# Раздел 1

# Иерархические и ультраметрические пространства

## 1.1 Иерархические пространства

Для любого множества $X$ через $Exp(X)$ обозначим множество всех подмножеств $X$. Пусть $\mathcal{K} \subset Exp(X)$. Обозначим

$$\mathcal{U}(\mathcal{K}) = \Big\{ \bigcup_{s\in S} B_s \mid (B_s)_{s\in S} \text{ — некоторое семейство}$$

$$\text{множеств, } B_s \in \mathcal{K} \quad \forall s \in S \Big\}.$$

Примечание. Мы имеем в виду, что $(B_s)_{s\in\emptyset} = \emptyset$, так что $\emptyset \in \mathcal{K}$.

Пусть $X$ – множество и $\mathcal{H}$ — подмножество $Exp(X)$ такое, что выполняются следующие условия:

(H1) $\bigcup\limits_{B\in\mathcal{H}} B = X$.

(H2) Если $B_1, B_2 \in \mathcal{H}$ и $B_1 \bigcap B_2 \neq \emptyset$, тогда либо $B_1 \subset B_2$, либо $B_2 \subset B_1$.

(H3) Для любых $A, B \in \mathcal{H}$ выполняется $A \setminus B \in \mathcal{U}(\mathcal{H})$.

Мы говорим, что $\mathcal{H}$ — *иерархия* и $(X, \mathcal{H})$ — *иерархическое пространство.* Если $X \in \mathcal{H}$, то иерархия и иерархическое пространство называются *ограниченными.* Известны и другие определения иерархии множеств. Например, в *** не требуется выполнение (H1), а вместо (H3) используется следующее условие:

(H3′) Для любого $A \in \mathcal{H}$ выполняется соотношение: $\bigcup\limits_{B\in\mathcal{H}, B\subset A, B\neq A} B \in \{A, \emptyset\}$.

Это условие слабее. В самом деле, импликация (H3)⇒(H3′) очевидна. Положим $X = (0,\ 1)$, $\mathcal{H} = \{(0,\ t) | t \in (0,\ 1)\}$. Условие (H3′) выполняется, а условие (H3) – нет.

Пусть $(X, \mathcal{H})$ – иерархическое пространство. Нетрудно убедиться, что $\mathcal{U}(\mathcal{H})$ – топология; иерархия является базой этой топологии, причем каждое множество из иерархии является как открытым, так и замкнутым. Иерархическое пространство $(X, \mathcal{H})$ и иерархия $\mathcal{H}$ называются *хаусдорфовыми,* если для любых $x, y \in X$, $x \neq y$, существуют $A, B \in \mathcal{H}$ такие, что $A \bigcap B = \emptyset$, $x \in A$, $y \in B$. Если иерархическое пространство хаусдорфово, то и топология $\mathcal{U}(\mathcal{H})$ хаусдорфова.

Далее, если не оговорено противное, мы считаем рассматриваемые иерархические пространства хаусдорфовыми. Если способ задания иерархии ясен из контекста или не играет роли, символ $\mathcal{H}$ в обозначении иерархического пространства может опускаться.

Пусть $\Lambda$ – частично упорядоченное множество. Допустим, что $(X, \mathcal{H})$ — ограниченное иерархическое пространство и $\varphi\colon \mathcal{H} \to \Lambda$ — строго убывающее сюръективное отображение, т.е. $\varphi(\mathcal{H}) = \Lambda$ и для $A, B \in \mathcal{H}$ из $A \supset B$, $A \neq B$ следует $\varphi(A) < \varphi(B)$. Назовем $\varphi$ *функцией уровня*, а значение $\varphi(B)$ для произвольного $B \in \mathcal{H}$ – *уровнем* множества $B$. Обозначим $\mathcal{H}_\lambda = \varphi^{-1}(\lambda)$ и предположим, что для любого $\lambda \in \Lambda$ семейство $\mathcal{H}_\lambda$ образует разбиение $X$. Тогда мы говорим, что $(X, \mathcal{H}, \Lambda, \varphi)$ — *шкалированное* иерархическое пространство. В силу ограниченности иерархии $\varphi(X) = \theta$. Подобно сказанному выше, если в указании какого-либо из символов $\mathcal{H}$, $\Lambda$, $\varphi$ нет необходимости, то в обозначении шкалированного иерархического пространства он может опускаться. Для каждого $\lambda \in \Lambda$ назовем $\mathcal{H}_\lambda$ *слоем* или $\lambda$-слоем. Пусть $\Lambda = \mathbb{Z}^+$ с обычным отношением порядка. Будем говорить в этом случае, что $(X, \mathcal{H}, \varphi)$ — *дискретно шкалированное* иерархическое пространство.

