第 2 回 QE 分科会

umedaikiti

2014 年 11 月 6 日

1　準備

QE の対象となる論理式は同値な変形を繰り返し、冠頭標準形にする。冠頭標準形とは

$$Q_k x_k \dots Q_1 x_1 \Phi(x_1, \dots, x_n) \tag{1}$$

$(Q_i (i = 1, \dots, k)$ は限量子 $(\forall, \exists$ のいずれか$)$、$\Phi(x_1, \dots, x_n)$ は限量子を含まない$)$ の形の論理式である。

以下の議論では QE の対象となる論理式に現れる不等式、等式は全て

$$f(x_1, .., x_n)\ \rho\ 0$$

の形と仮定する (ρ は $=, \neq, \leq, <, \geq, >$ の何れか)。この仮定をおいても一般性は失われない (左辺に移項すればいいだけ)。

また、$\Phi(x_1, \dots, x_n)$ に現れるすべての多項式の集合を F_n とする。

2　$\mathbb{R}^n$ の分割

n 変数多項式の集合 F_n に対して、$\mathbb{R}^n$ を分割することを考えていくが、その前に少し定義する。

$F = \{f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_r(x_1, \dots, x_n)\}$ を実数係数多項式の有限集合とする。

定義 2.1 (符号)
実数 α に対して、

$$\mathrm{sign}(\alpha) = \begin{cases} + & (\alpha > 0) \\ 0 & (\alpha = 0) \\ - & (\alpha < 0) \end{cases}$$

と定める。

　また、$F = \{f_1, \ldots, f_r\}$ と $\alpha \in \mathbb{R}^n$ に対し、

$$\mathrm{sign}_\alpha(F) = (\mathrm{sign}(f_1(\alpha)), \ldots, \mathrm{sign}(f_r(\alpha))) \in \{+, 0, -\}^r$$

と定める。

定義 2.2 (F-符号不変)

$C \subset \mathbb{R}^n$ が F-符号不変であるとは任意の $\alpha, \beta \in C$ に対して、$\mathrm{sign}_\alpha(F) = \mathrm{sign}_\beta(F)$ が成り立つことを言う。

F_n-符号不変である $C \subset \mathbb{R}^n$ に含まれる任意の点 $\alpha \in C$ で (1) の $\Phi(x_1, \ldots, x_n)$ の真偽は変わらない。

例 2.1 (1 変数の符号不変な集合の例)

$F_1 = \{x^2 - x\}$ による分割を考える。

　$x^2 - x$ の (実) 根は $x = 0, 1$ なので

$$\mathbb{R} = (-\infty, 0) \cup \{0\} \cup (0, 1) \cup \{1\} \cup (1, \infty)$$

と分割すると各集合は F_1-符号不変である。つまり、$(-\infty, 0)$ と $(1, \infty)$ では $x^2 - x > 0$、$\{0\}$ と $\{1\}$ では $x^2 - x = 0$、$(0, 1)$ では $x^2 - x < 0$ である。

この例からも明らかなように 1 変数多項式の有限集合 F_1 に対して、F_1-符号不変になるように $\mathbb{R}$ を分割するには、F_1 に含まれる多項式の相異なる実根 $\alpha_1 < \cdots < \alpha_m$ を全て求め、

$$\mathbb{R} = (-\infty, \alpha_1) \cup \{\alpha_1\} \cup (\alpha_1, \alpha_2) \cup \cdots \cup \{\alpha_m\} \cup (\alpha_m, \infty)$$

と分割すれば良い。

例 2.2 (2 変数の符号不変な集合の例)

$F_2 = \{x^2 - 2x + y^2\}$ の符号を不変にする分割を考える。$f(x, y) = x^2 - 2x + y^2$ とする。

　$x^2 - 2x + y^2$ を y の多項式とみなすと $x^2 - 2x$ の符号によって y の実根の数は異なる。つまり、y の実根の数は

- $x^2 - 2x > 0$、つまり $x \in (-\infty, 0) \cup (2, \infty)$ のとき 0 個
- $x^2 - 2x = 0$、つまり $x \in \{0\} \cup \{2\}$ のとき 1 個 ($y = 0$)
- $x^2 - 2x < 0$、つまり $x \in (0, 2)$ のとき 2 個 ($y = \pm\sqrt{2x - x^2}$)

