Teorema di Caley-Hamilton ed alcune sue implicazioni

Sia $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e sia

$$\phi_A(A) = s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n = |sI - A| \quad \leftarrow \text{pol. caratteristico}$$

Thm. $\quad \phi_A(A) = A^n + a_1 A^{n-1} + \dots + a_n I = \emptyset$

la dimostrazione può essere trovata su qualsiasi libro di algebra

Nota

$$A^n = -a_1 A^{n-1} - a_2 A^{n-2} + \dots - a_n I =$$

$$= \alpha_1 A^{n-1} + \alpha_2 A^{n-2} + \dots + \alpha_n I$$

quindi A^n si può scrivere come combinazione lineare delle matrici

$$A^{n-1},\ A^{n-2},\ \dots,\ I$$

Ora

$$A^{-1} A^n = A^{n-1}$$

$$\Updownarrow$$

$$A^{-1}\left(\alpha_1 A^{n-1} + \alpha_2 A^{n-2} + \dots + \alpha_n I\right) = A^{n-1}$$

$$\Updownarrow$$

$$\alpha_1 A^{n-2} + \alpha_2 A^{n-3} + \dots + \alpha_n A^{-1} = A^{n-1}$$

$$\Updownarrow$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\alpha_n}\left(A^{n-1} - \alpha_1 A^{n-2} - \alpha_2 A^{n-3} + \dots - \alpha_{n-1} I\right) =$$

$$= \beta_1 A^{n-1} + \beta_2 A^{n-2} + \dots + \beta_n I$$

(Nota $|\alpha_n| = \big||A|\big|$ quindi A invertibile $\Leftrightarrow \alpha_n \neq \emptyset$)

A^{-1} può quindi essere scritta come combinazione lineare di

$$A^{n-1},\ A^{n-2},\ \dots,\ I$$

Dimostrare che tale proprietà vale anche per A^{-n}

Proprietà strutturali dei sistemi lineari e stazionari

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \qquad \begin{cases} x(t+1) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

Sistemi a tempo continuo

Sistemi a tempo discreto

$$x(t) = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)\,d\tau$$

$$x(t) = A^t x(0) + \sum_{\tau=0}^{t-1} A^{t-\tau-1}Bu(\tau)$$

$$x(t) = \varphi(t, t_0, x_0, u_{[t_0,t[})$$

Raggiungibilità e Controllabilità

$x \in \mathbb{R}^n$ è raggiungibile all'istante t_1 da $x_0 \in \mathbb{R}^n$

$$\Updownarrow \text{def}$$

$$\exists\, t_0 \in \mathbb{R},\ t_0 < t_1,\ \exists\, u_{[t_0,t_1[} :$$

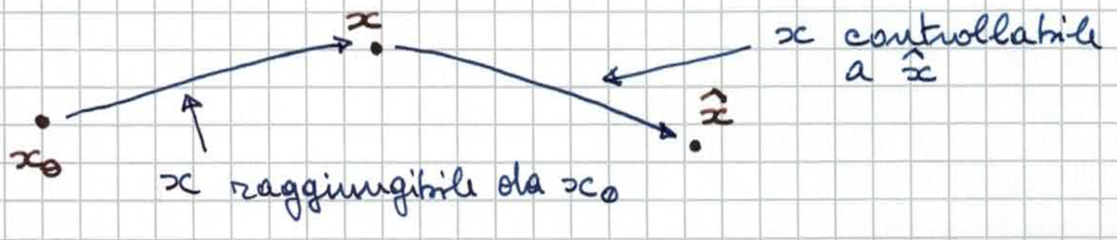
$$x = \varphi(t_1, t_0, x_0, u_{[t_0,t_1[})$$

$x \in \mathbb{R}^n$ è controllabile ~~dallo sta~~ dall'istante t_0 a $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$

$$\Updownarrow \text{def}$$

$$\exists\, t \in \mathbb{R},\ t > t_0,\ \exists\, u_{[t_0,t[} :$$

$$\hat{x} = \varphi(t, t_0, x, u_{[t_0,t[})$$



$X_r(t_1, x_0) \stackrel{def}{=} \{ x \in \mathbb{R}^n \mid x \text{ è raggiungibile in } t_1 \text{ da } x_0 \}$

