признака состоит из векторов $x = (x_1, \ldots, x_s)$ с компонентами произвольной и, вообще говоря, различной природы. Множество значений i-й компоненты обозначим X_i. Если каждое множество X_i разбить на m_i классов $X_{i1}, \ldots, X_{im_i}$, то все множество значений признака разбивается на $m_1 \cdot m_2 \cdot \ldots \cdot m_s$ классов $X_{j_1 j_2 \ldots j_s}$, $j_i = \overline{1,\ m_i}$, $i = \overline{1,\ s}$, где

$$X_{j_1 j_2 \ldots j_s} = \{x \mid x_1 \in X_{1j_1}, x_2 \in X_{2j_2}, \ldots, x_s \in X_{sj_s}\}$$

Возможен и другой метод группировки, когда задаются n классов во множестве X с помощью ограничений на все компоненты одновременно, а именно: i-й класс X^i определяется заданием множеств значений $X_{i1}, \ldots, X_{is}$ для каждого признака:

$$X^i = \{x \mid x_1 \in X_{i1}, \ldots, x_s \in X_{is}\},$$

Можно, разумеется, каждый из этих способов обобщить, задавая вместо множеств значений некоторые соотношения типа равенств или неравенств. Все эти способы группировки, однако, не позволяют удовлетворительно справиться с рядом проблем. Одну из них мы поясним на примере исследования, которое проводил Н. А. Барановский [8], а математическое обеспечение осуществлялось с участием автора настоящей книги. Возникла задача классификации людей по их отношению к употреблению спиртных напитков. Всех, кроме абсолютно непьющих, представлялось естественным разделить на пьющих мало (редко и понемногу), умеренно (с умеренной частотой и в умеренных количествах) и сильно (часто и помногу). Но как быть с теми, кто пьет, например, часто, но понемногу? В данном случае цели исследования позволили подобными людьми пренебречь в силу их относительной малочисленности, но ясно, что это не всегда возможно. Перейдем к математической постановке задачи. Пусть в каждом из множеств X_j выделено n классов $X_{1j}, \dots, X_{nj}$. Эти классы могут, вообще говоря, как пересекаться, так и не покрывать все множество X_j. По этой причине введем множество $X_{0j} = X_j \setminus \bigcup_{i=1}^{N} X_{ij}$, которое мы будем называть не классом, а остаточным множеством. Далее описываются различные способы выделения во множестве классов в соответствии с заданной классификацией компонент, которые играют роль критериев классификации. При этом *маргинальными* назовем такие элементы, которые классифицируются в том или ином смысле "плохо". Таким образом, различные способы классификации приводят к разным множествам маргинальных элементов, которые иногда делятся на несколько видов, т. е. для маргиналов также возможна некоторая классификация. Сами же принципы исходной классификации аналогичны известным принципам многокритериального выбора (см. 5.4). Для использования многокритериальной техники напомним, что для векторов $y = (y_1, \dots, y_s)$ и $z = (z_1, \dots, z_s)$ считается $y < z$, если $y_{j_0} < z_{j_0}$ для некоторого j_0 и $y_i \leqslant z_i$ для остальных j. Мы пишем $y \leqslant z$, если $y < z$ либо $y = z$. Если $y \neq z$, но не имеет места ни одно из соотношений $y < z$, $z < y$, то говорят, что y и z несравнимы.

Принципы многокритериальной классификации

Единогласная классификация. Пусть для каждого i множества X_{ij} попарно не пересекаются. Полагаем $x \in X^i$, если $x_j \in X_{ij}$ для всех $j = \overline{1,\ s}$. Маргинальные элементы можно разделить на следующие виды: элемент x назовем *маргинальным (неполноценным) представителем* класса X^i, если для некоторых j имеет место $x_j \in X_{ij}$, а для остальных — $x_j \in X_{0j}$. Назовем x *межклассовым (межгрупповым) маргиналом* классов $X^{j_1}, \dots, X^{j_m}$, если для некоторых j x_j принадлежит одному из классов $X_{i_1 j}, \dots, X_{i_m j}$, а для остальных — остаточному множеству X_{0j}. Наконец, x назовем *полным маргиналом*, если $x_j \in X_{0j}$ для всех j.

Лексикографическая классификация. Находим наименьшее j, для которого $x_j \in X_{ij}$ лишь для одного $i \neq 0$, и полагаем $x \in X^i$. Маргинальными считаем те элементы, для которых такого i не нашлось. Их можно разделить на два вида. Назовем x межклассовым маргиналом классов $X^{j_1}, \dots, X^{j_m}$, если при наименьшем j, для которого $x_j \overline{\in} X_{0j}$, имеет место $x_j \in X_{ij}$, $i = i_1, \dots, i_m$. Назовем x полным маргиналом, если $x_j \in X_{0j}$ для всех j. Таким образом, этот способ классификации позволяет гибко обходиться с границами компонент, а именно: можно допустить для какой-либо компоненты пересечение диапазонов значений, соответствующих разным классам, если остальные компоненты позволяют сделать различие между классами. Приведем пример. Пусть классифицируемые объекты характеризуются двумя числовыми параметрами x_1 и x_2, т. е. $s = 2$, $x = (x_1, x_2)$, и трем классам X^1, X^2, X^3 соответствуют следующие интервалы значений:

$$X^1: \ X_{11} = (3,\ 6),\ X_{12} = (0,\ 2);$$

$$X^2: \ X_{21} = (4,\ 7),\ X_{22} = (4,\ 8);$$

$$X^3: \ X_{31} = (9,\ 12),\ X_{32} = (9,\ 11).$$

Интервалы значений параметра x_1, соответствующие классам X^1 и X^2, имеют пересечение — интервал $(4,\ 6)$. Объект со значениями параметров $(5,\ 1)$ принадлежит классу X^1, $(5,\ 7)$ — классу X^2. Объект $(5,\ 3)$ — межклассовый маргинал для X^1 и X^2, а $(2,\ 3)$ — полный маргинал.

Классификация по Парето. Положим

$$f_{ij}(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x_j \in X_{ij}, \\ 1 & \text{в противном случае,} \end{cases} \qquad i = \overline{1,\ n},\ j = \overline{1,\ s},$$

$$f_k(x) = (f_{i1}(x), \ldots, f_{is}(x)).$$

Скажем, что x принадлежит классу X^i по Парето, если для любого другого $k \neq i$ имеет место $f_i(x) < f_k(x)$. Поясним менее формально, что означает принадлежность по Парето вектора x классу X^i. Будем говорить, что компонента (критерий классификации) x_j голосует за принадлежность x этому классу или, короче, за это класс, если $x_i \in X_{ij}$. Напомним, что согласно сказанному выше один критерий может голосовать за разные классы. Мы считаем, что $x \in X^i$ по Парето, если не существует другого класса X^k, который имеет более сильную поддержку, чем X^i, т. е. такого, что за X^k голосуют все те критерии, что и за X^i, плюс хотя бы еще один. Элемент x назовем межклассовым маргиналом классов $X^{i_1}, \ldots, X^{i_m}$, если векторы $(f_{i_1}(x), \ldots, f_{i_m}(x))$ попарно либо равны, либо несравнимы, и полным маргиналом, если $x \overline{\in} X^i$ для всех $i = \overline{1,\ n}$. Заметим, что выше при введении функций f_{ij} с содержательной точки зрения было бы естественней связать с принадлежность классу не нуль, а единицу. Мы избрали такие обозначения из соображений согласованности с более общими методами классификации, а которых речь пойдет ниже.

Мажоритарная классификация. Сохраняя терминологию предыдущего пункта, скажем, что $x \in X^i$, если за класс X^i голосуют не меньше критериев, чем за любой другой. Если максимальное число голосов на элементе набрали несколько классов, то он называется их межклассовым маргиналом. Остальные виды маргиналов определяются значениями вектора $g(x) = (g_i(x), \ldots, g_n(x))$, где $g_i(x)$ — число голосов, поданных за класс X^i. Полные маргиналы — те x, для которых $g(x) = (0, \ldots, 0)$.

Весовая (акционерная) классификация. Каждому j ставится в соответствие положительный вес ν_j, $j = \overline{1,\ s}$. Процедура аналогична предыдущей с заменой суммы голосов, поданных за тот или иной класс, взвешенной суммой. Эта процедура действительно аналогична процедуре голосования в акционерном обществе, где каждый акционер располагает числом голосов, пропорциональным количеству имеющихся у него акций.

Очевидно, что описанные способы классификации можно использовать для обработки результатов классификации объектов экспертами. Пусть множество X должно быть разделено на классы $X^1, \ldots, X^n$, имеющие некоторый содержательный смысл, и эта процедура осуществляется s экспертами. Обозначим x_j мнение j-го эксперта по поводу элемента (объекта) x и будем писать $x_j \in X_{ij}$, если j-й эксперт отнес x к классу X^i. Далее можно применить описанный выше подход.

Среди изложенных способов классификации отсутствует аналог выбора по интегральному критерию, поскольку он входит в другую общую схему, к описанию которой мы переходим.

Классификация по вторичным критериям

Рассмотрим методы классификации, использующие не характеристики отдельных объектов, а некие критерии, описывающие те или иные соотношения между ними: близость, связь и т. п. Если, как это делалось выше, считать, что моделью объекта и его характеристик служат соответственно вектор x и его компоненты $x_1, \ldots, x_s$, то вводимые критерии являются интегральными по отношению к компонентам, причем, как правило, не одного вектора, а некоторого множества векторов. Задачи классификации относительно этих критериев носят более сложный характер, чем ранее, в том смысле, что значения одних критериев следует сделать как можно меньше, других — как можно ближе к заданным значениям, третьих — удержать в заданных пределах и т. п. Далее приведен ряд задач для различных интегральных критериев и разных принципов многокритериальной классификации.

Критерий взвешенной суммы средних внутриклассовых расстояний. Пусть случайный признак с распределением P принимает значения в метрическом пространстве (X, d), и $X^1, \ldots, X^n$ — непересекающиеся классы в X, возможно, не покрывающие все это множество.

Положим

$$f_1(X^1,\dots,X^n) =\sum_{i=1}^{N} \int\limits_{X^i}\int\limits_{X^i} d(x,y)\,P(dx)P(dy).$$

Пусть $0 < p < 1/n$. Рассмотрим некоторые экстремальные задачи классификации.

Задача с ограничениями типа равенств. Полагаем

$$f_1(X^1,\dots,X^n) \to \min_{X^1,\dots,X^n},$$

$$P(X^i) = p, \quad i = \overline{1,\ n}.$$

Здесь требуется разбить X на классы равной вероятности так, чтобы взвешенная сумма средних внутриклассовых расстояний была минимальной. Если $p < 1/n$, то $X^0 = X \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{n} X^i$ — множество маргинальных элементов, его вероятность равна $1-np$. Здесь можно задать, например, $p = 0,8/n$, так что суммарная вероятность маргинальных элементов равна $0,2$. Данная задача, однако, может не иметь решения, если распределение содержит дискретную компоненту, ибо в этом случае может не найтись классов, имеющие вероятность в точности p. В этом случае целесообразно перейти к другой задаче, а именно к одной из форм задачи векторной оптимизации (см. Дополнение).

Обратная лексикографическая задача оптимизации. Обозначим

$$f_2(X^1,\dots,X^n) \to \max_{1\leqslant i\leqslant n}|P(X^i) - p|,$$

$$f = (f_1, f_2).$$

Вначале найдем наборы классов $X^1,\dots,X^n$, для которых минимален критерий f_2, а потом выберем тот (или те) из них, при котором минимально значение f_1. Маргинальные элементы определяются так же, как и выше, но их суммарная вероятность может быть определена лишь по завершении классификации; она равна $1-\sum\limits_{i=1}^{n} P(X^i)$, где $X^1,\dots,X^n$ — найденный набор классов.

Векторный критерий средних расстояний между элементами классов. В этом примере число классов n не считается заранее заданным. Положим

$$f_{1i}(X^i) = \frac{1}{[P(X^i)]} \int\limits_{X^i}\int\limits_{X^i} d(x,y)\,P(dx)P(dy),$$

т. е. $f_{1i}(X^i)$ — среднее расстояние между элементами класса X^I,

$$f_1(X^1,\dots,X^n) = \max_{1\leqslant i\leqslant n} f_{1i}(X^i),$$

$$f_2(X^1, \dots, X^n) = n.$$

Поясним смысл критериев f_1, f_2 на примере конечного множества X. Если число классов равно числу элементов, т. е. каждый класс состоит из одного элемента, то значение f_1 равно нулю, т. е. минимально, а значение f_2 равно числу элементов, т. е. максимально. Если же число классов уменьшить, то "плотность" их, характеризуемая f_1, может увеличиться. Введем, наконец, критерий

$$f_3(X^1, \dots, X^n) = 1 - \sum_{i=1}^{n} P(X^i).$$

Минимальное значение этого критерия равно нулю. Оно достигается, если классы в совокупности покрывают все множество X. Таким образом, требование сделать векторный критерий как можно меньше означает требование покрыть множество значений признака как можно полнее, как можно меньшим числом классов и чтобы каждый класс был как можно плотнее. Ясно, что эти требования, вообще говоря, противоречат друг другу, что вообще свойственно векторный критериям. Рассмотрим задачу оптимизации векторного критерия f в двух постановках.

