

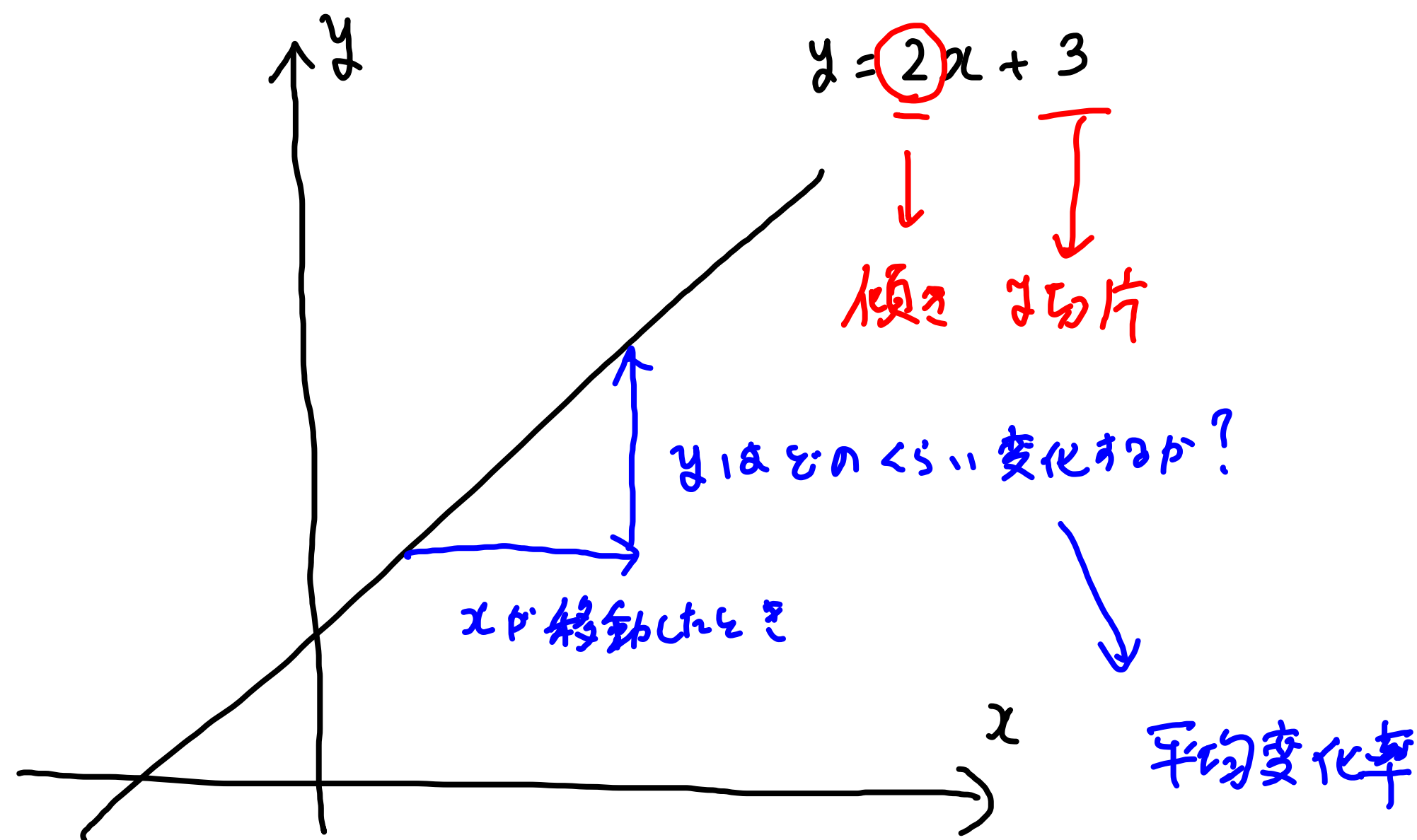
機械学習や

統計検定のための数学.

～平均変化率と微分～

平均変化率 (中学)

覚えておけ?



$$y = 2x + 3$$

$$x = 1 \quad \dots \quad y = 2 \times 1 + 3 = 5$$

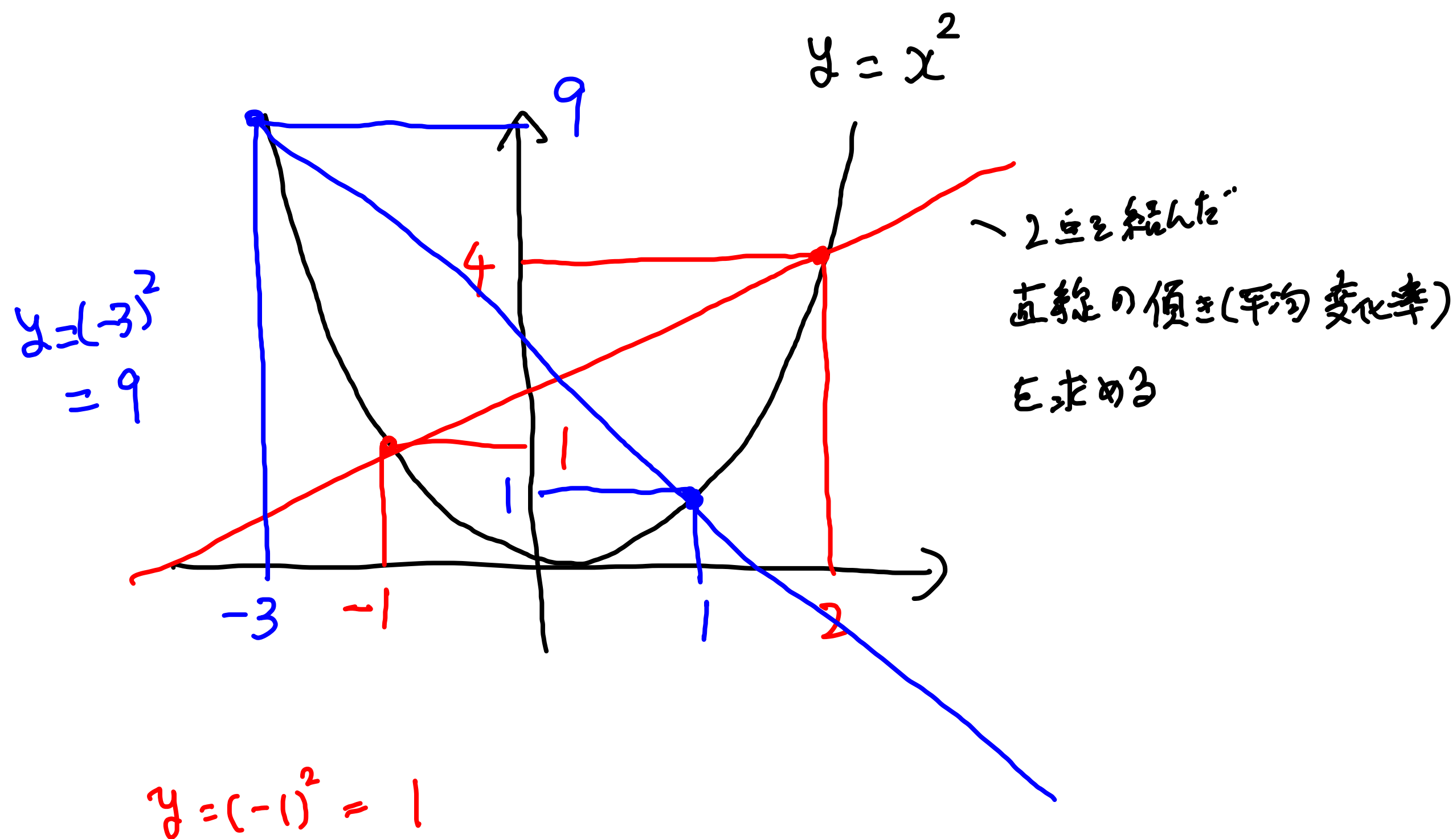
$$x = 3 \quad \dots \quad y = 2 \times 3 + 3 = 9$$

$$\begin{aligned} \text{平均変化率} &= \frac{9 - 5}{3 - 1} \\ &= \frac{4}{2} \\ &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{平均変化率} &= \frac{\text{変化後の} y \text{座標} - \text{変化前の} y \text{座標}}{\text{変化後の} x \text{座標} - \text{変化前の} x \text{座標}} \\ &= \frac{y \text{ の変化量}}{x \text{ の変化量}} \end{aligned}$$

直線の場合は 傾きが 平均変化率

どちらが先でもよい!



