

Riassunto e Formulario di Fisica Generale
Ingegneria Informatica
Unibo

Umberto Paganelli

Indice

Indice	2
Vettori	7
Cinematica	8
Moto rettilineo uniforme	8
Moto rettilineo uniformemente accelerato	8
Caduta dei gravi (caduta libera)	8
Moto del proiettile	10
Moto Circolare	11
Moto Oscillatorio Armonico	12
Statica	13
Forza peso	13
Risultante delle forze	13
Vettori liberi e vettori applicati	13
Momento di un vettore applicato	13
Momento di un vettore applicato con poli differenti	13
Coppia di vettori applicati	14
Coppia di braccio nullo	14
Quiete, equilibrio e statica	14
Statica del punto materiale	14
Statica del corpo esteso	14
Reazione vincolare	14
Vincoli di volume, superficie e lineari	14
Vincoli lisci	14
Piano Inclinato	15
Dinamica	16
Prima legge della dinamica (Legge di inerzia)	16
Seconda legge della dinamica	16
Forze d'attrito (statica e dinamica)	16
Forza di Coriolis	16
Il pendolo semplice	17
Sistemi di riferimento non inerziali	17
Forza centripeta	17
Lavoro ed Energia	18
Definizione di Lavoro	18
Lavoro da una Forza Generica	18
Lavoro della Forza Peso	18
Lavoro della Forza Elastica	18
Potenza di una Forza	19
Teorema delle Forze Vive (Energia Cinetica)	19
Concetti Matematici	19
Differenziale di una Funzione	19
Operatore Nabla	19
Forze Conservative	20

Conservazione dell'Energia Meccanica	20
Esercizi con Soluzioni Su Lavoro ed Energia	20
Esercizio 1: Lavoro della Forza Peso	20
Esercizio 2: Lavoro della Forza Elastica	20
Esercizio 3: Potenza Media	21
Esercizio 4: Energia Cinetica e Lavoro	21
Esercizio 5: Energia Potenziale Gravitazionale	21
Terzo Principio e Urti	22
Quantità di Moto	22
Situazioni di Massa Variabile	22
Momento Angolare	22
Impulso	22
Urti	23
Urti Collineari Elastici	23
Urti Collineari - Casi Particolari	23
Urti Completamente Anaelastici	23
Esercizi Sul Terzo Principio E Urti	24
Esercizio 1: Forza media e lavoro della forza frenante	24
Esercizio 2: Forza media nella pistola	24
Esercizio 3: Urto elastico tra due corpi	25
Esercizio 4: Urto anelastico tra palla di stucco e palla da biliardo	26
Esercizio 5: Pendolo balistico	26
Gravitazione	27
Leggi di Keplero	27
Semplificazione delle orbite	27
Velocità areolare (cerchio)	27
Gravitazione universale	27
3a Legge di Keplero	28
Legge di gravitazione universale	28
Campo gravitazionale	28
Energia Potenziale Gravitazionale	29
Velocità di fuga	29
Esercizi - Gravitazione	29
Elettrostatica	30
Cariche	30
Legge di Coulomb	30
Bilancia di Torsione	30
Forza Elettrostatica vs Forza Gravitazionale	30
Campo Elettrico	31
Forza sul Corpo di Prova	31
Densità di Carica	31
Campo Elettrico da una Distribuzione Continua di Carica	31
Il Campo Elettrico è Conservativo?	31
Circuitazione del Campo Elettrostatico	31
Proprietà del Campo Elettrostatico	32
Potenziale Elettrostatico	32
Differenza di Potenziale tra i Punti A e B	32
Campo Elettrico Generato da N Cariche Discrete	33

Potenziale per Sistemi Continuo di Cariche	33
Esempi	33
Lavoro della Forza Elettrostatica	35
Energia Elettrostatica	35
Moto di una Carica in un Campo Elettrostatico	36
Esempio: Moto di una Carica in Campo Elettrico Uniforme	36
Il Dipolo Elettrico	38
Azioni Meccaniche su un Dipolo Elettrico	38
Il Flusso del Campo Elettrico	38
Flusso infinitesimo attraverso una superficie dS	39
Flusso totale attraverso una superficie S	39
Il Flusso del Campo Elettrico e la Legge di Gauss	39
Flusso attraverso una superficie sferica	39
Notazione dell'integrale su superficie chiusa	39
Il Flusso del Campo Elettrico in Presenza di Cariche Esterne	40
Flusso infinitesimo in presenza di cariche esterne	40
Esempi	40
La Divergenza di un Campo Vettoriale	42
Definizione di Divergenza di un Campo Vettoriale	42
Il Teorema della Divergenza	42
La Legge di Gauss in Forma Locale	43
Significato Fisico della Divergenza	43
Potenziale e Legge di Gauss in Forma Locale	43
Esempio: Calcolare la Divergenza del Campo e il Flusso Attraverso una Superficie Sferica	44
Elettrostatica dei Conduttori	45
Equilibrio Elettrostatico nei Conduttori	45
Elettrizzazione per Contatto	45
Carica Interna ai Conduttori	45
Campo Elettrico in Prossimità della Superficie dei Conduttori	45
Conduttori Cavi	45
Potenziale Elettrostatico nei Conduttori	46
Potenziale di un Conduttore Sferico	46
Ridistribuzione delle Cariche	46
Conservazione della Carica ed Equipotenzialità	46
Potere delle Punte	47
Collegamento a Terra	47
Capacità di un Conduttore	48
Capacità di un Conduttore Sferico	48
Condensatori	48
Sistemi di condensatori in parallelo	49
Energia elettrostatica di un sistema di cariche puntiformi	49
Esercizi pratici	50
Energia in un condensatore	51
Densità di energia del campo elettrico	51
Esercizi	51
Condensatori con dielettrici	53
Costanti dielettriche relative per vari materiali	53

Correnti Elettriche	54
Intensità di corrente	54
Densità di corrente	54
Conservazione della carica elettrica	54
Equazione di continuità	54
Condizioni stazionarie	55
Modello di Drude-Lorentz	55
Prima legge di Ohm	56
Seconda legge di Ohm	56
Effetto Joule	57
Generatori di forza elettromotrice	57
Legge di Ohm generalizzata	57
Seconda legge di Kirchhoff	58
Prima legge di Kirchhoff (dei nodi)	58
Magnetostatica	59
La forza magnetica tra due calamite	59
Linee del campo magnetico e solenoidalità	59
Rotore e circuitazione del campo magnetico	59
Magnetostatica nel vuoto	59
Seconda legge di Laplace	60
Forza magnetica a livello microscopico	60
Forza magnetica su cariche puntiformi	61
Forza di Lorentz	61
Forza di Lorentz e cariche in movimento	61
Forza di Lorentz generalizzata	62
Moto di cariche in campi magnetici	62
Periodo di rotazione e velocità angolare	62
Esercizio risolto: traiettoria elicoidale di un elettrone	63
Spira in un campo magnetico	64
Momento delle forze	64
Momento magnetico della spira	65
Teorema di equivalenza di Ampère	65
Prima legge di Laplace	65
Legge di Biot-Savart	66
Forza tra due fili percorsi da corrente	67
Campo magnetico da cariche puntiformi in moto	67
Campo da spira circolare	67
Flusso del campo magnetico	67
Circuitazione del campo magnetico	67
Legge di Ampère	68
Densità di corrente concatenata	68
Teorema di Stokes e rotore del campo magnetico	69
Esempio 55: Campo di un filo di lunghezza indefinita	69
Esempio 56: Campo di un cilindro conduttore	70
Esempio 57: Campo di un solenoide	71
Momento magnetico orbitale	71
Momento magnetico orbitale	72
Momento magnetico di spin	72
Materiali diamagnetici	72

Materiali paramagnetici	72
Materiali ferromagnetici	72
Magnetizzazione e saturazione	73
Ciclo di isteresi	73

Vettori

- **Vettore** \vec{v} : una direzione, un modulo $|\vec{v}|$, un verso.
- **Prodotto scalare**: $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos \theta$.
- **Moduli di somme e differenze**:

$$|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2|\vec{a}||\vec{b}| \cos \theta}$$

$$|\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}||\vec{b}| \cos \theta}$$

- **Prodotto vettoriale**:

$$|\vec{c}| = |\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}| \sin \theta$$

- Direzione: perpendicolare al piano dei vettori.
- Verso: determinato dalla regola della mano destra.

Esercizio 1: Prodotto Scalare

Enunciato: Calcolare il prodotto scalare tra i vettori $\vec{a} = (2, 3)$ e $\vec{b} = (4, -1)$.

Soluzione: Il prodotto scalare tra i vettori \vec{a} e \vec{b} è dato da:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2$$

Sostituendo i valori:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (2)(4) + (3)(-1) = 8 - 3 = 5$$

Esercizio 2: Prodotto Vettoriale

Enunciato: Calcolare il prodotto vettoriale tra i vettori $\vec{a} = (2, 3, 4)$ e $\vec{b} = (1, -2, 0)$.

Soluzione: Il prodotto vettoriale $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ è dato dal determinante:

$$\vec{c} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

Sostituendo i valori di \vec{a} e \vec{b} :

$$\vec{c} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix}$$

Espandendo il determinante:

$$\vec{c} = \hat{i} \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} - \hat{j} \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + \hat{k} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}$$

Calcolando:

$$\vec{c} = \hat{i}(3 \cdot 0 - 4 \cdot -2) - \hat{j}(2 \cdot 0 - 4 \cdot 1) + \hat{k}(2 \cdot -2 - 3 \cdot 1)$$

$$\vec{c} = \hat{i}(8) - \hat{j}(-4) + \hat{k}(-7)$$

$$\vec{c} = 8\hat{i} + 4\hat{j} - 7\hat{k}$$

Il risultato è:

$$\vec{c} = (8, 4, -7)$$

Cinematica

Moto rettilineo uniforme

$$s(t) = x_0 + v_x t$$
$$\vec{r}(t) = (x_0 + v_x t)\hat{i}$$

Esercizio 2: Moto Rettilineo Uniforme

Enunciato: Un'auto parte da una posizione iniziale $x_0 = 0$ e si muove lungo una strada con una velocità costante di $v_x = 20$ m/s. Calcolare la posizione dell'auto dopo 10 secondi.

Soluzione: La formula per la posizione è:

$$s(t) = x_0 + v_x t$$

Sostituendo i valori:

$$s(10) = 0 + (20)(10) = 200 \text{ m}$$

Quindi, la posizione dell'auto dopo 10 secondi è $s = 200$ m.

Moto rettilineo uniformemente accelerato

$$s(t) = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$
$$v(t) = v_0 + a t$$
$$\begin{cases} x(t) = x_0 + v_{0x} t + \frac{1}{2} a_x t^2 \\ y(t) = y_0 + v_{0y} t + \frac{1}{2} a_y t^2 \\ z(t) = z_0 + v_{0z} t + \frac{1}{2} a_z t^2 \end{cases}$$

Esercizio 3: Moto Rettilineo Uniformemente Accelerato

Enunciato: Un corpo parte da una velocità iniziale di $v_0 = 0$ m/s e accelera con $a = 3$ m/s² lungo una strada dritta. Calcolare la sua posizione dopo 5 secondi.

Soluzione: La formula per la posizione in un moto uniformemente accelerato è:

$$s(t) = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

Sostituendo i valori:

$$s(5) = 0 + (0)(5) + \frac{1}{2}(3)(5^2) = \frac{1}{2}(3)(25) = 37.5 \text{ m}$$

Quindi, la posizione del corpo dopo 5 secondi è $s = 37.5$ m.

Caduta dei gravi (caduta libera)

Condizioni iniziali:

$$\begin{cases} x_0 = 0, & y_0 = h \\ v_{0x} = 0, & v_{0y} = 0 \end{cases}$$
$$x(t) = 0, \quad y(t) = h - \frac{1}{2} g t^2$$

Tempo di caduta da altezza h :

$$t_c = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

Velocità d'impatto al suolo:

$$v(t_c) = -\sqrt{2gh} \hat{j}$$

Esercizio 4: Caduta Libera

Enunciato: Un oggetto viene lasciato cadere da un'altezza di $h = 50$ m. Calcolare il tempo che impiega per arrivare al suolo.

Soluzione: Utilizziamo la formula per il tempo di caduta:

$$t_c = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

Sostituendo i valori:

$$t_c = \sqrt{\frac{2(50)}{9.81}} = \sqrt{10.2} \approx 3.19 \text{ sec}$$

Quindi, l'oggetto impiega circa $t_c = 3.19$ sec per arrivare al suolo.

Moto del proiettile

Condizioni iniziali:

$$x_0 = 0, y_0 = h, v_0 = \text{velocità iniziale}, \theta = \text{angolo di lancio}.$$

Componenti della velocità iniziale:

$$\begin{cases} v_{0x} = v_0 \cos \theta \\ v_{0y} = v_0 \sin \theta \end{cases}$$

Posizione del proiettile:

$$\begin{cases} x(t) = v_{0x}t = v_0 \cos \theta \cdot t \\ y(t) = y_0 + v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 = h + v_0 \sin \theta \cdot t - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

Velocità del proiettile:

$$\begin{cases} v_x(t) = v_{0x} = v_0 \cos \theta \\ v_y(t) = v_{0y} - gt = v_0 \sin \theta - gt \end{cases}$$

Velocità totale:

$$v(t) = \sqrt{v_x^2(t) + v_y^2(t)} = \sqrt{(v_0 \cos \theta)^2 + (v_0 \sin \theta - gt)^2}$$

Equazione della traiettoria:

$$y(x) = h + x \tan \theta - \frac{gx^2}{2(v_0 \cos \theta)^2}$$

Altezza massima:

$$h_{\max} = h + \frac{(v_0 \sin \theta)^2}{2g}$$

Tempo di volo:

$$T = \frac{v_0 \sin \theta + \sqrt{(v_0 \sin \theta)^2 + 2gh}}{g}$$

Portata massima:

$$R = \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{g} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2gh}{(v_0 \sin \theta)^2}} \right)$$

Esercizio 5: Moto del Proiettile

Enunciato: Un proiettile viene lanciato con una velocità iniziale di $v_0 = 20 \text{ m/s}$ e un angolo di $\theta = 30^\circ$. Calcolare la portata massima R e l'altezza massima h_{\max} .

Soluzione: 1. Calcolare l'altezza massima:

$$h_{\max} = h + \frac{(v_0 \sin \theta)^2}{2g}$$

$$h_{\max} = 0 + \frac{(20 \sin 30^\circ)^2}{2 \cdot 9.81} = 5.10 \text{ m}$$

2. Calcolare la portata massima:

$$R = \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{g} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2gh}{(v_0 \sin \theta)^2}} \right)$$

Sostituendo i valori:

$$R = \frac{(20)^2 \sin 60^\circ}{9.81} \approx 35.9 \text{ m}$$

Moto Circolare

Una traiettoria circolare di raggio R centrata nell'origine è descritta dalle equazioni:

$$x(\phi) = R \cos \phi, \quad y(\phi) = R \sin \phi$$

Il vettore posizione è dato da:

$$\vec{r}(\phi) = R \cos \phi \hat{i} + R \sin \phi \hat{j}$$

Il modulo della posizione è:

$$|\vec{r}| = R$$

La velocità tangenziale è:

$$v = R\omega$$

La velocità angolare ω è la derivata del angolo ϕ rispetto al tempo:

$$\omega = \frac{d\phi}{dt}$$

La velocità angolare e la velocità tangenziale sono collegate dalla relazione:

$$v = R\omega$$

L'accelerazione centripeta, che è diretta verso il centro della traiettoria, è data da:

$$a_c = \frac{v^2}{R} = R\omega^2$$

La frequenza angolare ω è legata al periodo T dalla formula:

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

e la frequenza f è data da:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$$

Esercizio 6: Moto Circolare

Enunciato: Un oggetto si muove lungo una traiettoria circolare di raggio $R = 5$ m. Calcolare la velocità tangenziale se la sua velocità angolare è $\omega = 4$ rad/s.

Soluzione: La velocità tangenziale è data da:

$$v = R\omega$$

Sostituendo i valori:

$$v = (5)(4) = 20 \text{ m/s}$$

La velocità angolare ω è costante, quindi l'accelerazione centripeta sarà:

$$a_c = R\omega^2 = 5 \times 4^2 = 5 \times 16 = 80 \text{ m/s}^2$$

Moto Oscillatorio Armonico

L'equazione del moto armonico è:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$$

La soluzione generale è:

$$x(t) = A \cos(\omega t + \phi_0)$$

Dove A è l'ampiezza e ϕ_0 è la fase iniziale. La velocità e l'accelerazione sono date rispettivamente da:

$$v(t) = -A\omega \sin(\omega t + \phi_0)$$

$$a(t) = -A\omega^2 \cos(\omega t + \phi_0)$$

La pulsazione ω è legata al periodo T dalla relazione:

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

La frequenza f è data da:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$$

Esercizio 7: Moto Oscillatorio Armonico

Enunciato: Un oscillatore armonico ha un'ampiezza $A = 2$ m e una pulsazione $\omega = 3$ rad/s. Calcolare la posizione dell'oggetto al tempo $t = 1$ s.