Пусть $(X, \mathcal{H}, \Lambda)$ — шкалированное иерархическое пространство. Для произвольного $\lambda \in \Lambda$ зададим на $X$ отношение $\Re_\lambda$ следующим образом: $x \Re_\lambda y$, если $x$ и $y$ принадлежат одному и тому же множеству из $\mathcal{H}_\lambda$. Это отношение эквивалентности, поскольку $\mathcal{H}_\lambda$ – разбиение $X$. Оно является обобщением отношения (1.12), если $d$ в (1.12) – ультраметрика. Пусть $x \in X$, $\lambda \in \Lambda$. Тогда существует единственное множество из $\mathcal{H}_\lambda$, содержащее $x$. Будем называть это множество *шаром* с центром $x$ и радиусом $\lambda$ и обозначать $B(x, \lambda)$ или $B_\lambda(x)$. Основания для такой терминологии лежат в следующей связи между иерархическими и ультраметрическими пространствами. Легко убедиться, что все шары ультраметрического пространства, а также все открытые шары либо все замкнутые шары образуют иерархию, причем в каждом из двух последних случаев мы получаем шкалированное иерархическое пространство, если в качестве в качестве функции уровня взять любую строго убывающую функцию радиуса. Наоборот, если имеется дискретно шкалированное иерархическое пространство, то его можно превратить в ультраметрическое пространство, если выбрать некоторую убывающую функцию и расстояние между двумя различными точками определить как значение этой функции от максимального уровня $k$, для которого существует множество $A \in \mathcal{H}_k$, содержащее обе эти точки. Каждое множество из иерархии становится при этом как открытым шаром некоторого радиуса, так и замкнутым шаром большего радиуса, поскольку множество ненулевых значений полученного расстояния дискретно.

Далее мы используем символ $\sum$ для объединения непересекающихся множеств.

**Предложение 1.1.1** *Если $(X, \mathcal{H}, \Lambda, \varphi)$ — шкалированное иерархическое пространство, то для любого $A \in \mathcal{H}_\lambda$ и каждого $\mu \geqslant \lambda$ семейство множеств*

$$\mathcal{H}_{\mu,A} = \left\{ B \in \mathcal{H}_\mu \;\middle|\; B \bigcap A \neq \emptyset \right\} = \{ B \in \mathcal{H}_\mu \mid B \subset A \}$$

*является разбиением $A$. Представление $A = \sum\limits_{B \in \mathcal{H}_{\mu,A}} B$ является единственным представлением вида $A = \sum\limits_{B \in \mathcal{H}_\mu} B$.*

Теперь покажем, что при некоторых дополнительных условиях нехаусдорфовы шкалированные иерархические пространства допускают переход к хаусдорфовым пространствам путем факторизации. Пусть $(X, \mathcal{H}, \Lambda, \varphi)$ — шкалированное иерархическое пространство. Предположим, что $\Lambda$ направленно по возрастанию, т.е. для любых $\lambda, \mu \in \Lambda$ существует $\nu \in \Lambda$ такое, что $\lambda \leqslant \nu$, $\mu \leqslant \nu$. Рассмотрим следующее отношение $\Re$ на $X$: $x \Re y$, если не существует $A, B \in \mathcal{H}$ таких, что $x \in A, y \in B, A \bigcap B = \emptyset$.

