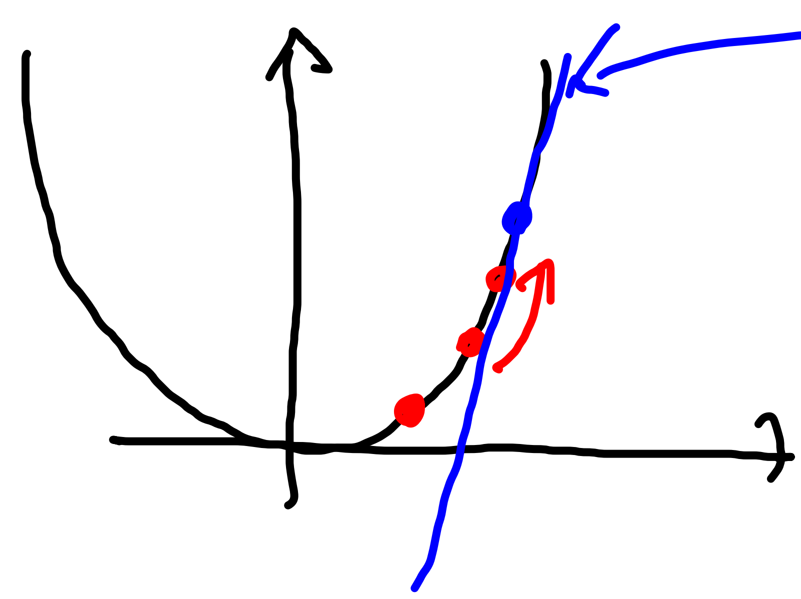
機械学習・統計検定

のための数学

〜微分積分学の基本定理〜

復習

微分：平均変化率の2点を1点に近づけたときの接線の傾き



傾き：微分係数

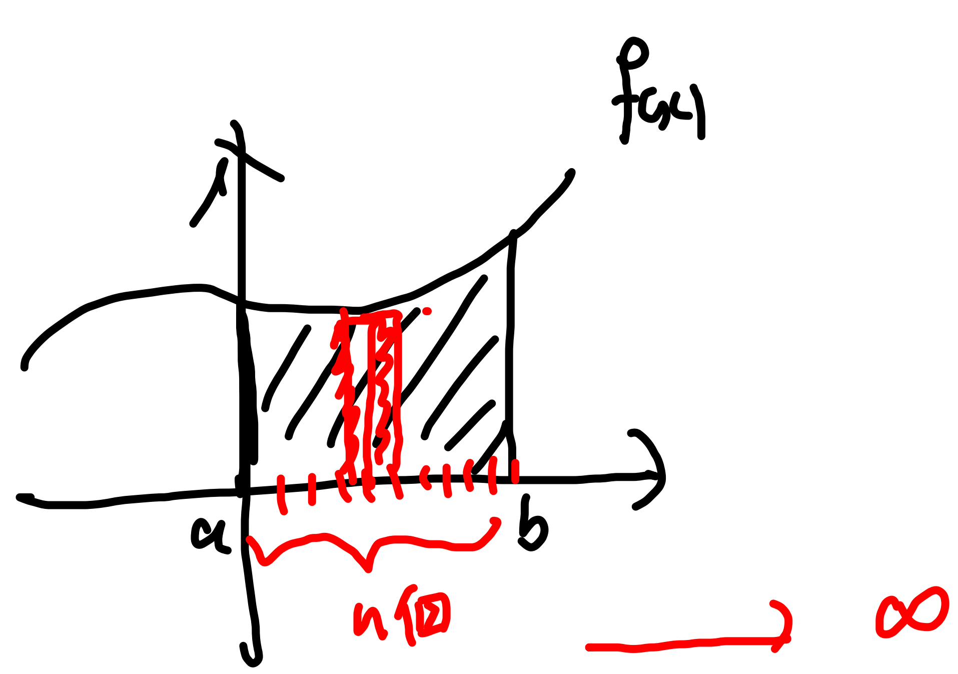
今のところ

微分と積分は

それほど関係なさそう。

積分：ある区間の面積をもとめるための区分求積法 → Riemann和 の応用

歴史的にも



$$\int_a^b f(x)\,dx$$

17c Isaac Newton.