Оптимизация по Парето. Решением этой задачи является такое множество классификаций (наборов классов) $X_k^1, \dots, X_k^{n_k}, \quad k = \overline{1, n}$, что ни для какой классификации из этого набора не существует другой классификации, которая была бы лучше хотя бы по одному критерию и не хуже — по всем остальным. Множество маргинальных элементов для каждой классификации есть

$$X^0 = X \setminus \bigcup_{i=1}^{n} X^i.$$

Комбинированная задача оптимизации. Вначале выделим те классификации $X^1, \dots, X^n$, которые обращают в минимум критерий f_3, т. е. охватывают все множество X: $\quad X = \bigcup_{i=1}^{n} X^i$. Маргинальные элементы при этом отсутствуют. Затем применим оптимизацию по Парето двумерного критерия $(f_1, \ f_2)$.

Задачи оптимизации с интегральными критериями. Зададим положительные числа (веса) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ и рассмотрим задачу поиска классификаций, минимизирующих скалярный критерий $\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \alpha_3 f_3$, либо задачу минимизации критерия f_3, а на полученных классификациях — задачу минимизации критерия $\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2$. Маргинальные элементы в первом случае определяются, как и выше, а во втором — отсутствуют. Проблемой, как уже говорилось ранее, является выбор весов.

2.3.3. Классификация в метрических пространствах и социальная маргинальность

В [39] развита некоторая методика описания социальных явлений с помощью аппарата метрических пространств, предназначенная в основном для исследования проблем социальной структуры и социальной стратификации. Напомним для удобства читателя некоторые понятия теории метрических пространств. Пусть (X, d) — метрическое пространство. Открытым шаром $B(x, r)$ (соответственно сферой $S(x, r)$) с центром в точке x и радиусом $r > 0$ называется множество точек, расстояние от каждой из которых до центра меньше (соответственно равно) r:

$$B(x, r) = \{y \in X \mid d(x, y) < r\},$$

$$S(x, r) = \{y \in X \mid d(x, y) = r\}.$$

Точка z называется граничной точкой открытого шара, если она не принадлежит шару, но сколь угодно близко к ней существуют точки шара. Множество всех граничных точек называется границей шара. В обычном трехмерном пространстве границей открытого шара является сфера с теми же центром и радиусом, но в общем случае это не так. В частности, граница может отсутствовать, т. е. представлять собой пустое множество.

Авторы [39] предлагают в качестве одной из моделей совокупности объектов, образующих некоторую общность, использовать открытый шар, а в качестве модели множества объектов, маргинальных по отношению к этой общности — границу шара. При реализации этого подхода возникают трудности, вполне аналогичные тем, с которыми приходится сталкиваться при решении многокритериальных оптимизационных задач посредством введения интегрального скалярного критерия. Если рассматриваемые объекты описываются достаточно разнообразными параметрами (а в социологии это почти всегда так), то, как об этом говорилось выше, далеко не всегда можно сконструировать единую интегральную меру близости (расстояние) между ними, избежав произвола и потери адекватности. Здесь тоже может прийти на помощь переход от числовых величин, а именно расстояний, к нечисловым.

Пусть (X, d) — обобщенное метрическое пространство; расстояние d принимает значения в частично упорядоченном множестве Λ с наименьшим элементом θ. Пусть A — некоторое подмножество X. Назовем точку $x \in A$ *строго внутренней* точкой этого множества, если существует $\lambda \in \Lambda$ такое, что шар $B[x, \lambda]$ принадлежит A. Назовем точку $x \in X$ *строго внешней* по отношению к A, если существует такое λ, что шар $B[x, \lambda]$ не пересекается с A. Наконец, точку назовем *маргинальной* по отношению к A, если она не является ни строго внутренней точкой этого множества, ни строго внешней по отношению к нему. Когда (X, d) —

обычное метрическое пространство, а A — открытый шар, наше определение маргинальной точки совпадает с приведенным в [39].

Рассмотрим отдельно важный частный случай, когда $\Lambda = \mathbb{R}^s$ — пространство s-мерных векторов $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_s)$, т. е. расстояние между элементами x, y — вектор с числовыми компонентами.

Пусть X — множество векторов $x = (x_1, \dots, x_s)$, где компонента x_i принадлежит метрическому пространству (X_i, d_i). Введем на X векторное расстояние $d = (d_1, \dots, d_s)$ (о векторных расстояниях см. 1.6.1). Напомним, что для пространства с таким векторным расстоянием выполняются все аксиомы метрического пространства с той оговоркой, что все операции над векторами, являющимися значениями расстояния, выполняются в векторном, т. е. покоординатном, смысле. Рассмотрим вектор $r = (r_1, \dots, r_s)$. Определения открытого шара и сферы с центром x и векторным радиусом r вводятся теми же формулами, что и в скалярном случае. В качестве модели некоторой общности также возьмем открытый шар с центром x и радиусом r, а маргинальные элементы определим следующим образом. Назовем значение компоненты внешним по отношению к шару $B(x_i, r_i)$ в метрическом пространстве (X_i, d_i), если оно не принадлежит шару и не является граничным значением. Назовем элемент $y = (y_1, \dots, y_s)$ строго внешним по отношению к шару $B(X, r)$, если y_i — внешнее значение для шара $B(x_i, r_i)$ при всех $i = \overline{1,\ s}$. Назовем элемент маргинальным, если он не принадлежит шару и не является строго внешним. Понятно, что при $s = 1$ это определение совпадает с определением из [39].

Отметим некоторые преимущества векторного определения маргинальности перед скалярным. При скалярном определении маргинальность — явление неустойчивое в том смысле, что при сколь угодно малом изменении расстояния объекта от центра он перестает быть маргинальным, что, видимо, не всегда соответствует содержательной стороне дела. При векторном же определении возможны как неустойчивые, так и устойчивые маргиналы. Приведем простой пример. Пусть рассматриваемые объекты характеризуются двумя числовыми параметрами x_1 и x_2, т. е. X — множество векторов (x_1, x_2), $X_1 = X_2 = \mathbb{R}$, где $\mathbb{R}$ — множество действительных чисел. Для $x = (x_1, x_2)$ и $y = (y_1, y_2)$ имеем $d_1(x_1, y_1) = |x_1 - y_1|$, $d_2(x_2, y_2) = |x_2 - y_2|$. Пусть моделью общности является открытый шар $B(x, r)$, где $x = (x_1, x_2) = (6,\ 7)$, а $y = (y_1, y_2) = (4,\ 2)$. Таким образом,

$$B(x,r) = \{y = (y_1, y_2) \mid [2 < y_1 < 10 \text{ и } 5 \leqslant y_2 \leqslant 9]$$

$$\text{или } [2 \leqslant y_1 \leqslant 10 \text{ и } 5 < y_2 < 9]\}.$$

Неустойчивыми маргинальными объектами являются объекты $y = (y_1, y_2)$, удовлетворяющие, например, одной из следующих пар условий:

$y_1 = 2,\ \ y_2 = 5;\ \ y_1 = 10,\ \ y_2 = 4$. Устойчивые же маргинальные объекты — это те, для которых выполняется хотя бы одна из следующих пар условий:

$$2 < y_1 < 10, \quad y_2 < 5;$$

$$2 < y_1 < 10, \quad y_2 > 9;$$

$$y_1 < 2, \quad 5 < y_2 < 9;$$

$$y_1 > 10, \quad 5 < y_2 < 9.$$

Далее, если множество значений расстояния дискретно, то при скалярном определении маргинальные объекты отсутствуют, тогда как при векторном они возможны — достаточно рассмотреть вышеприведенный пример при целочисленных значениях x_1 и x_2. Маргинальными являются объекты, удовлетворяющие условиям для устойчивых маргиналов.

2.4. Описание зависимостей

Далее вводятся обобщения на метричесие и, в частности, неархимедовы метрические, пространства некоторых известных способов аппроксимации функций. Все эти конструкции могут быть использованы для приближенного представления функций на абстрактных пространствах точно так же, как это делается для функций числовых аргументов.

2.4.1. Использование функций Хаара для приближений в неархимедовых пространствах

Пусть (X, d) — компактное неархимедово метрическое пространство, $D = \{r_0, r_1, \ldots\}$, $r_0 > r_1 > \ldots$ Занумеруем все замкнутые шары следующим образом. Положим $B_0^{(0)} = X$ и пусть

$$B_{0,1}^{(1)}, \ldots, B_{0,l(0)}^{(1)}$$

— все шары с радиусом r_1,

$$B_{0,j_1,1}^{(2)}, \ldots, B_{0,j_1,l(0,j_1)}^{(2)}$$

— все шары с радиусом r_2,содержашиеся в шаре $B_{0,j_1}^{(1)}$, и так далее. Таким образом,

$$B_{0,j_1,\ldots,j_{k-1},1}^{(k)}, \ldots, B_{0,j_1,\ldots,j_{k-1},l(0,j_1,\ldots,j_{k-1})}^{(k)}$$

— все шары с радиусом r_k, содержащиеся в шаре $B_{0,j_1,\ldots,j_{k-1}}^{(k-1)}$. Мы назовем эту нумерацию *иерархической*. Пусть

$$e_1^{(k)}, \ldots, e_{l(0,j_1,\ldots,j_{k-1})-1}^{(k)}$$

— такие векторы в $l(0,j_1,\dots,j_{k-1})$-мерном евклидовом пространстве, что вместе с вектором

$$e_0^{(k)} = \left(\frac{1}{\sqrt{l(0,j_1,\dots,j_{k-1})}},\dots,\frac{1}{\sqrt{l(0,j_1,\dots,j_{k-1})}}\right)$$

они образуют ортонормированный базис. Пусть

$$e_i^{(k)} = \left(e_{i,1}^{(k)},\dots,e_{i,l(0,j_1,\dots,j_{k-1})}^{(k)}\right),$$

$$i = 0,\dots,l(0,j_1,\dots,j_{k-1})-1.$$

Обозначим $\psi_{0,j_1,\dots,j_{k-1},j}^{(k)}$ индикатор шара $B_{0,j_1,\dots,j_{k-1},j}^{(k)}$. Положим

$$\chi_0^{(0)}(x) \equiv 1,$$

$$\chi_{0,i}^{(1)}(x) = \sum_{j=1}^{l(0)} e_{i,j}^{(1)}\psi_{0,j}^{(1)}(x), \quad i = \overline{1,l(0)-1},$$

$$\dots$$

$$\chi_{0,j_1,\dots,j_{k-1},i}^{(k)}(x) = \sum_{j=1}^{l(0,j_1,\dots,j_{k-1})} e_{i,j}^{(k)}\psi_{0,j_1,\dots,j_{k-1},j}^{(k)}(x),$$

$$i = 1,\dots,l(0,j_1,\dots,j_{k-1})-1, \quad k = 2,3,\dots$$

Пусть $\mu = \mu_{I,d}$ — иерархическая мера на $(X,d,\mathcal{B})$ и $L_2(X,\mu)$ — гильбертово пространство вещественнозначных функций u, определенных на X и таких, что $\int\limits_X u^2(x)\,\mu(dx) < \infty$. Скалярное произведение на $L_2(X,\mu)$ определяется выражением

$$(u,v) = \frac{1}{\mu(X)}\int\limits_X u(x)v(x)\,\mu(dx).$$

Теорема 2.4.1

$$\chi^{(0)},\chi_{0;1}^{(1)},\dots,\chi_{0,l(0)-1}^{(1)},\dots$$

— ортонормированная система в $L_2(X,\mu)$.

Доказательство. Имеем:

$$\left(\chi_0^{(0)},\chi_{0,j_1,\dots,j_{k-1},i}^{(k)}\right) =$$

$$= \frac{1}{\mu(X)}\int\limits_X \left[\sum_{j=1}^{l(0,j_1,\dots,j_{k-1})} e_{i,j}^{(k)}\psi_{0,j_1,\dots,j_{k-1},j}^{(k)}(x)\right]\mu(dx) =$$

$$= \frac{1}{\mu(X)} \sum_{j=1}^{l(0,j_1,\ldots,j_{k-1})} e_{i,j}^{(k)} \int\limits_X \psi_{0,j_1,\ldots,j_{k-1},j}^{(k)}(x)\,\mu(dx) =$$

$$= \frac{1}{\mu(X)} \sum_{j=1}^{l(0,j_1,\ldots,j_{k-1})} e_{i,j}^{(k)}\,\mu(B_{0,j_1,\ldots,j_{k-1},j}^{(k)}) =$$

$$= \frac{1}{\mu(X)} \sum_{j=1}^{l(0,j_1,\ldots,j_{k-1})} e_{i,j}^{(k)} \frac{\mu(B_{0,j_1,\ldots,j_{k-1}}^{(k-1)})}{l(0,j_1,\ldots,j_{k-1})} =$$

$$= \frac{1}{\mu(X)} \frac{\mu(B_{0,j_1,\ldots,j_{k-1}}^{(k-1)})}{l(0,j_1,\ldots,j_{k-1})} \sum_{j=1}^{l(0,j_1,\ldots,j_{k-1})} e_{i,j}^{(k)} = 0,$$

поскольку $\left(e_i^{(k)}, e_0^{(k)}\right) = 0$ для $i > 0$. Затем рассмотрим

$$\chi_{0,j_1,\ldots,j_{k-1},i}^{(k)}, \chi_{0,j_1,\ldots,j_{k-1},i'}^{(k)},\ i \neq i'.$$

Тогда

$$\left(\chi_{0,j_1,\ldots,j_{k-1},i}^{(k)}, \chi_{0,j_1,\ldots,j_{k-1},i'}^{(k)}\right) =$$

$$= \int\limits_X \left[\sum_{j=1}^{l(0,j_1,\ldots,j_{k-1})} e_{i,j}^{(k)} \psi_{0,j_1,\ldots,j_{k-1},j}^{(k)}(x) \times \right.$$

$$\left. \times \sum_{j=1}^{l(0,j_1,\ldots,j_{k-1})} e_{i',j}^{(k)} \psi_{0,j_1,\ldots,j_{k-1},j}^{(k)}(x) \right] \mu(dx) =$$

$$= \sum_{j=1}^{l(0,j_1,\ldots,j_{k-1})} \sum_{j'=1}^{l(0,j_1,\ldots,j_{k-1})} e_{i,j}^{(k)} e_{i',j'}^{(k)} \times$$

$$\times \int\limits_X \psi_{0,j_1,\ldots,j_{k-1},j}^{(k)}(x)\,\psi_{0,j_1,\ldots,j_{k-1},j'}^{(k)}(x)\,\mu(dx).$$

