



SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

Dipartimento di MATEMATICA GUIDO CASTELNUOVO

Direct-Simulation Monte Carlo Report

Autori

Alice FATIGHENTI
Umberto GALLO

Nome del corso

Computational Mathematics

1 Problema di ricostruzione

L'obiettivo di questo primo esercizio è ricostruire la densità di probabilità della normale standard $f(x) \sim \mathcal{N}(0, 1)$ a partire dai random samples X_k . L'idea per farlo è quella di usare il teorema di Glivenko-Cantelli e approssimare $f(x)$ con la distribuzione empirica:

$$f_N(x) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \delta(x - X_k) \quad (1)$$

Per poter implementare tale distribuzione è necessario innanzitutto fissare un dominio computazionale $[a, b]$ e introdurre una discretizzazione spaziale di ampiezza Δx e successivamente approssimare la delta di Dirac tramite funzioni kernel $\varphi_{\Delta x}$.

In particolare, nelle nostre simulazioni, abbiamo considerato come dominio computazionale l'intervallo $[-4, 4]$ e utilizzato tre funzioni kernel distinte:

1. Characteristic:

$$\varphi_{\Delta x}(x) = \begin{cases} 1/\Delta x & |x| \leq \Delta x/2 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

2. Smooth:

$$\varphi_{\Delta x}(x) = \frac{1}{\Delta x} B_2 \left(\frac{x}{\Delta x} \right) \quad B_2(x) = \begin{cases} 3/4 - |x|^2 & |x| \leq 0.5 \\ ((|x| - 3/2)^2)/2 & 0.5 < |x| \leq 1.5 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

3. Poly6:

$$\varphi_{\Delta x}(x) = \begin{cases} c(\Delta x^2 - |x|^2)^3 & |x| \leq \Delta x/2 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

con c costante di normalizzazione.

I test che abbiamo effettuato sono:

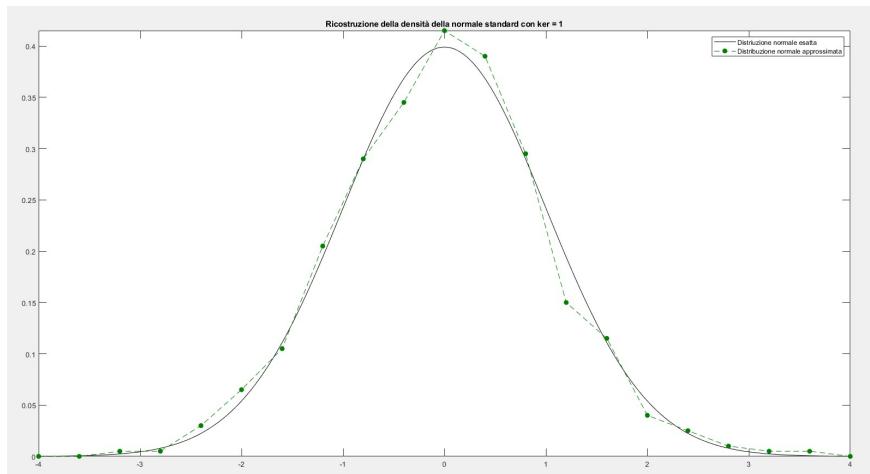
Test 1: in questo primo test abbiamo confrontato le approssimazioni ottenute con i tre kernel precedentemente definiti, a parità dei parametri.

Test 2: in questo test abbiamo analizzato come cambia l'approssimazione ottenuta fissando il passo di discretizzazione Δx e variando il numero di random samples. In particolare quello che si può mettere in evidenza è che la ricostruzione migliora al crescere di N .

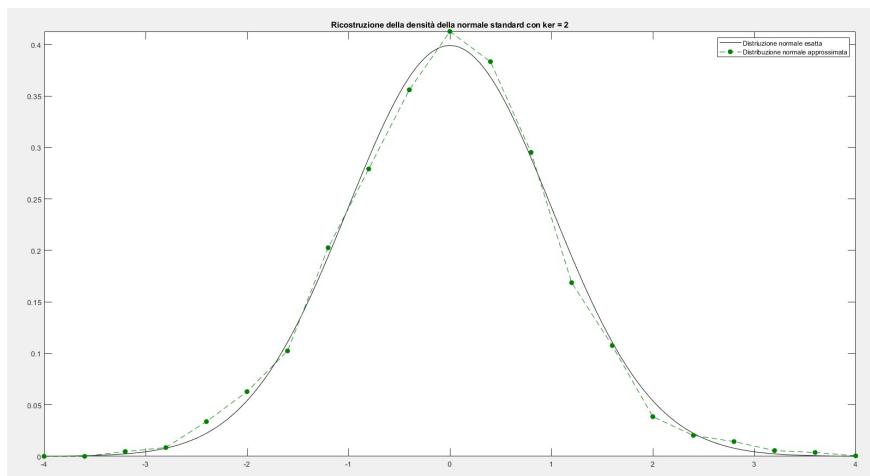
Test 3: in questo ultimo test abbiamo analizzato come cambia l'approssimazione ottenuta fissando il numero di random samples e facendo variare il passo di discretizzazione Δx . Quello che si può notare è che, riducendo Δx , si ha un aumento delle fluttuazioni.

Riportiamo di seguito i risultati ottenuti nelle varie simulazioni.

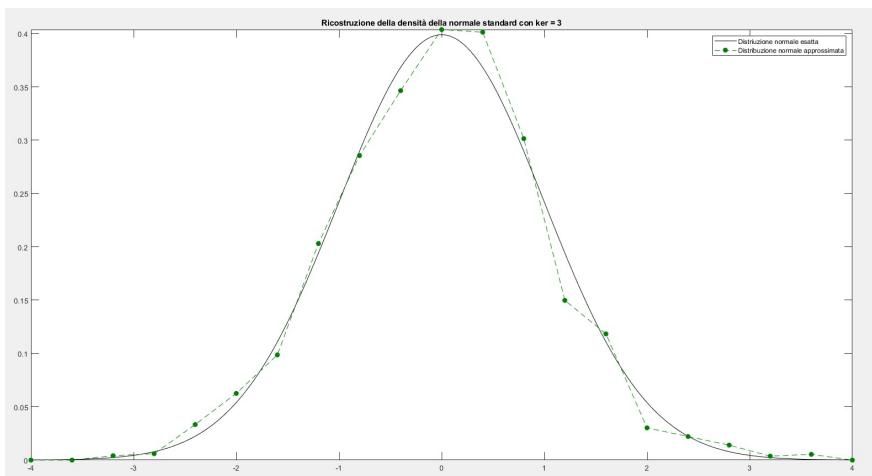
Test 1



(a) Ricostruzione della normale standard con *Characteristic*



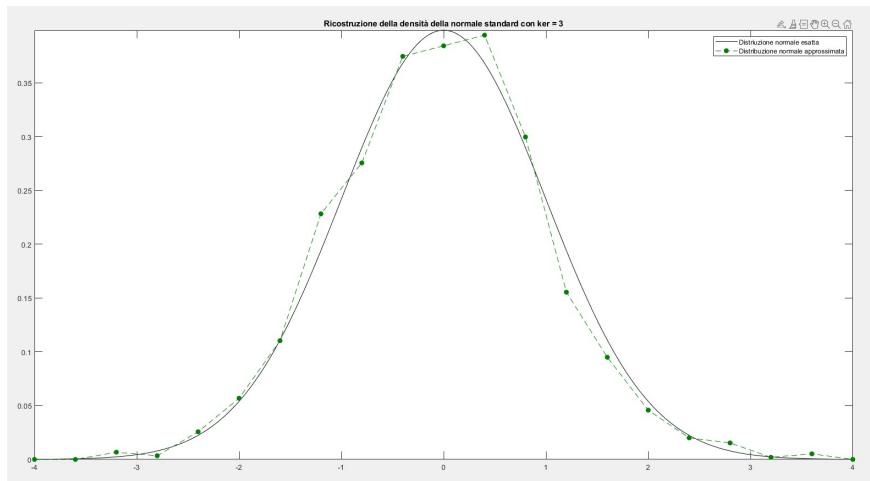
(b) Ricostruzione della normale standard con *Smooth*



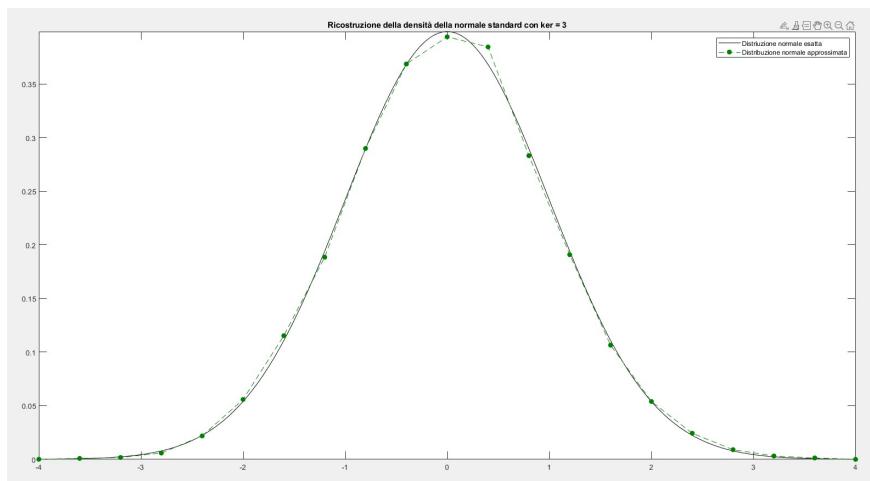
(c) Ricostruzione della normale standard con *Poly6*

