Indice

1 Stabilità nei sistemi dinamici **2**
1.1 Sistema dinamico e punti di equilibrio 2
1.2 Stabilità e Convergenza 2
1.3 Stabilità nei sistemi lineari 3
1.4 Sistema nel dominio di Laplace 4
1.5 Stabilità tramite l'approccio alla Lyapunov 5
1.6 SVD (Singular Value Decomposition) 7
1.7 Guadagno 9
1.8 Poli e zeri per sistemi MIMO 9

2 Stabilità Robusta **10**

3 Stabilità Robusta **11**

4 Assegnamento degli autovalori con feedback di stato **12**
4.1 Caso MIMO 12
4.2 Metodo della forma canonica di controllabilità 12
4.3 Metodo dell'equazione di Sylvester 14
4.4 Diagonalizzare 15

Capitolo 1

Stabilità nei sistemi dinamici

1.1 Sistema dinamico e punti di equilibrio

Un sistema dinamico è composta da uno stato $x \in \mathbb{R}^n$ e da una legge di evoluzione

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t) \tag{1.1}$$

Definizione 1.1.1. Un sistema è detto **tempo invariante** se la sua evoluzione non dipende esplicitamente dal tempo t, cioè:

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$$

Definizione 1.1.2. Un sistema è detto **autonomo** se la sua evoluzione non dipende esplicitamente dall'ingresso $u(t)$, cioè:

$$\dot{x}(t) = f(x(t), t)$$

Se il sistema è sia autonomo che tempo invariante allora si ha:

$$\dot{x}(t) = f(x(t))$$

Definizione 1.1.3. Dato un sistema dinamico **tempo invariante** nella forma:

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$$

un punto di equilibrio $(\bar{x}, \bar{u})$ è una coppia stato-ingresso tale che:

$$\dot{x} = f(\bar{x}, \bar{u}) = 0$$

1.2 Stabilità e Convergenza

Definizione 1.2.1. Un sistema dinamico tempo invariante è detto stabile se

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : x_0 \in B_\delta(\bar{x}) \Rightarrow |x_{x_0}(t) - \bar{x}| \leq \varepsilon, \forall t \geq 0 \tag{1.2}$$

Dove con $x_{x_0}(t)$ si intende la traiettoria del sistema che parte da x_0.

Ora dimostriamo che $\delta \leq \varepsilon, \forall \varepsilon > 0$.

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che esista un $\varepsilon > 0$ per cui si ha che la δ per cui è rispettata la definizione di stabilità sia tale che $\delta > \varepsilon$. Allora si ha che per le $x_0 \in B_\delta(\bar{x}) \backslash B_\varepsilon(\bar{x})$ vale:

$$|x_{x_0}(0) - \bar{x}| = |x_0 - \bar{x}| > \varepsilon$$

Ma questo è assurdo perché $x_0 \in B_\delta(\bar{x})$ dunque rispetta la definizione di stabilità per cui si dovrebbe avere :

$$|x_{x_0}(0) - \bar{x}| = |x_0 - \bar{x}| \leq \varepsilon$$

Dunque siamo arrivati ad un assurdo.

□

Definizione 1.2.2. Dato un sistema dinamico un punto di equilibrio $\bar{x}$ è detto **convergente** se esiste un $\delta > 0$ tale che per ogni condizione iniziale $x_0 \in B_\delta(\bar{x})$ si ha che:

$$\lim_{t \to \infty} ||x(t) - \bar{x}|| = 0$$

Definizione 1.2.3. Un punto di equilibrio $\bar{x}$ è detto **isolato** se esiste un intorno di $\bar{x}$ che non contiene altri punti di equilibrio.

