Course of “Automatic Control”
2019/20

Analysis of LTI systems in the time domain

Prof. Roberto Ambrosino
DIETI
Università degli studi di Napoli Federico II
Tel 081-5476782
roberto.ambrosino@unina.it

- Consideriamo un sistema ***Lineare Tempo Variante – Tempo Continuo*** (***LTV-TC***) in rappresentazione i-s-u:

$$
\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= A(t)x(t) + B(t)u(t), \quad x(t_0) = x_0 \\
y(t) &= C(t)x(t) + D(t)u(t)
\end{aligned}
\tag{1}
$$

ed indichiamo con

$$x(t) = \varphi\big(t, t_0, x_0, u(\cdot)\big)$$

$$y(t) = \eta\big(t, x(t), u(t)\big)$$

la sua rappresentazione esplicita con $\varphi(t, t_0, x_0, u(\cdot))$ ***funzione di transizione.***

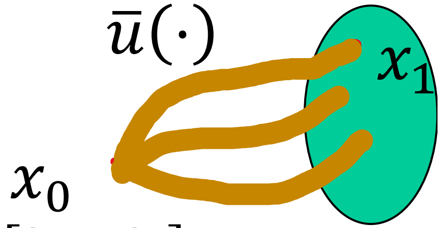
- Definiamo ***proprietà strutturali*** l'insieme di proprietà di un sistema che non dipendono dalla specifica rappresentazione di stato.

- ***Raggiungibilità ed Osservabilità*** sono proprietà strutturali di un sistema. Tale proprietà hanno un'importanza sostanziale per definire come un segnale di ingresso può modificare a piacere lo stato e l'uscita di un sistema

Raggiungibilità

Definizione

Lo stato x_1 di un sistema dinamico è **raggiungibile** da $x_0 = x(t_0)$ nell'intervallo di tempo $[t_0 \quad t_1]$ (con $t_0 < t_1$) se esiste una funzione di ingresso ammissibile $\bar{u}(\cdot) \in U_f([t_0 \quad t_1])$ tale che: $\bar{u}(\cdot)$



$$x_1 = \varphi\big(t_1, t_0, x_0, \bar{u}(\cdot)\big)$$

con $U_f([t_0 \quad t_1])$ l'insieme degli ingressi ammissibili nell'intervallo $[t_0 \quad t_1]$.

Definiamo **l'insieme degli stati raggiungibili** da x_0 nell'intervallo di tempo $[t_0 \quad t_1]$ come

$$S_r(t_0, x_0, t_1) = \big\{x_1 : \quad x_1 = \varphi\big(t_1, t_0, x_0, \bar{u}(\cdot)\big), con \ \bar{u}(\cdot) \in U_f([t_0 \quad t_1])\big\}$$

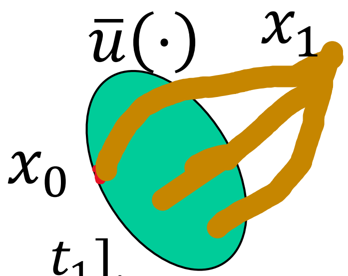
Un sistema è completamente raggiungibile da x_0 nell'intervallo di tempo $[t_0 \quad t_1]$ se $S_r(t_0, x_0, t_1)$ coincide con lo spazio di stato.

Controllabilità

Definizione

Lo stato $x_0 = x(t_0)$ di un sistema dinamico è **controllabile** a x_1 nell'intervallo di tempo $[t_0 \quad t_1]$ (con $t_0 < t_1$) se esiste una funzione di ingresso ammissibile $\bar{u}(\cdot) \in U_f([t_0 \quad t_1])$ tale che:

$$x_1 = \varphi\big(t_1, t_0, x_0, \bar{u}(\cdot)\big)$$



con $U_f([t_0 \quad t_1])$ l'insieme degli ingressi ammissibili nell'intervallo $[t_0 \quad t_1]$.

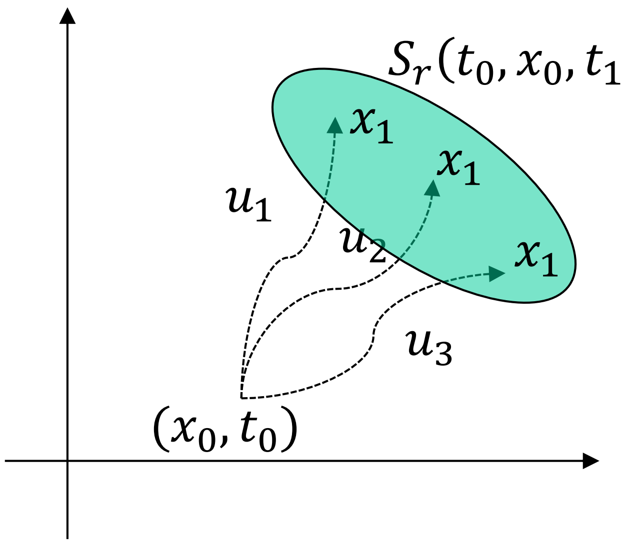
Definiamo **l'insieme degli stati controllabili** a x_1 nell'intervallo di tempo $[t_0 \quad t_1]$ come

$$S_c(t_0, t_1, x_1) = \{x_0 : \quad x_1 = \varphi\big(t_1, t_0, x_0, \bar{u}(\cdot)\big), con \ \bar{u}(\cdot) \in U_f([t_0 \quad t_1])\}$$