Soluzione: La posizione dell'oggetto è data dalla formula:

$$x(t) = A \cos(\omega t + \phi_0)$$

Supponendo che la fase iniziale sia $\phi_0 = 0$, sostituendo i valori:

$$x(1) = 2 \cos(3 \cdot 1) = 2 \cos(3) \approx -0.99 \text{ m}$$

La velocità dell'oggetto al tempo $t = 1$ s è:

$$v(1) = -A\omega \sin(\omega t + \phi_0) = -2 \times 3 \times \sin(3) \approx 6 \times (-0.141) = -0.846 \text{ m/s}$$

L'accelerazione dell'oggetto al tempo $t = 1$ s è:

$$a(1) = -A\omega^2 \cos(\omega t + \phi_0) = -2 \times 3^2 \times \cos(3) \approx -2 \times 9 \times (-0.990) = 17.82 \text{ m/s}^2$$

Statica

Forza peso

La forza peso è la forza con cui un corpo è attratto dalla Terra, calcolata come:

$$F_{\text{peso}} = m \cdot g$$

dove m è la massa del corpo e g è l'accelerazione di gravità.

Risultante delle forze

La risultante delle forze applicate a un corpo è la somma vettoriale delle forze:

$$\vec{F}_{\text{risultante}} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$

Vettori liberi e vettori applicati

I vettori liberi sono definiti da tre quantità: modulo, direzione e verso. Un esempio è il vettore di spostamento. Un vettore applicato è definito da un punto di applicazione oltre al vettore stesso.

Momento di un vettore applicato

Il momento di un vettore \vec{F} applicato in un punto P è dato da:

$$\vec{M}_{\Omega} = \vec{r} \wedge \vec{F}$$

dove:

- \vec{F} è la forza,
- \vec{r} è il vettore di posizione che collega il polo Ω al punto P ,
- \wedge è il prodotto vettoriale.

La norma del momento è:

$$|\vec{M}_{\Omega}| = |\vec{F}| |\vec{r}| \sin \theta$$

dove θ è l'angolo tra \vec{r} e \vec{F} .

Il braccio della forza b è:

$$b = |\vec{r}| \sin \theta$$

Se il polo Ω è sulla retta di azione della forza, il momento è nullo:

$$\vec{M}_{\Omega} = 0$$

Momento di un vettore applicato con poli differenti

Se i poli sono separati, il momento rispetto ai due poli è dato da:

$$\vec{M}_{\Omega} - \vec{M}_{\Omega'} = (\vec{r} - \vec{r}') \wedge \vec{F}$$

Se il braccio è uguale, il momento è lo stesso:

$$|\vec{M}_{\Omega}| = |\vec{M}_{\Omega'}|$$

Coppia di vettori applicati

Una coppia di vettori applicati è costituita da due forze opposte, con linee di azione diverse. Il momento risultante ha modulo Fb , dove b è la distanza tra le linee di azione.

Coppia di braccio nullo

Una coppia di braccio nullo è costituita da due forze opposte che agiscono lungo la stessa retta di azione, con momento nullo.

Quiete, equilibrio e statica

- **Equilibrio:** Sistema in equilibrio se rimane in quiete pur sottoposto a forze.
- **Quiete:** Corpo in quiete se la sua velocità è nulla in ogni istante.
- **Statica:** Studio delle forze nei sistemi in equilibrio.
- **Equilibrio stabile:** Piccole variazioni nel sistema provocano piccoli spostamenti.
- **Equilibrio instabile:** Piccole variazioni provocano grandi spostamenti senza ritorno alla posizione iniziale.

Statica del punto materiale

La condizione di equilibrio di un punto materiale è che la risultante delle forze sia nulla:

$$\sum \vec{F}_i = 0$$

Statica del corpo esteso

Per un corpo esteso, la condizione di equilibrio è che la risultante delle forze e il momento risultante siano nulli:

$$\sum \vec{F}_i = 0 \quad \text{e} \quad \sum \vec{M}_i = 0$$

Reazione vincolare

Le forze vincolari impediscono il movimento del corpo, come nel caso della forza che controbilancia la forza peso su un piano orizzontale.

Vincoli di volume, superficie e lineari

- **Vincoli di volume:** Impediscono il moto in una direzione, come un corpo sopra un tavolo.
- **Vincoli di superficie:** Impediscono il moto in una direzione sulla superficie, come un corpo che si muove su un piano.
- **Vincoli lineari:** Impediscono il moto lungo una retta.

Vincoli lisci

I vincoli lisci non offrono resistenza al moto tangenziale e la reazione vincolare è perpendicolare alla superficie. Esempio: piano inclinato.

Piano Inclinato

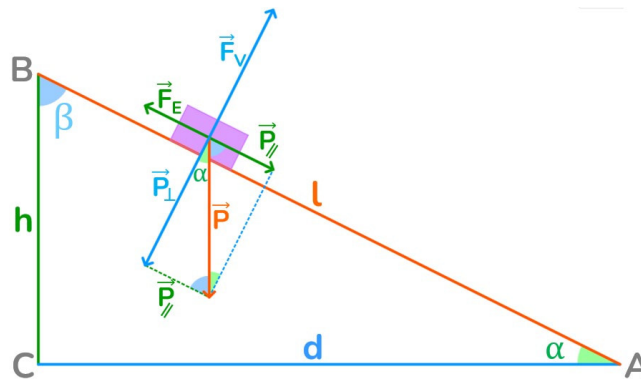


Figura 1: Piano Inclinato

Un piano inclinato è una superficie su cui un corpo scivola o si muove sotto l'effetto della gravità. Se il piano ha un angolo θ rispetto all'orizzontale, la forza gravitazionale che agisce sul corpo viene scomposta in due componenti:

- La componente parallela F_{\parallel} che provoca il movimento lungo il piano inclinato.
- La componente perpendicolare F_{\perp} che agisce in direzione normale al piano.

La componente parallela della forza gravitazionale è:

$$F_{\parallel} = mg \sin \theta$$

La componente perpendicolare della forza gravitazionale è:

$$F_{\perp} = mg \cos \theta$$

Dove: - m è la massa del corpo, - g è l'accelerazione di gravità, - θ è l'angolo di inclinazione del piano.

Accelerazione lungo il piano inclinato

Se non ci sono altre forze in gioco (come l'attrito), l'accelerazione del corpo lungo il piano inclinato è data da:

$$a = \frac{F_{\parallel}}{m} = g \sin \theta$$

Quindi l'accelerazione dipende solo dall'angolo θ e dall'accelerazione di gravità g .

Caso con attrito

Se c'è una forza di attrito $f_{\text{attrito}} = \mu F_{\perp}$, dove

$$\mu = \text{coefficiente di attrito,}$$

la forza di attrito agisce in direzione opposta al movimento lungo il piano. La componente totale delle forze lungo il piano inclinato è quindi:

$$F_{\parallel} - f_{\text{attrito}} = ma$$

Sostituendo $f_{\text{attrito}} = \mu mg \cos \theta$, otteniamo:

$$mg \sin \theta - \mu mg \cos \theta = ma$$

Dividendo per m , l'accelerazione lungo il piano inclinato con attrito è:

$$a = g(\sin \theta - \mu \cos \theta)$$

Questa equazione tiene conto sia della componente gravitazionale che della forza di attrito che agisce contro il movimento.

Dinamica

Prima legge della dinamica (Legge di inerzia)

Enunciato: Un corpo rimane nel suo stato di quiete o di moto rettilineo uniforme finché non interviene una forza esterna a modificarne lo stato.

$$\sum \vec{F} = 0 \implies \vec{v} = \text{costante}$$

Seconda legge della dinamica

Enunciato: L'accelerazione \vec{a} di un corpo è proporzionale alla forza risultante \vec{F} applicata su di esso ed è inversamente proporzionale alla sua massa m .

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

Forze d'attrito (statica e dinamica)

Descrizione: L'attrito è una forza che si oppone al moto relativo tra due superfici a contatto.

- **Attrito statico:** Si verifica quando un corpo è fermo. La sua intensità massima è:

$$f_s \leq \mu_s \cdot N$$

dove μ_s è il coefficiente di attrito statico e N la reazione normale.

- **Attrito dinamico:** Si manifesta quando un corpo è in movimento. L'intensità è:

$$f_d = \mu_d \cdot N$$

dove μ_d è il coefficiente di attrito dinamico.

Forza di Coriolis

Descrizione: La forza di Coriolis si manifesta nei sistemi di riferimento non inerziali in rotazione. È una forza apparente che agisce su corpi in movimento rispetto al sistema rotante.

$$\vec{F}_c = -2m (\vec{\omega} \times \vec{v})$$

Dove:

- m è la massa del corpo.
- $\vec{\omega}$ è il vettore velocità angolare del sistema rotante.
- \vec{v} è la velocità del corpo rispetto al sistema.

Il pendolo semplice

Descrizione: Un pendolo semplice è costituito da una massa m appesa a un filo inestensibile di lunghezza l che oscilla sotto l'effetto della gravità.

- Periodo di oscillazione per piccole oscillazioni:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

dove g è l'accelerazione gravitazionale.

- Equazione del moto:

$$\theta''(t) + \frac{g}{l} \sin \theta = 0$$

dove θ è l'angolo di spostamento.

Sistemi di riferimento non inerziali

Descrizione: Nei sistemi non inerziali, compaiono forze apparenti come:

- **Forza centrifuga:**

$$\vec{F}_{\text{cent}} = m \cdot \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$$

dove \vec{r} è il raggio vettore.

- **Forza di Coriolis:** (già definita sopra).

Forza centripeta

Descrizione: La forza centripeta è quella necessaria a mantenere un corpo in moto circolare uniforme.

$$\vec{F}_c = m \cdot \frac{v^2}{r}$$

Dove:

- m è la massa del corpo.
- v è la velocità del corpo.
- r è il raggio della traiettoria circolare.

Lavoro ed Energia

Definizione di Lavoro

Il lavoro si misura in Joule, dove $1 \text{ Joule} = 1 \text{ N} \cdot \text{m}$. Il lavoro infinitesimo compiuto da una forza \vec{F} durante uno spostamento infinitesimale $d\vec{l}$ è dato dalla quantità scalare:

$$\delta L = \vec{F} \cdot d\vec{l} = |\vec{F}| |d\vec{l}| \cos \theta = F dl \cos \theta$$

Se la forza è perpendicolare allo spostamento, il lavoro è nullo, cioè $\delta L = 0$.

Lavoro da una Forza Generica

Il lavoro compiuto da una generica forza \vec{F} , il cui punto di applicazione P si sposta da A a B lungo una linea ℓ , è dato dall'integrale del prodotto scalare fra la forza e lo spostamento infinitesimale:

$$L(a, b) = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{l}$$

Lavoro della Forza Peso

Il lavoro infinitesimo svolto dalla forza peso $\vec{F} = -mg\hat{k}$ su un punto materiale lungo uno spostamento infinitesimale $d\vec{l} = \hat{i} dx + \hat{k} dz$ è dato dal prodotto scalare:

$$\delta L = \vec{F} \cdot d\vec{l} = (-mg\hat{k}) \cdot (\hat{i} dx + \hat{k} dz) = -mg(\hat{k} \cdot \hat{i}) dx - mg(\hat{k} \cdot \hat{k}) dz = -mg dz$$

Il lavoro totale $L_{1,2}$ compiuto dalla forza peso lungo un percorso dal punto P_1 al punto P_2 con una differenza di quota $h = z_2 - z_1$ è:

$$L_{1,2} = \int_{z_1}^{z_2} -mg dz = -mg(z_2 - z_1) = mgh$$

Poiché $z_2 > z_1$, il lavoro è positivo e uguale a mgh .

Lavoro della Forza Elastica

La forza elastica su una molla compressa o estesa è data dalla legge di Hooke:

$$\vec{F} = -kx\hat{i}$$

Il lavoro infinitesimo compiuto dalla forza elastica durante uno spostamento infinitesimale dx è:

$$\delta L = \vec{F} \cdot d\vec{l} = (-kx\hat{i}) \cdot (\hat{i} dx) = -kx dx$$

Il lavoro totale $L_{1,2}$ compiuto dalla forza elastica durante uno spostamento della molla dalla posizione x_1 a x_2 è:

$$L_{1,2} = \int_{x_1}^{x_2} -kx dx = -\frac{k}{2} (x_2^2 - x_1^2)$$

Potenza di una Forza

La potenza si misura in Watt ($1\text{ W} = 1\text{ J/s}$). La potenza è definita come la capacità di una forza di compiere lavoro per unità di tempo:

$$P = \frac{\delta L}{dt} = \frac{\vec{F} \cdot d\vec{l}}{dt}$$

Poiché $d\vec{l}/dt = \vec{v}$ è la velocità del punto materiale, possiamo scrivere:

$$P = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

Il lavoro totale può essere ottenuto integrando la potenza nel tempo:

$$\delta L = P dt \quad \Rightarrow \quad L = \int P dt$$

Teorema delle Forze Vive (Energia Cinetica)

Il lavoro totale compiuto dalle forze su un corpo da A a B è uguale alla variazione della sua energia cinetica:

$$L_{A,B} = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2$$

Se $L > 0$, la forza accelera il corpo, mentre se $L < 0$, la forza decelera il corpo. L'energia cinetica è sempre positiva e si esprime come:

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2$$

Concetti Matematici

Differenziale di una Funzione

Il differenziale di una funzione $f(x, y, z)$ rappresenta quanto varia il valore della funzione quando ci spostiamo da un punto $P(x_0, y_0, z_0)$ a un punto infinitesimamente vicino $P(x_0+dx, y_0+dy, z_0+dz)$:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz$$

Operatore Nabla

L'operatore Nabla ∇ è utilizzato per esprimere il gradiente di una funzione. In termini di ∇ , il differenziale può essere scritto come:

$$df = (\nabla f) \cdot d\vec{l}$$

dove $d\vec{l} = \hat{i} dx + \hat{j} dy + \hat{k} dz$ è il vettore di spostamento infinitesimale.

Forze Conservative

Le forze conservative soddisfano le seguenti proprietà:

- Il lavoro compiuto dalla forza conservativa lungo un percorso da A a B è dato dalla differenza dell'energia potenziale nei punti A e B : $L_{A,B} = U(A) - U(B)$.
- La forza conservativa è il gradiente negativo di una funzione scalare, l'energia potenziale U : $\vec{F} = -\nabla U$.
- Il rotore della forza conservativa è nullo: $\nabla \times \vec{F} = 0$.
- Il lavoro compiuto dalla forza conservativa lungo un percorso chiuso è nullo: $\oint \vec{F} \cdot d\vec{l} = 0$.

Conservazione dell'Energia Meccanica

Il teorema della conservazione dell'energia meccanica afferma che per un sistema meccanico con vincoli ideali e forze attive conservative, l'energia meccanica E si conserva durante il moto:

$$E_m = E_c + E_p$$

L'energia meccanica si conserva lungo la traiettoria:

$$L_{A,B} = T(B) - T(A) = U(A) - U(B) \quad \Rightarrow \quad T(A) + U(A) = T(B) + U(B)$$

Esercizi con Soluzioni Su Lavoro ed Energia

Esercizio 1: Lavoro della Forza Peso

Enunciato: Un corpo di massa $m = 5 \text{ kg}$ è spostato verticalmente da P_1 a P_2 , con una differenza di quota $h = 10 \text{ m}$. Calcolare il lavoro compiuto dalla forza peso durante lo spostamento.

Soluzione: Il lavoro compiuto dalla forza peso è dato dalla formula:

$$L_{1,2} = mgh$$

Sostituendo i valori:

$$L_{1,2} = 5 \cdot 9.81 \cdot 10 = 490.5 \text{ J}$$

Pertanto, il lavoro compiuto dalla forza peso è 490.5 J .

Esercizio 2: Lavoro della Forza Elastica

Enunciato: Una molla ha una costante elastica $k = 200 \text{ N/m}$ ed è compressa da una lunghezza di $x_1 = 0.5 \text{ m}$ a $x_2 = 0.2 \text{ m}$. Calcolare il lavoro compiuto dalla forza elastica durante il percorso.

Soluzione: Il lavoro compiuto dalla forza elastica è dato dalla formula:

$$L_{1,2} = -\frac{k}{2} (x_2^2 - x_1^2)$$

Sostituendo i valori:

$$L_{1,2} = -\frac{200}{2} (0.2^2 - 0.5^2) = -100 (0.04 - 0.25) = 100 \cdot 0.21 = 21 \text{ J}$$

Pertanto, il lavoro compiuto dalla forza elastica è 21 J .

Esercizio 3: Potenza Media

Enunciato: Un motore compie un lavoro di $L = 1500 \text{ J}$ in un intervallo di tempo di $\Delta t = 5 \text{ s}$. Calcolare la potenza media sviluppata dal motore.

Soluzione: La potenza media è data dalla formula:

$$P = \frac{L}{\Delta t}$$

Sostituendo i valori:

$$P = \frac{1500}{5} = 300 \text{ W}$$

Pertanto, la potenza media sviluppata dal motore è 300 W .

Esercizio 4: Energia Cinetica e Lavoro

Enunciato: Un corpo di massa $m = 10 \text{ kg}$ parte da fermo e viene accelerato fino a raggiungere una velocità di $v = 20 \text{ m/s}$. Calcolare il lavoro compiuto dalla forza che agisce sul corpo.

Soluzione: Il lavoro compiuto dalla forza è uguale alla variazione dell'energia cinetica:

$$L = \Delta T = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2$$

Poiché il corpo parte da fermo, $v_0 = 0$, quindi:

$$L = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 20^2 = 0.5 \cdot 10 \cdot 400 = 2000 \text{ J}$$

Pertanto, il lavoro compiuto dalla forza è 2000 J .

