

Assegnamento degli autovalori nel caso di sistemi MIMO

R. Ambrosino

1. Definizione del problema

Consideriamo un sistema lineare tempo-invariante:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

con $A \in R^{n \times n}$, $B \in R^{n \times m}$.

Si vuole trovare una matrice di guadagni $K \in R^{m \times n}$ tale che il sistema in retroazione

$$\dot{x}(t) = (A + B K)x(t)$$

abbia autovalori in posizioni desiderate:

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$$

ossia, vogliamo che:

$$\sigma(A + B K) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$$

2. Metodi per l'assegnamento degli autovalori nel caso MIMO

Nel caso di sistema Single-Input Single-Output (**SISO**), esiste una **soluzione unica** per il problema di assegnamento di autovalori con retroazione di stato $u(t) = Kx(t)$ se il sistema è controllabile, o meglio se la matrice di raggiungibilità è di rango n :

$$\text{rank}[B \ AB \ A^2B \ \dots \ A^{n-1}B] = n$$

La formula di Ackermann fornisce un metodo diretto e rapido per il calcolo della soluzione.

Nel caso di sistema Multi-Input Multi-Output (**MIMO**), sempre nell'ipotesi di completa raggiungibilità del sistema, esistono **infinite soluzioni** al problema di assegnamento di autovalori con retroazione di stato, e non tutte sono numericamente stabili o ben condizionate. Di seguito presenteremo due possibili tecniche per l'assegnamento degli autovalori nel caso MIMO:

- Metodo della forma canonica controllabile
- Soluzione tramite equazione di Sylvester
- Metodo di Kautsky–Nichols–Van Dooren (KNV, 1985)

2.1 Metodo della forma canonica controllabile

Nel caso di sistemi MIMO, la forma canonica controllabile assume una struttura a blocchi, in cui ciascun ingresso controlla un sottospazio dello spazio di stato.

Se la coppia (A, B) è completamente controllabile, è sempre possibile eseguire una trasformazione di stato che porta il sistema in *forma canonica controllabile a blocchi*, detta **forma di Brunovský**.

Esiste una trasformazione di stato invertibile T tale che, nel nuovo sistema $z = T^{-1}x$

$$\dot{z}(t) = A_c z(t) + B_c u(t)$$

le matrici assumono la struttura a blocchi:

$$A_c = \begin{bmatrix} A_{c1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_{c2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_{cm} \end{bmatrix} \quad B_c = \begin{bmatrix} B_{c1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B_{c2} & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & B_{cm} \end{bmatrix}$$

Dove ogni coppia (A_{ci}, B_{ci}) , con $A_{ci} \in R^{n_i \times n_i}$ e $n_1 + n_2 + \cdots + n_m = n$, rappresenta una catena di controllabilità elementare associata all'ingresso u_i e quindi riconducibile al problema di controllabile canonica SISO:

$$A_{ci} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{i1} & -a_{i2} & -a_{i3} & \cdots & -a_{in_i} \end{bmatrix}, \quad B_{ci} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

Poiché A_c e B_c sono a blocchi diagonali, per mantenere la struttura *decoupled* tra le catene, la matrice K viene suddivisa anch'essa a blocchi compatibili:

$$K = [K_1 \quad K_2 \quad \cdots \quad K_m]$$

dove:

- $K_i \in R^{m \times n_i}$
- ogni riga di K corrisponde a un ingresso u_i
- e i blocchi K_i hanno una struttura diagonale del tipo:

$$K = [K_1 \quad K_2 \quad \dots \quad K_m] = \begin{bmatrix} k_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & k_2 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & k_m \end{bmatrix}$$

dove ciascun vettore $k_i \in R^{1 \times n_i}$ risulta pari a

$$k_i = [k_{i1} \ k_{i2} \ \dots \ k_{in_i}].$$

In tal modo, la dinamica a ciclo chiuso del sistema risulta:

$$A_c + B_c K = \text{diag}(A_1 + b_1 k_1, A_2 + b_2 k_2, \dots, A_m + b_m k_m)$$

Quindi il sistema si decompone in m sottosistemi indipendenti, ciascuno con:

$$\dot{z}_i = (A_i - b_i k_i) z_i$$

dove k_i è scelto per assegnare gli autovalori del blocco i -esimo mediante assegnamento degli autovalori per sistemi SISO.

2.2 Soluzione tramite equazione di Sylvester

L'equazione di Sylvester è una delle più importanti in algebra lineare e teoria dei sistemi. Nella sua forma generale è espressa come:

$$A X + X B = C$$

dove:

- $A \in R^{n \times n}$,
- $B \in R^{m \times m}$,
- $C \in R^{n \times m}$,
- $X \in R^{n \times m}$ è l'incognita da determinare.

È possibile dimostrare che:

UNICITA' DELLA SOLUZIONE

L'equazione di Sylvester ha una soluzione unica se e solo se gli spettri di A e di $-B$ non si intersecano, cioè:

$$\lambda_i(A) + \lambda_j(B) \neq 0 \quad \forall i, j$$

In parole semplici, nessuna coppia di autovalori di A e B deve sommare a zero.

ESISTENZA DELLA SOLUZIONE

L'equazione $A X + X B = C$ ammette almeno una soluzione se e solo se

$$\text{vec}(C) \in \text{Im}(I_m \otimes A + B^T \otimes I_n)$$

cioè se il termine noto C appartiene all'immagine (o spazio colonna) dell'operatore $L(X) = A X + X B$.