**Теорема 1.1.2** *При сделанных предположениях $\Re$ — отношение эквивалентности на $X$.*

Доказательство. Допустим противное. Тогда существуют $x, z, y \in X$ такие, что $x \Re z$, $z \Re y$, $x \neg \Re y$ (символ $\neg$ означает отрицание). Из последнего соотношения следует, что для некоторых $\lambda, \mu \in \Lambda$ существуют непересекающиеся множества $A \in \mathcal{H}_\lambda$, $B \in \mathcal{H}_\mu$ такие, что

$x \in A, y \in B$. Существуют такое $\nu$, что $\lambda \leqslant \nu$, $\mu \leqslant \nu$, а в силу 1.1.1 – такие $A', B' \in \mathcal{H}_\nu$, что $x \in A' \subset A$, $y \in B' \subset B$. Тогда, если $C' \in \mathcal{H}_\nu$ таково, что $z \in C'$, то в силу свойств слоя $C' \cup A' = C' \cup B' = \emptyset$, что противоречит допущению. ■

С помощью стандартных рассуждений можно убедиться, что переход к фактор-множеству по отношению $\Re$ приводит к хаусдорфову дискретно шкалированному иерархическому пространству. В силу этого мы далее, если не оговорено противное, считаем рассматриваемые дискретно шкалированные иерархические пространства хаусдорфовыми.

Обозначим $\Gamma(B) = \sup\{k \,|B \in \mathcal{H}_k\}$ для любого $B \in \mathcal{H}$, и для $x \in X$ положим $D_k(x) = B \in \mathcal{H}_k$, где $x \in B$. В силу хаусдорофовости для любой последовательности множеств $B_0, B_1, \ldots$ такой, что $B_k \in \mathcal{H}_k\ \forall k$, пересечение $\bigcap\limits_{i=0}^{\infty} B_i$ содержит не более одного элемента.

Мы говорим, что дискретно шкалированное иерархическое пространство $(X, \mathcal{H})$ *компактно,* если выполняются следующие условия:

(C1) Каждое $\mathcal{H}_k$ конечно.

(C2) Если $B_0 \supset B_1 \supset \ldots \in \mathcal{H}$, то $\bigcap\limits_{i=0}^{\infty} B_i \neq \emptyset$.

Пусть $(X, \mathcal{H})$ — иерархическое пространство и $\varphi$ — вещественная функция, определенная на $\mathcal{H}$. Мы говорим, что $\varphi$ — *калибровочная функция,* если выполняются следующие аксиомы.

(GF1) $\varphi$ неотрицательна.

(GF2) $\varphi$ строго монотонна, т. е. $A \supset B,\ \ A \neq B$, влечет $\varphi(A) > \varphi(B)$.

(GF3) Для каждого $x \in X$ и $\varepsilon > 0$ существует $B \in \mathcal{H}$ такое, что $x \in B,\ \ \varphi(B) < \varepsilon$.

Предположим, что $(X, \mathcal{H})$ — хаусдорфово дискретно шкалированное иерархическое пространство. Введем обозначение:

$$D(x,y) = \{B \in \mathcal{H}_{\gamma(x,y)} \mid B \ni x, y\}.$$

Эта величина определяется корректно в силу свойства хаусдорфововости, (DS2) и (DS2). Далее, для любого $x, y \in X$ обозначим

$$\gamma(x,y) = \max\{k \mid \forall l \leqslant k\ \exists\ B_l \in \mathcal{H}_l :\ x, y \in B_l\},\ x, y \in X,$$

и для калибровочной функции $\varphi$ положим

$$d_\varphi(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{если } x = y, \\ \varphi(D(x,y)), & \text{если } x \neq y. \end{cases} \tag{1.1}$$

Предположим, что $\psi$ — строго положительная строго убывающая функция на $\mathbb{Z}^+$. Мы говорим, что $\psi$ — *функция длины.* Положим

$$d_\psi(x,y) = \begin{cases} 0, & x = y, \\ \psi(\Gamma(x,y)), & x \neq y. \end{cases}$$

Функция $d_\psi$ может быть представлена в виде (1.1) где $\varphi(B) = \psi(\Gamma(B)),\ \ B \in \mathcal{H}$. Говорят, что функция $b(k) = \frac{1}{k+1}$ — *бэровская* функция длины.

