Indice

Capitolo 1

Sistemi MIMO nel dominio di Laplace

1.1 Rappresentazione di un sistema MIMO nel dominio di Laplace

Consideriamo il seguente sistema LTI a più ingressi e più uscite (MIMO) descritto dalle seguenti equazioni:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \tag{1.1}$$

Il sistema è MIMO dunque $u \in \mathbb{R}^{m\times 1}$, $y \in \mathbb{R}^{p\times 1}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $C \in \mathbb{R}^{p\times n}$ e $D \in \mathbb{R}^{p\times m}$. Il sistema può essere rappresentato nel dominio di Laplace come:

$$Y(s) = G(s)U(s) \tag{1.2}$$

Con $G(s) \in \mathbb{R}^{p\times m}$ matrice di trasferimento del sistema definita come:

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D \tag{1.3}$$

La matrice $G(s)$ è composta da $p \times m$ funzioni di trasferimento singole $G_{ij}(s)$:

$$G(s) = \begin{pmatrix} G_{11}(s) & \dots & G_{1m}(s) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ G_{p1}(s) & \dots & G_{pm}(s) \end{pmatrix}$$

dove ogni elemento $G_{ij}(s)$ è una funzione polinomiale fratta che rappresenta la funzione di trasferimento tra l'ingresso u_j e l'uscita y_i.

1.2 Sistema con retroazione dell'uscita MIMO

Consideriamo lo schema di controllo a retroazione dell'uscita per un sistema MIMO mostrato in Figura 1.1. Andiamo ora a ricavarci le funzioni di trasferimento del sistema considerando come uscite i due vettori $Y(s) \in \mathbb{R}^p$ e $U(s) \in \mathbb{R}^m$, e come ingresso i quattro vettori $R(s), D_u(s), D_y(s), N(s)$. Per prima cosa definiamo la funzione d'anello aperto $L(s)$ è definita come:

$$L(s) := G(s)K(s)$$

Notiamo che $K(s)G(s)$ a priori è diverso poichè stiamo parlando di matrici ed il prodotto tra matrici non è commutativo. Definiamo anche la **funzione di sensibilità**:

$$S(s) \coloneqq (I + L(s))^{-1}$$

e la **funzione di sensibilità complementare**:

$$T(s) \coloneqq (I + L(s))^{-1} L(s)$$

Andiamo a trovarci le funzioni di trasferimento tra le uscite e gli ingressi, nello specifico saranno otto funzioni di trasferimento:

1. Funzione di trasferimento tra $R(s)$ a $Y(s)$, che vale:

$$K_{YR} = T(s) = (I + L(s))^{-1} L(s)$$

2. Funzione di trasferimento tra $Y(s)$ e $D_u(s)$, che vale:

$$K_{YD_u}(s) \coloneqq (I + L(s))^{-1} G(s) = S(s)G(s)$$

3. Funzione di trasferimento tra $Y(s)$ e $D_y(s)$, che vale:

$$K_{YD_y}(s) \coloneqq (I + L(s))^{-1} = S(s)$$

4. Funzione di trasferimento tra $Y(s)$ e $N(s)$, che vale:

$$K_{YN}(s) \coloneqq -(I + L(s))^{-1} L(s) = -T(s)$$

5. Funzione di trasferimento tra $U(s)$ e $R(s)$, che vale:

$$K_{UR}(s)\,(I + K(s)G(s))^{-1} K(s)$$

6. Funzione di trasferimento tra $U(s)$ e $D_u(s)$, che vale:

$$(I + K(s)G(s))^{-1}$$

7. Funzione di trasferimento tra $U(s)$ e $D_y(s)$, che vale:

$$-(I + K(s)G(s))^{-1} K(s)$$

8. Funzione di trasferimento tra $U(s)$ e $N(s)$, che vale:

$$-(I + K(s)G(s))^{-1} K(s)$$

Dunque il legame tra $Y(s)$ e $U(s)$ con gli ingressi $R(s), D_u(s), D_y(s), N(s)$ è dato da:

$$Y(s) = S(s)G(s)D_u(s) + S(s)D_y(s) - T(s)N(s) + T(s)R(s)$$

$$U(s) = (I + L_u)^{-1} K(s)(R(s) - D_y(s) - N(s)) + (I + L_u(s))^{-1} D_u(s)$$

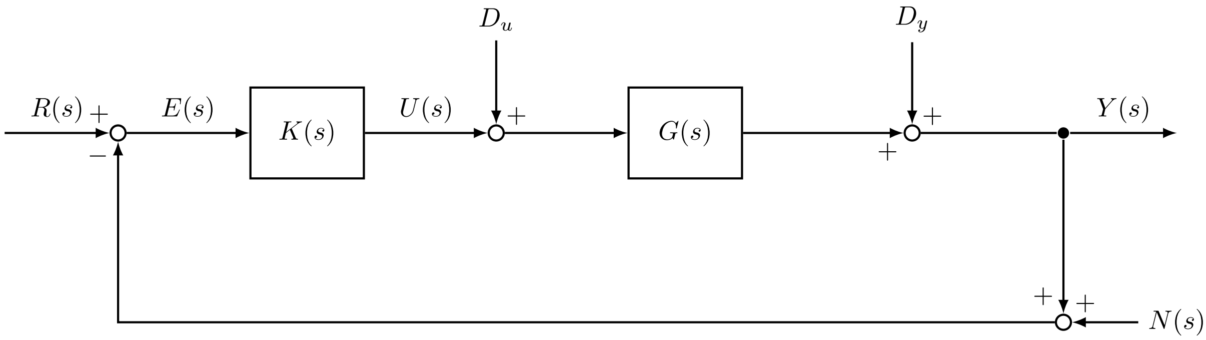


Figura 1.1: Schema a blocchi di un sistema MIMO con retroazione dell'uscita.

1.3 SVD (Singular Value Decomposition)

Consideriamo una matrice $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Inoltre dati due vettori $y \in \mathbb{R}^m$ e $x \in \mathbb{R}^n$ tali che vale la relazione:

$$y = Ax$$

$$A = U\Sigma V^T$$

- La matrice $U \in \mathbb{R}^{m \times m}$ (matrice di rotazione delle uscite) è una matrice ortonormale composta dai vettori colonna $u_1, u_2, \ldots, u_m$, si ha:

$$U = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & \ldots & u_m \end{pmatrix}$$

- La matrice $V \in \mathbb{R}^{n \times n}$ (matrice di rotazione degli ingressi) è una matrice ortonormale composta dai vettori colonna $v_1, v_2, \ldots, v_n$, si ha:

$$V = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & \ldots & v_n \end{pmatrix}$$

- La matrice $\Sigma \in \mathbb{R}^{m \times n}$ (matrice dei valori singolari)

$$p = min\,\{m, n\}$$

Dove si ha che:

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{se } p = m$$

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{se } p = n$$

$$y = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & \ldots & u_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Sigma_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \Sigma_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \Sigma_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1^T \\ v_2^T \\ \vdots \\ v_n^T \end{pmatrix} \cdot x$$

Se io prendo $x = v_i$ si ha:

$$\begin{pmatrix} v_1^T \\ v_2^T \\ \vdots \\ v_n^T \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} v_1^T \\ v_2^T \\ \vdots \\ v_n^T \end{pmatrix} \cdot v_i$$

