第1回QE分科会

umedaikiti

平成26 年10 月29 日

1　QEとは

QE(Quantifier Elimination、限量記号消去) とは限量記号 (存在記号、全称記号) を含む一階述語論理式に対し、同値な変形を行い、全称記号や存在記号を除去することである。この分科会では特に、実数係数多項式の等式、不等式からなる論理式に対するQEを扱う。

限量記号を除去すると束縛変数も消えて、自由変数が残る。自由変数を含まない時は真偽の判定問題になる。実数係数多項式の不等式に対するQEのアルゴリズムとしてはCAD(Cylindrical Algebraic Decomposition) 法がある。

この分科会ではCAD法の理論を理解することが目的である。

2　QEでできること

2.1　東ロボくんの話

国立情報学研究所のプロジェクト「ロボットは東大に入れるか」(`http://21robot.org/`) はその名の通り、人工知能に東大の入試問題を解かせようというプロジェクトで、数学の問題を解かせる際にQEを用いている。数学チームのページ (`http://21robot.org/research_activities/math/`) も参照。2013年に代ゼミの東大模試の数学で (問題テキストの言語処理の一部で人による介入があったが) 文系4問中2問完答、理系6問中2問完答、という結果を残した (富士通のプレスリリース `http://pr.fujitsu.com/jp/news/2013/11/25-1.html`)。

2.2　解ける問題の例

例 2.1

方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ に解が存在する条件を考える。これは論理式にすると

$$\exists x(ax^2 + bx + c = 0)$$

である。同値変形によって∃を除去すると

$$(a = 0 \wedge b = 0 \wedge c = 0) \vee (a = 0 \wedge b \neq 0) \vee (a \neq 0 \wedge b^2 - 4ac \geq 0)$$

この問題を Redlog (`http://www.redlog.eu/`) で解いてみる。

```
load_package redlog;
rlset R;
phi := ex({x}, a*x^2+b*x+c=0);
rlqe phi;
```

ちなみに rlqe の代わりに rlcad を使うと CAD 法による QE を行う。

表 1: 論理記号と Reglog の記法の対応

$\exists$	ex({ 変数 }, 式)
$\forall$	all({ 変数 }, 式)
$\neg$	not 式
$\wedge$	式 and 式
$\vee$	式 or 式
$\Rightarrow$	式 impl 式
$\Leftrightarrow$	式 equiv 式

例 2.2 ([1] P30)
実数 x, y に対して $3x^2 - 4xy + 6y^2 - 8x - 4y + 3 = 0$ が成り立つとき、x, y の取りうる範囲を求めよ。

x の取りうる範囲とは、x がその範囲内にあるならばある y が存在して等式を満たすことができ、またその逆も成り立つような範囲である。よって、この問題は QE によって解くことができる。

```
rlqe ex({y}, 3*x^2-4*x*y+6*y^2-8*x-4*y+3=0);
```

によって、存在記号 (と y) が取り除かれた x の 2 次不等式 $x^2 - 4x + 1 \leq 0$ が得られる。この不等式を解くと x の範囲が求められる。

y の範囲は

```
rlqe ex({x}, 3*x^2-4*x*y+6*y^2-8*x-4*y+3=0);
```

とすればよい。

例 2.3 (有理関数)
今まで実数係数多項式に限って話をしてきたが、不等式を適切に変形することで有理関数も扱うことができる。

例として、f と g を実数係数の多項式として

$$\frac{f}{g} > 0 \wedge g \neq 0$$

という、有理関数を含んだ不等式を考える。

これを同値変形すると

$$(g > 0 \wedge f > 0) \vee (g < 0 \wedge f < 0)$$

となり、多項式として扱うことができる。

ここで例に挙げた $>$ 以外の等号、不等号に対しても同じように変形できる。

例 2.4 (最適化問題)

$$\begin{gathered} f_1(x_1, \ldots, x_m)\rho_1 0 \\ f_2(x_1, \ldots, x_m)\rho_2 0 \\ \vdots \\ f_r(x_1, \ldots, x_m)\rho_r 0 \end{gathered}$$

という制約のもと、$g(x_1, \ldots, x_m)$ を最大化 (最小化) する問題を考える。

この問題を解くには、新たな変数 z を導入して

$$\exists x_1 \ldots \exists x_m (f_1(x_1, \ldots, x_m)\rho_1 0 \wedge \cdots \wedge f_r(x_1, \ldots, x_m)\rho_r 0 \wedge z - g(x_1, \ldots, x_m) = 0)$$

に対する QE を実行すれば、z の範囲が求められるので、解くことができる。

3　次回予告

次回は例題を通して CAD 法の概要について見ていく。

参考文献

[1] 穴井 宏和, 横山 和弘,『QE の計算アルゴリズムとその応用　数式処理による最適化』東京大学出版会, 2011, ISBN978-4-13-061406-1.