Stabilità

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \\ y(t) = f(x(t), u(t)) \end{cases} \qquad x(t_0) = x_0$$

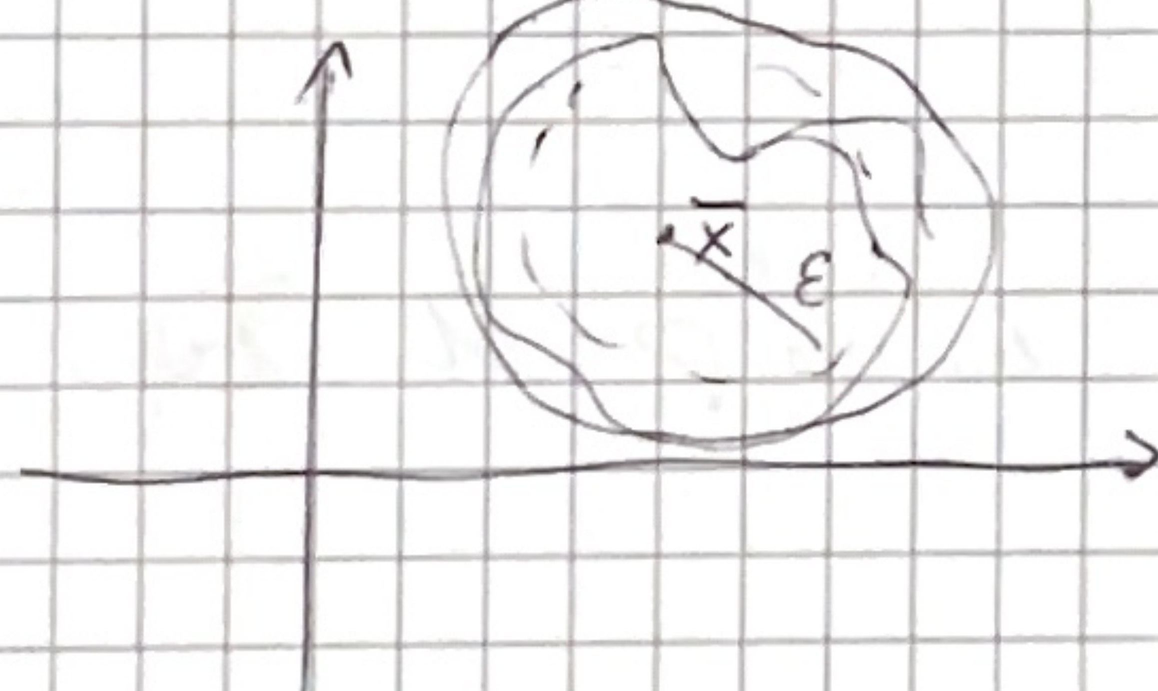
P. di eq: $(\bar{x}, \bar{u}) : f(\bar{x}, \bar{u}) = 0$

P. di Equilibrio Stabile:

$\forall \varepsilon > 0$ sia $B_\varepsilon(\bar{x}) = \{x : \|x - \bar{x}\| < \varepsilon\}$

Supponiamo che il sist. sia autonomo

$\exists \delta > 0 : \forall x_0 \in B_\delta(\bar{x}) \quad \|x(t) - \bar{x}\| < \varepsilon \quad \forall t > 0$



P. di Equilibrio Convergente → può discostarsi e ritornare!

se $\exists \delta > 0 : \forall x_0 \in B_\delta(\bar{x}) \quad \lim_{t \to +\infty} \|x(t) - \bar{x}\| = 0$

P. di Eq. Asintoticamente Stabile

se è Stabile e convergente

Punto di Equilibrio Esponenzialmente Stabile

se $\exists \delta > 0 : \forall x_0 \in B_\delta(\bar{x})$

$\exists c, \lambda$: $\quad ||x(t) - \bar{x}|| \le \underbrace{c\,||x_0 - \bar{x}||\, e^{-\lambda t}}_{\text{Maggiorato da Exp.}}$

con $\lambda > 0$ e $c > 1$

è anche asint. Stabile.

Come verifico la Stabilità?