Ricordando che V è ortonormale, si che le sue colonne sono tra loro ortogonali e di norma 1, dunque si ha:

$$v_j^T \cdot v_i = 0, \quad \text{se } i \neq j$$

$$v_j^T \cdot v_i = 1, \quad \text{se } i = j$$

Dunque si ha:

$$\begin{pmatrix} v_1^T \\ v_2^T \\ \vdots \\ v_i^T \\ \vdots \\ v_n^T \end{pmatrix} \cdot v_i = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dove l'uno è nella i-esima riga. Andiamo a calcolarci la norma 2 di A:

$$||A||_2 = \sqrt{\lambda_{MAX}\left(A^T A\right)}$$

Notiamo che per le proprietà della trasposta $A^T = (U\Sigma V)^T = V\Sigma^T U^T$

$$||A||_2 = \sqrt{\lambda_{MAX}\left(V\Sigma^T U^T U\Sigma V^T\right)}$$

Ora ricordando che U è ortonormale si ha $U^T U = I$ $(U^T = U^{-1})$:

$$||A||_2 = \sqrt{\lambda_{MAX}\left(V\Sigma^T \Sigma V^T\right)}$$

Ora ricordando che Σ e Σ^T sono diagonali si ha che vale la proprietà commutativa tra le matrici, dunque possiamo scrivere:

$$||A||_2 = \sqrt{\lambda_{MAX}\left(\Sigma^T \Sigma V V^T\right)}$$

Ora ricordando che Σ è diagonale vale $\Sigma^T = \Sigma$, dunque si ha:

$$||A||_2 = \sqrt{\lambda_{MAX}\Sigma^T\Sigma} = \sqrt{\lambda_{MAX}\Sigma\Sigma} = \sqrt{\lambda_{MAX}\Sigma^2}$$

Come si vede la norma 2 di A è legata al valore singolare maggiore di A.

1.4 Guadagno

Definiamo gli spazi L^p come gli spazi delle funzioni p-sommabili, cioè in cui esiste la norma p-esima finita:

$$L^p(\mathbb{R}^{\ltimes}) = \left\{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n : \int_{-\infty}^{+\infty} ||f(\tau)||_p^p \, d\tau < \infty \right\}$$

Dove essendo f una funzione vettoriale a variabile reale la norma p-esima è definita come:

$$||f(\tau)||_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |f_i(\tau)|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

Dove con $f_i(\tau)$ si intende la i-esima componente del vettore $f(\tau)$ (che è un vettore di n componenti in cui ognuna è una funzione di τ)

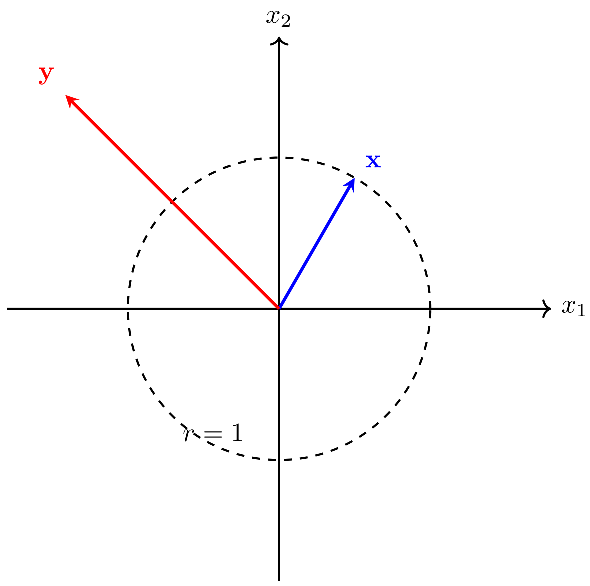


Figura 1.2: Esempio di rotazione del vettore di ingresso $x = v_1$ nel vettore di uscita amplificato $y = \sigma_1 u_1$. In questo caso abbiamo preso $m = n = 2$, dunque la matrice A è quadrata, mentre Σ è diagonale. Notiamo che abbiamo potuto rappresentare tutto sullo stesso grafico solo perché $m = n$.

1.5 Poli e zeri per sistemi MIMO

Ora ci poniamo il problema di definire poli e zeri per sistemi MIMO. Per i sistemi SISO i poli sono definiti come gli zeri del denominatore della funzione di trasferimento, mentre gli zeri sono definiti come gli zeri del numeratore della funzione di trasferimento. Il problema è che per i sistemi MIMO ho una matrice di trasferimento $G(s)$ composta da pm funzioni di trasferimento singole $G_{ij}(s)$, quindi bisogna dare una nuova definizione di poli e zeri per sistemi MIMO. Per prima cosa diamo la definizione di polo per sistemi MIMO.

Definizione 1.5.1. Un polo di un sistema MIMO è un valore di s tale che la matrice $G(s)$ diventa singolare, cioè il suo determinante è nullo, dunque per quel valore di s la matrice $G(s)$ non è invertibile.

Definizione 1.5.2. Si definisce rango nominale di una matrice di polinomi $G(s)$, il rango della matrice che si ha per tutti i valori di s eccetto un numero finito di valori.

Definizione 1.5.3. Uno zero di un sistema MIMO è un valore di s tale che la matrice $G(s)$ perde rango, cioè il rango della matrice $G(s)$ diminuisce rispetto al suo rango nominale (quello che ha per tutti gli altri valori di s).

Capitolo 2

Controllo di sistemi MIMO

2.1 Schema di retroazione dell'uscita con integratori

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + Md(t) \\ y(t) = Cx(t) + Nd(t) \end{cases} \tag{2.1}$$

L'integratore è necessario per eliminare l'errore a regime, ora daremo una giustificazione logica di questa affermazione. Consideriamo che al posto dell'integratore ci sia un blocco $Z(s)$ generico come in figura **??**, seguiamo il seguente ragionameto:

1. Noi vogliamo che l'uscita $y(t)$ segua un riferimento costante $r(t) = \bar{r}$, quindi vogliamo che a regime valga $y(t) \to \bar{y} = \bar{r}$, cioè:

$$\lim_{t \to +\infty} y(t) = \bar{y} = \bar{r}$$

2. Ma se l'uscita a regime è costante, allora per il teorema del valore finale

3. per $t \to +\infty$ che $y(t) \to \bar{y} = \bar{r}$.

4. Ma se $y(t)$ a regime è costante, allora per il teorema del valore finale anche le $u(t)$ e le $v(t)$ a regime devono essere costanti.

5. Inoltre se la $\bar{y} = \bar{r}$ si ha che a regime l'errore è nullo:

$$\bar{e} = \lim_{t \to +\infty} e(t) = \lim_{t \to +\infty} r(t) - y(t) = \bar{r} - \bar{y} = 0$$

6. Ma se l'errore è nullo a regime, allora si ha che in ingresso al blocco $Z(s)$ si ha un ingresso nullo, quindi il blocco $Z(s)$ a regime vede un ingresso nullo. Quindi il blocco $Z(s)$ deve essere un integratore, poichè è l'unico operatore che ad un ingresso nullo fornisce in uscita un segnale costante (diverso da zero).

