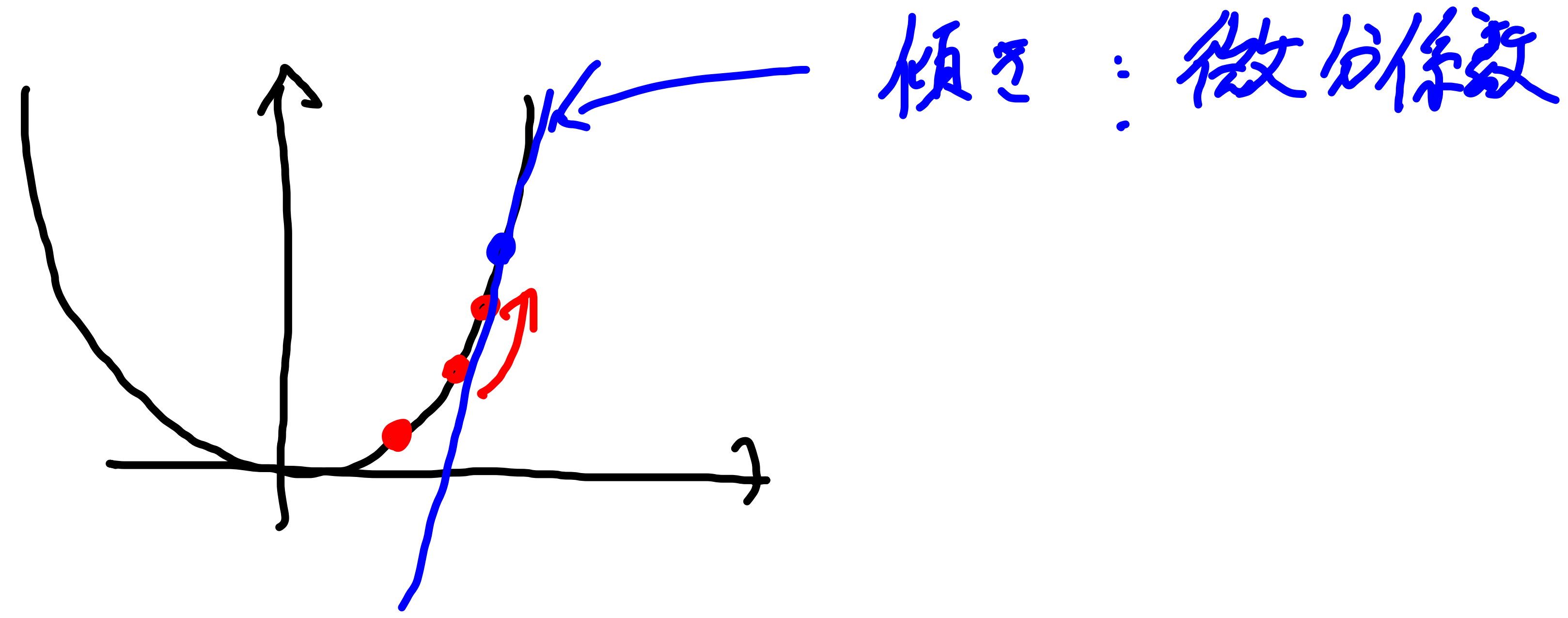
機械学習・統計検定

のための数学

〜 微分積分学の基本定理 〜

復習

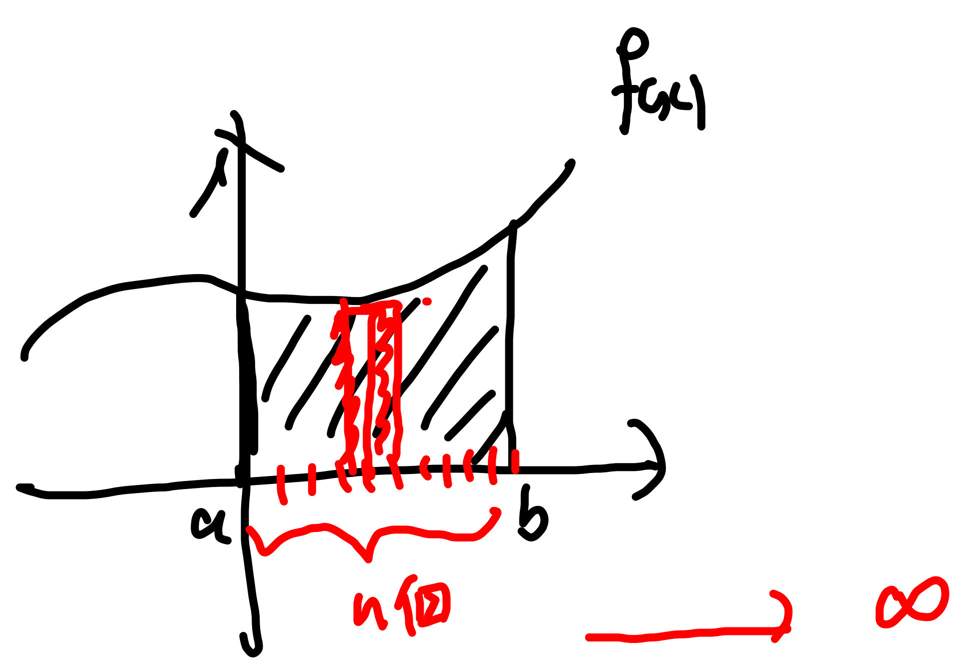
微分：平均変化率の2点を1点に近づけたときの接線の傾き



今のところ
微分と積分は
それほど関係なさそう。

歴史的にも

積分：ある区間の面積を求めるための区分求積法 → Riemann和 の応用



$$\int_a^b f(x)\,dx$$

17c Isaac Newton.

