第1回QE分科会

umedaikiti

平成 26 年 10 月 31 日

1 QEとは

QE(Quantifier Elimination、限量記号消去)とは限量記号(存在記号、全称記号)を含む一階述語論理式に対し、同値な変形を行い、全称記号や存在記号を除去することである。この分科会では特に、実数係数多項式の等式、不等式からなる論理式に対するQEを扱う。

限量記号を除去すると束縛変数も消えて、自由変数が残る。自由変数を含まない時は真偽の判定問題になる。実数係数多項式の不等式に対する QE のアルゴリズムとしては CAD(Cylindrical Algebraic Decomposition) 法がある。

この分科会ではCAD法の理論を理解することが目的である。

2 QEでできること

2.1 東ロボくんの話

国立情報学研究所のプロジェクト「ロボットは東大に入れるか」(http://21robot.org/) はその名の通り、人工知能に東大の入試問題を解かせようというプロジェクトで、数学の問題を解かせる際に QE を用いている。数学チームのページ (http://21robot.org/research_activities/math/) も参照。2013年に代ゼミの東大模試の数学で (問題テキストの言語処理の一部で人による介入があったが) 文系 4 問中 2 問完答、理系 6 問中 2 問完答、という結果を残した (富士通のプレスリリースhttp://pr.fujitsu.com/jp/news/2013/11/25-1.html)。

2.2 解ける問題の例

例 2.1

方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ に解が存在する条件を考える。これは論理式にすると

$$\exists x(ax^2 + bx + c = 0)$$

である。同値変形によって∃を除去すると

$$(a = 0 \land b = 0 \land c = 0) \lor (a = 0 \land b \neq 0) \lor (a \neq 0 \land b^2 - 4ac \geq 0)$$

この問題を Redlog (http://www.redlog.eu/) で解いてみる。

```
load_package redlog;
rlset R;
phi := ex({x}, a*x^2+b*x+c=0);
rlqe phi;
```

ちなみに rlge の代わりに rlcad を使うと CAD 法による QE を行う。

表 1: 論理記号と Redlog の記法の対応

\exists	ex({ 変数 }, 式)
\forall	all({ 変数 }, 式)
_	not 式
\wedge	式 and 式
V	式or式
\Rightarrow	式 impl 式
\Leftrightarrow	式 equiv 式

例 2.2 ([1] P30)

実数 x, y に対して $3x^2 - 4xy + 6y^2 - 8x - 4y + 3 = 0$ が成り立つとき、x, y の取りうる範囲を求めよ。

xの取りうる範囲とは、xがその範囲内にあるならばあるyが存在して等式を満たすことができ、またその逆も成り立つような範囲である。よって、この問題は QE によって解くことができる。

```
rlqe ex({y}, 3*x^2-4*x*y+6*y^2-8*x-4*y+3=0);
```

によって、存在記号 (と y) が取り除かれた x の 2 次不等式 $x^2-4x+1\leq 0$ が得られる。この不等式を解くと x の範囲が求められる。

yの範囲は

rlqe ex($\{x\}$, $3*x^2-4*x*y+6*y^2-8*x-4*y+3=0$);

とすればよい。

例 2.3 (有理関数)

今まで実数係数多項式に限って話をしてきたが、不等式を適切に変形することで 有理関数も扱うことができる。

例として、fとgを実数係数の多項式として

$$\frac{f}{g} > 0 \land g \neq 0$$

という、有理関数を含んだ不等式を考える。

これを同値変形すると

$$(g > 0 \land f > 0) \lor (g < 0 \land f < 0)$$

となり、多項式として扱うことができる。

ここで例に挙げた > 以外の等号、不等号に対しても同じように変形できる。

例 2.4 (最適化問題)

$$f_1(x_1, \dots, x_m)\rho_1 0$$

$$f_2(x_1, \dots, x_m)\rho_2 0$$

$$\vdots$$

$$f_r(x_1, \dots, x_m)\rho_r 0$$

という制約のもと、 $g(x_1,\ldots,x_m)$ を最大化 (最小化) する問題を考える。 この問題を解くには、新たな変数 z を導入して

$$\exists x_1 \dots \exists x_m (f_1(x_1, \dots, x_m) \rho_1 0 \wedge \dots \wedge f_r(x_1, \dots, x_m) \rho_r 0 \wedge z - g(x_1, \dots, x_m) = 0)$$

に対する QE を実行すれば、z の範囲が求められるので、解くことができる。

3 次回予告

次回は例題を通して CAD 法の概要について見ていく。

参考文献

[1] 穴井 宏和, 横山 和弘, 『QE の計算アルゴリズムとその応用 数式処理による 最適化』東京大学出版会, 2011, ISBN 978-4-13-061406-1.