## 1.2 Ультраметрические и однородные иерархические пространства

Пусть $X$ — множество, $d : X \times X \to \mathbb{R}^+$ — функция, удовлетворяющая следующим условиям:

(UM1) $d(x,y) = d(y,x) \, \forall x, y \in X$.
(UM2) $d(x,y) = 0$тогда и только тогда, когда$x = y$.
(UM3) $d(x,y) \leqslant \max[d(x,z), d(z,y)] \, \forall x, y, z \in X$.

Будем говорить, что $(X, d)$ — *ультраметрическое* или *неархимедово метрическое* пространство, а функцию $d$ будем называть *ультраметрикой*, *неархимедовой метрикой* или *неархимедовым расстоянием*. Условие (UM3) называется *ультрамерическим неравенством*. Очевидно, что оно сильнее неравенства треугольника, фигурирующего в определении метрического пространства, так что всякое ультраметрическое пространство является метрическим. Так же, как и в теории метрических пространств общего вида, имеет смысл рассматривать ослабленный вариант условия (UM2): если $x = y$, то $d(x,y) = 0$, т.е. допускается выполнение равенства $d(x,y) = 0$ для $x \neq y$. Такие пространства мы будем называть *псевдоультраметрическими* или *неархимедовыми псевдометрическими*. Они порождают неотделимую (более точно, нехаусдорфову) топологию. Так же, как и в общем случае, перейти от псевдоультраметрики к ультраметрике и отделимой топологии можно с помощью перехода к фактор-пространству по отношению эквивалентности $d(x,y) = 0$. Легко доказываются следующие свойства ультраметрических пространств, которыми мы будем пользоваться.

**Теорема 1.2.1** *Если $d(x,y) \leqslant d(x,z)$, то $d(y,z) = d(x,z)$. Таким образом, все треугольники в ультраметрическом пространстве — равнобедренные, у которых основание не больше боковой стороны, т.е., в частности, равносторонние.*

**Теорема 1.2.2** *Два шара в ультраметрическом пространстве либо не пересекаются, либо один из них принадлежит другому. В частности, два замкнутых (либо два открытых) шара одинакового радиуса либо не пересекаются, либо совпадают.*

**Теорема 1.2.3** *Любая точка шара в ультраметрическом пространстве является его центром.*

**Теорема 1.2.4** *В ультраметрическом пространстве каждый шар (как открытый, так и замкнутый) является открытым и замкнутым множеством.*

Отсюда вытекает следующее утверждение.

**Теорема 1.2.5** *Для компактного ультраметрического пространство и для любого $r > 0$ существует и единственно конечное покрытие этого пространства непересекающимися открытыми (замкнутыми) шарами радиуса $r$.*

Пусть $(X, d)$ — неархимедово метрическое пространство и $Y \subset X$. Мы обозначим $D(Y, d) = \{d(x,y) \mid x, y \in Y, \, x \neq y\}$. Если понятно, о каком расстоянии идет речь, будем писать просто $D(Y)$.

**Теорема 1.2.6** *Предположим, что $(X, d)$ — компактное неархимедово метрическое пространство. Если $X$ конечно, то $D(X)$ также конечно. В противном случае $D(X) = \{r_1, r_2, \ldots\}$, где $r_k \downarrow 0$, или, другими словами, $0$ является единственной предельной точкой $D(X)$.*

**Замечание 1.2.1** *Понятно, что в этих обозначениях в бесконечном компактном ультраметрическом пространстве всякий открытый шар радиуса $r_k$ — это замкнутый шар радиуса $r_{k+1}$, а замкнутый шар радиуса $r_0$ — это все пространство $X$.*

Далее, говоря просто о шаре, мы имеем в виду замкнутый шар.