直線(一次関数)以外の関数では一般的に選ばれる2点で平均変化率は異なる。

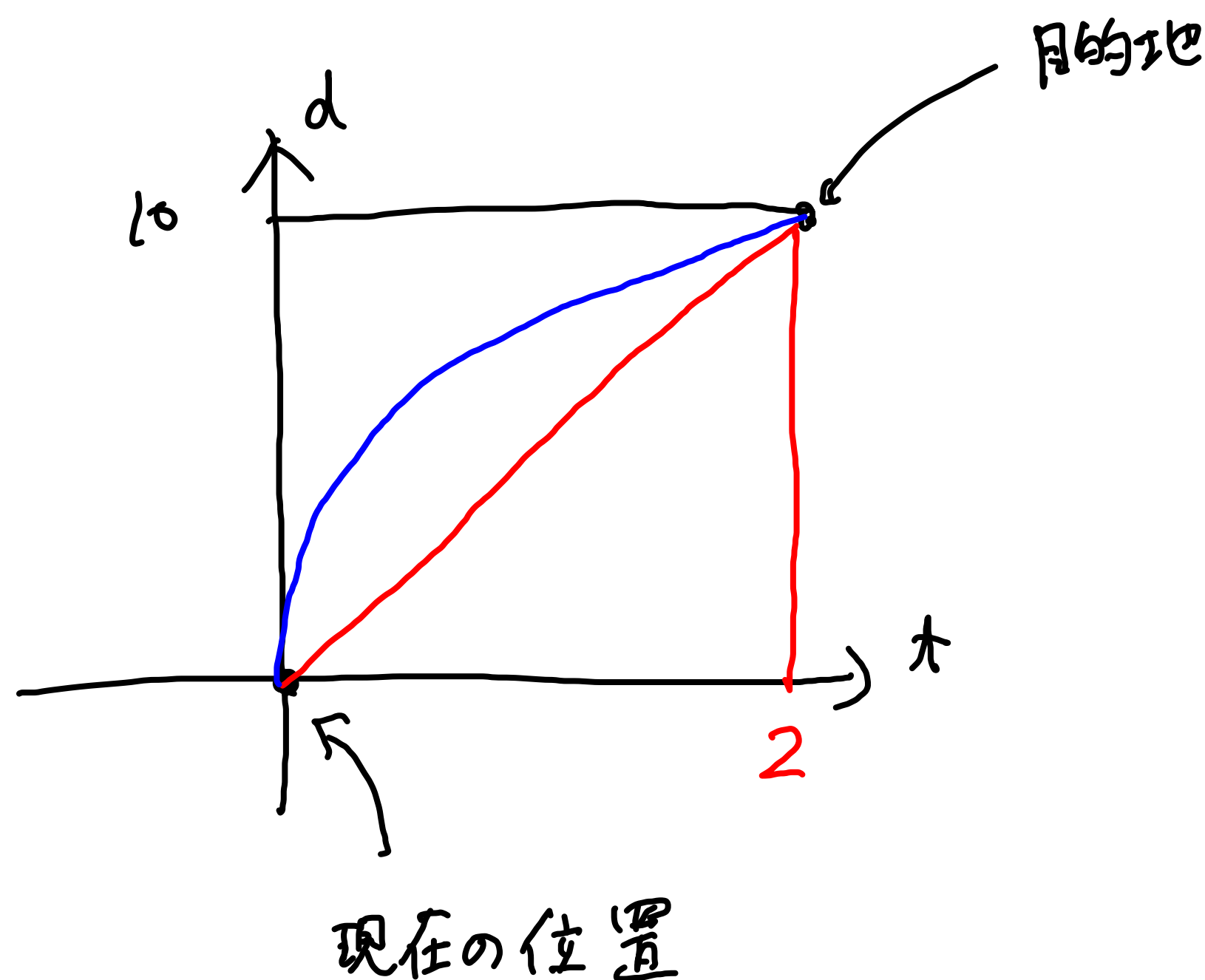
$$\begin{aligned}
 & \frac{4 - 1}{2 - (-1)} & \frac{1 - 9}{1 - (-3)} \\
 & = \frac{3}{3} & = \frac{-8}{4} \\
 & = 1 & = -2
 \end{aligned}$$

違う...

$$\text{速度} = \frac{\text{距離}(d)}{\text{時間}(t)} \quad (\text{km/h})$$

青の場合でも確かに2時間で10km
 進んでいる。しかし、^{常に}時速5kmか...?

→ No



移動中の地点ごとに速度は
 変化している。

実は速度は かもわかるように

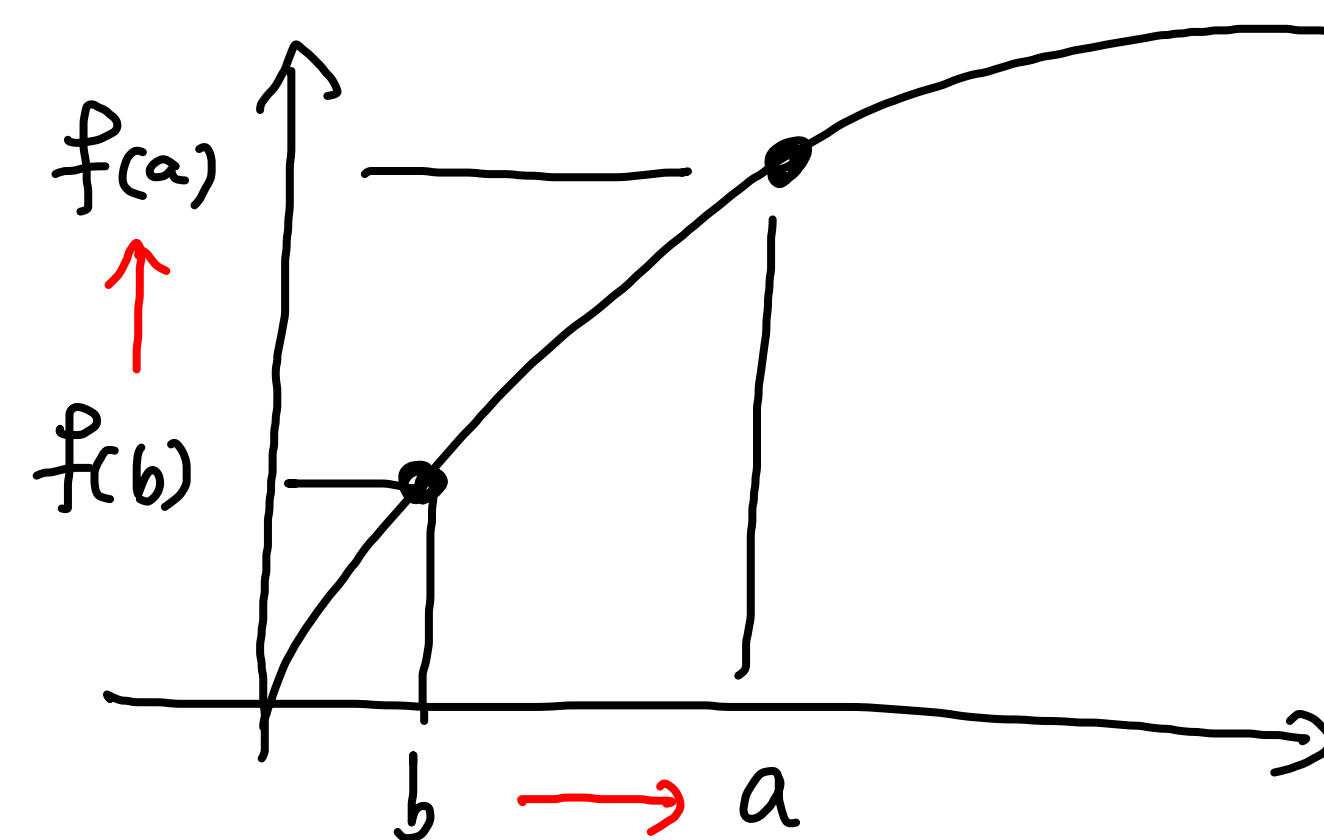
$$\frac{10 - 0}{2 - 0} = 5 (\text{km/h})$$

平均変化率である。

^ ある瞬間の速度が計算できる!

