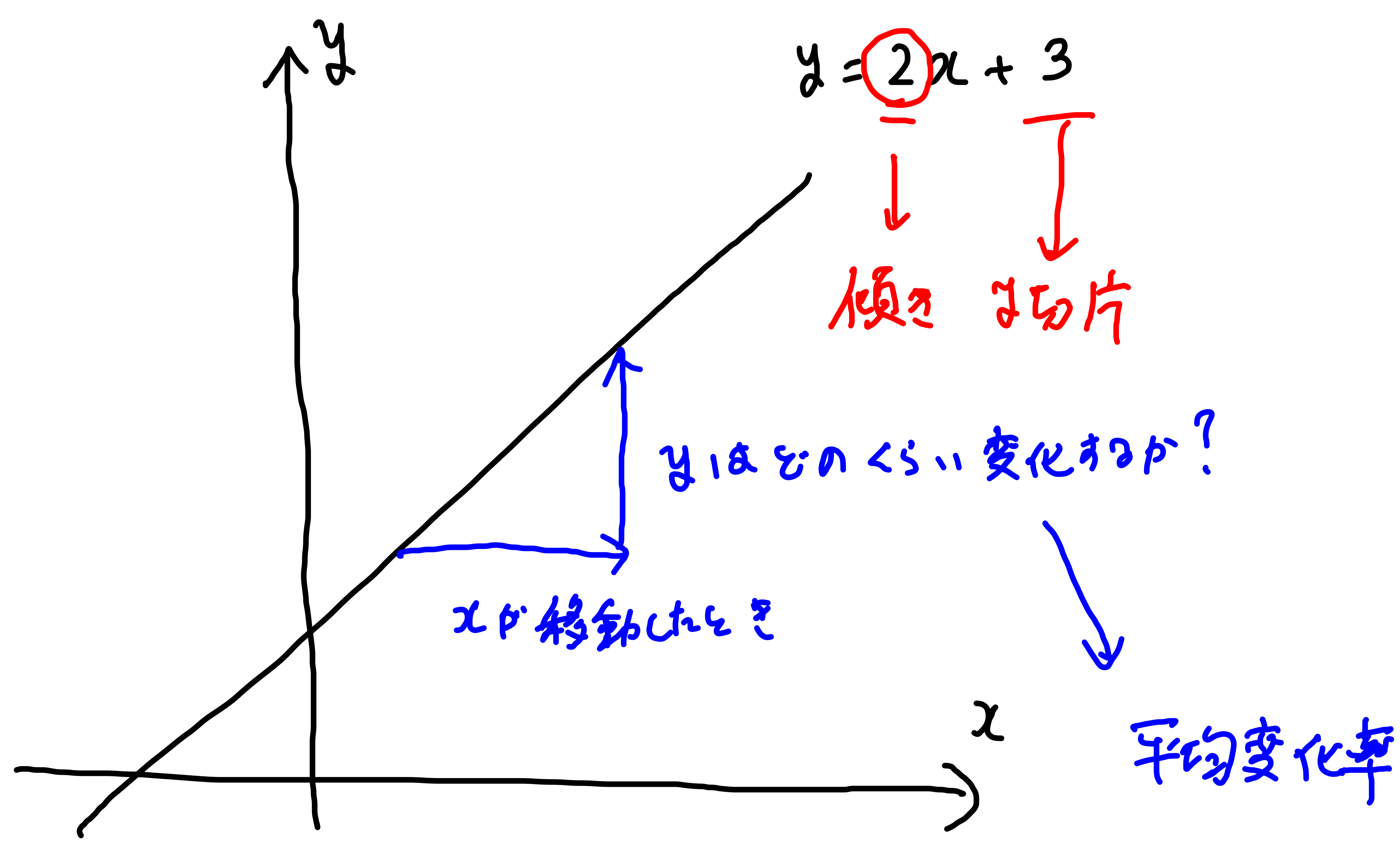
機械学習や

統計検定のための数学

〜平均変化率と微分〜

平均変化率（中学）

覚えてますか？



$y = 2x + 3$

$x = 1 \quad \cdots \quad y = 2 \times 1 + 3$

$= 5$

$x = 3 \quad \cdots \quad y = 2 \times 3 + 3$