$f(x)$：関数に対して微分すると $f(x)$ になる関数を

$F(x)$ とする。

$F(x)=x^3$

$F'(x)=3x^2=f(x)$

このとき

$$F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$$

f(x) と形が変わったが同じもの

が成り立つ。

重要

F(x) は微分したら f(x) となるもの

f(x) を積分したら F(x) となった。

$f(x) \underset{微分}{\overset{積分}{\rightleftarrows}} F(x)$ 逆

脱線話

万有引力

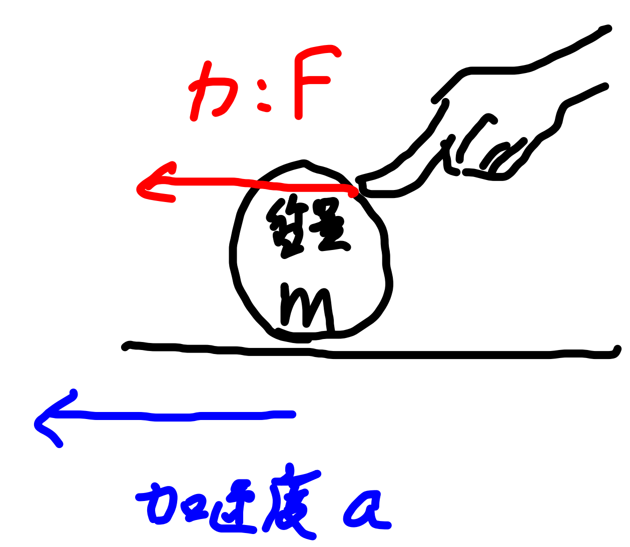
ニュートンの3大法則

第一法則：慣性の法則

静止している物体は静止状態
運動している物体は等速直線運動
を続ける

加速度 0 微

第二法則：運動の法則



力 質量 加速度

$F = ma$

① 力と加速度は正比例

$F = ma$

↑ 固定 ↑

② 加速度は質量と反比例

固定

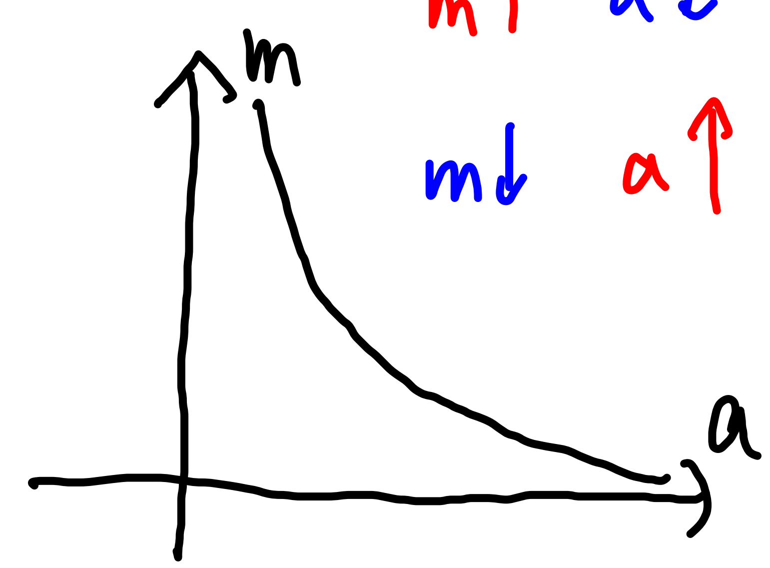
$\dfrac{F}{a} = m$

↓ ↑

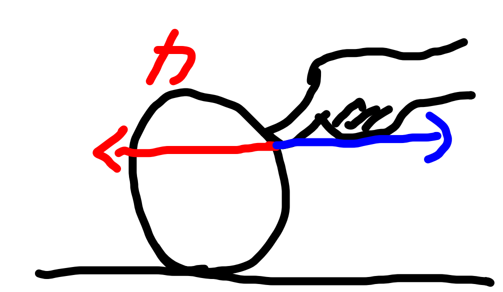
②の説明

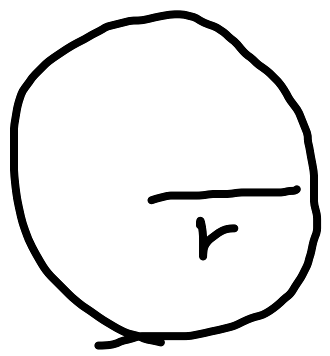
m↑ a↓

m↓ a↑



③ 作用・反作用の法則





円周 $2\pi r$

微分　積分

面積 πr^2

$$\int 2\pi r \, dr = \pi r^2 \; (+C)$$

積分定数
(のちほど)