$$\lim_{x \rightarrow y} f(x) = f(y)$$

のように書く
「 x を限りなく y に近づけた
とき、 $f(x)$ は $f(y)$ に限りなく
近づく」と表すことが出来ます。



lim (極限) で $(a, f(a))$ と
 $(b, f(b))$ の 2 点の (速度の) 平均変化率から
時間 b における速度を求める。

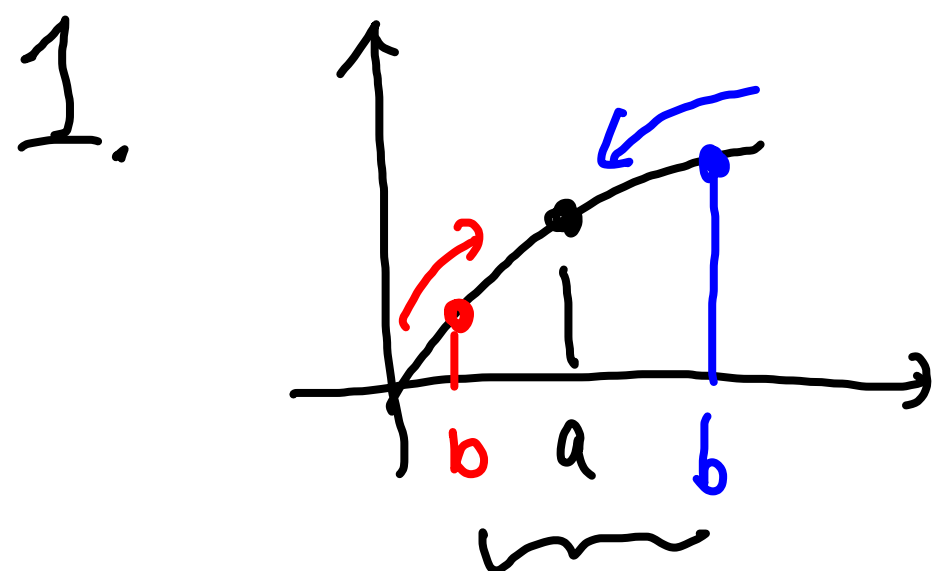
$$\lim_{b \rightarrow a} \frac{f(a) - f(b)}{a - b}$$

→ → の両方から a に近づけることで

時間 a の速度が計算できる。

Not 代入!

< 少しだけデクニカした話 >



ここでも考えが必要がある。

→ 厳密な部分は今回はない

$$h = b - a \text{ とおく.}$$

↓
h は a と b の間の距離
のようなもの。

距離 ≥ 0 (定義)

$$h ; \begin{cases} > 0 & (b > a) \\ < 0 & (a < b) \end{cases}$$

難しいので、少し考えて下さい。

(図など描いてみるとういことです。)

2. " $b \rightarrow a$ に近づける" とは, " h を 0 に近づける" と同義.

$$\lim_{b \rightarrow a}$$

$$\frac{f(a) - f(b)}{a - b}$$

1. 例 $h = b - a$
 $b = a + h$

2. 例 $\lim_{b \rightarrow a}$ と $\lim_{h \rightarrow 0}$ は同じ

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a) - f(a+h)}{a - (a+h)}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a) - f(a+h)}{-h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

難しいので

よく考えてみて

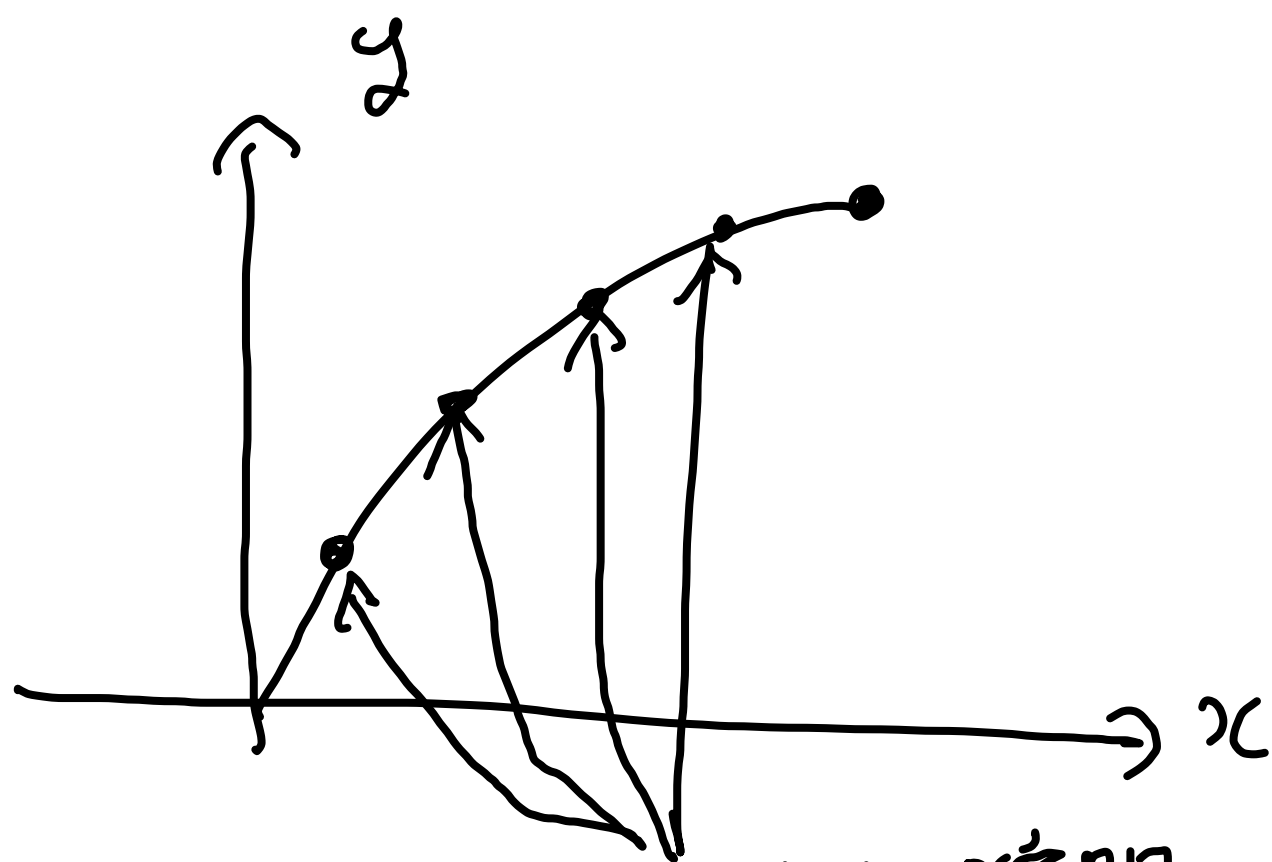
ください。

やっていることは 2 点の平均変化率を 1 点に近づけていること!

a 2.12.