Figure 1: Simulazione ottenuta con: $N=500$, $dx = 0.4$, $a = -4$, $b = 4$

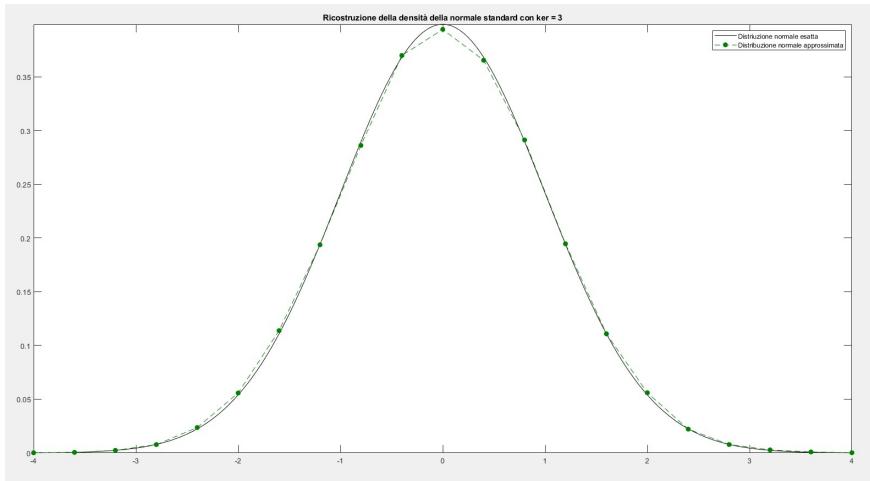
Test 2



(a) $N=1000$



(b) $N=10000$



(c) $N=100000$

Figure 2: Simulazione ottenuta con: Ker=*Poly6*, $dx = 0.4$, $a = -4$, $b = 4$

Test 3

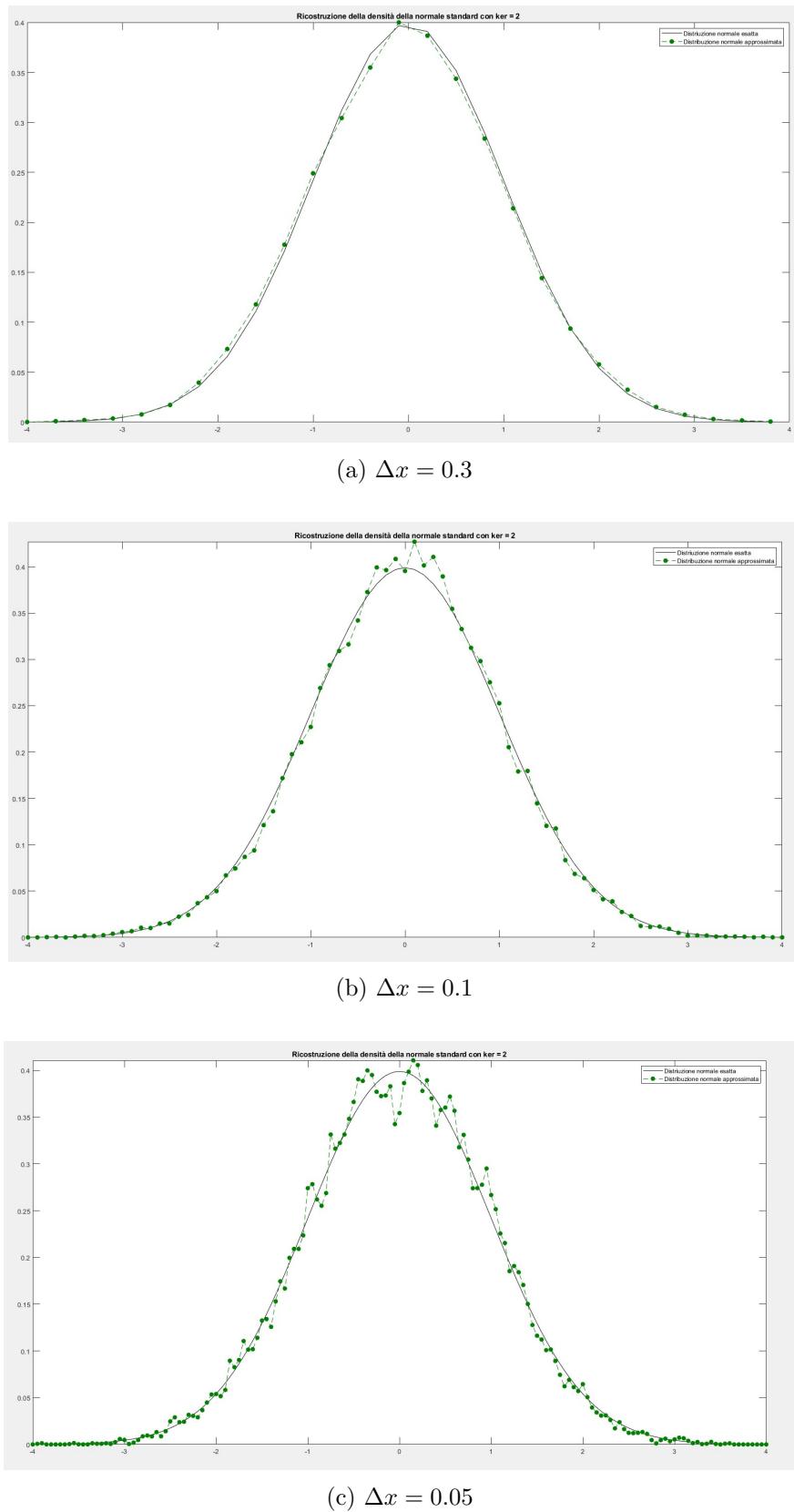
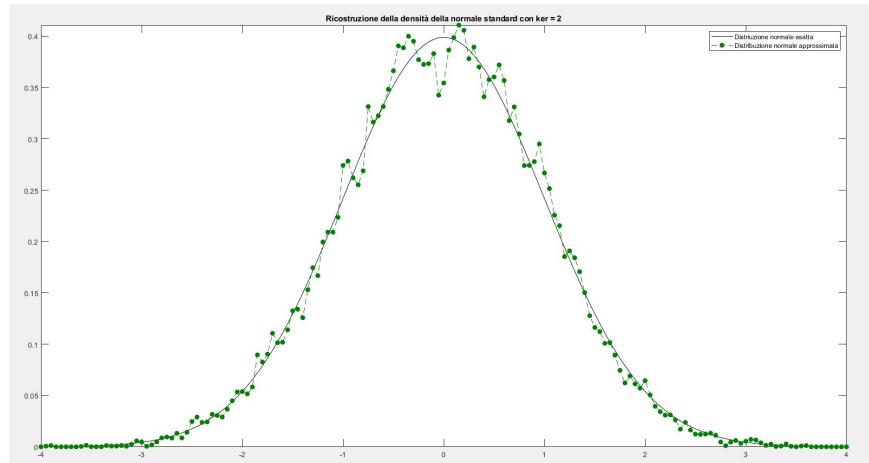
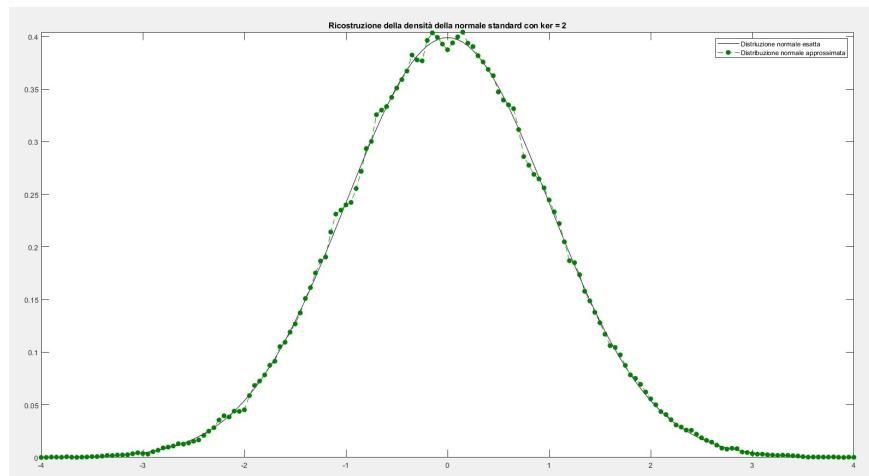


Figure 3: Simulazione ottenuta con: $N=10000$, Ker=*Smooth*, $a = -4$, $b = 4$

Osservazione: notiamo che l'approssimazione della densità di probabilità della normale ottenuta con un passo di discretizzazione Δx molto piccolo e $N = 10000$, non è ottimale. Questo mette in evidenza che la scelta di Δx deve essere fatta considerando anche il numero di random samples. Se infatti prendiamo un valore molto piccolo di Δx , è necessario aumentare considerevolmente il numero di samples per migliorare l'approssimazione ottenuta, come risulta evidente dai grafici qui sotto riportati:



(a) $\Delta x = 0.05$ e $N = 10000$



(b) $\Delta x = 0.05$ e $N = 100000$

2 Tecnica doubling/removing

In questo esercizio l'obiettivo è risolvere la seguente ODE

$$\partial_t u(x, t) = Cu(x, t) \quad (2)$$

con condizione iniziale $u(x, 0) = u_0(x)$ e con $C \in \mathbb{R}$ costante, usando Direct Simulation Monte Carlo (DSMC) e la tecnica *doubling/removing*.

In particolare abbiamo considerato tre densità di probabilità iniziali $u_0(x)$:

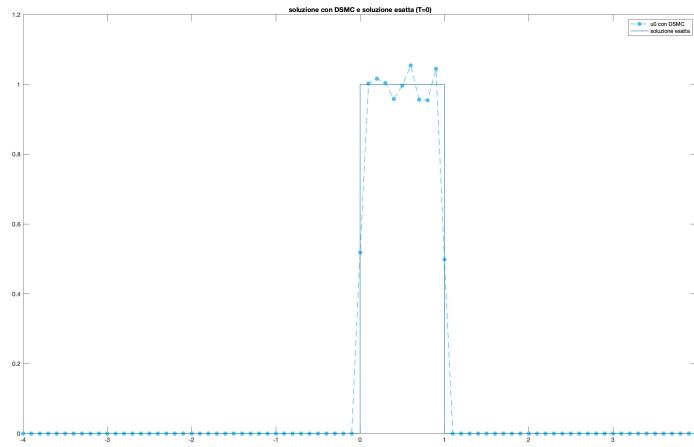
1. $u_0(x) \sim \mathcal{U}(0, 1)$
2. $u_0(x) \sim \mathcal{N}(0, 1)$
3. $u_0(x) \sim \mathcal{P}(0, 1, 2, 10)$, dove $\mathcal{P}(\mu, \sigma, s, k)$ denota la distribuzione di Pearson

La procedura usata in ogni simulazione per approssimare la soluzione della ODE ad un certo tempo finale T , è stata: generare N random samples distribuiti secondo $u_0(x)$, evolverli secondo la tecnica del doubling/removing e infine ricostruire la soluzione con la funzione di ricostruzione implementata nell'esercizio 1.

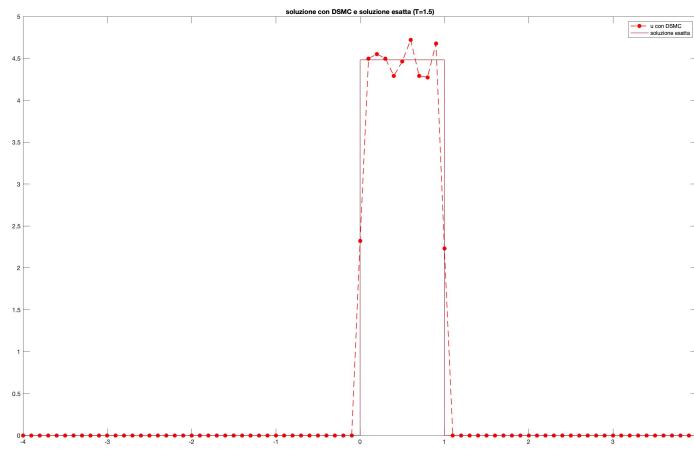
Conoscendo in questo caso l'espressione esplicita della soluzione della nostra ODE $u(x, t) = u_0(x)e^{Ct}$, abbiamo potuto confrontarla con quella ottenuta tramite il metodo Direct Simulation Monte Carlo e verificare l'accuratezza dell'approssimazione ottenuta. In particolare, questo confronto ci ha permesso di osservare che la soluzione numerica al tempo finale, affinché risultasse una buona approssimazione di quella esatta, doveva essere moltiplicata per un fattore correttivo pari a e^{CT} , corrispondente alla massa di $u(x, T)$.

Riportiamo nelle pagine seguenti i risultati ottenuti nelle tre simulazioni effettuate.