$= 9$

$$平均変化率 = \frac{9 - 5}{3 - 1}$$

$$= \frac{4}{2}$$

$$= 2$$

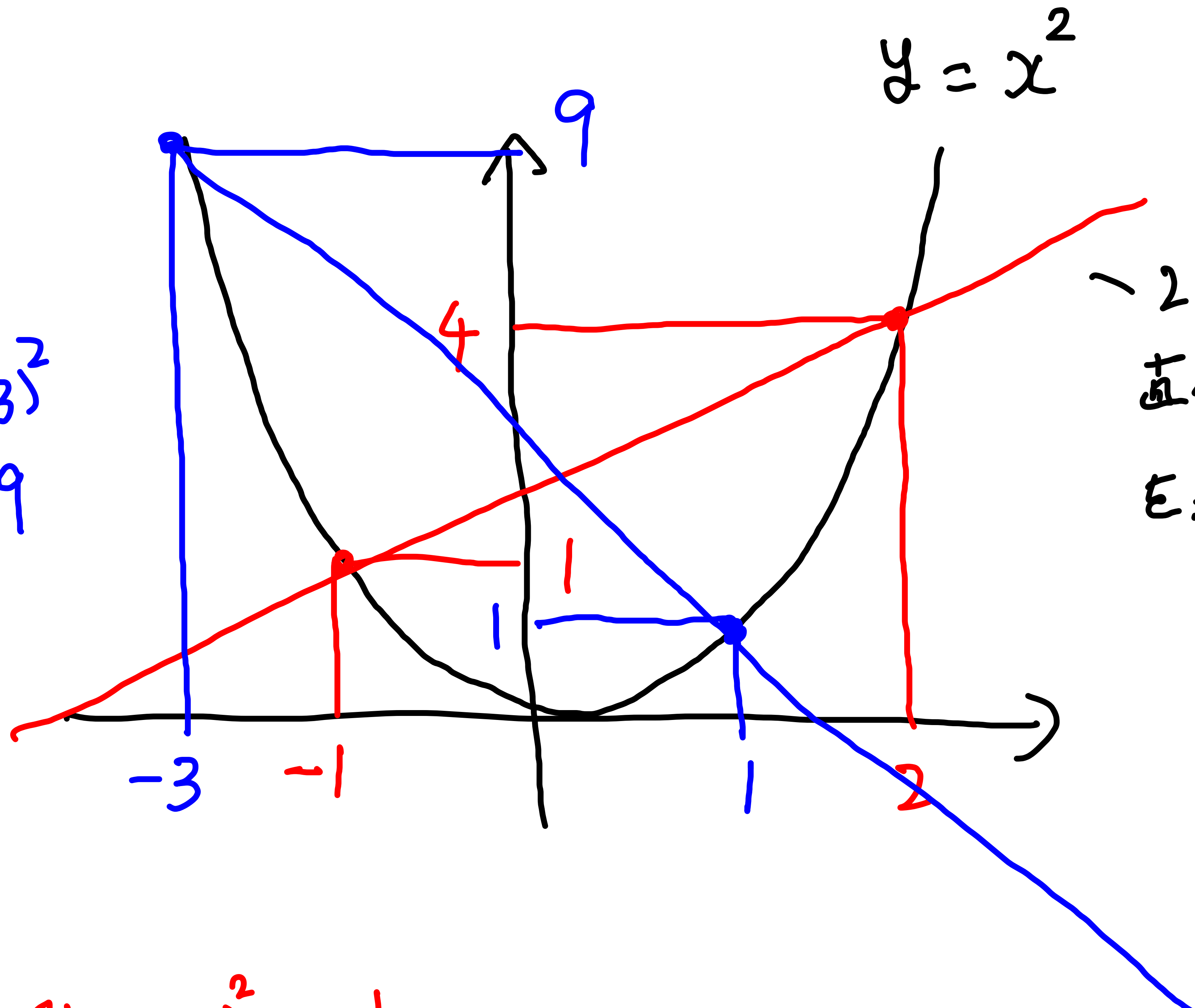
$$平均変化率 = \frac{\boxed{変化後のy座標} - \boxed{変化前のy座標}}{\boxed{変化後のx座標} - \boxed{変化前のx座標}}$$