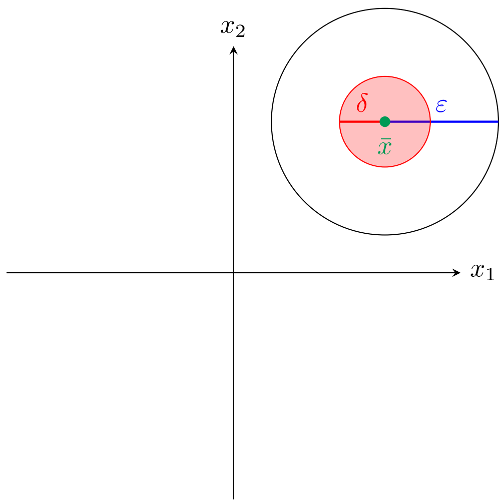

Figura 1.1: In verde si ha il punto di equilibrio $\bar{x}$. In rosso si ha l'insieme delle condizioni iniziali per cui le traiettorie rimangono confinate all'interno del cerchio di raggio ε.

1.3 Stabilità nei sistemi lineari

Consideriamo un sistema lineare tempo invariante:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

Dove $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$. Per trovare i punti di equilibrio dobbiamo imporre:

$$\dot{x}(t) = 0 \iff Ax(t) + Bu(t) = 0$$

Dunque i punti di equilibrio sono le coppie $(\bar{x}, \bar{u})$ che soddisfano:

$$A\bar{x} + B\bar{u} = 0$$

Notiamo subito che il punto $(\bar{x}, \bar{u}) = (0, 0)$ è sicuro un punto di equilibrio. Mentre gli altri punti si trovano risolvendo il sistema lineare omogeneo considerando $\bar{x}$ e $\bar{u}$ come incognite. Se invece di considerare le coppie $(\bar{x}, \bar{u})$ di equilibrio consideriamo solo gli stati di equilibrio $\bar{x}$ con un fissato $\bar{u}$, allora l'unica incognita è $\bar{x}$ mentre $B\bar{u}$ è un termine noto. In questo caso il sistema lineare da risolvere è:

$$A\bar{x} = -B\bar{u}$$

Questo sistema al variare di $\bar{u}$ (che funge da parametro) ammette soluzioni differenti, però la matrice A ci dice quante sono queste soluzioni. Se A è invertibile (ovvero $\det(A) \neq 0$) allora esiste un'unica soluzione per ogni $\bar{u}$:

$$\bar{x} = -A^{-1}B\bar{u}$$

Se invece A non è invertibile (ovvero $\det(A) = 0$) allora il sistema può ammettere infinite soluzioni oppure nessuna soluzione (ricordiamo che il sistema si risolve al variare del parametro $\bar{u}$).

1.4 Sistema nel dominio di Laplace

Consideriamo il sistema lineare tempo invariante:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

Applichiamo la trasformata di Laplace ambo i membri otteniamo:

$$sX(s) - x(0) = AX(s) + BU(s)$$

Portando $x(0)$ a destra e portando $AX(s)$ a sinistra otteniamo:

$$sX(s) - AX(s) = BU(s) + x(0)$$

Ricordando che $sX(s) = sIX(s)$ e mettendo in evidenza $X(s)$ otteniamo:

$$(sI - A)X(s) = BU(s) + x(0)$$

Ora premoltiplichiamo ambo i membri per $(sI - A)^{-1}$ otteniamo:

$$X(s) = (sI - A)^{-1}BU(s) + (sI - A)^{-1}x(0)$$

Dove in rosso abbiamo la parte dovuta all'ingresso che prende il nome di evoluzione forzata dello stato, mentre in blu abbiamo la parte dovuta alla evoluzione libera dello stato (che ricordiamo essere nulla se $x(0) = 0$). Andando a fare la stessa cosa per l'equazione di uscita:

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

Applichiamo la trasformata di Laplace otteniamo:

$$Y(s) = CX(s) + DU(s)$$

Sostituendo $X(s)$ otteniamo:

$$Y(s) = C\left[(sI - A)^{-1}BU(s) + (sI - A)^{-1}x(0)\right] + DU(s)$$

Dove riusciamo un'altra volta a distinguere una parte in evoluzione forzata ed un una in evoluzione libera:

$$Y(s) = C\left[(sI - A)^{-1} + D\right]BU(s) + (sI - A)^{-1}x(0)$$

1.5 Stabilità tramite l'approccio alla Lyapunov

Ora ci interessa introdurre un metodo per studiare la stabilità dei sistemi dinamici che prende il nome di **approccio di Lyapunov**, che ci permette di studiare la stabilità dei sistemi andandoci a trovare delle specifiche funzioni scalari $V(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dette **funzioni di Lyapunov**. Per prima cosa ricordiamo che una funzione $V(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e un suo punto di equilibrio possono essere classificati come:

- **definita positiva** in $\bar{x}$ se $V(\bar{x}) = 0$ ed esiste un $\delta > 0$ tale che $V(x) > 0$ (notiamo il maggiore stretto) per ogni $x \in B_\delta(\bar{x})$
- **semidefinita positiva** in $\bar{x}$ se $V(\bar{x}) = 0$ ed esiste un $\delta > 0$ tale che $V(x) \geq 0$ per ogni $x \in B_\delta(\bar{x})$
- **definita negativa** in $\bar{x}$ se $V(\bar{x}) = 0$ ed esiste un $\delta > 0$ tale che $V(x) < 0$ per ogni $x \in B_\delta(\bar{x})$
- **semidefinita negativa** in $\bar{x}$ se $V(\bar{x}) = 0$ ed esiste un $\delta > 0$ tale che $V(x) \leq 0$ per ogni $x \in B_\delta(\bar{x})$

Queste proprietà diventano **globali** quando sono vere per ogni $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$. La potenza del metodo che stiamo per introdurre sta nel fatto che è valida anche per sistemi non lineari, nel momento in cui aggiungeremo l'ipotesi di linearità andremo ad ottenere anche altri risultati.

Teorema 1.5.1. *Teorema di Lyapunov. Consideriamo il sistema dinamico:*

$$\dot{x}(t) = f(x(t))$$

Consideriamo il punto di equilibrio $\bar{x}$ per f. Se f è definita, è continua ed anche la sua derivata è continua in un intorno D di $\bar{x}$, cioè $f \in C^1(D)$ (f è un vettore di funzioni quindi quando diciamo che è continua intendiamo che ogni sua componente lo è). Se esiste una funzione $V(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, continua e derivabile in D, tale che:

- *$V(x)$ è definita positiva in $\bar{x}$, cioè:*

$$\begin{cases} V(\bar{x}) = 0 \\ \exists \delta : V(x) > 0, \quad \forall x \in B_\delta(\bar{x}) \backslash \{\bar{x}\} \end{cases}$$

- *$\dot{V}(x)$ è semidefinita negativa in $\bar{x}$, cioè:*

$$\begin{cases} V(\bar{x}) = 0 \\ \exists \delta > 0 : \dot{V}(x) = \nabla V(x) \cdot \dfrac{dx}{dt} = \nabla V(x(t)) f(x(t)) \leq 0, \quad \forall x \in B_\delta(\bar{x}), \forall t > t_0 \end{cases}$$

Allora si ha che il punto di equilibrio $\bar{x}$ è stabile.

Dimostrazione. Noi vogliamo dimostrare che $\bar{x}$ è un punto di equilibrio stabile, cioè che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $\delta > 0$ tale che se $x_0 \in B_\delta(\bar{x})$ allora la traiettoria $x(t)$ che parte da x_0 rimane confinata in $B_\varepsilon(\bar{x})$. Dunque partiamo con il fissare un generico $\varepsilon > 0$. Prendiamo la curva di livello (della funzione $V(x)$) a valore maggiore e completamente contenuta in $B_\varepsilon(\bar{x})$, come in Figura **??**. Ora chiamiamo δ la distanza minima tra $\bar{x}$ e la curva di livello di valore $\bar{V}$. Ora consideriamo una $x(t)$ che parte da un punto $x_0 \in B_\delta(\bar{x})$ $(x(t_0) = x_0)$. A noi interessa dimostrare che $\bar{x}$ è stabile, cioè che $\forall x_0 \in B_\delta(\bar{x})$ la traiettoria $x(t)$ rimane confinata all'interno di $B_\varepsilon(\bar{x})$ $\forall t \geq 0$. Per dimostrare che $x(t)$ rimane confinata in $B_\varepsilon(\bar{x})$ distinguiamo due casi:

- Nel caso in cui si ha $\dot{V}(x) = 0$ la traiettoria $x(t)$ al massimo può rimanre sulla curva di livello a valore $\bar{V}$ (dunque rimane confinata in $B_\varepsilon(\bar{x})$)
- Se $\dot{V}(x) < 0$ allora la traiettoria $x(t)$ si muove verso l'interno della curva di livello a valore $\bar{V}$ (dunque rimane confinata in $B_\varepsilon(\bar{x})$)

Quindi in entrambi i casi la traiettoria $x(t)$ rimane confinata in $B_\varepsilon(\bar{x})$. Dunque abbiamo dimostrato che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $\delta > 0$ tale che se $x_0 \in B_\delta(\bar{x})$ allora la traiettoria $x(t)$ rimane confinata in $B_\varepsilon(\bar{x})$ $\forall t \geq t_0$, ma questa è proprio la definizione di stabilità.

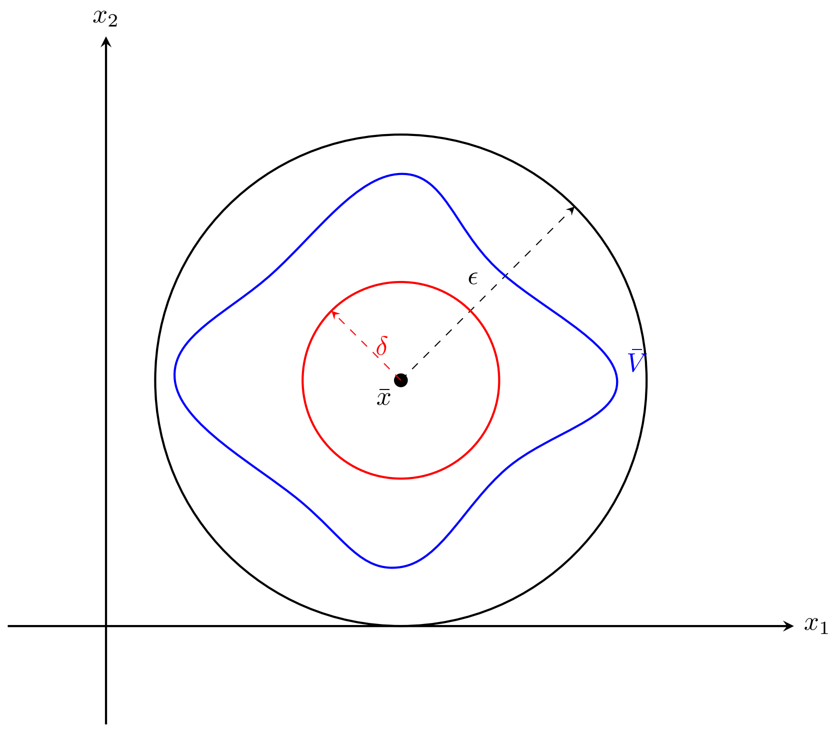

Figura 1.2: Visualizzazione con una curva di livello $\bar{V}$ (blu) di forma generica non ellittica, strettamente contenuta all'interno della circonferenza di raggio ϵ (nera).

