Indice

1 Controllo di sistemi MIMO **2**
1.1 Schema di retroazione dell'uscita con integratori 2
1.2 Problema di Mixed Sensitivity Design 11
1.3 Problema H_∞ in forma standard 14
1.4 Problema di Mixed Sensitivity come problema H_∞ in forma standard 15
1.5 Progettazione delle funzioni di peso 18
1.5.1 Costruzione $W_S(s)$ 18

2 Appendici **21**
2.1 Norme 21
2.2 SVD (Singular Value Decomposition) 23
2.3 Diagonalizzare 24
2.4 Uguaglianza matriciale per dimostrare la relazione di $T(s)$ 25

Capitolo 1

Controllo di sistemi MIMO

1.1 Schema di retroazione dell'uscita con integratori

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + Md(t) \\ y(t) = Cx(t) + Nd(t) \end{cases} \tag{1.1}$$

L'integratore è necessario per eliminare l'errore a regime, ora daremo una giustificazione logica di questa affermazione. Consideriamo che al posto dell'integratore ci sia un blocco $Z(s)$ generico come in figura **??**, seguiamo il seguente ragionameto:

1. Noi vogliamo che l'uscita $y(t)$ segua un riferimento costante $r(t) = \bar{r}$, quindi vogliamo che a regime valga $y(t) \to \bar{y} = \bar{r}$, cioè:

$$\lim_{t \to +\infty} y(t) = \bar{y} = \bar{r}$$

2. Ma se l'uscita a regime è costante, allora per il teorema del valore finale

3. per $t \to +\infty$ che $y(t) \to \bar{y} = \bar{r}$.

4. Ma se $y(t)$ a regime è costante, allora per il teorema del valore finale anche le $u(t)$ e le $v(t)$ a regime devono essere costanti.

5. Inoltre se la $\bar{y} = \bar{r}$ si ha che a regime l'errore è nullo:

$$\bar{e} = \lim_{t \to +\infty} e(t) = \lim_{t \to +\infty} r(t) - y(t) = \bar{r} - \bar{y} = 0$$

6. Ma se l'errore è nullo a regime, allora si ha che in ingresso al blocco $Z(s)$ si ha un ingresso nullo, quindi il blocco $Z(s)$ a regime vede un ingresso nullo. Quindi il blocco $Z(s)$ deve essere un integratore, poichè è l'unico operatore che ad un ingresso nullo fornisce in uscita un segnale costante (diverso da zero).

Quindi abbiamo dimostrato che per avere errore nullo a regime il blocco $Z(s)$ deve essere proprio un integratore, cioè:

$$Z(s) = \frac{1}{s}$$

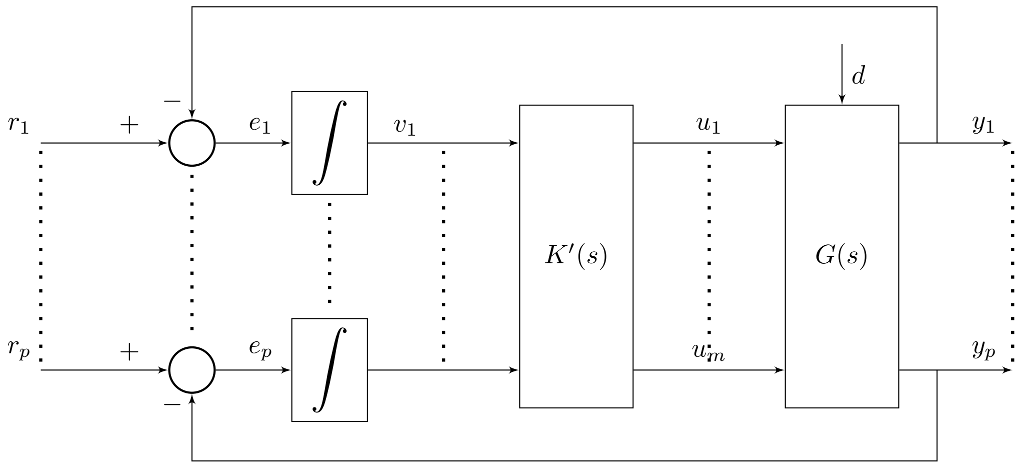


Figura 1.1: Schema di retroazione dell'uscita con integratori

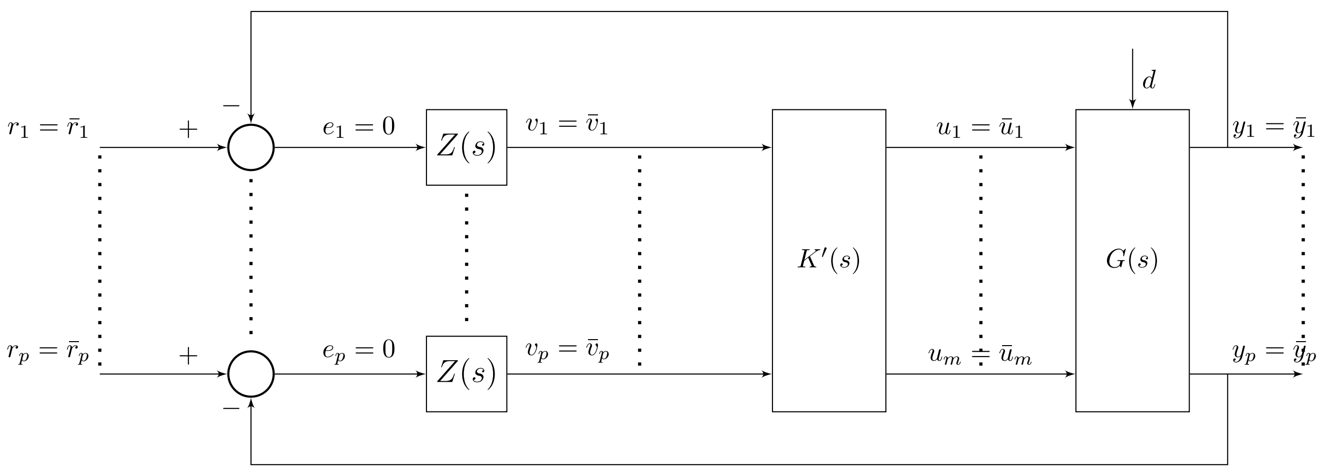


Figura 1.2: Schema per la dimostrazione che l'unico blocco che garantisce errore nullo a regime è l'integratore

Supponiamo ora che il nostro controllore $K'(s)$ riesca a stabilizzare il sistema, cioè che riesca a portare tutti a posizionare tutti poli del sistema aumentato in retroazione dell'uscita con integratori a sinistra dell'asse immaginario (cioè con parte reale negativa). Supposto questo vogliamo andare a studiarci le condizioni necessarie affinchè il sistema riesca a posizionare l'uscita $y(t)$ al valore di riferimento $\bar{r}$. In termine formali vogliamo studiare le condizioni necessarie affinche a regime si abbia per ogni $\bar{y}$ e $\bar{d}$ (che rappresentano rispettivamente il valore di uscita a regime e il disturbo a regime)

$$\begin{cases} 0 = A\bar{x} + B\bar{u} + M\bar{d} \\ \bar{y} = C\bar{x} + N\bar{d} \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -M & 0 \\ -N & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{d} \\ \bar{y} \end{pmatrix} \tag{1.2}$$

Questo è un sistema di $n+p$ equazioni in $n+m$ ($\bar{x}$ e $\bar{u}$ sono incognite). Definiamo la matrice Σ come:

$$\Sigma := \begin{pmatrix} A & B \\ C & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+p)\times(n+m)} \tag{1.3}$$

Quello che andremo a fare ora è determinare delle **condizioni necessarie** sulla matrice Σ affinchè il sistema (1.2) ammetta soluzione $\forall N \in \mathbb{R}^{p\times r}, M \in \mathbb{R}^{n\times r}, \bar{d} \in \mathbb{R}^{r\times 1}, \bar{y} \in \mathbb{R}^{p\times 1}$. Per determinare queste condizioni necessarie andremo a trovare dei casi particolari di Σ in cui il sistema non ammette soluzione, dunque condizione necessaria alla soluzione del sistema è che la matrice Σ non cada in questi casi particolari.