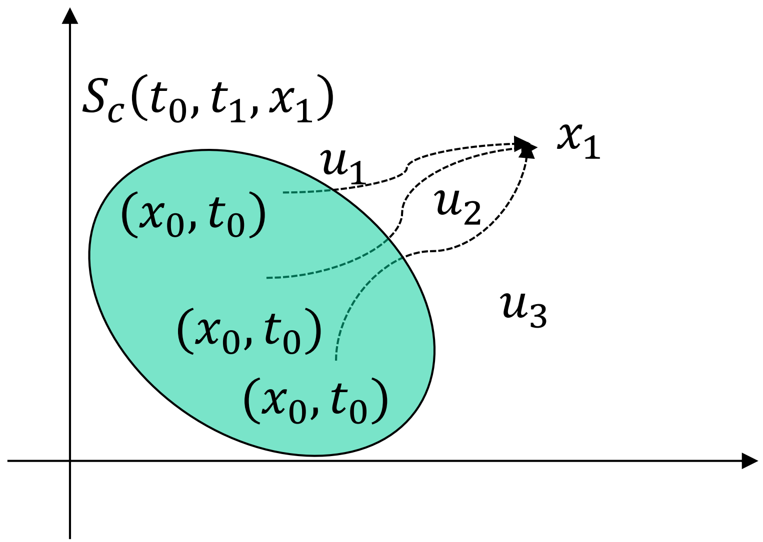
Un sistema è completamente controllabile a x_1 nell'intervallo di tempo $[t_0 \quad t_1]$ se $S_c(t_0, t_1, x_1)$ coincide con lo spazio di stato

Controllabilità e Raggiungibilità

- I concetti di raggiungibilità e controllabilità sono tra loro complementari.



Raggiungibilità



Controllabilità

TEOREMA

Dato un sistema LTV, gli insiemi di raggiungibilità da $x_0 = 0$ ($S_r(t_0, 0, t_1) = S_r(t_0, t_1)$) è un sottospazio lineare definito come

$$S_r(t_0, t_1) = Range(W_r(t_0, t_1))$$

con $W_r(t_0, t_1)$ **Gramiano di Raggiungibilità** pari a

$$W_r(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \phi(t_1, \tau)B(\tau)B^T(\tau)\,\phi^T(t_1, \tau)d\tau$$

dove $\phi(\cdot,\cdot)$ è la matrice di transizione del sistema $\dot{\phi}(t, \tau) = A(t)\phi(t, \tau)$

TEOREMA

Dato un sistema LTV, gli insiemi di controllabilità controllabilità a $x_1 = 0$ ($S_c(t_0, t_1, 0) = S_c(t_0, t_1)$) è un sottospazio lineare definito come

$$S_r(t_0, t_1) = Range(W_c(t_0, t_1))$$

con $W_r(t_0, t_1)$ **Gramiano di Controllabilità** pari a

$$W_c(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \phi(t_0, \tau) B(\tau) B^T(\tau)\, \phi^T(t_0, \tau)\, d\tau$$

dove $\phi(\cdot,\cdot)$ è la matrice di transizione del sistema $\dot{\phi}(t, \tau) = A(t)\phi(t, \tau)$

- Consideriamo un sistema ***Lineare Tempo Invariante – Tempo Continuo*** (***LTI-TC***) in rappresentazione i-s-u:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t), \quad x(t_0) = x_0 \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned} \tag{1}$$

- Per sistemi LTI-TC, si può considerare $x_0 = 0$ come unico stato di interesse per le proprietà di raggiungibilità dato che l'insieme di raggiungibilità da $x_0 \neq 0$ si differenzia dal primo solo per una traslazione legata alla risposta in evoluzione libera ($e^{At}x_0$) (discorso analogo vale per la controllabilità).

- Per sistemi LTI-TC, le proprietà di Controllabilità e Raggiungibilità sono quindi relazionate alla sola risposta forzata, quindi alla coppia (A,B).