$$= \frac{yの変化量}{xの変化量}$$

直線の場合は傾きが平均変化率

どちらが先でもよい！

$y = (-3)^2$
$= 9$



← 2点を結んだ
直線の傾き(平均変化率)
を求める

$y = (-1)^2 = 1$

$$\frac{4 - 1}{2 - (-1)}$$

$$= \frac{3}{3}$$

$$= 1$$

違う…

$$\frac{1 - 9}{1 - (-3)}$$

$$= \frac{-8}{4}$$

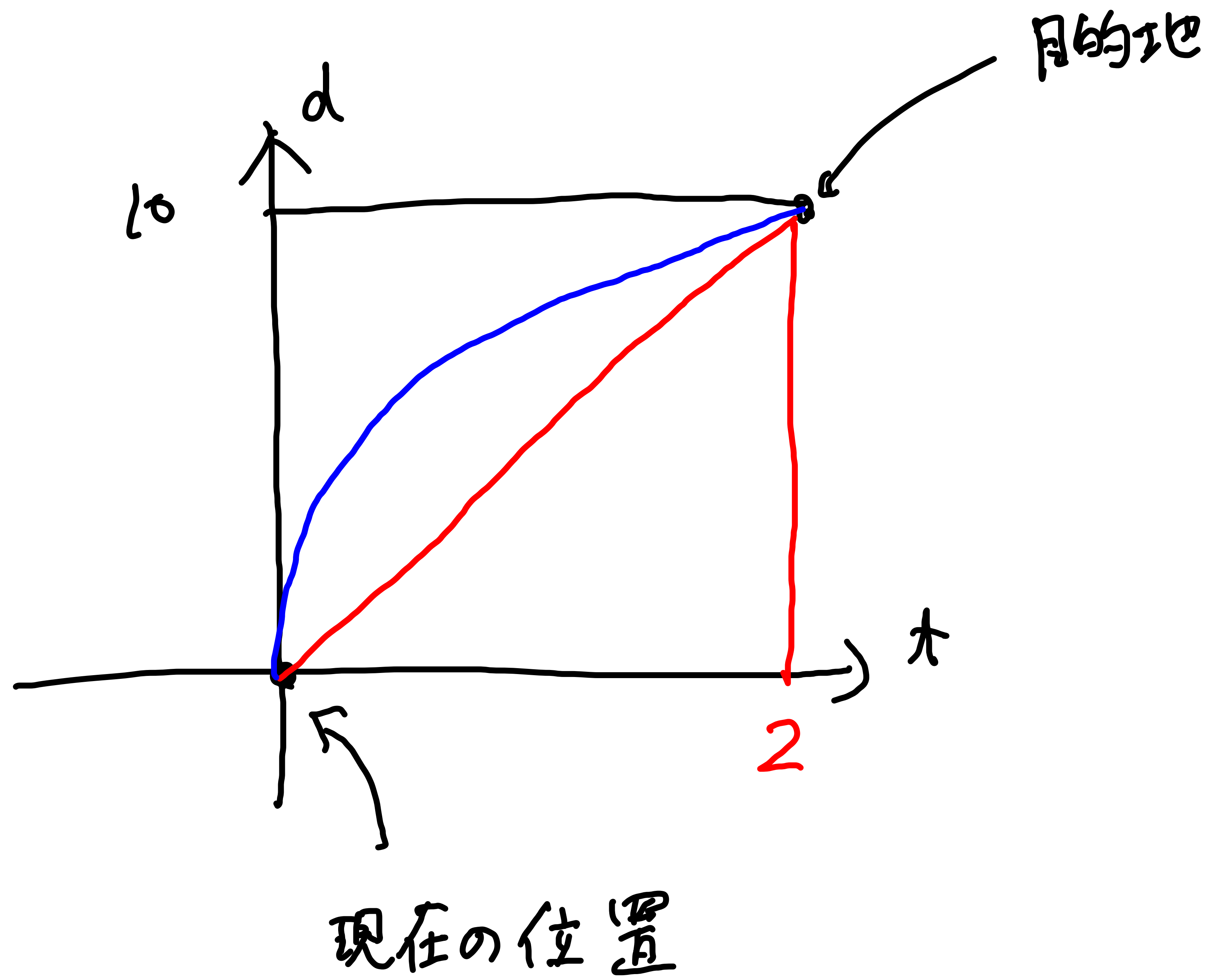
$$= -2$$

直線(一次関数)以外
の関数では 一般的に
選択する2点で平均変化率
は異なる。

$$\text{速度} = \frac{\text{距離}(d)}{\text{時間}(t)} \quad \text{km/h}$$

青の場合でも確かに2時間で10km進んでいる。しかし、常に時速5kmか…?