Il **primo caso** particolare che andremo a considerare è quando il numero di incognite $(n+m)$ del sistema è minore del numero di equazioni $(n+p)$ del sistema, cioè:

$$n + m < n + p \tag{1.4}$$

Questo equivale a dire che il numero di colonne della matrice Σ è minore del numero di righe della matrice Σ. Ma questo significa che la matrice Σ non può essere di rango pieno per righe (poichè ha più righe che colonne, ed il rango ha come massimo valore dunque il numero di colonne). Se la matrice Σ non è di rango pieno per righe significa che esistono delle righe della matrice Σ che sono combinazioni lineari delle altre righe, dunque facendo delle operazioni elementari sulle righe (ricordiamo che queste operazioni non cambiano lo spazio delle soluzioni del sistema) possiamo arrivare rendere nulle queste righe linearmente dipendenti. Ma se una riga della matrice Σ è nulla significa che se a destra il termine noto assume un valore diverso da zero il sistema non ammette soluzione. Ma noi vogliamo che il sistema ammetta soluzione $\forall N \in \mathbb{R}^{p\times r}, M \in \mathbb{R}^{n\times r}, \bar{d} \in \mathbb{R}^{r\times 1}, \bar{y} \in \mathbb{R}^{p\times 1}$, questo significa che i termini noti possono assumere qualunque valore, quindi anche un valore diverso da zero. Quindi se scegliamo le matrici M ed N e i vettori $\bar{d}$ e $\bar{y}$ in modo tale che il termine noto a destra della riga nulla sia diverso da zero abbiamo che il sistema non ammette soluzione. Dunque abbiamo trovato che nel caso particolare in cui:

$$n + m < n + p$$

il sistema non ammette soluzione $\forall N \in \mathbb{R}^{p\times r}, M \in \mathbb{R}^{n\times r}, \bar{d} \in \mathbb{R}^{r\times 1}, \bar{y} \in \mathbb{R}^{p\times 1}$. Quindi una condizione necessaria affinchè il sistema ammetta soluzione è che la condizione (1.4) non sia verificata, cioè si deve avere:

$$n + m \geq n + p \iff m \geq p$$

cioè il numero di ingressi deve essere maggiore o uguale al numero di uscite, cosa che era già intuibile, infatti se voglio controlla p uscite dovrò avere un numero di ingressi almeno maggiore o uguale a p. Ad esempio se io ho 5 uscite da controllare almeno dovrò avere 5 ingressi per poter controllare tutte le uscite.

Supponiamo ora di aver soddisfatto questa prima condizione necessaria, cioè di esserci messi nella condizione $m \geq p$. Andiamo ora a cercare un **secondo caso particolare** in cui il sistema non ammette soluzione. Un'altro caso particolare in cui il sistema non ammette soluzione è quando il rango della matrice Σ non è massimo, cioè (poichè siamo nella condizione $m \geq p$):

$$rank(\Sigma) < min\{n + m, n + p\} = n + p$$

Infatti essendo il numero di righe della matrice Σ uguale a $n + p$, se il rango della matrice Σ è minore di $n + p$ significa che esistono delle righe della matrice Σ che sono combinazioni lineari delle altre righe, dunque come prima facendo delle operazioni elementari sulle righe (possibili perchè non cambiano lo spazio delle soluzioni del sistema) possiamo arrivare rendere nulle queste righe linearmente dipendenti, e mettendo a destra del sistema il termine noto diverso da zero arriviamo ad un sistema che non ammette soluzione. Dunque abbiamo trovato un'altro caso particolare in cui il sistema non ammette soluzione $\forall N \in \mathbb{R}^{p\times r}, M \in \mathbb{R}^{n\times r}, \bar{d} \in \mathbb{R}^{r\times 1}, \bar{y} \in \mathbb{R}^{p\times 1}$. Dunque affinche il sistema ammetta soluzione sicuramente dobbiamo evitare questo caso particolare, cioè dobbiamo fare in modo che il rango di Σ sia massimo, cioè dobbiamo avere:

$$rank(\Sigma) = n + p$$

Quindi le **condizioni necessarie** affinche il sistema ammetta soluzione $\forall N \in \mathbb{R}^{p\times r}, M \in \mathbb{R}^{n\times r}, \bar{d} \in \mathbb{R}^{r\times 1}, \bar{y} \in \mathbb{R}^{p\times 1}$

1) Il numero di ingressi deve essere maggiore o uguale al numero di uscite:

$$m \geq p \tag{1.5}$$

2) La matrice Σ deve essere di rango pieno:

$$rank(\Sigma) = min\,\{n + m, n + p\} = n + p \tag{1.6}$$

La condizione (1.6) si può determinare in un modo più formale andando anche a considerare la stabilità del sistema in retroazione con integratori (cosa che fino ad ora abbiamo supposto). Questa condizione si può determinare andando a studiare il sistema aumentato in retroazione con integratori. Ricordiamo il vettore di stato del sistema aumentato è $\begin{pmatrix} x(t) & v(t) \end{pmatrix}^T \in \mathbb{R}^{(n+p)\times 1}$, dunque le derivate degli stati valgono:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + Md(t) \\ \dot{v}(t) = e(t) = r(t) - y(t) = r(t) - Cx(t) - Nd(t) \end{cases}$$

Prendiamo come uscita del sistema aumentato $\tilde{y}(t) = v(t)$, dunque si ha che la rappresentazione in forma matriciale del sistema aumentato è:

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{v}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ v(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B \\ 0 \end{pmatrix} u(t) + \begin{pmatrix} M \\ -N \end{pmatrix} d(t) \\ \tilde{y}(t) = \begin{pmatrix} 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ v(t) \end{pmatrix} \end{cases}$$

Definiamo $\tilde{n}$:

$$\tilde{n} := n + p$$

Dunque definiamo le seguenti matrici:

$$\tilde{A} := \begin{pmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{\tilde{n} \times \tilde{n}}, \quad \tilde{B} := \begin{pmatrix} B \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{\tilde{n} \times m}, \quad \tilde{C} := \begin{pmatrix} 0 & I \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{p \times \tilde{n}}$$

Che hanno gli ovvi significati nel sistema aumentato. Il nostro obiettivo iniziale era trovare un controllore $K'(s)$ che stabilizzasse il sistema in retroazione con integratori, cioè che rendesse asintoticamente stabile il sistema aumentato. Condizione necessaria affinchè esista un controllore $K'(s)$ che stabilizzi il sistema aumentato è che il sistema aumentato sia:

1) Completamente raggiunbile

2) Completamente osservabile

Queste due condizioni equivalgono a dire che:

1) La coppia $(\tilde{A}, \tilde{B})$ è completamente raggiunbile

2) La coppia $(\tilde{A}, \tilde{C})$ è completamente osservabile

Quindi dobbiamo ora studiarci la raggiungibilità e l'osservabilità del sistema aumentato. Andiamo prima a studiare l'**osservabilità**, cioè il rango della matrice di osservabilità (ricordiamo che affinchè il sistema sia completamente osservabile il rango deve essere massimo cioè uguale a $\tilde{n}$):

$$M_O(\tilde{A}, \tilde{C}) = \left. \overbrace{\begin{pmatrix} \tilde{C} \\ \tilde{C}\tilde{A} \\ \vdots \\ \tilde{C}\tilde{A}^{\tilde{n}-1} \end{pmatrix}}^{n+p \text{ colonne}} \right\} np \text{ righe}$$

Ricordando che $\tilde{C} = \begin{pmatrix} 0 & I \end{pmatrix}$ e $\tilde{C}\tilde{A} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{pmatrix}$ si ha :

$$\tilde{C}\tilde{A}^2 = \begin{pmatrix} 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^2 & 0 \\ -CA & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -CA & 0 \end{pmatrix}$$

L'espressione generale $\forall k \in \mathbb{N}$ è:

$$\tilde{C}\tilde{A}^k = \begin{pmatrix} 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^k & 0 \\ -CA^{k-1} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -CA^{k-1} & 0 \end{pmatrix}$$

Quindi $M_O(\tilde{A}, \tilde{C})$ si può scrivere come:

$$M_O(\tilde{A},\tilde{C}) = \begin{array}{c} \begin{matrix} \overbrace{\qquad\qquad\quad}^{n \text{ colonne}} & \overbrace{\qquad}^{p \text{ colonne}} \end{matrix} \\ \left(\begin{matrix} 0 & I \\ -C & 0 \\ -CA & 0 \\ \vdots & \vdots \\ -CA^{n-1} & 0 \\ \vdots & \vdots \\ -CA^{\tilde{n}-2} & 0 \end{matrix}\right) \begin{matrix} \left.\vphantom{I}\right\} p \text{ righe} \\ \left.\vphantom{\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix}}\right\} (n-1)p \text{ righe} \end{matrix} \end{array}$$