Quindi abbiamo dimostrato che per avere errore nullo a regime il blocco $Z(s)$ deve essere proprio un integratore, cioè:

$$Z(s) = \frac{1}{s}$$

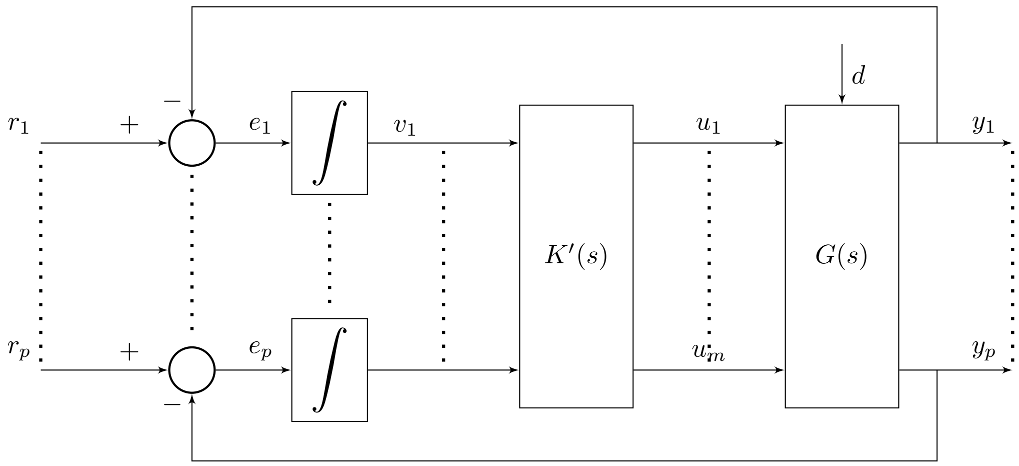


Figura 2.1: Schema di retroazione dell'uscita con integratori

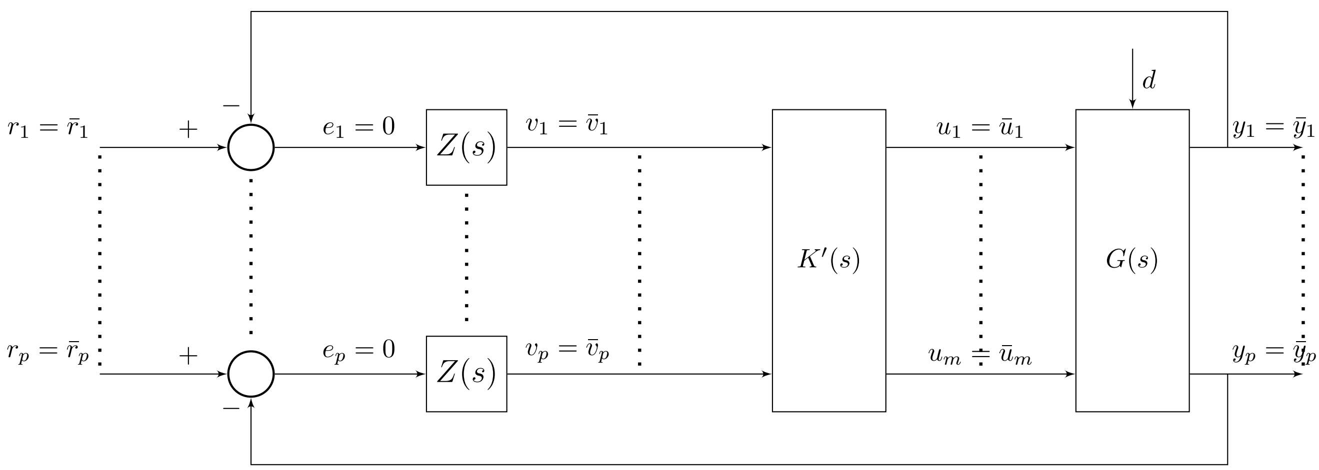


Figura 2.2: Schema per la dimostrazione che l'unico blocco che garantisce errore nullo a regime è l'integratore

Supponiamo ora che il nostro controllore $K'(s)$ riesca a stabilizzare il sistema, cioè che riesca a portare tutti a posizionare tutti poli del sistema aumentato in retroazione dell'uscita con integratori a sinistra dell'asse immaginario (cioè con parte reale negativa). Supposto questo vogliamo andare a studiarci le condizioni necessarie affinchè il sistema riesca a posizionare l'uscita $y(t)$ al valore di riferimento $\bar{r}$. In termine formali vogliamo studiare le condizioni necessarie affinche a regime si abbia per ogni $\bar{y}$ e $\bar{d}$ (che rappresentano rispettivamente il valore di uscita a regime e il disturbo a regime)

$$\begin{cases} 0 = A\bar{x} + B\bar{u} + M\bar{d} \\ \bar{y} = C\bar{x} + N\bar{d} \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -M & 0 \\ -N & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{d} \\ \bar{y} \end{pmatrix} \tag{2.2}$$

Questo è un sistema di $n+p$ equazioni in $n+m$ ($\bar{x}$ e $\bar{u}$ sono incognite). Definiamo la matrice Σ come:

$$\Sigma := \begin{pmatrix} A & B \\ C & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+p)\times(n+m)} \tag{2.3}$$

Quello che andremo a fare ora è determinare delle **condizioni necessarie** sulla matrice Σ affinchè il sistema (2.2) ammetta soluzione $\forall N \in \mathbb{R}^{p\times r}, M \in \mathbb{R}^{n\times r}, \bar{d} \in \mathbb{R}^{r\times 1}, \bar{y} \in \mathbb{R}^{p\times 1}$. Per determinare queste condizioni necessarie andremo a trovare dei casi particolari di Σ in cui il sistema non ammette soluzione, dunque condizione necessaria alla soluzione del sistema è che la matrice Σ non cada in questi casi particolari.
Il **primo caso** particolare che andremo a considerare è quando il numero di incognite $(n+m)$ del sistema è minore del numero di equazioni $(n+p)$ del sistema, cioè:

$$n + m < n + p \tag{2.4}$$

Questo equivale a dire che il numero di colonne della matrice Σ è minore del numero di righe della matrice Σ. Ma questo significa che la matrice Σ non può essere di rango pieno per righe (poichè ha più righe che colonne, ed il rango ha come massimo valore dunque il numero di colonne). Se la matrice Σ non è di rango pieno per righe significa che esistono delle righe della matrice Σ che sono combinazioni lineari delle altre righe, dunque facendo delle operazioni elementari sulle righe (ricordiamo che queste operazioni non cambiano lo spazio delle soluzioni del sistema) possiamo arrivare rendere nulle queste righe linearmente dipendenti. Ma se una riga della matrice Σ è nulla significa che se a destra il termine noto assume un valore diverso da zero il sistema non ammette soluzione. Ma noi vogliamo che il sistema ammetta soluzione $\forall N \in \mathbb{R}^{p\times r}, M \in \mathbb{R}^{n\times r}, \bar{d} \in \mathbb{R}^{r\times 1}, \bar{y} \in \mathbb{R}^{p\times 1}$, questo significa che i termini noti possono assumere qualunque valore, quindi anche un valore diverso da zero. Quindi se scegliamo le matrici M ed N e i vettori $\bar{d}$ e $\bar{y}$ in modo tale che il termine noto a destra della riga nulla sia diverso da zero abbiamo che il sistema non ammette soluzione. Dunque abbiamo trovato che nel caso particolare in cui:

$$n + m < n + p$$

il sistema non ammette soluzione $\forall N \in \mathbb{R}^{p\times r}, M \in \mathbb{R}^{n\times r}, \bar{d} \in \mathbb{R}^{r\times 1}, \bar{y} \in \mathbb{R}^{p\times 1}$. Quindi una condizione necessaria affinchè il sistema ammetta soluzione è che la condizione (2.4) non sia verificata, cioè si deve avere:

$$n + m \geq n + p \Longleftrightarrow m \geq p$$

cioè il numero di ingressi deve essere maggiore o uguale al numero di uscite, cosa che era già intuibile, infatti se voglio controlla p uscite dovrò avere un numero di ingressi almeno maggiore o uguale a p. Ad esempio se io ho 5 uscite da controllare almeno dovrò avere 5 ingressi per poter controllare tutte le uscite.