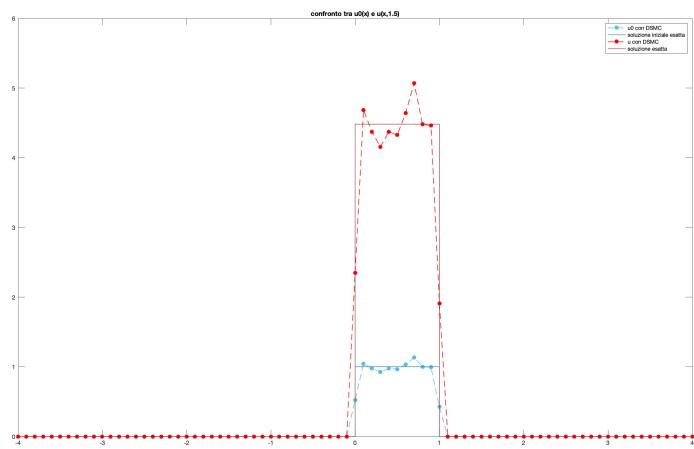
Test 1: distribuzione uniforme



(a) Soluzione iniziale esatta (linea continua) e approssimata (a punti)



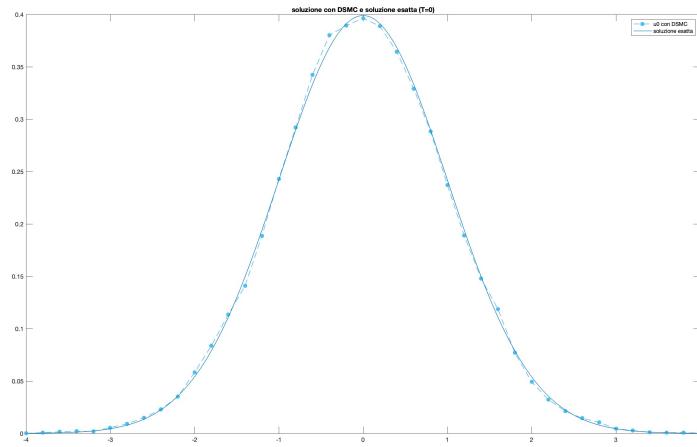
(b) Soluzione finale esatta (linea continua) e approssimata (a punti)



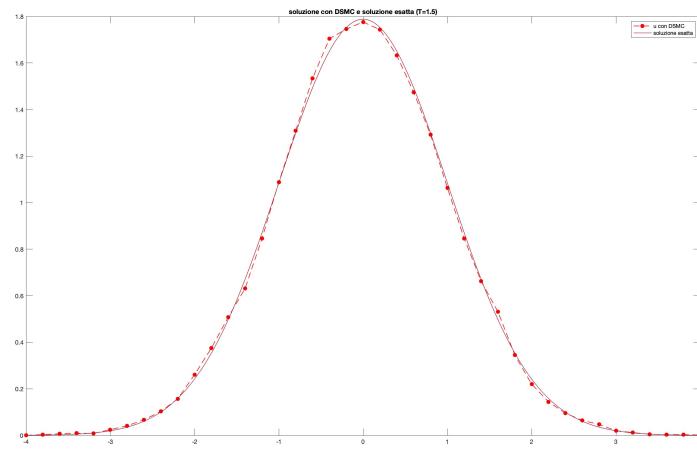
(c) Confronto tra le soluzioni iniziale e finale

Figure 5: Simulazione ottenuta con: $N=5000$, $dx = 0.1$, $T = 1.5$, $C = 1$, kernel: *Characteristic*

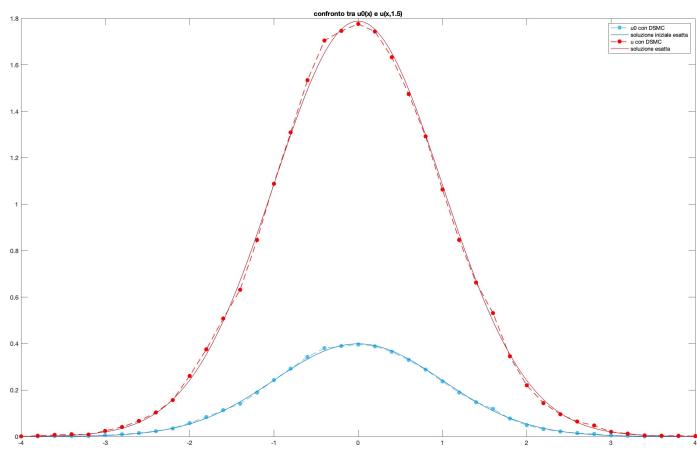
Test 2: distribuzione normale standard



(a) Soluzione iniziale esatta (linea continua) e approssimata (a punti)



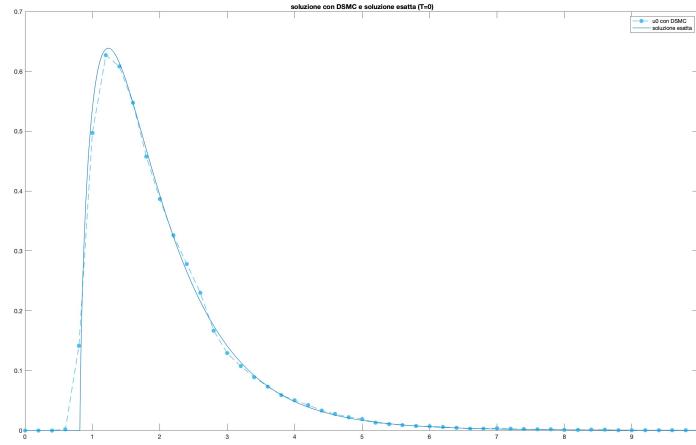
(b) Soluzione finale esatta (linea continua) e approssimata (a punti)



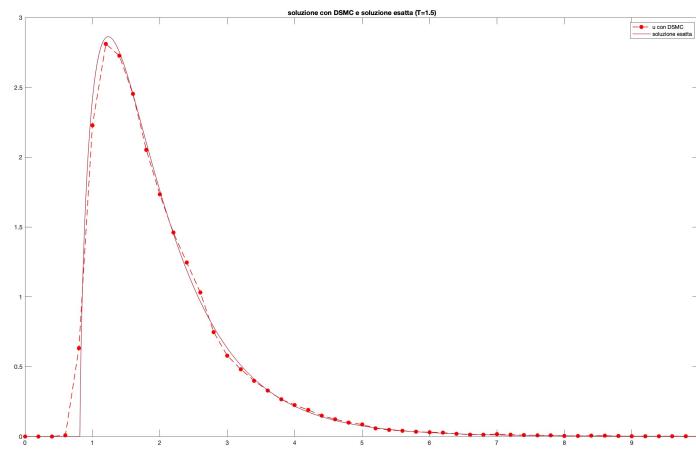
(c) Confronto tra le soluzioni iniziale e finale

Figure 6: Simulazione ottenuta con: $N=15000$, $dx = 0.2$, $T = 1.5$, $C = 1$, kernel: *Smooth*

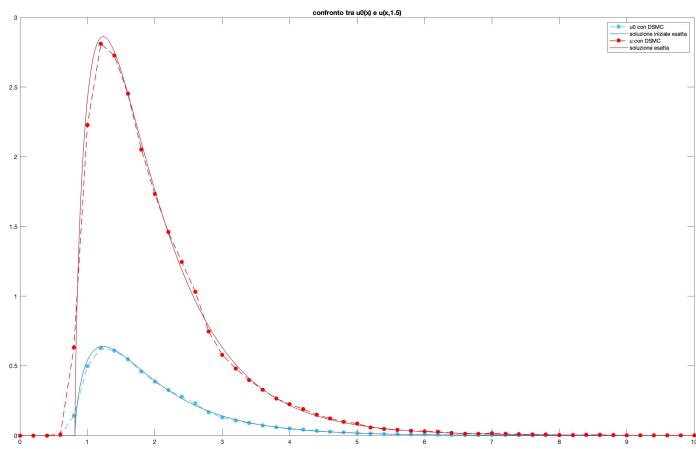
Test 3: distribuzione di Pearson $\mathcal{P}(0, 1, 2, 10)$



(a) Soluzione iniziale esatta (linea continua) e approssimata (a punti)



(b) Soluzione finale esatta (linea continua) e approssimata (a punti)



(c) Confronto tra le soluzioni iniziale e finale

Figure 7: Simulazione ottenuta con: $N=15000$, $dx = 0.2$, $T = 1.5$, $C = 1$, kernel: *Smooth*

3 Modello di Goldstein-Taylor

In questo esercizio vogliamo risolvere il modello cinetico di Goldstein-Taylor

$$\begin{cases} \partial_t f^+(x, t) + c \partial_x f^+(x, t) = \sigma(f^-(x, t) - f^+(x, t)) \\ \partial_t f^-(x, t) - c \partial_x f^-(x, t) = \sigma(f^+(x, t) - f^-(x, t)) \end{cases}$$

usando il metodo Direct Simulation Monte Carlo. In particolare la densità di probabilità totale delle particelle è $\rho(x, t) = f^+(x, t) + f^-(x, t)$, mentre le velocità possono assumere solo valori $\pm c$.

L'algoritmo DSMC usato per approssimare la soluzione del modello di Goldstein-Taylor, segue la stessa idea dell'esercizio precedente, ma in questo caso ogni particella ha due stati microscopici (X_i^0, V_i^0) . In particolare, $V_i^0 \in \{\pm c\}$ e $X_i^0 \sim f_0^+(x)$ oppure $X_i^0 \sim f_0^-(x)$.

L'obiettivo della nostra analisi è stato studiare lo stato stazionario del modello e confrontarlo con quello atteso $f^+(x, \infty) = \frac{1}{2}$ e $f^-(x, \infty) = \frac{1}{2}$ (ovvero metà delle particelle si muovono con velocità $+c$ e l'altra metà con velocità $-c$). In particolare abbiamo analizzato il raggiungimento dello stato di equilibrio sia per tempi lunghi, che per alti valori di σ .

Test 1: in questo primo test abbiamo considerato il caso $f_0^+(x) = f_0^-(x)$ e abbiamo verificato che l'algoritmo riproducesse lo stato stazionario atteso. In particolare come si può notare in Figura 8, lo stato stazionario è raggiunto anche per un tempo di osservazione piccolo $T = 0.38$, infatti, la distribuzione iniziale, rappresenta già lo stato stazionario.

Abbiamo successivamente ripetuto lo stesso test considerando un tempo finale molto più grande $T = 50$ e quello che abbiamo osservato è che le distribuzioni di velocità restano invariate (Figura 9), mentre la distribuzione spaziale delle particelle si propaga indefinitamente fino ad occupare tutta la retta reale, dato che quest'ultime si muovono di moto rettilineo uniforme con velocità $\pm c$.

Test 2: in questa seconda simulazione abbiamo considerato il caso in cui $f_0^+(x) \neq f_0^-(x)$. In particolare abbiamo supposto che le particelle al tempo iniziale fossero distribuite tutte con velocità $+c$ e abbiamo analizzato il transiente all'equilibrio al variare dei parametri del modello. Quello che abbiamo potuto osservare è stato che:

1. considerando il tempo finale del primo test ($T = 0.38$), lo stato stazionario non è raggiunto (Figura 11);
2. fissando σ (tasso di interazione tra le particelle) e aumentando il tempo finale a $T = 3$, lo stato stazionario viene raggiunto (Figura 12);
3. considerando nuovamente $T = 0.38$ e aumentando questa volta il tasso di interazione $\sigma = 6$, il modello raggiunge lo stato stazionario (Figura 13) e questo è in linea con quello che ci aspettiamo dalla teoria, in quanto aumentando il valore del parametro σ , aumenta il numero di interazioni tra particelle e quindi è necessario un tempo minore per raggiungere l'equilibrio.

Test 3: in questa ultima simulazione abbiamo confrontato l'approssimazione della densità $\rho(x, t) = f^+(x, t) + f^-(x, t)$ fornita dal metodo Direct Simulation Monte Carlo, con quella deterministica fornita da uno schema ai volumi finiti adattato al modello di Goldstein-Taylor. In particolare, poiché il modello è dato dall'azione congiunta di trasporto lineare e rilassamento, possiamo pensare di determinare la soluzione tramite operator splitting. In particolare l'algoritmo usato consiste

nell'applicare uno schema upwind centrato per l'approssimazione del termine di trasporto e, a ciascun passo temporale, nell'integrare in forma esplicita il termine di rilassamento, assumendo come condizione iniziale la soluzione fornita dalla fase di trasporto.