Esercizio 5: Energia Potenziale Gravitazionale

Enunciato: Un corpo di massa $m = 3 \text{ kg}$ è sollevato da una altezza di $h = 8 \text{ m}$. Calcolare l'energia potenziale gravitazionale acquisita dal corpo.

Soluzione: L'energia potenziale gravitazionale è data dalla formula:

$$U = mgh$$

Sostituendo i valori:

$$U = 3 \cdot 9.81 \cdot 8 = 235.44 \text{ J}$$

Pertanto, l'energia potenziale acquisita dal corpo è 235.44 J .

Terzo Principio e Urti

Quantità di Moto

Si definisce la quantità di moto di un punto materiale come $q = m \cdot v$ [$\text{kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}}$]. Se la massa è costante, $F = ma = m \cdot \frac{dv}{dt} = \frac{d(mv)}{dt}$. Dal secondo principio: $F = \frac{dq}{dt}$.

Situazioni di Massa Variabile

Aumento di Massa - *Goccia d'acqua che cade*: La massa aumenta per condensazione del vapore atmosferico. - *Aereo in condizioni meteo avverse*: La massa aumenta per la formazione di ghiaccio sulle ali.

Diminuzione di Massa - *Razzo in movimento*: La massa diminuisce a causa del consumo di carburante.

Relatività La massa di un corpo dipende dalla velocità v secondo la relazione:

$$m(v) = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Dove: - m_0 : massa a riposo, - c : velocità della luce ($3 \times 10^8 \text{ m/s}$).

Momento Angolare

Il momento angolare di un punto materiale rispetto a un polo O è definito come:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = m(\vec{r} \times \vec{v})$$

Dove: - \vec{L} : momento angolare ($\text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$), - \vec{r} : vettore posizione (m), - $\vec{p} = m\vec{v}$: quantità di moto ($\text{kg} \cdot \text{m/s}$).

Se \vec{r} e \vec{v} giacciono nel piano xy , il momento angolare è lungo l'asse z :

$$\vec{L} = mr^2\vec{\omega}$$

Dove r è la distanza dal polo e $\vec{\omega}$ la velocità angolare (rad/s).

Impulso

L'azione di una forza \vec{F} in un intervallo di tempo Δt provoca una variazione della quantità di moto:

$$\vec{\mathcal{I}} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt = \Delta \vec{q}$$

Se la massa è costante:

$$\vec{\mathcal{I}} = m(\vec{v}_2 - \vec{v}_1)$$

Urti

Un urto avviene quando due corpi interagiscono in un intervallo di tempo molto breve, modificando sostanzialmente le proprie velocità.

Urti Collineari Elastici

Negli urti elastici si conservano sia la quantità di moto sia l'energia cinetica:

$$m_1 \vec{v}_{1,\text{in}} + m_2 \vec{v}_{2,\text{in}} = m_1 \vec{v}_{1,\text{fin}} + m_2 \vec{v}_{2,\text{fin}}$$

$$\frac{1}{2} m_1 v_{1,\text{in}}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2,\text{in}}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1,\text{fin}}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2,\text{fin}}^2$$

Caso particolare in una dimensione (asse x):

$$v_{1,\text{fin}} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{1,\text{in}} + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_{2,\text{in}}$$

$$v_{2,\text{fin}} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{1,\text{in}} + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_{2,\text{in}}$$

Urti Collineari - Casi Particolari

1. Masse uguali ($m_1 = m_2$): si scambiano le velocità. $v_{1,\text{fin}} = v_{2,\text{in}}$, $v_{2,\text{fin}} = v_{1,\text{in}}$. 2. Masse molto diverse ($m_1 \gg m_2$): il corpo maggiore resta quasi fermo.

Urti Completamente Anaelastici

Negli urti completamente anaelastici, i due corpi si muovono insieme dopo l'urto. Conservazione della quantità di moto:

$$m_1 \vec{v}_{1,\text{in}} + m_2 \vec{v}_{2,\text{in}} = (m_1 + m_2) \vec{v}_{\text{fin}}$$

La velocità finale comune è:

$$\vec{v}_{\text{fin}} = \frac{m_1 \vec{v}_{1,\text{in}} + m_2 \vec{v}_{2,\text{in}}}{m_1 + m_2}$$

Esercizi Sul Terzo Principio E Urti

Esercizi e Risoluzioni

Esercizio 1: Forza media e lavoro della forza frenante

Un corpo di massa $m = 1 \text{ kg}$ è in moto rettilineo uniforme ad una velocità $v = 10 \text{ m/s}$, su un piano liscio, quando entra in una regione permanendovi per $t = 0.1 \text{ s}$ in cui perde velocità scalare. All'uscita della regione il corpo ha una velocità di $v = 9 \text{ m/s}$.

1) La forza media che ha frenato il corpo

Per determinare la forza media che ha frenato il corpo, possiamo usare la seconda legge di Newton e la definizione di accelerazione media:

$$\Delta v = v_{\text{finale}} - v_{\text{iniziale}} = 9 \text{ m/s} - 10 \text{ m/s} = -1 \text{ m/s}$$

Poiché il corpo ha rallentato, l'accelerazione è negativa e può essere calcolata come:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{-1 \text{ m/s}}{0.1 \text{ s}} = -10 \text{ m/s}^2$$

La forza media F_{media} è data dalla formula:

$$F_{\text{media}} = m \cdot a = 1 \text{ kg} \cdot (-10 \text{ m/s}^2) = -10 \text{ N}$$

2) Il lavoro della forza frenante

Il lavoro L svolto dalla forza frenante è dato dalla formula:

$$L = \Delta K = \frac{1}{2}mv_{\text{finale}}^2 - \frac{1}{2}mv_{\text{iniziale}}^2$$

Sostituendo i valori:

$$L = \frac{1}{2}(1 \text{ kg})(9 \text{ m/s})^2 - \frac{1}{2}(1 \text{ kg})(10 \text{ m/s})^2 = \frac{1}{2}(81 - 100) = -9.5 \text{ J}$$

Esercizio 2: Forza media nella pistola

Da una pistola con canna lunga $L = 15 \text{ cm}$ esce un proiettile di massa $m = 5 \text{ g} = 0.005 \text{ kg}$ con velocità $v = 180 \text{ m/s}$.

1) La forza media che ha spinto il proiettile dentro la canna

Per determinare la forza media, utilizziamo il principio di conservazione dell'energia. L'energia cinetica del proiettile all'uscita dalla canna è:

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}(0.005 \text{ kg})(180 \text{ m/s})^2 = 162 \text{ J}$$

La forza media è legata al lavoro svolto sulla massa nel percorrere la canna, dove il lavoro è pari all'energia cinetica:

$$L = F_{\text{media}} \cdot L$$

Pertanto, la forza media è:

$$F_{\text{media}} = \frac{L}{L} = \frac{162 \text{ J}}{0.15 \text{ m}} = 1080 \text{ N}$$

2) Il tempo impiegato per percorrere la canna

Il tempo t impiegato dal proiettile a percorrere la canna è dato dalla relazione:

$$v = \frac{L}{t} \quad \Rightarrow \quad t = \frac{L}{v} = \frac{0.15 \text{ m}}{180 \text{ m/s}} = 8.33 \times 10^{-4} \text{ s}$$

Esercizio 3: Urto elastico tra due corpi

Una palla di acciaio di massa $m_1 = 1 \text{ kg}$ è agganciata a una corda lunga $L = 50 \text{ cm}$, fissata all'altra estremità. Essa viene rilasciata con la corda in orizzontale. Giunta nel punto più basso della sua traiettoria, la palla colpisce un blocco di acciaio di massa $m_2 = 3.5 \text{ kg}$ inizialmente fermo su una superficie orizzontale priva di attrito. L'urto è elastico.

1) La velocità della palla prima dell'urto

La velocità della palla al punto più basso della traiettoria si può trovare usando la conservazione dell'energia meccanica. Inizialmente, la palla ha energia potenziale:

$$E_{\text{pot}} = m_1 g h$$

Al punto più basso, tutta l'energia potenziale è trasformata in energia cinetica:

$$E_{\text{cin}} = \frac{1}{2} m_1 v_1^2$$

Equating the two energies:

$$m_1 g h = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 \quad \Rightarrow \quad v_1 = \sqrt{2gh}$$

Dove $h = L = 0.5 \text{ m}$ e $g = 9.81 \text{ m/s}^2$:

$$v_1 = \sqrt{2(9.81 \text{ m/s}^2)(0.5 \text{ m})} \approx 3.13 \text{ m/s}$$

2) Velocità dopo l'urto

Per l'urto elastico, si applicano le leggi di conservazione della quantità di moto e dell'energia cinetica. Le velocità finali v'_1 e v'_2 sono date dalle formule:

$$v'_1 = \frac{(m_1 - m_2)v_1}{m_1 + m_2} \quad \text{e} \quad v'_2 = \frac{2m_1 v_1}{m_1 + m_2}$$

Sostituendo i valori:

$$v'_1 = \frac{(1 \text{ kg} - 3.5 \text{ kg})(3.13 \text{ m/s})}{1 \text{ kg} + 3.5 \text{ kg}} \approx -1.74 \text{ m/s}$$

$$v'_2 = \frac{2(1 \text{ kg})(3.13 \text{ m/s})}{1 \text{ kg} + 3.5 \text{ kg}} \approx 1.4 \text{ m/s}$$

Esercizio 4: Urto anelastico tra palla di stucco e palla da biliardo

Una palla di stucco con una massa di 5 g ed una velocità $v_1 = 4 \text{ m/s}$ compie una collisione diretta e perfettamente anelastica con una palla da biliardo inizialmente ferma e che ha una massa di 500 g.

Soluzione:

Per conservazione della quantità di moto, la velocità finale comune v_f è:

$$v_f = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} = \frac{(5 \text{ g})(4 \text{ m/s}) + (500 \text{ g})(0)}{5 \text{ g} + 500 \text{ g}} = 0.0396 \text{ m/s}$$

Il lavoro compiuto durante l'urto determina la variazione di energia cinetica:

$$\Delta K = K_{\text{finale}} - K_{\text{iniziale}}$$

$$K_{\text{iniziale}} = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 = \frac{1}{2} (0.005 \text{ kg})(4 \text{ m/s})^2 = 0.04 \text{ J}$$

$$K_{\text{finale}} = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v_f^2 = \frac{1}{2} (0.005 + 0.5)(0.0396 \text{ m/s})^2 = 0.00079 \text{ J}$$

$$\Delta K = 0.00079 \text{ J} - 0.04 \text{ J} = -0.0392 \text{ J}$$

Esercizio 5: Pendolo balistico

Un proiettile, di massa m e velocità v , colpisce in modo totalmente anelastico un peso di massa M appeso al soffitto tramite un filo inestensibile. A seguito dell'urto, il peso inizia una oscillazione.

La relazione tra la velocità del proiettile e la massima altezza del peso rispetto alla sua posizione di riposo è:

$$v = \sqrt{2gh_{\text{max}}}$$

dove h_{max} è la massima altezza raggiunta dal peso, e g è l'accelerazione gravitazionale.

La velocità finale v_f del sistema dopo l'urto può essere calcolata con la conservazione della quantità di moto:

$$mv = (M + m)v_f$$

$$v_f = \frac{mv}{M + m}$$

Substituendo nella formula della velocità per trovare h_{max} , otteniamo:

$$h_{\text{max}} = \frac{v_f^2}{2g}$$

Gravitazione

Leggi di Keplero

1. I pianeti descrivono orbite piane, ellittiche, di cui il Sole occupa uno dei due fuochi.
2. Il raggio vettore che unisce il centro del Sole con il centro del pianeta descrive aree uguali in tempi uguali (velocità areolare è costante).
3. I quadrati dei tempi che i pianeti impiegano a percorrere le loro orbite sono proporzionali al cubo del semiasse maggiore dell'orbita:

$$a^3 T^2 = \text{costante}.$$

Semplificazione delle orbite

1. Orbita circolare (cerchio = ellisse con $a = b$ e $f = 1$).
2. I pianeti descrivono orbite piane, circolari, di cui il Sole occupa il centro.
3. Il raggio vettore che unisce il centro del Sole con il centro del pianeta descrive aree uguali in tempi uguali.
4. I quadrati dei tempi che i pianeti impiegano a percorrere le loro orbite sono proporzionali al cubo del raggio dell'orbita:

$$r^3 T^2 = \text{costante}.$$

Velocità areolare (cerchio)

La velocità areolare è definita come:

$$A(t) = rv,$$

con unità di misura $[A(t)] = [L^2 T^{-1}] \rightarrow \text{m}^2/\text{s}$, dove $r(\mathbf{t})$ è il raggio e v la velocità.

La velocità areolare è data da:

$$A(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta t}.$$

Per il limite $\Delta t \rightarrow 0$, possiamo scrivere:

$$A(t) = \frac{1}{2} r \Delta l.$$

Al limite, $\Delta t \rightarrow 0$, $h \rightarrow r$, e otteniamo:

$$A(t) = \frac{1}{2} r \hat{v}.$$

Quindi la velocità areolare è:

$$A(t) = \frac{1}{2} \mathbf{r} \times \mathbf{v}.$$

Gravitazione universale

1a Legge di Keplero: il moto avviene su un piano, con velocità areolare normale al piano dell'orbita.

2a Legge di Keplero: la velocità areolare è costante in modulo.

Secondo il secondo principio della dinamica, la forza che agisce su un corpo in movimento nel campo gravitazionale è:

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2} \mathbf{r} \times \mathbf{v}.$$

L'accelerazione è quindi data da:

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \mathbf{v}) = \frac{1}{2}(\mathbf{v} \times \mathbf{v} + \mathbf{r} \times \mathbf{a}).$$

Poiché $\mathbf{v} \times \mathbf{v} = 0$ e $\mathbf{r} \times \mathbf{a} = 0$, risulta:

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = 0.$$

Pertanto, la velocità areolare è costante.

3a Legge di Keplero

Schematizzando il moto dei pianeti come moto circolare uniforme, possiamo scrivere la forza centripeta:

$$F_{\text{centripeta}} = \frac{mv^2}{r}.$$

Secondo la legge di gravitazione universale, la forza gravitazionale che agisce tra due masse è:

$$F = \frac{GmM}{r^2},$$

dove G è la costante di gravitazione universale. La legge di Keplero impone che:

$$a^3 T^2 = \text{costante}.$$

Legge di gravitazione universale

Un qualsiasi punto materiale P_1 di massa m_1 esercita su un altro punto materiale P_2 di massa m_2 una forza gravitazionale diretta secondo la congiungente di P_1 con P_2 , sempre attrattiva. Il modulo della forza è direttamente proporzionale al prodotto delle due masse e inversamente proporzionale al quadrato della distanza fra i due corpi:

$$F_{12} = G \frac{m_1 m_2}{r^2}.$$

Per il terzo principio della dinamica, se P_1 esercita una forza su P_2 , allora P_2 esercita una forza su P_1 uguale e contraria.

Campo gravitazionale

La forza gravitazionale può essere riformulata utilizzando il concetto di campo di forza. Una massa M altera le proprietà dello spazio, introducendo un campo gravitazionale di cui M è la sorgente. Una seconda massa m sentirà una forza dovuta alla presenza della massa M . Il campo gravitazionale è dato da:

$$\mathbf{F}_G = -\frac{GmM}{r^2} \hat{r}.$$

Dove \hat{r} è il versore che indica la direzione radiale.

Energia Potenziale Gravitazionale

L'energia potenziale gravitazionale U tra due masse m_1 e m_2 è data da:

$$U = -\frac{Gm_1m_2}{r},$$

dove G è la costante di gravitazione universale e r è la distanza tra le due masse.

Vicino alla superficie terrestre, dove $r = R_T + z$ (con R_T il raggio della Terra e z l'altezza sopra la superficie), l'energia potenziale può essere approssimata come:

$$U(z) = -\frac{GmM_T}{R_T} \left(\frac{1}{R_T} + \frac{z}{R_T^2} \right).$$

Nel caso in cui z sia piccola rispetto al raggio della Terra ($z \ll R_T$), possiamo fare un'ulteriore approssimazione:

$$U(z) \approx -mgz,$$

dove $g = \frac{GM_T}{R_T^2}$ è l'accelerazione di gravità superficiale, e quindi $U(z)$ rappresenta l'energia potenziale gravitazionale a una altezza z dalla superficie terrestre.

Velocità di fuga

La velocità di fuga è la velocità minima che un corpo deve avere per allontanarsi da un altro corpo senza ricadervi. La velocità di fuga è data da:

$$v_{\text{fuga}} = \sqrt{\frac{2GM}{R}}.$$

Esercizi - Gravitazione

Un importante ruolo nelle moderne telecomunicazioni è giocato dai satelliti geostazionari, ossia satelliti che ruotano alla distanza $R = 41900$ km dal centro della Terra, con la stessa velocità angolare della Terra e che rimangono costantemente sopra una certa zona. Determinare:

1. La velocità angolare dei satelliti geostazionari.

$$\omega = \sqrt{\frac{GM}{R^3}} = \sqrt{\frac{(6.674 \times 10^{-11})(5.972 \times 10^{24})}{(4.19 \times 10^7)^3}} \approx 7.12 \times 10^{-5} \text{ rad/s}.$$

2. La massa della Terra.

$$M = \frac{R^3\omega^2}{G} = \frac{(4.19 \times 10^7)^3(7.12 \times 10^{-5})^2}{6.674 \times 10^{-11}} \approx 5.972 \times 10^{24} \text{ kg}.$$

3. L'energia cinetica del satellite.

$$E_{\text{cinetica}} = \frac{1}{2}mv^2, \quad v = \omega R = (7.12 \times 10^{-5})(4.19 \times 10^7) \approx 2970 \text{ m/s}.$$

Elettrostatica

Cariche

La carica dell'elettrone è $q_e = -1.6 \times 10^{-19}$ C, mentre la carica del protone è $q_p = 1.6 \times 10^{-19}$ C.