Come si può vedere la matrice $M_O(\tilde{A}, \tilde{C})$ ha rango pieno $rank(M_O(\tilde{A}, \tilde{C})) = n + p$ se e solo se la sottomatrice composta dalle seguenti righe:

$$\begin{pmatrix} -C \\ -CA \\ \vdots \\ -CA^{n-1} \\ \vdots \\ -CA^{\tilde{n}-2} \end{pmatrix} \tag{1.7}$$

ha rango pieno, cioè ha rango n. Ricordiamo che il rango è limitato superiormente dal minimo tra il numero di righe (np) e il numero di colonne (n), quindi in questo caso il limite superiore è dato dal numero di colonne. Ora notiamo che le righe aggiunte dopo la riga n (quella corrispondente a $-CA^{n-1}$) sono linearmente dipendenti dalle prime n righe per il teorema di Cayley-Hamilton, quindi per andare a studiare il rango della matrice possiamo limitarci a studiare il rango delle righe:

$$\begin{pmatrix} -C \\ -CA \\ \vdots \\ -CA^{n-1} \end{pmatrix} \tag{1.8}$$

Affinche la matrice (1.7) abbiamo rango massimo (n) dobbiamo avere che le righe in (1.8) siano linearmente indipendenti, cioè dobbiamo avere che la matrice (1.8) abbia rango n. Ma questa condizione è proprio la condizione di completa osservabilità della coppia (A, C) del sistema

originale. Quindi il sistema aumentato è completamente osservabile se e solo se il sistema originale è completamente osservabile.
Andiamo ora a studiarci la **raggiungibilità** del sistema aumentato, cioè il rango della matrice di raggiungibilità (ricordiamo che affinchè il sistema sia completamente raggiungibile il rango deve essere massimo cioè uguale a $\tilde{n}$):

$$M_R(\tilde{A},\tilde{B}) = \overbrace{\begin{pmatrix} \tilde{B} & \tilde{A}\tilde{B} & \dots & \tilde{A}^{\tilde{n}-1}\tilde{B} \end{pmatrix}}^{\tilde{n}m \text{ colonne}} \Big\} \, n+p \text{ righe}$$

L'espressione generale $\forall k \in \mathbb{N}$ è:

$$\tilde{A}^k\tilde{B} = \begin{pmatrix} A^k & 0 \\ -CA^{k-1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^kB \\ -CA^{k-1}B \end{pmatrix}$$

Quindi la matrice di raggiungibilità del sistema aumentato si può scrivere come:

$$M_R(\tilde{A},\tilde{C}) = \begin{array}{c} \overbrace{\begin{array}{ccccc} \overbrace{}^{m} & \overbrace{}^{m} & \overbrace{}^{m} & & \overbrace{\phantom{A^{\tilde{n}-1}B}}^{m} \end{array}}^{\tilde{n}m} \\ \begin{pmatrix} B & AB & A^2B & \cdots & A^{\tilde{n}-1}B \\ 0 & -CB & -CAB & \cdots & -CA^{\tilde{n}-2}B \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \} \, n \\ \} \, p \end{array} \tag{1.9}$$

Andiamo ora ad enunciare il seguente lemma che lega la raggiungibilità del sistema aumentato con la raggiungibilità del sistema originale.

Lemma 1.1.1. *Se il sistema aumentato è completamente raggiungibile allora il sistema originale è completamente raggiungibile.*

Dimostrazione. Noi abbiamo supposto che il sistema aumentato sia completamente raggiungibile, cioè che la matrice di raggiungibilità del sistema aumentato abbia rango pieno. Notiamo che la matrice di raggiungibilità del sistema aumentato ha $n+p$ righe dunque per essere di rango pieno deve avere rango $n+p$:

$$rank(M_R(\tilde{A},\tilde{B})) = n+p$$

Questo significa che tutte le righe della matrice di raggiungibilità devono essere linearmente indipendenti (infatti la matrice ha più colonne che righe, dunque il rango massimo è dato dal numero di righe). In particolare, anche le prime n righe della matrice di raggiungibilità devono essere linearmente indipendenti, ma questo significa che la seguente matrice, costituita dalle prime n righe della matrice di raggiungibilità, è di rango pieno (cioè ha rango n):

$$\begin{pmatrix} B & AB & A^2B & \dots A^{n-1}B & \dots & A^{\tilde{n}-1}B \end{pmatrix} \tag{1.10}$$

Ma le colonne dopo la colonna n-esima (cioè le colonne da $n+1$ a $n+p$) sono linearmente dipendenti dalle prime n colonne per il teorema di Cayley-Hamilton. Quindi se la matrice

(1.10) è di rango pieno n significa che le prime n colonne sono linearmente indipendenti, ma questo significa che la seguente matrice ha rango pieno n:

$$\begin{pmatrix} B & AB & A^2B & \dots A^{n-1}B \end{pmatrix} \tag{1.11}$$

Ma la matrice (1.11) è proprio la matrice di raggiungibilità del sistema originale (A, B). Dunque abbia dimostrato che se il sistema aumentato è completamente raggiungibile allora la matrice di raggiungibilità del sistema originale è di rango pieno, cioè che il sistema originale è completamente raggiungibile. □

Dunque condizione necessaria affinche il sistema aumentato sia completamente raggiungibile è che il sistema originale (A, B) sia completamente raggiungibile.

Andiamo ora a ricavare di nuovo la condizione necessaria (1.6) come abbiamo già detto all'inizio. Per prima cosa notiamo che la matrice di raggiungibilità del sistema aumentato (1.9) si può riscrivere come prodotto di matrici:

$$M_R(\tilde{A}, \tilde{B}) = \begin{pmatrix} A & B \\ -C & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & B & AB & \dots & A^{\tilde{n}-2}B \\ I & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \tag{1.12}$$

Definiamo la matrice $\tilde{\Sigma} \in \mathbb{R}^{(n+p)\times(n+m)}$ come:

$$\tilde{\Sigma} := \begin{pmatrix} A & B \\ -C & 0 \end{pmatrix} \tag{1.13}$$

Notiamo che questa matrice $\tilde{\Sigma}$ ha lo stesso rango della matrice Σ definita in (1.3) Mentre chiamiamo la matrice a destra del prodotto in (1.12) come $Q \in \mathbb{R}^{(n+m)\times\tilde{n}m}$:

$$Q := \begin{pmatrix} 0 & B & AB & \dots & A^{\tilde{n}-2}B \\ I & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \tag{1.14}$$

Quindi la $M_R(\tilde{A}, \tilde{B})$ si può scrivere come:

$$M_R(\tilde{A}, \tilde{B}) = \tilde{\Sigma}Q \tag{1.15}$$

Dimostriamo ora per assurdo che se la matrice $\tilde{\Sigma}$ non è di rango pieno allora la matrice di raggiungibilità del sistema aumentato non è di rango pieno, vogliamo dimostrare che:

Lemma 1.1.2. *Se la matrice di raggiungibilità del sistema aumentato è di rango pieno allora la matrice $\tilde{\Sigma}$ è di rango pieno.*

ogliamo quindi dimostrare che, affinché la matrice di raggiungibilità del sistema aumentato sia di rango pieno, è necessario che $\tilde{\Sigma}$ sia di rango pieno. Ora dimostreremo il teorema 1.1.2 per assurdo, cioè dimostreremo che il negato del teorema 1.1.2 implica una contraddizione. Notiamo che il negato del teorema 1.1.2 consiste nel provare a dimostrare che se la matrice $M_R(\tilde{A}, \tilde{B})$ è di rango pieno allora la matrice $\tilde{\Sigma}$ non è di rango pieno.

Dimostrazione. La nostra ipotesi è che la matrice di raggiungibilità del sistema aumentato sia di rango pieno, cioè che:

$$rank(M_R(\tilde{A}, \tilde{B})) = n + p$$

Vogliamo dimostrare, come tesi, che questa ipotesi implica che la matrice $\tilde{\Sigma}$ non sia di rango pieno:

$$rank(\tilde{\Sigma}) < n + p$$

Ma per la proprietà del prodotto delle matrici si ha che:

$$rank(M_R(\tilde{A}, \tilde{B})) \leq min\{rank(\tilde{\Sigma}), rank(Q)\}$$

Cioè si ha che:

$$n + p \leq min\{rank(\tilde{\Sigma}), rank(Q)\}$$

Ma notiamo che a destra il minimo tra i due ranghi è sicuramente minore o uguale al rango di $\tilde{\Sigma}$, dunque si ha che:

$$n + p \leq rank(\tilde{\Sigma})$$

Ma noi avevamo supposto all'inizio che la matrice $\tilde{\Sigma}$ non fosse di rango pieno, cioè si ha:

$$n + p < n + p$$

Ma questo è un assurdo. Dunque la nostra tesi iniziale deve essere falsa, cioè se la matrice di raggiungibilità del sistema aumentato è di rango pieno allora la matrice $\tilde{\Sigma}$ è di rango pieno. □

Ora abbiamo dimostrato che affinche il sistema aumentato sia completamente raggiungibile (che ricordiamo essere condizione necessaria e sufficiente, insieme alla completa osservabilità, per la risoluzione del problema di controllo) è necessario che la matrice $\tilde{\Sigma}$ sia di rango pieno, ma questa matrice come abbiamo detto prima ha lo stesso rango della matrice Σ definita in (1.3), dunque abbiamo ridimostrato la condizione necessaria (1.6), cioè che la matrice Σ deve essere di rango pieno affinche il problema di controllo sia risolvibile. Ora dimostriamo che se la matrice Σ è di rango pieno e il sistema originale è completamente raggiungibile allora il sistema aumentato è completamente raggiungibile.

