Indice

Capitolo 1

Stabilità nei sistemi dinamici

1.1 Sistema dinamico e punti di equilibrio

Un sistema dinamico è composta da uno stato $x \in \mathbb{R}^n$ e da una legge di evoluzione

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t) \tag{1.1}$$

Definizione 1.1.1. Un sistema è detto **tempo invariante** se la sua evoluzione non dipende esplicitamente dal tempo t, cioè:

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$$

Definizione 1.1.2. Un sistema è detto **autonomo** se la sua evoluzione non dipende esplicitamente dall'ingresso $u(t)$, cioè:

$$\dot{x}(t) = f(x(t), t)$$

Se il sistema è sia autonomo che tempo invariante allora si ha:

$$\dot{x}(t) = f(x(t))$$

Definizione 1.1.3. Dato un sistema dinamico **tempo invariante** nella forma:

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$$

un punto di equilibrio $(\bar{x}, \bar{u})$ è una coppia stato-ingresso tale che:

$$\dot{x} = f(\bar{x}, \bar{u}) = 0$$

1.2 Stabilità e Convergenza

Definizione 1.2.1. Un sistema dinamico tempo invariante è detto stabile se

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : x_0 \in B_\delta(\bar{x}) \Rightarrow |x_{x_0}(t) - \bar{x}| \leq \varepsilon, \forall t \geq 0 \tag{1.2}$$

Dove con $x_{x_0}(t)$ si intende la traiettoria del sistema che parte da x_0.

Ora dimostriamo che $\delta \leq \varepsilon, \forall \varepsilon > 0$.

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che esista un $\varepsilon > 0$ per cui si ha che la δ per cui è rispettata la definizione di stabilità sia tale che $\delta > \varepsilon$. Allora si ha che per le $x_0 \in B_\delta(\bar{x}) \backslash B_\varepsilon(\bar{x})$ vale:

$$|x_{x_0}(0) - \bar{x}| = |x_0 - \bar{x}| > \varepsilon$$

Ma questo è assurdo perché $x_0 \in B_\delta(\bar{x})$ dunque rispetta la definizione di stabilità per cui si dovrebbe avere :

$$|x_{x_0}(0) - \bar{x}| = |x_0 - \bar{x}| \leq \varepsilon$$

Dunque siamo arrivati ad un assurdo.

□

Definizione 1.2.2. Dato un sistema dinamico un punto di equilibrio $\bar{x}$ è detto **convergente** se esiste un $\delta > 0$ tale che per ogni condizione iniziale $x_0 \in B_\delta(\bar{x})$ si ha che:

$$\lim_{t\to\infty} ||x(t) - \bar{x}|| = 0$$

Definizione 1.2.3. Un punto di equilibrio $\bar{x}$ è detto **isolato** se esiste un intorno di $\bar{x}$ che non contiene altri punti di equilibrio.

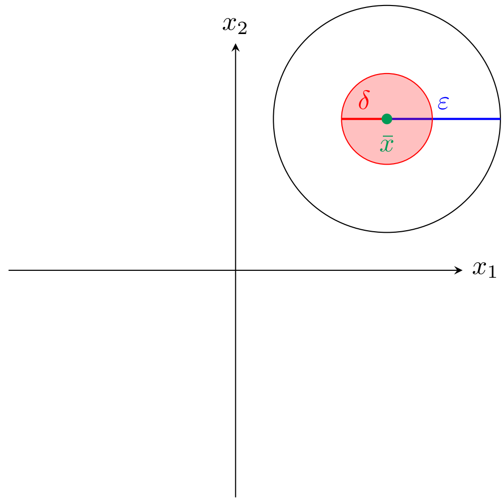

Figura 1.1: In verde si ha il punto di equilibrio $\bar{x}$. In rosso si ha l'insieme delle condizioni iniziali per cui le traiettorie rimangono confinate all'interno del cerchio di raggio ε.