Limite sperimentale: $\left| \frac{|q_e| - |q_p|}{|q_p|} \right| < 10^{-21}$

Legge di Coulomb

La forza elettrostatica tra due cariche puntiformi q_1 e q_2 a distanza r è descritta dalla Legge di Coulomb:

$$F_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|q_1 q_2|}{r^2}$$

Dove:

- F_{12} è la forza elettrostatica tra le cariche q_1 e q_2 ,
- ϵ_0 è la costante dielettrica del vuoto (8.85×10^{-12} C² N⁻¹ m⁻²),
- r è la distanza tra le cariche.

La direzione della forza è lungo la retta che congiunge le due cariche. Se le cariche hanno lo stesso segno, la forza è repulsiva, se di segno opposto, è attrattiva.

Bilancia di Torsione

La bilancia di torsione misura la forza elettrostatica tra due cariche. La torsione del pendolo, che dipende dalla forza elettrostatica, è descritta da:

$$F_{\text{elettrica}} = F_{\text{torsione}}$$

La relazione tra la forza elettrica e l'angolo di torsione θ è:

$$|F_{\text{elettrica}}| \propto \theta$$

Forza Elettrostatica vs Forza Gravitazionale

La forza elettrostatica è molto più intensa della forza gravitazionale. Le forze gravitazionali sono sempre attrattive, mentre le forze elettrostatiche possono essere sia attrattive che repulsive a seconda del segno delle cariche.

La formula della forza gravitazionale (Legge di Newton) è:

$$F_{\text{gravitazionale}} = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

Dove:

- $F_{\text{gravitazionale}}$ è la forza gravitazionale,
- m_1 e m_2 sono le masse delle particelle,
- r è la distanza tra le masse,
- G è la costante gravitazionale.

Campo Elettrico

Il campo elettrico \vec{E} è creato da una carica Q e descrive la forza che agirebbe su una carica di prova q posta a distanza r :

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \hat{r}$$

Dove:

- ϵ_0 è la costante dielettrica del vuoto,
- Q è la carica che genera il campo,
- r è la distanza dalla carica Q ,
- \hat{r} è il versore unitario che punta dalla carica Q al punto di calcolo del campo.

Forza sul Corpo di Prova

La forza che una carica di prova q subisce in un campo elettrico è data da:

$$\vec{F}(\vec{r}) = q\vec{E}(\vec{r})$$

Densità di Carica

La densità di carica può essere volumetrica, superficiale o lineare:

- Densità volumetrica: $\rho = \frac{dq}{d\tau}$,
- Densità superficiale: $\sigma = \frac{dq}{dS}$,
- Densità lineare: $\lambda = \frac{dq}{dl}$.

Campo Elettrico da una Distribuzione Continua di Carica

Il campo elettrico creato da una distribuzione continua di carica è dato da:

$$d\vec{E}(\vec{r}) = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

Per ottenere il campo totale, si integra la somma dei contributi di tutti gli elementi di carica:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\tau} \frac{\rho(\vec{r}')(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d\tau$$

Il Campo Elettrico è Conservativo?

Circuitazione del Campo Elettrostatico

Calcoliamo la circuitazione del campo lungo la linea chiusa: una circonferenza di raggio R centrata in Q . La formula per la circuitazione è data da:

$$\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \oint_{\Gamma} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{u}_r \cdot \hat{u}_t dl = 0$$

Il campo elettrico (elettrostatico) generato da una carica puntiforme ferma è conservativo.

Proprietà del Campo Elettrostatico

Il campo elettrostatico eredita tutte le proprietà dei campi conservativi:

$$\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$
$$\nabla \times \vec{E} = 0$$

Il campo elettrostatico ha sempre circuitazione nulla, ed è irrotazionale (non esistono linee di campo chiuse su loro stesse).

Potenziale Elettrostatico

Il campo elettrostatico eredita tutte le proprietà dei campi conservativi. Il potenziale elettrostatico $V(x, y, z)$ è una funzione scalare in \mathbb{R}^3 . Dato un campo elettrostatico, operativamente il potenziale si calcola integrando il differenziale esatto:

$$dV = -\vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Il potenziale è definito a meno di una costante additiva arbitraria. La differenza di potenziale tra due punti è indipendente dalla costante arbitraria (è una grandezza misurabile, come nel caso dei circuiti):

$$V(A) - V(B) = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

L'unità di misura del potenziale nel S.I. è il Volt ($V = \frac{J}{C}$), e le sue dimensioni sono:

$$[V] = [E][L] = [ML^2T^{-3}I^{-1}]$$

Il potenziale elettrostatico per una carica puntiforme è dato da:

$$V(r) = - \int \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{u}_r \cdot (\hat{u}_r dr + \hat{u}_\perp dl) + \text{cost}$$

Calcoliamo V dall'integrale indefinito lungo una generica curva:

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r} + \text{cost}$$

In genere si fissa il potenziale nullo all'infinito:

$$V(r \rightarrow \infty) = 0 \Rightarrow \text{cost} = 0$$

Differenza di Potenziale tra i Punti A e B

La differenza di potenziale tra i punti A e B è data da:

$$\Delta V_{AB} = V_A - V_B = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right)$$

Assumendo il potenziale nullo all'infinito, otteniamo il potenziale nei punti A e B :

$$V_A = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r_A}, \quad V_B = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r_B}$$

Campo Elettrico Generato da N Cariche Discrete

Un campo elettrostatico generato da N cariche discrete o da una distribuzione continua di carica è conservativo. In particolare, la circuitazione del campo per il principio di sovrapposizione è:

$$\nabla \times \vec{E} = \nabla \times \left(\sum \vec{E}_i \right) = \sum \nabla \times \vec{E}_i = 0$$

Il potenziale totale generato da un sistema di N cariche puntiformi è la somma algebrica dei singoli potenziali generati dalle cariche q_i :

$$V(x, y, z) = \sum_{i=1}^N V_i(x, y, z) = \sum_{i=1}^N \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i}{r_i}$$

Potenziale per Sistemi Continuo di Cariche

Per sistemi continui di cariche, come cariche volumetriche, superficiali o lineari, il potenziale in un punto $P(x, y, z)$ è dato da:

$$V(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

Carica Lineare:

$$V(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\lambda(\vec{r}') dl}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

Carica Superficiale:

$$V(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint \frac{\sigma(\vec{r}') dS}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

Carica Volumetrica:

$$V(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \frac{\rho(\vec{r}') d\tau}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

Attenzione! Come nel caso del campo elettrico, queste sono formule generali che devono essere utilizzate con cautela.

Esempi

1. Campo e Potenziale Elettrostatico di Due Cariche Uguali su un Asse

Siano date due cariche uguali q posizionate sull'asse y di un sistema di riferimento cartesiano a distanza d dall'origine. Determiniamo l'espressione del campo e del potenziale elettrostatico sull'asse x .

La legge di Coulomb ci dice che il campo generato da una carica q in un punto \mathbf{r} è dato da:

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2}$$

Nel nostro caso, le due cariche sono simmetriche rispetto all'asse x , quindi solo la componente lungo x del campo risultante sarà non nulla.

Per il calcolo del campo, consideriamo una carica q sulla posizione $(0, d)$. Il contributo al campo sul punto $(x, 0)$ dovuto a questa carica è:

$$\mathbf{E}_1 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{x}{(x^2 + d^2)^{3/2}} \hat{i}$$

Similmente, per la seconda carica q posizionata su $(0, -d)$, otteniamo un campo simile con direzione opposta, quindi il campo totale \mathbf{E} sarà:

$$E(\mathbf{x}, 0, 0) = \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{x}{(x^2 + d^2)^{3/2}} \hat{i}$$

2. Campo e Potenziale di un Filo Rettilineo con Carica Uniforme

Determinare il campo e il potenziale elettrostatico generato da un filo rettilineo indefinito su cui è depositata uniformemente una carica con densità lineare λ .

Il campo elettrostatico in un punto a distanza r dal filo è dato da:

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$$

La direzione del campo è radiale, perpendicolare al filo. La componente del campo è quindi:

$$\mathbf{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \hat{u}_r$$

3. Campo Elettrostatico sull'Asse di un Anello

Determinare il campo elettrostatico sull'asse di un anello di raggio R su cui è depositata uniformemente una carica Q .

L'espressione per il campo elettrostatico lungo l'asse di un anello di carica è:

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{z}{(z^2 + R^2)^{3/2}} \hat{k}$$

Dove z è la distanza dal centro dell'anello lungo l'asse z , e \hat{k} è il versore lungo l'asse z .

4. Campo Elettrostatico sull'Asse di un Disco

Determinare il campo elettrostatico sull'asse di un disco di raggio R su cui è depositata uniformemente una carica Q .

Per un disco carico uniformemente, il campo sull'asse a distanza z dal centro è dato da:

$$\mathbf{E} = \frac{Qz}{2\pi\epsilon_0 R^2} \left(\frac{1}{|z|} - \frac{1}{(z^2 + R^2)^{1/2}} \right) \hat{k}$$

5. Differenza di Potenziale tra Due Piani Paralleli con Carica Opposta

Determinare la differenza di potenziale elettrostatico tra due piani paralleli indefiniti, posti a distanza d , su cui è depositata uniformemente una densità superficiale di carica uguale ed opposta.

Il campo elettrico tra due piani carichi con densità superficiale σ è dato da:

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

Poiché le cariche sono opposte, la differenza di potenziale tra i due piani è:

$$\Delta V = E \cdot d = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \cdot d$$

6. Potenziale e Campo di una Barra Curvata a Semicerchio

Una sottile barra di plastica ha una densità lineare di carica positiva uniforme. La barra è curvata a forma di semicerchio di raggio R . Determinare:

a) Il potenziale elettrostatico nel centro O del semicerchio.

b) Il campo elettrostatico nel punto O .

a) Il potenziale elettrostatico nel centro O di un semicerchio carico uniformemente è dato da:

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}$$

b) Il campo elettrico nel centro O di un semicerchio carico uniformemente è:

$$\mathbf{E} = \frac{2\lambda\pi}{\epsilon_0 R} \hat{i}$$

Dove λ è la densità lineare di carica.

Lavoro della Forza Elettrostatica

Il lavoro compiuto dalla forza elettrostatica nel trasferire una carica q da un punto A a un punto B in un campo elettrico è dato da:

$$\mathcal{L}_{el} = \int_A^B \vec{F}_{el} \cdot d\vec{l} = \int_A^B q\vec{E} \cdot d\vec{l} = q \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = q(V_A - V_B) = q\Delta V_{AB}$$

La forza elettrostatica $\vec{F}_{el} = q\vec{E}$ è proporzionale al campo elettrico. Poiché la forza elettrostatica è conservativa, il lavoro dipende solo dalla posizione iniziale e finale della carica, ma non dal percorso seguito.

Pertanto, il lavoro fatto dalla forza elettrostatica per spostare una carica q dalla posizione A alla posizione B è legato alla differenza di potenziale elettrico tra i due punti.

Energia Elettrostatica

L'energia potenziale elettrostatica di una carica q in un punto dello spazio dove è presente un potenziale elettrico V è definita come:

$$U_E = qV$$

La variazione dell'energia potenziale corrisponde a una variazione nell'energia cinetica, secondo il principio di conservazione dell'energia meccanica:

$$T_{in} + U_{in} = T_{fin} + U_{fin} \Rightarrow \Delta T = -\Delta U_E$$

dove T è l'energia cinetica della particella. L'energia potenziale elettrostatica si misura in Joule (J), ma in Fisica delle Particelle è comune utilizzare l'elettronvolt (eV), che è definito come l'energia cinetica acquisita da una carica elementare accelerata da una differenza di potenziale di 1 Volt:

$$1 \text{ eV} = q_e V = (1.6 \times 10^{-19} \text{ C}) \times (1 \text{ V}) = 1.6 \times 10^{-19} \text{ J}$$

Poiché la forza elettrostatica è conservativa, l'energia meccanica totale (cinetica T + potenziale U_E) si conserva, ossia:

$$\mathcal{E} = T + U_E$$

Moto di una Carica in un Campo Elettrostatico

Un oggetto di massa m e carica q , posto in un campo elettrico \vec{E} , è soggetto alla forza elettrostatica:

$$\vec{F} = q\vec{E}$$

Secondo la seconda legge di Newton, la forza è anche uguale alla massa per l'accelerazione:

$$ma = q\vec{E}$$

dove a è l'accelerazione della particella. Da questa relazione otteniamo l'equazione del moto della carica:

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{q}{m}\vec{E}$$

Data la posizione iniziale e la velocità iniziale, possiamo determinare la traiettoria della carica nel campo elettrico. Poiché il campo elettrostatico è conservativo, è anche possibile utilizzare il principio di conservazione dell'energia meccanica, che fornisce un'altra relazione tra energia cinetica ed energia potenziale elettrostatica:

$$\Delta T = -\Delta U_E$$

Questo implica che la variazione dell'energia cinetica è uguale alla variazione dell'energia potenziale elettrostatica.

Esempio: Moto di una Carica in Campo Elettrico Uniforme

Determinare la velocità finale di una particella di massa m e carica q^+ , inizialmente ferma ($v_A = 0$), che si muove su un piano uniformemente carico positivamente dopo aver percorso una distanza D .

Dati e ipotesi

Il campo elettrico generato da un piano uniformemente carico positivamente con densità superficiale di carica σ è costante e dato da:

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\hat{i}$$

Poiché la forza elettrostatica è costante, il moto della particella sarà uniformemente accelerato.

Soluzione

La forza elettrostatica che agisce sulla particella è:

$$\vec{F} = q\vec{E} = q \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{i}$$

L'accelerazione della particella, usando la seconda legge di Newton $F = ma$, è:

$$a = \frac{q}{m} \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

Poiché il moto è uniformemente accelerato, la velocità finale v_B può essere determinata utilizzando la formula:

$$v_B = v_A + at = 0 + \left(\frac{q}{m} \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \right) t$$

La posizione finale x_B della particella è invece:

$$x_B = x_A + v_A t + \frac{1}{2} a t^2$$

Poiché $v_A = 0$ e $x_A = 0$, la posizione finale è:

$$x_B = \frac{1}{2} a t^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{q}{m} \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \right) t^2$$

Da questa, possiamo esprimere il tempo t in funzione di D :

$$D = \frac{1}{2} \left(\frac{q}{m} \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \right) t^2$$

Risolvendo per t , otteniamo:

$$t = \sqrt{\frac{2m\epsilon_0 D}{q\sigma}}$$

Ora possiamo calcolare la velocità finale v_B :

$$v_B = \frac{q}{m} \frac{\sigma}{2\epsilon_0} t = \frac{q}{m} \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \sqrt{\frac{2m\epsilon_0 D}{q\sigma}}$$

Risolvendo, otteniamo:

$$v_B = \sqrt{\frac{q\sigma}{m\epsilon_0} D}$$

Metodo Alternativo: Conservazione dell'energia

In alternativa, possiamo utilizzare la conservazione dell'energia meccanica per risolvere il problema.

L'energia potenziale elettrostatica iniziale è:

$$U_A = 0$$

L'energia potenziale elettrostatica finale, U_B , è:

$$U_B = qV_B = q \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = q \int_0^D \frac{\sigma}{2\epsilon_0} dx = q \frac{\sigma}{2\epsilon_0} D$$

L'energia cinetica finale è:

$$T_B = \frac{1}{2} m v_B^2$$

La conservazione dell'energia meccanica impone che:

$$T_A + U_A = T_B + U_B$$

Poiché $T_A = 0$ e $U_A = 0$, abbiamo:

$$\frac{1}{2} m v_B^2 = q \frac{\sigma}{2\epsilon_0} D$$

Risolvendo per v_B , otteniamo la stessa espressione:

$$v_B = \sqrt{\frac{2q\sigma}{m\epsilon_0} D}$$

Il Dipolo Elettrico

Un dipolo elettrico è un sistema formato da due cariche elettriche di uguale valore assoluto ma segno opposto (Q e $-Q$), poste a una distanza fissata d .

$$\begin{array}{ccc} +Q & \text{e} & -Q \\ \text{distanza} & & d \end{array}$$

Molti materiali isolanti sono formati da molecole che hanno una struttura “dipolare”. Definiamo il momento di dipolo \vec{p} come segue:

$$\vec{p} = Q \cdot \vec{d}$$

Azioni Meccaniche su un Dipolo Elettrico

Calcoliamo il momento della forza esercitato da un campo esterno su un dipolo. La formula per il momento \vec{M} della forza è:

$$\vec{M} = \vec{p} \times \vec{E}$$

Poiché trattandosi di due forze di uguale modulo QE , direzione e verso opposti, le cui rette di azione distano $d \sin \theta$, si ha:

$$\vec{M} = pE \sin \theta$$

Il Flusso del Campo Elettrico

Il flusso del campo elettrico \vec{E} attraverso una superficie S dipende dall'orientamento della superficie stessa e dal campo elettrico che la attraversa.