Come si può osservare dalla figura (14c), l'approssimazione fornita dagli schemi ai volumi finiti, si discosta da quella fornita dal metodo Direct Simulation Monte Carlo all'aumentare del tempo, come conseguenza della propagazione dell'errore del metodo deterministico.

Riportiamo nelle prossime pagine i risultati ottenuti nelle varie simulazioni.

Test 1

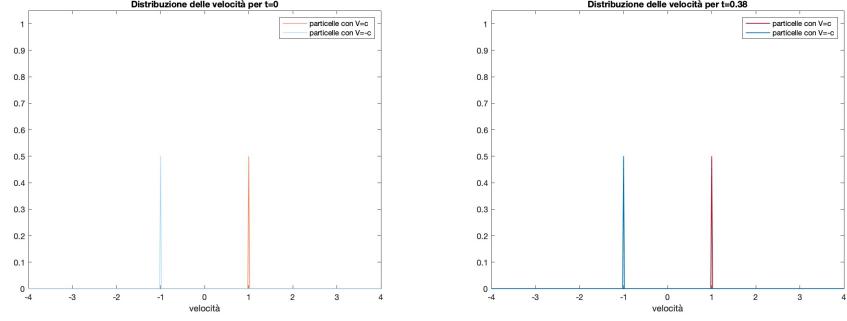


Figure 8: simulazione per $p = 0.5$ ottenuta con: $N = 150000$, $c = 1$, $\sigma = 1$, $T = 0.38$, $dx = 0.002$,
 $ker = Characteristic$

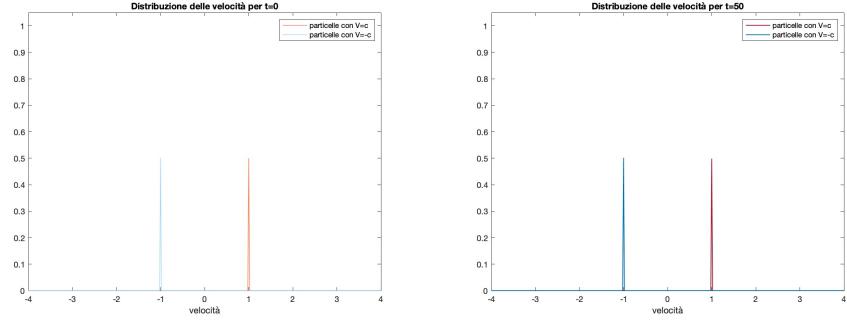


Figure 9: simulazione per $p = 0.5$ ottenuta con: $N = 150000$, $c = 1$, $\sigma = 1$, $T = 50$, $dx = 0.002$,
 $ker = Characteristic$

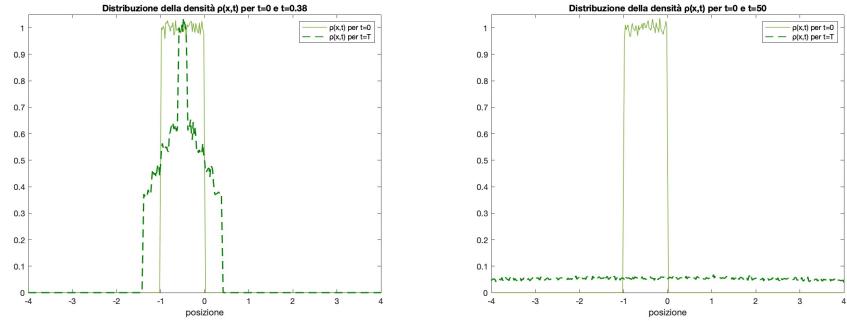


Figure 10: simulazione per $p = 0.5$ ottenuta con: $N = 150000$, $c = 1$, $\sigma = 1$, $T = 0.38$ (sx) e
 $T = 50$ (dx), $dx = 0.002$, $ker = Characteristic$

Test 2

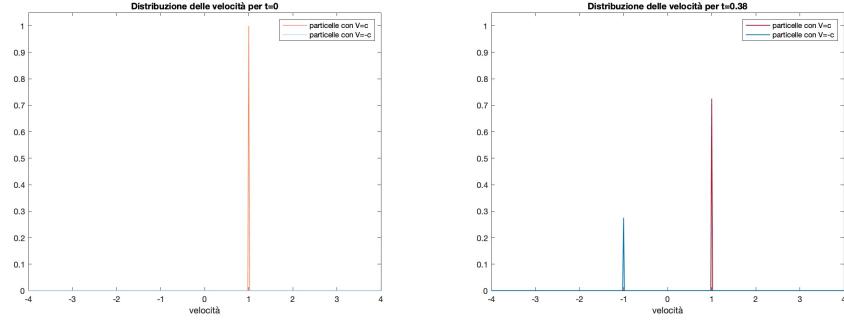


Figure 11: simulazione per $p = 1$ ottenuta con: $N = 150000$, $c = 1$, $\sigma = 1$, $T = 0.38$, $dx = 0.002$,
 $ker = Characteristic$

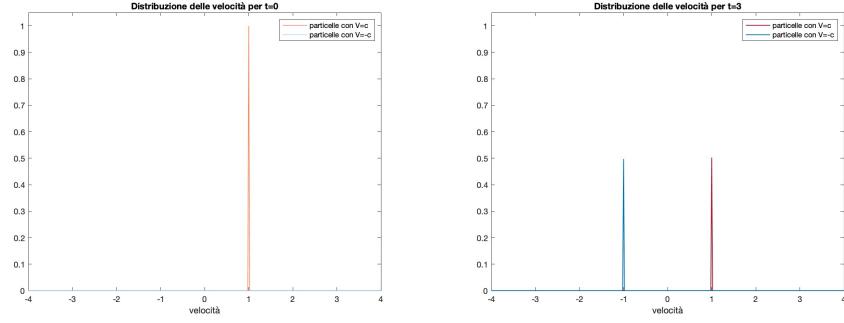


Figure 12: simulazione per $p = 1$ ottenuta con: $N = 150000$, $c = 1$, $\sigma = 1$, $T = 3$, $dx = 0.002$,
 $ker = Characteristic$

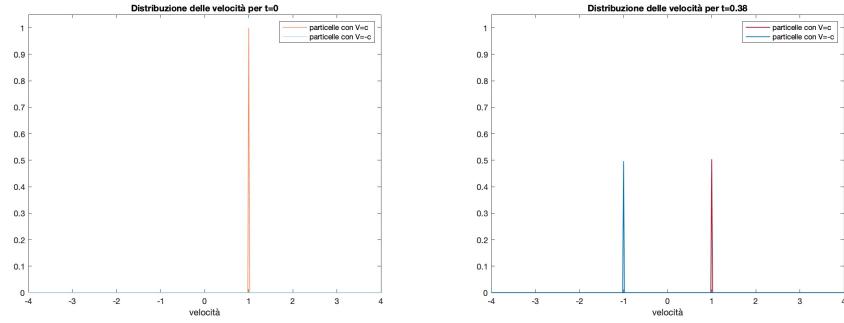
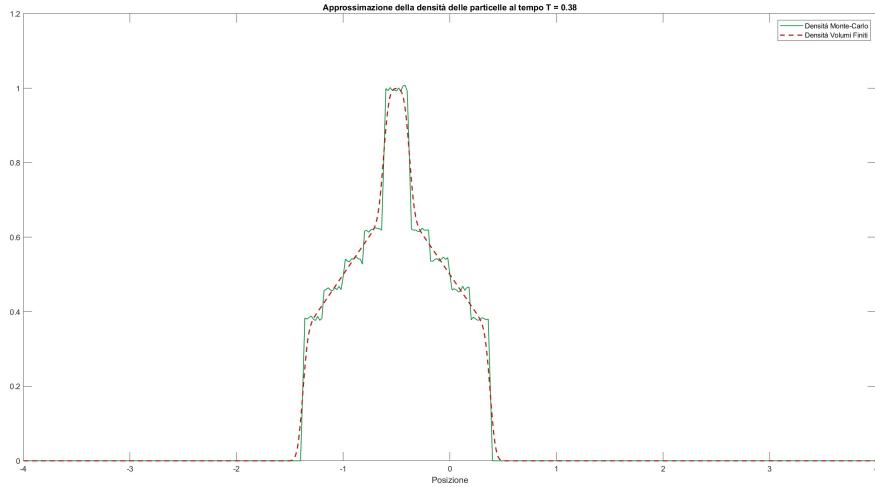
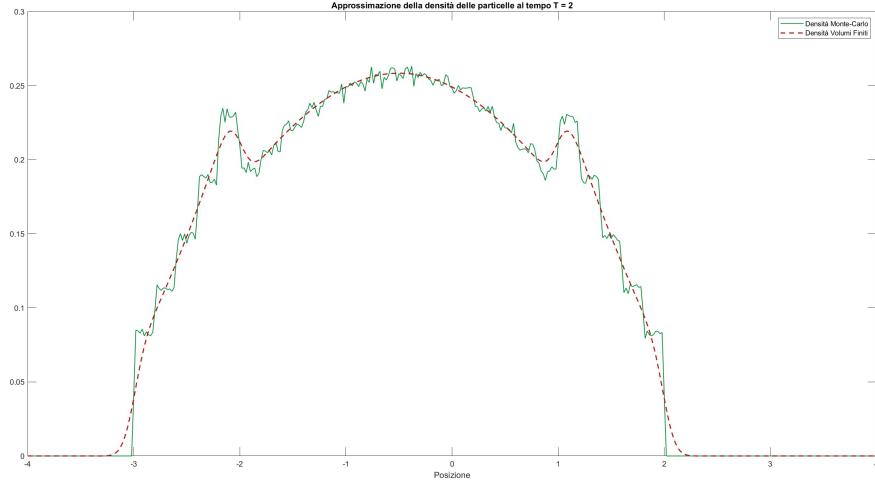


Figure 13: simulazione per $p = 1$ ottenuta con: $N = 150000$, $c = 1$, $\sigma = 6$, $T = 0.38$, $dx = 0.002$,
 $ker = Characteristic$

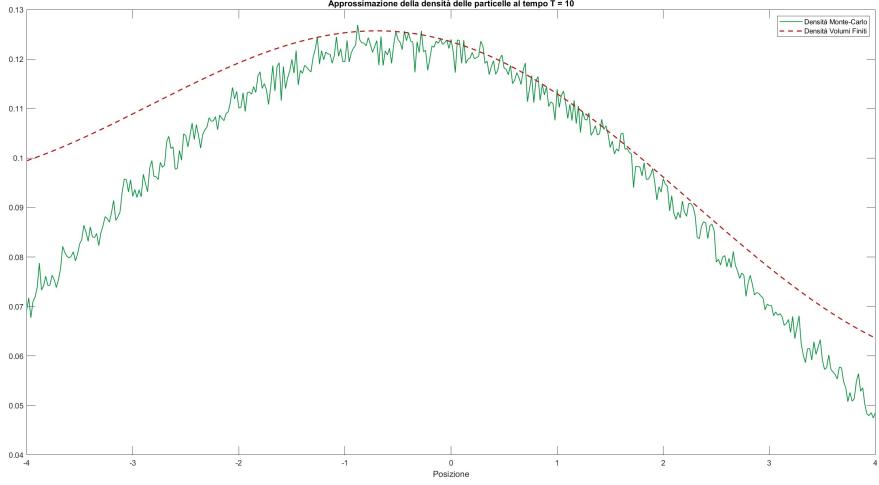
Test 3



(a) Confronto tra DSMC e volumi finiti al tempo $T = 0.38$ (Tempo di esecuzione: 2.5969 s)



(b) Confronto tra DSMC e volumi finiti al tempo $T = 2$ (Tempo di esecuzione: 9.5068 s)



(c) Confronto tra DSMC e volumi finiti al tempo $T = 10$ (Tempo di esecuzione: 44.2689 s)

Figure 14: simulazioni ottenute con: $c = 1$, $x_m = -4$, $x_M = 4$, $N_c = 1000$, $\sigma = 1$, $N = 1.500.000$, $dx = 0.02$, $ker = Characteristic$, $a = -1$, $b = 0$,

4 Modello cinetico per la dinamica delle opinioni

In questo esercizio vogliamo risolvere il modello cinetico per la dinamica delle opinioni in cui le interazioni danno origine ad una dinamica di compromesso. Il modello è ben descritto da un'equazione di tipo Boltzmann, in cui si tiene conto del fatto che l'interazione tra due agenti può avvenire esclusivamente se quest'ultimi hanno opinioni "simili":

$$\partial_t f(t, x) = \int_{\Omega} \int_{\Omega} \eta(y, z; R) K(x|y, z) f(t, y) f(t, z) dy dz - f(t, x) \int_{\Omega} \eta(x, z; R) f(t, z) dz \quad (3)$$

$$K(x|y, z) = \delta\left(x - \frac{y+z}{2}\right)$$

$$\eta(y, z; R) = \chi_{|y-z| \leq R}$$

Seguendo la stessa procedura degli esercizi precedenti, per approssimare la soluzione di tale modello, siamo partiti da un set di N random samples distribuiti uniformemente nell'insieme $\Omega = [-n_1 R, n_2 R]$, con R parametro di bounded confidence. Successivamente abbiamo evoluto i samples con DSMC adattato al modello considerato e infine abbiamo ricostruito la distribuzione delle opinioni tramite la funzione di ricostruzione.