$f(x)$：関数に対して微分すると $f(x)$ になる関数を $F(x)$ とする。

$F(x) = x^3$

$F'(x) = 3x^2 = f(x)$

このとき

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

$f(x)$ と形が変わったが同じもの

が成り立つ。

重要

$F(x)$ は微分したら $f(x)$ となるもの

$f(x)$ を積分したら $F(x)$ となった。

$f(x) \xrightarrow{積分} F(x)$ 逆

$F(x) \xrightarrow{微分} f(x)$

万有引力

脱線話

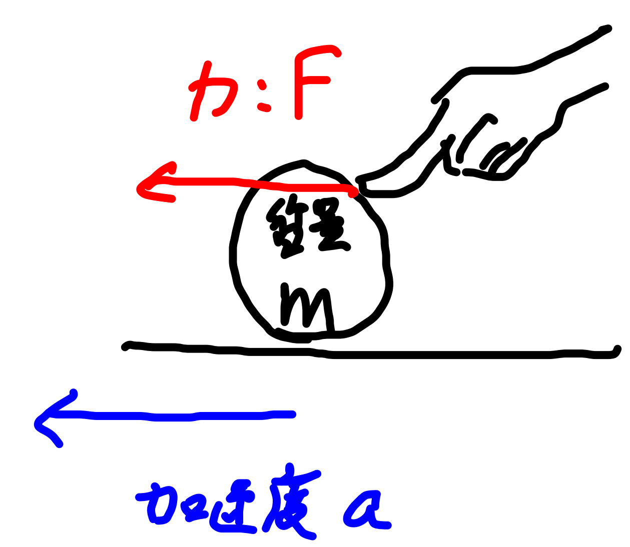
ニュートンの3大法則

第一法則：慣性の法則

静止している物体は静止状態
運動している物体は等速直線運動
を続ける

加速度 0 微

第二法則：運動の法則



力 質量 加速度

$F = ma$

① 力と加速度は正比例

$F = ma$

固定

② 加速度は質量と反比例

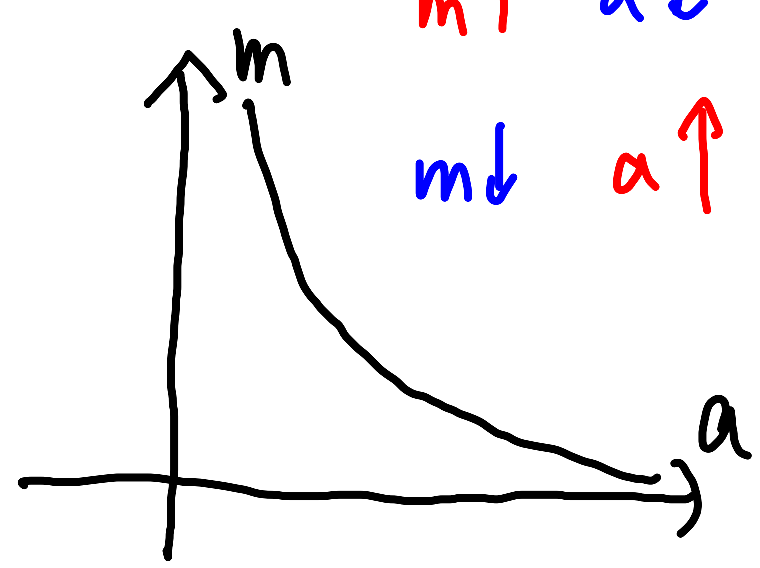
固定

$\dfrac{F}{a} = m$

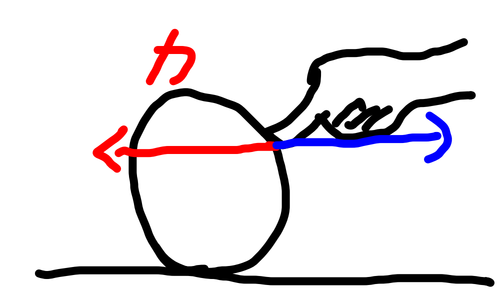
②の説明

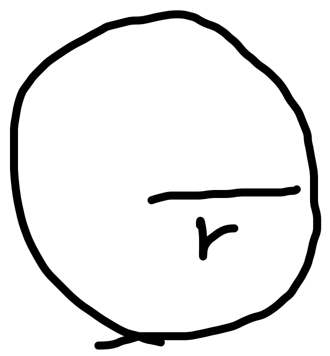
$m\uparrow \quad a\downarrow$

$m\downarrow \quad a\uparrow$



③ 作用・反作用の法則





円周 $2\pi r$

微分　積分

面積 πr^2

$$\int 2\pi r \, dr = \pi r^2 \ (+C)$$

積分定数

(のちほど)