1 をある一定ではなく、どの瞬間の速度でも

計算できるようにするために、 x と置く。



どの瞬間でも計算できるようにする。

つまり

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(x+h)}{h}$$

これを“微分”と呼ぶ。ここで、 $f'(x)$ と表す。

$f(x)$ の微分

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(x+h)}{h}$$

$f(x)$ の $x = a$ に関する微分
 $f'(a)$ を微分係数という。

$f'(x)$ は関数。

$f'(a)$ は定数。

万能ではない計算法

$$y = 2x^3$$

$$y' = 6x^2$$

試しに $y = 4x^2$ を微分してみよう。

$$\rightarrow y' = 8x$$

$$2 \quad x$$

$$= \underline{3 \times 2} x^{\underline{3-1}}$$

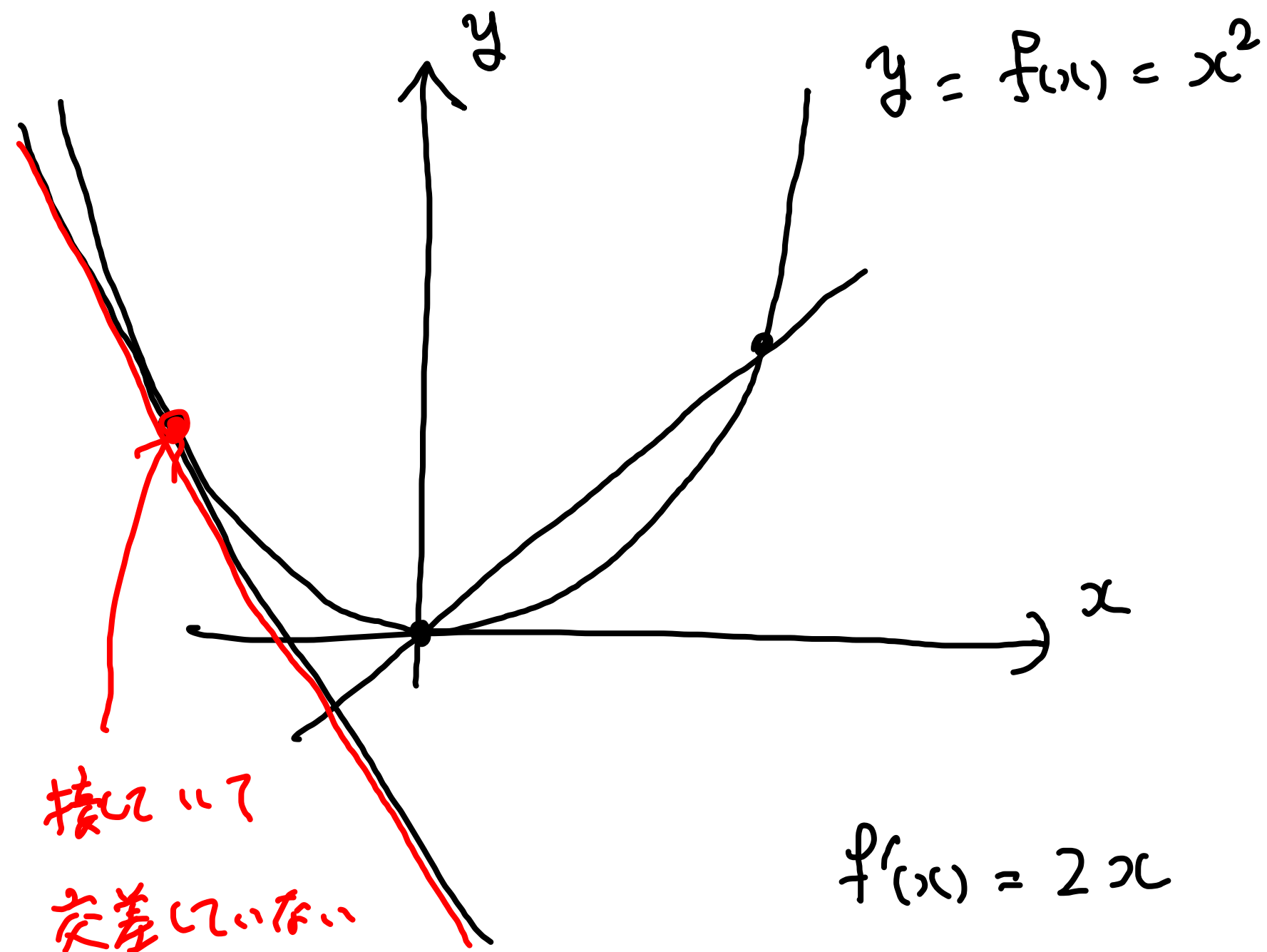
$$= 6x^2$$

$$4 \quad x$$

$$= 4 \times 2 x^{\underline{2-1}} = 8x \quad a^0 = 1$$

$$= 8x$$

$$= 8x$$



平均変化率 : 2点の変化率

↓

2点を通る直線の傾き



微分係数 : 1点の変化率

↓

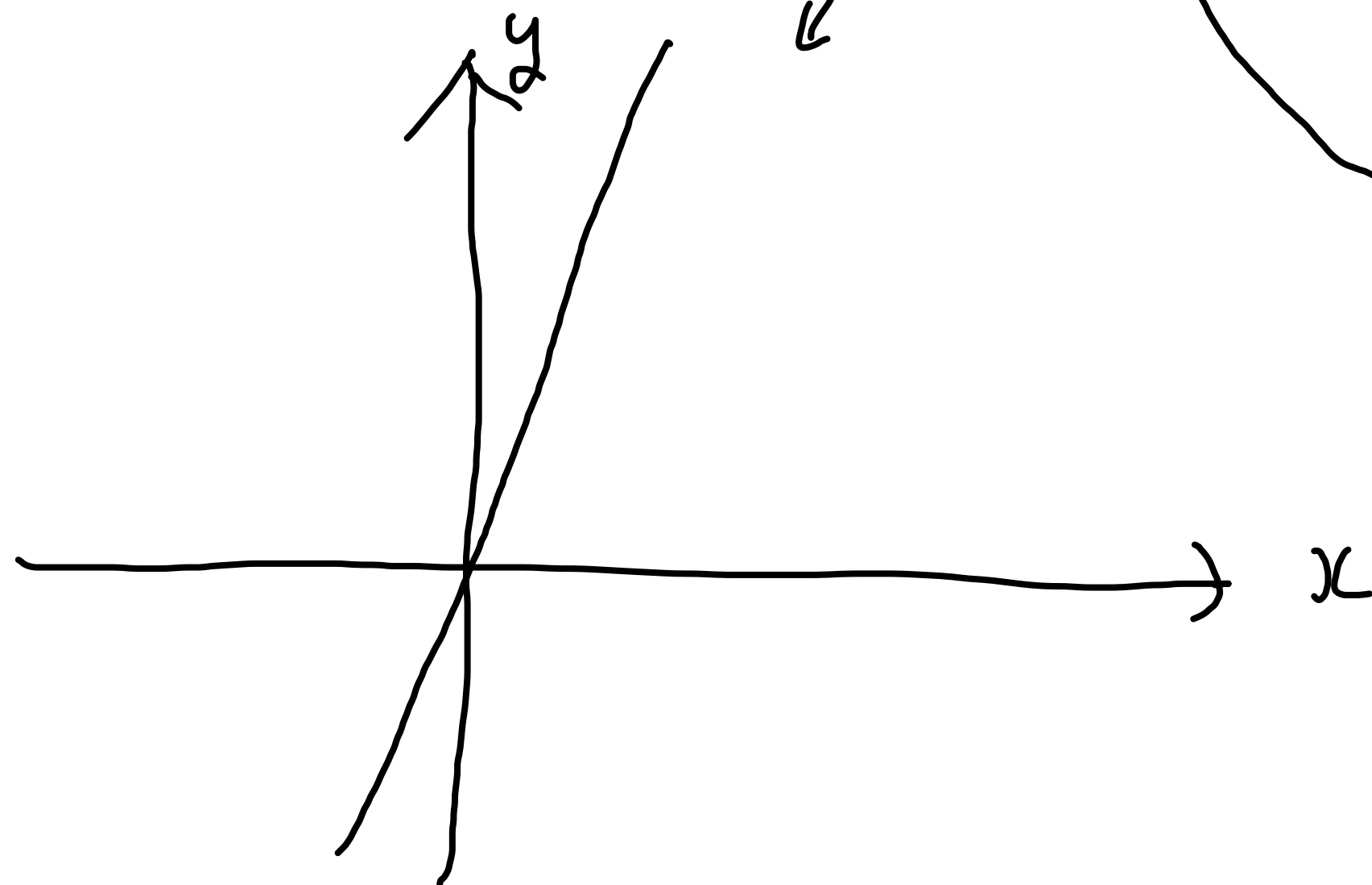
1点のみを通る直線の傾き

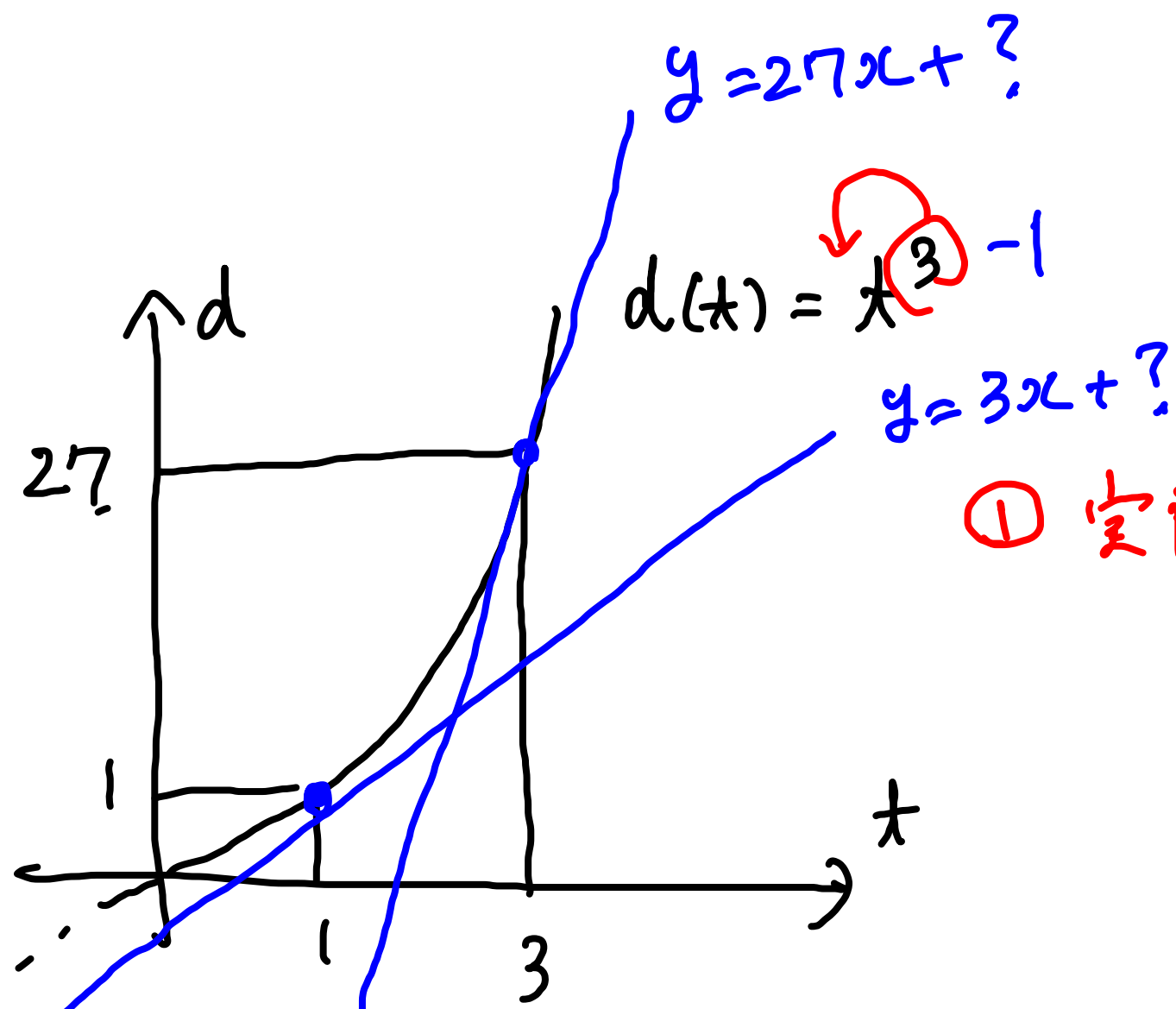
↓

接線

$$f'(x) = 2x$$

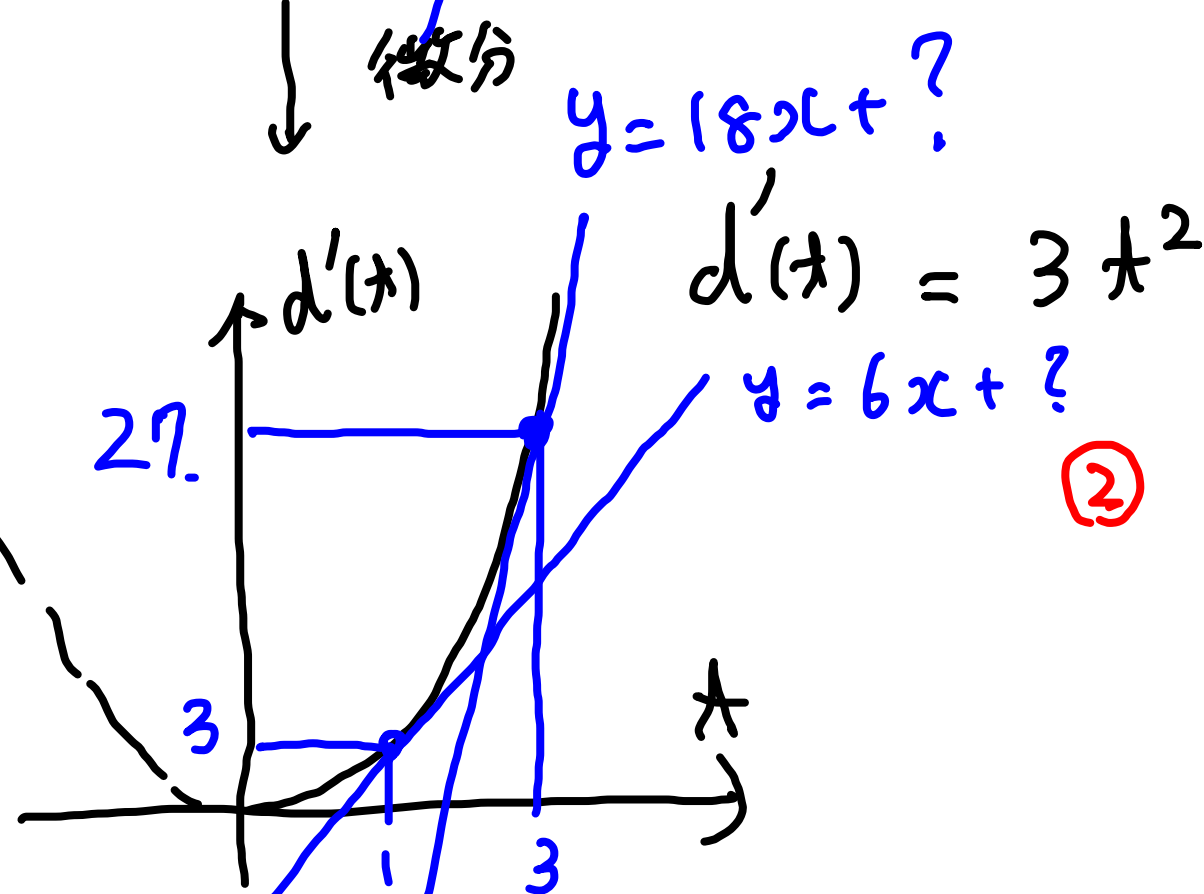
微分したものは関数





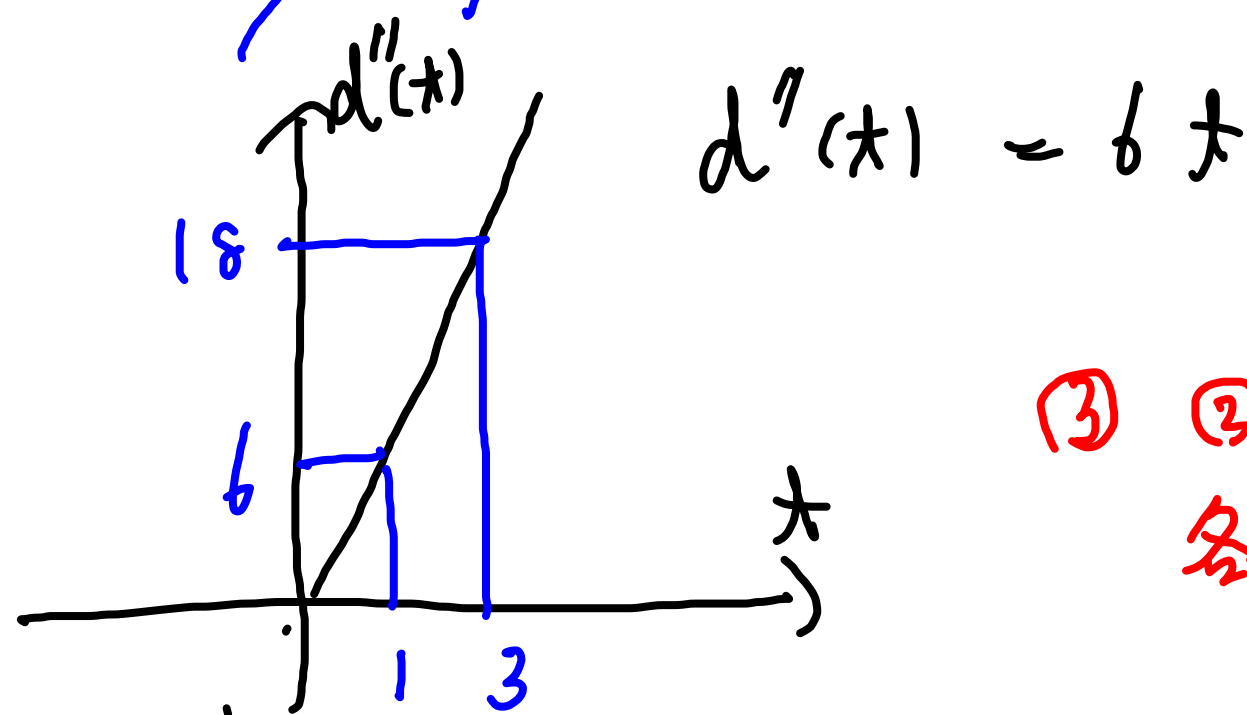
① 実際に計測したデータ

速度が上がる
実際に進む距離が
増加する!