→ No



移動中の地点ごとに速度は変化している。

実は速度は

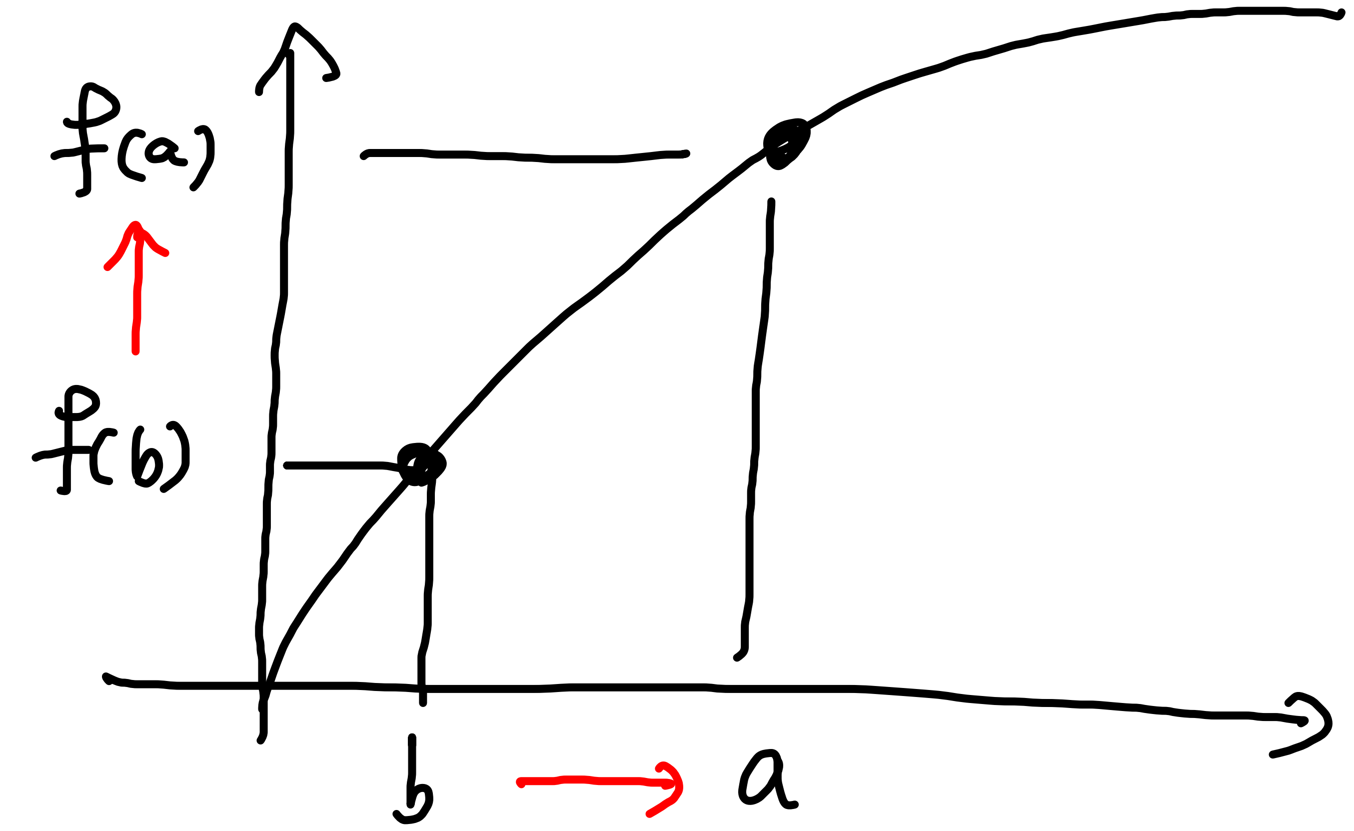
$$\frac{10-0}{2-0} = 5 \left(\text{km/h}\right)$$