$$(\pi r^2)' = 2\pi r$$

② $+1$

①

$$\frac{1}{0+1} \, 2\pi r^{1}$$

$= \frac{1}{2} \times 2\pi r^2$

$= \pi r^2$

① ② -1

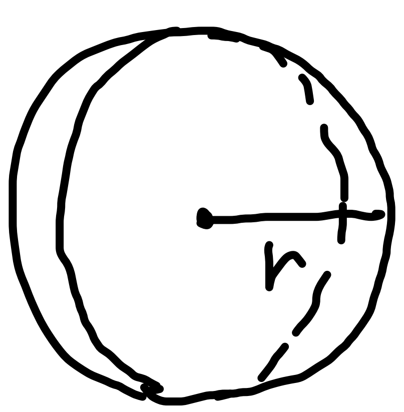
$$2 \times \pi r^{2}$$

$= 2 \times \pi r^{2-1}$

$= 2\pi r$

問題

・以下を確認



表面積 $4\pi r^2$

微分　積分

体積 $\frac{4}{3}\pi r^3$

球

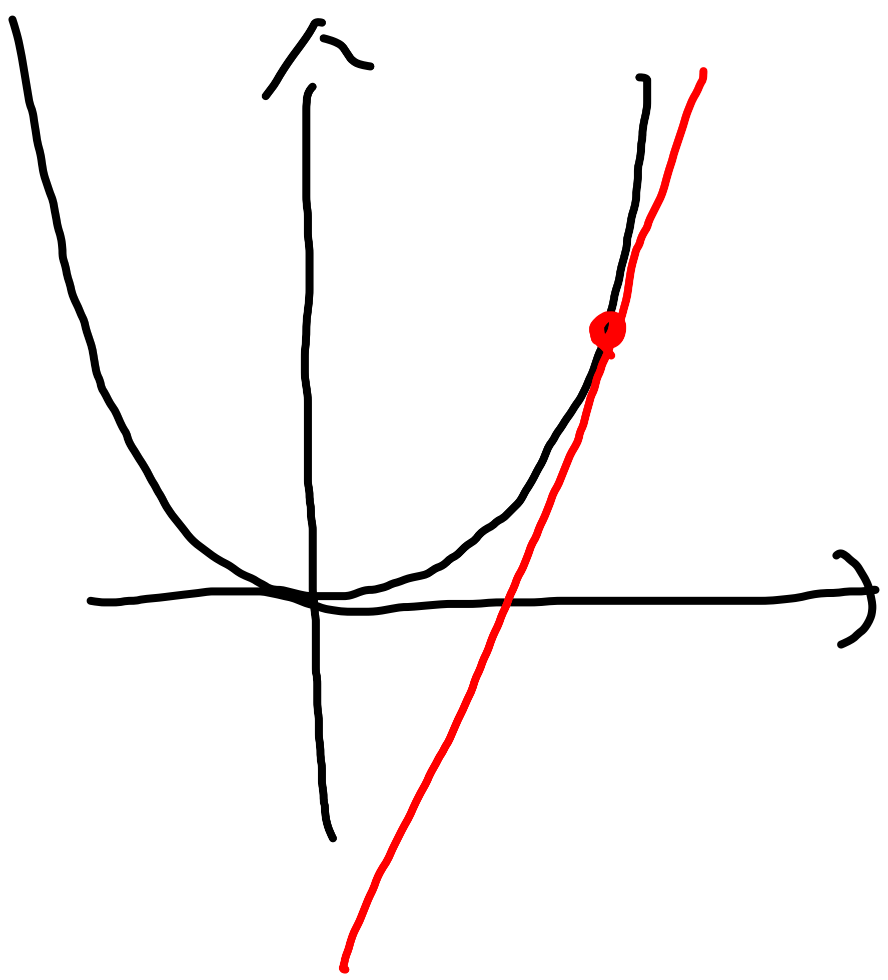
思いを馳せてほしいこと

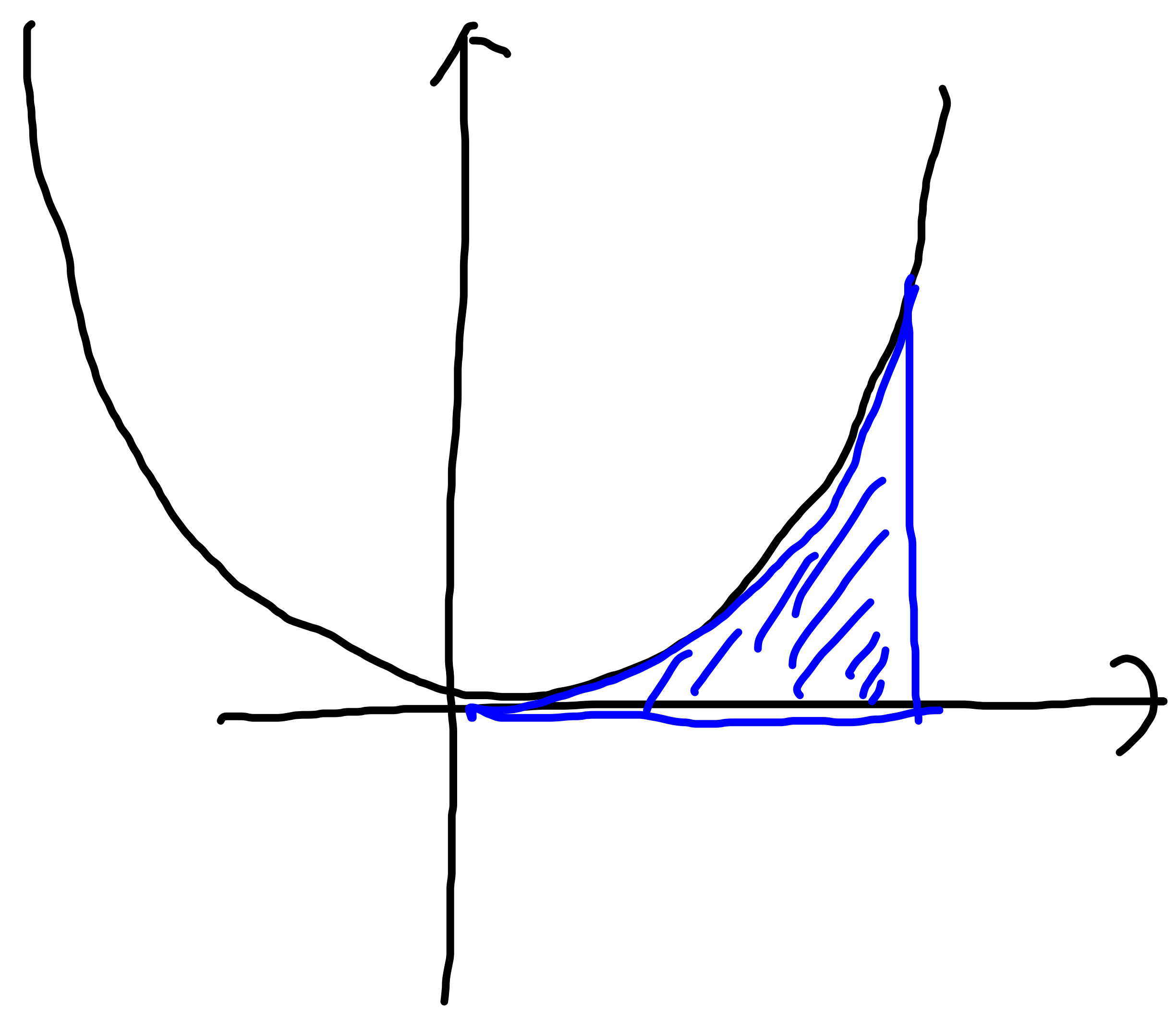
接線の傾きを求める

区間の面積を求める.