1.3 Stabilità nei sistemi lineari

Consideriamo un sistema lineare tempo invariante:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

Dove $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$. Per trovare i punti di equilibrio dobbiamo imporre:

$$\dot{x}(t) = 0 \iff Ax(t) + Bu(t) = 0$$

Dunque i punti di equilibrio sono le coppie $(\bar{x}, \bar{u})$ che soddisfano:

$$A\bar{x} + B\bar{u} = 0$$

Notiamo subito che il punto $(\bar{x}, \bar{u}) = (0, 0)$ è sicuro un punto di equilibrio. Mentre gli altri punti si trovano risolvendo il sistema lineare omogeneo considerando $\bar{x}$ e $\bar{u}$ come incognite. Se invece di considerare le coppie $(\bar{x}, \bar{u})$ di equilibrio consideriamo solo gli stati di equilibrio $\bar{x}$ con un fissato $\bar{u}$, allora l'unica incognita è $\bar{x}$ mentre $B\bar{u}$ è un termine noto. In questo caso il sistema lineare da risolvere è:

$$A\bar{x} = -B\bar{u}$$

Questo sistema al variare di $\bar{u}$ (che funge da parametro) ammette soluzioni differenti, però la matrice A ci dice quante sono queste soluzioni. Se A è invertibile (ovvero $\det(A) \neq 0$) allora esiste un'unica soluzione per ogni $\bar{u}$:

$$\bar{x} = -A^{-1}B\bar{u}$$

Se invece A non è invertibile (ovvero $\det(A) = 0$) allora il sistema può ammettere infinite soluzioni oppure nessuna soluzione (ricordiamo che il sistema si risolve al variare del parametro $\bar{u}$).

1.4 Sistema nel dominio di Laplace

Consideriamo il sistema lineare tempo invariante:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

Applichiamo la trasformata di Laplace ambo i membri otteniamo:

$$sX(s) - x(0) = AX(s) + BU(s)$$

Portando $x(0)$ a destra e portando $AX(s)$ a sinistra otteniamo:

$$sX(s) - AX(s) = BU(s) + x(0)$$

Ricordando che $sX(s) = sIX(s)$ e mettendo in evidenza $X(s)$ otteniamo:

$$(sI - A)X(s) = BU(s) + x(0)$$

Ora premoltiplichiamo ambo i membri per $(sI - A)^{-1}$ otteniamo:

$$X(s) = (sI - A)^{-1}BU(s) + (sI - A)^{-1}x(0)$$

Dove in rosso abbiamo la parte dovuta all'ingresso che prende il nome di evoluzione forzata dello stato, mentre in blu abbiamo la parte dovuta alla evoluzione libera dello stato (che ricordiamo essere nulla se $x(0) = 0$). Andando a fare la stessa cosa per l'equazione di uscita:

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

Applichiamo la trasformata di Laplace otteniamo:

$$Y(s) = CX(s) + DU(s)$$

Sostituendo $X(s)$ otteniamo:

$$Y(s) = C\left[(sI - A)^{-1}BU(s) + (sI - A)^{-1}x(0)\right] + DU(s)$$

Dove riusciamo un'altra volta a distinguere una parte in evoluzione forzata ed un una in evoluzione libera:

$$Y(s) = C\left[(sI - A)^{-1} + D\right] BU(s) + (sI - A)^{-1}x(0)$$

1.5 Teorema di Lyapunov

Ora ci interessa introdurre un metodo per studiare la stabilità dei sistemi dinamici che prende il nome di **approccio di Lyapunov**, che ci permette di studiare la stabilità dei sistemi andandoci a trovare delle specifiche funzioni scalari $V(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dette **funzioni di Lyapunov**. Per prima cosa ricordiamo che una funzione $V(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e un suo punto di equilibrio possono essere classificati come:

- **definita positiva** in $\bar{x}$ se $V(\bar{x}) = 0$ ed esiste un $\delta > 0$ tale che $V(x) > 0$ (notiamo il maggiore stretto) per ogni $x \in B_\delta(\bar{x})$
- **semidefinita positiva** in $\bar{x}$ se $V(\bar{x}) = 0$ ed esiste un $\delta > 0$ tale che $V(x) \geq 0$ per ogni $x \in B_\delta(\bar{x})$
- **definita negativa** in $\bar{x}$ se $V(\bar{x}) = 0$ ed esiste un $\delta > 0$ tale che $V(x) < 0$ per ogni $x \in B_\delta(\bar{x})$
- **semidefinita negativa** in $\bar{x}$ se $V(\bar{x}) = 0$ ed esiste un $\delta > 0$ tale che $V(x) \leq 0$ per ogni $x \in B_\delta(\bar{x})$

Queste proprietà diventano **globali** quando sono vere per ogni $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$. La potenza del metodo che stiamo per introdurre sta nel fatto che è valida anche per sistemi non lineari, nel momento in cui aggiungeremo l'ipotesi di linearità andremo ad ottenere anche altri risultati.