Поскольку

$$\int\limits_X \psi_{0,j_1,\ldots,j_{k-1},j}^{(k)}(x)\,\psi_{0,j_1,\ldots,j_{k-1},j'}^{(k)}(x)\,\mu(dx)$$

равно

$$\frac{\mu(B_{0,j_1,\ldots,j_{k-1}}^{(k-1)})}{l(0,j_1,\ldots,j_{k-1})},$$

если $j = j'$, и равно 0 в противном случае, мы получаем:

$$\left(\chi_{0,j_1,\ldots,j_{k-1},i}^{(k)}, \chi_{0,j_1,\ldots,j_{k-1},i'}^{(k)}\right) =$$

$$= \frac{\mu(B^{(k-1)}_{0,j_1,\ldots,j_{k-1}})}{l(0,j_1,\ldots,j_{k-1})} \sum_{j=1}^{l(0,j_1,\ldots,j_{k-1})} e^{(k)}_{i,j} e^{(k)}_{i',j} = 0.$$

Теперь рассмотрим некоторые функции

$$\chi^{(k)}_{0,j_1,\ldots,j_{k-1},i}, \quad \chi^{(k')}_{0,j'_1,\ldots,j'_{k'-1},i'},$$

где $k < k'$. Если $j_s \neq j'_s$ для некоторого $s \leqslant k-1$, то

$$\left(\chi^{(k)}_{0,j_1,\ldots,j_{k-1},i}, \chi^{(k')}_{0,j'_1,\ldots,j'_{k'-1},i'}\right) = 0,$$

поскольку

$$\psi^{(k)}_{0,j_1,\ldots,j_{k-1}}(x)\psi^{(k')}_{0,j'_1,\ldots,j'_{k'-1}}(x) \equiv 0$$

в силу

$$B^{(k-1)}_{0,j_1,\ldots,j_{k-1}} \cap B^{(k'-1)}_{0,j'_1,\ldots,j'_{k'-1}} = \varnothing.$$

С другой стороны,

$$B^{(k'-1)}_{0,j'_1,\ldots,j'_{k'-1}} = B^{(k'-1)}_{0,j_1,\ldots,j_{k-1},j'_k,\ldots,j'_{k'}} \subset B^{(k-1)}_{0,j_1,\ldots,j_{k-1}},$$

откуда

$$\psi^{(k)}_{0,j_1,\ldots,j_{k-1},j} \psi^{(k')}_{0,j'_1,\ldots,j'_{k'-1}} =$$
$$= \psi^{(k)}_{0,j_1,\ldots,j_{k-1},j}\,(x)\,\psi^{(k')}_{0,j_1,\ldots,j_{k-1},j'_k,\ldots,j'_{k'-1}} =$$
$$= \psi^{(k')}_{0,j_1,\ldots,j_{k-1},j'_k,\ldots,j'_{k'-1}}.$$

Следовательно,

$$\left(\chi^{(k)}_{0,j_1,\ldots,j_{k-1},i}, \chi^{(k')}_{0,j'_1,\ldots,j'_{k'-1},i'}\right) =$$
$$\sum_{j=1}^{l(0,j_1,\ldots,j_{k-1})} \sum_{j'=1}^{l(0,j'_1,\ldots,j'_{k'-1})} e^{(k)}_{i,j} e^{(k)}_{i',j'} \times$$
$$\times \int\limits_X \psi^{(k)}_{0,j_1,\ldots,j_{k-1},j'_k,\ldots,j'_{k'-1},j'}\,(x)\,\mu(dx) =$$
$$= \frac{\mu(B^{(k-1)}_{0,j_1,\ldots,j_{k-1},j'_k,\ldots,j'_{k'-1}})}{l(0,j_1,\ldots,j_{k-1},j'_k,\ldots,j'_{k'-1})} \sum_{j=1}^{l(0,j_1,\ldots,j_{k-1})} e^{(k)}_{i,j} \times$$
$$\times \sum_{j'=1}^{l(0,j'_1,\ldots,j'_{k'-1})} e^{(k)}_{i',j'} = 0.$$

Наконец,

$$\left\|\chi_0^{(0)}\right\|^2 = \frac{1}{\mu(X)}\,\mu(X) = 1,$$

$$\left\|\chi_{0,j_1,\ldots,j_{k-1},i}^{(k)}\right\|^2 =$$

$$= \int\limits_X \Bigg[\sum_{j=1}^{l(0,j_1,\ldots,j_{k-1})} e_{i,j}^{(k)} \psi_{0,j_1,\ldots,j_{k-1},j}^{(k)}(x) \times$$

$$\times \sum_{j=1}^{l(0,j_1,\ldots,j_{k-1})} e_{i,j}^{(k)} \psi_{0,j_1,\ldots,j_{k-1},j}^{(k)}(x) \Bigg] \mu(dx) =$$

$$= \sum_{j=1}^{l(0,j_1,\ldots,j_{k-1})} \sum_{j'=1}^{l(0,j_1,\ldots,j_{k-1})} e_{i,j}^{(k)} e_{i,j'}^{(k)} \times$$

$$\times \int\limits_X \psi_{0,j_1,\ldots,j_{k-1},j}^{(k)}(x)\, \psi_{0,j_1,\ldots,j_{k-1},j'}^{(k)}(x)\, \mu(dx) =$$

$$= \frac{\mu(B_{0,j_1,\ldots,j_{k-1}}^{(k-1)})}{l(0,j_1,\ldots,j_{k-1})} \sum_{j=1}^{l(0,j_1,\ldots,j_{k-1})} e_{i,j}^{(k)} e_{i,j}^{(k)} = 1.$$

■

Приближение функциональных зависимостей функциями Хаара осуществляется обычным образом, как и для любой ортонормированной системы — например, с помощью соответствующего ряда Фурье [9].

2.4.2. Использование нейронных сетей для решения задач исследования зависимостей

Основы теории нейронных сетей

Рассмотрим функции, представимые нейронными сетями и их обобщениями. Выделим некоторые типы функций и, соответственно, типы сетей, которые реализуют эти функции. Нейронные сети (см., например, [14, 18]) представляют собой некоторый вид математических моделей; прототипом для них послужили структуры головного мозга. Начнем с описания отдельного нейрона. *Нейрон* состоит из n *входов* и одного *выхода*. На каждый из входов поступает числовой сигнал x_i, $i = \overline{1\,,n}$. Для каждого нейрона задаются *веса* или *синаптические коэффициенты* w_i, $i = \overline{1,\, n}$, и *пороговый барьер* (или просто *порог*) w_0. После поступления входных сигналов вычисляется взвешенная сумма

$$v = \sum_{i=1}^{n} w_i x_i + w_0,$$

которая называется *потенциалом* нейрона. Затем вычисляется значение функции активации $f(v)$, которое является значением выхода нейрона. Таким образом, нейрон задается: 1) количеством входов n, 2) весами w_i, $i = \overline{1,\ n}$, 3) порогом w_0, 4) активационной функцией f. Порог можно считать весом, соответствующим входу с номером 0, значение которого тождественно равно единице, поэтому в дальнейшем мы все величины w_i, $i = 0, 1, \ldots, n$, будем называть весами. *Обучение* или *настройка* нейрона осуществляется путем выбора значений весов. Наиболее популярные разновидности функции активации следующие.

1.
$$f(v) = \begin{cases} 1, & \text{если } v > 0, \\ -1, & \text{если } v \leqslant 0. \end{cases}$$

2.
$$f(v) = \begin{cases} 1, & \text{если } v > 0, \\ 0, & \text{если } v \leqslant 0. \end{cases}$$

3. Заданы числа $v_1, \ldots, v_m,\ \ y_0, y_1, \ldots, y_m$; тогда

$$f(v) = \begin{cases} y_0, & \text{если } v \leqslant 0, \\ y_i, & \text{если } v_i < v \leqslant v_{i+1},\ i = 1, \ldots, m-1, \\ y_m, & \text{если } v > v_m, \end{cases}$$

4.
$$f(v) = \frac{\exp(bv) - 1}{\exp(bv) + 1},$$

где b, как и далее, — параметр, регулирующий "крутизну";

5.
$$f(v) = \frac{1}{\exp(-bv) + 1},$$

6.
$$f(v) = \frac{\exp(bv) - \exp(-bv)}{\exp(bv) + \exp(-bv)}.$$

Нейроны описанного вида будем называть *простейшими.*

Определение нейрона можно обобщить [18], рассматривая выход как произвольную функцию входов x_i, $i = 1, \ldots, n$, и параметров w_i, $i = 0, 1, \ldots, m:$

$$y = f(x_1, \ldots, x_n, w_0, w_1, \ldots, w_m),$$

где соотношение между количеством входов n и числом параметров m может быть любым. Кроме того, входы, параметры и выходы могут быть не числами, а элементами множеств произвольной природы. Обучение такого нейрона заключается в выборе значений параметров. Такие нейроны будем называть *обобщенными. Нейронная сеть* — это совокупность нейронов, в которой выходные сигналы одних нейронов поступают на входы других нейронов (в том числе, возможно, тех же самых; не исключается поступление выходного сигнала нейрона на его собственный вход). Выходной сигнал нейрона может поступать на входы нескольких нейронов. На каждый вход любого нейрона поступает выходной сигнал не более чем одного нейрона. Имеются нейроны, на входы которых поступают сигналы не от других нейронов сети, а извне. Такие нейроны называются *входными* нейронами сети. Для удобства будем считать, что имеется определенное число источников входных сигналов сети. Назовем их *входными элементами*. Каждый входной элемент выдает один сигнал, который может поступать на входы нескольких входных нейронов сети. Имеются нейроны, выходные сигналы которых поступают не на входы других нейронов сети, а "наружу". Такие нейроны называются *выходными* нейронами сети. Нейроны, не являющиеся ни входными, ни выходными, называются *скрытыми*. Система связей входных сигналов сети и выходов ее нейронов со входами нейронов сети называется *топологией* сети. Таким образом, нейронная сеть реализует некоторую функцию нескольких переменных; их число равно числу входных элементов. Эта функция является скалярной (числовой), если в сети один выходной нейрон с числовым выходом.

Важной разновидностью нейронной сети является *многослойная сеть с прямой связью* или *многослойный персептрон*. Нейроны такой сети разбиты на несколько непересекающихся множеств, называемых *слоями*. Нейроны первого слоя являются входными. Их выходные сигналы поступают на входы только нейронов второго слоя, выходные сигналы нейронов второго слоя — на входы нейронов третьего и т. д. Нейроны последнего слоя являются выходными. Из результатов теории приближения функций следует, что с помощью многослойного персептрона, состоящего из достаточно большого числа простейших нейронов с функцией активации любого из описанных выше типов, можно с любой точностью реализовать любую непрерывную числовую функцию нескольких числовых переменных.

Рассмотрим несколько специальных видов обобщенных нейронов, которые будут использованы в дальнейшем. Нейрон, реализующий функцию

$$\arg\max_{1\leqslant i\leqslant n}(z_1, \dots, z_n),$$

где $(z_1, \dots, z_n)$ — числовые переменные (в данном случае имеется в виду, что если максимум z_i достигается более чем при одном значении i, то в качестве значения функции берется, скажем, наименьшее из них). Эту функцию можно приближенно реализовать сетью из простейших нейронов следующим образом. Известно, что при достаточно большом положительном r

$$\sum_{i=1}^{n} iz_i^r \Big/ \sum_{i=1}^{n} z_i^r \approx \arg\max_{1\leqslant i\leqslant n} (z_1, \ldots, z_n).$$

Эту функцию можно реализовать двухслойной сетью. Первый слой сети содержит n нейронов, каждый из которых имеет нулевой порог и преобразует входной сигнал z_i в выходной сигнал z_i^r. Второй слой содержит один нейрон с нулевым порогом и преобразует n входных сигналов $z_1^r, \ldots, z_n^r$ в выходной сигнал по вышеприведенной формуле. То же самое можно сказать о функции

$$\max_{1\leqslant i\leqslant n} (z_1, \ldots, z_n),$$

с той разницей, что приближенное выражение для нее имеет вид

$$\sum_{i=1}^{n} z_i^{r+1} \Big/ \sum_{i=1}^{n} z_i^r$$

либо

$$\left(\sum_{i=1}^{n} z_i^r\right)^{\frac{1}{r}}.$$

Нейронные сети для нечисловых данных

Теперь покажем, как реализуются функции, у которых аргументы и(или) значения — нечисловые. Начнем со случая, когда функция f имеет несколько (n) числовых аргументов и нечисловые значения. Для удобства будем считать, что имеется один векторный аргумент $x = (x_1, \ldots, x_n)$ и соответственно область определения функции есть $R(f) \subset \mathbb{R}^n$ (напомним, что $\mathbb{R}^n$ — n-мерное евклидово пространство). Если множество значений функции конечно и является множеством значений номинального признака либо признака с полностью или частично упорядоченными значениями, то занумеруем эти значения и каждое значение будем отождествлять с его номером $s = 1, \ldots, m$. Таким образом, мы получаем числовую функцию, принимающую конечное число значений. Функция такого рода, однако, не является, вообще говоря, непрерывной, и к ней не относится приведенное выше утверждение о возможности приближенной реализации с помощью сети из простейших нейронов. Используем прием, известный в теории классификации (распознавании образов). Функции f соответствует разбиение области определения аргументов $R(f)$ на m непересекающихся частей $X_1, \ldots, X_m$ такое, что $f(x) = s$ для $x \in X_s$. Обозначим через χ_s *индикатор (характеристическую функцию)* множества X_s, т. е. такую функцию, что

$$\chi_s(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in X_s \\ 0, & \text{если } x \overline{\in} X_s. \end{cases}$$

Ясно, что
$$\arg\max_{s=1,\dots,m} \chi_s(x) = f(x).$$
Если множества X_s устроены не слишком "патологически то каждую из функций χ_s можно с любой точностью (где точность понимается в некотором разумном с точки зрения приложений смысле) приблизить непрерывной функцией. Отсюда следует способ реализации функции f. Строятся m сетей таких, что s-я сеть приближенно реализует функцию χ_s. Значения аргумента x подаются на входы каждой из этих сетей, а выходные сигналы этих сетей подаются на входы нейрона (или сети), реализующего функцию argmax; на выходе этого нейрона получаем значение функции $f(x)$.