L'obiettivo della nostra analisi è stato studiare il fenomeno di clustering, che caratterizza lo stato stazionario dei modelli per la dinamica delle opinioni. In particolare, abbiamo approssimato la distribuzione $f(t, x)$ per tempi molto lunghi e confrontato i risultati ottenuti con quelli attesi, in relazione alla scelta dei parametri n_1 e n_2 e all'analisi dei momenti.

Test 1: in questa prima simulazione abbiamo considerato il modello con interazioni globali, scegliendo i parametri $n_1 = n_2$ in modo che $|\Omega| = (n_1 + n_2)R \leq R$. Lo stato stazionario in questo caso è caratterizzato dalla formazione di un unico cluster di opinioni, ovvero dal raggiungimento di uno stato di consenso incondizionato.

Questo fenomeno è rappresentato in Figura (15a), in cui possiamo osservare che la distribuzione delle opinioni, inizialmente uniforme in Ω , tende a convergere ad una delta di Dirac centrata in 0, che rappresenta proprio la media della distribuzione delle opinioni al tempo iniziale. Anche in figura (15b), che mostra l'evoluzione temporale della distribuzione delle opinioni, si osserva come queste tendano progressivamente ad addensarsi attorno a un unico valore, offrendo una rappresentazione alternativa del fenomeno di clustering.

Infine, in figura (15c), è possibile osservare l'evoluzione temporale dei momenti $m_0(t)$, $m_1(t)$ e $m_2(t)$, da cui si evince che:

- $m_0(t)$ rimane costantemente uguale a 1, ovvero c'è conservazione della massa;
- $m_1(t)$, ovvero la media delle opinioni, si conserva. È utile osservare però che questa proprietà è una conseguenza della simmetria delle interazioni e non è legata al fatto di essere in un modello globale o locale;
- $m_2(t) \rightarrow 0$.

Combinando questi dati, deduciamo che $Var(t) = m_2(t) - m_1(t)^2$, che fornisce una misura di quanto le opinioni si discostano l'una dall'altra, tende asintoticamente a 0, confermando nuovamente il raggiungimento di uno stato di consenso.

Test 2 e 3: in queste due simulazioni abbiamo invece considerato interazioni locali, scegliendo i parametri $n_1 = n_2$ in modo che $|\Omega| = (n_1 + n_2)R > R$. In tale configurazione lo stato stazionario

è caratterizzato dalla formazione di uno o più cluster di opinioni; il numero effettivo di cluster, tuttavia, non è determinabile a priori, poiché dipende dalla distribuzione iniziale $f(0, x)$. Dall'analisi dei momenti nelle figure (16c) e (17c) si osserva la conservazione di $m_1(t)$ e una progressiva diminuzione di $m_2(t)$. Ne consegue che anche $Var(t)$ decresce nel tempo senza annullarsi del tutto, indicando la formazione di più cluster. Tale comportamento è confermato dalle figure (16b) e (17b), in cui si evidenziano rispettivamente due e tre cluster.

Test 4: in questa ultima simulazione abbiamo analizzato il caso $n_1 \neq n_2$, sempre in presenza di interazioni locali. A differenza dei test 2 e 3, si osserva la formazione di un unico cluster di opinioni concentrato attorno alla media (figure 18a e 18b), a indicare che uno stato di consenso può emergere anche con interazioni locali. Il risultato della simulazione è stato ottenuto considerando $n_1 = 0.5$, $n_2 = 1$ e $R = 1$. In particolare il raggiungimento del consenso potrebbe essere ricondotto al fatto che la bounded confidence risulta solo leggermente inferiore alla massima distanza tra le opinioni all'istante iniziale.

Infine, l'esercizio richiedeva di estendere il modello al caso bidimensionale. Abbiamo quindi condotto uno studio analogo ai test precedenti in questa nuova configurazione. Per adattare lo schema numerico all'approssimazione della soluzione dell'equazione cinetica in due dimensioni, è stato necessario definire una nuova funzione di ricostruzione specifica per il caso bidimensionale. In particolare, dopo aver costruito una griglia uniforme del dominio $\Omega = [-n_{1x}R, n_{2x}R] \times [-n_{1y}R, n_{2y}R]$ con passi $\Delta x = \Delta y$, abbiamo adattato ai nostri scopi il kernel *Characteristic* dell'esercizio 1 nel seguente modo:

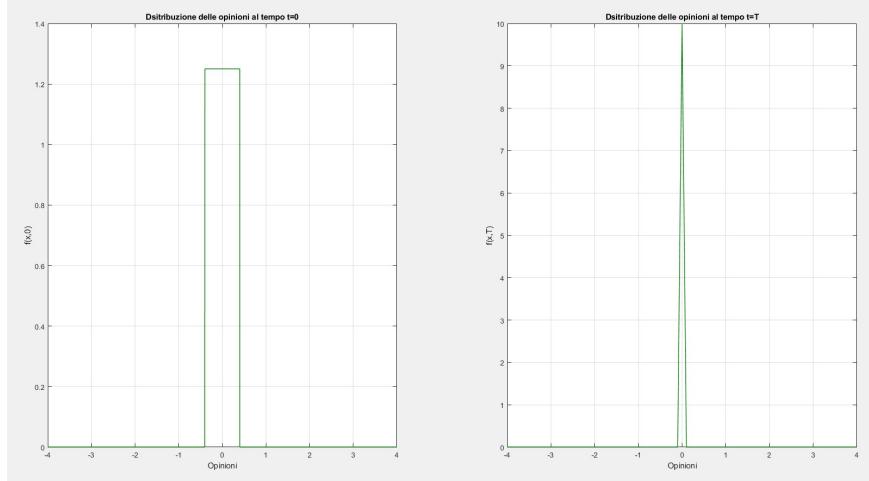
$$\varphi_{\Delta x \Delta y}(x, y) = \begin{cases} 1/(\Delta x \Delta y) & |x| \leq \Delta x/2 \quad |y| \leq \Delta y/2 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Test 5: in questa simulazione abbiamo considerato $n_{1x} = n_{2x} = n_{1y} = n_{2y} = 1$ e $R = 1$. In figura (19a) possiamo vedere a sinistra una possibile "distribuzione microscopica" delle opinioni in Ω al tempo iniziale (in questo caso uniforme in Ω), mentre sulla destra la densità di probabilità $f(x, y, 0)$. In figura (19b) è riportata la soluzione numerica al tempo finale, dalla quale emerge la formazione di un unico cluster di opinioni. L'analisi dei momenti, condotta in modo analogo al test 1 e mostrata in figura (19c), conferma infatti il raggiungimento di uno stato di consenso.

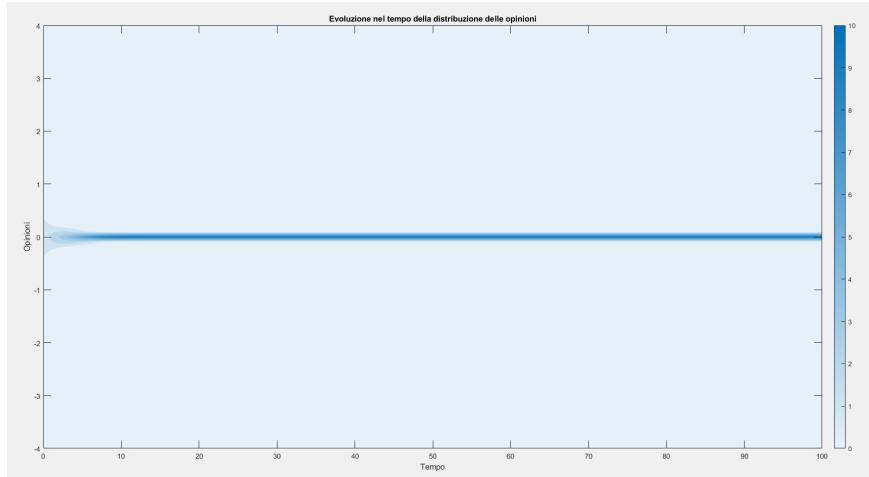
Test 6: in quest'ultima simulazione abbiamo considerato $n_{1x} = n_{2x} = n_{1y} = n_{2y} = 3$ e $R = 1$. A differenza del test precedente, in figura (20b) si osserva la formazione di più cluster di opinioni, fenomeno che trova conferma nell'analisi dei momenti riportata in figura (20c). In particolare, il momento secondo diminuisce nel tempo, mentre il primo rimane costante; ne segue quindi che la varianza si riduce progressivamente, suggerendo così la tendenza del sistema a suddividersi in cluster.

Riportiamo nelle prossime pagine i risultati ottenuti nelle varie simulazioni.