$$(\pi r^2)' = 2\pi r$$

② $+1$

$$\frac{1}{0+1} \, 2\pi r^{1}$$

①

$$= \frac{1}{2} \times 2\pi r^2$$

$$= \pi r^2$$

問題

・以下を確認

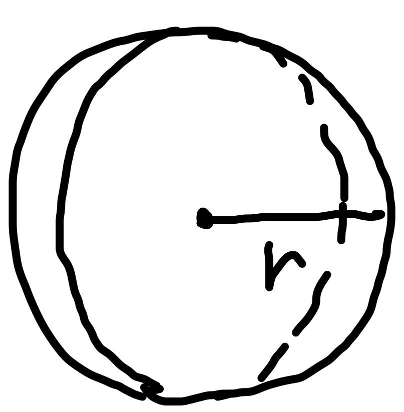
①　②

-1

$$2 \times \pi r^{2}$$

$$= 2 \times \pi r^{2-1}$$

$$= 2\pi r$$



表面積 $4\pi r^2$

微分　積分

体積 $\frac{4}{3}\pi r^3$

球

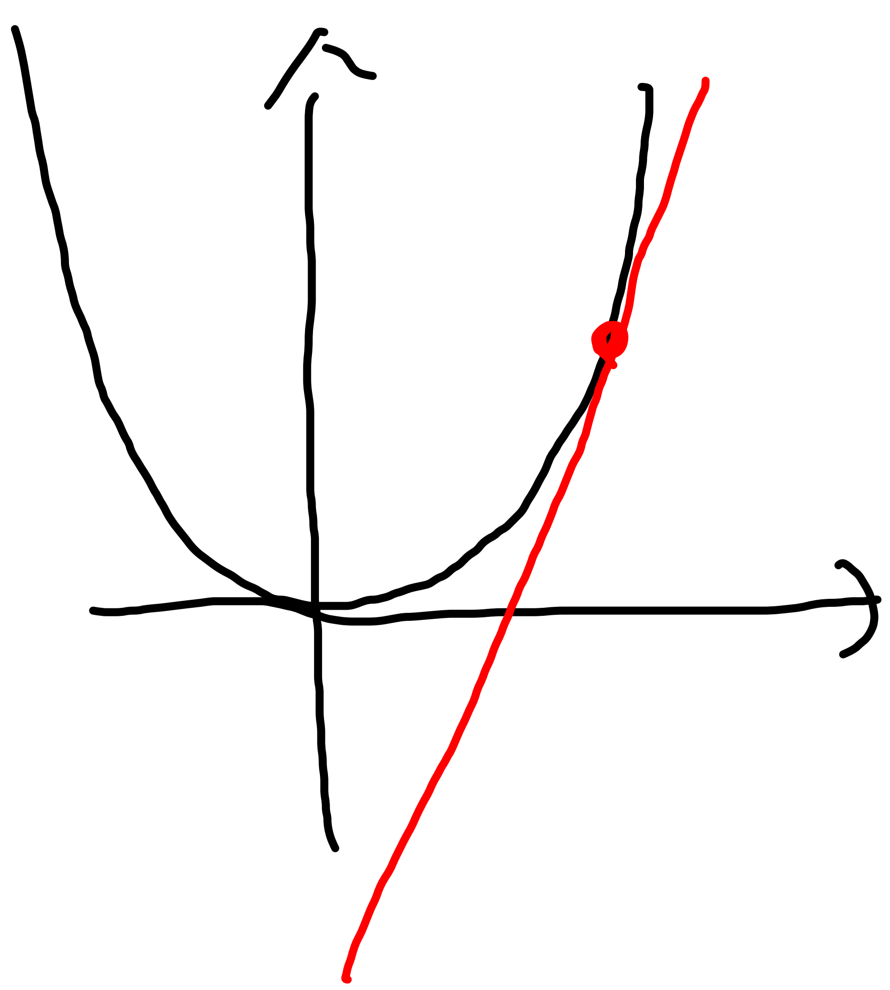
思いを馳せてほしいこと

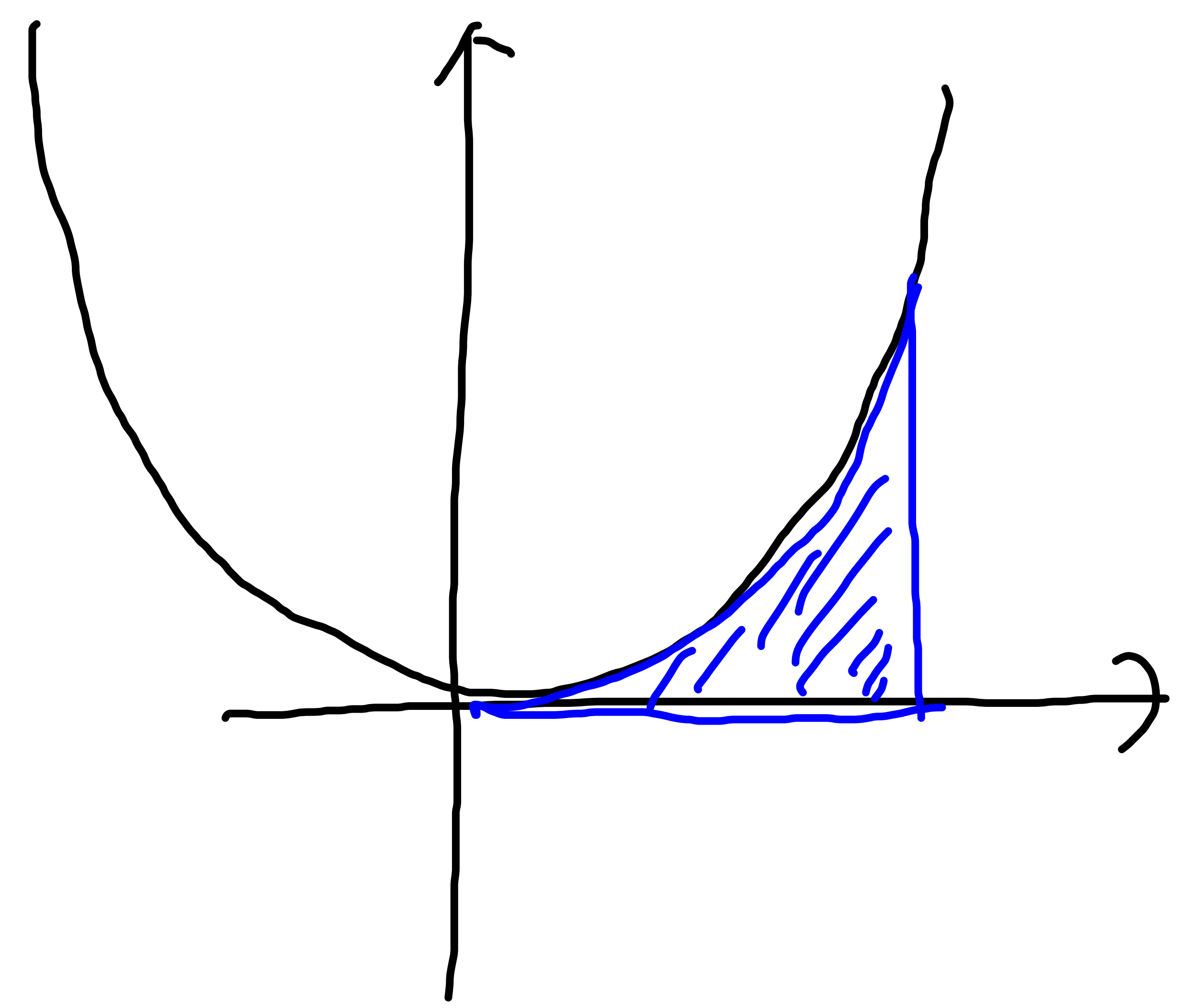
