機械学習や

統計検定のための数学

〜数について〜

$\mathbb{N}$ 自然数 : 1, 2, 3, ...

$\mathbb{Z}$ 整数 : 0, ±1, ±2, ...

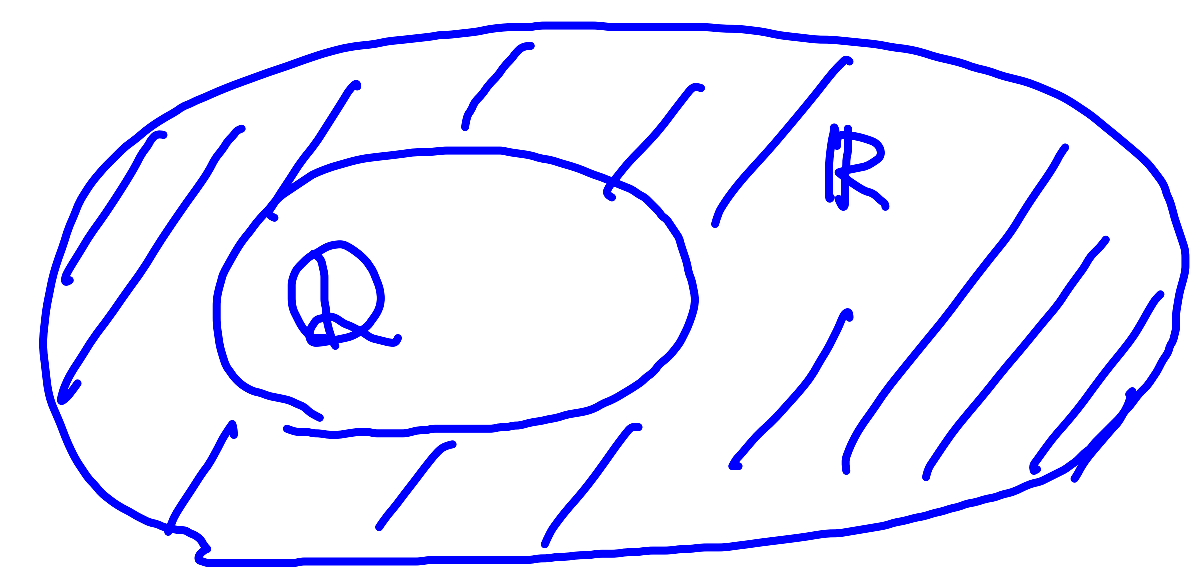
$\mathbb{Q}$ 有理数 : $\frac{a}{b}$ (a, b は整数, 但し $b \neq 0$)

$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ 無理数 : $\sqrt{2}$ (2乗したら 2 になる数), π (円周率, 3.141592 …), ...
のように分数で表せない数