Supponiamo ora di aver soddisfatto questa prima condizione necessaria, cioè di esserci messi nella condizione $m \geq p$. Andiamo ora a cercare un **secondo caso particolare** in cui il sistema non ammette soluzione. Un'altro caso particolare in cui il sistema non ammette soluzione è quando il rango della matrice Σ non è massimo, cioè (poichè siamo nella condizione $m \geq p$):

$$rank(\Sigma) < min\{n + m, n + p\} = n + p$$

Infatti essendo il numero di righe della matrice Σ uguale a $n + p$, se il rango della matrice Σ è minore di $n + p$ significa che esistono delle righe della matrice Σ che sono combinazioni lineari delle altre righe, dunque come prima facendo delle operazioni elementari sulle righe (possibili perchè non cambiano lo spazio delle soluzioni del sistema) possiamo arrivare rendere nulle queste righe linearmente dipendenti, e mettendo a destra del sistema il termine noto diverso da zero arriviamo ad un sistema che non ammette soluzione. Dunque abbiamo trovato un'altro caso particolare in cui il sistema non ammette soluzione $\forall N \in \mathbb{R}^{p\times r}, M \in \mathbb{R}^{n\times r}, \bar{d} \in \mathbb{R}^{r\times 1}, \bar{y} \in \mathbb{R}^{p\times 1}$. Dunque affinche il sistema ammetta soluzione sicuramente dobbiamo evitare questo caso particolare, cioè dobbiamo fare in modo che il rango di Σ sia massimo, cioè dobbiamo avere:

$$rank(\Sigma) = n + p$$

Quindi le **condizioni necessarie** affinche il sistema ammetta soluzione $\forall N \in \mathbb{R}^{p\times r}, M \in \mathbb{R}^{n\times r}, \bar{d} \in \mathbb{R}^{r\times 1}, \bar{y} \in \mathbb{R}^{p\times 1}$

1) Il numero di ingressi deve essere maggiore o uguale al numero di uscite:

$$m \geq p \tag{2.5}$$

2) La matrice Σ deve essere di rango pieno:

$$rank(\Sigma) = min\,\{n + m, n + p\} = n + p \tag{2.6}$$

La condizione (2.6) si può determinare in un modo più formale andando anche a considerare la stabilità del sistema in retroazione con integratori (cosa che fino ad ora abbiamo supposto). Questa condizione si può determinare andando a studiare il sistema aumentato in retroazione con integratori. Ricordiamo il vettore di stato del sistema aumentato è $\begin{pmatrix} x(t) & v(t) \end{pmatrix}^T \in \mathbb{R}^{(n+p)\times 1}$, dunque le derivate degli stati valgono:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + Md(t) \\ \dot{v}(t) = e(t) = r(t) - y(t) = r(t) - Cx(t) - Nd(t) \end{cases}$$

Prendiamo come uscita del sistema aumentato $\tilde{y}(t) = v(t)$, dunque si ha che la rappresentazione in forma matriciale del sistema aumentato è:

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{v}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ v(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B \\ 0 \end{pmatrix} u(t) + \begin{pmatrix} M \\ -N \end{pmatrix} d(t) \\ \tilde{y}(t) = \begin{pmatrix} 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ v(t) \end{pmatrix} \end{cases}$$

Definiamo $\tilde{n}$:

$$\tilde{n} \coloneqq n + p$$

Dunque definiamo le seguenti matrici:

$$\tilde{A} \coloneqq \begin{pmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{\tilde{n} \times \tilde{n}}, \quad \tilde{B} \coloneqq \begin{pmatrix} B \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{\tilde{n} \times m}, \quad \tilde{C} \coloneqq \begin{pmatrix} 0 & I \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{p \times \tilde{n}}$$

Che hanno gli ovvi significati nel sistema aumentato. Il nostro obiettivo iniziale era trovare un controllore $K'(s)$ che stabilizzasse il sistema in retroazione con integratori, cioè che rendesse asintoticamente stabile il sistema aumentato. Condizione necessaria affinchè esista un controllore $K'(s)$ che stabilizzi il sistema aumentato è che il sistema aumentato sia:

1) Completamente raggiunbile

2) Completamente osservabile

Queste due condizioni equivalgono a dire che:

1) La coppia $(\tilde{A}, \tilde{B})$ è completamente raggiunbile

2) La coppia $(\tilde{A}, \tilde{C})$ è completamente osservabile

Quindi dobbiamo ora studiarci la raggiungibilità e l'osservabilità del sistema aumentato. Andiamo prima a studiare l'**osservabilità**, cioè il rango della matrice di osservabilità (ricordiamo che affinchè il sistema sia completamente osservabile il rango deve essere massimo cioè uguale a $\tilde{n}$):

$$M_O(\tilde{A}, \tilde{C}) = \overbrace{\begin{pmatrix} \tilde{C} \\ \tilde{C}\tilde{A} \\ \vdots \\ \tilde{C}\tilde{A}^{\tilde{n}-1} \end{pmatrix}}^{n+p \text{ colonne}} \left.\vphantom{\begin{pmatrix} \tilde{C} \\ \tilde{C}\tilde{A} \\ \vdots \\ \tilde{C}\tilde{A}^{\tilde{n}-1} \end{pmatrix}}\right\} np \text{ righe}$$

Ricordando che $\tilde{C} = \begin{pmatrix} 0 & I \end{pmatrix}$ e $\tilde{C}\tilde{A} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{pmatrix}$ si ha :

$$\tilde{C}\tilde{A}^2 = \begin{pmatrix} 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^2 & 0 \\ -CA & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -CA & 0 \end{pmatrix}$$

L'espressione generale $\forall k \in \mathbb{N}$ è:

$$\tilde{C}\tilde{A}^k = \begin{pmatrix} 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^k & 0 \\ -CA^{k-1} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -CA^{k-1} & 0 \end{pmatrix}$$

Quindi $M_O(\tilde{A}, \tilde{C})$ si può scrivere come:

$$M_O(\tilde{A}, \tilde{C}) = \begin{array}{cl} \begin{matrix} \overbrace{\phantom{-CA^{n-1}}}^{n \text{ colonne}} & \overbrace{}^{p \text{ colonne}} \end{matrix} & \\ \begin{pmatrix} 0 & I \\ -C & 0 \\ -CA & 0 \\ \vdots & \vdots \\ -CA^{n-1} & 0 \\ \vdots & \vdots \\ -CA^{\tilde{n}-2} & 0 \end{pmatrix} & \begin{matrix} \} \ p \text{ righe} \\ \left.\vphantom{\begin{matrix} a \\ a \\ a \\ a \\ a \\ a \end{matrix}}\right\} (n-1)p \text{ righe} \end{matrix} \end{array}$$

Come si può vedere la matrice $M_O(\tilde{A}, \tilde{C})$ ha rango pieno $rank(M_O(\tilde{A}, \tilde{C})) = n + p$ se e solo se la sottomatrice composta dalle seguenti righe:

$$\begin{pmatrix} -C \\ -CA \\ \vdots \\ -CA^{n-1} \\ \vdots \\ -CA^{\tilde{n}-2} \end{pmatrix} \tag{2.7}$$

ha rango pieno, cioè ha rango n. Ricordiamo che il rango è limitato superiormente dal minimo tra il numero di righe (np) e il numero di colonne (n), quindi in questo caso il limite superiore è dato dal numero di colonne. Ora notiamo che le righe aggiunte dopo la riga n (quella corrispondente a $-CA^{n-1}$) sono linearmente dipendenti dalle prime n righe per il teorema di Cayley-Hamilton, quindi per andare a studiare il rango della matrice possiamo limitarci a studiare il rango delle righe:

$$\begin{pmatrix} -C \\ -CA \\ \vdots \\ -CA^{n-1} \end{pmatrix} \tag{2.8}$$

Affinche la matrice (2.7) abbiamo rango massimo (n) dobbiamo avere che le righe in (2.8) siano linearmente indipendenti, cioè dobbiamo avere che la matrice (2.8) abbia rango n. Ma questa condizione è proprio la condizione di completa osservabilità della coppia (A, C) del sistema

originale. Quindi il sistema aumentato è completamente osservabile se e solo se il sistema originale è completamente osservabile.
Andiamo ora a studiarci la **raggiungibilità** del sistema aumentato, cioè il rango della matrice di raggiungibilità (ricordiamo che affinchè il sistema sia completamente raggiungibile il rango deve essere massimo cioè uguale a $\tilde{n}$):

$$M_R(\tilde{A},\tilde{B}) = \overbrace{\begin{pmatrix} \tilde{B} & \tilde{A}\tilde{B} & \dots & \tilde{A}^{\tilde{n}-1}\tilde{B} \end{pmatrix}}^{\tilde{n}m \text{ colonne}} \Big\} \, n+p \text{ righe}$$