**Следствие 1.2.2** *Пусть $(X, d)$ — компактное ультраметрическое пространство, $D(X, d) = \{r_0, r_1, \ldots\}$, $r_i \downarrow 0$. Любой шар радиуса $r$ в $(X, d)$ совпадает с некоторым шаром радиуса $r_i \in D(X, d)$, где $i$ определяется из условия: $r_i = \max(r_j | r_j \leqslant r)$.*

Поскольку замкнутое подмножество компактного метрического пространства компактно, то из теоремы 1.2.5 следует

**Предложение 1.2.3** *Пусть $(X, d)$ — компактное ультраметрическое пространство, $r \geqslant s > 0$. Любой шар радиуса $r$ единственным образом разбивается на конечное число шаров радиуса $s$.*

Ультраметрическое пространство назовем *однородным*, если любые два шара одинакового радиуса изометричны. Очевидно

**Следствие 1.2.4** *Пусть $(X, d)$ — компактное однородное ультраметрическое пространство. Для любых $r \geqslant s > 0$ существует $m_X(r, s) \in \mathbb{N}$ такое, что каждый шар радиуса $r$ разбивается на $m_X(r, s)$ шаров радиуса $s$.*

Пусть $(X, d)$ — компактное ультраметрическое пространство. Для любого $r > 0$ число шаров радиуса $r$, на которые разбивается $X$, обозначим $n_X(r)$. Пусть $a_0 \geqslant a_1 \geqslant \ldots \geqslant a_i$. Если пространство $(X, d)$ однородно, то с использованием обозначений следствия 1.2.4

$$n_X(a_i) = n_X(a_0) \prod_{j=1}^{i} m_X(a_{j-1}, a_j). \tag{1.2}$$

Известно [**?**, **?**], что для сепарабельного неархимедова метрического пространства множество значений расстояния и множество всех шаров имеют, вообще говоря, различную мощность. Для бесконечных компактных неархимедовых метрических пространств, однако, это не так.

**Теорема 1.2.7** *Пусть $(X, d)$ — компактное неархимедово метрическое пространство. Тогда множество $\mathcal{B}$ всех шаров совпадает с множеством всех шаров с радиусами, принадлежащими $D(X)$. Если $X$ конечно, то $\mathcal{B}$ также конечно. В противном случае $\mathcal{B}$ счетно.*

Из 1.2.2 легко следует, что в ультраметрическом пространстве каждое из множеств: множество всех шаров, множество замкнутых шаров и множество открытых шаров образует иерархию. Каждый шар — как открытый, так и замкнутый — является как открытым, так и замкнутым множеством. Мы сохраним в последующем изложении обозначение $D(X) = \{r_1, r_2, \ldots\}$ для компактных ультраметрических пространств. В компактном ультраметрическом пространстве каждый открытый шар радиуса $r_i$ является замкнутым шаром радиуса $r_{i+1}$. Для любого $r > 0$ все замкнутые (а также все открытые) шары радиуса $r$ образуют конечное разбиение $X$. Компактное ультраметрическое пространство является дискретно шкалированным иерархическим пространством, где слой $\mathcal{H}_k$ образуется всеми замкнутыми (или всеми открытыми) шарами радиуса $r_k$. Оказывается, что в некотором смысле верно и обратное.

Пусть $(X, d)$ — метрическое пространство. Через $\mathcal{T}(d)$ обозначим топологию, индуцированную $d$ и для $x \in X$, $r > 0$ через $B[x, r]$ или $B_d[x, r]$ обозначим замкнутый шар с центром $x$ и радиусом $r$.