Teorema 1.5.1. *Teorema di Lyapunov. Consideriamo il sistema dinamico:*

$$\dot{x}(t) = f(x(t))$$

Consideriamo il punto di equilibrio $\bar{x}$ per f. Se f è definita, è continua ed anche la sua derivata è continua in un intorno D di $\bar{x}$, cioè $f \in C^1(D)$ (f è un vettore di funzioni quindi quando diciamo che è continua intendiamo che ogni sua componente lo è). Se esiste una funzione $V(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, continua e derivabile in D, tale che:

- *$V(x)$ è definita positiva in $\bar{x}$, cioè:*

$$\begin{cases} V(\bar{x}) = 0 \\ \exists \delta : V(x) > 0, \quad \forall x \in B_\delta(\bar{x}) \backslash \{\bar{x}\} \end{cases}$$

- *$\dot{V}(x)$ è semidefinita negativa in $\bar{x}$, cioè:*

$$\begin{cases} V_{\bar{x}} = 0 \\ \exists \delta : \dot{V}(x) = \nabla V(x) \cdot \dfrac{dx}{dt} = \nabla V(x(t)) f(x(t)) \leq 0, \quad \forall x \in B_\delta(\bar{x}) \end{cases}$$

Allora si ha che il punto di equilibrio $\bar{x}$ è stabile.

Dimostrazione. Noi vogliamo dimostrare che $\bar{x}$ è un punto di equilibrio stabile, cioè che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $\delta > 0$ tale che se $x_0 \in B_\delta(\bar{x})$ allora la traiettoria $x(t)$ che parte da x_0 rimane confinata in $B_\varepsilon(\bar{x})$. Dunque partiamo con il fissare un generico $\varepsilon > 0$. Consideriamo l'insieme $S = \{x \in \mathbb{R}^n : ||x|| = \varepsilon\}$.
Deve esistere una curva di livello di $V(x)$ di valore $\bar{V}$ completamente contenuta in $B_\varepsilon(\bar{x})$, come in Figura **??**. Ora chiamiamo δ la distanza minima tra $\bar{x}$ e la curva di livello di valore $\bar{V}$. Ora consideriamo una $x(t)$ che parte da un punto $x_0 \in B_\delta(\bar{x})$ $(x(0) = x_0)$. A noi interessa dimostrare che $\bar{x}$ è stabile, cioè che $\forall x_0 \in B_\delta(\bar{x})$ la traiettoria $x(t)$ rimane confinata nella curva di livello di valore $\bar{V} \forall t \geq 0$, questo implica che $x(t)$ rimane confinata anche all'interno di $B_\varepsilon(\bar{x})$ (questo perché $\bar{V}$ è completamente contenuta all'interno di $B_\varepsilon(\bar{x})$). Dunque per dimostrare la stabilità dobbiamo dimostrare che $x(t)$ non può uscire dalla curva di livello (ricoridamo che $V(x)$ è funzione di x quindi una curva di livello è una curva nello spazio di stato) di valore $\bar{V}$. Poichè $\dot{V}(x) \leq 0$ allora $V(x(t))$ è una funzione decrescente nel tempo,

□

Se $f \in C^1(D)$ allora è anche sicuramente localmente Lipschitziana in D (poichè se una funzione è C^1 allora il suo gradiente è limitato) cioè:

$$\exists L > 0 : \|f(x) - f(y)\| \leq L\|x - y\|, \quad \forall x, y \in I$$

1.6 SVD (Singular Value Decomposition)

Consideriamo una matrice $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Inoltre dati due vettori $y \in \mathbb{R}^m$ e $x \in \mathbb{R}^n$ tali che vale la relazione:

$$y = Ax$$

$$A = U \Sigma V^T$$

- La matrice $U \in \mathbb{R}^{m \times m}$ (matrice di rotazione delle uscite) è una matrice ortonormale composta dai vettori colonna $u_1, u_2, \ldots, u_m$, si ha:

$$U = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & \ldots & u_m \end{pmatrix}$$