L'espressione generale $\forall k \in \mathbb{N}$ è:

$$\tilde{A}^k\tilde{B} = \begin{pmatrix} A^k & 0 \\ -CA^{k-1} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^kB \\ -CA^{k-1}B \end{pmatrix}$$

Quindi la matrice di raggiungibilità del sistema aumentato si può scrivere come:

$$M_R(\tilde{A},\tilde{C}) = \overbrace{\begin{pmatrix} \overbrace{B}^{m} & \overbrace{AB}^{m} & \overbrace{A^2B}^{m} & \cdots & \overbrace{A^{\tilde{n}-1}B}^{m} \\ \\ 0 & -CB & -CAB & \cdots & -CA^{\tilde{n}-2}B \end{pmatrix}}^{\tilde{n}m} \begin{array}{l} \big\} \, n \\ \\ \big\} \, p \end{array} \tag{2.9}$$

Andiamo ora ad enunciare il seguente lemma che lega la raggiungibilità del sistema aumentato con la raggiungibilità del sistema originale.

Lemma 2.1.1. *Se il sistema aumentato è completamente raggiungibile allora il sistema originale è completamente raggiungibile.*

Dimostrazione. Noi abbiamo supposto che il sistema aumentato sia completamente raggiungibile, cioè che la matrice di raggiungibilità del sistema aumentato abbia rango pieno. Notiamo che la matrice di raggiungibilità del sistema aumentato ha $n+p$ righe dunque per essere di rango pieno deve avere rango $n+p$:

$$rank(M_R(\tilde{A},\tilde{B})) = n+p$$

Questo significa che tutte le righe della matrice di raggiungibilità devono essere linearmente indipendenti (infatti la matrice ha più colonne che righe, dunque il rango massimo è dato dal numero di righe). In particolare, anche le prime n righe della matrice di raggiungibilità devono essere linearmente indipendenti, ma questo significa che la seguente matrice, costituita dalle prime n righe della matrice di raggiungibilità, è di rango pieno (cioè ha rango n):

$$\begin{pmatrix} B & AB & A^2B & \dots A^{n-1}B & \dots & A^{\tilde{n}-1}B \end{pmatrix} \tag{2.10}$$

Ma le colonne dopo la colonna n-esima (cioè le colonne da $n+1$ a $n+p$) sono linearmente dipendenti dalle prime n colonne per il teorema di Cayley-Hamilton. Quindi se la matrice

(2.10) è di rango pieno n significa che le prime n colonne sono linearmente indipendenti, ma questo significa che la seguente matrice ha rango pieno n:

$$\begin{pmatrix} B & AB & A^2B & \dots A^{n-1}B \end{pmatrix} \tag{2.11}$$

Ma la matrice (2.11) è proprio la matrice di raggiungibilità del sistema originale (A, B). Dunque abbia dimostrato che se il sistema aumentato è completamente raggiungibile allora la matrice di raggiungibilità del sistema originale è di rango pieno, cioè che il sistema originale è completamente raggiungibile. □

Dunque condizione necessaria affinche il sistema aumentato sia completamente raggiungibile è che il sistema originale (A, B) sia completamente raggiungibile.

Andiamo ora a ricavare di nuovo la condizione necessaria (2.6) come abbiamo già detto all'inizio. Per prima cosa notiamo che la matrice di raggiungibilità del sistema aumentato (2.9) si può riscrivere come prodotto di matrici:

$$M_R(\tilde{A}, \tilde{B}) = \begin{pmatrix} A & B \\ -C & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & B & AB & \dots & A^{\tilde{n}-2}B \\ I & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \tag{2.12}$$

Definiamo la matrice $\tilde{\Sigma} \in \mathbb{R}^{(n+p)\times(n+m)}$ come:

$$\tilde{\Sigma} := \begin{pmatrix} A & B \\ -C & 0 \end{pmatrix} \tag{2.13}$$

Notiamo che questa matrice $\tilde{\Sigma}$ ha lo stesso rango della matrice Σ definita in (2.3) Mentre chiamiamo la matrice a destra del prodotto in (2.12) come $Q \in \mathbb{R}^{(n+m)\times\tilde{n}m}$:

$$Q := \begin{pmatrix} 0 & B & AB & \dots & A^{\tilde{n}-2}B \\ I & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \tag{2.14}$$

Quindi la $M_R(\tilde{A}, \tilde{B})$ si può scrivere come:

$$M_R(\tilde{A}, \tilde{B}) = \tilde{\Sigma}Q \tag{2.15}$$

Dimostriamo ora per assurdo che se la matrice $\tilde{\Sigma}$ non è di rango pieno allora la matrice di raggiungibilità del sistema aumentato non è di rango pieno, vogliamo dimostrare che:

Lemma 2.1.2. *Se la matrice di raggiungibilità del sistema aumentato è di rango pieno allora la matrice $\tilde{\Sigma}$ è di rango pieno.*

ogliamo quindi dimostrare che, affinché la matrice di raggiungibilità del sistema aumentato sia di rango pieno, è necessario che $\tilde{\Sigma}$ sia di rango pieno. Ora dimostreremo il teorema 2.1.2 per assurdo, cioè dimostreremo che il negato del teorema 2.1.2 implica una contraddizione. Notiamo che il negato del teorema 2.1.2 consiste nel provare a dimostrare che se la matrice $M_R(\tilde{A}, \tilde{B})$ è di rango pieno allora la matrice $\tilde{\Sigma}$ non è di rango pieno.

Dimostrazione. La nostra ipotesi è che la matrice di raggiungibilità del sistema aumentato sia di rango pieno, cioè che:

$$rank(M_R(\tilde{A}, \tilde{B})) = n + p$$

Vogliamo dimostrare, come tesi, che questa ipotesi implica che la matrice $\tilde{\Sigma}$ non sia di rango pieno:

$$rank(\tilde{\Sigma}) < n + p$$

Ma per la proprietà del prodotto delle matrici si ha che:

$$rank(M_R(\tilde{A}, \tilde{B})) \leq min\{rank(\tilde{\Sigma}), rank(Q)\}$$

Cioè si ha che:

$$n + p \leq min\{rank(\tilde{\Sigma}), rank(Q)\}$$

Ma notiamo che a destra il minimo tra i due ranghi è sicuramente minore o uguale al rango di $\tilde{\Sigma}$, dunque si ha che:

$$n + p \leq rank(\tilde{\Sigma})$$

Ma noi avevamo supposto all'inizio che la matrice $\tilde{\Sigma}$ non fosse di rango pieno, cioè si ha:

$$n + p < n + p$$

Ma questo è un assurdo. Dunque la nostra tesi iniziale deve essere falsa, cioè se la matrice di raggiungibilità del sistema aumentato è di rango pieno allora la matrice $\tilde{\Sigma}$ è di rango pieno. □

Ora abbiamo dimostrato che affinche il sistema aumentato sia completamente raggiungibile (che ricordiamo essere condizione necessaria e sufficiente, insieme alla completa osservabilità, per la risoluzione del problema di controllo) è necessario che la matrice $\tilde{\Sigma}$ sia di rango pieno, ma questa matrice come abbiamo detto prima ha lo stesso rango della matrice Σ definita in (2.3), dunque abbiamo ridimostrato la condizione necessaria (2.6), cioè che la matrice Σ deve essere di rango pieno affinche il problema di controllo sia risolvibile. Ora dimostriamo che se la matrice Σ è di rango pieno e il sistema originale è completamente raggiungibile allora il sistema aumentato è completamente raggiungibile.