Приведенный способ можно обобщить и вместе с тем упростить [54]. Введем функции $g_1, \dots, g_m$, не требуя, чтобы функция g_s приближала функцию χ_s, построим сети, реализующие эти функции, и выходные сигналы этих сетей подадим на входы нейрона, реализующего функцию argmax; при должном построении функций g_s (и, соответственно, сетей, которые их реализуют) на выходе этого нейрона получается значение функции $f(x)$; еще раз подчеркнем, что функции g_s, разумеется, не могут быть какими угодно, но они не обязаны походить на функции χ_s. Сходный способ реализации применим для функции, значения которой суть упорядочения (частичные или полные) конечного множества, содержащего m элементов $y_1, \dots, y_m$.Снова введем функции $g_1, \dots, g_m$, и зададим неотрицательное число h. При значении аргумента x упорядочение элементов $y_1, \dots, y_m$, являющееся значением функции, определяется по правилу: если $g_r(x) > g_s(x) - h$, то $y_r > y_s$; если $g_s(x) > g_r(x) - h$, то $y_s > y_r$, а если $|g_s(x) - g_r(x)| \leqslant h$, то x и y несравнимы. Для случая полных упорядочений положим, во-первых, $h = 0$, а во-вторых, примем, например, следующее правило: если $|g_s(x) - g_r(x)| \leqslant h = 0$, т. е. $g_s(x) = g_r(x)$, то будем считать $y_r > y_s$ при $r > s$ и $y_s > y_r$ при $s > r$. Если f — векторная функция, т. е.
$$f(x) = (f_1(x), \dots, f_L(x)),$$
где типы значений функций $f_1(x), \dots, f_L(x)$ могут быть различными, то строится L параллельных сетей, каждая из которых реализует одну из функций f_k. Отсюда сразу же вытекает способ реализации функции, значения которой суть рассмотренные выше подмножества конечного множества, т. е., напрмер, ответы на неальтернативный вопрос. Применяя известный метод, каждому варианту ответа ставим в соответствие дихотомический признак (1 — ответ отмечен, 0 — не отмечен) и получаем векторную функцию, составленную из функций с дихотомическими значениями. Таким образом, мы показали, как реализуются нейронными сетями функции с нечисловыми значениями.

Рассмотрим теперь функции с нечисловыми значениями аргумента. Для нейронно-сетевой реализации таких функций используем возможность представления значений нечисловых признаков с помощью кодов, являющихся числами или числовыми векторами; эти коды и будут подаваться на вход нейронной сети. Сразу же отметим, что числовой код используется сугубо формально, так что этот подход не имеет ничего общего с количественной трактовкой значений нечисловых признаков, которая, как известно, во многих случаях некорректна. Так, для признака с конечным множеством значений (номинального или принимающего значения в полностью либо частично упорядоченном множестве) занумеруем эти значения и вместо значения признака будем подавать на вход сети номер этого значения. Значения дихотомических признаков может быть удобно занумеровать числами 0 и 1. Если значением признака является подмножество фиксированного конечного множества из m элементов (в частности, ответ на неальтернативный вопрос с m вариантами ответов), то это значение можно закодировать m-мерным вектором, каждая из компонент которого равна единице (вариант отмечен) либо нулю (вариант не отмечен). Пусть значением признака является частичное ил полное упорядочение элементов конечного множества. Тогда опишем упорядочение естественным образом матрицей; вектор из элементов матрицы будет кодом значения. Итак, мы показали, как реализуются функции с аргументами и значениями различных числовых и нечисловых видов посредством нейронных сетей.

Чтобы сеть достаточно точно реализовала некоторую функцию, необходимо надлежащим образом выбрать типы нейронов, образующие сеть, топологию (структуру связей) сети и параметры нейронов. Выбор типа нейрона в определенном смысле не является проблемой: в некоторых случаях, как говорилось выше, он может делаться в широких пределах, а в некоторых этот выбор очевиден — например, при необходимости использовать функцию $\arg\max$. Топологию сети, как отмечается в соответствующей литературе, часто можно выбрать, исходя из существа задачи и имеющегося опыта. Если это затруднительно, то можно описать искомую топологию некоторым набором числовых кодов (например, с помощью матриц, описывающих связи — такой прием известен) и затем подбирать (оптимизировать) этот набор кодов. Основная же проблема — определение значений параметров нейронов. Если нейроны — простейшие, то их параметры (веса) — числа. В противном случае будем считать, что параметры допускают кодирование с помощью символов из некоторого конечного множества; естественно считать, что это множество символов, допустимых при использовании ЭВМ — цифры, буквы и некоторые другие. Так как числа тоже описываются совокупностью символов (например, десятичных цифр), то проблема построения нужной сети сводится к поиску некоторого набора символов по критерию минимизации некоторой меры различия между исходной функцией и той, которую реализует сеть. Для вычисления значений весов простейших нейронов существуют специальные методы [14, 18], а также используются носящие более общий характер эволюционные (генетические) алгоритмы. Для поиска же значений нечисловых кодов эволюционным алгоритмам трудно отыскать альтернативу. Далее излагаются эти алгоритмы и их обобщения, ориентированные на решения наших задач.

Обобщения нейронных сетей и ядерных приближений для функций на метрических пространствах

Пусть E^s — s-мерное евклидово пространство, $(\cdot,\cdot)$ — скалярное произведение на E^s, $\|\cdot\|$ — норма, индуцированная этим скалярным произведением, S — единичная сфера в E^s: $S = \{x \in E^s \mid \|x\| = 1\}$, $n \in \mathbb{N}$, $w_j = (w_{j1}, \ldots, w_{js}) \in S$, $w_{j0}, c_j \in \mathbb{R}$, $j = \overline{1,n}$. Через h обозначим функцию Хевисайда:

$$h(t) \triangleq \begin{cases} 0 & \text{если } t \leqslant 0, \\ 1 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Функция

$$f\colon E^s \ni x = (x_1, \ldots, x_s) \to f(x) \triangleq \sum_{j=1}^{n} c_j h\left((x, w_j) + w_{j0}\right) \in \mathbb{R}$$

называется *нейронной сетью из* E^s в $\mathbb{R}$ (более точно, нейронной сетью с n нейронами и с *функцией активации* h. Она может быть представлена в несколько иной форме. Гиперплоскость $H \triangleq \{x \mid (x, w_j) + w_{j0} = 0\}$ делит E^n на два полупространства $E^{n-} \triangleq \{x \mid (x, w_j) + w_{j0} \leqslant 0\}$ и $E^{n+} \triangleq \{x \mid (x, w_j) + w_{j0} > 0\}$. Легко доказать непосредственным вычислением, что

$$\|w_j + x\|^2 - \|w_j - x\|^2 + 4w_{j0} = 0$$

— уравнение H и, соответственно,

$$E^{n-} = \left\{x \,\middle|\, \|w_j + x\|^2 - \|w_j - x\|^2 + 4w_{j0} \leqslant 0\right\},$$

$$E^{n+} = \left\{x \,\middle|\, \|w_j + x\|^2 - \|w_j - x\|^2 + 4w_{j0} > 0\right\}.$$

Если мы обозначим через d расстояние, индуцированние нормой $\|\cdot\|$, то

$$\sum_{j=1}^{n} h\left((x, w_j) + w_{j0}\right) \equiv \sum_{j=1}^{n} h\Big(\|w_j + x\|^2 - \|w_j - x\|^2 +$$

$$+4w_{j0}\Big) \equiv \sum_{j=1}^{n} h\left(d^2(-w_j, x) - d^2(w_j, x) + 4w_{j0}\right).$$

Теперь мы можем дать следующее опредление нейронной сети в метрическом пространстве (X,d). Пусть $x_j^{(1)}, x_j^{(2)} \in X,\ \ c_j, w_j \in \mathbb{R},\ \ j = \overline{1,n}$. Будем говорить, что функция

$$f\colon X \ni x \to f\left(x\right) \triangleq$$

$$\triangleq \sum_{j=1}^{n} c_j h\left(d^2\left(x_j^{(1)}, x\right) - d^2\left(x_j^{(2)}, x\right) + w_{j0}\right) \in \mathbb{R}$$

— нейронная сеть из X в $\mathbb{R}$ с функцией активации h. Мы, однако, модифицируем это определение, заменив выражение для f на

$$f\colon X \ni x \to f\left(x\right) \triangleq$$

$$\triangleq \sum_{j=1}^{n} h\left(d\left(x_j^{(1)}, x\right) - d\left(x_j^{(2)}, x\right) + w_j\right) \in \mathbb{R}.$$

Пусть σ — неубывающая функция на $\mathbb{R}$ такая, что $\lim\limits_{t\to-\infty} \sigma\left(t\right) = 0$, $\lim\limits_{t\to\infty} \sigma\left(t\right) = 1$. Тогда

$$f\colon E^n \ni x = (x_1, \ldots, x_n) \to f\left(x\right) \triangleq$$

$$\triangleq \sum_{j=1}^{n} c_j \sigma\left((x, w_j) + w_{j0}\right) \in \mathbb{R}$$

называется нейронной сетью из E^n в $\mathbb{R}$ с функцией активации σ. Мы скажем, что

$$f\colon X \ni x \to f\left(x\right) \triangleq$$

$$\triangleq \sum_{j=1}^{n} c_j \sigma\left(d\left(x_j^{(1)}, x\right) - d\left(x_j^{(2)}, x\right) + w_j\right) \in \mathbb{R}$$

— нейронная сеть из X в $\mathbb{R}$ с функцией активации σ.

Пусть (X,d) — метрическое пространство и K — невозрастающая функция на $[0,\infty)$ такая, что $\lim\limits_{t\to\infty} K\left(t\right) = 0$. Пусть $n \in \mathbb{N},\ \ x_j \in X$, $j = \overline{1,n},\ \ c > 0$. Будем говорить, что

$$g\left(x\right) \triangleq \sum_{j=1}^{n} K\left(\frac{d(x, x_j)}{c}\right)$$

— *ядерная* функция. После того, как ядерные функции построены, приближения на их основе строятся в принципе так же, как и для числовых функций [38].

2.5. Выводы

1. Задачи аппроксимации могут быть сформулированы для разнообразных математических структур. Если на множестве задано несколько согласованных структур, то существуют методы одновременной (сочетанной) их аппроксимации.
2. Задачи аппроксимации в неархимедовых метрических пространствах обладают определенным своеобразием по отношению к метрическим пространствам общего вида.
3. Можно сформулировать задачи аппроксимации в пространствах отношений и, в частности, в пространствах функций, которые включают в виде частных случаев как некоторые известные методы анализа данных, так и новые, полезные в приложениях.
4. Основные принципы и процедуры аппроксимации могут иметь широкое применение как в теоретическом моделировании социальных объектов и процессов, так и в построении моделей по данным эмпиричеких социологических исследований.

Глава 3

Применение эволюционных (генетических) алгоритмов к построению и исследованию моделей

Изложим вначале суть эволюционных алгоритмов [50] на примере задачи отыскания максимума функции L числовых переменных $f(x_1,\ldots,x_L)$; эта задача также возникает при построении нейронных сетей. Обозначим $b(a)$ двоичное представление числа a, т. е. битовую строку из 32-х битов (таково наиболее распространеннное представление чисел в современных ЭВМ; бит — двоичный разряд, т. е. символ, который может быть единицей либо нулем). Тогда L-мерному вектору $x = (x_1,\ldots,x_L)$ соответствует строка битов длины $32L$ $b(x) = b(x_1)\ldots b(x_L)$. Эта строка называется *генотипом*, соответствующим *фенотипу* x. Таким образом, задача максимизации функции, заданной на множестве L-мерных векторов, т. е. фенотипов, сводится к задаче максимизации функции на множестве битовых строк, т. е. генотипов. Эта задача решается следующим образом. Выбирается начальная популяция из m строк. Дальнейшие действия опишем в виде последовательности шагов.

Шаг 1. *Выбор.* Из популяции случайным образом выбираются две строки ("родители").

Шаг 2. *Скрещивание.* Каждая из двух выбранных строк делится на L подстрок длины 32 (подстрока соответствует компоненте вектора-фенотипа). Для каждой пары соответствующих подстрок случайным образом определяются границы некоторого фрагмента, а затем подстроки обмениваются выделенными фрагментами (это называется рекомбинацией генов). В результате получаются две новые строки-потомка.

Шаг 3. *Мутация.* Каждый из битов новых строк с некоторой вероятностью (одной для всех) меняет значение на противоположное. Шаги 2 —

3 применяются $m/2$ раз.