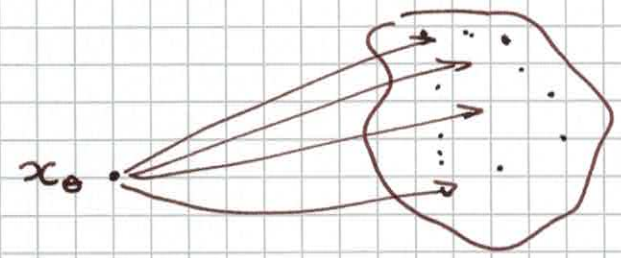
$X_r(t_1) \stackrel{def}{=} X_r(t_1, 0)$ ← Insieme degli stati raggiungibili dall'origine in t_1

$X_c(t_0, \hat{x}) \stackrel{def}{=} \{ x \in \mathbb{R}^n \mid x \text{ è controllabile dall'istante } t_0 \text{ a } \hat{x} \}$

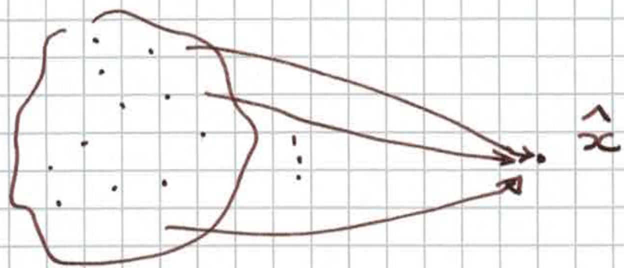
$X_c(t_0) \stackrel{def}{=} X_c(t_0, 0)$ ← Insieme degli stati controllabili all'origine

Nota

$$\exists t_1 : x \in X_r(t_1, y) \iff \exists t_0 : y \in X_c(t_0, x)$$



$X_r(t_1, x_0)$



$X_c(t_0, \hat{x})$

Nota :

1) E' possibile trasferire lo stato del sistema dall'origine ad x (con un opportuno ingresso) in tempo finito se e solo se $\exists t_1 : x \in X_r(t_1)$

2) Data un certo stato iniziale x è possibile trasferire (con un opportuno ingresso) lo stato nell'origine in tempo finito se e solo se $\exists t_0 : x \in X_c(t_0)$

Sia
$$\mathcal{C}_k \overset{def}{=} [B \ AB \dots A^{k-1}B]$$

E' semplice verificare che
$$\mathcal{R}(\mathcal{C}_{k+1}) \supseteq \mathcal{R}(\mathcal{C}_k)$$
inoltre sulla base del Teorema di Caley-Hamilton è possibile dimostrare che
$$k \geq n \Rightarrow \mathcal{R}(\mathcal{C}_k) = \mathcal{R}(\mathcal{C}_n)$$
La matrice di controllabilità è definita ponendo
$$\mathcal{C} = \mathcal{C}_n = [B \ AB \dots A^{n-1}B]$$

Thm.
$$X_r(t) = \mathcal{R}(\mathcal{C}) \ \forall t \qquad (\forall t \geq n \text{ per i sistemi a tempo discreto})$$

dim (Sistemi a tempo-discreto)

Si ha:
$$\begin{aligned} x(t) &= Ax(t-1) + Bu(t-1) = \\ &= A^2x(t-2) + ABu(t-2) + Bu(t-1) = \\ &= A^3x(t-3) + A^2Bu(t-3) + ABu(t-2) + Bu(t-1) = \\ &\ \vdots \\ &= A^h x(t-h) + A^{h-1}Bu(t-h) + \dots\dots + Bu(t-1) \end{aligned}$$
ponendo $x(t-h) = \theta$ si ottiene
$$x(t) = [B \ AB \ \dots \ A^{h-1}B] \begin{bmatrix} u(t-1) \\ u(t-2) \\ \vdots \\ u(t-h) \end{bmatrix}$$