Nota che l'equazione di Sylvester è una forma generale che include casi speciali molto importanti tra cui l'equazione di Lyapunov:

$$A^T X + X A = -Q,$$

caso particolare con $B = A^T$ e $C = -Q$. Da qui deriva l'unicità della soluzione dell'equazione di Lyapunov nel caso di sistema asintoticamente stabile, considerando che

$$\lambda_i(A) + \lambda_j(A^T) \neq 0 \quad \forall i, j$$

poiché tutti gli autovalori di A hanno parte reale negativa.

ASSEGNAZIONE DEGLI AUTOVALORI MEDIANTE EQUAZIONE DI SYLVESTER

Nel caso MIMO, per assegnare gli autovalori di $(A + B K)$, si cerca una matrice K tale che, in base alla definizione di autovalore ed autovettore:

$$(A + B K)T = T \Lambda$$

dove:

- $\Lambda \in \mathbb{R}^{n \times n}$ è la matrice diagonale (o a blocchi) con gli autovalori desiderati,
- $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ è la matrice di trasformazione associata agli autovettori del sistema in anello chiuso.

Questa si può riscrivere come:

$$A T - T \Lambda = -B K T$$

oppure, ponendo $X = T$ e $F = -K T$ avremo:

$$A X - X \Lambda = B F$$

che coincide con una forma di equazione di Sylvester a meno del segno.

Tale metodo per l'assegnamento degli autovalori cerca di risolvere questa equazione per X e F , per poi ottenere la matrice di retroazione di stato come:

$$K = -F X^{-1}.$$

NOTA

Si riesce a dimostrare che la condizione di esistenza della soluzione dell'equazione di Sylvester coincide in questo caso con la raggiungibilità della coppia (A, B) . Infatti, nel caso di non completa raggiungibilità del sistema, quest'ultimo può essere portato in forma canonica di Kalman di controllabilità:

$$\bar{A} = T_k^{-1} A T_K = \begin{bmatrix} A_c & A_{12} \\ 0 & A_{nc} \end{bmatrix}, \quad \bar{B} = T_K^{-1} B = \begin{bmatrix} B_c \\ 0 \end{bmatrix}$$

dove:

- la coppia (A_c, B_c) è completamente controllabile,
- A_{nc} rappresenta la parte non controllabile del sistema.

Quindi nelle righe della parte non raggiungibile, l'equazione di Sylvester impone condizioni del tipo:

$$A_{nc} X_{nc} - X_{nc} \Lambda = 0$$

che non possono essere soddisfatte se Λ non contiene esattamente gli autovalori di A_{nc} , o meglio se gli autovalori della parte non raggiungibile non vengono modificati.

NOTA

Se imponi un autovalore di Λ uguale a uno già presente in A , la condizione di unicità dell'equazione di Sylvester non è più soddisfatta. Di conseguenza può accadere che:

- l'equazione di Sylvester non ha soluzione (caso in cui il sistema non è raggiungibile)
- l'equazione di Sylvester ha infinite soluzioni (caso in cui il sistema è raggiungibile).

Se nel primo caso la soluzione non esiste, nel secondo l'equazione di Sylvester diventa singolare, il metodo può fallire o restituire K con condizionamento pessimo ed il sistema risultante sarà altamente sensibile a piccole perturbazioni.

Da un punto di vista pratico, in questo secondo caso conviene scegliere l'autovalore desiderato molto vicino, ma non identico a quello a ciclo aperto.

NOTA

Da un punto di vista applicativo, per il calcolo del controllore, una volta verificato che il sistema è completamente raggiungibile, basta scegliere la matrice F in modo casuale e, con il comando '*sylvester*' calcolare la matrice degli autovettori X per poi arrivare alla matrice di retroazione di stato $K = F X^{-1}$.

Il limite di tale approccio risiede nel fatto che la soluzione trovata può risultare ‘*mal-condizionata*’.

Il concetto di mal-condizionamento si riferisce alla sensibilità della soluzione rispetto a piccole perturbazioni dei dati. Se una piccola variazione in A, B o negli autovalori desiderati provoca una grande variazione nella matrice K ottenuta, il problema è detto mal condizionato. In tali casi, la soluzione numerica può risultare instabile o imprecisa, specialmente in presenza di autovalori complessi o molto vicini. Il numero di condizionamento $\text{cond}(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$ misura quantitativamente questa sensibilità. Un valore elevato indica prossimità alla singolarità e alta sensibilità numerica.

Il metodo di Kautsky–Nichols–Van Dooren (KNV) affronta questo problema cercando iterativamente una base X ben condizionata, ossia con un numero di condizionamento basso, per ottenere una matrice K numericamente stabile e poco sensibile alle perturbazioni.

2.3 Metodo di Kautsky–Nichols–Van Dooren

Il metodo di Kautsky–Nichols–Van Dooren (1985) è iterativo e basato sui seguenti punti:

1. Si scelgono inizialmente dei vettori casuali f_i (uno per ogni autovalore desiderato).
2. Per ogni i , si risolve:

$$(A - \lambda_i I)x_i = -Bf_i$$

per ottenere i vettori x_i (colonne di X).

3. Si costruisce $X = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]$
4. Si calcola $F = [f_1 \ f_2 \ \dots \ f_n]$
5. Si valuta il **condizionamento** di X e si aggiornano i vettori f_i per migliorarlo (riducendo la sensibilità numerica).
6. Si ripete finché X è ben condizionata.
7. Infine si calcola:

$$K = FX^{-1}.$$

In MATLAB, l’assegnamento degli autovalori è implementato nel comando:

$$K = \text{place}(A, B, p)$$

che utilizza il metodo di Kautsky–Nichols–Van Dooren (KNV).