□

Se $f \in C^1(D)$ allora è anche sicuramente localmente Lipschitziana in D (poichè se una funzione è C^1 allora il suo gradiente è limitato) cioè:

$$\exists L > 0 : \|f(x) - f(y)\| \leq L\|x - y\|, \quad \forall x, y \in I$$

1.6 SVD (Singular Value Decomposition)

Consideriamo una matrice $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Inoltre dati due vettori $y \in \mathbb{R}^m$ e $x \in \mathbb{R}^n$ tali che vale la relazione:

$$y = Ax$$

$$A = U\Sigma V^T$$

- La matrice $U \in \mathbb{R}^{m \times m}$ (matrice di rotazione delle uscite) è una matrice ortonormale composta dai vettori colonna $u_1, u_2, \dots, u_m$, si ha:

$$U = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & \dots & u_m \end{pmatrix}$$

- La matrice $V \in \mathbb{R}^{n \times n}$ (matrice di rotazione degli ingressi) è una matrice ortonormale composta dai vettori colonna $v_1, v_2, \dots, v_n$, si ha:

$$V = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & \dots & v_n \end{pmatrix}$$

- La matrice $\Sigma \in \mathbb{R}^{m \times n}$ (matrice dei valori singolari)

$$p = min\{m, n\}$$

  Dove si ha che:

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{se } p = m$$

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{se } p = n$$

$$y = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & \dots & u_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Sigma_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \Sigma_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \Sigma_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1^T \\ v_2^T \\ \vdots \\ v_n^T \end{pmatrix} \cdot x$$

Se io prendo $x = v_i$ si ha:

$$\begin{pmatrix} v_1^T \\ v_2^T \\ \vdots \\ v_n^T \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} v_1^T \\ v_2^T \\ \vdots \\ v_n^T \end{pmatrix} \cdot v_i$$

Ricordando che V è ortonormale, si che le sue colonne sono tra loro ortogonali e di norma 1, dunque si ha:

$$v_j^T \cdot v_i = 0, \quad \text{se } i \neq j$$

$$v_j^T \cdot v_i = 1, \quad \text{se } i = j$$

Dunque si ha:

$$\begin{pmatrix} v_1^T \\ v_2^T \\ \vdots \\ v_i^T \\ \vdots \\ v_n^T \end{pmatrix} \cdot v_i = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dove l'uno è nella i-esima riga. Andiamo a calcolarci la norma 2 di A:

$$||A||_2 = \sqrt{\lambda_{MAX}\left(A^T A\right)}$$

Notiamo che per le proprietà della trasposta $A^T = (U\Sigma V)^T = V\Sigma^T U^T$

$$||A||_2 = \sqrt{\lambda_{MAX}\left(V\Sigma^T U^T U\Sigma V^T\right)}$$

Ora ricordando che U è ortonormale si ha $U^T U = I$ $(U^T = U^{-1})$:

$$||A||_2 = \sqrt{\lambda_{MAX}\left(V\Sigma^T\Sigma V^T\right)}$$

Ora ricordando che Σ e Σ^T sono diagonali si ha che vale la proprietà commutativa tra le matrici, dunque possiamo scrivere:

$$||A||_2 = \sqrt{\lambda_{MAX}\left(\Sigma^T\Sigma V V^T\right)}$$

Ora ricordando che Σ è diagonale vale $\Sigma^T = \Sigma$, dunque si ha:

$$||A||_2 = \sqrt{\lambda_{MAX}\Sigma^T\Sigma} = \sqrt{\lambda_{MAX}\Sigma\Sigma} = \sqrt{\lambda_{MAX}\Sigma^2}$$

Come si vede la norma 2 di A è legata al valore singolare maggiore di A.