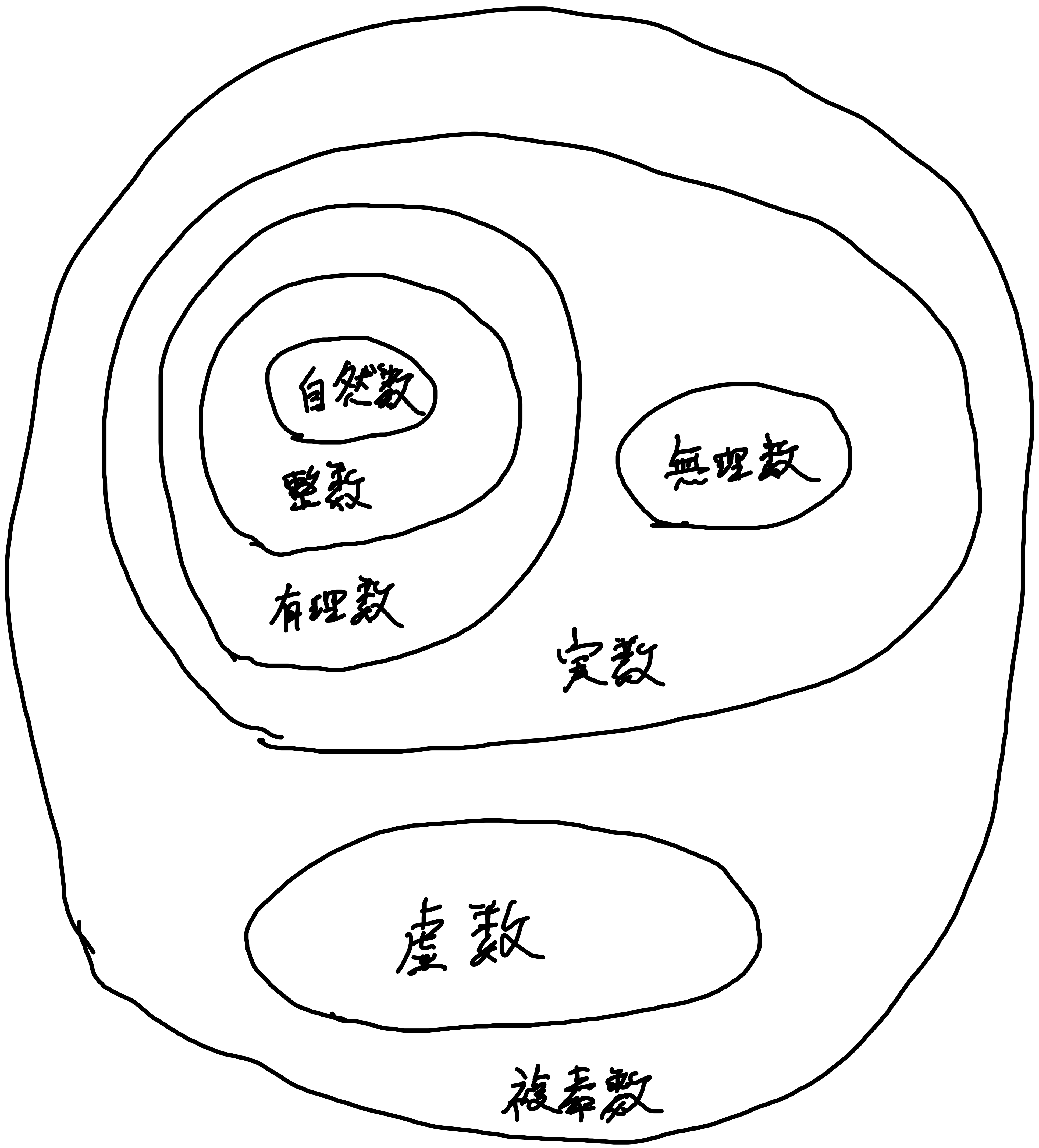
$\mathbb{R}$ 実数 : 有理数と無理数を合わせた数

$\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ 虚数 : i (2乗したら -1 になる数) を実数をかけた数 ($5i$, $\frac{2}{3}i$, $-\sqrt{3}i$)

$\mathbb{C}$ 複素数 : 実数と虚数を合わせた数 ($3+5i$, $6+2i$, ...)