Шаг 4. *Отбор.* Из m прежних строк и m новых отбираются m наилучших, т. е. таких, на фенотипах которых значение функции f наибольшее, после чего процесс повторяется с шага 1. Рассмотрим теперь более общий случай, когда $x_1, \dots, x_L$ — произвольные объекты, а не обязательно числа. Обозначим $b(x_k)$ представление объекта x_k в виде строки символов (кодов). В отличие от предыдущего, длины этих строк для разных k, вообще говоря, различны, длина k-й строки равна q_k. Сверх этого, коды — не обязательно двоичные цифры. Более того, для разных объектов множества значений кодов могут быть различными. Тогда L-мерному вектору $x = (x_1, \dots, x_L)$ соответствует строка символов $b(x) = b(x_1) \dots b(x_L)$ длины $q_1 + \dots + q_L$, которая в данном случае называется генотипом, соответствующим фенотипу x. Отличие такого алгоритма от рассмотренного выше частного случая заключается в том, что строки делятся на L подстрок, где длина k-й подстроки равна q_k, а на шаге мутации символ заменяется на некоторый другой случайным образом в соответствии с заданным распределением. Если требуется решить задачу минимизации функции, то она сводится к задаче максимизации путем, например, замены исходной функции функцией, противоположной ей по знаку. В частности, к задаче минимизации сводится задача нахождения параметров нейронной сети.

А теперь отметим весьма важное обстоятельство, а именно: в виде вектора $x = (x_1, \dots, x_L)$ с разнотипными компонентами описывается элементарный социальный тип. В этом случае компоненты $x_1, \dots, x_L$ суть значения типообразующих признаков. Более того, очевидно, что в виде такого вектора может быть представлена совокупность из некоторого фиксированного числа элементарных типов, т. е. в частности, парламент в пространстве типов. Как показано выше, задачи поиска парламентов — это некоторые экстремальные задачи, т. е. задачи на максимум или минимум. Отсюда следует, что эволюционные алгоритмы могут быть применены к нахождению парламентов.

3.1. Выводы

1. Эволюционные алгоритмы могут играть роль практически универсального средства компьютерного подбора и настройки моделей.
2. Некоторые модели — например, парламентского типа — допускают непосредственное представление в терминах эволюционного моделирования, что открывает путь к эволюционному моделированию социальных процессов.

Глава 4

Математические модели некоторых социальных явлений

4.1. Метод представительного рейтинга в анализе общественно-политической ситуации

Далее продемонстрировано применение представительных типов к анализу некоторых неальтернативных вопросов анкеты исследования общественно-политической ситуации в Беларуси за 1998 г. (выборка — 1494 человека), проводившегося под руководством В. В. Бущика. Напомним (см. 2.2.3), что метод представительного рейтинга применительно к анализу данных анкетных опросов заключается в следующем. Выбираются некоторые вопросы, называемые *типообразующими*. В рассматриваемом ниже случае это вопросы, порожденные различными вариантами ответа на рассматриваемый неальтернативный вопрос. Далее для удобства эти варианты мы будем называть *позициями*, а ответом назовем набор отмеченных позиций. *Тип* респондента определяется ответом на рассматриваемый вопрос, т. е. набором отмеченных позиций. Между любыми двумя типами (т. е. ответами) вводится *расстояние*, равное количество позиций, каждая из которых в одном из ответов отмечена, а в другом — нет. Для каждого типа респондента вычисляется его *показатель представительности*, равный среднему значению расстояния от этого типа до всех остальных, или, другими словами, среднему отклонению всевозможных типов от данного типа. Таким образом, тип тем представительнее, чем меньше значение этого показателя. Затем типы упорядочиваются (ранжируются) по показателю представительности. Анкеты, в которых по данному вопросу не была отмечена ни одна позиция, исключались из обработки, как не содержащие ответа на этот вопрос. Значения среднего отклонения для удобства нормированы к наибольшему из них.

В качестве "кандидатов" допускались ответы, количество которых в выборке 7 и более, т. е. значимо отличается от нуля с уровнем доверия 99 % . Вначале для каждого вопроса приведено процентное распределение для всех позиций ("линейка"), а затем — список кандидатов, упорядоченных по представительности в смысле среднего отклонения. В графе "значение ответа" отмеченные позиции обозначены единицей, остальные — нулем. Таблица 6 из-за большого объема приведена не полностью. Как видно из таблиц, более частые ответы не всегда являются более представительными в смысле критерия среднего отклонения, что подтверждает содержательность примененного подхода. Далее при анализе мы будем обозначать значение ответа номерами отмеченных позиций, заключенными в скобки.

В вопросе табл. 1, 2 наиболее представительными являются ответы, в которых отмечена только одна позиция, однако происходит это по разным причинам. Ответы (7) и (8) очень часты, но соответствующие позиции — 7 и 8 — сравнительно редко сочетаются с другими. Для позиции 7 это логически вытекает из ее формулировки — человеку, считающему, что новые стимулы ему

Таблица 1. **В сфере труда на основе рынка появляются новые стимулы. Какие из них в наибольшей мере привлекательны для Вас?**

№ ответа	Вариант ответа	%
	Нет ответа	2,01
1	Возможность начать собственное дело	19,88
2	Выезд на работу за рубеж	21,89
3	Работа на совместном с зарубежными фирмами предприятии	23,29
4	Акции и дивиденды	8,70
5	Иметь собственность (недвижимость)	21,82
6	Приобрести землю в собственность	10,71
7	Это для меня недоступно	18,88
8	Лучше бы вернуться к прежним стимулам	19,54
9	Другое	2,34

недоступны, нет смысла думать об их сравнительной привлекательности. Что же касается позиции 8, то, считая, что лучше бы вернуться к прежним стимулам, можно в принципе пытаться найти себя в складывающихся новых условиях. Но, по-видимому, это не всегда так, и можно констатировать в этом отношении наличие некоего ностальгического сравнительно пассивного типа личности. Ответ же (5) весьма представителен, хотя сам по себе встречается не так уж часто (отметим, что этот эффект практически невозможно обнаружить с помощью обычного частотного анализа из-за необходимости перебора очень большого числа вариантов). Из таблицы можно понять, в чем тут дело: позиция 5 очень часто отмечается в сочетании с другими. Отчасти похожая картина

Таблица 2. **Представительность ответов на вопрос о стимулах**

Значение ответа	Относительная частота ответа, %	Представительность ответа
001000000	8,81	0,309
000010000	5,26	0,314
010000000	9,15	0,314
100000000	7,99	0,320
000000010	17,96	0,321
000000100	17,35	0,323
000001000	3,01	0,348
000100000	2,66	0,355
000000001	1,57	0,375
001010000	1,43	0,394
011000000	2,60	0,394
010010000	1,02	0,398
101000000	0,48	0,400
110000000	0,48	0,404
100010000	1,91	0,405
000000110	0,48	0,415
000011000	0,96	0,433
001100000	0,75	0,435
000110000	0,68	0,439
011010000	0,68	0,479
101010000	0,89	0,485
111000000	0,96	0,485
110010000	0,68	0,489
100011000	1,02	0,524
111010000	0,82	0,569
111011000	1,02	0,689
111110000	0,55	0,695
111111000	0,68	0,814

с ответами (6) и (4). Сами позиции 4 и 6 отмечаются не столь часто, но они также весьма "дружественны" по отношению к другим. Все это свидетельствует об универсальной привлекательности стимула собственности. Промежуточное место занимают ответы (3), (2), (1). По таблице видно, что соответствующие позиции достаточно часто отмечаются как "в одиночестве так и в сочетании друг с другом. Возможно, это объясняется их содержательной близостью — они ориентированы на эффективные и вместе с тем сравнительно реальные пути улучшения своего положения. Как видно, примененный метод автоматически генерирует некоторые гипотезы, которые затем могут быть проверены посредством многомерного частотного анализа.

Из ответов на вопрос табл. 3, 4 наиболее представителен ответ (3) в силу того, что третья позиция отмечена

Таблица 3. **Что предпринимаете Вы и члены Вашей семьи для улучшения своего материального положения?**

№ ответа	Вариант ответа	%
	Нет ответа	1,20
1	Мы работаем дополнительно	31,79
2	Подыскиваем другое место работы	7,83
3	Мы стараемся больше делать для себя сами (работаем на дачном участке, строим, шьем, ремонтируем и т. п.)	57,30
4	Мы ничего не можем для этого предпринять	10,04
5	Мы не видим в этом необходимости	2,54
6	Трудно сказать	5,96
7	Другое	0,94

намного чаще любой другой. Последующие места занимают ответы (1, 3), (1), (2, 3), (2), и лишь далее идут ответы с отмеченными позициями 4 — 7. Таким образом, центральную тенденцию в большей мере отражают ответы, выражающие более активное отношение к проблеме улучшения своего материального положения.

Таблица 4. **Представительность ответов на вопрос о предпринимаемых действиях**

Значение ответа	Относительная частота ответа, %	Представительность ответа
0010000	42,07	0,328
1010000	12,40	0,442
1000000	18,16	0,494
0110000	1,83	0,598
0001000	9,82	0,635
0100000	4,40	0,650
0000010	5,76	0,662
0000100	2,51	0,684
0000001	0,47	0,695
1110000	1,02	0,713
1100000	0,61	0,765

Среди ответов на вопрос табл. 5, 6 лидируют по представительности ответы, где в различных сочетаниях отмечены позиции 2, 4, 6, отражающие желание более сильного государственного контроля над экономическими и социальными процессами. Это вполне согласуется с тем, что указанные позиции отмечались наиболее часто. Интересна ситуация с позицией 1. Она отмечалась достаточно часто и по этому показателю идет на четвертом месте после позиций 2, 4 и 6. По представительности одиночный ответ (1) также уступает из одиночных ответов лишь ответам (2), (4), и (6), хотя по частоте он превосходит (4) и (6). Ответы же, где позиция (1) отмечена в сочетании с другими, по представительности расположены не особенно высоко, причем среди последних лидируют те, где она сочетается опять-таки с позициями 2, 4, 6, за счет которых представительность и обеспечивается. В частности, сочетание (1, 2, 4), свидетельствующее об определенном противоречии в сознании, встречается редко, но обладает некоторой представительностью за счет позиций

Таблица 5. **На решении каких проблем сейчас должна быть сосредоточена деятельность властных структур?**

№ ответа	Вариант ответа	%
	Нет ответа	1,20
1	Ускоренное проведение экономических реформ	31,66
2	Возвращение государственного контроля над ценами	44,85
3	Финансовая поддержка государственных предприятий	18,14
4	Обеспечение социальной защиты населения	41,37
5	Поддержание гражданского мира и согласия в стране	28,51
6	Укрепление общественного порядка и законности, борьба с преступностью	35,41
7	Развитие связей с Западом	26,17
8	Укрепление позиций Беларуси на международной арене	27,91
9	Развитие связей с другими республиками бывшего СССР	25,90
10	Восстановление Советского Союза	16,40
11	Другое	2,88

2 и 4. Все это говорит в пользу того, что последовательные сторонники ускоренного проведения экономических реформ составляют сравнитель-

но небольшую и обособленную группу. Снова отметим, что частотный анализ этой картины не выявляет.

Таблица 6. **Представительность ответов на вопрос о властных структурах**

Значение ответа	Относительная частота ответа, %	Представительность ответа
01000000000	7,79	0,462
00010000000	5,22	0,473
01010000000	1,56	0,487
00000100000	1,90	0,491
10000000000	6,91	0,502
01000100000	2,51	0,505
00000001000	2,37	0,507
00001000000	2,10	0,512
00000010000	2,51	0,519
00000000100	1,56	0,520
01001000000	0,88	0,526
10010000000	1,02	0,527
01010100000	1,08	0,529
01000010000	0,61	0,533
01000000100	0,75	0,534
11010000000	0,68	0,540
Далее идут 30 менее представительных ответов		

Вопрос табл. 7, 8 сформулирован таким образом, что, за исключением близких по смыслу позиций 1 и 5, отметка одной из позиций делает маловероятной отметку всех остальных. По этой причине наиболее представительными оказались три ответа с наиболее часто отмечавшимися позициями — (1), (6), (5), а из ответов, где отмечено больше одной позиции, — ответ (1, 5).

Т а б л и ц а 7. **С кем Вы связываете надежды на улучшение условий жизни?**

№ ответа	Вариант ответа	%
	Нет ответа	1,61
1	Президентом и его структурами	40,16
2	Национальным собранием	3,08
3	Политическими партиями левой ориентации (коммунистами и др.)	1,74
4	Политическими партиями правой ориентации (БНФ и др.)	5,69
5	Сильной личностью, способной навести порядок в обществе	23,96
6	Потерял веру в государство и политиков, надеюсь только на себя	30,52
7	Другое	2,95

Т а б л и ц а 8. **Представительность ответов на вопрос о надеждах на улучшение условий жизни?**

Значение ответа	Относительная частота ответа, %	Представительность ответа
1000000	35,17	0,347
0000010	27,62	0,400
0000100	19,05	0,436
1000010	0,54	0,449
1000100	2,65	0,486
0001000	4,76	0,536
0000110	1,56	0,539
0100000	1,50	0,551
0000001	2,04	0,551
0010000	1,09	0,558
1100000	0,88	0,600
0001010	0,68	0,639

4.2. Анализ электоральных групп методом метрических социальных геометрий

Далее представлены результаты анализа данных исследования общественно-политической ситуации, проведенного Институтом социологии НАН Беларуси, с применением методов, описанных в предшествующих главах. Опрос производился вскоре после президентских выборов 2001 г. Анкета содержала вопрос о привлекательности предвыборных программ кандидатов — А. Лукашенко, В. Гончарика и С. Гайдукевича, который практически можно интерпретировать как вопрос о том, за кого человек проголосовал. Далее, рассматривались 4 группы вопросов.