Quindi ~~per~~
$$X_r(t) = \mathcal{R}(\mathcal{C}_h) \qquad \text{e per } h \geq n$$
$$X_r(t) = \mathcal{R}(\mathcal{C}) = \mathcal{R}([B \ AB \dots A^{n-1}B])$$

(Sistemi a tempo continuo)

Sia $t > 0$ e si assuma $x(0) = 0$

$$x(t) = \int_0^t e^{A(t-\tau)} B u(\tau)\, d\tau = \sum_{h=0}^{\infty} A^h B \int_0^t \frac{(t-\tau)^h}{h!} u(\tau)\, d\tau =$$

$$= \sum_{h=0}^{\infty} \left(A^h \varphi_h(t)\right) B$$

dove $\displaystyle \varphi_h(t) = \int_0^t \frac{(t-\tau)^h}{h!} u(\tau)\, d\tau$

Usando il teorema di Caley-Hamilton, ~~ed~~ esprimendo A^h come combinazione lineare di $I, A, \dots, A^{n-1}$, e ricombinando i termini della serie, si ottiene

$$x(t) = \sum_{h=0}^{n-1} \left(A^h \tilde{\varphi}_h(t)\right) B$$

ovvero

$$x(t) = \begin{bmatrix} B & AB & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\varphi}_0(t) \\ \tilde{\varphi}_1(t) \\ \vdots \\ \tilde{\varphi}_{n-1}(t) \end{bmatrix}$$

quindi ~~$x \in R(\mathcal{C}) \Rightarrow$~~

$$x \in X_2(t) \Rightarrow x \in R(\mathcal{C})$$

ovvero

$$X_2(t) \subseteq R(\mathcal{C})$$

Sia ora

$$W_2(\theta,T) = \int_\theta^T e^{A(T-\tau)} BB^T e^{A^T(T-\tau)} \, d\tau$$

Gramiano di raggiungibilità

dimostriamo che $x \in \mathcal{R}(\mathcal{C}) \Rightarrow x \in \mathcal{R}(W_2(\theta,T))$

ovvero che $\mathcal{R}(\mathcal{C}) \subseteq \mathcal{R}(W_2(\theta,T))$

Supponiamo per assurdo che

$\exists x \in \mathcal{R}(\mathcal{C}) : x \notin \mathcal{R}(W_2(\theta,T))$ con $x \neq \theta$, si ha

$$\mathcal{N}(W_2(\theta,T)) = \mathcal{R}^\perp(W_2(\theta,T)) = \mathcal{R}^\perp(W_2(\theta,T))$$

Poichè $\mathcal{R}(W_2(\theta,T))$ non coincide con l'intero spazio $\mathbb{R}^n$ allora

$\mathcal{R}^\perp(W_2(\theta,T)) \neq \{\theta\}$ ne consegue che

$\exists y \neq \theta : y \in \mathcal{N}(W_2(\theta,T))$

inoltre $x^T y \neq \theta \quad \forall y \in \mathcal{N}(W_2(\theta,T))$

infatti $x^T y = \theta \ \forall y \in \mathcal{N}(W_2(\theta,T)) \Rightarrow$

$x \in \mathcal{N}^\perp(W_2(\theta,T)) = \mathcal{R}(W_2(\theta,T))$

contro le ipotesi

Quindi

$$y \in \mathcal{N}(W_2(\theta,T)) \Rightarrow y^T W_2(\theta,T) y = \theta \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow y^T \int_\theta^T e^{A(T-\tau)} BB^T e^{A^T(T-\tau)} \, d\tau \, y = \theta$$

$$\Longleftrightarrow \int_\theta^T \| y^T e^{A(T-\tau)} B \|_2^2 \, d\tau = \theta$$

$$\Longleftrightarrow y^T e^{A(T-\tau)} B = \theta \quad \forall \tau \in [\theta, T]$$