関係していた

という事実





今までの流れを思い出せるか、確めて下さい。

微分の諸性質（無理して覚えなくてよい）

使わないと必要性がわからない．

f, g：微分可能な関数

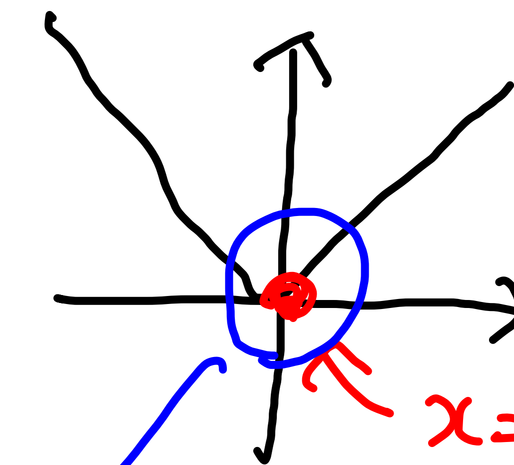
1. $(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$

2. $(f(x)\,g(x))' = f'(x)\,g(x) + f(x)\,g'(x)$

3. $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$ （$\neq 0$）

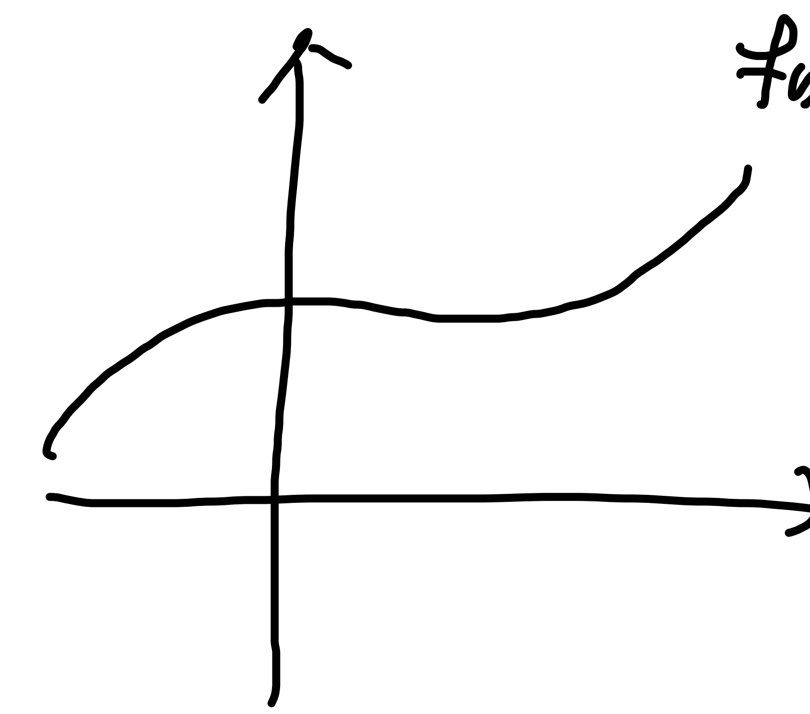
4. $(f(g(x)))' = f'(g(x))\,g'(x)$

$y = f(x) = |x|$



$x=0$で微分不可

尖っていることが問題



微分可能

⟺ 滑らかな関数

と呼ぶ

$f(x) = x^2 \qquad g(x) = 2x + 2$

1 $(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$

$(x^2 \pm (2x+2))'$

項ごとに微分

$= 2x \pm (2 + 0)$

$= 2x \pm 2$

$f'(x) \pm g'(x)$

$= (x^2)' \pm (2x+2)'$

$= 2x \pm (2+0)$

$= 2x \pm 2$

2. $(f(x)\,g(x))' = f'(x)\,g(x) + f(x)\,g'(x)$

$f(x)\,g(x) = x^2(2x+2)$

$= 2x^3 + 2x^2$

$(f(x)\,g(x))' = 6x^2 + 4x$

$f'(x)\,g(x) + f(x)\,g'(x)$

$= 2x(2x+2) + x^2(2+0)$

$= 4x^2 + 4x + 2x^2$

$= 6x^2 + 4x$

$f(x) = 3x^2 \qquad g(x) = x^2+1$

計算方法

3. $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$

$$\left(\frac{3x^2}{x^2+1}\right)'$$

$$= \frac{6x(x^2+1) - 3x^2(2x+0)}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{\cancel{6x^3} + 6x - \cancel{6x^3}}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{6x}{(x^2+1)^2}$$

確認は
4. の後に

4. $(f(g(x)))' = f'(g(x))\, g'(x)$

$f(g(x))$ 合成関数 $= 3(x^2+1)^2$ ← $f(x)$ ← $g(x)$

$= 3(x^4+2x^2+1)$

$= 3x^4 + 6x^2 + 3$

$(f(g(x)))' = 12x^3 + 12x + 0$

$= 12x^3 + 12x$

$f'(x) = (3x^2)'$

$= 6x$

$g'(x) = (x^2+1)'$

$= 2x$

$f'(g(x))\, g'(x) = 6(x^2+1) \times 2x$

$= 12x(x^2+1)$

$= 12x^3 + 12x$

3. の確認（テクニカル）

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

$(\neq 0)$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = f(x)\, g^{-1}(x)$$