Первую группу вопросов составили социально-демографические характеристики: пол, возраст, образование, основное место работы, социальное положение.

Вторая группа представляла собой неальтернативный вопрос с 12-ю позициями (вариантами ответов), т. е. каждая из позиций могла быть отмечена либо не отмечена. Как известно, такой вопрос можно трактовать как совокупность 12-ти альтернативных вопросов. Вопрос и варианты ответов выглядели следующим образом:

За что Вы голосовали, выбирая кандидатов в президенты?

1. За сохранение и продолжение нынешнего курса
2. За серьезные перемены в сторону демократии и либерализации
3. За сохранение государственной собственности на землю
4. За введение частной собственности на землю
5. За превращение колхозов в свободные кооперативы, за коллективную собственность на землю
6. За сохранение бесплатной медицины
7. За введение страховой медицины
8. За доступное и качественное здравоохранение
9. За перевод Армии на профессиональную основу
10. За сокращение воинской службы и введение альтернативной службы
11. За усиление обороноспособности страны под контролем общества и Президента
12. За другое

Третья группа представляла собой табличный вопрос **"Как, на Ваш взгляд, могут повлиять на социально-экономическую и политическую ситуацию в республике следующие факторы?"** с 9-ю "подвопросами" в боковике таблицы:

1. Укрепление союза с Россией и другими странами СНГ

2. Приватизация государственной собственности

3. Усиление государственного контроля и регулирования

4. Контроль парламента над всеми ветвями власти

5. Расширение сферы социального партнерства государства, нанимателей и профсоюзов

6. Кардинальное снижение налога (до 13 %) на доходы

7. Проведение референдума и Всебелорусского собрания при решении судьбоносных для республики проблем

8. Чтобы женщины, воспитывающие 3-х и более детей выходили на пенсию раньше на 5 лет

9. Сокращение госаппарата и контрольных служб

Предлагались следующие варианты ответа:

1. Положительно
2. Отрицательно
3. Не повлияет
4. Затрудняюсь ответить

Четвертая группа также представляла собой табличный вопрос **"Выразите Ваше отношение к следующим политическим лозунгам:"** с 12-ю подвопросами в боковике:

1. Политический нейтралитет и добрые отношения со всеми странами

2. Сотрудничество в первую очередь с Россией и странами СНГ

3. Сотрудничество в первую очередь с западными странами

4. Экономический союз с Россией

5. Объединение с Россией в одно государство

6. Вступление в Европейский союз

7. Формирование сильной государственной власти

8. Оппозиция должна иметь свободный доступ к электронным СМИ

9. В обществе не должно быть бедных и богатых, пусть лучше все живут одинаково средне

10. Необходимо ввести свободные цены на все виды товаров и услуг

11. Пенсия должна формироваться из тех средств, которые каждый человек отчисляет в течение трудовой жизни на свой личный счет

12. Курс на социально-ориентированную рыночную экономику

Варианты ответа были следующими:

1. Согласен
2. Не согласен
3. Трудно сказать

Был применен следующий метод анализа анализа. Между группами избирателей каждого из кандидатов определялись расстояния, отражающие различия в ответах на ту или иную группу вопросов. Таким образом, на множестве электоральных групп рассматривались четыре различные геометрии. Смысл этого приема заключается в том, что группы вопросов, различных по содержанию, могут близким образом располагать относительно друг друга, т. е. дистанцировать (да простится это корявое словцо) друг от друга те или иные социальные группы. Использовалось расстояние из примера 1.4.2. В данном случае оно учитывает как совпадение и несовпадение значений ответов на вопросы, так и их распределение, т. е. частоты. Была выдвинута следующая гипотеза: геометрия, определяемая блоком социально-демографических вопросов, отличается от геометрий, определяемых блоками содержательных вопросов, в то время как эти последние геометрии сходны между собой, поскольку набор ответов на вопросы подобного рода в основном определяются принадлежностью респондента к тому или иному социально-психологическому и мировоззренческому типу. В данном виде анализа важны не сами значения межгрупповых расстояний, а соотношения между ними. Межгрупповые расстояния, для удобства нормированные, выглядят следующим образом (табл. 1 — 4).

Таблица 1. **Расстояния по блоку социально-демографических характеристик**

	Лукашенко	Гончарик	Гайдукевич
Лукашенко	•	144	145
Гончарик	144	•	133
Гайдукевич	145	133	•

Таблица 2. **Расстояния по блоку вопросов *"За что Вы голосовали, выбирая кандидатов в президенты?"***

	Лукашенко	Гончарик	Гайдукевич
Лукашенко	•	86	84,4
Гончарик	86	•	79
Гайдукевич	84,4	79	•

Таблица 3. **Расстояния по блоку вопросов *"Как, на Ваш взгляд, могут повлиять на социально-экономическую и политическую ситуацию в республике следующие факторы?"***

	Лукашенко	Гончарик	Гайдукевич
Лукашенко	•	112	110
Гончарик	112	•	117
Гайдукевич	110	117	•

Таблица 4. **Расстояния по блоку вопросов *"Выразите Ваше отношение к следующим политическим лозунгам:"***

	Лукашенко	Гончарик	Гайдукевич
Лукашенко	•	115	110
Гончарик	115	•	117
Гайдукевич	110	117	•

Как видно, гипотеза частично подтвердилась, однако выявились и некоторые нюансы. Так, геометрии, определяемые третьим и четвертым блоком вопросов, практически идентичны, а именно: наиболее близки друг к другу группы избирателей А. Лукашенко и С. Гайдукевича, и несколько "на отшибе" оказалась группа избирателей В. Гончарика. Эти две геометрии отличаются от геометрии, определяемой первым (социально-демографическим) блоком, однако геометрия по второму блоку аналогична геометрии по первому, т. е. группы В. Гончарика и С. Гайдукевича относительно близки между собой, и на несколько большем и примерно одинаковом расстоянии от них обеих находится группа А. Лукашенко. Более внимательный анализ блоков вопросов позволяет, на наш взгляд, выдвинуть следующее объяснение. Третий и четвертый блоки носят в большей мере мировоззренческий характер, нежели второй, и ни один из вопросов напрямую не связан с сохранением или сменой президента страны. С. Гайдукевич, как нам представляется, в предвыборной риторике в значительной степени подражал А. Лукашенко, что и привлекло к нему людей схожего мировоззренческого типа. Второй же блок содержит вопросы, в сильной степени связанные с отношением к президенту А. Лукашенко и его политике, и это отношение сыграло определяющую роль при ответе на вопросы данного блока. С другой стороны, проводившиеся в свое время исследования (в том числе и выполненный нами анализ методом представительного рейтинга) показали сильную связь избирательских симпатий с социально-демографическими характеристиками. Эти два фактора и определили, по-видимому, сравнительно сильную связь ответов на вопросы первого и второго блоков. К сожалению, достоверности анализа мешает малая численность сторонников С. Гайдукевича в выборке, так что сделанные выводы мы рассматриваем как предварительные. Следует заметить, однако, что поскольку наш метод анализа оперирует с ответами на различные вопросы в совокупности, то влияние случайного фактора несколько сглаживается.

4.3. Выводы

1. Метод представительного рейтинга дает возможность получать в ходе эмпирического социологического исследования выводы, которые прак-

тически невозможно получить с помощью традиционного метода анализа данных.

2. Методы классификации с помощью векторных критериев и векторных расстояний предоставляют значительные новые возможности для анализа маргинальных явлений, позволяя, в частности, учитывать различную логику исследования.

3. Применение охарактеризованных методов позволяет с достаточной степенью адекватности сконструировать наиболее вероятные сценарии изменяющегося соотношения социально-политических сил и возможного результата президентских и парламентских выборов.

Глава 5

О методике построения математических моделей в социологии

5.1. Общая характеристика структур на множествах

Анализируя объекты социального мира, как, впрочем, и любого другого, мы сплошь и рядом оперируем количественными соотношениями и пространственными формами. Последнее явление связано, по-видимому, с особенностями человеческого восприятия и мышления и анализировалось, по крайней мере, еще Э. Б. Кондильяком [29]. Развитие такого рода подхода к представлению социальных явлений привело к понятию социального пространства и к упоминавшейся во введении социальной топологии П. Бурдье [11–13]. В то же время в математике происходило развитие как методов количественного анализа и изучения пространственных форм по отдельности, так и (до XX века — в меньшей степени) синтетических методов, т. е. направления, ведущего начало от Р. Декарта и его знаменитой системы координат. В XIX веке завершилось разделение "количественного" направления на алгебру и математический анализ, а на рубеже XIX – XX веков сформировалась в известном смысле чисто качественная область геометрии — топология, самостоятельность которой со временем возросла настолько, что возникло выражение "геометрия и топология". Как это бывает, периоды преобладания тенденций разделения и синтеза сменяли друг друга, и в первой половине XX века оформилась математическая дисциплина, органично соединившая в себе методы алгебры, анализа и геометрии, в частности — топологии. Эта дисциплина получила название *функциональный анализ*, и в скором времени она продемонстрировала чрезвычайную эффективность как для развития собственно математической теории, так и для многочисленных приложений. Достаточно сказать, что функциональный анализ стал базой для изучения уравнений математической физики и языком — для математической экономики. Ввыше в настоящей книге мы широко применяли методы функционального анализа — см., например, 1.6.1, где использовалось сочетание порядковых и топологических структур, или 1.6.2, где множество рассматриваемых объектов предполагалось наделенным согласованными топологической и вероятностной структурами, а также практически всю главу 2. Значение функционального анализа, однако, непосредственным применением не исчерпывается — это был весьма поучительный пример плодотворности междисциплинарного синтеза, и к настоящему времени известны такие области математики, как алгебраическая геометрия и алгебраическая топология, топологическая алгебра, алгебраическая, геометрическая, аналитическая и вероятностная теория чисел — список этот можно продолжить. Для некоторых из таких областей порой трудно подыскать место в традиционной классификации. Эти "объединительные" тенденции явились одним из источников потребности в основах единого общематематического языка, каковые и были созданы. Интересно отметить, что при уточнении основных математических понятий их строгие определения порой приближались к общенаучному пониманию соответствующих терминов; примерами могут служить понятия структуры и функции.

Формирование единого строгого, но вместе с тем более ясного, языка математики, с одной стороны, и рост потребностей практики — с другой, — привели к вовлечению в прикладные исследования разделов математики, ранее считавшихся сугубо абстрактными, причем вновь возникающие ветви математической науки, используя опыт такого рода, накопленный в других областях, порой находят выход в практику очень быстро. Основными понятиями упомянутого математического языка является понятие множества и, далее, множества с некоторыми отношениями между его элементами; некоторые из этих отношений называют *структурами* на множестве. Структуры эти весьма разнообразны. Напомним те из них, которые мы использовали для наших целей.

Топологические структуры (1.4) формализуют пространственные представления типа "ближе — дальше" и, на этом основании, понятие непрерывности. При этом наиболее общая структура такого рода, т. е. структура топологического пространства как такового, позволяет с прикладной точки зрения говорить лишь о том, что, например, при изменении некоторых условий один объект приближается к другому, но не о том, что из двух объектов один ближе к некому третьему, чем другой, и тем более количественно охарактеризовать расстояние между двумя объектами. Последняя задача решается путем введения более жесткой (как говорят, более *сильной*) структуры — структуры *метрического пространства* (1.4.1), которая определяется заданием для каждой пары элементов *расстояния* между ними; это абстрактное расстояние обладает рядом свойств обычного расстояния. Мы использовали технику метрических пространств на протяжении практически всей книги.

Весьма важные для социологии *порядковые* структуры (1.2) соответствуют ситуации, когда мы используем понятия типа "больше — меньше "лучше — хуже" и т. п. Порядок может быть *линейным* (более сильная структура), при котором о любых двух элементах можно сказать, какой из них больше, или частичным (более слабая), когда есть пары элементов, несравнимых между собой.

Если над элементами множества можно производить операции, в чем-то аналогичные обычным арифметическим действиям над числами — аналогичные, в первую очередь, в том смысле, что в результате применения операции к двум элементам (их называют операндами) получается третий, — говорят об *алгебраической* структуре. Абстрактные операции могут удовлетворять тем или иным из известных законов элементарной алгебры — переместительному, сочетательному и т. д. — а могут и не удовлетворять. Здесь опять же говорят о более сильных и слабых структурах.

Далее, важной для нас является структура *пространства с мерой.* Она вводится заданием некоторого класса подмножеств исходного множества, для каждого из которых определено значение обладающей определенными свойствами функции, называемой мерой. Понятие меры обобщает понятия длины линии, площади фигуры и объема тела, и обладает, прежде всего, свойством аддитивности: мера объединения непересекающихся множеств равна сумме их мер. Весьма важным является тот факт, что частным случаем меры является *вероятность* события, если каждое событие отождествить с некоторым подмножеством множества так называемых элементарных событий. Понятие меры лежит в основе понятия интеграла и позволяет, в частности, говорить о разного рода средних значениях различных величин; одним из таких значений является среднее значение (математическое ожидание) случайной величины.