Lemma 2.1.3. *Se la matrice Σ è di rango pieno e il sistema originale è completamente raggiungibile allora il sistema aumentato è completamente raggiungibile.*

Dimostrazione. Vogiamo dimostrare che sotto le ipotesi del teorema la matrice di raggiungibilità del sistema aumentato è di rango pieno, cioè che:

$$rank(M_R(\tilde{A}, \tilde{B})) = n + p$$

Per la proprietà del prodotto delle matrici si ha che:

$$rank(M_R(\tilde{A}, \tilde{B})) \leq min\{rank(\tilde{\Sigma}), rank(Q)\}$$

Inoltre una nota disugualianza sui ranghi delle matrici dice che ($M_R(\tilde{A}, \tilde{B}) = \tilde{\Sigma}Q$):

$$rank(M_R(\tilde{A}, \tilde{B})) \geq rank(\tilde{\Sigma}) + rank(Q) - (n + m)$$

Unendo le due disuguaglianze si ha che:

$$rank(\tilde{\Sigma}) + rank(Q) - (n+m) \leq M_R(\tilde{A}, \tilde{B}) \leq min\{rank(\tilde{\Sigma}), rank(Q)\} \tag{2.16}$$

Ma per ipotesi la matrice Σ è di rango pieno:

$$rank(\tilde{\Sigma}) = n + p$$

Il sistema originale è completamente raggiungibile, dunque la matrice Q anche essa è di rango pieno:

$$rank(Q) = n + m$$

Dunque riscrivendo la disugualianza (2.16) si ha:

$$(n+p) + (n+m) - (n+m) \leq rank(M_R(\tilde{A}, \tilde{B})) \leq min\{n+p, n+m\}$$

Da cui si ricava (dato che $m \geq p$):

$$n + p \leq rank(M_R(\tilde{A}, \tilde{B})) \leq n + p$$

Dunque si deve per forza avere:

$$rank(M_R(\tilde{A}, \tilde{B})) = n + p$$

Quindi la matrice di raggiungibilità del sistema aumentato è di rango pieno, cioè il sistema aumentato è completamente raggiungibile. □

Uniamo tutti i risultati ottenuti nei lemmi 2.1.1, 2.1.2,2.1.3 in un unico teorema che consiste in una condizione necessaria e sufficiente.

Teorema 2.1.4. *Il sistema aumentato è completamente raggiungibile se e solo se il sistema originale è completamente raggiungibile e la matrice Σ è di rango pieno.*

2.2 Problema di Mixed Sensitivity Design

Il nostro obiettivo ora è andare a formulare le seguente specifiche di progetto:

- Stabilità
- Stabilità robusta
- Performance inseguimento/disturbo
- Limitazione controllo

sulle funzione di sensitività $S(s)$ e sensitività complementare $S'(s)$.

$$E(s) = R(s) - Y(s) = S(s)(R(s) - D(s)) + T(s)N(s)$$

$$U(s)K(s)S(s)\left(R(s) - D(s) - N(s)\right)$$

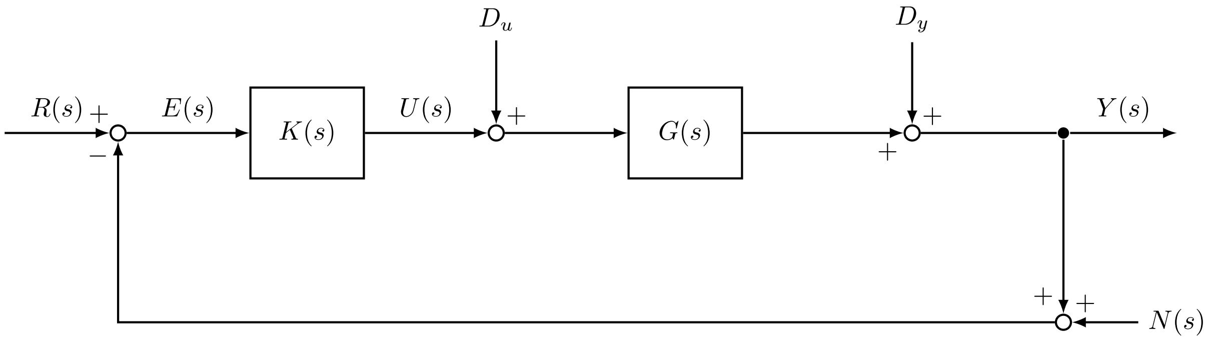


Figura 2.3: Sistema di controllo MIMO con retroazione negativa e disturbi

$$\begin{cases} \|S(s)\|_\infty \to 0 \\ \|T(s)\|_\infty \to 0 \end{cases} \tag{2.17}$$

E' impossibile realizzare la condizione precedente poichè vale la relazione

$$S(s) + T(s) = I$$

Questo problema si può risolvere ricordando che gli ingressi del sistema sono di solito segnali presenti a frequenze diverse:

- Il riferimento $R(s)$ è a bassa frequenza
- Il disturbo $D(s)$ è a bassa frequenza
- Il rumore $N(s)$ è ad alta frequenza

Con queste considerazioni possiamo andare a formulare le specifiche di progetto in modo diverso, infatti la specifica è potente ma non necessaria, infatti possiamo accontentarci delle seguenti specifiche:

$$\begin{cases} \|S(s)(R(s) - D(s))\|_2 \to 0 \\ \|T(s)N(s)\|_2 \to 0 \end{cases} \tag{2.18}$$

dove notiamo che $S(s)(R(s)-D(s))$ e $T(s)N(s)$ sono vettori, quindi la norma 2 si intende come norma vettoriale. Infatti se sono vere le (2.18) si ha che per la disuguaglianza triangolare:

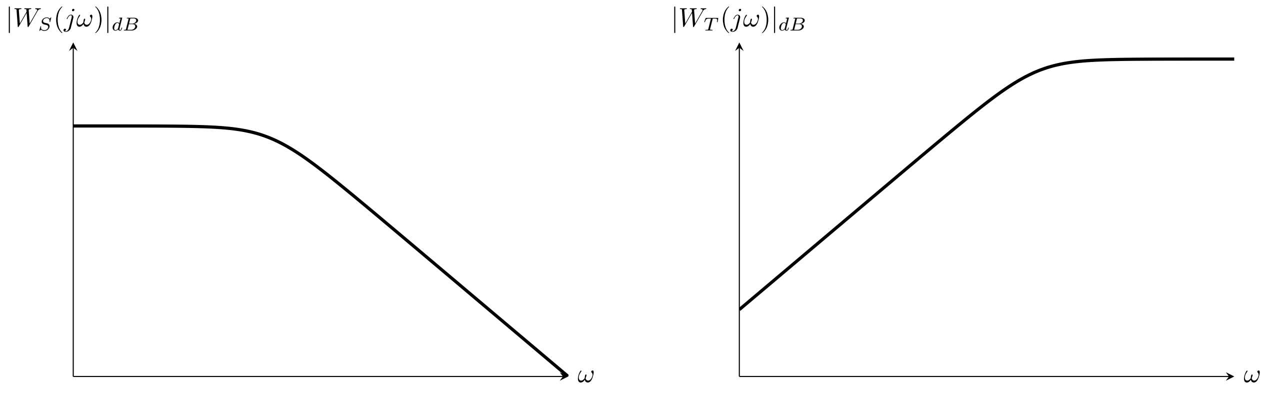
$$\|E(s)\|_2 \leq \|S(s)(R(s) - D(s))\|_2 + \|T(s)N(s)\|_2 \to 0 \Longrightarrow \|E(s)\|_2 \to 0$$