書き方の違い

$$= f(x)\,(g(x))^{-1}$$

2. の $(f(x)g(x))'$

$= f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

が使える！

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \left(f(x)\,(g(x))^{-1}\right)'$$

$$= f'(x)\,(g(x))^{-1} + \left(f(x) \times -(g(x))^{-2} g'(x)\right)$$

$$= f'(x)\,(g(x))^{-1} - f(x)(g(x))^{-2} g'(x)$$

$\frac{1}{2} = 2^{-1}$

両辺に 2 をかけると

左辺 $= \frac{1}{2} \times 2 = 1$

右辺 $= 2^{-1} \times 2^{1}$

$= 2^{(-1+1)}$

$= 2^0$

$= 1$

$((g(x))^{-1})'$

$h(x) = x^{-1}$

$(h(g(x)))' = ((g(x))^{-1})'$

合成関数

4. の性質

$$\frac{f(x)}{g(x)} = f(x)\left(g(x)\right)^{-1}$$

$\Downarrow$ 2の性質

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = f'(x)\left(g(x)\right)^{-1} + f(x)\left\{\left(g(x)\right)^{-1}\right\}'$$

$\Downarrow$ 4の性質(合成関数)

$$= \underline{f'(x)\left(g(x)\right)^{-1}} - f(x)\left(g(x)\right)^{-2} g'(x)$$

$$\times 1 = g(x)\, g^{-1}(x)$$

$$= f'(x)\, g(x)\, \underline{\left(g(x)\right)^{-2}} - f(x)\, \underline{\left(g(x)\right)^{-2}}\, g'(x)$$

$$= \left(f'(x)\, g(x) - f(x)\, g'(x)\right)\left(g(x)\right)^{-2} = \frac{1}{g^2(x)}$$

$$= \frac{f'(x)\, g(x) - f(x)\, g'(x)}{g^2(x)}$$

目的地

$$\boxed{\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}}$$

$$3 \times 1 = 3$$

$$1 = \frac{2}{2} = 2 \times 2^{-1}$$

$$3 \times \frac{2}{2} = 3$$

1 $\left(f(x) \pm g(x)\right)' = f'(x) \pm g'(x)$

2. $\left(f(x)\,g(x)\right)' = f'(x)\,g(x) + f(x)\,g'(x)$

3. $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x)\,g(x) - f(x)\,g'(x)}{g^2(x)}$

4. $f(g(x)) = f'(g(x))\,g'(x)$

式は忘れていいので、性質があったことは

覚えておいて下さい

積分の諸性質

1. $\int (f(x) \pm g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx \quad (+C)$

2. 部分積分 (難)

$$\int f(x)\,g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)\,g(x)\,dx \quad (+C)$$

3. 置換積分 (やや難)　xに関する積分をtに関する積分に置き換える.

$$\int f(x)\,dx, \qquad x = g(t)$$

$$\int f(x)\,dx = \int f(g(t))\,g'(t)\,dt$$

こういう話のがあるよ!

微分の表現

$f(x)$ が微分可能なとき、導関数を $f'(x)$ と表現していた。

こっちの方が使われる $\longrightarrow$ $\dfrac{df(x)}{dx}$

① 分数ではない

② でも分数の機能を持つ

「$f(x)$ を x に関して微分」と読む。

$$(4a^2+3b^2-2az+2by^2)'$$
$$= 6b+4y^2$$

どの変数を微分したかわからない

$$\frac{d(4a^2+3b^2-2az+2by^2)}{db}$$

b に関してとわかる。

統計で出てくる多変数（多変量）

$f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$

各 x_i の微分

$$\frac{\partial f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_i} \quad (i=1,2,\dots,n)$$

$\dfrac{df(x)}{dx}$ を見慣れると良い。

少しだけ置換積分を解説

$y = f(x)$, $x = g(t)$

$f(x)$が積分可能とすると

$$\int f(x)\,dx$$

を考えることができる。 これを t の積分に置き換えるとき.

式中の全ての x を t の式に置き換える必要がある.

$f(x) \to f(g(t))$ ok?

$dx \to$??