Controllabilità e Raggiungibilità

- Per i sistemi lineari tempo-invarianti (LTI), le proprietà di controllabilità e raggiungibilità non dipendono da t_0 e t_1 ma solo da $\mathrm{T} = t_1 - t_0$ dato che $\phi(t,\tau) = e^{A(t-\tau)}$ e i Gramiani, con un cambiamento di variabile, diventano:

$$W_r(t_0, t_1) = \int_0^T e^{A(T-\tau)} B B^T \, e^{A^T (T-\tau)} d\tau$$

$$W_c(t_0, t_1) = \int_0^T e^{-A\tau} B B^T \, e^{-A^T \tau} d\tau$$

TEOREMA

Detta $M_r = [B \;\; AB \;\; A^2B \;\; \dots \;\; A^{n-1}B]$ la **matrice di raggiungibilità del sistema**,

$$S_r = S_c = span(M_r)$$

- Tale risultato implica che, per sistemi LTI-TC:
  - I concetti di raggiungibilità e controllabilità coincidono
  - Tali concetti non dipendono dal tempo
- **Per sistemi SISO**, la matrice di raggiungibilità è quadrata $M_r \in R^{n \times n}$ ed un sistema è completamente raggiungibile se

$$Range(M_r) = n \quad \rightarrow \quad \det(M_r) \neq 0$$

- Un sistema è completamente raggiungibile se $Range(M_r) = n$
- **Per sistemi MIMO**, $M_r \in R^{n \times nm}$ con m numero di ingressi del sistema. Il sottospazio di raggiungibilità è definito dalla combinazione lineare delle colonne della matrice M_r.

Forma canonica di raggiungibilità di Kalman

- Per sistemi non completamente raggiungibili è possibile effettuare un cambiamento di base che evidenzia gli stati raggiungibili e non raggiungibili. Tale rappresentazione è detto ***Forma canonica di raggiungibilità di Kalman***

- **La raggiungibilità è una proprietà strutturale** quindi, effettuare un cambiamento di base, non cambia la dimensione dello spazio di raggiungibilità di un sistema.

- Detta T una matrice di cambiamento di stato tale che $z(t) = Tx(t)$, avremo che

$$\dot{z}(t) = T\,AT^{-1}z(t) + TBu(t)$$

da cui, dette $\widetilde{\mathrm{A}} = T\,AT^{-1}$ e $\widetilde{\mathrm{B}} = TB$, la nuova matrice di raggiungibilità risulta $\widetilde{M}r = \left(\widetilde{\mathrm{A}}, \widetilde{\mathrm{B}}\right)$ e

$$rank\left(\widetilde{M}r\right) = rank\left(\left[\tilde{B}\ \ \tilde{A}\tilde{B}\ \ \tilde{A}^2\tilde{B}\ \ \ldots\ \ \tilde{A}^{n-1}\tilde{B}\right]\right) =$$

$$rank(T[B\ \ AB\ \ A^2B\ \ \ldots\ \ A^{n-1}B]) = rank(Mr)$$

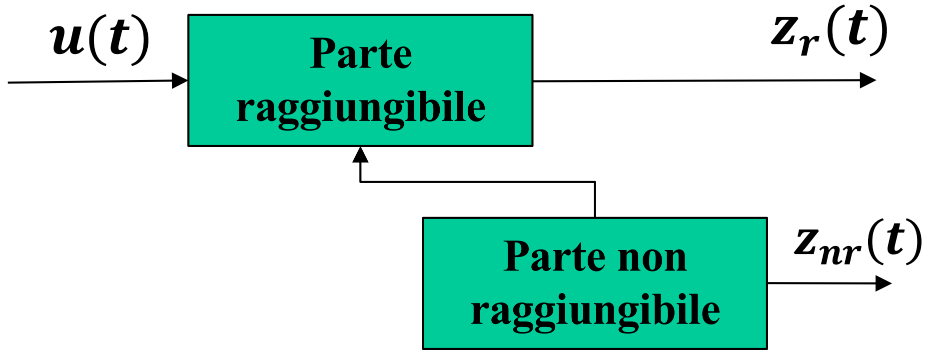
Forma canonica di raggiungibilità di Kalman

Detta n_r la dimensione del sottospazio di raggiungibilità e $n_{nr} = n - n_r$, esiste una matrice di cambiamento di stato T tale che, indicando con $z(t) = Tx(t)$, la rappresentazione i-s-u del sistema dinamico risulta

$$\dot{z}(t) = \begin{bmatrix} \dot{z}_r(t) \\ \dot{z}_{nr}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_a & \tilde{A}_{ab} \\ 0 & \tilde{A}_b \end{bmatrix} z(t) + \begin{bmatrix} B_a \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

con $\tilde{A}_a \in R^{n_r \times n_r}$, $\tilde{A}_b \in R^{n_{nr} \times n_{nr}}$, $\tilde{A}_{ab} \in R^{n_r \times n_{nr}}$, $B_a \in R^{n_r \times 1}$.