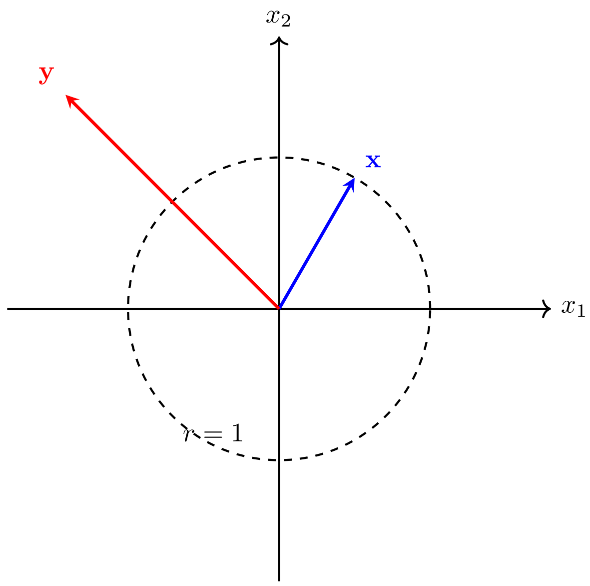

Figura 1.3: Esempio di rotazione del vettore di ingresso $x = v_1$ nel vettore di uscita amplificato $y = \sigma_1 u_1$. In questo caso abbiamo preso $m = n = 2$, dunque la matrice A è quadrata, mentre Σ è diagonale. Notiamo che abbiamo potuto rappresentare tutto sullo stesso grafico solo perché $m = n$.

1.7 Guadagno

Definiamo gli spazi L^p come gli spazi delle funzioni p-sommabili, cioè in cui esiste la norma p-esima finita:

$$L^p(\mathbb{R}^{\ltimes}) = \left\{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n : \int_{-\infty}^{+\infty} ||f(\tau)||_p^p \, d\tau < \infty \right\}$$

Dove essendo f una funzione vettoriale a variabile reale la norma p-esima è definita come:

$$||f(\tau)||_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |f_i(\tau)|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

Dove con $f_i(\tau)$ si intende la i-esima componente del vettore $f(\tau)$ (che è un vettore di n componenti in cui ognuna è una funzione di τ)

1.8 Poli e zeri per sistemi MIMO

Capitolo 2

Stabilità Robusta

Capitolo 3

Stabilità Robusta

Supponiamo ora che il nostro sistema dinamico sia affetto da inceertezze parametriche, cioè che il modello matematico (dunque la matrice delle dinamica A) abbia delle variazioni intorno al suo valore nominale. In questo caso il sistema dinamico si può scrivere come

$$\dot{x}(t) = (A(p(t)))x(t) \tag{3.1}$$

dove $p(t)$ è un parametro incerto che varia nel tempo ed appartiene ad un insieme $\mathcal{P}$. In generale si studiano sistemi di 3 tipologie:

- **Sistemi Stazionari** : in cui il parametro $p(t) = p \in \mathcal{P}$ non è funzione del tempo (ma rimane incerto).
- **Sistemi Tempo-Varianti** : in cui il parametro $p(t) \in \mathcal{P}$ varia nel tempo in modo arbitrario.
- **Sistemi Quasi Stazionari** : in cui il parametro $p(t) \in \mathcal{P}$ varia nel tempo in modo "lento" (caso per caso si definisce cosa significa lento).

Noi studieremo solo i sistemi stazionari e tempo-varianti.

Capitolo 4

Assegnamento degli autovalori con feedback di stato

4.1 Caso MIMO

Consideriamo un sistema LTI descritto dalle equazioni di stato:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

con $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $x \in \mathbb{R}^n$ e $u \in \mathbb{R}^m$. Il nostro obiettivo è attraverso un feedback di stato del tipo:

$$u(t) = Kx(t) \tag{4.1}$$

con $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$ (dunque $Kx \in \mathbb{R}^{m \times 1}$) riuscire ad assegnare gli autovalori del sistema con matrice della dinamica:

$$A + BK \tag{4.2}$$

indicheremo l'insieme degli autovalori di una matrice A con $\sigma(A)$, dunque noi vogliamo scegliere K in modo tale da poter assegnare l'insieme $\sigma(A + BK)$ a piacere:

$$\sigma(A + BK) = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}$$

Per i sistemi MIMO esistono infinite soluzioni al problema di assegnamento degli autovalori, cioè esistono infinite matrici K tali che l'insieme degli autovalori di $A + BK$ sia uguale all'insieme desiderato. Noi andremo a vedere delle soluzioni operative che ci permettono di trovare alcune di queste infinite matrici K soluzioni del problema, nello specifico vedremo i seguenti 3 metodi:

- Metodo della forma canonica di controllabilità
- Metodo dell'equazione di Sylvester
- Metodo di Kautsky-Nichols-Van Dooren