$$dx = dx \times 1$$
$$= dx \times \frac{dt}{dt}$$
$$= \frac{dx}{dt}\,dt$$

$$\int f(x)\,dx = \int f(g(t))\underbrace{\frac{dx}{dt}}\,dt$$

よくみると x を t で微分

$$= \int f(g(t))\,g'(t)\,dt$$

$x = g(t)$

$\to \frac{dx}{dt} = g'(t)$

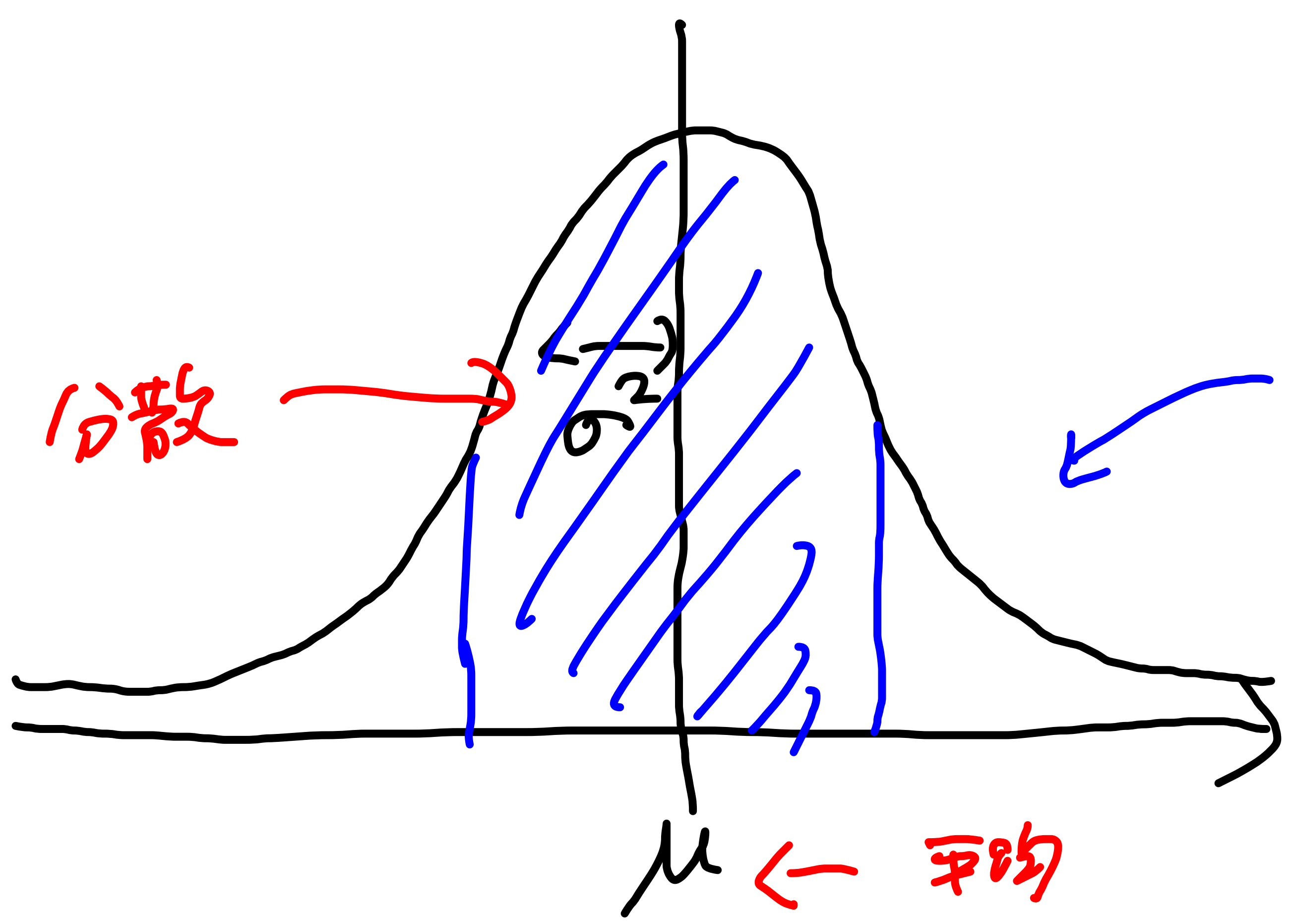
これ以上は紹介にも

お腹いっぱいだと思うので

あとは適宜紹介します。

なぜ統計、確率で微分積分を使うのか？

正規分布 $$N(\mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$