Flusso infinitesimo attraverso una superficie dS

Il flusso infinitesimo attraverso una superficie infinitesima dS si calcola come il prodotto scalare tra il campo elettrico \mathbf{E} e il vettore normale \hat{n} alla superficie, moltiplicato per l'area dS della superficie infinitesima:

$$d\Phi_S(\mathbf{E}) = \mathbf{E} \cdot \hat{n} dS = E dS \cos \alpha = E d\Sigma$$

Dove: - α è l'angolo tra il campo elettrico \mathbf{E} e il vettore normale alla superficie \hat{n} . - $d\Sigma = dS \cos \alpha$ è l'elemento di superficie proiettato lungo la direzione del campo elettrico.

Flusso totale attraverso una superficie S

Il flusso del campo elettrico attraverso una superficie estesa S è dato dall'integrale del flusso infinitesimo su tutta la superficie:

$$\Phi_S(\mathbf{E}) = \iint_S \mathbf{E} \cdot \hat{n} dS = \iint_S E \cos \alpha dS = \iint_S E d\Sigma$$

Questo è l'integrale che calcola il flusso del campo elettrico attraverso tutta la superficie S , tenendo conto di come il campo varia sulla superficie.

Il Flusso del Campo Elettrico e la Legge di Gauss

Consideriamo ora una superficie chiusa contenente al suo interno una carica elettrica puntiforme q . La ****Legge di Gauss**** stabilisce che il flusso del campo elettrico attraverso una superficie chiusa S è proporzionale alla carica racchiusa all'interno della superficie. La Legge di Gauss è una delle leggi fondamentali dell'elettromagnetismo ed è espressa dalla seguente equazione:

$$\boxed{\Phi_S(\mathbf{E}) = \iint_S \mathbf{E} \cdot \hat{n} dS = \frac{q}{\epsilon_0}}$$

Dove: - q è la carica elettrica racchiusa nella superficie. - ϵ_0 è la costante dielettrica nel vuoto (approssimativamente $8.854 \times 10^{-12} \text{ F/m}$).

Questa relazione stabilisce che il flusso del campo elettrico attraverso una superficie chiusa è direttamente proporzionale alla carica racchiusa dentro la superficie, e la costante di proporzionalità è la costante dielettrica ϵ_0 .

Flusso attraverso una superficie sferica

Nel caso di una superficie sferica di raggio r , il flusso del campo elettrico può essere scritto come:

$$\Phi_S(\mathbf{E}) = \frac{q}{\epsilon_0} = \iint_S \mathbf{E} \cdot \hat{n} dS$$

In questo caso, il campo elettrico generato da una carica puntiforme è radiale e ha la stessa intensità su tutte le superfici sferiche concentriche attorno alla carica. Pertanto, il flusso attraverso una superficie sferica dipende solo dalla carica q e dal raggio r della superficie.

Notazione dell'integrale su superficie chiusa

Il flusso infinitesimo attraverso un elemento di superficie dS è dato dalla relazione:

$$d\Phi_S = \mathbf{E} \cdot \hat{n} dS = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \iint_S d\Omega$$

Dove: - $d\Omega$ è l'angolo solido corrispondente alla superficie infinitesima.

Il flusso totale attraverso una superficie chiusa è quindi:

$$\Phi_S(\mathbf{E}) = \frac{q}{\epsilon_0}$$

Questo implica che il flusso è indipendente dalla forma della superficie, ma dipende solo dalla carica racchiusa all'interno della superficie stessa.

Il Flusso del Campo Elettrico in Presenza di Cariche Esterne

Se la carica q è esterna alla superficie chiusa, il flusso del campo elettrico attraverso la superficie chiusa è nullo. Questo accade perché il numero di linee di campo che entrano nella superficie è uguale al numero di linee di campo che escono dalla superficie, e quindi il flusso netto è zero. In questo caso, si ha:

$$\Phi_S(\mathbf{E}) = 0$$

Flusso infinitesimo in presenza di cariche esterne

Se ci sono due superfici distinte con campi elettrici \mathbf{E}_1 e \mathbf{E}_2 , il flusso totale sarà la somma dei flussi attraverso le due superfici. L'espressione per il flusso totale è:

$$d\Phi_{S_1}(\mathbf{E}_1) + d\Phi_{S_2}(\mathbf{E}_2) = \mathbf{E}_1 \cdot \hat{n}_1 dS_1 + \mathbf{E}_2 \cdot \hat{n}_2 dS_2$$

Il flusso totale attraverso la superficie chiusa è quindi:

$$\Phi_S(\mathbf{E}) = \iint_S \mathbf{E} \cdot \hat{n} dS = 0$$

Poiché la carica è esterna alla superficie chiusa, il flusso netto attraverso la superficie è nullo, come previsto dalla Legge di Gauss.

Esempi

Esempio 1: Campo Elettrico da un Filo Rettilineo Indefinito

Determinare il campo elettrico generato da un filo rettilineo indefinito su cui è depositata uniformemente una carica con densità lineare λ .

Soluzione:

Consideriamo una superficie cilindrica con asse coincidente con quello del filo e raggio r . Il flusso del campo elettrico attraverso la superficie cilindrica è:

$$\Phi_S(\mathbf{E}) = \iint_S \mathbf{E} \cdot \hat{n} dS = E(2\pi r L)$$

Dove: - L è la lunghezza del cilindro. - r è il raggio della superficie cilindrica.

Dal lato destro dell'equazione, il flusso è uguale alla densità lineare λ moltiplicata per la lunghezza L della superficie:

$$\Phi_S(\mathbf{E}) = \lambda L$$

Da cui otteniamo il campo elettrico:

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$$

Questo campo è radiale e diminuisce con il reciproco della distanza dal filo.

Esempio 2: Campo Elettrico da un Piano Indefinito

Determinare il campo elettrico generato da un piano indefinito su cui è depositata uniformemente una carica con densità superficiale σ .

Soluzione:

Consideriamo una superficie gaussiana sotto forma di un cilindro con basi parallele al piano. Il flusso del campo elettrico attraverso le basi della superficie è:

$$\Phi_S(\mathbf{E}) = 2EA$$

Dove A è l'area della base del cilindro.

Dal lato destro dell'equazione, il flusso è dato dalla densità superficiale σ moltiplicata per l'area A :

$$\Phi_S(\mathbf{E}) = \frac{\sigma A}{\epsilon_0}$$

Da cui otteniamo il campo elettrico:

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

Questo campo è uniforme e non dipende dalla distanza dal piano.

Esempio 3: Campo Elettrico da un Guscio Sferico

Determinare il campo elettrico e il potenziale generato da un guscio sferico di raggio R su cui è depositata uniformemente una carica Q .

Soluzione:

- a) Determinare il campo elettrico:

$$\mathbf{E}(r) = \begin{cases} 0 & \text{per } r < R \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \hat{r} & \text{per } r \geq R \end{cases}$$

- b) Potenziale esterno alla sfera:

$$V(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

- c) Potenziale interno alla sfera:

$$V(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}$$

- d) Differenza di potenziale tra il centro e la superficie della sfera:

$$\Delta V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r} \right)$$

La Divergenza di un Campo Vettoriale

Consideriamo il flusso di un campo vettoriale \mathbf{F} attraverso una superficie chiusa S che delimita un volume τ . Il flusso attraverso S è dato dall'integrale:

$$\Phi_S(\mathbf{F}) = \iint_S \mathbf{F} \cdot \hat{n} dS$$

Se dividiamo idealmente il volume τ in due volumi τ_1 e τ_2 , usando una superficie di separazione D (un diaframma), otteniamo due superfici chiuse, S_1 e S_2 , che delimitano rispettivamente i volumi τ_1 e τ_2 , con $D \subset S_1, S_2$. Possiamo riscrivere il flusso come somma dei flussi attraverso le due superfici:

$$\Phi_S(\mathbf{F}) = \iint_{S_1} \mathbf{F} \cdot \hat{n}_1 dS_1 + \iint_{S_2} \mathbf{F} \cdot \hat{n}_2 dS_2$$

Definizione di Divergenza di un Campo Vettoriale

Suddividendo il volume τ in N volumi τ_i , delimitati da altrettante superfici S_i , la divergenza di un campo vettoriale \mathbf{F} è definita come:

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \lim_{\tau_i \rightarrow 0} \frac{\Phi_{S_i}(\mathbf{F})}{\tau_i}$$

Dove:

$$\Phi_{S_i}(\mathbf{F}) = \iint_{S_i} \mathbf{F} \cdot \hat{n}_i dS_i$$

In altre parole, la divergenza misura il flusso uscente per unità di volume. La divergenza è una grandezza scalare che dipende dalle coordinate e può variare da punto a punto. Per un campo vettoriale \mathbf{F} in uno spazio tridimensionale, la divergenza è espressa come:

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial x} F_x + \frac{\partial}{\partial y} F_y + \frac{\partial}{\partial z} F_z$$

Dove $\mathbf{F} = (F_x, F_y, F_z)$ è il campo vettoriale nelle direzioni x, y, z .

Il Teorema della Divergenza

Il teorema della divergenza afferma che il flusso di un campo vettoriale attraverso una superficie chiusa S è pari all'integrale della divergenza del campo sul volume τ delimitato dalla superficie. Matematicamente:

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \hat{n} dS = \iiint_{\tau} \operatorname{div} \mathbf{F} d\tau$$

In pratica, questo teorema lega il flusso di un campo vettoriale attraverso una superficie chiusa con il comportamento locale del campo all'interno del volume delimitato dalla superficie. Quando suddividiamo il volume in N parti, il flusso totale attraverso S si esprime come:

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \hat{n} dS = \sum_{i=1}^N \iint_{S_i} \mathbf{F} \cdot \hat{n}_i dS_i$$

Nel limite in cui $N \rightarrow \infty$ e $\tau_i \rightarrow 0$, otteniamo l'integrale volume:

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \hat{n} dS = \iiint_{\tau} \operatorname{div} \mathbf{F} d\tau$$

La Legge di Gauss in Forma Locale

Combiniamo il teorema della divergenza con la legge di Gauss, in presenza di una distribuzione continua di carica. La legge di Gauss in forma locale afferma che:

$$\iiint_{\tau(S)} \operatorname{div} \mathbf{E} d\tau = \iiint_{\tau(S)} \frac{\rho}{\epsilon_0} d\tau$$

Dove \mathbf{E} è il campo elettrico e ρ è la densità di carica. Applicando il teorema della divergenza alla superficie chiusa S , otteniamo:

$$\iint_S \mathbf{E} \cdot \hat{n} dS = \iiint_{\tau(S)} \frac{\rho}{\epsilon_0} d\tau$$

Questo esprime il fatto che il flusso del campo elettrico attraverso una superficie chiusa è proporzionale alla carica totale racchiusa all'interno della superficie, con la costante di proporzionalità $\frac{1}{\epsilon_0}$.

Significato Fisico della Divergenza

La divergenza di un campo fornisce informazioni sul comportamento locale delle linee di campo. Se la divergenza è positiva in un punto, significa che le linee di campo divergono da quel punto (le linee di campo "escono" dalla zona). Se la divergenza è negativa, le linee di campo convergono verso il punto. Quando la divergenza è nulla, le linee di campo non si incontrano né divergono.

Nel caso del campo elettrico \mathbf{E} , la divergenza è direttamente collegata alla densità di carica ρ :

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Nel vuoto, dove non ci sono cariche, la divergenza del campo elettrico è nulla:

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 0$$

Potenziale e Legge di Gauss in Forma Locale

Partendo dalla relazione $\mathbf{E} = -\nabla V$ tra il campo elettrico \mathbf{E} e il potenziale V , possiamo scrivere la legge di Gauss in forma locale come:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Sostituendo $\mathbf{E} = -\nabla V$, otteniamo:

$$\nabla \cdot (-\nabla V) = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Da cui segue l'equazione di Poisson per il potenziale elettrico:

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Questa è l'equazione che descrive il comportamento del potenziale elettrico in presenza di una distribuzione di carica.

Esempio: Calcolare la Divergenza del Campo e il Flusso Attraverso una Superficie Sferica

Consideriamo un campo elettrico $\mathbf{F} = k\hat{r}$ (dove k è una costante) e calcoliamo la divergenza di questo campo. In coordinate sferiche, la divergenza di un campo radiale $\mathbf{F} = F(r)\hat{r}$ è data da:

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 F(r))$$

Se $\mathbf{F} = k\hat{r}$, abbiamo $F(r) = k$, e quindi la divergenza è:

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = 0$$

Il flusso attraverso una superficie sferica di raggio R centrata nell'origine, per una carica puntiforme, è:

$$\Phi_S(\mathbf{F}) = \iint_S \mathbf{F} \cdot \hat{n} \, dS = k \iint_S dS = 4\pi k R^2$$

Elettrostatica dei Conduttori

Equilibrio Elettrostatico nei Conduttori

Scegliamo un sistema di riferimento inerziale. Un corpo si muove con velocità costante v , quindi $F = ma$. In presenza di un campo elettrostatico esterno, le cariche del conduttore si spostano fino a raggiungere una nuova condizione di equilibrio (tempo caratteristico $t \sim 10^{-9}$ s). In equilibrio: - Le cariche sono ferme ($\vec{F} = 0$). - Il campo elettrico è complessivamente nullo ($\vec{E} = 0$).

Le cariche si dispongono in modo da generare un campo interno indotto che annulla il campo esterno. Pertanto, **il campo elettrico all'interno dei conduttori è sempre nullo.**

Elettrizzazione per Contatto

Quando un conduttore viene a contatto con una bacchetta carica, parte della carica si trasferisce al conduttore. Dopo aver rimosso il contatto, la carica resta sul conduttore e si osserva una nuova situazione di equilibrio ($\vec{E}_{\text{cond}} = 0$). La quantità di carica trasferita è misurabile con un elettroscopio.

Carica Interna ai Conduttori

Consideriamo una superficie chiusa S interna al conduttore. Applichiamo la legge di Gauss:

$$\Phi_S(\vec{E}) = \iint_S \vec{E} \cdot \hat{n} dS = \frac{Q_S}{\epsilon_0}$$

Poiché $\vec{E} = 0$ all'interno del conduttore, segue che la carica interna alla superficie S è nulla:

$$Q_S = \iiint_V \rho d\tau = 0$$

Campo Elettrico in Prossimità della Superficie dei Conduttori

In equilibrio elettrostatico, le cariche si dispongono sulla superficie del conduttore. Il campo generato da tali cariche è **normale** alla superficie del conduttore:

$$\vec{E} = E_n \hat{n}$$

Utilizzando un cilindretto infinitesimo con asse ortogonale alla superficie, possiamo calcolare il campo tramite la legge di Gauss:

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

Conduttori Cavi

Sulla superficie interna di un conduttore cavo: - La carica totale è nulla. - Non si osservano cariche localizzate.

Applichiamo la legge di Gauss:

$$\Phi_S(\vec{E}) = \frac{Q_S}{\epsilon_0} = 0 \implies Q_S = 0$$

Potenziale Elettrostatico nei Conduttori

La differenza di potenziale tra due punti A e B del conduttore è nulla:

$$V_A - V_B = \int_B^A \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

Tutti i punti del conduttore sono equipotenziali.

Potenziale di un Conduttore Sferico

Per un conduttore carico di forma sferica (carica totale Q , raggio R), il campo elettrico è:

$$\vec{E} = \begin{cases} 0 & \text{se } r < R \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \hat{u}_r & \text{se } r \geq R \end{cases}$$

Il potenziale elettrostatico è:

$$V(r) = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} & \text{se } r < R \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} & \text{se } r \geq R \end{cases}$$

Ridistribuzione delle Cariche

Ridistribuzione delle Cariche tra Due Sfere Conduttrici

Siano date due sfere conduttrici di raggi R_1 e R_2 , con $R_1 > R_2$. Inizialmente, sulla prima sfera c'è una carica Q_0 , mentre la seconda sfera è scarica. Le sfere sono poste a distanza tale da poter trascurare effetti di induzione elettrostatica. Successivamente, le sfere vengono connesse con un sottile cavo conduttore. Come si ridistribuisce la carica?

Conservazione della Carica ed Equipotenzialità

Dobbiamo calcolare le cariche finali sulle due sfere, Q_1 e Q_2 . Per la conservazione della carica:

$$Q_1 + Q_2 = Q_0$$

Le due sfere unite formano un unico conduttore, quindi valgono le condizioni di equipotenzialità:

$$V_1 = V_2$$

Sapendo che:

$$V_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1}{R_1}, \quad V_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_2}{R_2}$$

eguagliando i potenziali otteniamo:

$$\frac{Q_1}{R_1} = \frac{Q_2}{R_2} \implies Q_1 R_2 = Q_2 R_1$$

Soluzione del Sistema

Risolviendo il sistema:

$$\begin{cases} Q_1 + Q_2 = Q_0 \\ Q_1 R_2 = Q_2 R_1 \end{cases}$$

Sostituendo $Q_2 = Q_0 - Q_1$ nella seconda equazione, otteniamo:

$$Q_1(R_1 + R_2) = Q_0 R_1 \implies Q_1 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} Q_0$$

$$Q_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} Q_0$$

La carica si ridistribuisce proporzionalmente al raggio.