Lemma 1.1.3. *Se la matrice Σ è di rango pieno e il sistema originale è completamente raggiungibile allora il sistema aumentato è completamente raggiungibile.*

Dimostrazione. Vogiamo dimostrare che sotto le ipotesi del teorema la matrice di raggiungibilità del sistema aumentato è di rango pieno, cioè che:

$$rank(M_R(\tilde{A}, \tilde{B})) = n + p$$

Per la proprietà del prodotto delle matrici si ha che:

$$rank(M_R(\tilde{A}, \tilde{B})) \leq min\{rank(\tilde{\Sigma}), rank(Q)\}$$

Inoltre una nota disugualianza sui ranghi delle matrici dice che ($M_R(\tilde{A}, \tilde{B}) = \tilde{\Sigma}Q$):

$$rank(M_R(\tilde{A}, \tilde{B})) \geq rank(\tilde{\Sigma}) + rank(Q) - (n + m)$$

Unendo le due disuguaglianze si ha che:

$$rank(\tilde{\Sigma}) + rank(Q) - (n+m) \leq M_R(\tilde{A}, \tilde{B}) \leq min\{rank(\tilde{\Sigma}), rank(Q)\} \tag{1.16}$$

Ma per ipotesi la matrice Σ è di rango pieno:

$$rank(\tilde{\Sigma}) = n + p$$

Il sistema originale è completamente raggiungibile, dunque la matrice Q anche essa è di rango pieno:

$$rank(Q) = n + m$$

Dunque riscrivendo la disugualianza (1.16) si ha:

$$(n+p) + (n+m) - (n+m) \leq rank(M_R(\tilde{A}, \tilde{B})) \leq min\{n+p, n+m\}$$

Da cui si ricava (dato che $m \geq p$):

$$n + p \leq rank(M_R(\tilde{A}, \tilde{B})) \leq n + p$$

Dunque si deve per forza avere:

$$rank(M_R(\tilde{A}, \tilde{B})) = n + p$$

Quindi la matrice di raggiungibilità del sistema aumentato è di rango pieno, cioè il sistema aumentato è completamente raggiungibile. □

Uniamo tutti i risultati ottenuti nei Lemmi 1.1.1, 1.1.2, 1.1.3 in un unico teorema che consiste in una condizione necessaria e sufficiente.

Teorema 1.1.4. *Il sistema aumentato è completamente raggiungibile se e solo se il sistema originale è completamente raggiungibile e la matrice Σ è di rango pieno.*

1.2 Problema di Mixed Sensitivity Design

Il nostro obiettivo ora è andare a formulare le seguente specifiche di progetto:

- Stabilità
- Stabilità robusta
- Performance inseguimento/disturbo
- Limitazione controllo

sulle funzione di sensitività $S(s)$ e sensitività complementare $S'(s)$.

$$E(s) = R(s) - Y(s) = S(s)(R(s) - D(s)) + T(s)N(s)$$

$$U(s)K(s)S(s)\left(R(s) - D(s) - N(s)\right)$$

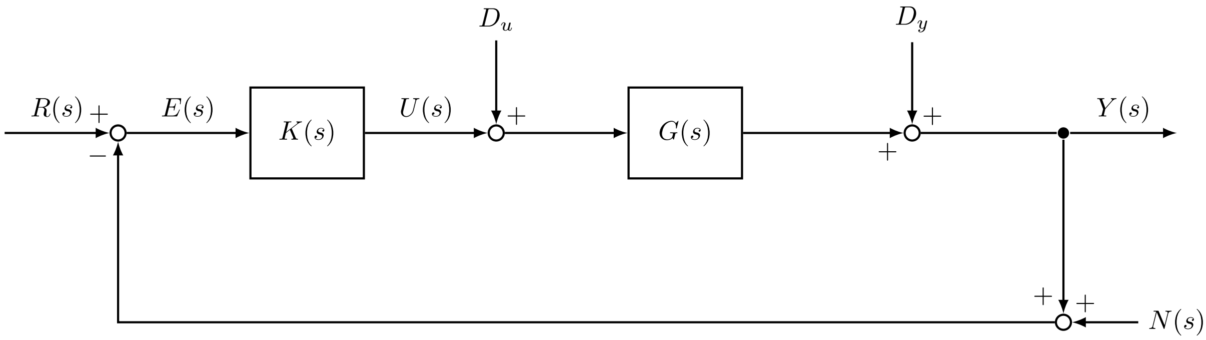


Figura 1.3: Sistema di controllo MIMO con retroazione negativa e disturbi

$$\begin{cases} \|S(s)\|_\infty \to 0 \\ \|T(s)\|_\infty \to 0 \end{cases} \tag{1.17}$$

E' impossibile realizzare la condizione precedente poichè vale la relazione

$$S(s) + T(s) = I$$

Questo problema si può risolvere ricordando che gli ingressi del sistema sono di solito segnali presenti a frequenze diverse:

- Il riferimento $R(s)$ è a bassa frequenza
- Il disturbo $D(s)$ è a bassa frequenza
- Il rumore $N(s)$ è ad alta frequenza

Con queste considerazioni possiamo andare a formulare le specifiche di progetto in modo diverso, infatti le specifiche 1.17 sono potenti, ma non necessarie, possiamo accontentarci delle seguenti specifiche, più deboli ma sufficienti a soddisfare le nostre esigenze (e più che altro realizzabili):

$$\begin{cases} \|S(s)(R(s) - D(s))\|_2 \to 0, & \forall R, D \text{ reali (cioè stiamo considerando} \\ & \text{il comportamento frequenziale di } R(s) \text{ e } D(s)) \\ \|T(s)N(s)\|_2 \to 0, & \forall N \text{ reale (cioè stiamo considerando} \\ & \text{il comportamento frequenziale di } N(s)) \end{cases} \tag{1.18}$$

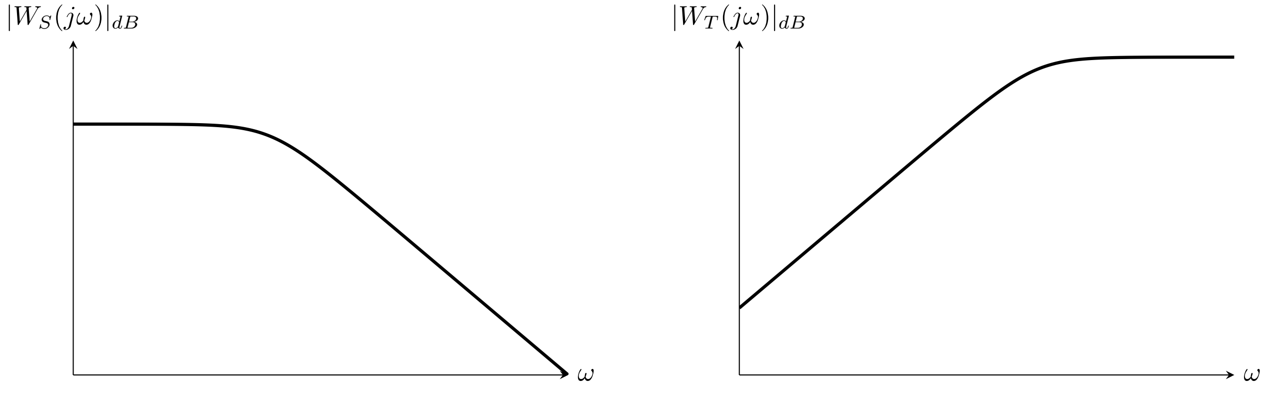
dove notiamo che $S(s)(R(s) - D(s))$ e $T(s)N(s)$ sono vettori, quindi la norma 2 si intende come norma vettoriale.

Infatti se sono vere le (1.18) si ha che per la disuguaglianza triangolare:

$$\|E(s)\|_2 \leq \|S(s)(R(s) - D(s))\|_2 + \|T(s)N(s)\|_2 \to 0 \Longrightarrow \|E(s)\|_2 \to 0$$

Ma cosa hanno di differente le specifiche (1.18) rispetto alle speficiche (1.17), la differenza principale sta nel fatto che ora possiamo andare ad esplicitare le caratteristiche spettrali dei segnali $R(s)$, $D(s)$ e $N(s)$, infatti possiamo dire che:

- Visto che $R(s)$ e $D(s)$ sono segnali a bassa frequenza, per soddisfare la prima specifica di (1.18) ci basta che $S(s)$ tenda a zero in bassa frequenza, mentre in alta frequenza ci



(a) Funzione peso $W_S(s)$

(b) Funzione peso $W_T(s)$

Figura 1.4: Andamenti tipici delle funzioni peso per sistemi SISO

penseranno i segnali $R(s)$ e $D(s)$ a far si che la norma vada a zero. Questo si traduce in una specifica sulla norma infinito non più di $S(s)$ ma di una funzione $W_S(s)S(s)$:

$$\|W_S(s)S(s)\|_\infty \to 0$$

dove $W_S(s)$ è una funzione di peso che ha un valore alto in bassa frequenza e un valore basso in alta frequenza, cosichè per soddisfare la specifica la funzione $S(s)$ deve essere piccola in bassa frequenza, come richiesto. L'introduzione di questa funzione di peso ci permette di non imporre vincoli in alta frequenza su $S(s)$, andando quindi a permetterci di imporrre vincoli sulla $T(s)$, continuando però a rispettare l'identità $S(s) + T(s) = I$. Una possibile scelta per $W_S(s)$ per un sistema SISO è in Figura 1.4a.