**Теорема 1.2.8** *Предположим, что $(X,\mathcal{H})$ — хаусдорфово дискретно шкалированное иерархическое пространство и $\varphi$ — калибровочная функция. Тогда*

*(i) $d_\varphi$ — ультраметрика на $X$.*

*(ii) Множество замкнутых шаров относительно этой ультраметрики есть $\mathcal{H}$ и $B_{d_\varphi}[x,r] = B_{d_\varphi}[x,\varphi(B[x,r])]$ для любого $x \in X, \;\; r > 0$.*

*(iii) $\mathcal{T}(d_\varphi) = \mathcal{U}(\mathcal{H})$.*

*(iv) Топологическое пространство $(X,\mathcal{U}(\mathcal{H}))$ и неархимедово метрическое пространство $(X, d_\varphi)$ компактны тогда и только тогда, когда $(X,\mathcal{H})$ компактно.*

Отсюда, в частности, вытекает следующее утверждение, которое, впрочем, легко доказать и непосредственно.

**Следствие 1.2.9** *Если $d$ — ультраметрика и $g$ — заданная на $[0, \;\infty)$ вещественная возрастающая функция, удовлетворяющая условию $g(0) = 0$, то $g \circ d$ — также ультраметрика. Если функция $g$ строго возрастающая, то ультраметрика $g \circ d$ задает ту же топологию, что и исходная.*

Компактное дискретно шкалированное иерархическое пространство назовем *однородным*, если существует такая последовательность натуральных чисел $m_1, m_2, \ldots$, что каждое множество из слоя $\mathcal{H}_{k-1}$ разбивается на $n_k$ множеств из $\mathcal{H}_k$, и $m$-однородным, если $m_1 = m_2 = \ldots = m$. Ультраметрическое пространство называется *однородным*, если все его замкнутые (или, что равносильно, все открытые) шары одинакового радиуса изометричны друг другу (в [**?**, **?**] такие пространства назывались *сферически однородными*).

**Теорема 1.2.10** *Компактное ультраметрическое пространство является компактным однородным дискретно шкалированным иерархическим пространством относительно иерархии, образованной шарами. Наоборот, на всяком однородном дискретно шкалированном иерархическом пространстве можно задать ультраметрику, относительно которой оно является однородным ультраметрическим пространством, причем эта ультраметрика задает ту же топологию, что и иерархия. В частности, если компактное ультраметрическое пространство однородно как иерархическое пространство, то найдется ультраметрика, относительно которой оно однородно как ультраметрическое пространство, и задающая ту же топологию, что и исходная ультраметрика.*

С учетом этой теоремы множество из $\mathcal{H}_k$ в дискретно шкалированном иерархическом пространстве будем называть шаром $k$-го уровня.

Во многих вопросах теории и приложений компактных ультраметрических пространств роль играет только иерархическая структура, но не значения расстояния.

Построим нумерацию шаров компактного дискретно шкалированного иерархического пространства, которая будет использоваться в дальнейшем. Шар нулевого уровня, т.е. все пространство $X$, обозначим $B^0$. Шары первого уровня обозначим $B^1_0, ..., B^1_{m_1-1}$. Таким образом, $m_1$ — число шаров первого уровня. Пусть $B^1_{j_1}$ — некоторый шар первого уровня, $j_1 \in \{0, \ldots, m_1 - 1\}$. Число содержащихся в нем шаров второго уровня обозначим $m_2(j_1)$. Занумеруем их, начиная с нуля: $B^2_{j_1;0}, \ldots, B^2_{j_1;m_2(j_1)-1}$. Шары третьего уровня в этой нумерации будут обозначены

$$B^3_{j_1,j_2;0}, \ldots, B^3_{j_1,j_2;m_3(j_1,j_2)-1}, \; j_1 \in \{0, \ldots, m_1 - 1\}, j_2 \in \{0, \ldots, m_2(j_1) - 1\},$$

а произвольного $k$-го уровня при $k > 2$ —

$$B^k_{j_1,\ldots,j_{k-1};0}, \ldots, B^k_{j_1,\ldots,j_{k-1};m_k(j_1,\ldots,j_{k-1})-1},$$

$$j_1 \in \{0, \ldots, m_1 - 1\}, \ldots, j_{k-1} \in \{0, \ldots, m_{k-1}(j_1, \ldots, j_{k-2}) - 1\}; \tag{1.3}$$

для $k = 1, 2$ в этой общей формуле нужно сделать очевидные упрощения.