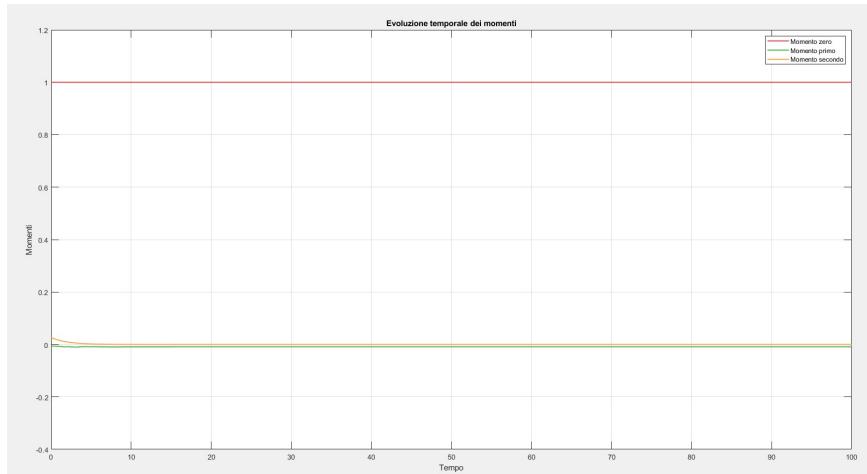
Test 1



(a) Distribuzione iniziale (sx) e distribuzione finale (dx) delle opinioni



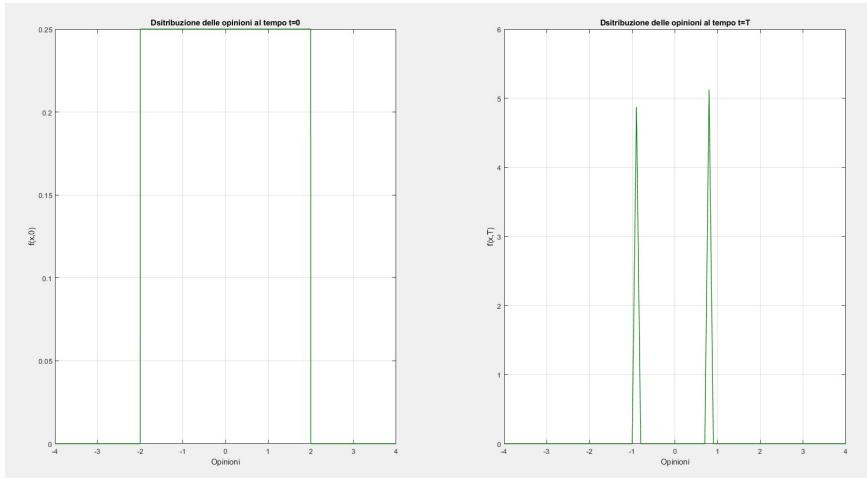
(b) Evoluzione temporale della distribuzione delle opinioni



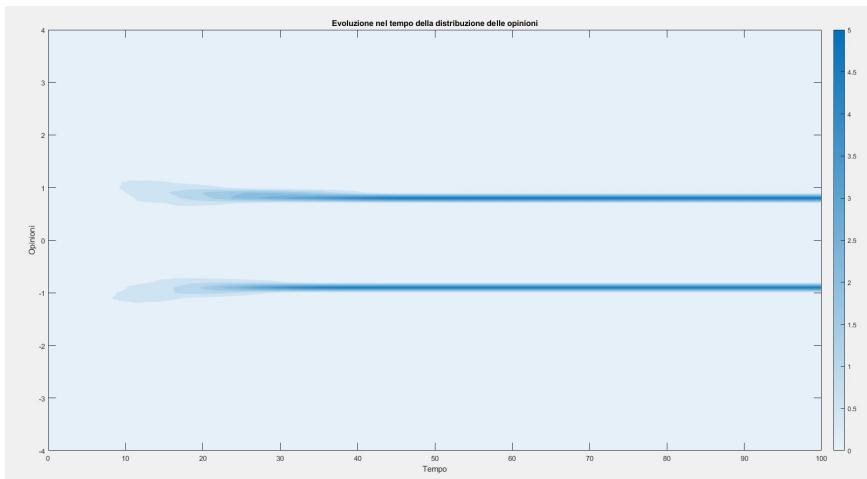
(c) Evoluzione temporale dei momenti

Figure 15: simulazione ottenuta con: $n_1 = 0.4$, $n_2 = 0.4$, $N = 10^4$, $dx = 0.1$, $a = -4$, $b = 4$, $T = 100$, $\ker = \text{Characteristic}$, $R = 1$, $\mu = 1$

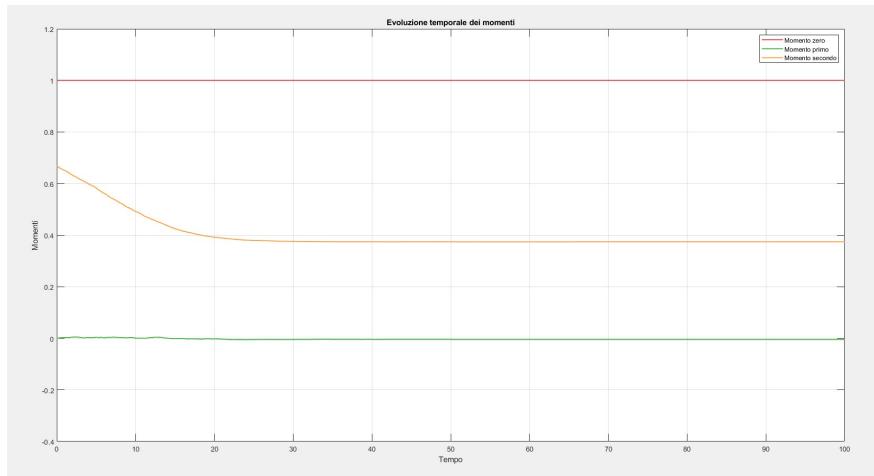
Test 2



(a) Distribuzione iniziale (sx) e distribuzione finale (dx) delle opinioni



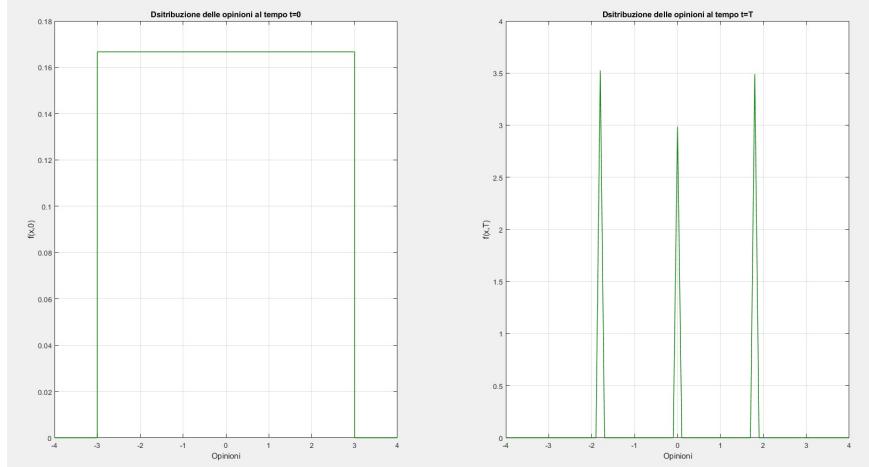
(b) Evoluzione temporale della distribuzione delle opinioni



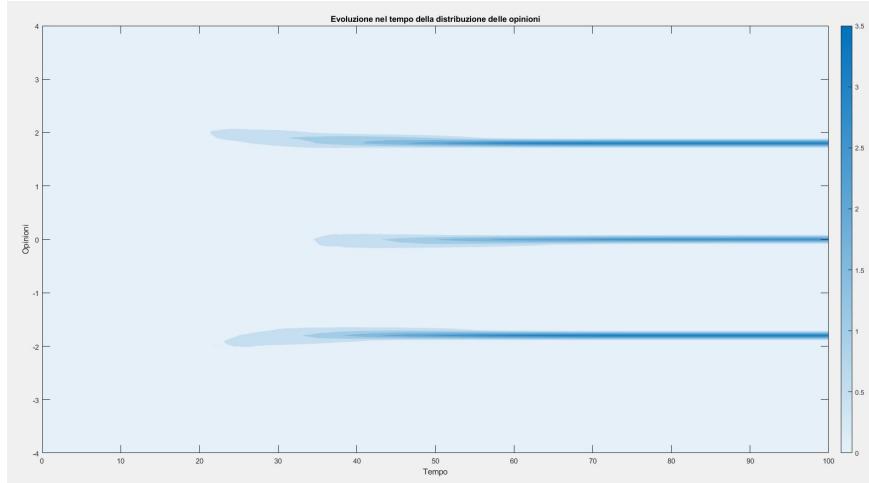
(c) Evoluzione temporale dei momenti

Figure 16: simulazione ottenuta con: $n_1 = 2$, $n_2 = 2$, $N = 10^4$, $dx = 0.1$, $a = -4$, $b = 4$, $T = 100$, $\text{ker} = \text{Characteristic}$, $R = 1$, $\mu = 1$

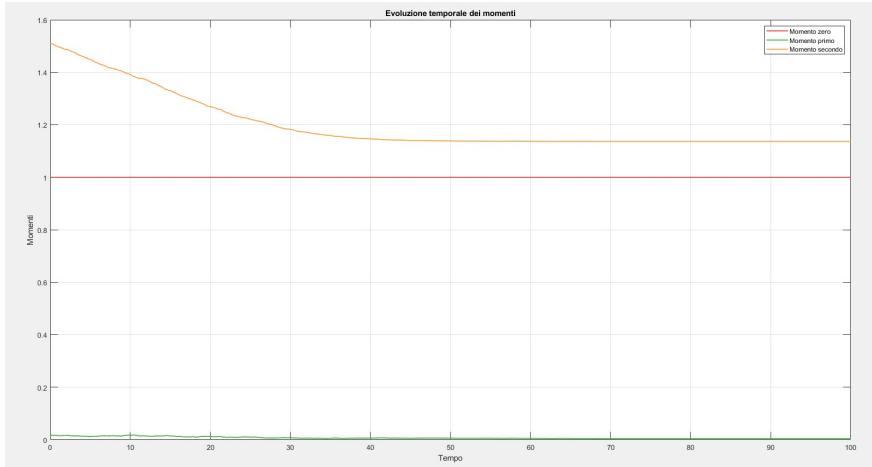
Test 3



(a) Distribuzione iniziale (sx) e distribuzione finale (dx) delle opinioni



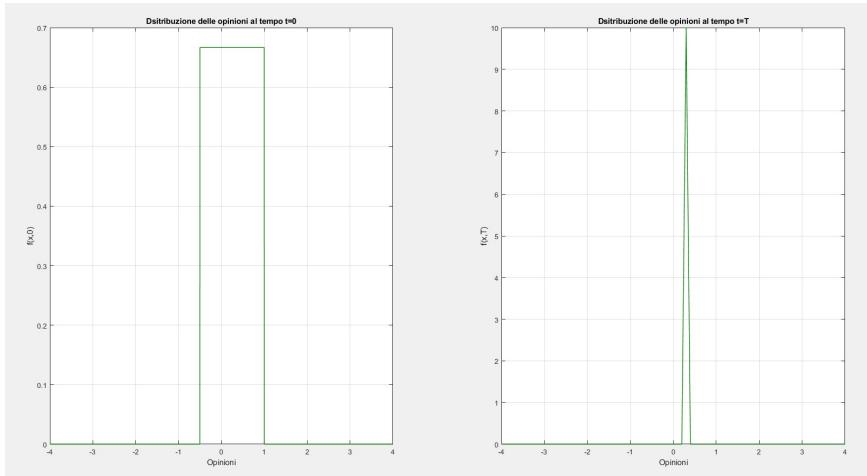
(b) Evoluzione temporale della distribuzione delle opinioni



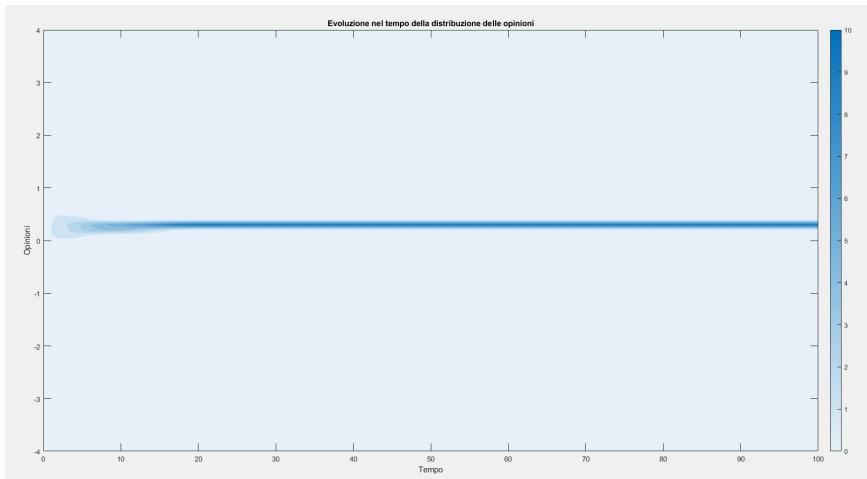
(c) Evoluzione temporale dei momenti

Figure 17: simulazione ottenuta con: $n_1 = 3$, $n_2 = 3$, $N = 10^4$, $dx = 0.1$, $a = -4$, $b = 4$, $T = 100$, $\text{ker} = \text{Characteristic}$, $R = 1$, $\mu = 1$