Derivando $\overset{k \text{ volte}}{}$ rispetto a τ e ponendo $\tau = T$ si ottiene

$$y^T A^k B = 0 \quad \forall k$$

ma quindi $y \in \mathcal{N}(\mathcal{C}^T) = \mathcal{R}^\perp(\mathcal{C}) \Rightarrow y^T x = 0$

da cui l'assurdo avendo già provato che deve risultare

$$y^T x \neq 0$$

quindi $\mathcal{R}(\mathcal{C}) \subseteq \mathcal{R}(W_2(0,T))$

sia ora $x \in \mathcal{R}(W_2(0,T)) \Rightarrow \exists \eta : x = W_2(0,T)\eta$

ponendo $u(t) = B^T e^{A^T(T-t)} \eta$ si ha:

$$x = \int_0^T e^{A(T-\tau)} B u(\tau)\, d\tau \Rightarrow x \in X_2(T)$$

e quindi $x \in \mathcal{R}(W_2(0,T)) \Rightarrow x \in X_2(T)$

con $T > 0$ arbitrario, ed anche

$$\mathcal{R}(W_2(0,T)) \subseteq X_2(T)$$

da cui

$$\mathcal{R}(\mathcal{C}) \subseteq \mathcal{R}(W_2(0,T)) \subseteq X_2(T)$$

Avendo già dimostrato che

$X_2(T) \subseteq \mathcal{R}(\mathcal{C})$ si conclude che

~~$X_2(t) \supseteq$~~

~~$X_2(t) \subseteq$~~

$$X_2(t) = \mathcal{R}(\mathcal{C}) = \mathcal{R}(W_2(0,t)) \quad \forall t > 0$$

Alcune considerazioni

1) Nei sistemi tempo-continui il trasferimento dall'origine ad uno stato ~~controllabile~~ raggiungibile può avvenire in un intervallo di tempo piccolo a piacere; questo fatto si paga in termini della ~~leo~~ legge di ingresso necessaria al trasferimento, più piccolo è l'intervallo più ampia sarà la legge di ingresso.

2) Nei sistemi tempo-discreti il trasferimento ad uno stato raggiungibile richiede al più n passi.
$R(\mathcal{C}_k)$ da l'insieme degli stati raggiungibili in $k<n$ passi.

Def.

La coppia (A,B) è completamente raggiungibile

$$\Big\Updownarrow \text{def}$$

$$X_r = \mathbb{R}^n$$

$$\Big\Updownarrow$$

$$\text{rank}(\mathcal{C}) = n$$

Si noti che

$$x(t) = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)} B u(\tau)\, d\tau$$

Quindi

$$x(t) - e^{At}x(0) = \int_0^t e^{A(t-\tau)} B u(\tau)\, d\tau \in R(\mathcal{C})$$

il trasferimento da $x(0)$ a x in un intervallo $(0,T)$ può avvenire solo se $x - e^{At}x(0) \in R(\mathcal{C})$.

(A,B) compl. raggiungibile $\Rightarrow$ E' sempre possibile trasferire lo stato da un punto all'altro in tempo finito

Thm.

$$x \in X_2 \Rightarrow Ax \in X_2$$

dim.

$$x \in X_2 \Leftrightarrow \exists \alpha \in \mathbb{R}^{mn} : x = \mathcal{C}\alpha \Rightarrow Ax = A\mathcal{C}\alpha =$$

$= [A^n B \quad A^{n-1} B \; \dots \; AB]\,\alpha \in \mathcal{R}(\mathcal{C})$ per il teorema di Caley-Hamilton

X_2 è quindi A-invariante

Controllabilità

Sistemi a tempo-discreto

$$x(k) = A^k x_0 + \sum_{\tau=0}^{k-1} A^{k-\tau-1} B u(\tau)$$

x_0 è controllabile a zero in k passi se e solo se esiste una sequenza di ingressi tale che

$$A^k x_0 + \sum_{\tau=0}^{k-1} A^{k-\tau-1} B u(\tau) = 0$$

quindi se e solo se

$$A^k x_0 \in \mathcal{R}(\mathcal{C}_k)$$

Thm

1) $x \in X_r \Rightarrow x \in X_c$

2) A invertibile, $x \in X_c \Rightarrow x \in X_r$

dim.