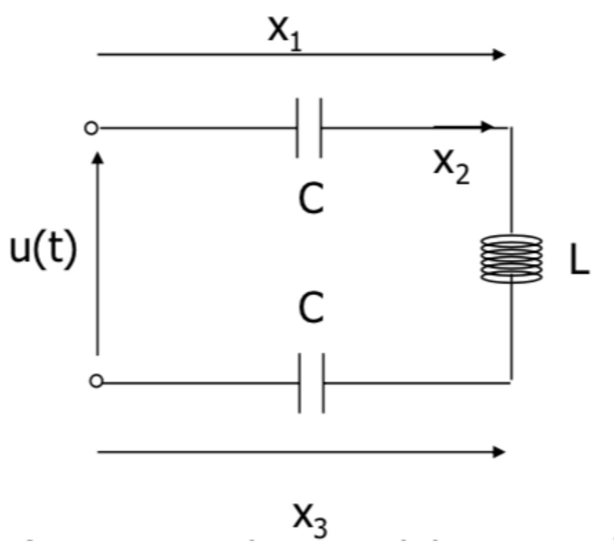
Gli stati raggiungibili del sistema in z(t) saranno del tipo: $z(t) = \begin{bmatrix} z_r(t) \\ 0 \end{bmatrix}$.



- La matrice di cambiamento di stato T è definita come

$$T = [base(M_r) \quad base(M_r)^{\perp}]^{-1}$$

Raggiungibilità: esempio



Siano:

$x_1(t)$: tensione ai capi del condensatore superiore

$x_2(t)$: corrente che circola nell'induttore

$x_3(t)$: tensione ai capi del condensatore inferiore

$u(t)$: tensione di alimentazione

- Il sistema dinamico che modella il circuito in figura risulta

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

con $A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{C} & 0 \\ -\frac{1}{L} & 0 & -\frac{1}{L} \\ 0 & \frac{1}{C} & 0 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{L} \\ 0 \end{pmatrix}$

Raggiungibilità: esempio

- La matrice di raggiungibilità del sistema risulta:

$$M_r = \begin{pmatrix} 0 & 1/LC & 0 \\ 1/L & 0 & 2/L^2C \\ 0 & 1/LC & 0 \end{pmatrix}$$

- Il rango di M_r è pari a 2 e l'insieme degli stati raggiungibili risulta:

$$S_r = span\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1/L \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/LC \\ 0 \\ 1/LC \end{pmatrix}\right\} = span\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

- Il sistema non risulta totalmente raggiungibile poiché non è possibile, mediante l'ingresso in tensione, attribuire valori diversi di tensione ai capi dei 2 condensatore

Raggiungibilità: esempio

- Volendo portare il sistema in Forma canonica di raggiungibilità di Kalman, una possibile matrice di cambiamento di base risulta:

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}$$

da cui segue che

$$\tilde{\mathrm{A}} = TA\tilde{T} = \begin{pmatrix} 0 & -2/L & 0 \\ 1/C & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \tilde{B} = T\,B = \begin{pmatrix} 1/L \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- In base alla matrice di cambiamento di base, è possibile notare che gli stati raggiungibili sono del tipo $z(t) = [z_1(t) \quad z_2(t) \quad 0]^T$ con
  - $z_1(t) = x_2(t)$: corrente nell'induttore
  - $z_2(t) = 0.5x_1(t) + 0.5x_3(t)$: somma delle tensioni ai capi dei due condensatori.

Raggiungibilità: relazione i-u

- Consideriamo un sistema LTI-TC non completamente raggiungibili

- Al fine del calcolo della risposta impulsiva di tale sistema può essere conveniente partire dalla forma canonica di raggiungibilità di Kalman:

$$W(s) = \begin{bmatrix} C_a & C_b \end{bmatrix} \left(sI - \begin{bmatrix} \tilde{A}_a & \tilde{A}_{ab} \\ 0 & \tilde{A}_b \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} B_a \\ 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} C_a & C_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \left(sI - \tilde{A}_a\right)^{-1} & xxx \\ 0 & \left(sI - \tilde{A}_b\right)^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_a \\ 0 \end{bmatrix} =$$

$$= C_a\left(sI - \tilde{A}_a\right)^{-1} B_a$$

- La $W(s)$ presenta solo i modi di evoluzione raggiungibili in quanto sono gli unici eccitabili dall'ingresso.

- Se lo stato iniziale del sistema presenta componenti non nulle rispetto ai modi non raggiungibili, questi potranno comparire in uscita. Per questo motivo è importante che tali modi siano almeno convergenti.