- Visto che $N(s)$ è un segnale ad alta frequenza, per soddisfare la seconda specifica di (1.18) ci basta che $T(s)$ tenda a zero in alta frequenza, mentre in bassa frequenza ci penserà il segnale $N(s)$ a far si che la norma vada a zero. Questo si traduce in una specifica sulla norma infinito non più di $T(s)$ ma di una funzione $W_T(s)T(s)$:

$$\|W_T(s)T(s)\|_\infty \to 0$$

dove $W_T(s)$ è una funzione di peso che ha un valore basso in bassa frequenza e un valore alto in alta frequenza, cosichè per soddisfare la specifica la funzione $T(s)$ deve essere piccola in alta frequenza, mentre in bassa frequenza non ci sono vincoli su $T(s)$, poichè la funzione di peso $W_T(s)$ si occuperà di far andare a zero la norma infinito. Una possibile scelta per $W_T(s)$ per un sistema SISO è in Figura 1.4b.

- E' possibile definire anche una funzione di peso $W_K(s)$ per limitare l'azione di controllo $U(s)$. Infatti andando a gestire la norma infinito di $W_K(s)K(s)S(s)$:

$$\|W_K(s)K(s)S(s)\|_\infty \to 0$$

possiamo limitare l'azione di controllo andando a scegliere opportunamente la funzione di peso $W_K(s)$. Per un sistema SISO una possibile $W_K(s)$ è costante in un largo intervallo di frequenze (quelle possibili per il nostro ingresso di controllo $U(s)$), e va a zero in alta frequenza ed in bassa frequenza. Modificando opportunamente il valore costante possiamo andare a limitare l'azione di controllo. Ad esempio aumentando il valore costante andremo

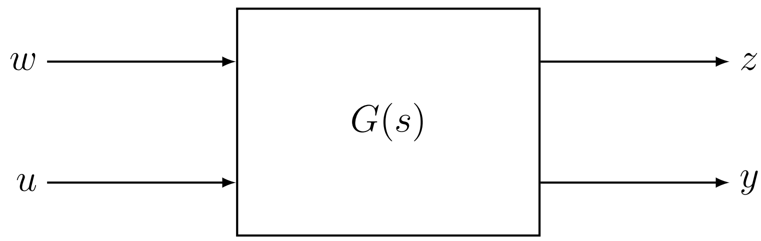


Figura 1.5: Sistema generale per il controllo H_∞

ad abbassare il valore di $|K(s)S(s)|$ (per un sistema SISO $K(s)S(s)$ è uno scalare e quindi si può parlare di modulo), e di conseguenza andremo ad abbassare il valore di $|U(s)|$.

Il problema che si occupa di trovare le espressioni delle funzioni di peso $W_S(s)$, $W_T(s)$ e $W_K(s)$ prende il nome di **Mixed Sensitivity Design**.

Un modo per risolvere questo problema è risolvere il problema H_∞

1.3 Problema H_∞ in forma standard

Consideriamo il sistema in Figura 1.5, questo sistema rappresenta il sistema di base per andare a formulare il **problema di controllo H_∞ in forma standard**. Notiamo che w, u, z, y possono essere vettori. Andiamo ad analizzare questo sistema, nello specifico notiamo che la relazione ingresso uscita del sistema è data da:

$$\begin{pmatrix} Z(s) \\ Y(s) \end{pmatrix} = G(s) \begin{pmatrix} W(s) \\ U(s) \end{pmatrix}$$

La matrice di trasferimento $G(s)$ si può scomporre in quattro sottomatrici:

$$G(s) = \begin{pmatrix} G_{11}(s) & G_{12}(s) \\ G_{21}(s) & G_{22}(s) \end{pmatrix}$$

Con questa scomposizione si ha che la relazione ingresso uscita del sistema si può scrivere come:

$$\begin{cases} Z(s) = G_{11}(s)W(s) + G_{12}(s)U(s) \\ Y(s) = G_{21}(s)W(s) + G_{22}(s)U(s) \end{cases} \tag{1.19}$$

Ora consideriamo il sistema in Figura 1.6, dove abbiamo inserito un controllore $K(s)$ in feedback, si ha:

$$U(s) = K(s)Y(s)$$

Andando a sostituire nel sistema (1.19) si ottiene:

$$\begin{cases} Z(s) = G_{11}(s)W(s) + G_{12}(s)Y(s) \\ Y(s) = G_{21}(s)W(s) + G_{22}(s)Y(s) \end{cases}$$

Quella che vogliamo andarci a ricavare noi ora è la funzione di trasferimento ad anello chiuso tra l'ingresso $W(s)$ e l'uscita $Z(s)$, andiamo quindi a ricavarci $Y(s)$ in funzione di $W(s)$ nella seconda equazione:

$$\begin{cases} Z(s) = G_{11}(s)W(s) + G_{12}(s)Y(s) \\ Y(s) - G_{22}(s)Y(s) = G_{21}(s)W(s) \end{cases}$$

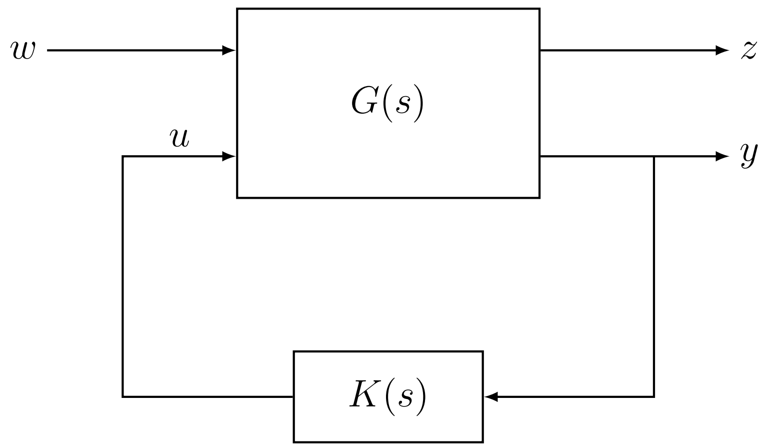


Figura 1.6: Problema di controllo H_∞ in forma standard

Mettendo in evidenza $Y(s)$ nella seconda equazione si ha:

$$\begin{cases} Z(s) = G_{11}(s)W(s) + G_{12}(s)Y(s) \\ (1 - G_{22}(s))Y(s) = G_{21}(s)W(s) \end{cases}$$

Moltiplicando ambo i membri della seconda equazione per $(1 - G_{22}(s))^{-1}$ si ottiene:

$$\begin{cases} Z(s) = G_{11}(s)W(s) + G_{12}(s)Y(s) \\ Y(s) = (1 - G_{22}(s))^{-1}G_{21}(s)W(s) \end{cases}$$

Sostituendo l'espressione di $Y(s)$ nella prima equazione si ottiene:

$$Z(s) = G_{11}(s)W(s) + G_{12}(s)(1 - G_{22}(s))^{-1}G_{21}(s)W(s)$$

Mettendo in evidenza $W(s)$ si ha:

$$Z(s) = \left(G_{11}(s) + G_{12}(s)(1 - G_{22}(s))^{-1}G_{21}(s)\right) W(s)$$

Quindi la funzione di trasferimento ad anello chiuso tra l'ingresso $W(s)$ e l'uscita $Z(s)$ è data da:

$$T_{zw}(s) = G_{11}(s) + G_{12}(s)(1 - G_{22}(s))^{-1}G_{21}(s) \tag{1.20}$$

Ora siamo in grado di formulare il problema di controllo H_∞ su un sistema in forma standard come quello in Figura 1.5, che però ha una forma diversa dal nostro sistema in retroazione di uscità. Nella prossima sezione andremo a vedere come utilizzare i risultati ottenuti per il problema di controllo H_∞ in forma standard per risolvere il problema di mixed sensitivity design.