接線の傾きを求める

区間の面積を求める.

関係していた

という事実





今までの流れを思い出せるか、確めてみて下さい。

微分の諸性質（無理して覚えなくてよい）

使わないと必要性がわからない。

f, g : 微分可能な関数

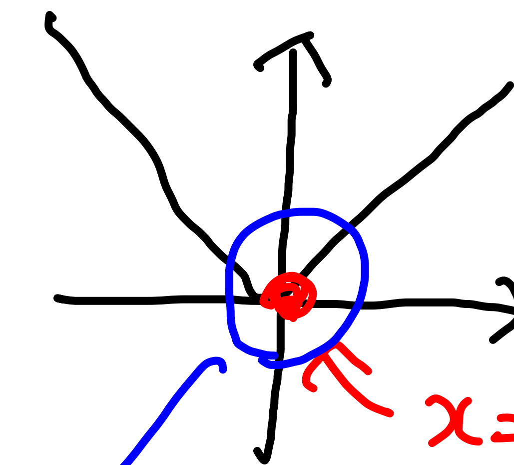
1. $\left(f(x) \pm g(x)\right)' = f'(x) \pm g'(x)$

2. $\left(f(x)\,g(x)\right)' = f'(x)\,g(x) + f(x)\,g'(x)$

3. $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x)\,g(x) - f(x)\,g'(x)}{g^2(x)}$　$(\neq 0)$