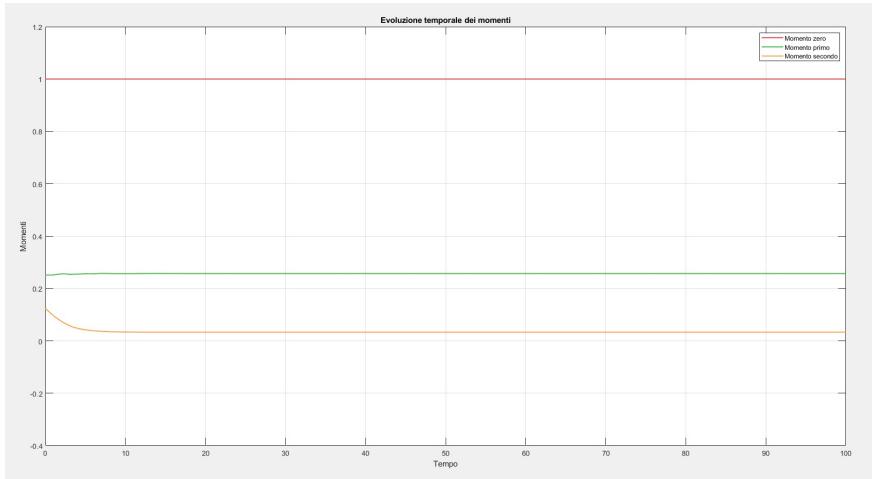
Test 4



(a) Distribuzione iniziale (sx) e distribuzione finale (dx) delle opinioni



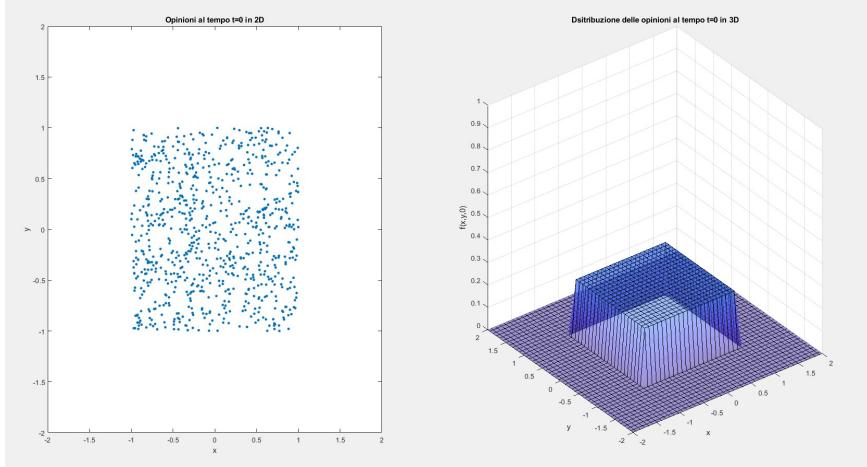
(b) Evoluzione temporale della distribuzione delle opinioni



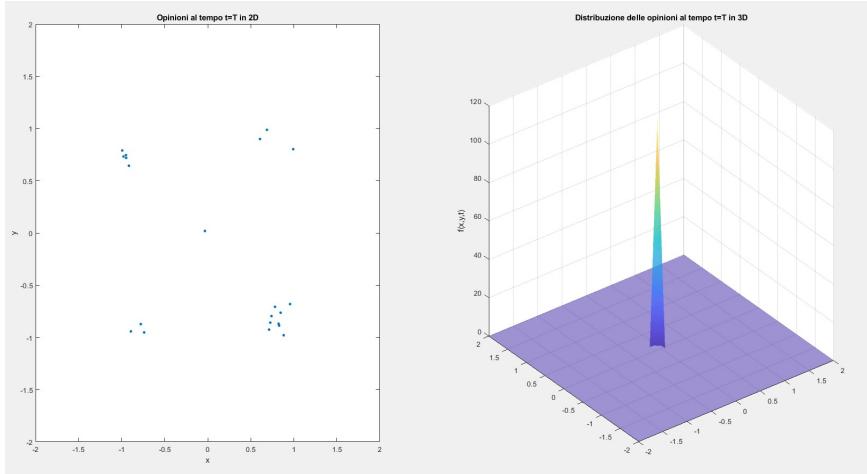
(c) Evoluzione temporale dei momenti

Figure 18: simulazione ottenuta con: $n_1 = 0.5$, $n_2 = 1$, $N = 10^4$, $dx = 0.1$, $a = -4$, $b = 4$, $T = 100$, $\text{ker} = \text{Characteristic}$, $R = 1$, $\mu = 1$

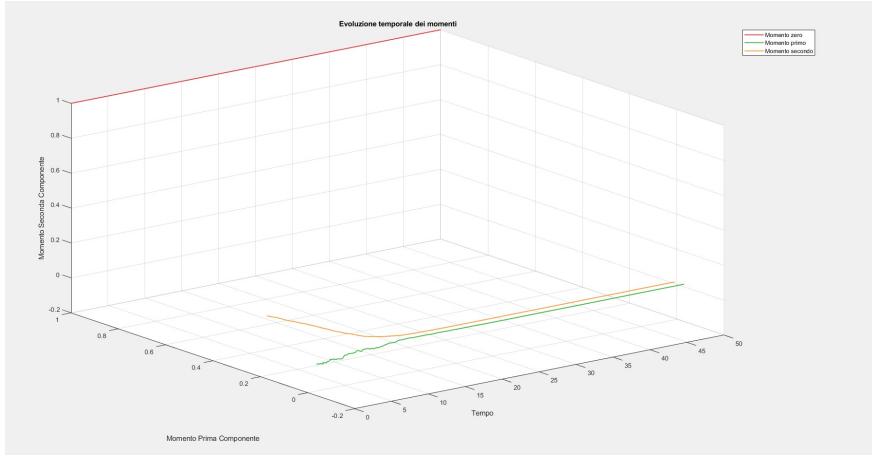
Test 5



(a) Distribuzione iniziale delle opinioni in 2D (sx) e in 3D (dx)



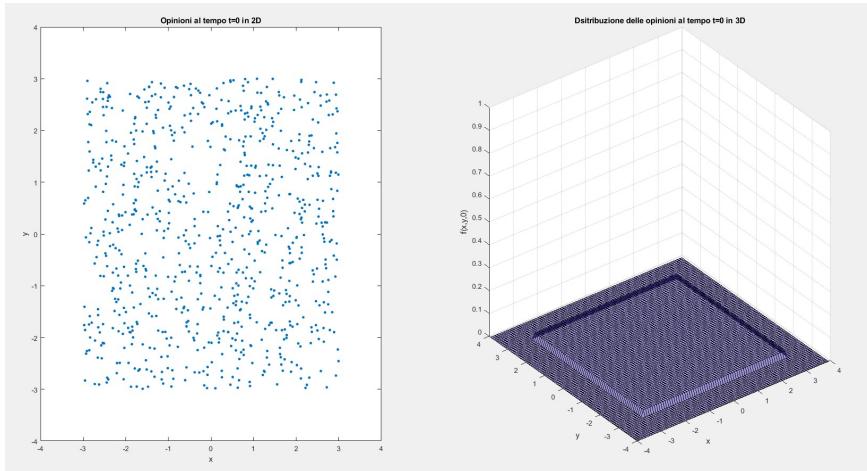
(b) Distribuzione finale delle opinioni in 2D (sx) e in 3D (dx)



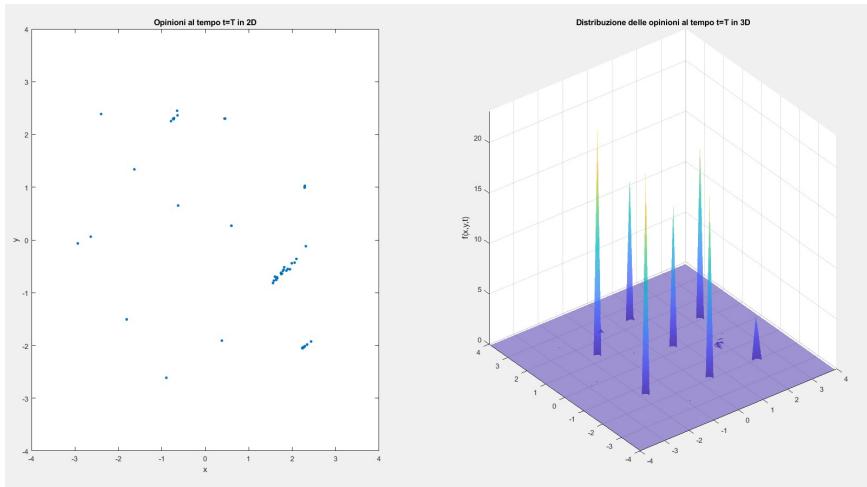
(c) Evoluzione temporale dei momenti

Figure 19: simulazione ottenuta con: $n_{1x} = n_{2x} = n_{1y} = n_{2y} = 1$, $N = 800$, $dx = 0.09$, $a = -4$, $b = 4$, $T = 50$, $\ker = \text{Characteristic}$, $R = 1$, $\mu = 1$

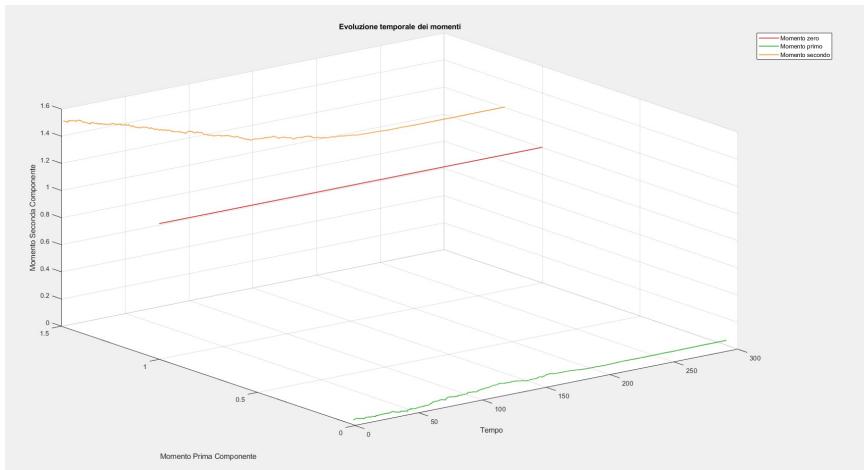
Test 6



(a) Distribuzione iniziale delle opinioni in 2D (sx) e in 3D (dx)



(b) Distribuzione finale delle opinioni in 2D (sx) e in 3D (dx)



(c) Evoluzione temporale dei momenti

Figure 20: simulazione ottenuta con: $n_{1x} = n_{2x} = n_{1y} = n_{2y} = 3$, $N = 800$, $dx = 0.09$, $a = -4$, $b = 4$, $T = 300$, $\text{ker} = \text{Characteristic}$, $R = 1$, $\mu = 1$

5 Modello cinetico per flussi di traffico

In questo esercizio vogliamo risolvere il modello cinetico per il traffico veicolare in cui assumiamo di avere interazioni con il background. Il modello è dato da:

$$\partial_t f(v, t) = \rho \int_0^{V_{\max}} \delta(v - v^*) f(v^*, t) dv^* - \rho f(v, t) \quad (4)$$

dove

$$v^* = \begin{cases} v_* + P(\rho)(V_A - v_*), & v_* \leq u \\ v_* - (1 - P(\rho))(v_* - V_B), & v_* > u \end{cases} \quad (5)$$

In particolare abbiamo considerato:

$$P(\rho) = 1 - \rho, \quad V_A = \min\{v_* + \Delta v, V_{\max}\}, \quad V_B = \max\{u - \Delta v, 0\},$$

e $u(t)$ la velocità media:

$$u(t) = \int_0^{V_{\max}} v f(v, t) dv$$

Anche in questo caso, per approssimare la soluzione del modello, siamo partiti da un insieme di N campioni casuali distribuiti uniformemente in $[0, 1]$, che sono stati evoluti mediante l'algoritmo DSMC adattato al problema in esame. Successivamente, abbiamo ricostruito la soluzione attraverso la funzione di ricostruzione.