からもわかるように平均変化率である。

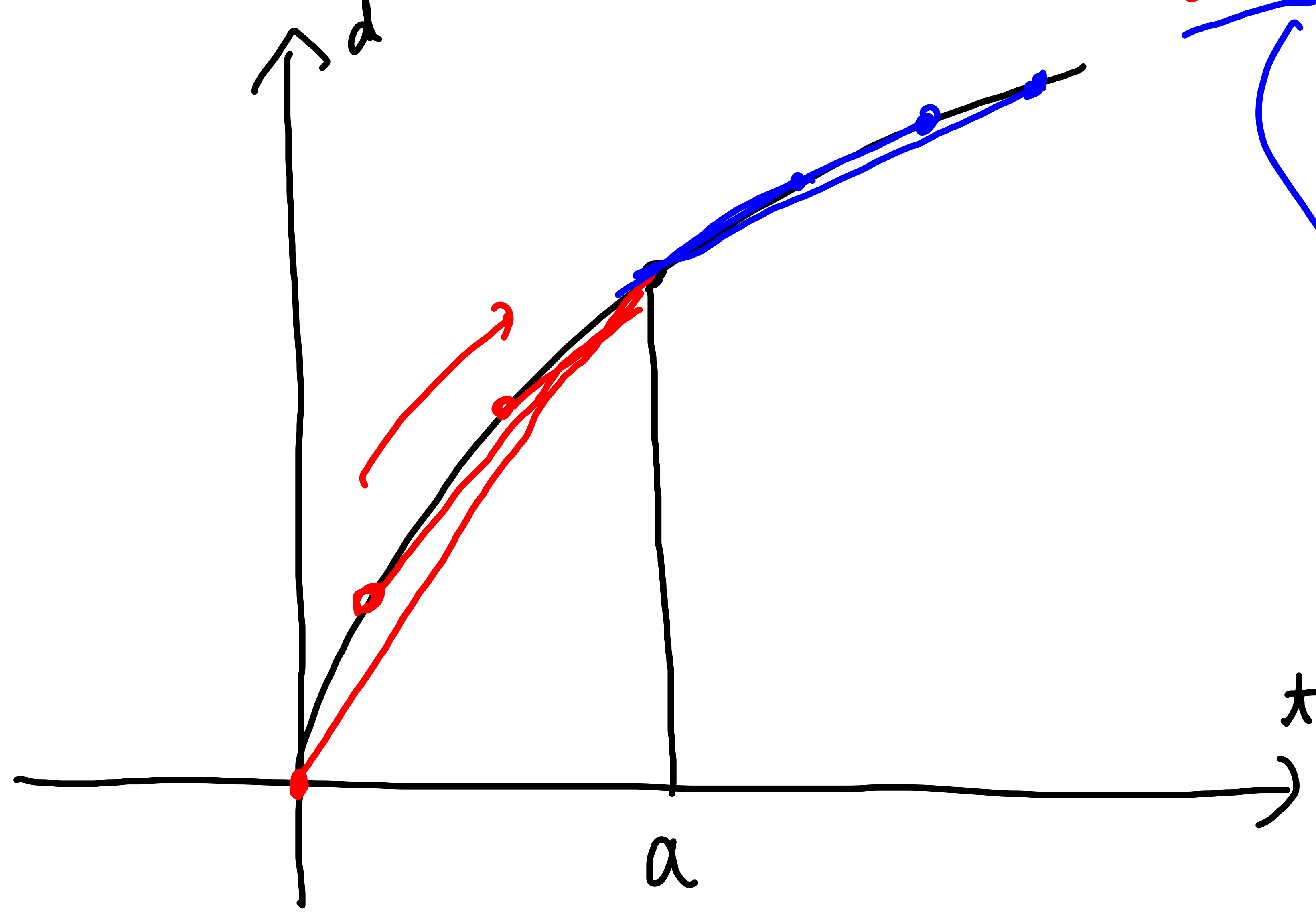
"ある瞬間"の速度が計算できる!

$$\lim_{x \to y} f(x) = f(y)$$

のように書くと
「xを限りなくyに近づけたとき、f(x)はf(y)に限りなく近づく」を表すことができます。



lim(極限)で(a, f(a))と(b, f(b))の2点の(速度の)平均変化率から時間bにおける速度を求める。



$$\lim_{b \to a} \frac{f(a) - f(b)}{a - b}$$

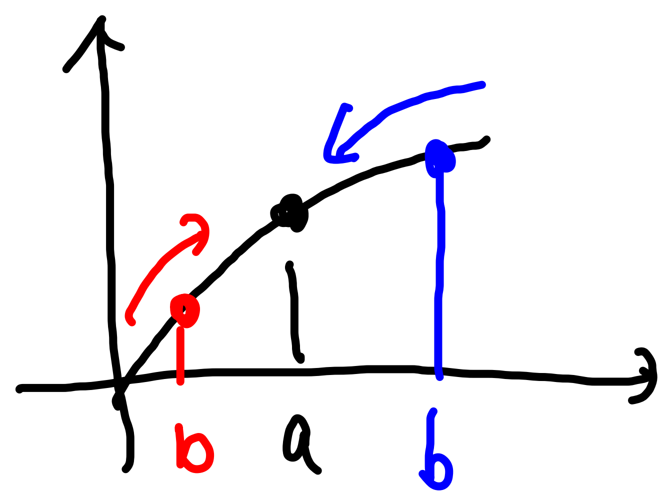
→ → の両方からaに近づけることで

時間aの速度が計算できる。

Not 代入!