▨ : $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$



難しいこと

集合論（大学）

・$\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ ：無限に存在する

無限にも程度がある

→ 無限の量 濃度

- 自然数
- 整数
  - 偶数（2で割りきれる整数）
  - 奇数（2で割りきれない整数）
- 有理数

同じ濃度

- 無理数
- 実数
- 虚数
- 複素数

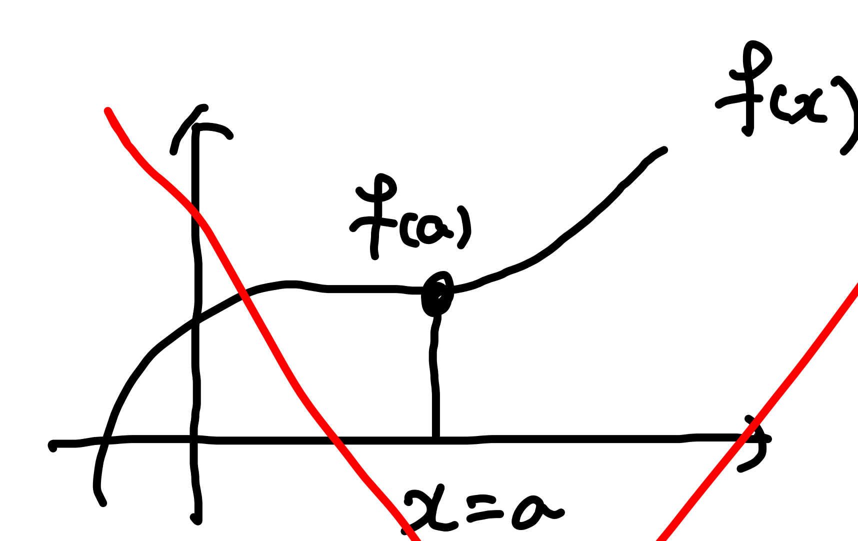
同じ濃度

数の連続性と離散性