1.4 Problema di Mixed Sensitivity come problema H_∞ in forma standard

Ricordiamo che il nostro schema di retroazione dell'uscita è quello in Figura **??**, e la funzione di cui vogliamo minimizzare la norma infinito è la seguente:

$$\min_{K(s)} \left\| \begin{pmatrix} W_S(s)S(s) \\ W_T(s)T(s) \\ W_K(s)K(s)S(s) \end{pmatrix} \right\|_\infty$$

Ma se riuscissimo a portare il sistema in Figura **??** nella forma del sistema in Figura 1.5 in modo tale che la funzione di trasferimento $T_{zw}(s)$ sia uguale a:

$$T_{zw}(s) = \begin{pmatrix} W_S(s)S(s) \\ W_T(s)T(s) \\ W_K(s)K(s)S(s) \end{pmatrix}$$

allora potremmo tradurre la risoluzione del problema di mixed sensitivity design in un problema di controllo H_∞ in forma standard. Ora andremo a costruirci un sistema fittizio a partire dal sistema in Figura **??** in modo tale che sia equivalente al sistema in Figura 1.5 e con una funzione di trasferimento $T_{zw}(s)$ uguale a quella desiderata. Il sistema fittizio è mostrato in Figura **??**, questo sistema ha come ingressi i segnali w e u e come uscite i segnali z_1, z_2, z_3 e y. Poniamo z come:

$$z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}$$

Ora quello che noi vogliamo andare a trovare è la funzione di trasferimento $\bar{G}(s)$ che lega:

$$\begin{pmatrix} Z(s) \\ Y(s) \end{pmatrix} = \bar{G}(s) \begin{pmatrix} W(s) \\ U(s) \end{pmatrix}$$

$$\bar{G}(s) = \begin{pmatrix} G_{11}(s) & G_{12}(s) \\ G_{21}(s) & G_{22}(s) \end{pmatrix}$$

$$Z_1(s) = W_S(s)Y(s) = W_S(s)\left(W(s) - G(s)U(s)\right)$$

$$Z_2(s) = W_K(s)U(s)$$

$$Z_3(s) = W_T(s)G(s)U(s)$$

$$\bar{G}(s) = \begin{pmatrix} W_S(s) & -W_S(s)G(s) \\ 0 & W_K(s) \\ 0 & W_T(s)G(s) \\ I & -G(s) \end{pmatrix}$$

Ora una volta ricavata la funzione di trasferimento $\bar{G}(s)$, quello che vogliamo andare a dimostrare è che il nostro problema H_∞ standard è equivalente al problema di mixed sensitivity design, cioè che la funzione di trasferimento ad anello chiuso tra l'ingresso $W(s)$ e l'uscita $Z(s)$ sia uguale a:

$$T_{zw}(s) = \begin{pmatrix} W_S(s)S(s) \\ W_K(s)K(s)S(s) \\ W_T(s)T(s) \end{pmatrix}$$

Andiamoci quindi a calcolare la funzione di trasferimento ad anello chiuso tra l'ingresso $W(s)$ e l'uscita $Z(s)$, ricordando che vale 1.20:

$$T_{zw}(s) = \bar{G}_{11}(s)+\bar{G}_{12}(s)(1-\bar{G}_{22}(s))^{-1}\bar{G}_{21}(s) = \begin{pmatrix} W_S(s) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -W_S(s)G(s) \\ W_K(s) \\ W_T(s)G(s) \end{pmatrix} K(s)(I+G(s)K(s))^{-1}$$

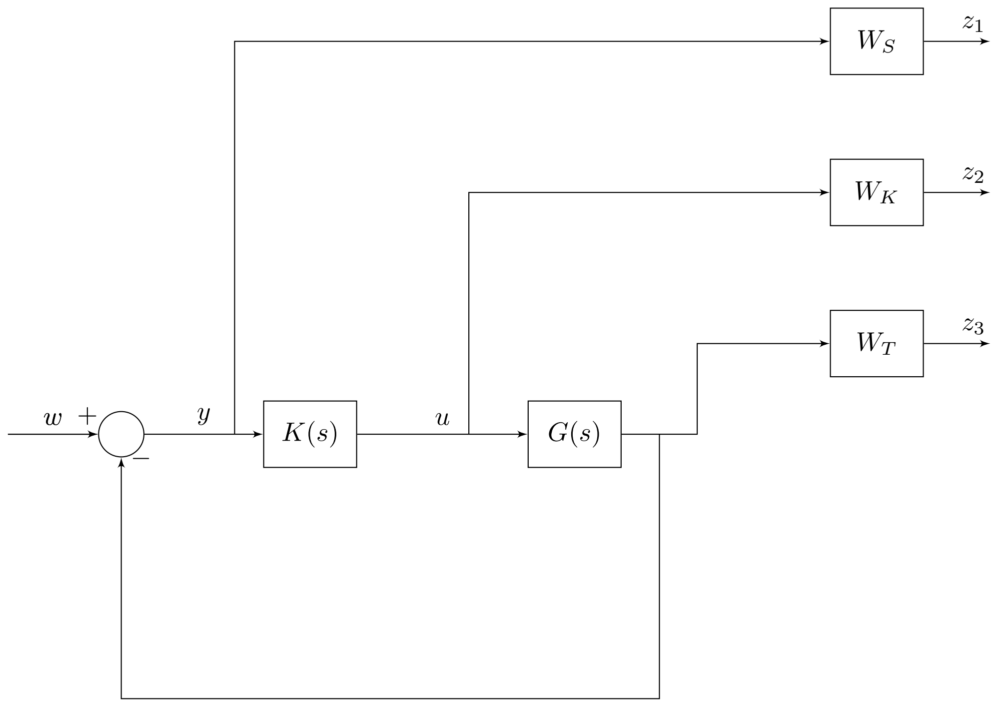


Figura 1.7: Sistema fittizio per trasformare il problema di mixed sensitivity in un problema H_∞ standard. Notiamo che la y non è l'uscita del sistema in retroazione, ma è l'errore $y(t) = e(t)$

Ricordando che $S(s) = (1 + G(s)K(s))^{-1}$, si ha:

$$T_{zw}(s) = \begin{pmatrix} W_S(s) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -W_S(s)G(s)K(s)S(s) \\ W_K(s)K(s)S(s) \\ W_T(s)G(s)K(s)S(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W_S(s) - W_S(s)G(s)K(s)S(s) \\ W_K(s)K(s)S(s) \\ W_T(s)G(s)K(s)S(s) \end{pmatrix}$$

Ricorndano che $T(s) = G(s)K(s)S(s)$, si ha:

$$T_{zw}(s) = \begin{pmatrix} W_S(s) - W_S(s)G(s)K(s)S(s) \\ W_K(s)K(s)S(s) \\ W_T(s)T(s) \end{pmatrix}$$

Mettendo in evidenza $W_S(s)$ nella prima riga si ha:

$$T_{zw}(s) = \begin{pmatrix} W_S(s)(I - G(s)K(s)S(s)) \\ W_K(s)K(s)S(s) \\ W_T(s)T(s) \end{pmatrix}$$

Ricordando che $T(s) = G(s)K(s)S(s)$, e che $T(s) + S(s) = I$, si ha:

$$T_{zw}(s) = \begin{pmatrix} W_S(s)S(s) \\ W_K(s)K(s)S(s) \\ W_T(s)T(s) \end{pmatrix}$$

Quindi abbiamo dimostrato che il problema di H_∞ associato al sistema fittizio è uguale al problema di mixed sensitivity design. Quindi possiamo andare a risolvere il problema di mixed sensitivity design risolvendo il problema H_∞ sul sistema fittizio.

Ora andiamo a riassumere la sequenza di passi per andare a formulare il problema di H_∞ standard associato al problema di mixed sensitivity design:

- Definizione dell'impianto $G(s)$
- Traduzione delle specifiche di progetto in termini di funzioni di peso $W_S(s), W_T(s), W_K(s)$
- Definire $\bar{G}(s)$ del sistema in forma standard per il problema H_∞
- Risolvere il problema di controllo H_∞

La soluzione del problema H_∞ ci da in uscita:

- Il controllore $K(s)$
- Un valore $\gamma > 0$ tale che:

$$\|T_{zw}(s)\|_\infty < \gamma \Longrightarrow \left\| \begin{pmatrix} W_S(s)S(s) \\ W_T(s)T(s) \\ W_K(s)K(s)S(s) \end{pmatrix} \right\|_\infty < \gamma$$

Ora per noi il problema di mixed sensitivity design è risolto se e solo se il valore di $\gamma > 0$ in uscita dal problema H_∞ (associato al problema di mixed sensitivity) è minore di 1:

$$\gamma < 1 \Longrightarrow \|T_{zw}(s)\|_\infty < 1 \Longrightarrow \left\| \begin{pmatrix} W_S(s)S(s) \\ W_T(s)T(s) \\ W_K(s)K(s)S(s) \end{pmatrix} \right\|_\infty < 1$$

1.5 Progettazione delle funzioni di peso

Andiamo ora a vedere come progettare le funzioni di peso $W_S(s)$, $W_T(s)$ e $W_K(s)$ a partire dalle specifiche di progetto.