4.2 Metodo della forma canonica di controllabilità

Per sistemi MIMO se la coppia (A, B) è completamente controllabile allora è possibile trovare una matrice di trasformazione T che porta il sistema in una forma canonica di controllabilità a blocchi, detta forma di Brunovsky:

$$z = T^{-1}x \Longleftrightarrow x = Tz$$

Con le matrici del sistema nella nuova base che valgono:

$$A_c = T^{-1}AT = \begin{pmatrix} A_{c1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_{c2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_{cm} \end{pmatrix}, \quad B_c = T^{-1}B = \begin{pmatrix} B_{c1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & B_{c2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & B_{cm} \end{pmatrix} \tag{4.3}$$

Con $A_{ci} \in \mathbb{R}^{n_i \times n_i}$ e $B_{ci} \in \mathbb{R}^{n_i \times 1}$ che valgono:

$$A_{ci} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{i1} & -a_{i2} & -a_{i3} & \cdots & -a_{in_i} \end{pmatrix}, \quad B_{ci} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Inoltre si ha che $n_1 + n_2 + \cdots + n_m = n$. Notiamo che ogni coppia (A_{ci}, B_{ci}) rappresenta una forma canonica di controllabilità rispetto all'ingresso u_i. Notiamo che per come è scritta la matrice A_c con una retroazione di stato del tipo:

$$u = K_c z$$

con $K_c \in \mathbb{R}^{m \times n}$:

$$K_c = \begin{pmatrix} k_{c1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & k_{c2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & k_{cm} \end{pmatrix}$$

con $k_{ci} \in \mathbb{R}^{1 \times n_i}$. Con K_c scritto in questo modo si ha che la matrice della dinamica del sistema in retroazione di stato è:

$$A_c + B_c K_c = \begin{pmatrix} A_{c1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_{c2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_{cm} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_{c1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & B_{c2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & B_{cm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_{c1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & k_{c2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & k_{cm} \end{pmatrix}$$

Notando che $B_{ci}k_{ci} \in \mathbb{R}^{n_i \times n_i}$ si ha che:

$$A_c + B_c K_c = \begin{pmatrix} A_{c1} + B_{c1}k_{c1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_{c2} + B_{c2}k_{c2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_{cm} + B_{cm}k_{cm} \end{pmatrix}$$

Ma la matrice $A_c + B_c + K_c$ è diagonale a blocchi dunque si ha che gli autovalori della matrice sono gli autovalori dei blocchi diagonali:

$$\sigma(A_c + B_c K_c) = \bigcup_{i=1}^{m} \sigma(A_{ci} + B_{ci}k_{ci})$$

Ma ogni singolo blocco diagonale $A_{ci} + B_{ci}k_{ci}$ rappresenta un sistema SISO in forma canonica di controllabilità, e la coppia (A_{ci}, B_{ci}) è completamente controllabile per ipotesi (essendo controllabile il sistema originale (A, B)), dunque per il teorema di assegnamento degli autovalori applicato ai sistemi SISO esiste k_{ci} tale che possiamo assegnare gli autovalori di ogni blocco diagonale $A_{ci} + B_{ci}k_{ci}$. Questo k_{ci} si trova imponendo che il polinomio caratteristico del blocco $A_{ci} + B_{ci}k_{ci}$ sia uguale al polinomio caratteristico desiderato:

$$\det(sI - (A_{ci} + B_{ci}k_{ci})) = s^{n_i} + \alpha_{i1}s^{n_i-1} + \alpha_{i2}s^{n_i-2} + \ldots + \alpha_{in_i}$$