(1) $\quad x \in X_r \Rightarrow A^n x \in X_r = \mathcal{R}(\mathcal{C}_n) \Rightarrow x \in X_c$

A-invarianza di X_r

(2) $\quad x \in X_c \Rightarrow A^n x \in \mathcal{R}(\mathcal{C}_n) \Rightarrow \exists \alpha : A^n x = \mathcal{C}_n \alpha$

da cui

$$x = A^{-n} [B \ AB \ \dots \ A^{n-1}B] \alpha$$

Poiché $A^{-n} = \beta_0 I + \beta_1 A + \dots + \beta_{n-1} A^{n-1}$

è facile ricavare

$$x \in \mathcal{R}(\mathcal{C}_n) \in X_r \qquad \text{c.v.d.}$$

Corollario

1) $X_c \supseteq X_r$

2) (A, B) completamente raggiungibile $\Rightarrow$ (A, B) completamente controllabile

3) A non singolare $\Rightarrow$

1) $X_c = X_r$

2) (A, B) compl. controllabile

$\Downarrow$

(A, B) compl. raggiungibile

In generale uno stato controllabile può essere portato a zero in al più n passi, esistono comunque stati (se A è singolare) che possono essere portati a zero in meno di k passi, questi stati soddisfano la relazione

$$A^k x_0 \in \mathcal{R}(\mathcal{C}_k)$$

Sistemi a tempo continuo

x_0 è controllabile a 0 in un tempo T se e solo se esiste un ingresso u tale che

$$e^{AT}x_0 + \int_0^T e^{A(T-\tau)} Bu(\tau)\, d\tau = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$e^{AT}x_0 \in \mathcal{R}(\mathcal{C})$$

Thm. $X_c = X_r$

dim. $(x \in X_r \Rightarrow x \in X_c)$

$$x \in X_r \Rightarrow x \in \mathcal{R}(\mathcal{C}) \Rightarrow x = \mathcal{C}\alpha \Rightarrow$$

$$\cancel{\Rightarrow \quad x = e^{-AT}[B \; AB \ldots A^{n-1}B]}$$

$$\Rightarrow \quad e^{AT}x = e^{AT}[B \; AB \ldots A^{n-1}B]\,\alpha$$

ora

$$e^{AT} = \beta_0 I + \beta_1 A + \ldots + \beta_{n-1} A^{n-1}$$

usando la A-invarianza di $\mathcal{R}(\mathcal{C})$ è facile verificare che $e^{AT}x \in \mathcal{R}(\mathcal{C}) \Rightarrow x \in X_c$

$(x \in X_c \Rightarrow x \in X_r)$

$$x \in X_c \Rightarrow e^{AT}x \in \mathcal{R}(\mathcal{C}) \Rightarrow e^{AT}x = \mathcal{C}\alpha$$

$$\Rightarrow \quad x = e^{-AT}[B \; AB \ldots A^{n-1}B]\,\alpha \in \mathcal{R}(\mathcal{C})$$

$$\Rightarrow \quad x \in X_r$$

c. v. d.

Gramiano di Controllabilità

$$W_c(0,T) = \int_0^T e^{-A\tau} BB^T e^{-A^T\tau} \, d\tau$$

si ha

$$W_r(0,T) = e^{AT} W_c(0,T) \, e^{A^T T}$$

Si può dimostrare che

$$x \in X_c \Rightarrow x \in R(W_c(0,T)) \; \forall T$$

$$\Rightarrow \exists \eta : \; x = \int_0^T e^{-A\tau} BB^T e^{-A^T\tau} \, d\tau \, \eta$$

posto $\quad u(t) = - B^T e^{-A^T t} \eta \quad$ si ha:

$$e^{AT} x + \int_0^T e^{A(T-\tau)} B u(\tau) \, d\tau = 0$$

quindi u è la legge di controllo che guida x all'origine in tempo-finito.