Sistemi lineari

$\dot{x}(t) = A\,x(t) + \cancel{B u(t)}$ $\qquad x(0) = x_0$

$y(t) = C\,x(t) + \cancel{D u(t)}$ $\qquad$ Autonomo

Se A è invertibile $\rightarrow \bar{x} = 0$ unico p. di Eq.

devo capire di che tipo è

se $x \in \mathbb{R}^2$

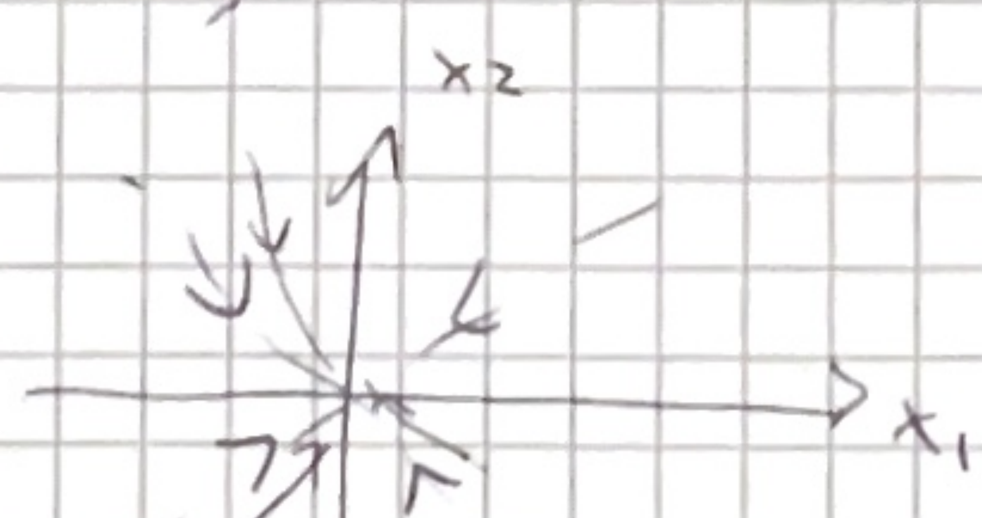
- Autovalori distinti $\lambda_1 \neq \lambda_2$

$\exists T : \tilde{x}(t) = T x(t)$ $\qquad \dot{\tilde{x}}(t) = \Lambda \tilde{x}(t)$ $\quad \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$

$\tilde{x}(t) = e^{\Lambda t} \tilde{x}_0$

$x(t) = T^{-1} \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{bmatrix} T x_0 = K_1 e^{\lambda_1 t} + K_2 e^{\lambda_2 t}$