Между разными структурами могут существовать некоторые соотношения. Во-первых, некоторые структуры могут быть отнесены к различным типам. Например, структуру *булевой алгебры*, широко применяемую в логике и теории вероятностей, можно считать разновидностью как порядковой, так и алгебраической структур. Во-вторых, на одном множестве могут быть заданы структуры нескольких типов, определенным образом *согласованные* между собой. Так, алгебраическая и топологическая структуры считаются согласованными, если при малом в топологическом смысле изменении операндов алгебраической операции (т. е. при замене их на близкие к ним) результат операции тоже мало изменяется. Для нас это важно тем, что, скажем, одновременное задание структур метрического пространства и пространства с мерой позволяет говорить о средней удаленности группы объектов от некоторого заданного объекта. Мы опирались на соответствующие понятия и конструкции, например, при ипользовании методов парламента и представительного рейтинга (4.1). В-третьих, структуру одного типа можно построить, используя структуру другого типа. И, наконец, в-четвертых, заменяя в некоторой конструкции структуру одного типа на другую того же типа, мы можем получить новую структуру другого типа. Например, если в структуре метрического пространства мы заменим число как значение расстояния элементом частично упорядоченного множества, удовлетворяющего некоторым условиям, то мы получим обобщенное метрическое пространство (1.4.1). Расстояние в таком пространстве уже не является числом, и лишь о некоторых точках можно говорить, что они расположены друг к другу ближе, нежели какие-то другие. Структура метрического пространства по силе занимает промежуточное положение между обобщенным метрическим и неархимедовым метрическим пространством. Отметим здесь, что на вопрос о том, какую из однотипных структур выбирать для построения той или иной прикладной модели — более сильную или более слабую — нельзя, очевидно, дать универсальный ответ: типы структур и конкретные представители типов выбираются, как правило, на основе компромисса между адекватностью целям исследования и техническими возможностями структур. Мы перечислили не все типы математических структур, которые можно использовать при построении моделей. Применение некоторых из них было продемонстрировано в предшествующих главах.

5.2. Способы задания структур на множествах социальных объектов

Далее приведены в сжатом виде изложенные и примененные выше способы построения математических структур того или иного типа на множествах различных социальных объектов. Поскольку для нас главное — показать методику применения определенного математического подхода, мы порой рассматриваем упрощенные с точки зрения социологии примеры, чтобы детали не мешали воспринимать суть дела. Более подробное описание приведено в соответствующих главах книги. Иногда, чтобы напомнить, что речь идет не об обычных расстояниях, алгебраических операциях и так далее, мы будем называть их абстрактными, хотя они описывают столь же реальные процессы и явления, что и традиционные математические понятия.

Начнем с топологических структур. Рассмотрим некоторое множество индивидов, подлежащее изучению. Допустим, что нас интересуют определенные признаки (характеристики) индивидов, например, пол, возраст, социальный статус и так далее. Предположим вначале, что характеристик этих так много, что двух индивидов с одним и тем же набором значений характеристик практически быть не может, и попытаемся ввести на множестве индивидов структуру метрического пространства, т. е. определить расстояние между индивидами. Это можно сделать, например, так. Для двух индивидов подсчитаем сумму (количество) признаков, значения которых у данных индивидов не совпадают, и это количество назовем расстоянием. Такой подход может быть усовершенствован. В упомянутой сумме вклад признака, значения которого у индивидов не совпадают, будем считать равным не обязательно единице, а, скажем, расстоянию между этими значениями, что особенно естественно, если признак — количественный, например, возраст. Можно также вклады признаков суммировать с некоторыми весами, отражающими относительную важность признаков.

Продемонстрируем теперь иной способ введения расстояния. Пусть с точки зрения исследовательской задачи признаки весьма неравноценны, так что, если зафиксировано различие значений некоторого признака, то значения менее важных признаков уже несущественны. Упорядочим признаки по важности, и для произвольной пары индивидов зафиксируем номер первого признака, значения которого у них различаются. Расстоянием между индивидами будем считать величину, обратную к этому номеру. Такое расстояние естественно возникает, например, там, где рассматривается административное деление. Рассмотрим, например, множество сельских жителей страны. Тогда можно положить, например, расстояние между двумя жителями одной деревни равным 1, разных деревень, но одного сельсовета — 2, одного района — 3 и т. д. Расстояния такого рода называются *неархимедовыми* или *ультраметрическими*; они, как видно из приведенного примера, связаны с иерархическими структурами и обладают многими другими полезными свойствами, причем даже там, где исходное адекватное исследовательской задаче расстояние не является неархимедовым метрическим, таковое может возникнуть в процессе исследования — скажем, как латентное (1.6.2). Неархимедовы расстояния также могут вводиться с учетом распределений признаков. Теперь откажемся от предположения о том, что у индивидов не может быть одинакового набора значений признаков. Тогда применить изложенную схему непосредственно нельзя, ибо одним из свойств, которым должно обладать абстрактное расстояние, является то, что между двумя различными объектами (элементами) расстояние не может быть равно нулю. Заменим в нашем рассмотрении индивидов некоторыми множествами индивидов, которые мы назовем *типами*. Типом в данном случае называется множество индивидов, у которых значения анализируемых признаков совпадают. Затем можно применить предыдущие рассуждения. Понятно, что приведенное понимание типа достаточно узко; в предыдущих главах применен и более широкий — даже с точки зрения математики — подход, в рамках которого типы, введенные здесь, называются *элементарными*.

Рассмотренные выше расстояния обладают, как нетрудно заметить, той особенностью, что расстояние между двумя индивидами определяется только значениями признаков у этих индивидов и не зависит от какого бы то ни было контекста. Это свойство может быть как достоинством, так и недостатком. Если учет контекста желателен, то можно поступить следующим образом. Присвоим значениям признаков некоторые метки — числовые, порядковые, номинальные (качественные), причем сделаем это таким образом, чтобы "меченые" признаки были как можно более коррелированны в смысле какого-либо показателя парной связи. Корреляция здесь понимается в смысле распределения значений признаков в пределах рассматриваемого контекста, т. е. совокупности индивидов, и мы, разумеется, должны знать эти распределения. При рассмотрении больших совокупностей можно использовать статистические данные, а для относительно небольших, скажем, выборочных, совокупностей применение такого подхода принципиальных трудностей не вызывает.

Теперь рассмотрим случай, когда признаки делятся на группы (блоки), с содержательной точки весьма различные (трудно сравнимые). Тогда суммирование различий не является адекватным подходом, ибо различие в значениях признаках одной группы может компенсироваться совпадением по признакам другой группы. Упорядочение же признаков неизбежно приводит к неравноправию групп. Поступим следующим образом. Будем вычислять расстояние по каждой из групп признаков отдельно одним из описанных выше способов, но никакого свертывания полученных расстояний делать не будем, а просто образуем из них вектор, т. е. получим *векторное расстояние.* Это один из вариантов *обобщенного расстояния* и, соответственно, *обобщенного метрического пространства*, о котором говорилось выше.

Нетрудно заметить, что рассмотренные способы задания расстояний с некоторыми модификациями могут быть применены и к другим социальным объектам, а не только к индивидам. Для системных явлений и объектов возможны, однако, специальные способы. Известно, например, что можно вводить расстояния между признаками индивидов и других объектов, используя распределения этих признаков. Простейшие из этих расстояний фактически используют обычный коэффициент линейной корреляции между признаками. Для этого, однако, нужно, чтобы признаки были числовыми, либо присвоить значениям признаков числовые метки, о чем говорилось выше. Если же признаки нечисловые, то механическое использование соответствующих показателей (коэффициентов) парной связи (порядковых либо номинальных) вместо коэффициента корреляции не гарантирует одного из свойств абстрактного расстояния, аналогичного тому известному свойству обычного расстояния, что кратчайшее расстояние между точками есть прямая. В этом случае можно представить совокупность признаков как *граф*, т. е. набор точек, называемых *вершинами* графа, которые соединены линиями; эти линии называются *ребрами*. Каждому ребру присвоим *длину* (в математику эту величину обычно называют *весом*, но термин "длина" здесь нагляднее), равную величине, обратной к значению показателя связи между соответствующими признаками. Для любых двух вершин графа рассмотрим всевозможные пути из одной вершины в другую. Длину пути естественным образом положим равной суммарной длине ребер, составляющих этот путь. Расстоянием между вершинами будем считать длину самого короткого пути между ними. Суть этой конструкции в том, что кратчайший путь между вершинами не всегда есть соединяющее эти вершины ребро. Используя граф, можно построить иную конструкцию расстояния. Назовем значение коэффициента связи между двумя признаками *пропускной способностью* соответствующего ребра, а пропускной способностью пути — наименьшую из пропускных способностей составляющих его ребер. Для двух вершин найдем путь с наибольшей пропускной способностью, и расстоянием между вершинами будем считать величину, обратную этой пропускной способности. Это расстояние будет неархимедовым. Задачу определения расстояния между двумя сложными однородными объектами мы рассмотрим ниже, используя отмеченную ранее возможность построения одних структур через другие.

Перейдем к проблеме задания порядковых структур. В эмпирических социологических исследованиях они хорошо известны, в частности, как множества значений порядковых признаков, т. е. признаков с упорядоченными значениями. Порядковыми являются иерархические структуры, которые также применяются достаточно широко. С другой стороны, известно, что иерархические структуры тесно связаны с топологическими, а именно, с упомянутыми неархимедовыми метрическими пространствами. Интересно, однако, что, используя эту связь, удается выявлять латентные иерархические структуры. В 1.6.2 было показано, как это делается. Мы показали также, что на множестве с иерархической структурой некоторыми естественными способами можно ввести структуру пространства с мерой. Наличие же этой структуры, в свою очередь, позволяет ввести расстояние. Пользуясь этим, можно определить расстояние между сложными многоуровневыми иерархическими объектами. Это расстояние отражает различия между объектами на различных уровнях.

Перейдем к алгебраическим структурам. Применение одной из них к социальным исследованиям хорошо известно — это структура булевой алгебры. Она возникает, во-первых, при формализации логических построений, а во-вторых, при рассмотрении множеств объектов. Социологическая специфика сказывается здесь, однако, незначительно. Какая-то иная возможность использования алгебраических структур для социологических объектов на первый взгляд кажется проблематичной: трудно представить, как можно складывать или умножать эти объекты — подчеркнем, сами объекты, а не их количества. Тем не менее, это оказывается возможным, если в очередной раз воспользоваться принципом порождения одних структур другими. Оказывается, на множестве иерархических объектов при некоторых достаточно естественных условиях однородности можно ввести алгебраическую структуру — (абстрактное) сложение.

О структуре пространства с мерой мы уже говорили, где она порождалась структурами другого типа. Как первичная она порождается распределениями вероятностей на рассматриваемых множествах. Этот случай весьма важен, но, однако, он не единственный в своем роде. В предшествующих главах были приведены соответствующие примеры.

5.3. Аппроксимации структур как метод построения моделей

Изложим сущность используемого подхода индуктивным образом — от частного к общему. Предположим, что мы хотим приблизить (представить) некоторое множество объектов некоторым менее "многочисленным" множеством — так, чтобы оно, с одной стороны, было более обозримо, но, с другой стороны, несло бы некоторую информацию об исходном множестве, т. е. отражало определенные его свойства. Отметим сразу же, что без рассмотрения той или иной структуры на исходном множестве эта задача абсолютно бессодержательна — даже такой классический способ, как случайный выбор некоторых элементов, использует задание на исходном множестве одной из разновидностей структуры пространства с мерой, а именно вероятностного пространства. Итак, пусть на исходном множестве задана структура метрического пространства, т. е. задано расстояние. Разделим множество на некоторое заданное число частей таким образом, чтобы каждая из частей была как можно более "плотной"в том смысле, что разброс (максимальное расстояние) между элементами одной части, минимален. Можно определить расстояние между любыми двумя частями как некоторый показатель качества приближения каждой из этих двух частей другой частью. Таким образом, исходное множество представлено множеством с меньшим количеством элементов, т. е. множеством частей, со структурой того же типа, т. е. структурой метрического пространства. Иногда удобно считать, что каждая из частей изображается некоторой меткой или номером, и говорить о множестве меток и расстояниях между ними.

Если на исходном множестве, кроме расстояния, задана еще и мера, то мы можем разделить его на части (классы) так, чтобы мера классов была по возможности одной и той же, т. е. чтобы меры классов как можно меньше отличались друг от друга, а среднее расстояние между элементами каждого класса были также минимальны. Расстоянием между двумя классами можно считать меру множества элементов, которые принадлежат одному из них и не принадлежат другому. Если вместо классов рассматривать их метки, то мера класса "сосредотачивается" в его метке. Таким образом, и здесь набор приближающих структур относится к тем же типам, что и исходные структуры. Мы, однако, можем вовсе не нуждаться в этих структурах на множестве классов по той причине, что исходные структуры сыграли свою роль при формировании этого множества, т. е. множества классов, и далее нам следует только изучать это множество классов само по себе. Таким образом, в качестве модели мы используем множество с более бедным набором структур или вовсе без структуры. Кроме того, если мы решаем задачу нечеткой классификации, когда каждый элемент относится не к одному определенному классу, а, вообще говоря, к каждому из них с той или иной степенью принадлежности, то сохранить на множестве нечетких классов исходный набор структур, вообще говоря, не удается.

Таким образом, набор аппроксимирующих структур может быть беднее исходного набора по причине как исследовательской парадигмы, так и технических возможностей (особенностей) структур. Менее тривиально, однако, что набор этих структур может быть богаче исходного набора. Источник такого явления может быть, например, следующим. Иногда бывает целесообразным выбор в качестве первичных некоторых континуальных структур. Отдельные элементы множеств с такими структурами могут не иметь, скажем, ненулевой вероятности — ее имеют только некоторые подмножества основного множества. Приближение может быть получено с помощью процедуры укрупнения, т. е. с использованием классов состояний. Классы, являясь элементами в новой модели, имеют уже ненулевые вероятности, что позволяет строить вероятностные структуры, невозможные изначально.