- La matrice $V \in \mathbb{R}^{n \times n}$ (matrice di rotazione degli ingressi) è una matrice ortonormale composta dai vettori colonna $v_1, v_2, \ldots, v_n$, si ha:

$$V = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & \ldots & v_n \end{pmatrix}$$

- La matrice $\Sigma \in \mathbb{R}^{m \times n}$ (matrice dei valori singolari)

$$p = min\,\{m, n\}$$

Dove si ha che:

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{se } p = m$$

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{se } p = n$$

$$y = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & \dots & u_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Sigma_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \Sigma_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \Sigma_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1^T \\ v_2^T \\ \vdots \\ v_n^T \end{pmatrix} \cdot x$$

Se io prendo $x = v_i$ si ha:

$$\begin{pmatrix} v_1^T \\ v_2^T \\ \vdots \\ v_n^T \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} v_1^T \\ v_2^T \\ \vdots \\ v_n^T \end{pmatrix} \cdot v_i$$

Ricordando che V è ortonormale, si che le sue colonne sono tra loro ortogonali e di norma 1, dunque si ha:

$$v_j^T \cdot v_i = 0, \quad \text{se } i \neq j$$
$$v_j^T \cdot v_i = 1, \quad \text{se } i = j$$

Dunque si ha:

$$\begin{pmatrix} v_1^T \\ v_2^T \\ \vdots \\ v_i^T \\ \vdots \\ v_n^T \end{pmatrix} \cdot v_i = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dove l'uno è nella i-esima riga. Andiamo a calcolarci la norma 2 di A:

$$||A||_2 = \sqrt{\lambda_{MAX} \left(A^T A\right)}$$

Notiamo che per le proprietà della trasposta $A^T = (U\Sigma V)^T = V\Sigma^T U^T$

$$||A||_2 = \sqrt{\lambda_{MAX} \left(V\Sigma^T U^T U \Sigma V^T\right)}$$

Ora ricordando che U è ortonormale si ha $U^T U = I$ $(U^T = U^{-1})$:

$$||A||_2 = \sqrt{\lambda_{MAX} \left(V\Sigma^T \Sigma V^T\right)}$$

Ora ricordando che Σ e Σ^T sono diagonali si ha che vale la proprietà commutativa tra le matrici, dunque possiamo scrivere:

$$||A||_2 = \sqrt{\lambda_{MAX} \left(\Sigma^T \Sigma V V^T\right)}$$

Ora ricordando che Σ è diagonale vale $\Sigma^T = \Sigma$, dunque si ha:

$$||A||_2 = \sqrt{\lambda_{MAX} \Sigma^T \Sigma} = \sqrt{\lambda_{MAX} \Sigma \Sigma} = \sqrt{\lambda_{MAX} \Sigma^2}$$

Come si vede la norma 2 di A è legata al valore singolare maggiore di A.

1.7 Poli e zeri per sistemi MIMO

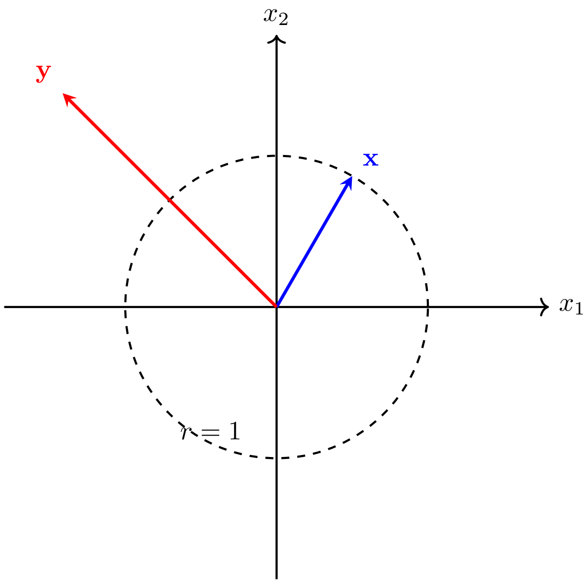

Figura 1.2: Esempio di rotazione del vettore di ingresso $x = v_1$ nel vettore di uscita amplificato $y = \sigma_1 u_1$. In questo caso abbiamo preso $m = n = 2$, dunque la matrice A è quadrata, mentre Σ è diagonale. Notiamo che abbiamo potuto rappresentare tutto sullo stesso grafico solo perché $m = n$.

Capitolo 2

Stabilità Robusta