1.5.1 Costruzione $W_S(s)$

Notiamo che le progettazioni sulle funzioni di peso che effettueremo ora valgono per sistemi SISO, dunque le funzioni di trasferimento che andremo a considerare sono tutte funzioni scalari. Ricordiamo che l'errore è dato da:

$$E(s) = S(s)\left(R(s) - D(s)\right) + T(s)N(s)$$

Per quanto riguarda le specifiche sulll'inseguimento del riferimento $R(s)$ le specifiche possibili sono le seguenti:

- Errore a regime $\leq \bar{e}_\infty$. Ricordiamo che l'errore a regime vale:

  $$e_\infty = \lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} sE(s)$$

  se il riferimento è un gradino $R(s) = \dfrac{1}{s}$ allora si ha (ricordiamo che stiamo considerando i disturbi nulli $D(s) = 0$ e $N(s) = 0$):

  $$e_\infty = \lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} sE(s) = S(0)$$

  Quindi la specifica sull'errore a regime si può riscrivere come:

  $$S(0) \leq \bar{e}_\infty$$

Ora il nostro obiettivo è convertire questa specifica su $S(0)$ in una specifica su $W_S(s)$, in modo tale che se la specifica su $W_S(s)$ è soddisfatta allora anche la specifica su $S(0)$ è soddisfatta. Partiamo con il ricordare che per noi il H_∞ associato al problema di mixed sensitivity è risolto se e solo se:

$$\|W_S(s)S(s)\|_\infty < 1$$

Ma per definizione della norma H_∞ si ha che la disugualianza è vera $\forall s$, quindi in particolare per $s = 0$:

$$|W_S(0)|\,|S(0)| < 1 \Longleftrightarrow |S(0)| < \frac{1}{|W_S(0)|}$$

Ora se imponiamo la seguente condizione su $W_S(0)$:

$$\frac{1}{|W_S(0)|} \leq \bar{e}_\infty$$

si il risultato voluto, cioè una specifica su $W_S(s)$ che implica la specifica su $S(0)$:

$$|S(0)| < \frac{1}{|W_S(0)|} \leq \bar{e}_\infty \Longrightarrow |S(0)| < \bar{e}_\infty$$

Quindi la specifica sull'errore a regime si può tradurre in una specifica su $W_S(0)$:

$$-+\frac{1}{|W_S(0)|} \leq \bar{e}_\infty \Longrightarrow |W_S(0)| \geq \frac{1}{\bar{e}_\infty} \tag{1.21}$$

- Tempo di assestamento, abbiamo delle specifiche ad esempio su t_{a5} o t_{a1}, ricordiamo:

$$t_{a5} = 3\tau\frac{3}{\omega_c}$$

$$t_{a1} = 4.6\tau\frac{3}{\omega_c}$$

In letteratura si trova spesso la specifica sul tempo di assestamento espressa come:

$$t_a \approx \frac{4}{\omega_c}$$

Ricordiamo che la frequenza ω_c è il valore di frequenza in cui la $L(j\omega_c)$ in dB ha modulo $0dB$, cioè:

$$|L(j\omega_c)|_{dB} = 0dB \Longleftrightarrow |L(j\omega_c)| = 1$$

Questo implica che la funzione di sensitività deve avere:

$$|L(j\omega_c)| = 1 \Longrightarrow |S(j\omega_c)| = \frac{1}{2}$$

- Sovraelongazione, che ricordiamo essere legata al modulo di picco della $S(j\omega)$:

$$M_p\left(S(j\omega)\right) = max_\omega\,|S(j\omega)|$$

$$|W_S(j\omega)| \text{ in alta frequenza}$$

$$\|W_S(s)S(s)\|_\infty < 1 \text{ Disturbi in ingresso}$$

$$\|W_T(s)T(s)\|_\infty < 1 \text{ Riferimenti in ingresso}$$

Teorema del piccolo guadagno.

$$\|W_K(s)K(s)S(s)\|_\infty < 1$$

$$W_S = \frac{\dfrac{s}{M_P} + \omega_c}{s + A\omega_c}$$

- Fattore di riduzione M_R
- ω di attenuazione

$$W_T = \frac{\dfrac{s}{M_P} + \omega_c}{s + A\omega_c}$$

Capitolo 2

Appendici

2.1 Norme

Andiamo ora a definire le norme utilizzate in questi appunti. Per prima andiamo a definire le norme su vettori di $\mathbb{R}^n$. Dato un vettore $x \in \mathbb{R}^n$, la norma p di x (i vettori li consideriamo vettori colonna $x \in \mathbb{R}^{n\times 1}$) è definita come:

$$||x||_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

Norme molto usate sono la norma 1:

$$||x||_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

e la norma 2:

$$||x||_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2} = \sqrt{x^T \cdot x}$$

Come possiamo vedere maggiore è il valore di p maggiore è il peso dato agli elementi di x con valore assoluto maggiore. Portando p a infinito si definisce la norma infinito come:

$$||x||_\infty = \max_i |x_i|$$

Andiamo ora a definire la norma di un operatore, detta anche norma indotta o norma operazionale, a partire dalla definizione di norma di un vettore. Consideriamo un operatore (operatore è sinonimo di funzione) $S : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$. Detta y l'immagine del vettore u attraverso S, cioè:

$$y = S(u)$$

La p-norma indotta di S è definita come:

$$||S||_p = \sup_{u \neq 0} \frac{||y||_p}{||u||_p}$$

Se S è un operatore lineare allora è rappresentato dalla matrice $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$, e si ha:

$$y = Au$$

La p-norma indotta di A si scrive come:

$$||A||_p = \sup_{u \neq 0} \frac{||Au||_p}{||u||_p}$$

Ora riscriviamo la p-norma indotta di A in un altro modo. Partiamo dal dire che $\forall u \in \mathbb{R}^n$ esistono almeno un $\rho \in \mathbb{R}$ ed un $\bar{u} \in \mathbb{R}^n$ tali che:

$$u = \rho \bar{u} \tag{2.1}$$

con $||\bar{u}||_p = 1$ (infatti basta prendere $\rho = ||u||_p$ e $\bar{u} = \frac{u}{||u||_p}$). Andiamo ora a vedere che la funzione di cui stiamo andando a cercare l'estremo superiore non varia al variare di ρ:

$$\frac{||A\rho\bar{u}||_p}{||\rho\bar{u}||_p}$$

Il fattore ρ è uno scalare e dunque può essere portato fuori dalla norma, e dopo si può semplificare, dunque si ha:

$$\frac{||A\rho\bar{u}||_p}{||\rho\bar{u}||_p} = \frac{||A\bar{u}||_p}{||\bar{u}||_p}$$

inoltre vale $||\bar{u}||_p = 1$, dunque si ha:

$$\frac{||A\rho\bar{u}||_p}{||\rho\bar{u}||_p} = ||A\bar{u}||_p$$

Dunque come possiamo vedere due vettori che hanno lo stesso $\bar{u}$ ma con ρ diverso (dunque due vettori con stessa direzione ma lunghezza diversa) danno lo stesso valore alla funzione di cui stiamo cercando l'estremo superiore. Dunque invece di cercare l'estremo superiore su tutti i vettori u con norma diversa da zero, ci basta prendere un solo rappresentante per ogni $\bar{u}$. Prendiamo come rappresentante proprio il vettore u che ha $\rho = 1$ (dunque vale $u = \bar{u}$), il sup si può riscrivere come:

$$||A||_p = \sup_{u \neq 0} \frac{||Au||_p}{||u||_p} = \sup_{||\bar{u}||_p = 1} ||A\bar{u}||_p$$

Andiamo a caratterizzarci alcuni casi particolari di norme indotte:

- Norma 1 indotta: $||A||_1$:

  $$||A||_1 = \sup_{||\bar{u}||_1 = 1} ||A\bar{u}||_1$$

  Se indichiamo con a_{ij} l'elemento nella riga i-esima e colonna j-esima della matrice A, allora si ha che la norma 1 indotta di A vale:

  $$||A||_1 = \sup_{||\bar{u}||_1 = 1} \left| \sum_{j=1}^{m} A(:,j)\bar{u}_j \right|_1$$

  dove con $A(:,j)$ indichiamo la j-esima colonna di A. Per la disuguaglianza triangolare si ha:

  $$\left| \sum_{j=1}^{m} A(:,j)\bar{u}_j \right|_1 \leq \sum_{j=1}^{m} |A(:,j)\bar{u}_j|_1 = \sum_{j=1}^{m} |\bar{u}_j| \, |A(:,j)|_1 , \qquad \forall \bar{u} : ||\bar{u}||_1 = 1$$