Caso Particolare: $R_1 = R_2$ Se $R_1 = R_2$, allora:

$$Q_1 = Q_2 = \frac{Q_0}{2}$$

Potere delle Punte

Le densità superficiali di carica e i campi elettrici delle sfere sono dati da:

$$\sigma_1 = \frac{Q_1}{4\pi R_1^2}, \quad \sigma_2 = \frac{Q_2}{4\pi R_2^2}$$

Eguagliando i potenziali:

$$\frac{\sigma_1}{\epsilon_0 R_1} = \frac{\sigma_2}{\epsilon_0 R_2} \implies \sigma_1 R_1 = \sigma_2 R_2$$

Quindi:

$$\sigma_1 = \left(\frac{R_2}{R_1} \right) \sigma_2$$

Per $R_1 > R_2$, segue che $\sigma_1 > \sigma_2$: la densità superficiale di carica è maggiore sulla sfera più piccola.

In vicinanza delle punte, il campo elettrico può essere molto intenso, essendo inversamente proporzionale al raggio di curvatura.

Collegamento a Terra

Nel caso limite $R_1 \gg R_2$, se inizialmente la carica Q_0 è sul conduttore piccolo:

$$Q_1 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} Q_0 \approx Q_0, \quad Q_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} Q_0 \approx 0$$

La carica fluisce interamente sul conduttore più grande. La Terra, considerata come un enorme conduttore, permette il collegamento a terra, utilizzato in elettrotecnica come riferimento del potenziale:

$$V_T = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_T}, \quad R_T \approx 6400 \text{ km.}$$

Capacità di un Conduttore

Il potenziale di un conduttore isolato è proporzionale alla carica presente:

$$C = \frac{Q}{V}$$

Nel Sistema Internazionale, la capacità si misura in Farad (F).

Capacità di un Conduttore Sferico

Per una sfera conduttrice di raggio R con carica Q , la capacità è:

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}} = 4\pi\epsilon_0 R$$

Dipende solo dalla geometria. Per esempio:

- Sfera di $R = 1$ m: $C = 111$ pF
- Terra ($R = 6400$ km): $C = 712$ μ F

Condensatori

Un condensatore è un sistema di due conduttori carichi, con induzione completa tra loro. La capacità è definita come:

$$C = \frac{Q}{\Delta V}$$

Capacità di un Condensatore Piano

Per un condensatore piano con armature di superficie S separate da una distanza d :

$$C = \frac{\epsilon_0 S}{d}$$

Capacità di un Condensatore Sferico

Per un condensatore sferico con raggi R_1 e R_2 :

$$C = 4\pi\epsilon_0 \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}$$

Nel limite $R_2 \rightarrow R_1$, con $d = R_2 - R_1$:

$$C = \frac{\epsilon_0 S}{d}$$

Sistemi di condensatori in parallelo

I condensatori sono dispositivi dipolari (hanno due capi di connessione). Connessione in parallelo (gli elementi circuitali sono alla stessa differenza di potenziale $V_1 = V_2 = V_A - V_B = V_{AB}$):

$$Q_1 = C_1 V_1 = C_1 V_{AB}, \quad Q_2 = C_2 V_2 = C_2 V_{AB}$$

$$Q_{\text{TOT}} = Q_1 + Q_2 = (C_1 + C_2) V_{AB} = C_{\text{TOT}} V_{AB}$$

La capacità del sistema formato da due (o più) condensatori collegati in parallelo è uguale alla somma delle singole capacità:

$$C_{\text{TOT}} = \sum C_i$$

Sistemi di condensatori in serie

Connessione in serie (gli elementi circuitali sono collegati con un solo polo in comune).

$$-Q_1 + Q_2 = 0 \implies Q_1 = Q_2$$

I condensatori in serie hanno la stessa carica.

$$V_A - V_B = (V_A - V_M) + (V_M - V_B)$$

$$\frac{Q}{C_{\text{TOT}}} = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} \implies \frac{1}{C_{\text{TOT}}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

$$C_{\text{TOT}} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$$

Per un sistema con più condensatori in serie, la capacità totale è data da:

$$\frac{1}{C_{\text{TOT}}} = \sum \frac{1}{C_i}$$

Energia elettrostatica di un sistema di cariche puntiformi

L'energia potenziale elettrostatica è un concetto fondamentale nella fisica, che descrive il lavoro necessario per assemblare un sistema di cariche in una configurazione specifica.

Energia di una carica singola L'energia potenziale di una carica q posta in un campo elettrostatico è data da:

$$U = qV$$

dove V è il potenziale elettrico generato dalle altre cariche nel punto in cui si trova q .

Energia di un sistema di due cariche L'energia potenziale elettrostatica tra due cariche q_1 e q_2 , distanti r_{12} , è:

$$U_{12} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{12}}$$

Questa rappresenta il lavoro necessario per portare q_2 dall'infinito fino alla sua posizione.

Energia di un sistema di tre cariche Per un sistema di tre cariche q_1 , q_2 , e q_3 , le interazioni devono essere calcolate per ogni coppia:

$$U_E = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{12}} + \frac{q_1 q_3}{4\pi\epsilon_0 r_{13}} + \frac{q_2 q_3}{4\pi\epsilon_0 r_{23}} \implies U_E = U_{12} + U_{13} + U_{23}$$

Formula generale per N cariche Per un sistema di N cariche puntiformi, l'energia elettrostatica totale è:

$$U_E = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i V_i = \sum_{i=1}^N \sum_{j>1}^N \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}}$$

Il fattore $\frac{1}{2}$ evita di contare ogni coppia due volte.

$$V_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^3 \frac{q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}}$$

Esercizi pratici

Esercizio 1: Sistema di tre cariche in un triangolo equilatero

Tre cariche $q_1 = 4 \mu\text{C}$, $q_2 = 2 \mu\text{C}$, $q_3 = -3 \mu\text{C}$ sono poste ai vertici di un triangolo equilatero di lato $a = 10 \text{ cm}$. Calcolare l'energia potenziale totale del sistema.

Soluzione:

Le interazioni tra le cariche sono descritte dalle seguenti espressioni per l'energia potenziale tra coppie di cariche:

$$U_{12} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 a}, \quad U_{13} = \frac{q_1 q_3}{4\pi\epsilon_0 a}, \quad U_{23} = \frac{q_2 q_3}{4\pi\epsilon_0 a}$$

L'energia potenziale totale del sistema è la somma di queste energie:

$$U_E = U_{12} + U_{13} + U_{23}$$

Sostituendo i valori numerici:

$$\begin{aligned} U_{12} &= \frac{(4 \times 10^{-6})(2 \times 10^{-6})}{4\pi(8.85 \times 10^{-12})(0.1)} = \frac{8 \times 10^{-12}}{1.11265 \times 10^{-12}} = 7.19 \text{ J} \\ U_{13} &= \frac{(4 \times 10^{-6})(-3 \times 10^{-6})}{4\pi(8.85 \times 10^{-12})(0.1)} = \frac{-12 \times 10^{-12}}{1.11265 \times 10^{-12}} = -10.77 \text{ J} \\ U_{23} &= \frac{(2 \times 10^{-6})(-3 \times 10^{-6})}{4\pi(8.85 \times 10^{-12})(0.1)} = \frac{-6 \times 10^{-12}}{1.11265 \times 10^{-12}} = -5.38 \text{ J} \end{aligned}$$

Quindi, l'energia totale del sistema è:

$$U_E = 7.19 \text{ J} + (-10.77 \text{ J}) + (-5.38 \text{ J}) = -9.96 \text{ J}$$

Esercizio 2: Energia in un condensatore

Un condensatore piano con capacità $C = 10 \mu\text{F}$ è collegato a una differenza di potenziale $V = 100 \text{ V}$. Calcolare l'energia immagazzinata.

Soluzione:

L'energia immagazzinata nel condensatore è data dalla formula:

$$U = \frac{1}{2} C V^2$$

Sostituendo i valori numerici:

$$U = \frac{1}{2} \cdot (10 \times 10^{-6}) \cdot (100)^2 = \frac{1}{2} \cdot 10 \times 10^{-6} \cdot 10000 = 0.05 \text{ J}$$

Quindi, l'energia immagazzinata nel condensatore è:

$$U = 0.05 \text{ J}$$

Energia in un condensatore

Per un condensatore piano con armature di area S e distanza d , la capacità è:

$$C = \varepsilon_0 \frac{S}{d}$$

L'energia elettrostatica immagazzinata è:

$$U_E = \frac{1}{2} C \Delta V^2$$

dove ΔV è la differenza di potenziale.

La densità di energia è:

$$u_E = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2$$

dove $E = \Delta V/d$ è il campo elettrico tra le armature.

Densità di energia del campo elettrico

La densità di energia del campo elettrico u_E è espressa come:

$$u_E = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2$$

dove u_E è la densità di energia del campo elettrostatico, ovvero la quantità di energia per unità di volume.

L'energia elettrostatica è localizzata nel campo elettrico, e non nella carica. L'energia totale U_E è data dall'integrale della densità di energia nel volume in cui il campo è presente:

$$U_E = \int_{\text{volume}} u_E d\tau$$

La densità di energia u_E può essere espressa come la derivata dell'energia totale rispetto al volume:

$$u_E = \frac{dU_E}{d\tau}$$

ESERCIZI

Esercizio 1: Lavoro fatto dalla forza esterna su un condensatore

Un condensatore a facce piane parallele poste ad una distanza D è inizialmente caricato in modo da possedere un'energia elettrostatica pari a $U_{\text{in}} = 10^4 \text{ J}$. Supponiamo di mantenere isolato il condensatore e di allontanare le due armature di una quantità $x = \frac{D}{2}$. Calcolare il lavoro fatto dalla forza esterna.

Soluzione:

Poiché il condensatore è isolato, la carica Q rimane costante. L'energia elettrostatica di un condensatore è data da:

$$U = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$$

Dove C è la capacità del condensatore. La capacità di un condensatore a facce parallele è:

$$C = \frac{\varepsilon_0 A}{d}$$

dove A è l'area delle armature e d è la distanza tra di esse. Quando si allontanano le armature di una quantità $x = \frac{D}{2}$, la capacità cambia. Pertanto, il lavoro fatto dalla forza esterna è uguale alla variazione dell'energia del sistema, ovvero la differenza tra l'energia finale e quella iniziale.

Il lavoro L fatto dalla forza esterna è dato dalla formula:

$$L = \frac{1}{2} U_{\text{in}}$$

Poiché l'energia iniziale del condensatore è $U_{\text{in}} = 10^4 \text{ J}$, il lavoro fatto dalla forza esterna è:

$$L = \frac{1}{2} \times 10^4 \text{ J} = 5000 \text{ J}$$

Esercizio 2: Variazione di energia elettrostatica con una lastra inserita in un condensatore

Una lastra a forma di parallelepipedo di spessore b e area S viene inserita parallelamente all'interno di un condensatore piano ideale avente le armature di area S distanti tra loro una distanza $a > b$. Determinare la variazione di energia elettrostatica nei due casi in cui il processo avviene rispettivamente a carica costante e a differenza di potenziale costante.

Soluzione:

La capacità di un condensatore piano ideale è:

$$C = \frac{\varepsilon_0 S}{d}$$

Nel primo caso, se il processo avviene a carica costante, la carica Q rimane costante. Tuttavia, la distanza tra le armature cambia a causa della lastra inserita, quindi la capacità cambia. La variazione dell'energia elettrostatica sarà data dalla variazione della capacità, poiché l'energia immagazzinata in un condensatore è:

$$U = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$$

Quando la lastra viene inserita, la distanza tra le armature effettive diventa $d' = a - b$, e quindi la nuova capacità finale C_f sarà:

$$C_f = \frac{\varepsilon_0 S}{a - b}$$

La variazione dell'energia elettrostatica nel caso a carica costante è:

$$\Delta U_{\text{carica}} = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C_f} - \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$$

Nel secondo caso, se il processo avviene a differenza di potenziale costante, la differenza di potenziale V rimane costante. In questo caso, la capacità cambia e quindi la carica cambierà. La variazione dell'energia elettrostatica in questo caso sarà:

$$\Delta U_{\text{d.d.p.}} = \frac{1}{2} C_f V^2 - \frac{1}{2} C V^2$$

Poiché la capacità cambia, la carica $Q = CV$ cambierà, ma la differenza di potenziale rimarrà costante. In entrambi i casi, la variazione dell'energia dipende dalla capacità finale C_f e dalla capacità iniziale C .

Pertanto, le energie finali dipenderanno dalla capacità finale:

$$C_f = \frac{\varepsilon_0 S}{a - b}$$

Condensatori con dielettrici

$$\Delta V = \Delta V_0 \varepsilon_r, \quad C = \frac{Q}{\Delta V} = \varepsilon_r \frac{Q}{\Delta V_0} = \varepsilon_r C_0$$

La capacità di un condensatore con dielettrico è:

$$C = \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{S}{d}$$

Se riempiamo un condensatore con un dielettrico isotropo e omogeneo, il campo elettrico totale vale:

$$\vec{E} = \frac{\vec{E}_0}{\varepsilon_r}$$

Costanti dielettriche relative per vari materiali

Materiale	ε_r
Aria	1.00059
Acqua distillata	80
Etanolo	25
Petrolio	2.1
Vetro comune	5 to 10
Plexiglas	3.40
Mica	8
Ebanite	2
Paraffina	2.1
Glicerolo	42.6
Ossido di titanio	90 to 170
Titanati di Ba-Sr	1000 to 10000

Correnti Elettriche

Intensità di corrente

Consideriamo un conduttore all'interno del quale è mantenuta una differenza di potenziale $V_A - V_B$. Nel S.I., l'unità di misura della corrente è l'Ampere (A) (grandezza fisica fondamentale):

$$i = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{dq}{dt}$$

Data una sezione S , interna al conduttore, definiamo la corrente elettrica come la quantità di carica che attraversa il conduttore per unità di tempo:

$$i = \frac{dq}{dt}$$

La carica che attraversa la superficie S è al netto delle cariche positive e negative. Dal punto di vista sperimentale, in elettromagnetismo, il moto di una carica positiva è equivalente al moto di una carica negativa che procede in verso opposto.

Densità di corrente

Definiamo il vettore densità di corrente elettrica:

$$i = \frac{dq}{dt} = \iint_S \mathbf{J} \cdot \hat{n} dS$$

La corrente (infinitesima) che attraversa una superficie dS è data da:

$$dq = Nq_e e d\tau$$

$$\mathbf{J} = nq_e \mathbf{v}_d$$

$$i = \iint_S \mathbf{J} \cdot \hat{n} dS$$

Conservazione della carica elettrica

Consideriamo una superficie S chiusa e orientata, interna ad un conduttore, con flusso della densità di corrente che equivale alla carica che passa attraverso S nell'unità di tempo. Il principio di conservazione della carica elettrica afferma che:

$$i_{in} - i_{out} = \frac{dQ}{dt}$$

Equazione di continuità

La carica interna alla superficie S può essere scritta in funzione della densità di carica:

$$q = \iiint_{\tau S} \rho d\tau$$
$$-\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{\tau S} \rho d\tau = \iint_S \mathbf{J} \cdot \hat{n} dS$$

Applicando il teorema della divergenza, otteniamo l'equazione di continuità:

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

Condizioni stazionarie

Si hanno condizioni stazionarie se la carica entrante è pari alla carica uscente:

$$\Phi_S(\mathbf{J}) = \iint_S \mathbf{J} \cdot \hat{n} dS = 0$$

In questo caso, il flusso della densità di corrente è nullo e il campo densità di corrente è solenoidale.

Modello di Drude-Lorentz

Nel caso in cui la d.d.p. sia costante nel tempo, ci aspettiamo che il moto degli elettroni sia uniformemente accelerato. Sperimentalmente, però, si trova che la velocità media degli elettroni è proporzionale al campo:

$$\langle \mathbf{v}_e \rangle \propto \mathbf{E}$$

Il modello di Drude-Lorentz descrive gli elettroni come cariche libere in un reticolo cristallino, soggette al campo elettrico e interagenti con le cariche del reticolo.

Leggi di Ohm in forma locale

La legge di Ohm in forma locale è espressa come:

$$nq_e v_{\text{drift}} \hat{e} = nq_e \langle v \rangle \hat{e} = \left[\frac{nq^2 e}{m_e \langle t \rangle} \right] E \hat{e}$$

dove la conduttività elettrica σ_C è:

$$\sigma_C = \frac{nq^2 e}{m_e \langle t \rangle} \hat{e} = \sigma_C E \hat{e}$$
$$\vec{j} = \sigma_C \vec{E}$$

e la resistività elettrica è data da:

$$\rho_R = \frac{1}{\sigma_C}$$
$$\vec{E} = \rho_R \vec{j}$$

Il vettore densità di corrente ha la stessa direzione e verso del campo elettrico. La velocità di deriva è moltiplicata per il numero di portatori di carica e per la carica del portatore. La legge di Ohm in forma locale (differenziale) è:

$$\vec{E} = \rho_R \vec{j}$$

Consideriamo un conduttore con un cilindro di base S e lunghezza l percorso da una corrente di densità \vec{j} . La differenza di potenziale ai capi del cilindro è:

$$\Delta V = \int \vec{E} \cdot d\vec{l} = El$$

Quindi, la legge di Ohm locale si scrive come:

$$E = \rho_R j$$

e la differenza di potenziale diventa:

$$\Delta V = \left[\frac{\rho_R l}{S} \right] j S$$

$$\Delta V = \left[\frac{\rho_R l}{S} \right] i$$

La resistenza R è quindi:

$$R = \rho_R \frac{l}{S}$$

Prima legge di Ohm

Consideriamo un conduttore filiforme ai cui estremi c'è una differenza di potenziale. Internamente al filo scorre una corrente proporzionale alla differenza di potenziale. La costante di proporzionalità R tra l'intensità di corrente e la differenza di potenziale è la resistenza elettrica. La prima legge di Ohm è:

$$\Delta V = Ri$$

Questa relazione è una legge empirica valida a temperature ordinarie costanti. La resistenza si misura in Ohm (Ω), dove:

$$1 \Omega = \frac{1 \text{ V}}{1 \text{ A}}$$

Seconda legge di Ohm

La resistenza di un conduttore omogeneo, filiforme, di lunghezza l e sezione S è:

$$R = \rho_R \frac{l}{S}$$

dove la resistività elettrica dipende dalla natura del materiale e si misura in $\Omega \text{ m}$.