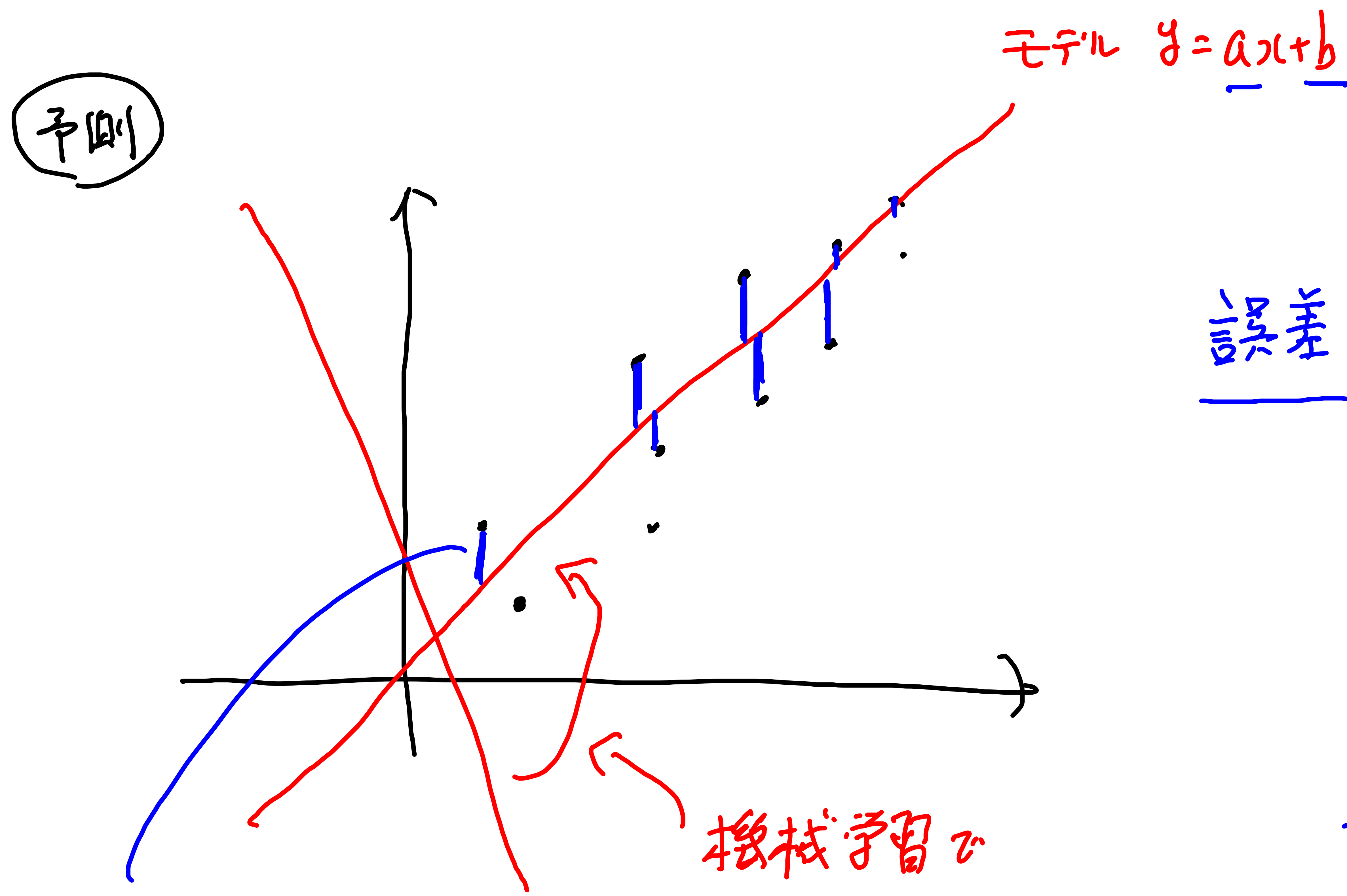
どのくらいの頻度が起こるか？

→ ▨の<u>面積</u>で計算する

↑

積分

機械学習 ← モデルを作って予測、分類



機械学習でモデルを良くする

モデルを作る

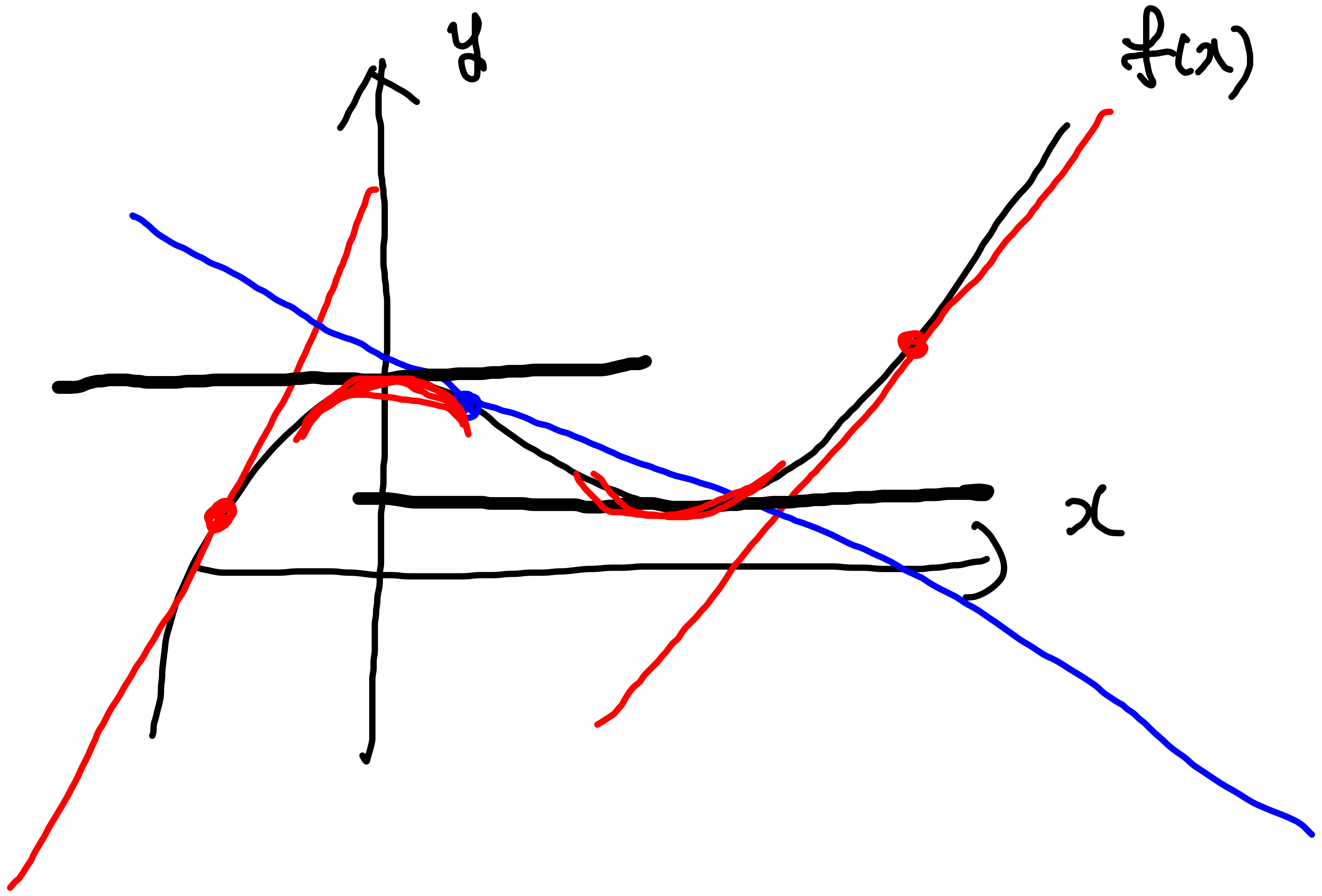
⟺ 良い a と b を求める。

誤差関数

- モデルのパラメータが式の中にある。
- 誤差を集めたもの
- $\geqq 0$
- 0に近づくようにモデルのパラメータを調整する。

誤差：実際のデータとモデルの差

微分の性質（重要） → 元の関数のある点に接する傾き



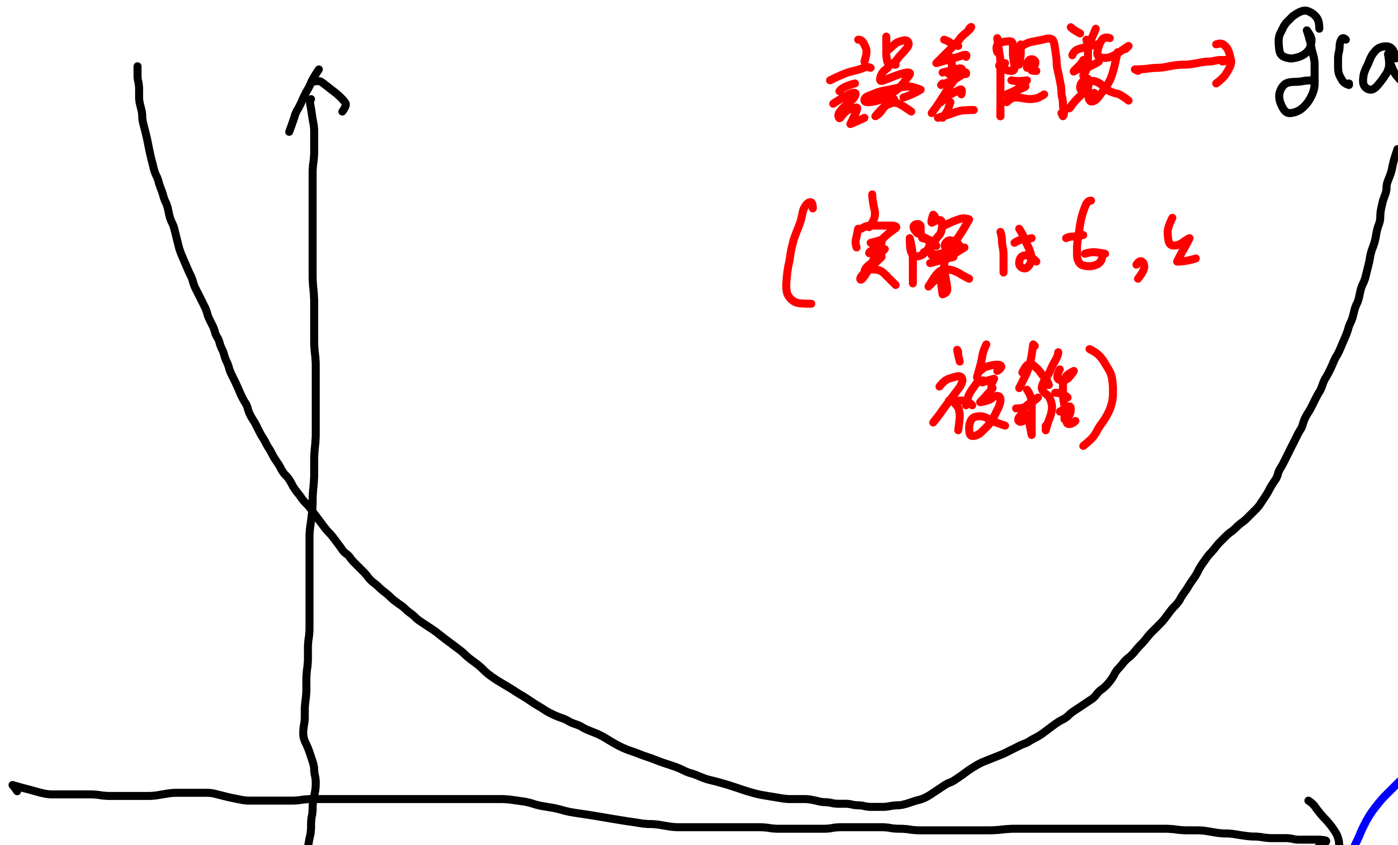
接線は 3パターン 存在する。

／ : 接線の傾きが＋のとき

＼ : 接線の傾きが－のとき

— : 接線の傾きが0のとき

f(x)が頂点か谷底のとき



誤差関数 → g(a,b)

（実際はもっと複雑）

$$\frac{\partial g(a,b)}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial g(a,b)}{\partial b} = 0$$

となる a, b をみつける

微分が必要。

→ その a, b が誤差関数が最小となる a, b

まとめ

- 微分積分学の基本定理によって微分と積分の関係性が明らかになった.

- 微分・積分の諸性質については存在を覚えてほしい.

- 「統計・確率と機械学習」にはどうやら微分積分学が必要そう。

次回予告

確率

(条件付き確率も?)