Forme canoniche di controllo

- Consideriamo un sistema LTI SISO completamente raggiungibile. In tal caso la matrice di raggiungibilità del sistema $M_r = [B \;\; AB \;\; A^2B \;\; \dots \;\; A^{n-1}B]$ è di rango pieno e quindi invertibile.

- Utilizzando come matrice di cambiamento di base l'inverso della matrice di raggiungibilità $T = M_r^{-1}$, è possibile definire la ***Prima Forma Canonica di Controllo***

$$\dot{z}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & & & \vdots & -a_1 \\ 0 & 1 & & & \vdots & \vdots \\ \vdots & 0 & 1 & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & & & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix} z(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

con a_i, $i = 0,1,\dots,n-1$, i coefficienti del polinomio caratteristico di A:

$$p(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0$$

Forme canoniche di controllo

[Dimostrazione]

- Utilizzando come matrice di cambiamento di base $T = M_r^{-1}$
  - $\widetilde{\mathrm{A}} = T\,AT^{-1} = M_r^{-1}AM_r$
  - $\widetilde{\mathrm{B}} = TB = M_r^{-1}B$
- Considerano la relazione sulla matrice di stato, avremo $M_r.\,\tilde{A} = A\,M_r$, da cui

$$[B \;\; AB \;\; A^2B \;\; \dots \;\; A^{n-1}B]\tilde{A} = A[B \;\; AB \;\; A^2B \;\; \dots \;\; A^{n-1}B]$$

- Indicando con $\tilde{a}_{i,j}$ gli elementi di $\tilde{A}$ e riscrivendo la relazione per singole colonne

$$\tilde{a}_{1,1}B + \tilde{a}_{2,1}AB + \cdots + \tilde{a}_{n,1}A^{n-1}B = AB \quad \to \quad \tilde{a}_{2,1} = 1, \quad a_{i,1} = 0, i \neq 2$$

$$\tilde{a}_{1,2}B + \tilde{a}_{2,2}AB + \cdots + \tilde{a}_{n,2}A^{n-1}B = A^2B \quad \to \quad \tilde{a}_{3,2} = 1, \quad a_{i,2} = 0, i \neq 3$$

$$\vdots$$

$$\tilde{a}_{1,n-1}B + \tilde{a}_{2,n-1}AB + \cdots + \tilde{a}_{n,n-1}A^{n-1}B = A^{n-1}B \to \tilde{a}_{n,n-1} = 1, \quad a_{i,n-1} = 0, \quad i \neq n$$

[Dimostrazione]con't

- Per *n-esima* colonna, la relazione risulta:

$$\tilde{a}_{1,n}B + \tilde{a}_{2,n}AB + \cdots + \tilde{a}_{n,n}A^{n-1}B = A^nB$$

- Per il teorema di Cayley-Hamilton, A^n è soluzione del suo polinomio caratteristico

$$A^n = -a_0 - a_1A - a_2A^2 - \cdots - a_{n-1}A^{n-1}$$

da cui

$$\tilde{a}_{1,n}B + \tilde{a}_{2,n}AB + \cdots + \tilde{a}_{n,n}A^{n-1}B = -a_0B - a_1AB - a_2A^2B - \cdots - a_{n-1}A^{n-1}B$$

$$\downarrow$$

$$\begin{cases} \tilde{a}_{1,n} = -a_0 \\ \tilde{a}_{2,n} = -a_1 \\ \quad\vdots \\ \tilde{a}_{n,n} = -a_{n-1} \end{cases}$$

Per il calcolo di $\widetilde{\mathrm{B}}$ si può procedere in maniera analoga.

- Consideriamo nuovamente un sistema LTI SISO completamente raggiungibile. Utilizzando come matrice di cambiamento di base

$$T = \left(M_r \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & 1 \\ a_2 & & & 1 & 0 \\ \vdots & & ⋰ & 0 & 0 \\ a_{n-1} & ⋰ & 0 & & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & & 0 \end{bmatrix} \right)^{-1}$$

- è possibile definire la ***Seconda Forma Canonica di Controllo***

$$\dot{z}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 1 & \vdots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & & \cdots & & -a_{n-1} \end{bmatrix} z(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

Osservabilità e ricostruibilità

- L'analisi di raggiungibilità e controllabilità mette in luce il ruolo dell'ingresso $u(\cdot)$ sulla possibilità di modificare a piacere lo stato di un sistema dinamico.
- **L'analisi di osservabilità e ricostruibilità mette in luce il ruolo dell'uscita $\boldsymbol{y}(\cdot)$ nella stima dello stato del sistema**. In particolare, tali concetti sono legati alla possibilità di osservare l'evoluzione dello stato del sistema attraverso la sola conoscenza dell'uscita e, quindi, alla possibilità di **stimare** lo stato del sistema.
- **Osservabilità e ricostruibilità sono concetti legati alla possibilità di controllare il sistema mediante la retroazione dell'uscita**, sempre disponibile, anziché mediante la retroazione dello stato, non sempre disponibile.
- Dopo una descrizione generale dei concetti di osservabilità e ricostruibilità, ci soffermeremo sull'analisi di queste proprietà strutturali per il caso di sistemi LTI-tempo continuo