Resistenze in serie

Due (o più) resistenze in serie sono attraversate dalla stessa corrente i (per la legge di continuità). La differenza di potenziale ai capi delle resistenze è:

$$\Delta V = (V_A - V_M) + (V_M - V_B) = V_A - V_B = (R_1 + R_2)i$$

La resistenza totale del sistema formato da due (o più) resistenze collegate in serie è:

$$R_{\text{TOT}} = R_1 + R_2$$

Resistenze in parallelo

Due (o più) resistenze in parallelo hanno la stessa differenza di potenziale $V_A - V_B$. Le correnti attraverso le resistenze sono:

$$i_1 = \frac{V_A - V_B}{R_1}, \quad i_2 = \frac{V_A - V_B}{R_2}$$

La corrente totale è:

$$i = i_1 + i_2 = \frac{V_A - V_B}{R_1} + \frac{V_A - V_B}{R_2}$$

L'inverso della resistenza totale è:

$$\frac{1}{R_{\text{TOT}}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

Effetto Joule

Quando una corrente i scorre attraverso un conduttore filiforme, la carica che attraversa una sezione S in un tempo dt è:

$$dq = i dt$$

Il lavoro compiuto dal campo elettrico nello spostamento della carica nell'intervallo dt è:

$$\delta\mathcal{L} = dU = \Delta V dq = \Delta V i dt = Ri^2 dt$$

La potenza dissipata è:

$$P = \frac{dU}{dt} = Ri^2$$

Questo lavoro viene dissipato in calore a causa degli urti tra gli elettroni di conduzione e gli atomi del conduttore, aumentando l'energia vibrazionale degli atomi.

Generatori di forza elettromotrice

Per avere una corrente in un conduttore è necessario stabilire una differenza di potenziale. I conduttori sono equipotenziali, quindi per forzare una differenza di potenziale si deve connettere il conduttore a un generatore di forza elettromotrice (o generatore elettrico). In un circuito con un generatore e una resistenza, la circuitazione del campo elettrico non è nulla (altrimenti non ci sarebbe corrente).

Il campo elettrico all'interno del generatore è composto da due componenti: il campo elettrico statico \vec{E}_s e il campo elettromotore non conservativo \vec{E}_m . La circuitazione del campo elettrico all'interno del generatore è:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = \oint (\vec{E}_s + \vec{E}_m) \cdot d\vec{l}$$

La forza elettromotrice \mathcal{E} è definita come:

$$\mathcal{E} = \int_1^2 \vec{E}_m \cdot d\vec{l} = - \int_1^2 \vec{E}_s \cdot d\vec{l} = V_2 - V_1 = \Delta V$$

Nel generatore, il campo elettromotore è non conservativo e la sua circuitazione è associata alla forza elettromotrice.

Legge di Ohm generalizzata

Consideriamo un circuito aperto con una resistenza totale R_{TOT} . La differenza di potenziale ai capi del circuito, sommata alle tensioni erogate dai generatori, è uguale alla caduta di tensione sulla resistenza totale. La legge di Ohm generalizzata afferma che la differenza di potenziale è la somma delle tensioni ai capi delle resistenze, come segue:

$$V_A - V_B + (V_1 - V_2) = R_{\text{TOT}} i$$

In un circuito chiuso, la caduta di potenziale è uguale alla somma delle tensioni erogate dai generatori.

Seconda legge di Kirchhoff

Su qualunque maglia di un circuito, la caduta di potenziale è uguale alla somma delle tensioni erogate dai generatori:

$$\sum k E_k = R_{\text{TOT}} i$$

Prima legge di Kirchhoff (dei nodi)

In condizioni stazionarie (fissato un intervallo t , la carica entrante deve bilanciare la carica uscente):

$$\Phi_S(\vec{r}) = \iint_S \vec{J} \cdot \hat{n} dS = 0 = \sum_{\text{entranti}} i_k - \sum_{\text{uscenti}} i_k$$

$$\iint_{S_k} \vec{J}_k \cdot \hat{n}_k dS_k = \begin{cases} +i_k & \text{entrante nel nodo} \\ -i_k & \text{uscente dal nodo} \end{cases}$$

Consideriamo N fili che si congiungono in un nodo. Siano S_i le superfici di intersezione tra S e le sezioni dei fili.

In qualunque nodo di un circuito, la corrente totale entrante è uguale alla corrente totale uscente:

$$\sum_k i_k = \sum_{\text{entranti}} i_k - \sum_{\text{uscenti}} i_k = 0$$

Magnetostatica

La forza magnetica tra due calamite

La forza magnetica tra due calamite potrebbe essere descritta con una formula simile alla legge di Coulomb:

$$F_m = k_m \frac{m_1 m_2}{r^2},$$

dove m_1 e m_2 sono le cariche magnetiche, e k_m è una costante magnetica. La forza magnetica è proporzionale al prodotto delle cariche magnetiche ed inversamente proporzionale al quadrato della distanza. Essa è:

- **Attrattiva** per cariche magnetiche opposte,
- **Repulsiva** per cariche magnetiche uguali.

Linee del campo magnetico e solenoidalità

Le linee del campo magnetico sono sempre chiuse (non possiamo isolare singoli poli magnetici). Il campo magnetico è **solenoidale**:

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0.$$

Di conseguenza (teorema della divergenza), scegliendo una qualunque superficie chiusa:

$$\iint_S \vec{B} \cdot \hat{n} dS = 0.$$

La densità volumetrica di cariche magnetiche è sempre nulla, poiché esistono solo dipoli.

Rotore e circuitazione del campo magnetico

Le linee del campo magnetico sono sempre chiuse. La circuitazione lungo una generica linea chiusa è in generale non nulla:

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} \neq 0.$$

Anche il **rotore** del campo magnetico è in generale non nullo:

$$\nabla \times \vec{B} \neq 0.$$

Il campo magnetico, quindi, **non è conservativo**.

Magnetostatica nel vuoto

Consideriamo un circuito in corrente stazionaria i e un piccolo tratto di filo che sia:

- libero di muoversi su connessioni flessibili e misurabile con un dinamometro,
- elettricamente neutro,
- orientato con il verso della corrente,
- immerso in un campo magnetico \vec{B} .

Il tratto di filo subisce una forza infinitesima $d\vec{F}$ con le seguenti caratteristiche:

- $|d\vec{F}| \propto i|\vec{dl}|$,
- $d\vec{F} \perp \vec{dl}$,
- $d\vec{F} = 0$ quando la corrente e il campo magnetico sono paralleli.

Seconda legge di Laplace

La forza infinitesima $d\vec{F}$ su un tratto di filo percorso da corrente è descritta da:

$$d\vec{F} = i d\vec{l} \times \vec{B}.$$

Il campo di induzione magnetica \vec{B} è definito operativamente dalla direzione e dal verso determinati dalla corrente che circola nel filo, secondo la regola della mano destra.

Regola della Mano Destra

La regola della mano destra è un metodo pratico per determinare la direzione di un vettore risultante in un prodotto vettoriale, come nel caso della forza infinitesima:

$$d\vec{F} = i d\vec{l} \times \vec{B}.$$

Per applicare la regola della mano destra:

1. Punta le dita della mano destra nella direzione del vettore $d\vec{l}$, ovvero nella direzione della corrente i nel filo.
2. Ruota le dita nella direzione del vettore \vec{B} (campo magnetico).
3. Il pollice, perpendicolare al piano formato da $d\vec{l}$ e \vec{B} , indicherà la direzione del vettore risultante $d\vec{F}$.

Nota:

- Se il campo magnetico \vec{B} è parallelo o antiparallelo alla corrente (quindi $d\vec{l} \parallel \vec{B}$), il prodotto vettoriale è nullo ($d\vec{F} = 0$).
- La regola della mano destra è applicabile solo per un sistema destrorso e segue la convenzione per il prodotto vettoriale.

Forza magnetica a livello microscopico

Una sezione infinitesima dS del filo sarà attraversata da una densità di corrente:

$$j = \frac{i}{dS}.$$

La corrente infinitesima può essere scritta come:

$$i d\vec{l} = j dS \cdot d\vec{l} = d\vec{\tau},$$

dove $d\vec{\tau}$ è un volume infinitesimo orientato come $d\vec{l}$.

La forza magnetica sull'intero filo è:

$$\vec{F} = \int_{\text{filo}} j \vec{B} \times d\vec{\tau}.$$

La forza magnetica su un volume infinitesimo è:

$$d\vec{F}_{\tau} = j \vec{B} \times d\vec{\tau}.$$

Forza magnetica su cariche puntiformi

La densità di corrente è definita come:

$$\vec{j} = nq\vec{v}_d,$$

dove:

- $n = \frac{N}{d\tau}$ è il numero di portatori di carica per unità di volume,
- \vec{v}_d è la velocità di deriva.

La forza magnetica per unità di volume è:

$$d\vec{F}_\tau = \vec{j} \times \vec{B} = nq\vec{v}_d \times \vec{B}.$$

Nel caso di una singola carica puntiforme q che si muove con velocità \vec{v} in un campo di induzione magnetica \vec{B} , la forza magnetica è descritta dalla **forza di Lorentz**:

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}.$$

Forza di Lorentz

La forza di Lorentz è data da:

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}.$$

Questa relazione rappresenta un metodo alternativo per definire il campo di induzione magnetica utilizzando una singola carica. Tale relazione è puntuale (valida in ciascun punto dello spazio) ed è più precisa della seconda legge di Laplace (definita su un tratto infinitesimo $d\vec{l}$).

Dall'espressione della forza di Lorentz ricaviamo che il campo magnetico ha le dimensioni di una forza su carica e velocità:

$$[B] = [MT^{-2}I^{-1}].$$

Nel Sistema Internazionale (SI), il campo magnetico si misura in Tesla (T):

$$1\text{ T} = \frac{1\text{ V} \cdot \text{s}}{1\text{ m}^2}.$$

Forza di Lorentz e cariche in movimento

In presenza di un campo di induzione magnetica:

- Le cariche ferme non sono soggette alla forza di Lorentz.
- Le cariche in movimento sono soggette alla forza di Lorentz.

Proprietà della forza di Lorentz:

- È sempre perpendicolare al campo di induzione magnetica.
- È sempre perpendicolare alla velocità della carica (centripeta).
- Non compie lavoro sulla carica in moto (è conservativa?).

La direzione della forza è data dalla **regola della mano destra**, e il modulo è:

$$F = qvB \sin \alpha,$$

dove α è l'angolo tra \vec{v} e \vec{B} .

Forza di Lorentz generalizzata

Se sono presenti sia un campo elettrico \vec{E} che un campo magnetico \vec{B} , la forza di Lorentz si scrive:

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}).$$

Proprietà:

- Le cariche ferme interagiscono solo con il campo elettrico.
- Le cariche in moto interagiscono sia con il campo elettrico che con il campo magnetico.

Se cambiamo sistema di riferimento (ad esempio un sistema solidale con la carica in moto), notiamo che:

- Le leggi della fisica devono essere invarianti e non dipendenti dal sistema di riferimento.
- Campo elettrico e campo magnetico sono strettamente legati, rappresentando due aspetti della stessa entità fisica: il **campo elettromagnetico**.

Moto di cariche in campi magnetici

Studiamo il moto di una carica q che si muove con velocità costante \vec{v} , perpendicolare a un campo magnetico uniforme \vec{B} . La forza di Lorentz è ortogonale sia alla velocità sia al campo magnetico. Forza e velocità sono complanari.

Per calcolare il raggio di curvatura R dell'orbita, usiamo la relazione per la forza centripeta:

$$\vec{F} = m\vec{a} = \frac{mv^2}{R}\hat{n},$$

dove \hat{n} è il versore normale. Dalla forza di Lorentz:

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B} = qvB\hat{n}.$$

Eguagliando le due espressioni:

$$\frac{mv^2}{R} = qvB,$$

ricaviamo:

$$R = \frac{mv}{qB}.$$

Periodo di rotazione e velocità angolare

Il periodo di rotazione T e la velocità angolare ω sono:

$$T = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi}{v} \frac{mv}{qB} = 2\pi \frac{m}{qB}$$

$$\omega = \frac{v}{R} = v \frac{qB}{mv} = \frac{qB}{m} \rightarrow (T = \frac{2\pi}{\omega})$$

Osservazione: Il periodo e la frequenza di rotazione non dipendono né dal raggio R né dalla velocità v .

Esercizio risolto: traiettoria elicoidale di un elettrone

Un elettrone ($m_e = 9.1 \times 10^{-31}$ kg, $q_e = -1.6 \times 10^{-19}$ C) è accelerato da una differenza di potenziale $V = 100$ V e si trova in una regione con un campo magnetico uniforme di modulo $B = 10^{-4}$ T. La velocità dell'elettrone forma un angolo $\alpha = \pi/3$ con la direzione del campo \vec{B} . La traiettoria è una spirale elicoidale cilindrica.

Determinare:

1. Il periodo di rotazione: T ,
2. Il passo p (distanza tra due spire),
3. Il raggio dell'elica cilindrica: R .

Risoluzione

L'elettrone è accelerato da una differenza di potenziale V , acquisendo energia cinetica uguale al lavoro fatto dalla forza elettrica:

$$eV = \frac{1}{2}m_e v^2.$$

Da questa relazione, la velocità dell'elettrone è:

$$v = \sqrt{\frac{2eV}{m_e}}.$$

Sostituendo i valori:

$$v = \sqrt{\frac{2(1.6 \times 10^{-19})(100)}{9.1 \times 10^{-31}}}.$$

Calcoliamo:

$$v = \sqrt{\frac{3.2 \times 10^{-17}}{9.1 \times 10^{-31}}} = \sqrt{3.52 \times 10^{13}} \text{ m/s}.$$
$$v \approx 5.93 \times 10^6 \text{ m/s}.$$

2. Velocità componenti perpendicolari e parallele a \vec{B}

La velocità \vec{v} forma un angolo $\alpha = \pi/3$ con il campo \vec{B} . Possiamo scomporre \vec{v} in:

- Componente parallela al campo: $v_{\parallel} = v \cos \alpha$,
- Componente perpendicolare al campo: $v_{\perp} = v \sin \alpha$.

Calcoliamo:

$$v_{\parallel} = v \cos \alpha = (5.93 \times 10^6) \cos \left(\frac{\pi}{3} \right) = 5.93 \times 10^6 \cdot \frac{1}{2} = 2.97 \times 10^6 \text{ m/s}.$$

$$v_{\perp} = v \sin \alpha = (5.93 \times 10^6) \sin \left(\frac{\pi}{3} \right) = 5.93 \times 10^6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 5.14 \times 10^6 \text{ m/s}.$$

3. Periodo di rotazione

Il periodo di rotazione T dipende dalla velocità angolare ω , che è:

$$\omega = \frac{q_e B}{m_e}.$$

Il periodo è:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi m_e}{q_e B}.$$

Sostituendo i valori:

$$T = \frac{2\pi(9.1 \times 10^{-31})}{(1.6 \times 10^{-19})(10^{-4})}.$$

Calcoliamo:

$$T = \frac{2\pi \cdot 9.1 \times 10^{-31}}{1.6 \times 10^{-23}} = \frac{57.2 \times 10^{-31}}{1.6 \times 10^{-23}} = 3.58 \times 10^{-7} \text{ s}.$$

4. Raggio dell'elica

Il raggio R dell'elica dipende dalla componente perpendicolare della velocità:

$$R = \frac{m_e v_{\perp}}{q_e B}.$$

Sostituendo i valori:

$$R = \frac{(9.1 \times 10^{-31})(5.14 \times 10^6)}{(1.6 \times 10^{-19})(10^{-4})}.$$

Calcoliamo:

$$R = \frac{46.8 \times 10^{-25}}{1.6 \times 10^{-23}} = 2.92 \times 10^{-1} \text{ m}.$$

5. Passo dell'elica

Il passo p è la distanza tra due spire successive ed è dato dalla velocità parallela e dal periodo:

$$p = v_{\parallel} T.$$

Sostituendo i valori:

$$p = (2.97 \times 10^6)(3.58 \times 10^{-7}) = 1.06 \text{ m}.$$

Spira in un campo magnetico

Consideriamo una spira rettangolare di lati a e b immersa in un campo di induzione magnetica uniforme \vec{B} , diretto lungo l'asse z . La forza totale agente sulla spira è nulla, ma il momento delle forze è non nullo.