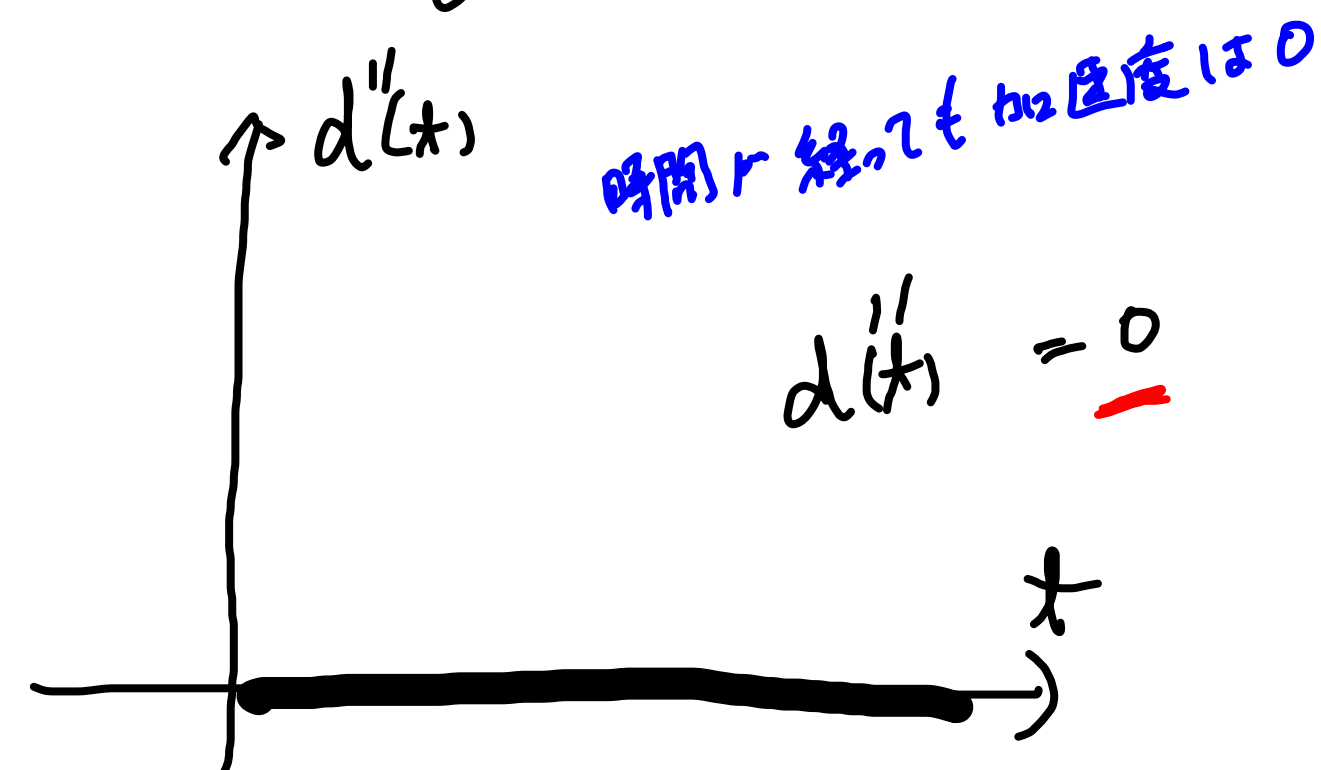
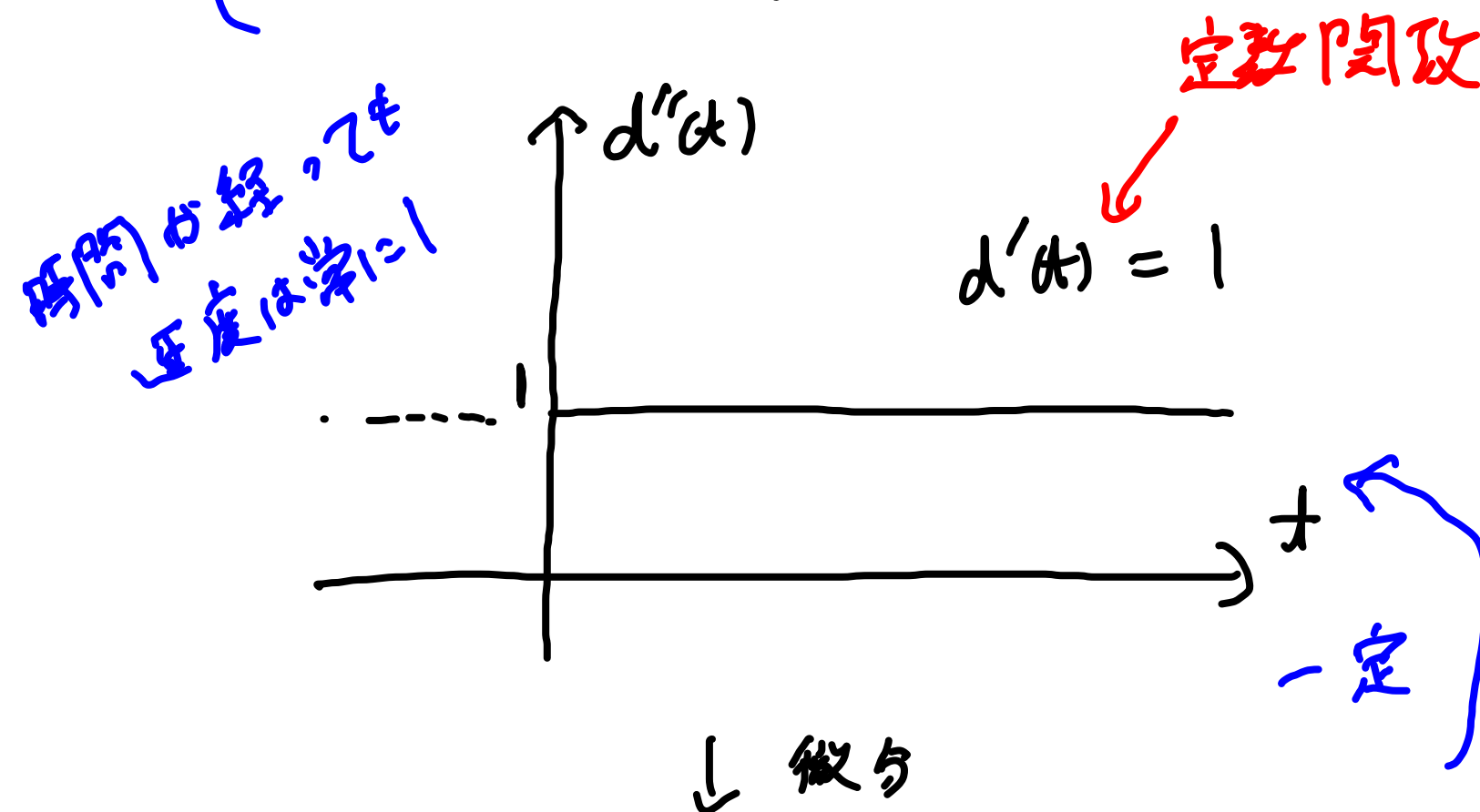
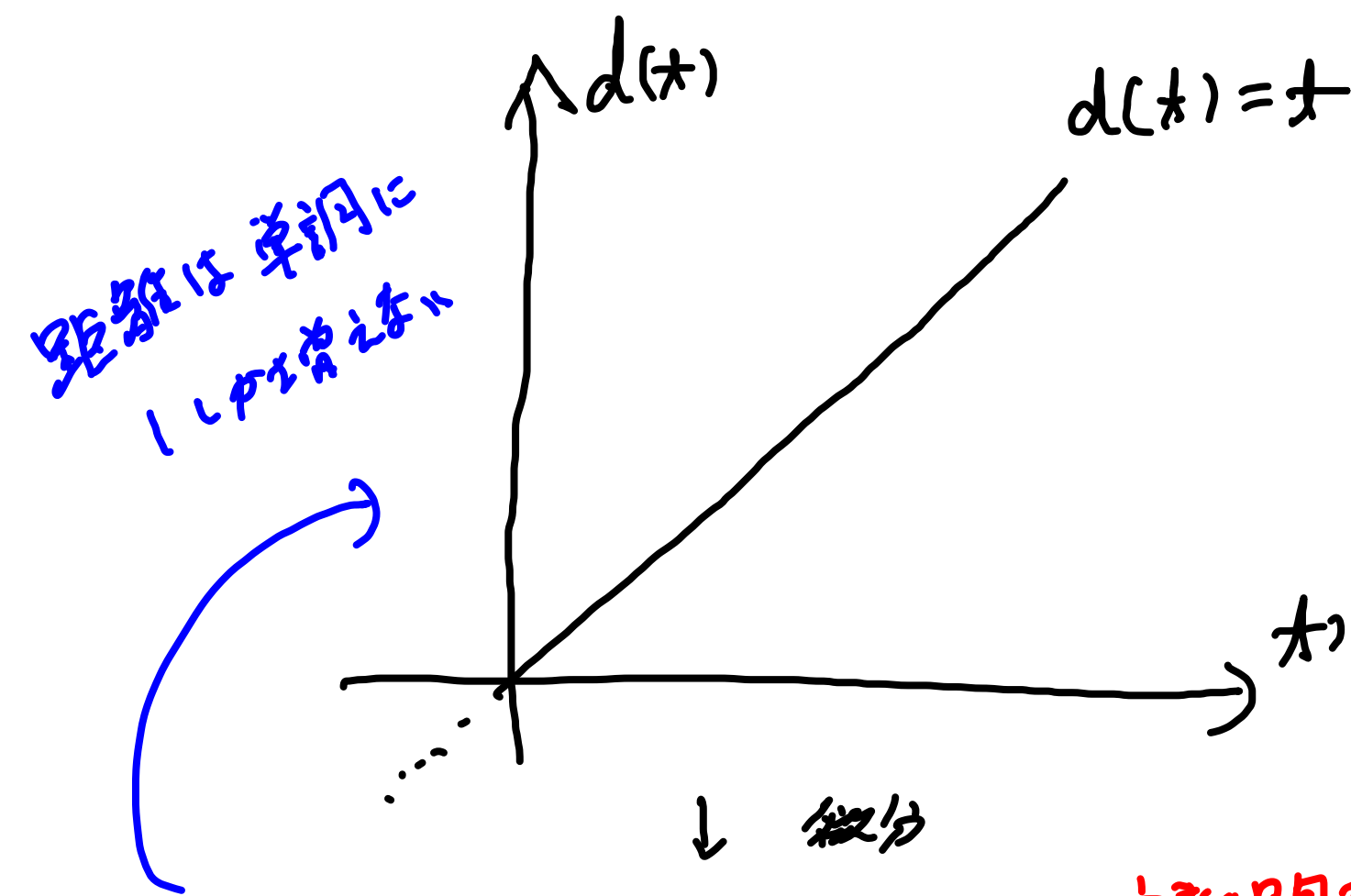