連続

離散

連続 → ε - δ 論法



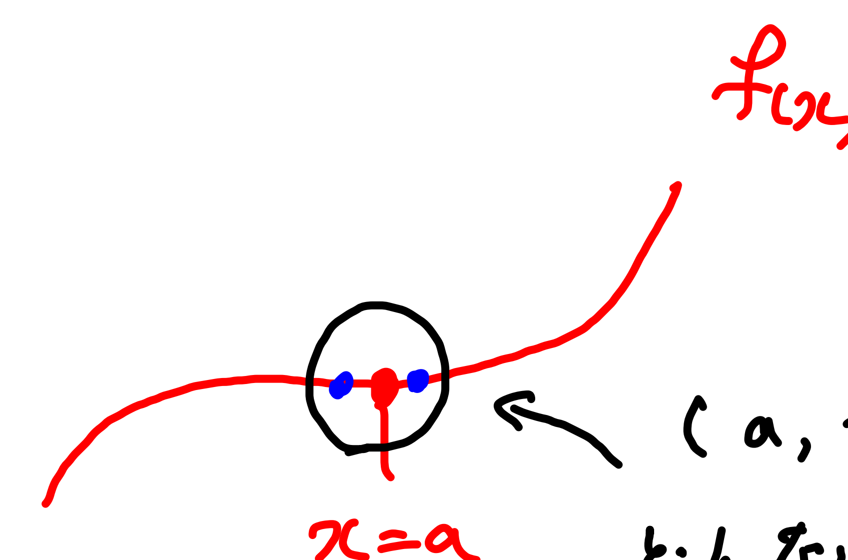
~~「f(x)がx=aで連続である」とは~~

~~任意のε>0に対してあるδ>0~~

~~δ>0が存在して~~

~~$|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(a)|<\varepsilon$~~

↓

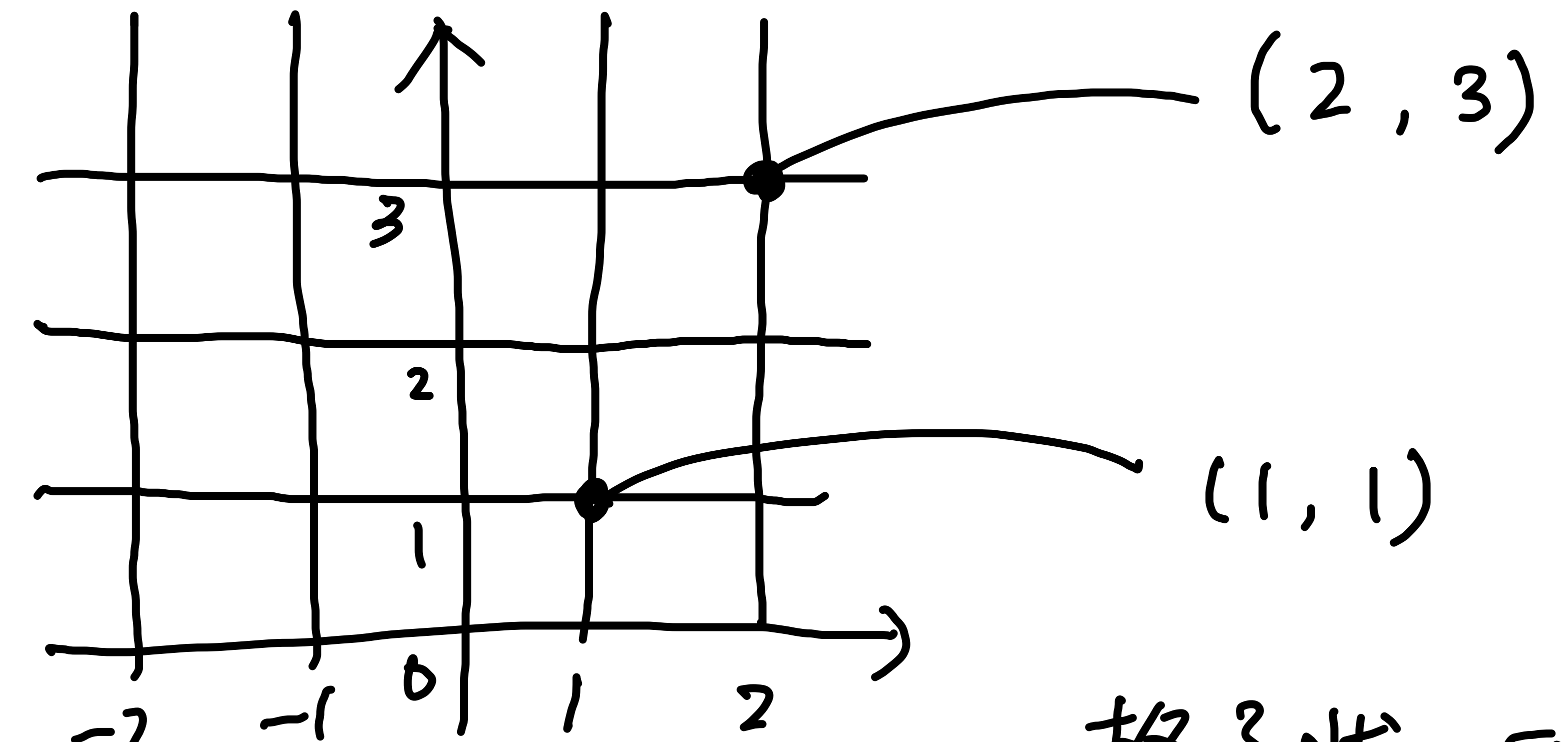


(a, f(a))を中心に
どんなに小さい丸を
書いても、(a, f(a))
以外のf(x)上の点
があるよ!