Momento delle forze

Il momento delle forze rispetto al centro della spira è dato da:

$$\vec{M}_{\text{tot}} = \vec{M}_2 + \vec{M}_4 = i \cdot (ab) \cdot B \sin \theta \hat{j} = i S \hat{n} \times \vec{B},$$

dove:

- $S = ab$ è l'area della spira,
- \hat{n} è il versore normale alla spira.

Momento magnetico della spira

Il momento magnetico della spira è definito come:

$$\vec{m} = iS\hat{n}.$$

Quindi, il momento delle forze può essere riscritto come:

$$\vec{M} = \vec{m} \times \vec{B}.$$

Teorema di equivalenza di Ampère

Una spira percorsa da corrente, immersa in un campo magnetico, si comporta come un dipolo magnetico elementare con momento:

$$\vec{m} = iS\hat{n}.$$

Sulla spira agisce un momento delle forze solo se il campo magnetico ed il momento della spira formano un angolo $\theta \neq 0$.

Prima legge di Laplace

Campo magnetico generato da un filo percorso da corrente Evidenze sperimentali mostrano che i fili percorsi da corrente generano campi magnetici. La legge fondamentale che descrive il campo magnetico infinitesimo generato da un tratto infinitesimo di filo percorso da corrente i è:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{d\vec{l} \times \hat{u}_r}{r^2},$$

oppure:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3},$$

dove:

- $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H/m}$ è la permeabilità magnetica del vuoto,
- $d\vec{l}$ è il vettore infinitesimale del filo,
- \vec{r} è il vettore posizione dal filo al punto di calcolo del campo,
- $r = |\vec{r}|$ è la distanza dal filo al punto di calcolo.

Permeabilità magnetica del vuoto La costante μ_0 ha diverse rappresentazioni:

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \frac{\text{Vs}}{\text{mA}} = 4\pi \times 10^{-7} \frac{\text{N}}{\text{A}^2} = 4\pi \times 10^{-7} \frac{\text{H}}{\text{m}},$$

dove il **Henry (H)** è l'unità di misura della permeabilità magnetica:

$$1 \text{ H} = 1 \frac{\text{Vs}}{\text{A}}.$$

Solenoidalità del campo magnetico Verifichiamo che il campo magnetico è solenoidale. Il campo magnetico generato da un tratto infinitesimo di filo è:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}.$$

Calcoliamo la divergenza:

$$\nabla \cdot \vec{B} = \nabla \cdot \left(\frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3} \right).$$

Usando l'identità vettoriale:

$$\nabla \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = (\nabla \times \vec{A}) \cdot \vec{B} - \vec{A} \cdot (\nabla \times \vec{B}),$$

otteniamo che:

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0,$$

poiché:

- Un vettore costante ($d\vec{l}$) è irrotazionale: $\nabla \times d\vec{l} = 0$,
- Un vettore radiale (\vec{r}) è irrotazionale: $\nabla \times \vec{r} = 0$.

Modulo del campo magnetico Il modulo del campo magnetico infinitesimo è dato da:

$$|d\vec{B}| = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{|d\vec{l}| \sin \theta}{r^2},$$

dove θ è l'angolo tra il vettore $d\vec{l}$ (direzione della corrente) e il vettore \vec{r} (posizione del punto di calcolo). Alcune osservazioni:

- Se $\theta = 0^\circ$ o $\theta = 180^\circ$, allora $\sin \theta = 0$ e $d\vec{B} = 0$. Lungo la direzione della corrente non viene generato campo magnetico.
- Il campo magnetico segue una legge inversa al quadrato della distanza: $dB \propto \frac{1}{r^2}$, similmente alla legge di Coulomb per le cariche puntiformi.
- Il campo magnetico è proporzionale all'intensità della corrente ($dB \propto i$).
- Il campo magnetico è:

$$d\vec{B} \perp d\vec{l}, \quad d\vec{B} \perp \vec{r},$$

cioè è perpendicolare sia al tratto di filo che alla posizione del punto.

Legge di Biot-Savart

La legge di Biot-Savart consente di determinare il campo di induzione magnetica generato da un filo rettilineo di lunghezza indefinita percorso da corrente i :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{2\pi r} \hat{u}_t,$$

dove:

- r è la distanza dal filo,
- \hat{u}_t è il versore tangente alla circonferenza centrata sul filo.

Le linee di campo sono circonferenze nel piano trasverso al filo, orientate secondo la regola della mano destra.

Forza tra due fili percorsi da corrente

Consideriamo due fili rettilinei paralleli, posti a distanza d e percorsi da correnti i_1 e i_2 :

$$dF_{12} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{i_1 i_2}{d} dl_2.$$

- Le correnti equiverse generano forze attrattive.
- Le correnti discordi generano forze repulsive.

Campo magnetico da cariche puntiformi in moto

Una singola carica q in movimento genera un campo magnetico che, a distanza r dalla carica, vale:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q \vec{v} \times \vec{r}}{r^3}.$$

Campo da spira circolare

Il campo di induzione magnetica generato sull'asse di una spira circolare di raggio R , percorsa da corrente i , è:

$$B_z = \frac{\mu_0 i R^2}{2(R^2 + z^2)^{3/2}},$$

dove z è la distanza dall'asse della spira.

Flusso del campo magnetico

Abbiamo già dimostrato che il campo magnetico è **solenoidale**:

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0.$$

Per il **teorema della divergenza**, il flusso del campo magnetico attraverso una qualsiasi superficie chiusa sarà nullo:

$$\iint_{S_{\text{chiusa}}} \vec{B} \cdot \hat{n} dS = \iiint_{\tau(S)} \nabla \cdot \vec{B} d\tau = 0.$$

Questo implica che non esistono cariche magnetiche isolate.

Tuttavia, il flusso del campo magnetico attraverso una superficie aperta può avere un valore non nullo:

$$\iint_{S_{\text{aperta}}} \vec{B} \cdot \hat{n} dS \neq 0.$$

Circuitazione del campo magnetico

Le linee di forza del campo magnetico sono sempre chiuse, quindi la circuitazione del campo magnetico può essere non nulla. Consideriamo la circuitazione del campo magnetico generato da un filo rettilineo indefinito percorso da corrente i , lungo una linea chiusa Γ che concatena il filo.

Su un tratto infinitesimo della linea chiusa:

$$\vec{B} \cdot d\vec{l} = \frac{\mu_0 i}{2\pi r} d\varphi,$$

dove r è la distanza dal filo, e $d\varphi$ è l'angolo infinitesimale di arco. Integrando lungo Γ , otteniamo:

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_0^{2\pi} \frac{\mu_0 i}{2\pi} d\varphi = \mu_0 i.$$

Il segno dipende dal verso della corrente, secondo la regola della mano destra.

Caso di linea chiusa che non concatena il filo Se la linea chiusa Γ non concatena il filo, allora:

- Ogni tratto di linea chiusa percorso in un verso ha un contributo opposto da un tratto equivalente percorso in verso contrario.
- La circuitazione totale sarà nulla:

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = 0.$$

Legge di Ampère

La circuitazione del campo magnetico lungo una curva chiusa Γ è proporzionale alla somma delle correnti concatenate:

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum_k^{conc} i_k.$$

Il segno delle correnti si determina usando la regola della mano destra, rispetto al verso di percorrenza della curva.

La legge di Ampère è particolarmente utile per calcolare il campo magnetico in situazioni con elevata simmetria.

Esempi di circuitazione Consideriamo diverse situazioni con correnti concatenate:

- Γ_1 concatena una sola corrente i_1 :

$$\oint_{\Gamma_1} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 i_1.$$

- Γ_2 concatena più correnti:

$$\oint_{\Gamma_2} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 (i_1 - i_2).$$

- Γ_3 non concatena correnti:

$$\oint_{\Gamma_3} \vec{B} \cdot d\vec{l} = 0.$$

Densità di corrente concatenata

Consideriamo N fili ciascuno con sezione S_k , percorsi da correnti i_k . Ciascuna corrente può essere scritta in funzione della densità di corrente \vec{j}_k :

$$i_k = \iint_{S_k} \vec{j}_k \cdot \hat{n}_k dS.$$

La somma delle correnti concatenate alla curva è:

$$\sum_k i_k = \sum_k \iint_{S_k} \vec{j}_k \cdot \hat{n}_k dS = \iint_S \vec{j}_c \cdot \hat{n} dS,$$

dove \vec{j}_c è la densità di corrente concatenata e S è una superficie generica orientata con bordo Γ .

Teorema di Stokes e rotore del campo magnetico

Il **teorema di Stokes** collega un integrale di superficie con un integrale di linea:

$$\iint_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot \hat{n} dS = \oint_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{l}.$$

Applicando il teorema di Stokes alla legge di Ampère:

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum_k i_k,$$

possiamo riscriverla come:

$$\iint_S (\nabla \times \vec{B}) \cdot \hat{n} dS = \mu_0 \iint_S \vec{j}_c \cdot \hat{n} dS.$$

Poiché l'uguaglianza vale per ogni superficie, otteniamo la legge di Ampère in forma locale:

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}.$$

In ogni punto dello spazio, il rotore del campo magnetico è proporzionale alla densità di corrente in quel punto.

Esempio 55: Campo di un filo di lunghezza indefinita

Calcolare il campo magnetico generato da un filo di lunghezza indefinita percorso da corrente i utilizzando la legge di Ampère.

Procedimento: Consideriamo un filo rettilineo lungo e percorsi da una corrente i . Utilizziamo la legge di Ampère:

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 i,$$

dove Γ è una linea chiusa orientata.

Scelta della superficie di integrazione: Scegliamo una superficie cilindrica di raggio r e lunghezza L centrata sul filo, con il filo stesso come asse di simmetria. La circuitazione lungo la linea chiusa è:

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = B(2\pi r).$$

Calcolo del campo: Uguagliando le due espressioni:

$$B(2\pi r) = \mu_0 i.$$

Risolviendo per B :

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}.$$

Risultato: Il campo magnetico generato da un filo di lunghezza indefinita percorso da corrente è:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{2\pi r} \hat{\phi},$$

dove $\hat{\phi}$ è il versore tangenziale alla circonferenza centrata sul filo.

Esempio 56: Campo di un cilindro conduttore

Determinare in tutto lo spazio il campo magnetico generato da un cilindro conduttore di raggio R e lunghezza indefinita, percorso uniformemente da una corrente di intensità i .

Procedimento: Consideriamo un cilindro conduttore percorso da corrente uniformemente distribuita con densità di corrente \vec{j} . Utilizziamo la legge di Ampère per determinare il campo magnetico all'interno e all'esterno del cilindro.

Campo all'interno del cilindro ($r < R$): La legge di Ampère per una superficie cilindrica concentrica al cilindro è:

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{enc}},$$

dove I_{enc} è la corrente racchiusa dalla superficie. La corrente racchiusa è data da:

$$I_{\text{enc}} = j \cdot \pi r^2,$$

dove j è la densità di corrente.

Calcolo del campo interno:

$$B(2\pi r) = \mu_0 j \pi r^2.$$

Risolviendo per B :

$$B = \frac{\mu_0 j r}{2}.$$

Campo esterno al cilindro ($r > R$): Per $r > R$, la corrente totale i attraversa la superficie cilindrica:

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 i.$$

Il campo esterno è quindi:

$$B(2\pi r) = \mu_0 i.$$

Risolviendo per B :

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}.$$

Risultato: Il campo magnetico all'interno del cilindro ($r < R$) è:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 j r}{2} \hat{\phi},$$

e all'esterno ($r > R$) è:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{2\pi r} \hat{\phi}.$$

Esempio 57: Campo di un solenoide

Determinare il campo magnetico generato da un solenoide cilindrico di raggio R , composto da n spire per unità di lunghezza, percorso da una corrente stazionaria i .

Procedimento: Un solenoide è costituito da un insieme di spire avvolte attorno a un cilindro. La legge di Ampère applicata a un solenoide è:

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 n i L,$$

dove L è la lunghezza della linea chiusa e n è il numero di spire per unità di lunghezza.

Campo interno al solenoide: All'interno del solenoide, il campo è uniforme e parallelo all'asse longitudinale:

$$B = \mu_0 n i.$$

Campo esterno al solenoide: All'esterno del solenoide, il campo è trascurabile (ideale):

$$\vec{B} = 0.$$

Risultato: Il campo magnetico interno al solenoide è:

$$\vec{B} = \mu_0 n i \hat{z},$$

dove \hat{z} è il versore lungo l'asse del solenoide.

Momento magnetico orbitale

Per spiegare il magnetismo nella materia, occorre partire dalla struttura microscopica degli atomi. In un modello semplificato, possiamo pensare agli elettroni più esterni in rotazione intorno al nucleo. Consideriamo il caso più semplice: l'atomo di idrogeno.

Calcolo della velocità di rotazione: Essendo la forza coulombiana centripeta, possiamo ricavare la velocità di rotazione dell'elettrone:

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_e q_p}{R_H^2} = m_e \frac{v^2}{R_H},$$

dove:

- $R_H = 5.3 \times 10^{-11} \text{ m}$ è il raggio di Bohr,
- $m_e = 9.1 \times 10^{-31} \text{ kg}$ è la massa dell'elettrone,
- $|q_e| = |q_p| = 1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$ sono le cariche elementari.

Risolviendo per v :

$$v = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_e q_p}{m_e R_H} = 2.2 \times 10^6 \text{ m/s}.$$

Momento magnetico orbitale

Un elettrone che ruota intorno al nucleo genera una corrente, e il momento magnetico associato è dato da:

$$\vec{m}_o = iS,$$

dove $i = \frac{q_e v}{2\pi R_H}$ è la corrente, e $S = \pi R_H^2$ è l'area della traiettoria.

Sostituendo i e S :

$$\vec{m}_o = \left(\frac{q_e v}{2\pi R_H} \right) \pi R_H^2 = \frac{q_e v R_H}{2}.$$

Sostituendo il valore di v :

$$\vec{m}_o = \frac{q_e R_H}{2m_e} \vec{p}_o,$$

dove \vec{p}_o è il momento angolare orbitale.

Momento magnetico di spin

Oltre al momento magnetico orbitale, gli elettroni possiedono un ulteriore momento magnetico dovuto allo spin, descritto da:

$$\vec{m}_s = -\frac{q_e}{m_e} \vec{p}_s,$$

dove \vec{p}_s è il momento angolare di spin.

Il momento magnetico totale (o intrinseco) è la somma dei momenti orbitale e di spin:

$$\vec{m} = \vec{m}_o + \vec{m}_s.$$

In assenza di campi esterni, il momento magnetico totale macroscopico è nullo, poiché i momenti magnetici degli atomi sono orientati casualmente e si annullano.

Materiali diamagnetici

I materiali diamagnetici sono caratterizzati da atomi con momento magnetico nullo. In questi materiali, un campo magnetico esterno devia la traiettoria degli elettroni in moto, causando una variazione di velocità e una diminuzione della frequenza di rotazione (precessione di Larmor).

Effetto complessivo: La variazione del momento magnetico va ad opporsi leggermente al campo magnetico esterno. I materiali diamagnetici generalmente hanno un numero pari di elettroni e una struttura simmetrica.

Materiali paramagnetici

I materiali paramagnetici hanno atomi con momento angolare intrinseco diverso da zero. Questi materiali sono caratterizzati da un numero dispari di elettroni o da strutture atomiche asimmetriche.

Comportamento: Gli atomi si comportano come dipoli magnetici che tendono ad allinearsi con un campo magnetico esterno, aumentando leggermente il valore del campo.

Materiali ferromagnetici

I materiali ferromagnetici hanno una configurazione elettronica in cui si creano forti interazioni tra momenti orbitali e di spin.

Comportamento microscopico: I momenti magnetici degli atomi adiacenti si accoppiano, aumentando considerevolmente l'effetto magnetico rispetto al singolo atomo. Si creano regioni chiamate **domini di Weiss**, che contengono un numero elevato di atomi allineati.

Domini di Weiss: I domini hanno tipicamente volumi di 10^{-10} m^3 a 10^{-12} m^3 e contengono da 10^{11} a 10^{17} atomi. Se il materiale non è magnetizzato, i momenti sono orientati casualmente.

Magnetizzazione e saturazione

Quando un materiale ferromagnetico è posto in un campo magnetico esterno, i domini di Weiss si allineano con il campo, generando un allargamento dei domini. A campi magnetici sempre più intensi, si raggiunge una condizione di saturazione, in cui tutti i domini sono allineati.

Magnetizzazione residua: Il materiale mantiene una magnetizzazione residua anche dopo la rimozione del campo esterno. I domini di Weiss vengono distrutti se il materiale viene riscaldato fino a una temperatura critica, chiamata **temperatura di Curie**, che per il ferro (Fe) è circa 1000 K.

Ciclo di isteresi

La permeabilità magnetica di un materiale ferromagnetico non è costante e dipende dalla storia di magnetizzazione e dalle correnti che generano il campo esterno.

Curva di isteresi: Inserendo un cilindro di materiale ferromagnetico in un solenoide, si osserva la curva di isteresi. La curva di prima magnetizzazione è mostrata dalla curva *a*, mentre la curva *b* mostra la diminuzione del campo H fino ad azzerarlo, con la magnetizzazione residua. Invertendo il campo H , si raggiunge un valore critico H_C per cui la magnetizzazione si annulla.