Ma cosa hanno di differente le specifiche (2.18) rispetto alle spefiche (2.17), la differenza principale sta nel fatto che ora possiamo andare ad esplicitare le caratteristiche spettrali dei segnali $R(s)$, $D(s)$ e $N(s)$, infatti possiamo dire che:

- Visto che $R(s)$ e $D(s)$ sono segnali a bassa frequenza, per soddisfare la prima specifica di (2.18) ci basta che $S(s)$ tenda a zero in bassa frequenza, mentre in alta frequenza ci penseranno i segnali $R(s)$ e $D(s)$ a far si che la norma vada a zero. Questo si traduce in una specifica sulla norma infinito non più di $S(s)$ ma di una funzione $W_S(s)S(s)$:

  $$\|W_S(s)S(s)\|_\infty \to 0$$

  dove $W_S(s)$ è una funzione di peso che ha un valore alto in bassa frequenza e un valore basso in alta frequenza, cosichè per soddisfare la specifica la funzione $S(s)$ deve essere



(a) Funzione peso $W_S(s)$

(b) Funzione peso $W_T(s)$

Figura 2.4: Andamenti tipici delle funzioni peso per sistemi SISO

piccola in bassa frequenza, come richiesto. L'introduzione di questa funzione di peso ci permette di non imporre vincoli in alta frequenza su $S(s)$, andando quindi a permetterci di imporrre vincoli sulla $T(s)$, continuando però a rispettare l'identità $S(s) + T(s) = I$. Una possibile scelta per $W_S(s)$ per un sistema SISO è in Figura 2.4a.

- Visto che $N(s)$ è un segnale ad alta frequenza, per soddisfare la seconda specifica di (2.18) ci basta che $T(s)$ tenda a zero in alta frequenza, mentre in bassa frequenza ci penserà il segnale $N(s)$ a far si che la norma vada a zero. Questo si traduce in una specifica sulla norma infinito non più di $T(s)$ ma di una funzione $W_T(s)T(s)$:

$$\|W_T(s)T(s)\|_\infty \to 0$$

  dove $W_T(s)$ è una funzione di peso che ha un valore basso in bassa frequenza e un valore alto in alta frequenza, cosichè per soddisfare la specifica la funzione $T(s)$ deve essere piccola in alta frequenza, mentre in bassa frequenza non ci sono vincoli su $T(s)$, poichè la funzione di peso $W_T(s)$ si occuperà di far andare a zero la norma infinito. Una possibile scelta per $W_T(s)$ per un sistema SISO è in Figura 2.4b.

- E' possibile definire anche una funzione di peso $W_K(s)$ per limitare l'azione di controllo $U(s)$. Infatti andando a gestire la norma infinito di $W_K(s)K(s)S(s)$:

$$\|W_K(s)K(s)S(s)\|_\infty \to 0$$

  possiamo limitare l'azione di controllo andando a scegliere opportunamente la funzione di peso $W_K(s)$. Per un sistema SISO una possibile $W_K(s)$ è costante in un largo intervallo di frequenze (quelle possibili per il nostro ingresso di controllo $U(s)$), e va a zero in alta frequenza ed in bassa frequenza. Modificando opportunamente il valore costante possiamo andare a limitare l'azione di controllo. Ad esempio aumentando il valore costante andremo ad abbassare il valore di $|K(s)S(s)|$ (per un sistema SISO $K(s)S(s)$ è uno scalare e quindi si può parlare di modulo), e di conseguenza andremo ad abbassare il valore di $|U(s)|$.

Il problema che si occupa di trovare le espressioni delle funzioni di peso $W_S(s)$, $W_T(s)$ e $W_K(s)$ prende il nome di **Mixed Sensitivity Design**.
In bassa frequenza vogliamo minimizzare $S(s)$ (perchè il riferimento è un segnale a bassa frequenza), in alta frequenza $S(s)$ può avere un qualunque valore.

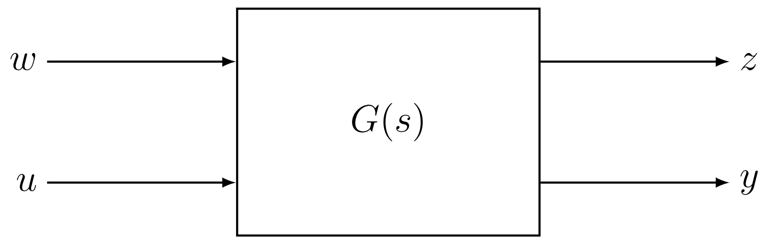


Figura 2.5: Sistema generale per il controllo H_∞

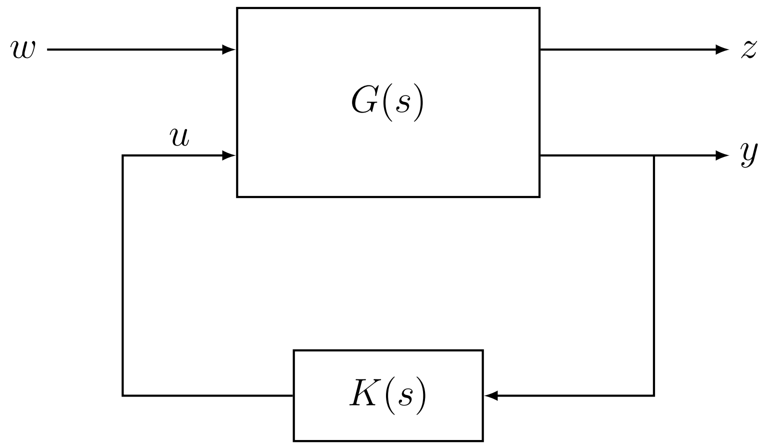


Figura 2.6: Problema di controllo H_∞ in forma standard

Un modo per risolvere questo problema è risolvere il problema H_∞
Ricordnado che $U(s) = K(s)Y(s)$

$$\begin{cases} Z(s) = G_{11}(s)W(s) + G_{12}(s)K(s)Y(s) \\ Y(s) = G_{21}(s)W(s) + G_{22}(s)K(s)Y(s) \end{cases}$$

2.3 Problema H_∞ in forma standard

Consideriamo il sistema in Figura 2.5, questo sistema rappresenta il sistema di base per andare a formulare il **problema di controllo H_∞ in forma standard**. Notiamo che w, u, z, y possono essere vettori. Andiamo ad analizzare questo sistema, nello specifico notiamo che la relazione ingresso uscita del sistema è data da:

$$\begin{pmatrix} Z(s) \\ Y(s) \end{pmatrix} = G(s) \begin{pmatrix} W(s) \\ U(s) \end{pmatrix}$$

La matrice di trasferimento $G(s)$ si può scomporre in quattro sottomatrici:

$$G(s) = \begin{pmatrix} G_{11}(s) & G_{12}(s) \\ G_{21}(s) & G_{22}(s) \end{pmatrix}$$

Con questa scomposizione si ha che la relazione ingresso uscita del sistema si può scrivere come:

$$\begin{cases} Z(s) = G_{11}(s)W(s) + G_{12}(s)U(s) \\ Y(s) = G_{21}(s)W(s) + G_{22}(s)U(s) \end{cases} \tag{2.19}$$