<少しだけテクニカルな話>

1.



どちらも考える必要がある.

→厳密な部分は今回はなし

$h = b - a$ とおく.

↓

hは aとbの間の距離のようなもの.

距離 $\geqq 0$ (定義)

$$h\ ;\ \begin{cases} > 0 & (b > a) \\ < 0 & (a < b) \end{cases}$$

難しいので、少し考えて下さい
(図など描いてみるとよいです。)

2. "$b \to a$ に近づける" とは、"h を 0 に近づける" と同義.

$$\lim_{b \to a} \frac{f(a) - f(b)}{a - b} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a) - f(a+h)}{a - (a+h)}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(a) - f(a+h)}{-h} \begin{matrix} \times -1 \\ \times -1 \end{matrix}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

1. より $h^{+a} = b - a^{+a}$

$b = a + h$

代入

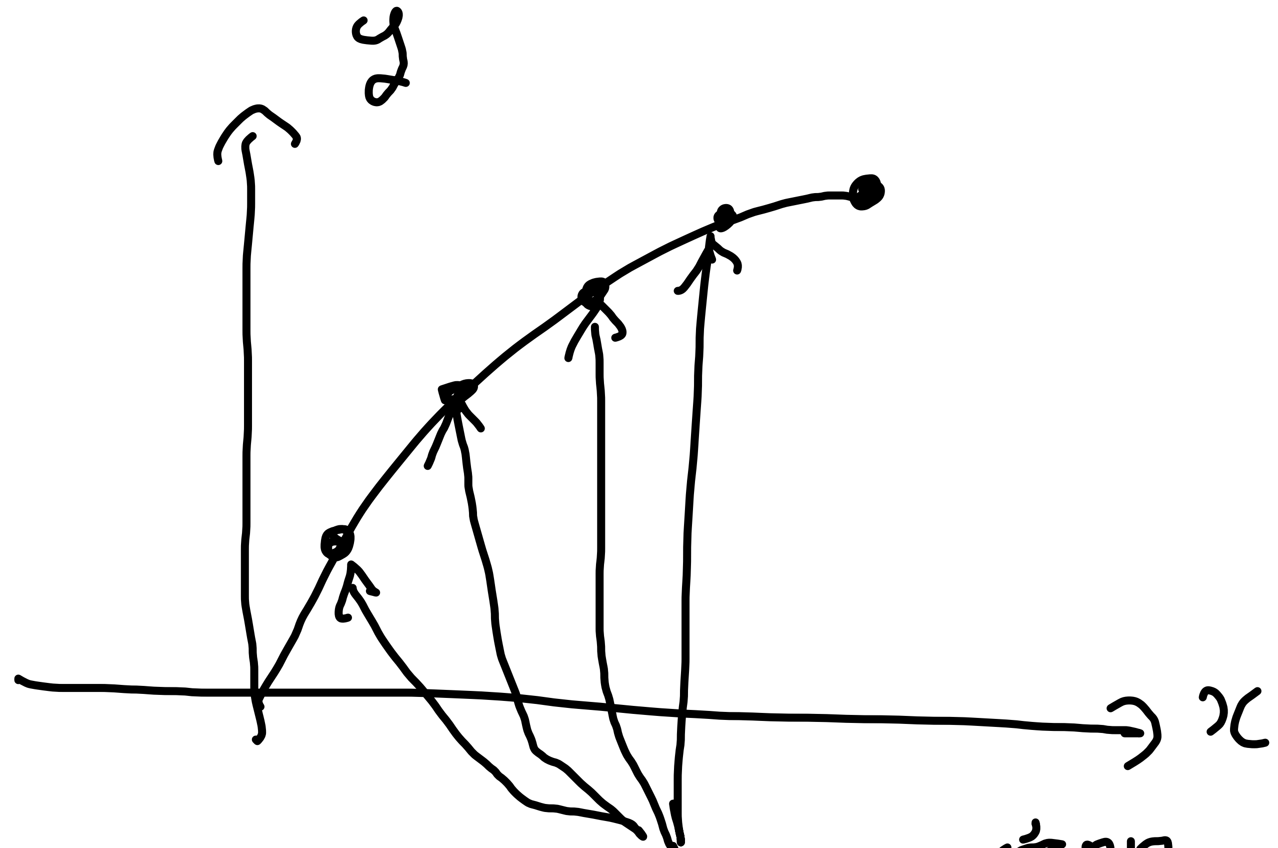
2. より $\lim_{b \to a}$ と $\lim_{h \to 0}$ は同じ

難しいので よく考えてみて ください.