Osservabilità e ricostruibilità

- **Il problema di osservabilità** consiste nel determinare lo stato iniziale $x_0 = x(t_0)$ mediante osservazioni degli ingressi $u(t)$ e delle uscite $y(t)$ del sistema considerato per $t > t_0$

- **Il problema di ricostruibilità** consiste nel determinare lo stato finale $x_1 = x(t_1)$ mediante osservazioni degli ingressi $u(t)$ e delle uscite $y(t)$ del sistema considerato per $t < t_1$

- **Per i sistemi LTI-TC**, analogamente al caso di raggiungibilità e controllabilità, i concetti di osservabilità e rilevabilità convergono e gli **insiemi degli stati non osservabili coincide con quello degli stati non ricostruibili**.

- La nostra trattazione si soffermerà sul problema di **osservabilità per sistemi LTI**

Indistinguibilità

- Un concetto fondamentale per lo sviluppo dell'analisi dell'osservabilità e della ricostruibilità è quello dell'indistinguibilità tra stati.

Definizione [stati indistinguibili nel futuro]

Due stati x_1 e x_2 sono indistinguibili nel futuro nell'intervallo $[t_0\ ,t_1]$ se per **tutte** le funzioni di ingresso ammissibili $u(\cdot)\ \in\ \Omega$ si ha:

$$\eta\left(t,\varphi\big(t,x_1,u(\cdot)\big),u(\cdot)\right)=\eta\left(t,\varphi\big(t,x_2,u(\cdot)\big),u(\cdot)\right)$$

- Due stati sono indistinguibili nel futuro quando, imponendo tali stati come condizioni iniziali del sistema, qualunque sia l'ingresso $u(\cdot)$, non c'è la possibilità di differenziare le due uscite.

Osservabilità

- L'analisi di osservabilità e ricostruibilità verrà specializzata per la classe dei sistemi LTI. Siccome sia il problema dell'osservabilità che quello della ricostruibilità consistono nella determinazione dello stato dall'uscita, non si perde di generalità nel considerare sistemi LTI puramente dinamici, cioè caratterizzati da:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad x(t_0) = x_0$$
$$y(t) = Cx(t)$$

- Infatti il contenuto informativo del termine $Du(t)$ sull'equazione di uscita è nullo. Esso infatti risulta un termine additivo che, data la conoscenza dell'ingresso, potrebbe essere anche sottratto se necessario.

- **Per sistemi LTI, l'indistinguibilità tra due stati del sistema è legata solo alla risposta in evoluzione libera** del sistema stesso. Questo perché la parte forzata della risposta coincide nei due casi.

- Dato un sistema LTI, **uno stato $\tilde{\boldsymbol{x}} \neq \mathbf{0}$ del sistema si dice non osservabile se**, qualunque sia $\tilde{t} > 0$ finito, detto $\tilde{y}_l(t)$, $t \geq 0$, la risposta in evoluzione libera dell'uscita generato da $\tilde{x}$, risulta

$$\tilde{y}_l(t) = Ce^{At}\tilde{x} = 0, \qquad 0 \leq t \leq \tilde{t}.$$

- La proprietà di osservabilità risulta un caso particolare del problema dell'indistinguibilità nel futuro: uno stato $\tilde{x}$ di un sistema LTI si dice **non osservabile nell'intervallo** se è indistinguibile nel futuro dallo stato 0.

- **Un sistema privo di stati non osservabili si dice completamente osservabile**.

- Si noti che l'osservabilità dipende solo dalla coppia di matrici (A, C).

Osservabilità

- Un sistema LTI (ovvero la coppia (A, C)) è completamente osservabile se e solo se il rango della **matrice di osservabilità**

$$M_o = \left[C^T \quad A^T C^T \quad {A^T}^2 C^T \quad \ldots \quad {A^T}^{n-1} C^T\right]^T \in \mathbb{R}^{pn \times n}$$

  è pari a n.

- Se il sistema ha una sola uscita ($p = 1$), la matrice M_o è quadrata e la condizione di sopra diventa $\det(M_o) \neq 0$.