機械学習のデータでも
連続データと離散データが
あり、連続か離散かで
(基本的な方針は同じではあるが)
扱い方が異なる。

離散な数

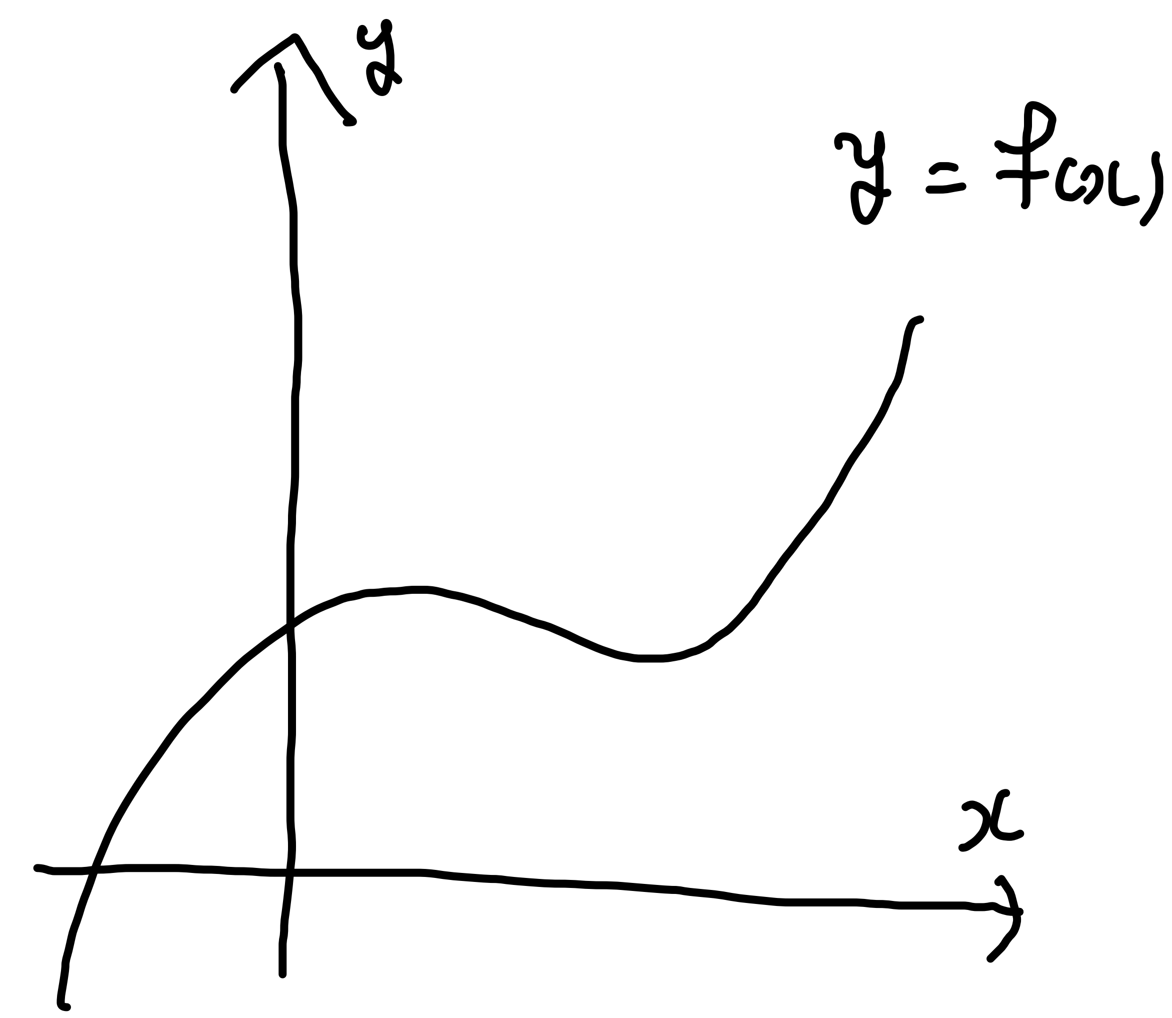
自然数
整数
有理数



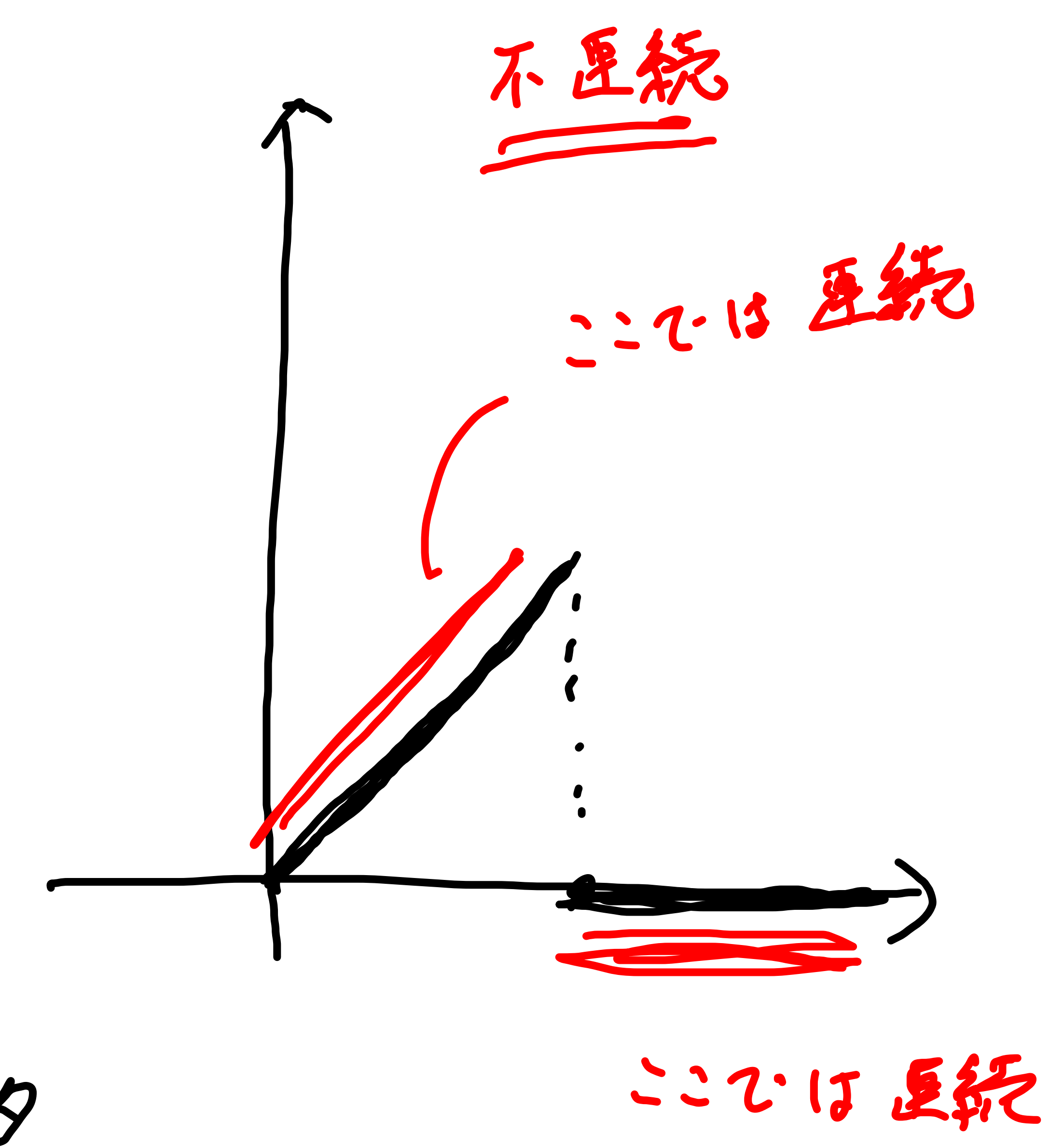
格子状のデータ

連続な数

無理数
実数
虚数
複素数



線でつながっているデータ



対数(高校)

log (ログ)

$\underline{8} = 2 \times 2 \times 2 = 2^{3}$

$3 = \log_{2} 8$　　8は2の3乗

底

底

数学，物理：e (ネイピア数)

→ 自然対数　$\log_e a$, $\underline{\log a}$, $\ln a$

それ以外の分野：10

→ 常用対数　$\log_{10} a$, $\log a$.

分野によって
どちらを採用しているか
check

常用対数　$\log_{10} x$

2^{1040} は何桁の数か？　但し $\log_{10} 2 = 0.3010$ とする。

$\log_n x$ の性質 ← logの一般の話

$n^a = b$

$a = \log_n b$

③　②　①

bはnのa乗

$n^{a_1} = b_1 \xrightarrow{\log} a_1 = \log_n b_1$

$n^{a_2} = b_2 \rightarrow a_2 = \log_n b_2$

$n^{a_1} \times n^{a_2} = b_1 \times b_2$

$n^{a_1} \times n^{a_2} = n^{(a_1+a_2)}$

代入

$2^2 \times 2^3 = 2^{2+3} = 2^5$

$2^2 \times 2^3 = 4 \times 8 = 32$