Ovviamente questo va fatto $\forall i = 1, \ldots, m$. Una volta trovati tutti i k_{ci} possiamo costruire la matrice K_c, per riportarla nella base originale del sistema basta ricordare:

$$u = K_c z = K_c T^{-1} x \Longrightarrow K = K_c T^{-1}$$

4.3 Metodo dell'equazione di Sylvester

Un altro metodo per l'assegnamento degli autovalori per sistemi MIMO è il metodo dell'equazione di Sylvester. L'equazione di Sylvester è la seguente equazione matriciale:

$$AX + XB = C \tag{4.4}$$

in cui $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{m\times m}$ e $C \in \mathbb{R}^{n\times m}$ sono matrici note, mentre $X \in \mathbb{R}^{n\times m}$ è la matrice incognita da trovare. Andiamo ad analizzare questa equazione:

- **Unicità della soluzione**: L'equazione di Sylvester ammettete una soluzione unica se e solo se gli insiemi degli spettri di A e $-B$ sono disgiunti, cioè hanno intersezione uguale all'insieme vuoto:

  $$\sigma(A) \cap \sigma(-B) = \emptyset \Longleftrightarrow \lambda_i(A) + \lambda_j(B) \neq 0 \quad \forall i, j$$

  in parole povere le matrici A e B non devono avere autovalori con segni opposti, cioè A e $-B$ non devono avere autovalori in comune. Ad esempio se A ha un autovalore $\lambda_A = 2$ e B ha un autovalore $\lambda_B = -2$ allora l'equazione di Sylvester non ammette una soluzione unica.
- **Esistenza della soluzione**: L'equazione di Sylvester ammette almeno una soluzione se e solo se:

  $$vec(C) \in Im\left(I_m \otimes A + B^T \otimes I_n\right)$$

  cioè se la matrice C appartiene all'immagine dell'operatore $L(X)$:

  $$L(X) = AX + XB$$

  cioè esiste un X tale che $L(X) = C$.

Ora torniamo al nostro problema di assegnamento degli autovalori per sistemi MIMO. Ricordiamo che il nostro obiettivo è trovare la matrice K tale che:

$$\sigma(A + BK) = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}$$

Ma se esiste questa K allora costruita una matrice T che ha sulle colonne gli autovettori associati agli autovalori desiderati si ha che per la definizione di autovettore e autovalore (poichè il prodotto $(A+BK)T$ equivale a moltiplicare la matrice $A+BK$ per ogni autovettore sulle colonne di T):

$$(A+BK)T = T\Lambda$$

con Λ matrice diagonale(o a blocchi) con gli autovalori desiderati sulla diagonale.

4.4 Diagonalizzare

Sia dato un sistema LTI descritto dalle equazioni di stato:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

quando noi diamo un sistema in questa forma diamo per assodato che il vettore x sia scritto nella base canonica di $\mathbb{R}^n$. Se la matrice A è diagonalizzabile, ci poniamo il problema di portare x in un nuovo stato $\hat{x}$ in cui A è diagonale. Dunque cerchiamo una matrice di trasformazione T tale che:

$$x = T\hat{x} \Longrightarrow \hat{A} = T^{-1}AT \text{ è diagonale}$$

Ma come si può immediatamente notare la matrice T è la matrice del cambiamento di base dalla base canonica alla base che diagonalizza A. Quindi a noi basta trovare la matrice che permette di portare il vettore $\hat{x}$, scritto nella base che diagonalizza A, nel vettore x scritto nella base canonica. Ma la base che diagonalizza A è formata dagli autovettori di A, dunque scegliamo un insieme di autovettori linearmente indipendenti di A:

$$\hat{B} = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$$

Per calcolare T dobbiamo ricordare che la matrice del cambiamento di base si calcola attraverso l'applicazione identità (che è un applicazione lineare), dunque applichiamo l'identità agli autovettori scelti:

$$Id(\hat{B}) = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$$

Ora scomponiamo i vettori rispetto alla base canonica ed incolonniamoli come colonne della matrice T(la base canonica è molto comoda perchè ci permette di scrivere i vettori proprio come sono), dunque la matrice T vale:

$$T = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & \ldots & v_n \end{pmatrix}$$

In cui i vettori $v_1, v_2, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ sono vettori colonna $n \times 1$, dunque la matrice $T \in \mathbb{R}^{n\times n}$.