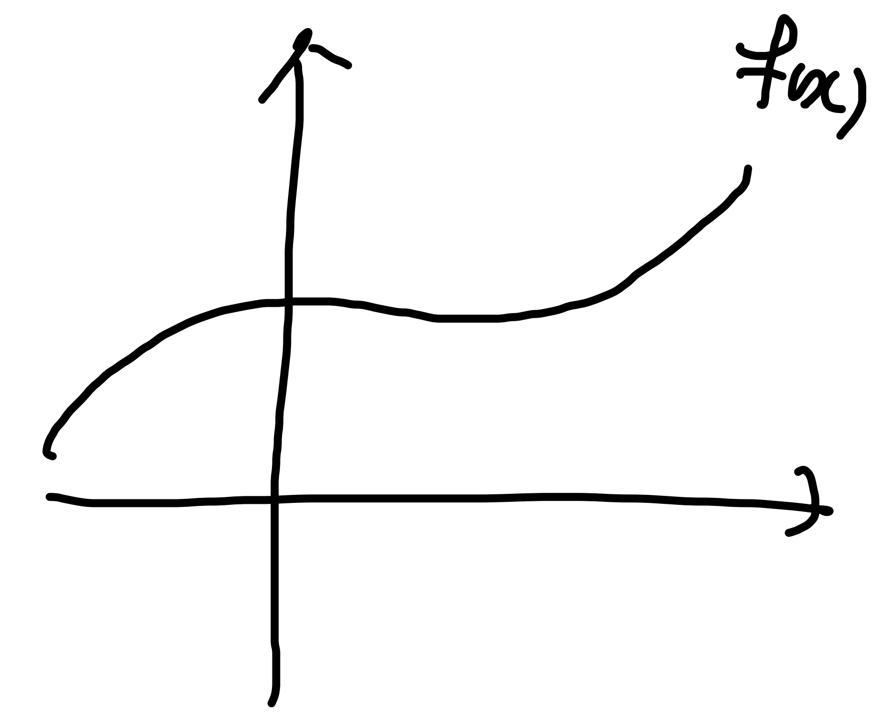
4. $\left(f(g(x))\right)' = f'(g(x))\,g'(x)$

$y = f(x) = |x|$



$x=0$ で微分不可

尖っていることが問題



微分可能

$\Longleftrightarrow$ 滑らかな関数と呼ぶ

$f(x) = x^2 \qquad g(x) = 2x + 2$

1 $\quad (f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$

$$(x^2 \pm (2x+2))'$$

項ごとに微分

$$= 2x \pm (2 + 0)$$
$$= 2x \pm 2$$

$$f'(x) \pm g'(x)$$
$$= (x^2)' \pm (2x+2)'$$
$$= 2x \pm (2+0)$$
$$= 2x \pm 2$$

2. $\quad (f(x)\,g(x))' = f'(x)\,g(x) + f(x)\,g'(x)$

$$f(x)\,g(x) = x^2(2x+2)$$
$$= 2x^3 + 2x^2$$

$$(f(x)\,g(x))' = 6x^2 + 4x$$

$$f'(x)\,g(x) + f(x)\,g'(x)$$
$$= 2x(2x+2) + x^2(2+0)$$
$$= 4x^2 + 4x + 2x^2$$
$$= 6x^2 + 4x$$

$f(x) = 3x^2 \qquad g(x) = x^2+1$

計算方法

3. $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$

$$\left(\frac{3x^2}{x^2+1}\right)'$$

$$= \frac{6x(x^2+1) - 3x^2(2x+0)}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{\cancel{6x^3}+6x - \cancel{6x^3}}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{6x}{(x^2+1)^2}$$

確認は
4.の後に

4. $(f(g(x)))' = f'(g(x))\,g'(x)$

$f(g(x)) = 3(x^2+1)^2$ ← $f(x)$ ← $g(x)$

合成関数

$= 3(x^4+2x^2+1)$

$= 3x^4 + 6x^2 + 3$

$(f(g(x)))' = 12x^3 + 12x + 0$

$= 12x^3 + 12x$

$f'(x) = (3x^2)'$

$= 6x$

$g'(x) = (x^2+1)'$

$= 2x$

$f'(g(x))\,g'(x) = 6(x^2+1) \times 2x$

$= 12x(x^2+1)$

$= 12x^3 + 12x$

3. の確認（テクニカル）

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

$(\neq 0)$

$$\frac{1}{2} = 2^{-1}$$

両辺に 2 をかけると

左辺 $= \frac{1}{2} \times 2 = 1$

右辺 $= 2^{-1} \times 2^{1}$

$= 2^{(-1+1)}$

$= 2^{0}$

$= 1$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = f(x)\, g^{-1}(x)$$

書き方の違い

$$= f(x)\,(g(x))^{-1}$$

2. の $\left(f(x)g(x)\right)'$
$= f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
が使える！