- Nel caso in cui il sistema non sia completamente osservabile, **il sottospazio degli stati non osservabili è dato dal kernel della matrice di osservabilità**

- Gli stati osservabili sono quelli che hanno componente nulla rispetto al sottospazio di non osservabilità

- Nel caso in cui il sistema non sia completamente osservabile, è possibili effettuare un cambiamento di base che evidenzia gli stati osservabili e quelli non osservabili

Forma canonica di osservabilità di Kalman

- Dato un sistema LTI, esso può essere trasformato, mediante un opportuno, non univoco, cambio di variabili di stato $\hat{x} = T_0 x$, nella forma

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}(t) &= \hat{A}\,\hat{x}(t) + \hat{B}u(t) \\ y(t) &= \hat{C}\hat{x}(t) \end{aligned},$$

dove, detto $n_o = rank\left(\begin{bmatrix} \hat{C}^T & \hat{A}^T\hat{C}^T & {\hat{A}^T}^2\hat{C}^T & \dots & {\hat{A}^T}^{n-1}\hat{C}^T \end{bmatrix}\right)$,

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} \hat{A}_a & 0 \\ \hat{A}_{ba} & \hat{A}_b \end{bmatrix}, \quad \hat{A}_a \in \mathbb{R}^{n_o \times n_o}$$

$$\hat{C} = [\hat{C}_a \quad 0], \qquad \hat{C}_a \in \mathbb{R}^{p \times n_o}$$

- Tale rappresentazione è detta **Forma canonica di osservabilità di Kalman**

Forma canonica di osservabilità di Kalman

- La matrice T_o^{-1} si ottiene selezionando $n - n_o$ colonne indipendenti ζ_i da M_o, tali che $M_o \zeta_i = 0$ (kernel della matrice M_o), e anteponendo n_o colonne arbitrarie linearmente indipendenti dalle prime (una possible scelta è data da una base del complemento ortogonale del kernel di M_o)

- Partizionando il vettore $\hat{x}$, si ottiene (supponendo $u(t) = 0$) il sistema decomposto nella forma

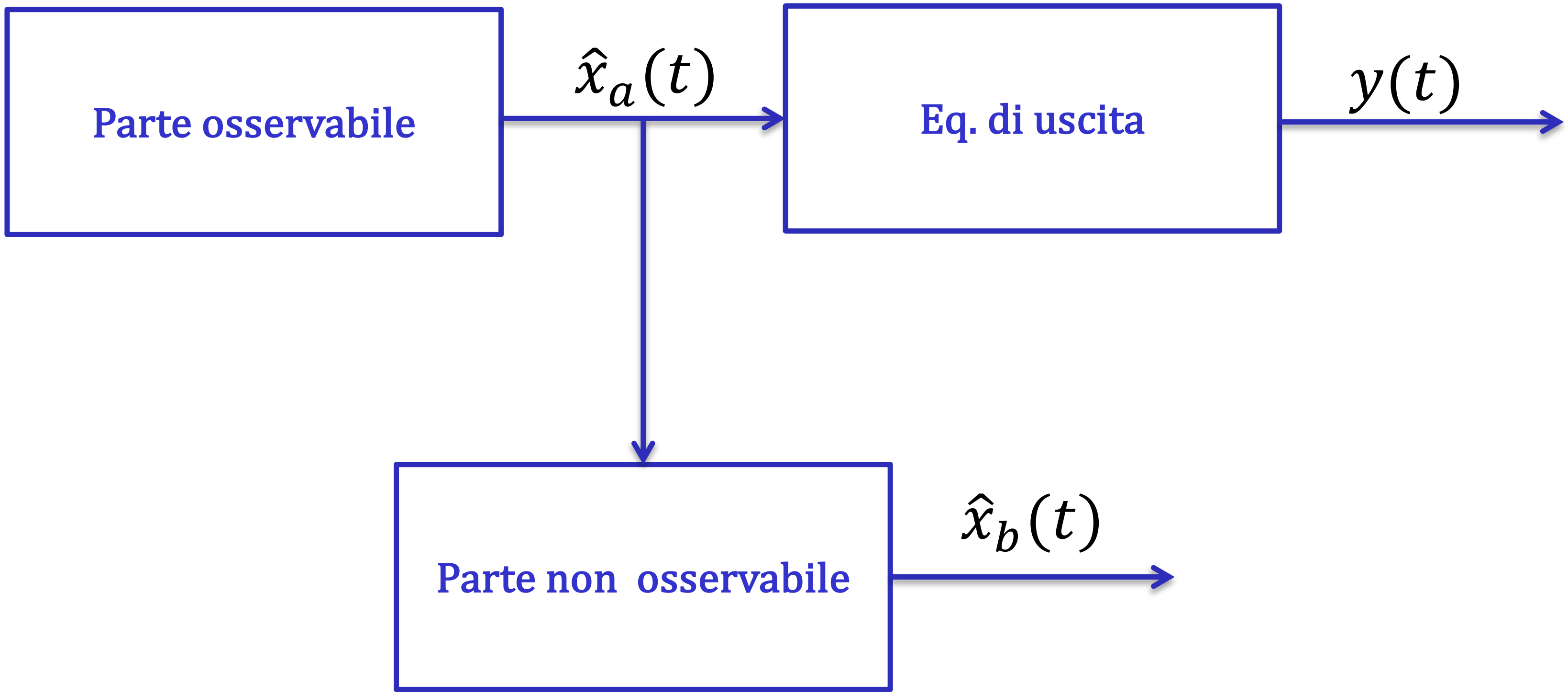
$$
\begin{aligned}
\dot{\hat{x}}_a(t) &= \hat{A}_a \hat{x}_a(t) \\
\dot{\hat{x}}_b(t) &= \hat{A}_{ba} \hat{x}_a(t) + \hat{A}_b \hat{x}_b(t) \\
y(t) &= \hat{C}_a \hat{x}_a(t)
\end{aligned}
$$