L'obiettivo dell'analisi è stato lo studio del comportamento del modello per tempi lunghi, ossia il raggiungimento dello stato stazionario f^∞ . In particolare, ci siamo concentrati sulla relazione tra la densità ρ e la corrispondente velocità media dei veicoli, definita da:

$$\rho \mapsto u = \int_0^1 v f^\infty(v) dv$$

Test 1: in questa simulazione abbiamo eseguito il codice per tempi lunghi e per diversi valori di $\rho \in [0, 1]$, al fine di calcolare la corrispondente velocità media e costruire la relazione $\rho \mapsto u$. Come si osserva in figura (21), il profilo di velocità ottenuto risulta coerente con un modello di traffico veicolare: per valori di densità $\rho \approx 1$ la velocità media dei veicoli tende a 0, mentre per $\rho \approx 0$ essa si avvicina al valore massimo consentito V_{\max} .

Abbiamo infine ripetuto il test considerando una distribuzione iniziale delle velocità secondo la normale standard $\mathcal{N}(0, 1)$ (Figura 22).

Test 2: In questa simulazione abbiamo analizzato lo stato stazionario $f^\infty(v)$ per diversi valori di ρ . In particolare:

1. Ai valori estremi dell'intervallo di definizione della densità ρ , si osserva che la distribuzione delle velocità si concentra rispettivamente intorno a 0 per $\rho \approx 1$ e intorno a V_{\max} per $\rho \approx 0$ (Figura 23). Questo risultato è coerente con l'intuizione legata al traffico: in condizioni di forte congestione ($\rho \approx 1$) la velocità media dei veicoli risulta ridotta, mentre in condizioni di traffico libero ($\rho \approx 0$) essa si avvicina al valore massimo consentito V_{\max} .

- Per valori intermedi di ρ , abbiamo analizzato la distribuzione delle velocità ponendo particolare attenzione a piccole variazioni della densità in prossimità del punto di discontinuità della funzione $u(\rho)$ ricostruita nel Test 1 (Figura 21), confrontandole con variazioni dello stesso ordine lontano da tale regione. Come mostra il grafico di $u(\rho)$, nella zona critica anche una variazione minima di densità genera oscillazioni significative delle velocità medie (Figura 24); viceversa, lontano dalla discontinuità, una variazione identica ($\Delta\rho = 0.03$) produce differenze trascurabili (Figura 25).
Inoltre, dalle figure (24) e (25) si nota che le velocità tendono a concentrarsi attorno a due valori distinti; di conseguenza, la velocità media stimata in figura (21) corrisponde a un valore intermedio tra i due picchi.

Riportiamo nelle prossime pagine i risultati ottenuti nelle varie simulazioni.

Test 1

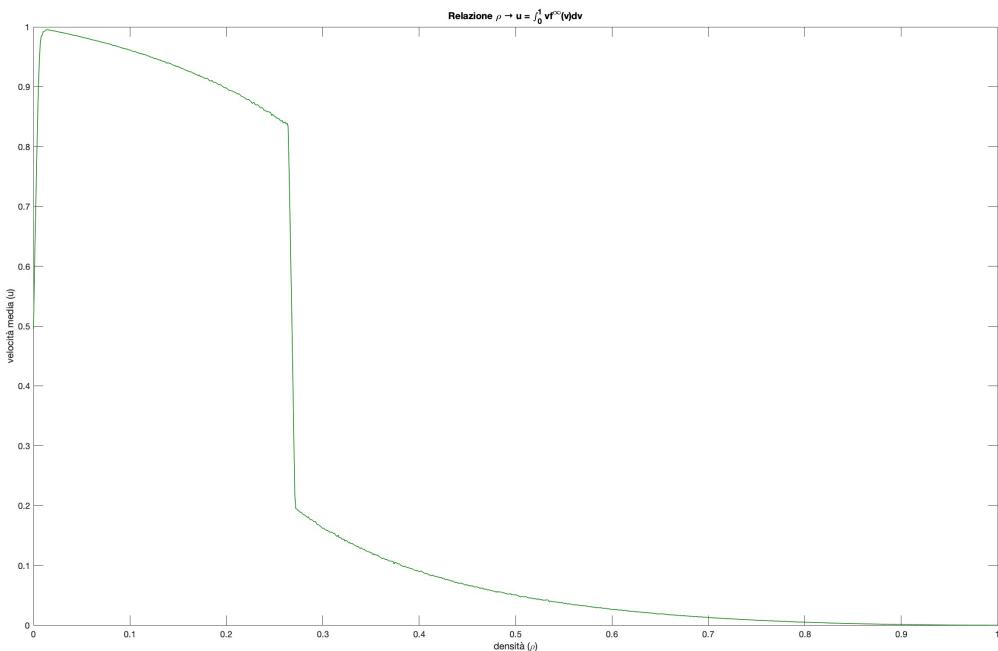


Figure 21: simulazione ottenuta con: $N = 10000$, $Vmax = 1$, $\Delta v = 0.2$, $T = 1000$, $dx = 0.1$, $d\rho = 0.001$ (passo discretizzazione dell'intervallo della densità)

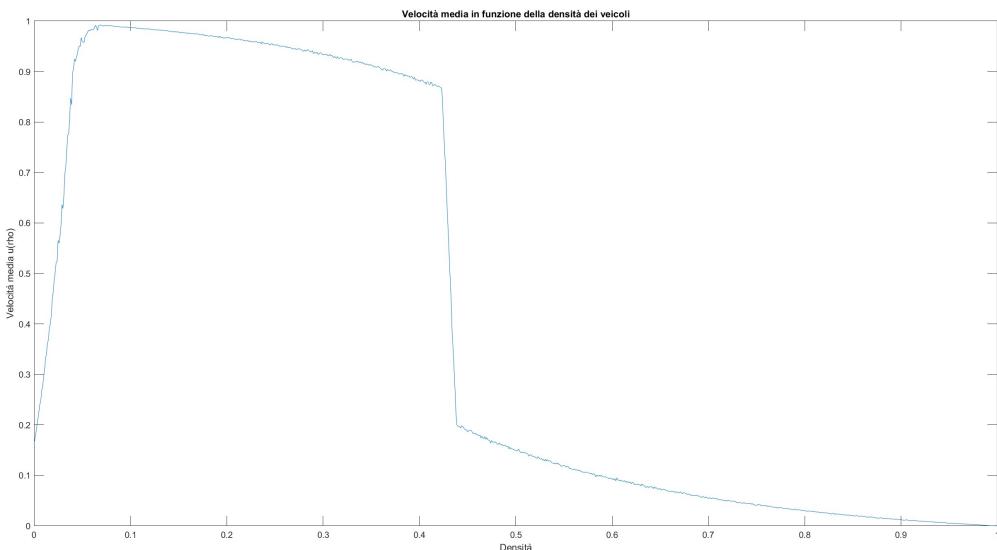


Figure 22: simulazione ottenuta con: $N = 1000$, $Vmax = 1$, $\Delta v = 0.2$, $T = 500$, $dx = 0.1$, $d\rho = 0.001$ (passo discretizzazione dell'intervallo della densità)

Test 2

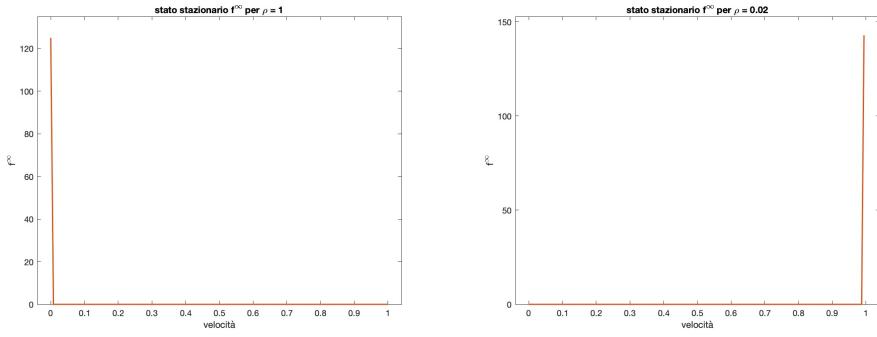


Figure 23: simulazioni per $\rho = 1$ e $\rho = 0.002$ ottenute con: $N = 1000$, $Vmax = 1$, $\Delta v = 0.2$, $T = 1000$, $dx = 0.003$, $ker = Characteristic$

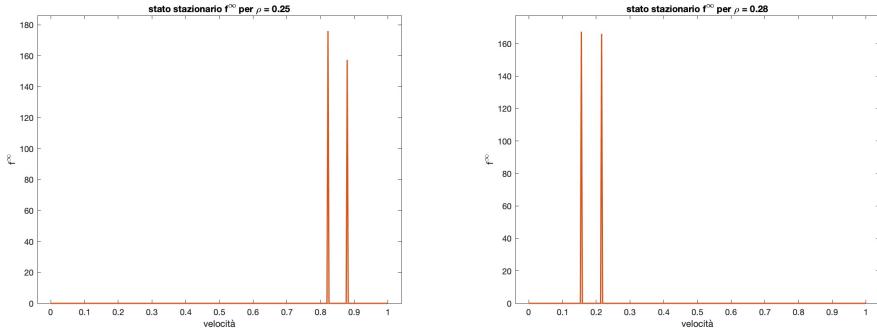


Figure 24: simulazioni per $\rho = 0.25$ e $\rho = 0.28$ ottenute con: $N = 1000$, $Vmax = 1$, $\Delta v = 0.2$, $T = 1000$, $dx = 0.003$, $ker = Characteristic$

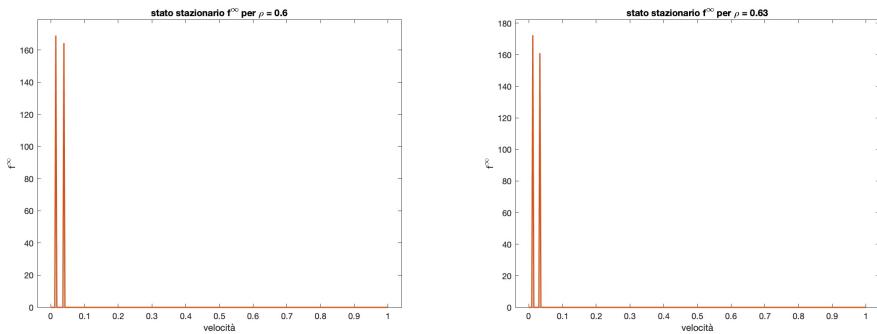


Figure 25: simulazioni per $\rho = 0.6$ e $\rho = 0.63$ ottenute con: $N = 1000$, $Vmax = 1$, $\Delta v = 0.2$, $T = 1000$, $dx = 0.003$, $ker = Characteristic$