Иерархия структур весьма существенна для исследования процессов социальной динамики и трансформации, поскольку некоторой структуре в статическом режиме при переходе к процессу изменения соответствует другая структура на множестве траекторий структур исходного типа. Это особенно важно при изучении трансформирующегося общества, например, в нашей стране [7].

5.4. Выводы

1. Подобно тому, как основу аппарата математической физики составляют уравнения в частных производных, а математической экономики — теория линейных и выпуклых экстремальных задач, в основу математической социологии можно положить теорию аппроксимации в абстрактных математических структурах.
2. Предложенный подход позволяет строить модели как на уровне сугубо

теоретических рассмотрений, так и с использованием данных эмпирических исследований.
3. Этот подход позволяет варьировать точность и, соответственно, сложность модели.
4. Теория аппроксимации, воплощенная в абстрактных математических структурах, способна сыграть эвристическую роль в тонком и точном исследовании социально-стратификационных структур, их динамики в современном трансформирующемся белорусском обществе.

Дополнение. Некоторые сведения о задачах выбора

Начнем с простейшей задачи выбора — задачи оптимизации числовой функции. Пусть на некотором множестве X задана числовая функция f, которую мы будем называть *критерием* или *критериальной функцией*. Требуется найти точку $x_0 \in X$, в которой функция приняла бы наименьшее значение, т. е. для любого $x \neq x_0$ имело бы место неравенство $f(x) > f(x_0)$, и (или) само минимальное значение функции, т. е. $f(x_0)$. Это так называемая задача *минимизации*; другой вид задач оптимизации — задача *максимизации* — рассматривается совершенно аналогично. Для максимума и минимума существует общее название — *экстремум*. Не вдаваясь в технические детали, обсудим принципиальные проблемы, возникающие при постановке таких задач. Пусть, например, X — множество всех действительных чисел, $f(x) = x^2 + 1$. Эта функция принимает наименьшее значение в точке $x_0 = 0$, и само это значение равно 1. Легко видеть, однако, что такой точки может и не существовать. Например, если X — множество положительных действительных чисел и $f(x) = \ln x$, то функция f может принимать сколь угодно малые значения. Возможна и несколько иная картина. Если X — снова множество положительных чисел и $f(x) = \frac{1}{x}$, то значения $f(x)$ положительны и могут быть сколь угодно близки к нулю, но точки, где функция принимает нулевое значение, нет. В обоих случаях говорят, что экстремум (в данном случае минимум) *не существует* или *не достигается*. Последний термин применяют обычно ко второй из двух рассмотренных ситуаций. Еще одна проблема заключается в том, что минимум может достигаться более чем в одной точке. Пусть X — множество действительных чисел, $f(x) = \sin x$. Минимальное значение этой функции равно, очевидно, -1, но достигается оно во всех точках вида $(\frac{3}{2} \pm 2k)\pi$. Функция, имеющая более одного минимума (или максимума), называется *многоэкстремальной*. Заметим, что если множество X конечно, то точка экстремума всегда существует, хотя может быть не единственной. Можно показать, что в рассматриваемых нами задачах экстремум, как правило, существует, хотя может не быть единственным, поэтому далее мы будем допускать такую возможность. Минимальное и максимальное значения функции f на множестве X обозначаются соответственно

$$\min_{x\in X} f(x), \qquad \max_{x\in X} f(x),$$

а множество точек минимума (максимума), т. е. точек, где функция принимает минимальное (максимальное) значение —

$$\arg\min_{x\in X} f(x), \qquad \arg\max_{x\in X} f(x),$$

Теперь предположим, что функция f не числовая, а принимает значения в линейно или частично упорядоченном множестве. В первом из этих случаев принципиальных отличий от числовых функций не возникает. Во втором случае ситуация сложнее. Рассмотрим наиболее важный случай нечисловой функции f, а именно — когда критериальная функция векторная: $f = (f_1, \ldots, f_s)$, т. е. для любого $x \in X$ значение функции представляет собой s-мерный вектор:

$$f(x) = (f_1(x), \ldots, f_s(x)) \in \mathbb{R}^s.$$

В этом случае говорят о *векторном критерии* f и *частных скалярных критериях* $f_1, \ldots, f_s$. Очевидно. что частные критерии могут, вообще говоря, достигать минимума в разных точках.

Чтобы единообразно рассматривать такие задачи, воспользуемся следующей схемой [1]. Пусть задано множество X и $\mathcal{X}$ — некоторый класс подмножеств этого множества; если множество X конечно, то в качестве $\mathcal{X}$ будет фигурировать, как правило, класс всевозможных подмножеств X. Пусть имеется правило C, которое каждому множеству A из класса $\mathcal{X}$ сопоставляет некоторое его подмножество $C(A) \subset A$, т. е. выбирает из множества A некоторую его часть. Будем называть такое правило *оператором выбора*. С задачами оптимизации операторы выбора связаны весьма просто: задаче поиска минимума функции f на множестве X соответствует оператор, сопоставляющий множеству A его подмножество $C(A)$, состоящее из точек, где f достигает минимального на A значения, т. е.

$$C(A) = \arg\min_{x\in A} f(x).$$

Например, если мы вернемся к рассматривавшемуся выше примеру с функцией $f(x) = x^2 + 1$, то в случае, когда A — отрезок $[5,\ 7]$, получаем $C(A) = \{5\}$, т. е. $C(A)$ — множество, состоящее из одной точки 5. Если же $f(x) = \sin x$ и $A = [0,\ 6\pi]$, то

$$C(A) = \left\{\frac{3\pi}{2},\ \frac{3\pi}{2} + 2\pi,\ \frac{3\pi}{2} + 4\pi\right\},$$

т. е. состоит из трех точек.

Если же мы имеем дело с нечисловым критерием, то такого единственного оператора выбора указать нельзя. Иными словами, не существует универсальной логики выбора по сложным критериям. Укажем некоторые наиболее популярные правила выбора.

Выбор по Парето. Выбираются варианты (они называются *неулучшаемыми*, *оптимальными по Парето* или просто *паретовскими*), для которых не существует лучших. В случае векторного критерия это означает, что если какой-то вариант лучше паретовского по некоторому частному скалярному критерию, то непременно уступает ему по какому-либо другому.

Лексикографический выбор по векторному критерию. Частные скалярные критерии кпорядочиваются (ранжируются) по важности. Выбираются варианты, лучшие по главному (самому важному) критерию. При равенстве значений главного критерия на нескольких вариантах предпочтение отдается лучшим по следующему (второму по важности) критерию и так далее.

Мажоритарный выбор по векторному критерию. Выбираются варианты, лучшие по наибольшему числу частных скалярных критериев.

Отметим, что процедуры выбора могут быть применены не только для построения моделей и с их помощью — к исследованию социальных систем и процессов, но и, что особенно важно, для оптимизации управления этими процессами и системами.

Литература

1. Айзерман М. А., Алескеров Ф. Т. Выбор вариантов: основы теории. М., 1990.
2. Александров В. В., Горский Н. Д., Поляков А. О. Рекурсивные алгоритмы обработки и представления данных // Алгоритмы и системы автоматизации исследований и проектирования. М., 1980. С. 40 – 78.
3. Александров В. В., Арсентьева А. В., Горский Н. Д. Некоторые вопросы построения рекурсивных структур // Управляющие системы и машины. 1981. № 4. С. 3 – 7.
4. Анурин В. Ф. Проблема эмпирического измерения социальной стратификации и социальной мобильности // Социологические исследования. 1993. № 4. С. 87 – 96.
5. Анурин В. Ф. Экономическая стратификация: аттитюды и стереотипы сознания // Социологические исследования. 1995. № 1. С. 104 – 115.
6. Арнольд В. И. "Жесткие" и "мягкие" математические модели. М., 2000.
7. Бабосов Е. М. Теоретико-методологическое обоснование перспективной модели социального пространства страны // Проблемы развития национальной экономики Беларуси (теоретические и практические аспекта). Мн., 2002.
8. Барановский Н. А. Социальные и личностные детерминанты отклоняющегося поведения. Мн., 1993.
9. Березин И. С., Жидков Н. П. Методы вычислений. Т. 1. М., 1966.
10. Берник В. И., Мельничук Ю. В. Диофантовы приближения и хаусдорфова размерность. Мн., 1988.
11. Бурдье П. Начала. М., 1994.
12. Бурдье П. Практический смысл. СПб., 2001.
13. Бурдье П. Социология политики. М., 1993.
14. Бэстенс Д.-Э., Ван ден Берг В.-М., Вуд Д. Нейронные сети и финансовые рынки. М., 1997.

15. Вебер М. Основные понятия стратификации // Социологические исследования. 1994. № 5. С. 147 – 156.
16. Вестфрид И. А. // Укр. мат. журн. 1994. Т. 46, № 12. С. 1700 – 1706.
17. Гвишиани А. Д., Агаян С. М., Трусов. Элементы неархимедова анализа. М., 1979.
18. Горбань А. Н., Россиев Д. А. Нейронные сети на персональном компьютере. Новосибирск, 1996.
19. Данфорд Н., Шварц Дж. Линейные операторы. Общая теория. М., 1962.
20. Дёрнер Д. Логика неудачи. М., 1997.
21. Дьедонне Ж. Основы современного анализа. М., 1964.
22. Дэйвисон М. Многомерное шкалирование. М., 1988.
23. Енюков И. С. Методы, алгоритмы, программы многомерного статистического анализа (пакет ППСА). М., 1986.
24. Жамбю М. Иерархический кластер-анализ и соответствие. М., 1988.
25. Ильин В. И. Государство и социальная стратификация. Сыктывкар, 1996.
26. Кемени Дж., Снелл Дж. Кибернетическое моделирование. Некоторые приложения. М., 1972.
27. Коллатц Л. Функциональный анализ и вычислительная математика. М., 1969.
28. Комаров В. Ф. Социальная стратификация и социальная структура // Социологические исследования. 1992. № 7. С. 62 – 72.
29. Кондильяк Э. Б. Опыт о происхождении человеческих знаний // Соч., Т. 1. М., 1980. С. 65 – 181.
30. Левин К. Теория поля в социальных науках. СПб, 2000.
31. Лемин А. Ю. О равнобедренных метрических пространствах // Функциональный анализ и его приложения в механике и теории вероятностей. М., 1984. С. 39 – 45.
32. Леонов Н. Н. Меры на компактных неархимедовых метрических пространствах // Докл. АН Беларуси. 1996. Т. 40, № 5. С. 36 – 39.
33. Леонов Н. Н. ε-энтропия множеств в неархимедовых метрических пространствах // Докл. АН Беларуси. 1997. Т. 41, № 4. С. 30 – 33.
34. Леонов Н. Н. Структура метрик и изометричные вложения в неархимедовых метрических пространствах // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат.навук. 1997. № 4. С. 42 – 45.
35. Леонов Н. Н. Множественные задачи усреднения и классификации и их применение к проблемам представления и маргинальности // Динамика социальных процессов в условиях государственной независимости Беларуси: социологический аспект. Сб. науч. трудов. Вып. 1. Мн., 1999. С. 245 – 251.

36. Леонов Н. Н. Применение "data mining" в эмпирических социологических исследованиях: метод парламента // Динамика социальных процессов в условиях государственной независимости Беларуси: социологический аспект. Сб. науч. трудов. Вып. 2. Мн., 2000. С. 209 – 216.

37. Маслов В. П. Асимптотические методы решения псевдодифференциальных уравнений. М., 1987.

38. Медведев А. В. Непараметрические системы адаптации. Новосибирск, 1983.

39. Мостовая И. В., Угольницкий Г. А. Социальное пространство: эвристика математического моделирования // Социологические исследования. 1999. № 3. С. 21 – 27.

40. Орлов А. И. Общий взгляд на статистику объектов нечисловой природы // Анализ нечисловой информации в социологических исследованиях. М., 1985. С. 58 – 92.

41. Орлов А. И. Случайные множества: законы больших чисел, проверка статистических гипотез // Теория вероятностей и ее применения. 1978. Т. XXIII, № 2. С. 462 – 464.

42. Орлов А. И. Статистика объектов нечисловой природы // Теория вероятностей и ее применения. 1980. Т. XXV, № 2. С. 655 – 656.

43. Орлов А. И. Статистика объектов нечисловой природы и обработка социологических данных // Математические методы в социологическом исследовании. М., 1981. С. 67 – 75.

44. Сорокин П. А. Человек. Цивилизация. Общество. М., 1992.

45. Сорокин П. А. Система социологии. Т. 2. М., 1992.

46. Терехина А. Ю. Анализ данных методами многомерного шкалирования. М., 1986.

47. Шматко Н. А. Плюрализация социального порядка и социальная топология // Социологические исследования. 2001. № 9. С. 14 – 18.

48. Шрейдер Ю. А. Равенство, сходство, порядок. М., 1971.

49. Шрейдер Ю. А., Шаров А. А. Системы и модели. М., 1982.

50. Эволюционные вычисления и генетические алгоритмы // Обозрение прикладной и промышленной математики. Сер. методы оптимизации (специальный выпуск). 1996. Т. 3. Вып. 5.

51. Энгелькинг Р. Общая топология. М., 1986.

52. Priess-Crampe S., Ribenboim P. Generalized ultrametric spaces. Preprint. 1994.

53. Schikhov W. A. Ultrametric calculus. Cambridge, 1984.

54. Vapnik V. Statistical Learning Theory. John Wiley and Sons, 1998.

Resume

The book is devoted to some unified approach to building and analysis of mathematical models in sociology. This approach is usable both in theoretical and in empirical research. The main idea is some general approximation scheme for various mathematical structures. Hierarchical and non-Archimedean structures are of great importance here. It is shown how to introduce mathematical structures on sociological objects. Some applications are demonstrated.