② ①を使って計算した
各時間における速度

加速度が上がる
速度が増加する!



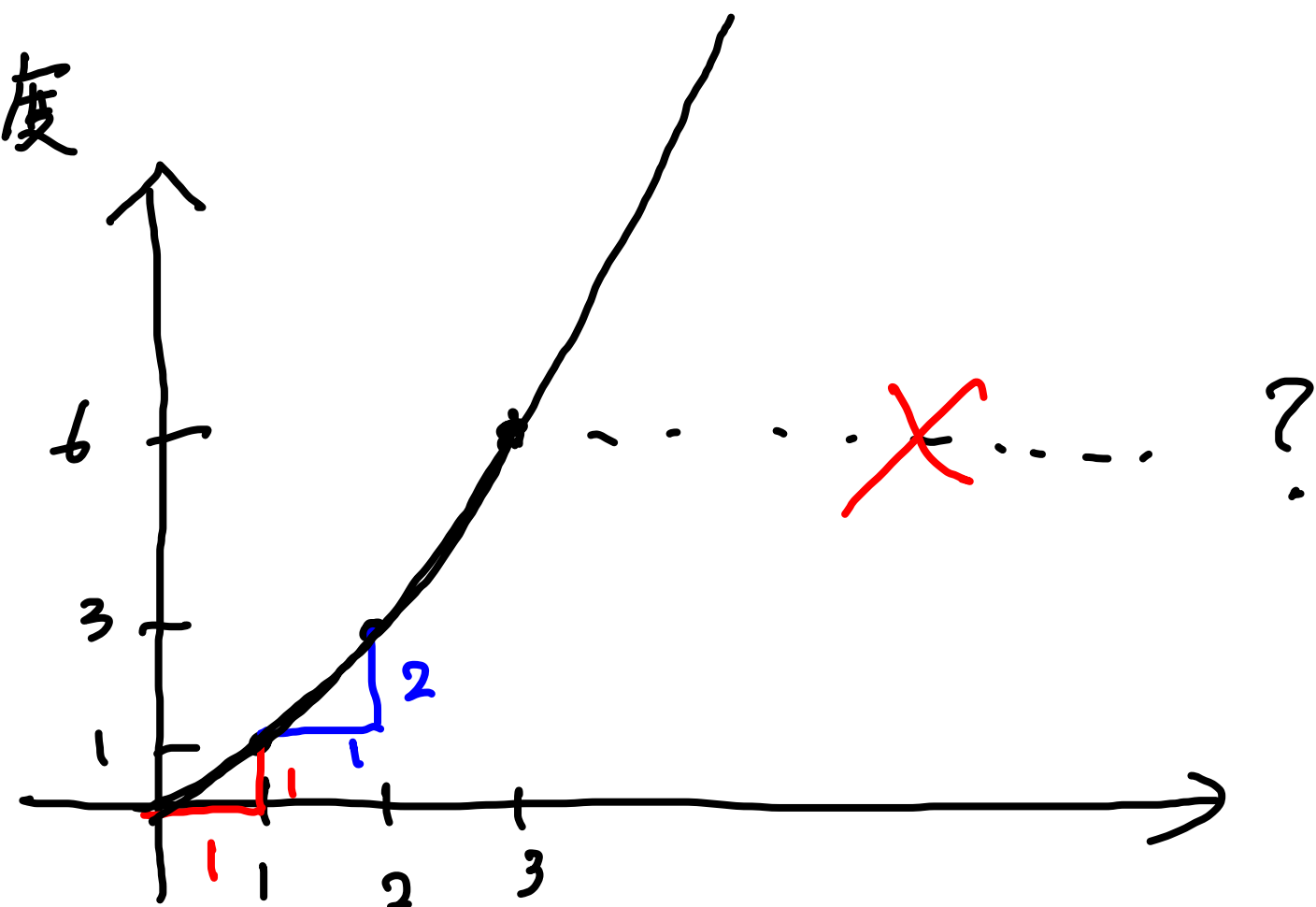
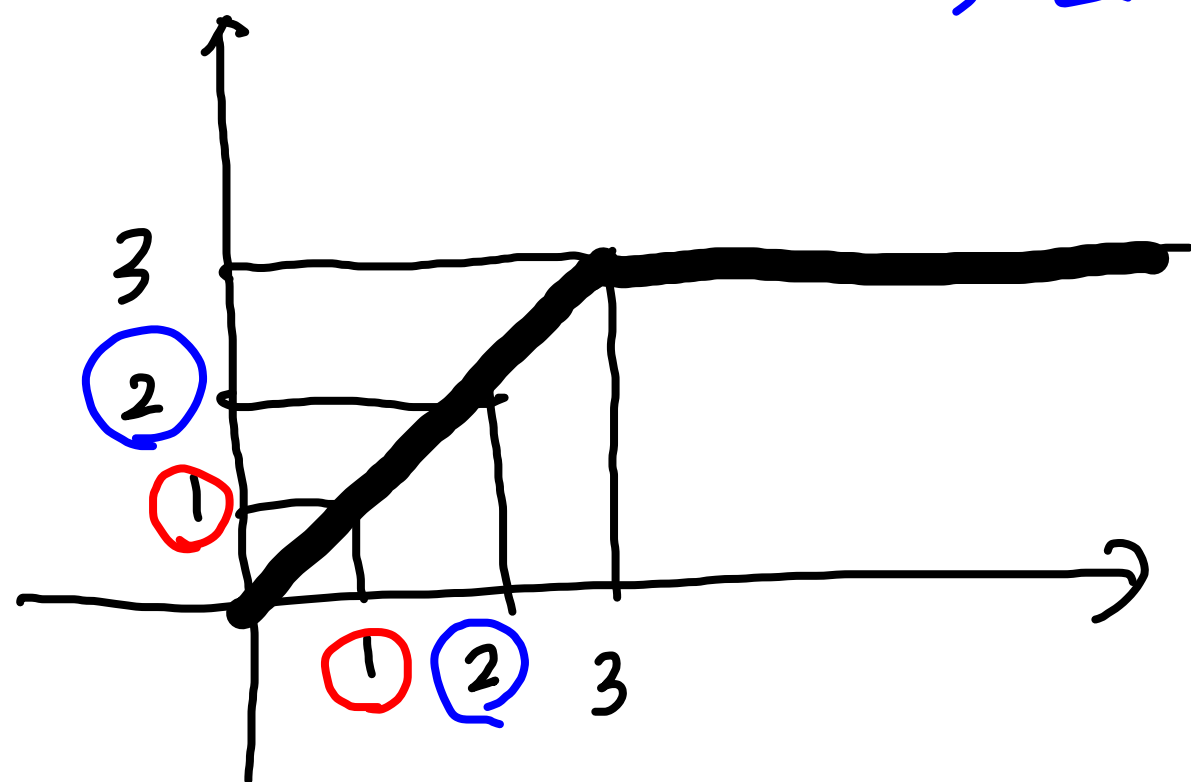
③ ②を使って計算した
各時間における加速度