Praticamente stiamo dicendo che per ogni vettore $\bar{u}$ la sommatoria è minore uguale della combinazione lineare, con coefficienti $|\bar{u}_j|$, delle norme 1 delle colonne di A. Possiamo quindi scrivere che:

$$\sum_{j=1}^{m} |\bar{u}_j| \, |A(:,j)|_1 \leq \max_{j=1,\dots,m} |A(:,j)|_1$$

Dunque si ha che il sup è proprio:

$$||A||_1 = \sup_{||\bar{u}||_1=1} ||A\bar{u}||_1 = \max_{j=1,\dots,m} |A(:,j)|_1 = \max_{j=1,\dots,m} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$$

- Norma 2 indotta: $||A||_2$:
- Norma infinito indotta: $||A||_\infty$:

2.2 SVD (Singular Value Decomposition)

Consideriamo una matrice $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Inoltre dati due vettori $y \in \mathbb{R}^m$ e $x \in \mathbb{R}^n$ tali che vale la relazione:

$$y = Ax$$

$$A = U\Sigma V^T$$

- La matrice $U \in \mathbb{R}^{m\times m}$ (matrice di rotazione delle uscite) è una matrice ortonormale composta dai vettori colonna $u_1, u_2, \dots, u_m$, si ha:

$$U = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & \dots & u_m \end{pmatrix}$$

- La matrice $V \in \mathbb{R}^{n\times n}$ (matrice di rotazione degli ingressi) è una matrice ortonormale composta dai vettori colonna $v_1, v_2, \dots, v_n$, si ha:

$$V = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & \dots & v_n \end{pmatrix}$$

- La matrice $\Sigma \in \mathbb{R}^{m\times n}$ (matrice dei valori singolari)

$$p = min\{m, n\}$$

Dove si ha che:

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{se } p = m$$

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{se } p = n$$

$$y = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & \dots & u_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Sigma_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \Sigma_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \Sigma_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1^T \\ v_2^T \\ \vdots \\ v_n^T \end{pmatrix} \cdot x$$

Se io prendo $x = v_i$ si ha:

$$\begin{pmatrix} v_1^T \\ v_2^T \\ \vdots \\ v_n^T \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} v_1^T \\ v_2^T \\ \vdots \\ v_n^T \end{pmatrix} \cdot v_i$$

Ricordando che V è ortonormale le sue colonne sono tra loro ortogonali e di norma 1, dunque si ha:

$$v_j^T \cdot v_i = 0, \quad \text{se } i \neq j$$

$$v_j^T \cdot v_i = 1, \quad \text{se } i = j$$

Dunque si ha:

$$\begin{pmatrix} v_1^T \\ v_2^T \\ \vdots \\ v_i^T \\ \vdots \\ v_n^T \end{pmatrix} \cdot v_i = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dove l'uno è nella i-esima riga. Andiamo a calcolarci la norma 2 di A:

$$||A||_2 = \sqrt{\lambda_{MAX}\left(A^T A\right)}$$

Notiamo che per le proprietà della trasposta $A^T = (U\Sigma V)^T = V\Sigma^T U^T$

$$||A||_2 = \sqrt{\lambda_{MAX}\left(V\Sigma^T U^T U\Sigma V^T\right)}$$

Ora ricordando che U è ortonormale si ha $U^T U = I$ $(U^T = U^{-1})$:

$$||A||_2 = \sqrt{\lambda_{MAX}\left(V\Sigma^T\Sigma V^T\right)}$$

Ora ricordando che Σ e Σ^T sono diagonali si ha che vale la proprietà commutativa tra le matrici, dunque possiamo scrivere:

$$||A||_2 = \sqrt{\lambda_{MAX}\left(\Sigma^T\Sigma V V^T\right)}$$

Ora ricordando che Σ è diagonale vale $\Sigma^T = \Sigma$, dunque si ha:

$$||A||_2 = \sqrt{\lambda_{MAX}\Sigma^T\Sigma} = \sqrt{\lambda_{MAX}\Sigma\Sigma} = \sqrt{\lambda_{MAX}\Sigma^2}$$

Come si vede la norma 2 di A è legata al valore singolare maggiore di A.

2.3 Diagonalizzare

Sia dato un sistema LTI descritto dalle equazioni di stato:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

quando noi diamo un sistema in questa forma diamo per assodato che il vettore x sia scritto nella base canonica di $\mathbb{R}^n$. Se la matrice A è diagonalizzabile, ci poniamo il problema di portare

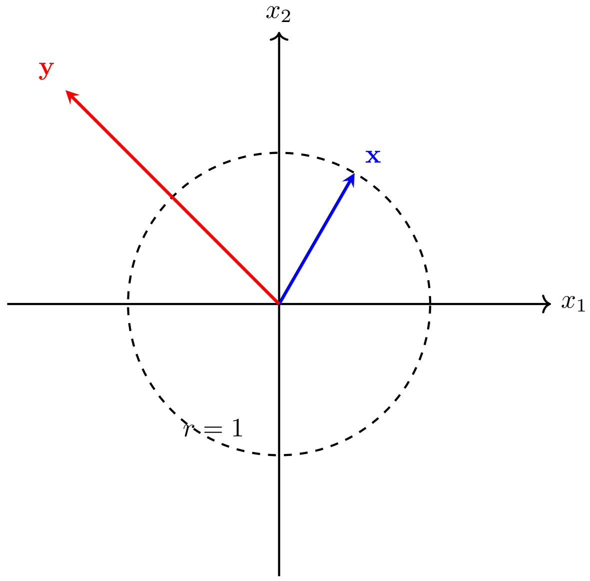


Figura 2.1: Esempio di rotazione del vettore di ingresso $x = v_1$ nel vettore di uscita amplificato $y = \sigma_1 u_1$. In questo caso abbiamo preso $m = n = 2$, dunque la matrice A è quadrata, mentre Σ è diagonale. Notiamo che abbiamo potuto rappresentare tutto sullo stesso grafico solo perché $m = n$.

x in un nuovo stato $\hat{x}$ in cui A è diagonale. Dunque cerchiamo una matrice di trasformazione T tale che:

$$x = T\hat{x} \Longrightarrow \hat{A} = T^{-1}AT \text{ è diagonale}$$

Ma come si può immediatamente notare la matrice T è la matrice del cambiamento di base dalla base canonica alla base che diagonalizza A. Quindi a noi basta trovare la matrice che permette di portare il vettore $\hat{x}$, scritto nella base che diagonalizza A, nel vettore x scritto nella base canonica. Ma la base che diagonalizza A è formata dagli autovettori di A, dunque scegliamo un insieme di autovettori linearmente indipendenti di A:

$$\hat{B} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$$

Per calcolare T dobbiamo ricordare che la matrice del cambiamento di base si calcola attraverso l'applicazione identità (che è un applicazione lineare), dunque applichiamo l'identità agli autovettori scelti:

$$id(\hat{B}) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$$

Ora scomponiamo i vettori rispetto alla base canonica ed incolonniamoli come colonne della matrice T(la base canonica è molto comoda perchè ci permette di scrivere i vettori proprio come sono), dunque la matrice T vale:

$$T = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & \dots & v_n \end{pmatrix}$$

In cui i vettori $v_1, v_2, \dots, v_n \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ sono vettori colonna $n \times 1$, dunque la matrice $T \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

2.4 Uguaglianza matriciale per dimostrare la relazione di $T(s)$

Per dimostrare che per la funzione di sensitività complementare $T(s)$ vale la relazione:

$$T(s) = (I + L(s))^{-1} L(s) = L(s) (I + L(s))^{-1}$$

cioè che le matrici $(I + L(s))^{-1}$ e $L(s)$ commutano, abbiamo usato la seguente identità matriciale:

$$(I + AB)^{-1} A = A (I + BA)^{-1}$$

Dimostrazione. Noi vogliamo dimostrare che:

$$(I + AB)^{-1} A = A (I + BA)^{-1}$$

Studiamoci la matricie differenza:

$$D \coloneqq (I + AB)^{-1} A - A (I + BA)^{-1}$$

Se riusciamo a dimostrare che $D = 0$ allora abbiamo dimostrato l'uguaglianza. Moltiplichiamo D a sinistra per $(I + AB)$ e a destra per $(I + BA)$, si ha:

$$(I + AB)D(I + BA) = (I + AB) (I + AB)^{-1} A(I + BA) - (I + AB)A (I + BA)^{-1} (I + BA)$$

Notiamo che $(I + AB)^{-1} A(I + BA) = I$ e $(I + BA)^{-1} (I + BA) = I$, quindi si ha:

$$(I + AB)D(I + BA) = A(I + BA) - (I + AB)A = A + ABA - A - ABA = 0$$

Abbiamo dimostrato $D = 0$, quindi anche l'uguaglianza iniziale. $\square$