- $\lambda_1, \lambda_2 < 0$

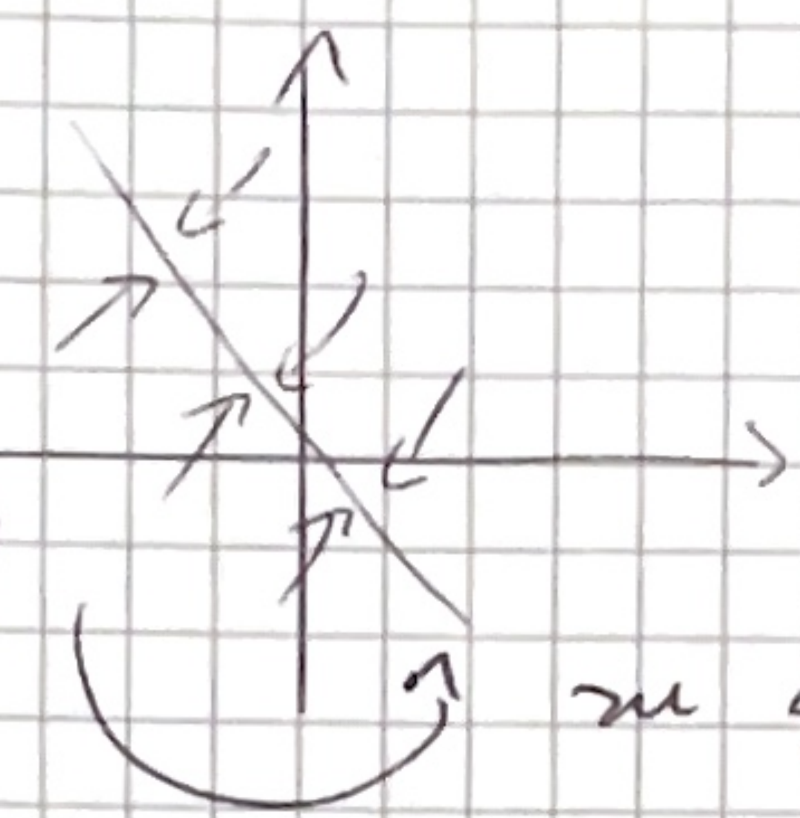


Asint. Stabile

Modi aperiodici

- $\lambda_1 < \lambda_2 = 0$ Stabile non Asintoticamente

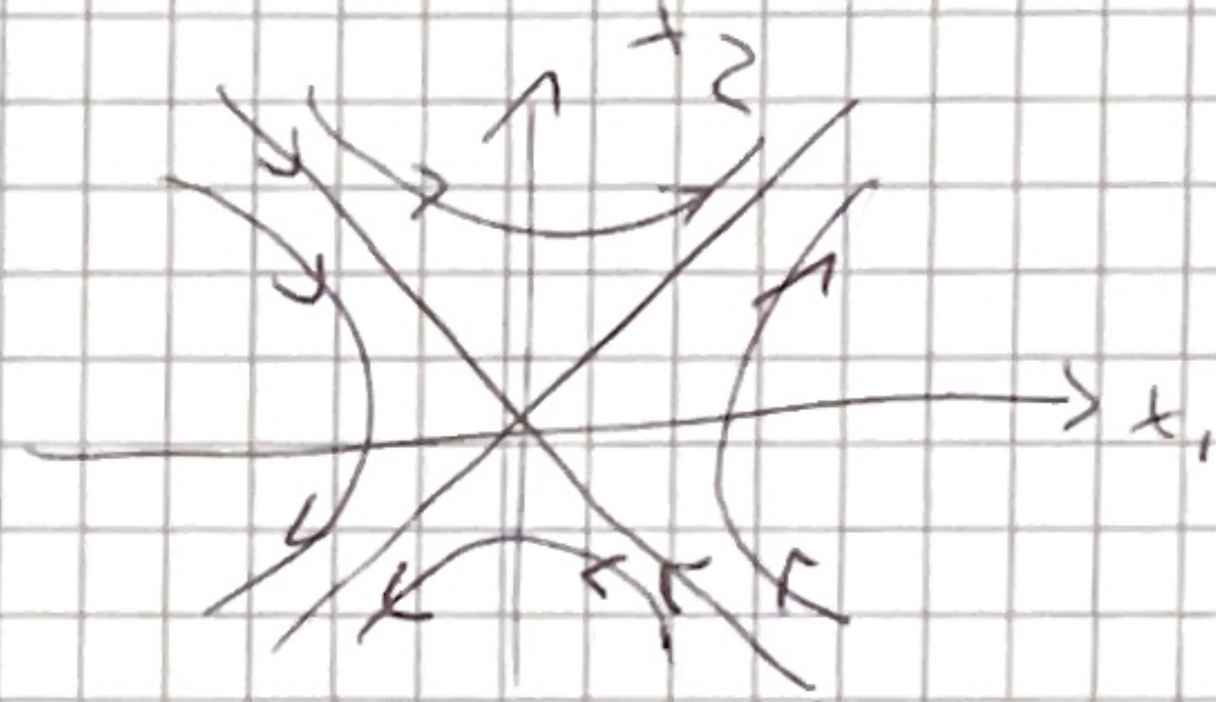
Ho ∞ P. di Eq



su queste dir.

- λ_1 e/o $\lambda_2 > 0$ Instabile

N.B. se $\lambda_1 > 0$ e $\lambda_2 < 0$



qui non disegno per forza

Sistema non Lineare

$\dot{x}(t) = f(x(t))$ $\quad \bar{x}$ p. di eq.

$$A = \left[\partial \right. = \left. \frac{\partial f}{\partial \bar{x}} \right|_{x=\bar{x}}$$ linearizzata

Se ha tutti λ con $Re\{\lambda\} < 0 \;\forall \lambda$

è Loc. Asint. Stabile

A ha almeno 1 λ : $Re\{\lambda\} > 0$ Instabile

Negli altri casi ho $\lambda = 0$ e non posso dire nulla