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \left(\underbrace{f(x)}\ \underbrace{(g(x))^{-1}}\right)'$$

$$((g(x))^{-1})'$$

$$= f'(x)(g(x))^{-1} + \left(f(x) \times -(g(x))^{-2} g'(x)\right)$$

$h(x) = x^{-1}$

$$(h(g(x)))' = ((g(x))^{-1})'$$

合成関数

4. の性質

$$= f'(x)(g(x))^{-1} - f(x)(g(x))^{-2} g'(x)$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = f(x)\,(g(x))^{-1}$$

2の性質

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = f'(x)\,(g(x))^{-1} + f(x)\left\{(g(x))^{-1}\right\}'$$

4の性質(合成関数)

$$= f'(x)\,(g(x))^{-1} - f(x)\,(g(x))^{-2}\,g'(x)$$

$$\times 1 = g(x)\,g^{-1}(x)$$

$$= f'(x)\,g(x)\,(g(x))^{-2} - f(x)\,(g(x))^{-2}\,g'(x)$$

$$= \left(f'(x)\,g(x) - f(x)\,g'(x)\right)(g(x))^{-2}$$

$$= \frac{1}{g^2(x)}$$

$$= \frac{f'(x)\,g(x) - f(x)\,g'(x)}{g^2(x)}$$

目的地

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

$$3 \times 1 = 3$$

$$\parallel$$

$$\frac{2}{2} = 2 \times 2^{-1}$$

$$3 \times \frac{2}{2} = 3$$

1 $(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$

2. $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

3. $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$

4. $f(g(x)) = f'(g(x))\,g'(x)$

式は忘れていいので．性質があったことは

覚えておいて下さい

積分の諸性質

1. $\int (f(x) \pm g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx \quad (+C)$

2. 部分積分 (難)

$$\int f(x)\,g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)\,g(x)\,dx \quad (+C)$$

3. 置換積分 (やや難)　xに関する積分をtに関する積分に置き換える.

$$\int f(x)\,dx, \qquad x = g(t)$$

$$\int f(x)\,dx = \int f(g(t))\,g'(t)\,dt$$

こういうものがあるよ!

微分の表現

$f(x)$ が微分可能なとき、導関数を $f'(x)$ と表現していた。

$\longrightarrow$ $\dfrac{d f(x)}{d x}$

こっちの方が使われる

① 分数ではない

② でも分数の機能を持つ

「$f(x)$ を x に関して微分」と読む。

$(4a^2+3b^2-2az+2by^2)'$

$= 6b+4y^2$

どの変数を微分したかわからない

$$\frac{d(4a^2+3b^2-2az+2by^2)}{d b}$$

bに関してとわかる。

統計で出てくる多変数(多変量)

$f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$

各 x_i の微分

$$\frac{\partial f(x_1, x_2, \cdots, x_n)}{\partial x_i} \quad (i=1,2,\ldots,n)$$

$\dfrac{d f(x)}{d x}$ を見慣れると良い。

少しだけ置換積分を解析

$y = f(x)$, $x = g(t)$

$f(x)$ が積分可能とすると

$$\int f(x)\,dx$$

を考えることができる。これを t の積分に置き換えるとき、

式中の全ての x を t の式に置き換える必要がある。

$f(x) \to f(g(t))$ ok?

$dx \to$??

$$dx = dx \times 1$$

$$= dx \times \frac{dt}{dt}$$

$$= \frac{dx}{dt}\,dt$$

$$\int f(x)\,dx = \int f(g(t))\underbrace{\frac{dx}{dt}}\,dt$$

・よくみると x を t で微分

・$x = g(t)$

$\to \dfrac{dx}{dt} = g'(t)$

$$= \int f(g(t))\,g'(t)\,dt$$