- Da questa forma si evince che i movimenti della **parte non osservabile** del sistema, ossia le equazioni di $\hat{x}_b(t)$, non influenzano l'uscita

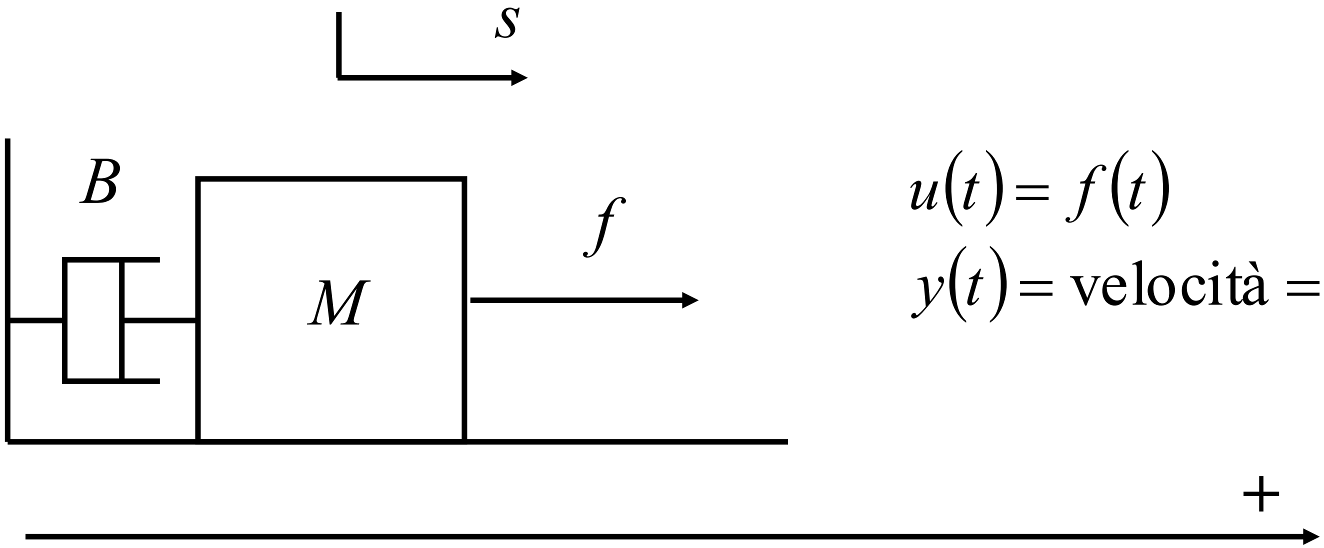
- Viceversa, le equazioni di $\hat{x}_a(t)$ rappresentano la **parte osservabile del sistema**

- **Gli stati osservabili sono quelli nella forma** $[\hat{x}_a(t) \;\; 0]^T$

- Rappresentiamo mediante un diagramma a blocchi il sistema decomposto



Esempio di sistema non completamente osservabile



$$u(t) = f(t)$$
$$y(t) = \text{velocità} = \dot{s}$$

$$\boldsymbol{M\ddot{s} = -B\dot{s} + f}$$

Osservabilità: decomposizione

- Scegliendo posizione e velocità come variabili di stato, otteniamo la ISU

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{B}{M} \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \end{pmatrix} u(t) \qquad x(t) = \begin{pmatrix} s(t) \\ \dot{s}(t) \end{pmatrix}$$

$$y(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} x(t)$$

- Per tale sistema, la matrice di osservabilità risulta

$$M_o = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -B/M \end{bmatrix} \rightarrow rank(M_0) = 1$$

- L'esame di un qualunque transitorio dell'uscita non permette di ricavare informazioni circa il valore della posizione $x_1(t_0)$ all'istante iniziale.

- Se si scegliesse come uscita la posizione, sarebbe invece possibile ricavare l'intero stato iniziale a partire dal movimento dell'uscita.

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad ; \quad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad ; \quad \boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$