Рассмотрим последовательность вложенных шаров, принадлежащих слоям $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2, \ldots$, т.е. последовательность вида

$$B^1_{j_1}, B^2_{j_1;j_2}, B^3_{j_1,j_2;j_3}, \ldots\ B^k_{j_1,\ldots,j_{k-1};j_k}, \ldots\ . \tag{1.4}$$

В силу компактности существует единственный элемент $x \in X$, принадлежащий всем этим шарам. С другой стороны, для любого $x \in X$ существует единственная последовательность шаров вида такая, что $x$ принадлежит всем шарам этой последовательности. Таким образом, между последовательностями шаров, построенными по правилу 1.2, и элементами $X$ существует взаимно однозначное соответствие. С другой стороны, существует такое же соответствие между последовательностями шаров вида 1.2 и последовательностями неотрицательных целых чисел

$$(j_1, j_2, \ldots, j_k, \ldots), \tag{1.5}$$

удовлетворяющих условию

$$j_1 \in \{0, \ldots, m_1 - 1\}, j_2 \in \{0, \ldots, m_2(j_1) - 1\}, \ldots, j_k \in \{0, \ldots, m_k(j_1, \ldots, j_{k-1}) - 1\}, \ldots . \tag{1.6}$$

Таким образом, существует взаимно однозначное соответствие между точками пространства $X$ и последовательностями (1.5) — (1.6). Последовательность (1.5) мы будем иногда записывать в виде

$$j_1 j_2 \ldots j_k \ldots, \tag{1.7}$$

т.е. в виде некоторого формального целого числа, и писать

$$x \doteq (j_1, j_2, \ldots, j_k, \ldots) \tag{1.8}$$

либо

$$x \doteq j_1 j_2 \ldots j_k \ldots .$$

Выражение (1.7) в случае однородного пространства действительно можно трактовать как некоторое число [?].

## 1.3 Иерархические пространства, грубые множества и математическая морфология

### 1.3.1 Введение

Теория грубых множеств используется в анализе данных, машинном обучении, исследовании сложных систем и т.д. Математическая морфология возникла как математический аппарат для машинного анализа и преобразования изображений. Далее излагается, с одной стороны, некоторый единый подход к основным понятиям теории грубых множеств и математической морфологии с топологической точки зрения и, в частности, с точки зрения неархимедова анализа. С другой стороны, рассматриваются конструкции грубых множеств и математической морфологии в обобщенных неархимедовых, а именно иерархических, пространствах.

### 1.3.2 Грубые множества

Рассмотрим некоторые общие конструкции. Пусть $X$ – множество и $\mathfrak{R}$ – отношение эквивалентности на $X$. Для произвольного $x \in X$ обозначим

$$\mathfrak{R}(x) = \{y \,|\, x\mathfrak{R}y\}.$$

Для произвольного $A \subset X$ положим

$$\mathfrak{R}_*(A) = \bigcup_{x\in A,\, \mathfrak{R}(x)\subset A} \mathfrak{R}(x), \tag{1.9}$$

$$\mathfrak{R}^*(A) = \bigcup_{x\in A,\, \mathfrak{R}(x)\cap A\neq\emptyset} \mathfrak{R}(x), \tag{1.10}$$

$$\partial^*_{\mathfrak{R}}(A) = \mathfrak{R}^*(A) \setminus \mathfrak{R}_*(A),$$

Очевидно,

$$\mathfrak{R}_*(A) \subset A \subset \mathfrak{R}^*(A). \tag{1.11}$$

Введенные понятия используются в теории грубых множеств в основном в следующем частном случае. Пусть $U$ – множество функций, где каждая функция $u \in U$ определена на $X$ и принимает значения в некотором множестве $R\,(u)$. Для любого подмножества $V \subset U$ введем отношение $\mathfrak{R}_V$ следующим образом:

$$x\mathfrak{R}_V y \Leftrightarrow u(x) = u(y)\ \forall u \in V.$$

Очевидно, это отношение эквивалентности.