である。

こうして x 軸方向の分割

$$\mathbb{R} = (-\infty, 0) \cup \{0\} \cup (0, 2) \cup \{2\} \cup (2, \infty) \tag{2}$$

ができる。このうち一つの連結集合を I をとり、(x, y) が $I \times \mathbb{R}$ を動くとして、$f(x, y)$ の符号が一定になるように $I \times \mathbb{R}$ を分割していく。

$I = (-\infty, 0)$ のとき、y の実根は 0 個なので $f(x, y)$ の符号は y の値によらず一定 $(+)$ である。

$I = \{0\}$ のとき、y で実根は 1 個 $(y = 0)$。

$$\mathrm{sign}(f(x,y)) = \begin{cases} + & (x,y) \in I \times (-\infty, 0) \text{ のとき} \\ 0 & (x,y) \in I \times \{0\} \text{ のとき} \\ + & (x,y) \in I \times (0, \infty) \text{ のとき} \end{cases}$$

$I = (0, 2)$ のとき

$$\mathrm{sign}(f(x,y)) = \begin{cases} + & (x,y) \in \{(x,y) | x \in I \wedge y < -\sqrt{2x - x^2}\} \text{ のとき} \\ 0 & (x,y) \in \{(x,y) | x \in I \wedge y = -\sqrt{2x - x^2}\} \text{ のとき} \\ - & (x,y) \in \{(x,y) | x \in I \wedge -\sqrt{2x - x^2} < y < \sqrt{2x - x^2}\} \text{ のとき} \\ 0 & (x,y) \in \{(x,y) | x \in I \wedge y = \sqrt{2x - x^2}\} \text{ のとき} \\ + & (x,y) \in \{(x,y) | x \in I \wedge \sqrt{2x - x^2} < y\} \text{ のとき} \end{cases}$$

$I = \{2\}, (2, \infty)$ も同様。

この解き方のポイント

まず、n 変数多項式 (ここでは $n = 2$) のある 1 つの変数 (ここでは y) に着目する。F_n の多項式を y の多項式とみなして、その実根の数が変化する条件を求める。実根の数は係数によって定まるので、その条件は y を含まない $n - 1$ 変数で表される。また、(詳細は後日) 条件は $n - 1$ 変数多項式の符号の条件として表現される。これは $n - 1$ 変数の分割の問題である (ここに現れる $n - 1$ 変数多項式の集合を F_{n-1} とおく)。これを繰り返すことで 1 変数にまで落とす。1 変数多項式の実根を全て求め (その方法も後日)、$\mathbb{R}$ を実根によって分割する。

3 CAD と QE との関係

例 3.1 (例 2.2 の続き)

$\exists y(x^2 - 2x + y^2 \leq 0)$ に対する QE を考える。

例 2.2 の分割 C のうち、$(x, y) \in C \Rightarrow f(x, y) \leq 0$ となる C は

- $\{(0, 0)\}$
- $\{(x, y)|0 < x < 2 \land y = \sqrt{2x - x^2}\}$
- $\{(x, y)|0 < x < 2 \land -\sqrt{2x - x^2} < y < \sqrt{2x - x^2}\}$
- $\{(x, y)|0 < x < 2 \land y = -\sqrt{2x - x^2}\}$
- $\{(2, 0)\}$

の 5 つ。

ある x に対して $\exists y(x^2 - 2x + y^2 \leq 0)$ が成り立つかは、式 (2) の各区間 I ごとに調べればよく、$C \subset I \times \mathbb{R}$ となる分割 C で上の $(x, y) \in C \Rightarrow f(x, y) \leq 0$ という条件を満たすものが存在するかを確認すればいい。

よって、

$$\exists y(x^2 - 2x + y^2 \leq 0 \Leftrightarrow x \in \{0\} \cup (0, 2) \cup \{2\} = [0, 2]$$