$2^5 = 32$

一方

$x^{a_1} \times x^{a_2} = x^{(a_1+a_2)}$

掛け算が累乗では足し算になる。

→ logに直す。

$a_1 + a_2 = \log_n (b_1 \times b_2)$

$\log_n b_1 + \log_n b_2 = \log_n (b_1 \times b_2)$

log内の掛け算は
log同士の足し算に、
log同士の足し算は
log内の掛け算に

$\log_n a$ の性質 2

← logの一般の話

①

$$y = x^2$$

$$2 = \log_x y$$

②

$$y^2 = x^4$$

$$4 = \log_x y^2$$

③ ここで

$$2 = \log_x y$$

2倍

$$4 = 2\log_x y$$

同じ

④

$$\log_x y^2 = 2\log_x y$$

一般に

$$\log_x y^k = k\log_x y$$

が成り立つ。

2つの性質は必須です。

よく考えてみて下さい。

2^{1040} は何桁か？　但し $\boxed{\log_{10} 2 = 0.3010}$ とする。

常用対数は「数値が何桁なのか」を調べるのに適している。

考え方

2^{1040} は何桁か？ $\Longleftrightarrow$ 2^{1040} は 10^n と同じ桁か？

$\underbrace{100}_{3桁} = 10^{2}$

$\underbrace{10000}_{5桁} = 10^{4}$

10^n のとき
その数は $n+1$ 桁

$$
\begin{array}{r}
1040 \\
\times\ 0.301 \\
\hline
1040 \\
31200 \\
\hline
313.040
\end{array}
$$