Ora consideriamo il sistema in Figura 2.6, dove abbiamo inserito un controllore $K(s)$ in feedback, si ha:

$$U(s) = K(s)Y(s)$$

Andando a sostituire nel sistema (2.19) si ottiene:

$$\begin{cases} Z(s) = G_{11}(s)W(s) + G_{12}(s)Y(s) \\ Y(s) = G_{21}(s)W(s) + G_{22}(s)Y(s) \end{cases}$$

Quella che vogliamo andarci a ricavare noi ora è la funzione di trasferimento ad anello chiuso tra l'ingresso $W(s)$ e l'uscita $Z(s)$, andiamo quindi a ricavarci $Y(s)$ in funzione di $W(s)$ nella seconda equazione:

$$\begin{cases} Z(s) = G_{11}(s)W(s) + G_{12}(s)Y(s) \\ Y(s) - G_{22}(s)Y(s) = G_{21}(s)W(s) \end{cases}$$

Mettendo in evidenza $Y(s)$ nella seconda equazione si ha:

$$\begin{cases} Z(s) = G_{11}(s)W(s) + G_{12}(s)Y(s) \\ (1 - G_{22}(s))Y(s) = G_{21}(s)W(s) \end{cases}$$

Moltiplicando ambo i membri della seconda equazione per $(1 - G_{22}(s))^{-1}$ si ottiene:

$$\begin{cases} Z(s) = G_{11}(s)W(s) + G_{12}(s)Y(s) \\ Y(s) = (1 - G_{22}(s))^{-1}G_{21}(s)W(s) \end{cases}$$

Sostituendo l'espressione di $Y(s)$ nella prima equazione si ottiene:

$$Z(s) = G_{11}(s)W(s) + G_{12}(s)(1 - G_{22}(s))^{-1}G_{21}(s)W(s)$$

Mettendo in evidenza $W(s)$ si ha:

$$Z(s) = \left(G_{11}(s) + G_{12}(s)(1 - G_{22}(s))^{-1}G_{21}(s)\right) W(s)$$

Quindi la funzione di trasferimento ad anello chiuso tra l'ingresso $W(s)$ e l'uscita $Z(s)$ è data da:

$$T_{zw}(s) = G_{11}(s) + G_{12}(s)(1 - G_{22}(s))^{-1}G_{21}(s) \tag{2.20}$$

La sequenza di passi per andare a formulare e risolvere un problema di H_∞ standard è la seguente:

- Definizione dell'impianto $G(s)$
- Traduzione delle specifiche di progetto in termini di funzioni di peso $W_S(s), W_T(s), W_K(s)$
- Definire $\bar{G}(s)$ del sistema in forma standard per il problema H_∞
- Risolvere il problema di controllo H_∞

$$\left\| \begin{pmatrix} W_S(s)S(s) \\ W_T(s)T(s) \\ W_K(s)K(s)S(s) \end{pmatrix} \right\|_\infty < \gamma$$

Per noi il problema di mixed sensitivity è considerato risolto se e solo se $\gamma < 1$.

2.3.1 Costruzione $W_S(s)$

Notiamo che le progettazioni sulle funzioni di peso che effettueremo ora valgono per sistemi SISO, dunque le funzioni di trasferimento che andremo a considerare sono tutte funzioni scalari. Ricordiamo che l'errore è dato da:

$$E(s) = S(s)\left(R(s) - D(s)\right) + T(s)N(s)$$

Per quanto riguarda le specifiche sulll'inseguimento del riferimento $R(s)$ le specifiche possibili sono le seguenti:

- Errore a regime $\leq \bar{e}_\infty$. Ricordiamo che l'errore a regime vale:

  $$e_\infty = \lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} sE(s)$$

  se il riferimento è un gradino $R(s) = \frac{1}{s}$ allora si ha (ricordiamo che stiamo considerando i disturbi nulli $D(s) = 0$ e $N(s) = 0$):

  $$e_\infty = \lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} sE(s) = S(0)$$

  Quindi la specifica sull'errore a regime si può riscrivere come:

  $$S(0) \leq \bar{e}_\infty$$

  Ora il nostro obiettivo è convertire questa specifica su $S(0)$ in una specifica su $W_S(s)$, in modo tale che se la specifica su $W_S(s)$ è soddisfatta allora anche la specifica su $S(0)$ è soddisfatta. Partiamo con il ricordare che per noi il H_∞ associato al problema di mixed sensitivity è risolto se e solo se:

  $$\|W_S(s)S(s)\|_\infty < 1$$

  Ma per definizione della norma H_∞ si ha che la disugualianza è vera $\forall s$, quindi in particolare per $s = 0$:

  $$|W_S(0)|\,|S(0)| < 1 \iff |S(0)| < \frac{1}{|W_S(0)|}$$

  Ora se imponiamo la seguente condizione su $W_S(0)$:

  $$\frac{1}{|W_S(0)|} \leq \bar{e}_\infty$$

  si il risultato voluto, cioè una specifica su $W_S(s)$ che implica la specifica su $S(0)$:

  $$|S(0)| < \frac{1}{|W_S(0)|} \leq \bar{e}_\infty \Longrightarrow |S(0)| < \bar{e}_\infty$$

  Quindi la specifica sull'errore a regime si può tradurre in una specifica su $W_S(0)$:

  $$-+\frac{1}{|W_S(0)|} \leq \bar{e}_\infty \Longrightarrow |W_S(0)| \geq \frac{1}{\bar{e}_\infty} \tag{2.21}$$

- Tempo di assestamento

- Sovraelongazione

$$\|W_S(s)S(s)\|_\infty < 1 \text{ Disturbi in ingresso}$$

$$\|W_T(s)T(s)\|_\infty < 1 \text{ Riferimenti in ingresso}$$

Teorema del piccolo guadagno.

$$\|W_K(s)K(s)S(s)\|_\infty < 1$$

$$W_S = \frac{\frac{s}{M_P} + \omega_c}{s + A\omega_c}$$

- Fattore di riduzione M_R
- ω di attenuazione

$$W_T = \frac{\frac{s}{M_P} + \omega_c}{s + A\omega_c}$$

Capitolo 3

Appendici

3.1 Uguaglianza matriciale per dimostrare la relazione di $T(s)$

Per dimostrare che per la funzione di sensitività complementare $T(s)$ vale la relazione:

$$T(s) = (I + L(s))^{-1} L(s) = L(s) (I + L(s))^{-1}$$

cioè che le matrici $(I + L(s))^{-1}$ e $L(s)$ commutano, abbiamo usato la seguente identità matriciale:

$$(I + AB)^{-1} A = A (I + BA)^{-1}$$

Dimostrazione. Noi vogliamo dimostrare che:

$$(I + AB)^{-1} A = A (I + BA)^{-1}$$

Studiamoci la matricie differenza:

$$D \coloneqq (I + AB)^{-1} A - A (I + BA)^{-1}$$

Se riusciamo a dimostrare che $D = 0$ allora abbiamo dimostrato l'uguaglianza. Moltiplichiamo D a sinistra per $(I + AB)$ e a destra per $(I + BA)$, si ha:

$$(I + AB)D(I + BA) = (I + AB) (I + AB)^{-1} A(I + BA) - (I + AB)A (I + BA)^{-1} (I + BA)$$

Notiamo che $(I + AB)^{-1} A(I + BA) = I$ e $(I + BA)^{-1} (I + BA) = I$, quindi si ha:

$$(I + AB)D(I + BA) = A(I + BA) - (I + AB)A = A + ABA - A - ABA = 0$$

Abbiamo dimostrato $D = 0$, quindi anche l'uguaglianza iniziale. □