Далее, скажем, что $\mathfrak{R}_*(A)$, $\mathfrak{R}^*(A)$ и $\partial_{\mathfrak{R}}(A)$ – соответственно $\mathfrak{R}$-*нижняя аппроксимация*, $\mathfrak{R}$-*верхняя аппроксимация* и $\mathfrak{R}$-*граница* $A$. Если $\partial^*_{\mathfrak{R}}(A) = \emptyset$, т.е. $\mathfrak{R}_*(A) = \mathfrak{R}^*(A) = A$, говорят, что $A$ – $\mathfrak{R}$-*точное* множество. В противном случае $A$ называется $\mathfrak{R}$-*грубым* ($\mathfrak{R}$-*неточным*). Если понятно, о каком отношении идет речь, то префикс $\mathfrak{R}$ в этих терминах может быть опущен.

### 1.3.3 Математическая морфология

В математической морфологии рассматривается следующее отношение. Пусть $X$ – векторное пространство над полем $\mathbb{K}$, $A, C \subset X$, и $C$ – центрально-симметричное множество относительно нуля. Определим следующее отношение $\mathfrak{R}_C$ на $X$:

$$x\mathfrak{R}_C y \Leftrightarrow x - y \in C.$$

Определим, далее,

$$A \ominus C = (\mathfrak{R}_C)_*(A),$$

$$A \oplus C = (\mathfrak{R}_C)^*(A).$$

Говорят, что $A \ominus C$ – *эрозия* множества $A$ множеством $C$, а $A \oplus C$ – *расширение* множества $A$ множеством $C$.

Пусть $\mathbb{K}$ – нормированное поле и $X$ – векторное нормированное пространство над $\mathbb{K}$. Пусть также $d$ – расстояние на $X$, порожденное нормой, $r > 0$ и $C$ – открытый шар в $X$ с центром в нуле и радиусом $r$: $C = B(0, r)$. Тогда

$$x - y \in C \Leftrightarrow d(x, y) < r.$$

Следовательно,
$$x\mathfrak{R}_{B(0,r)}y \Leftrightarrow d(x,y) < r,$$
и мы можем распространить приведенные определения на произвольное метрическое пространство $(X,d)$, полагая
$$x\mathfrak{R}_r y \Leftrightarrow d(x,y) < r, \tag{1.12}$$
$$A \ominus C = (\mathfrak{R}_r)_*(A),$$
$$A \oplus C = (\mathfrak{R}_r)^*(A).$$

### 1.3.4 Иерархические пространства

### 1.3.5 Аппроксимации в иерархических пространствах

Пусть $X$ – множество и $\mathcal{T}$ – топология на $X$. Для произвольного множества $A \subset X$ обозначим через $A^-_{\mathcal{T}}$, $A^0_{\mathcal{T}}$ и $\partial_{\mathcal{T}}(A)$ соответственно замыкание, внутренность и границу $A$ относительно $\mathcal{T}$. Пусть $(X, \mathcal{H}, \Lambda, \varphi)$ — шкалированное иерархическое пространство и $\lambda \in \Lambda$. Рассмотрим топологию $\mathcal{T}_\lambda$, определяемую фундаментальной системой окрестностей в каждой точке, где для каждой точки $x \in X$ эта система состоит из одного множества $B(x,\lambda)$. Ясно, что топология $\mathcal{T}_\lambda$ не хаусдорфова.

**Предложение 1.3.1** *Для любого $A \subset X$*
$$(\mathfrak{R}_\lambda)_*(A) = A^0_{\mathcal{T}_r},$$
$$(\mathfrak{R}_\lambda)^*(A) = A^-_{\mathcal{T}_r},$$
$$\partial^*_{\mathfrak{R}_\lambda}(A) = \partial_{\mathcal{T}_r}(A).$$

**Теорема 1.3.2** *Пусть $(X,d)$ – ультраметрическое пространство. Множество $A \subset X$ является $\mathfrak{R}_\lambda$-точным тогда и только тогда, когда $A$ является объединением семейства непересекающихся шаров радиуса $r$.*