力と速度

加速度が2

→ 速度が2増える



加速度が一定 → 速度はその前で

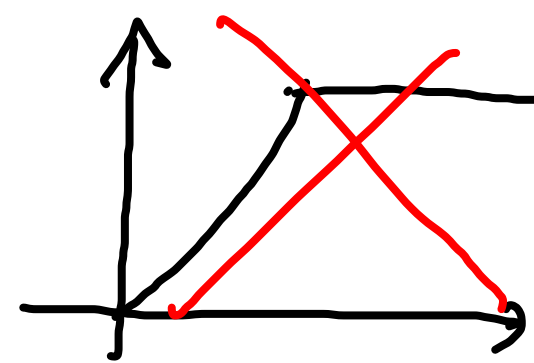
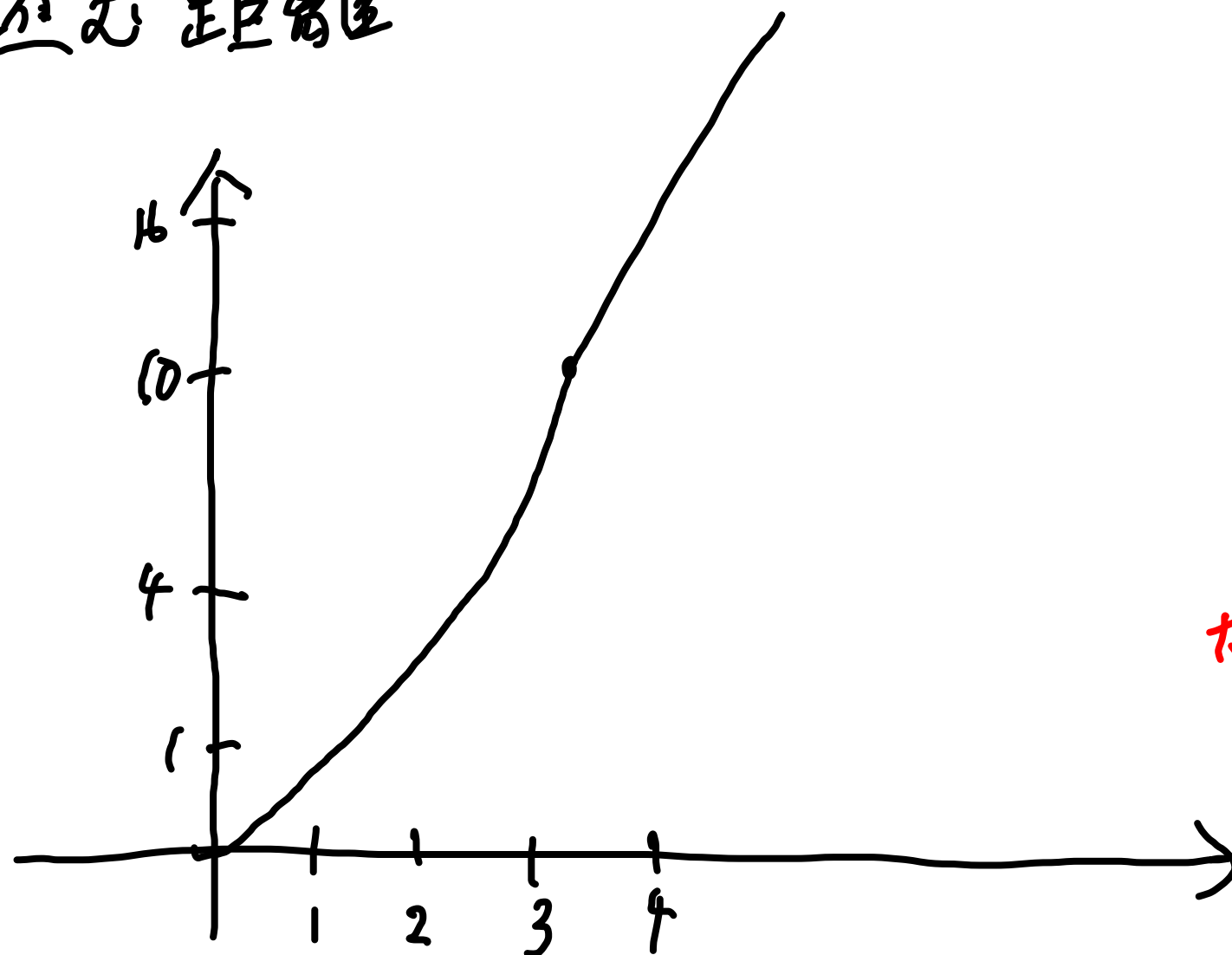
増加していれば増加
一定であれば一定
減少していれば減少

少し止め？
着えとみましょ！



位置と距離

?



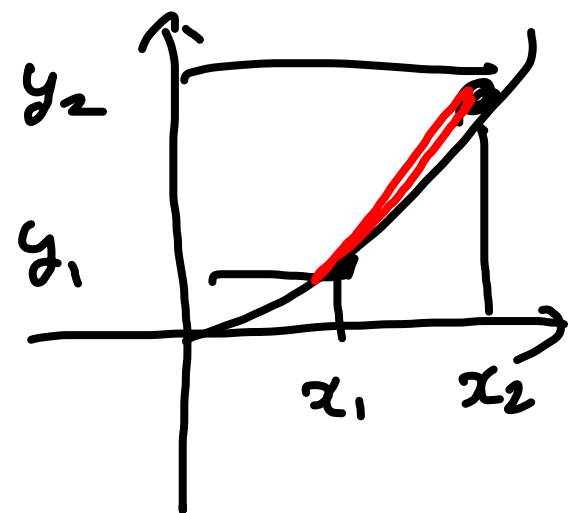
加速度が減少しないと

停止しないよ！

まとめ.

平均変化率

$$: \frac{y \text{ の変化量}}{x \text{ の変化量}} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$



2点を通る直線の傾き.

微分係数

: $y = f(x)$ の ある $x = a$ に対する接線の傾き

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

(実際は $y = f(x)$ の定義域かつ微分可能な x)

微分

$y = f(x)$ の 全ての x に関して接線の傾きを表す関数 を求めること.

速度や加速度を求めることができる

導関数という.

これを覚えろいねえ!

~~積分 \longleftrightarrow 微分~~

忘れてほしい.