$$2^{1040} = 10^n$$

↓ 両辺 $\log_n$ をとる。

$$\log_{10} 2^{1040} = \log_{10} 10^n$$

$$1040 \log_{10} 2 = n \underbrace{\log_{10} 10}_{=1}$$

10は10の何乗？
→ 1乗

性質 2

$$\log_x y^k = k \log_x y$$

$$1040 \underbrace{\boxed{\log_{10} 2}}_{0.3010} = n$$

$$1040 \times 0.301 = n$$

$n = 313.040$

つまり 2^{1040} は314桁

復習

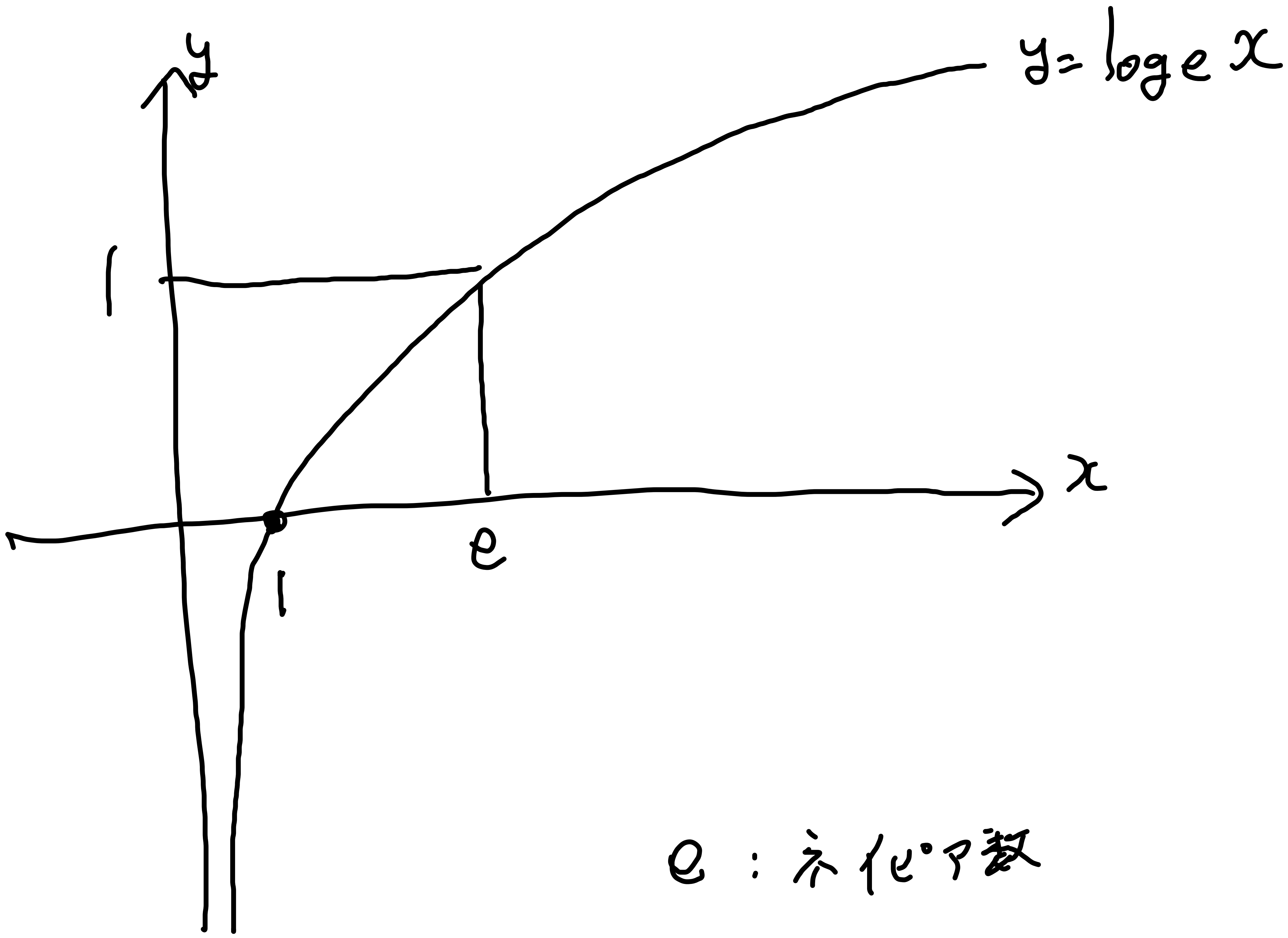
$n^a = b$

$a = \log_n b$

自然対数

$\boxed{\log_e x,\ \log x,\ \ln x}$ 同じ

性質は前に紹介したとおり.



$0 = \log_e 1$

1はeの0乗

$1 = \log_e e$

eはeの1乗

0に近づくにつれて $-\infty$ に近づく.

→ xの定義域は$(0, \infty)$

で −では定義されていない.

∞ に近づくにつれて. $+\infty$ に近づく.

e : ネイピア数

$\fallingdotseq 2.718\cdots\cdots$