やっていることは2点の平均変化率を1点に近づけていること!

a でした.

~~h~~ をある一点ではなく，どの瞬間の速度でも計算できるようにするために. x を置く.



どの瞬間でも計算できるようにする.

すなわち

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x)-f(x+h)}{h}$$

これが"微分"と呼ばれるもので. $f'(x)$ と表す.

$f(x)$ の微分

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x)-f(x+h)}{h}$$

$f(x)$ の $x=a$ に関する微分 $f'(a)$ を微分係数という。

$f'(x)$ は関数。

$f'(a)$ は定数。

万能ではない計算法

$$y = 2x^3$$

$$y' = 6x^2$$

試しに $y = 4x^2$ を微分してみてください。

→ $y' = 8x$

① ×

② −1

$$2x^{3}$$

$$= \underline{3 \times} \, 2x^{\underline{3-1}}$$

$$= 6x^2$$

×

−1

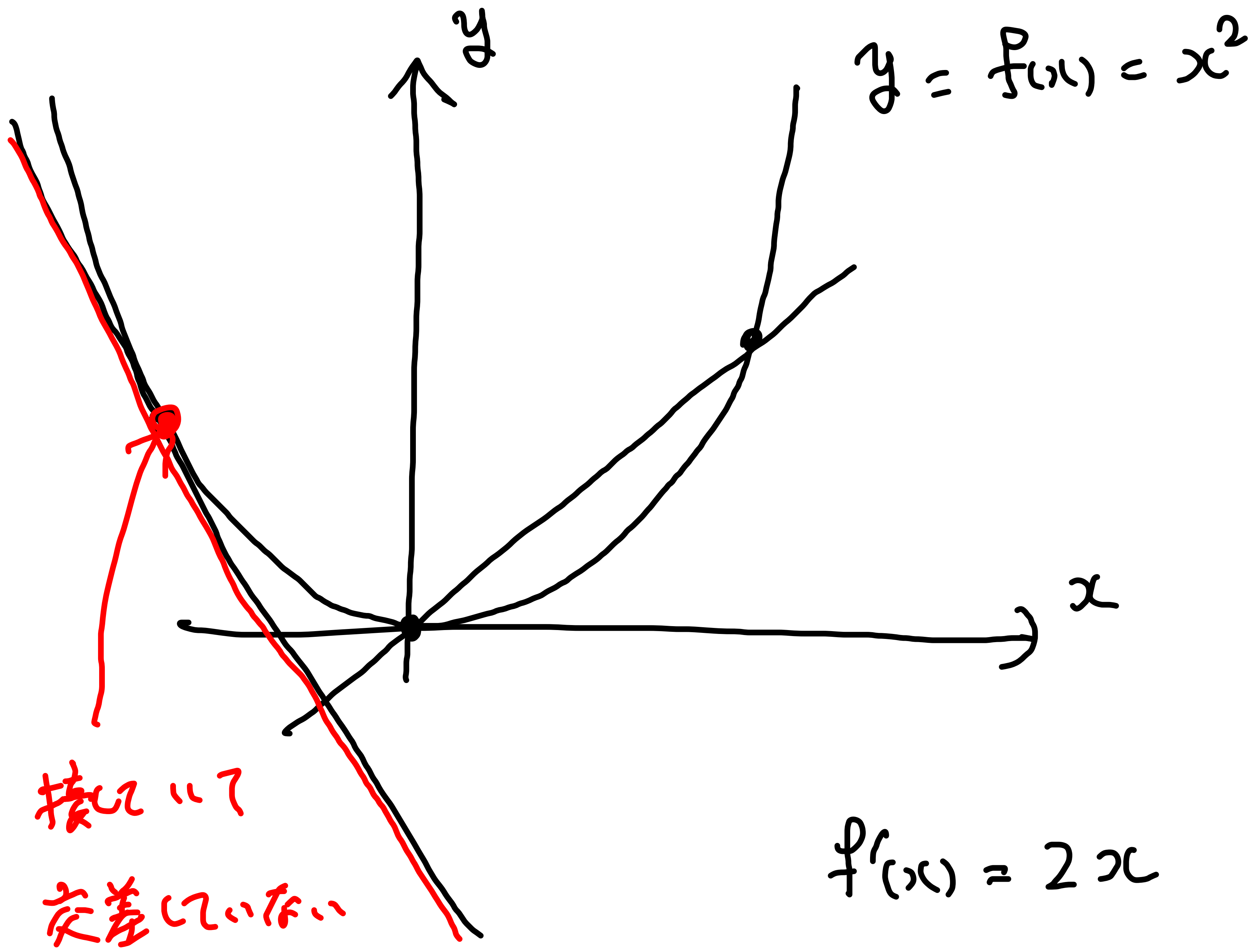
$$1x^{1}$$

$$= 1 \times 1x^{1-1 = 0}$$

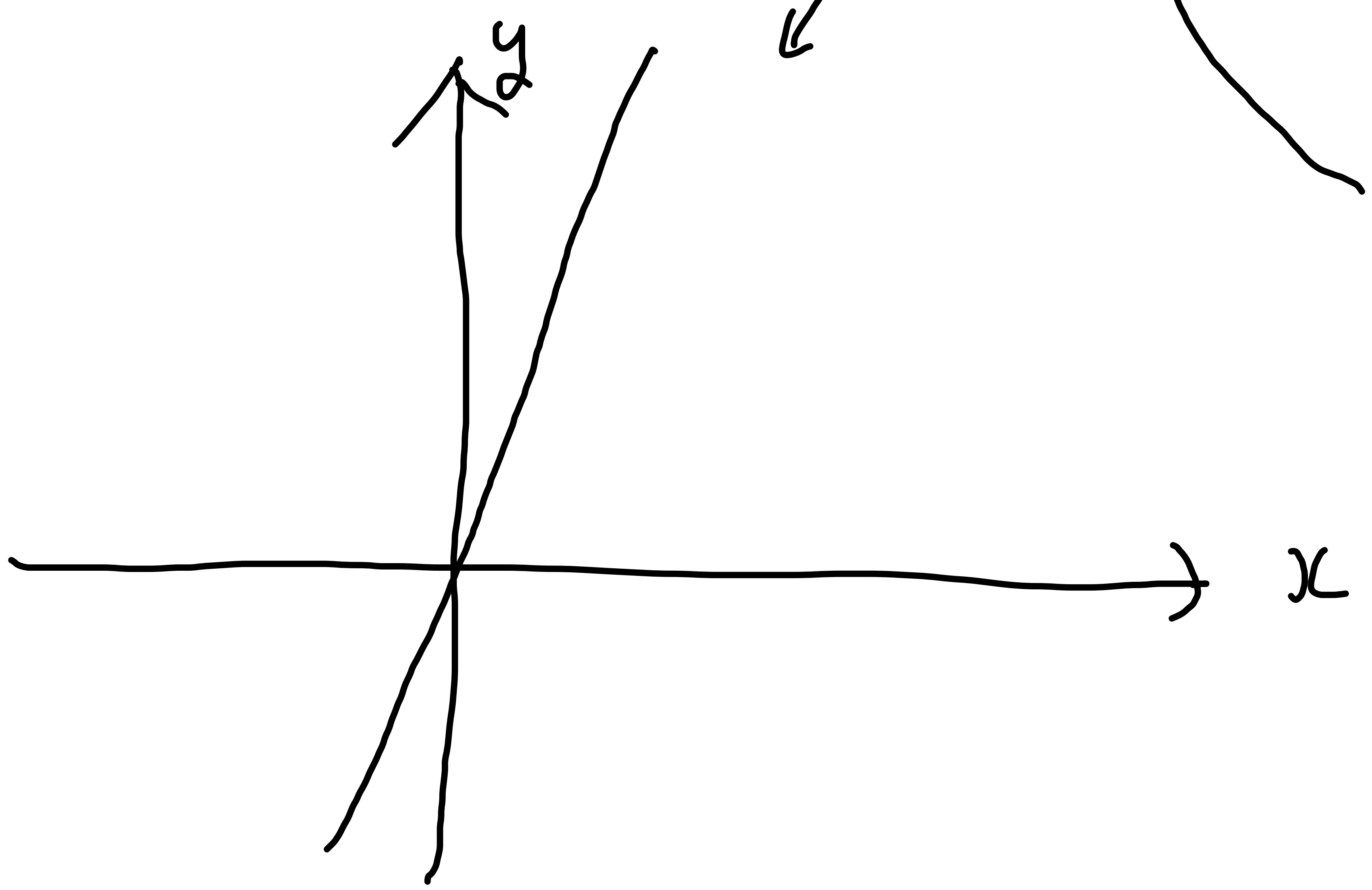
$a^0 = 0$

$$= 1 \times 1$$

$$= 1$$



$f'(x) = 2x$



微分したものは関数

平均変化率 : 2点の変化率

↓

2点を通る直線の傾き

↓

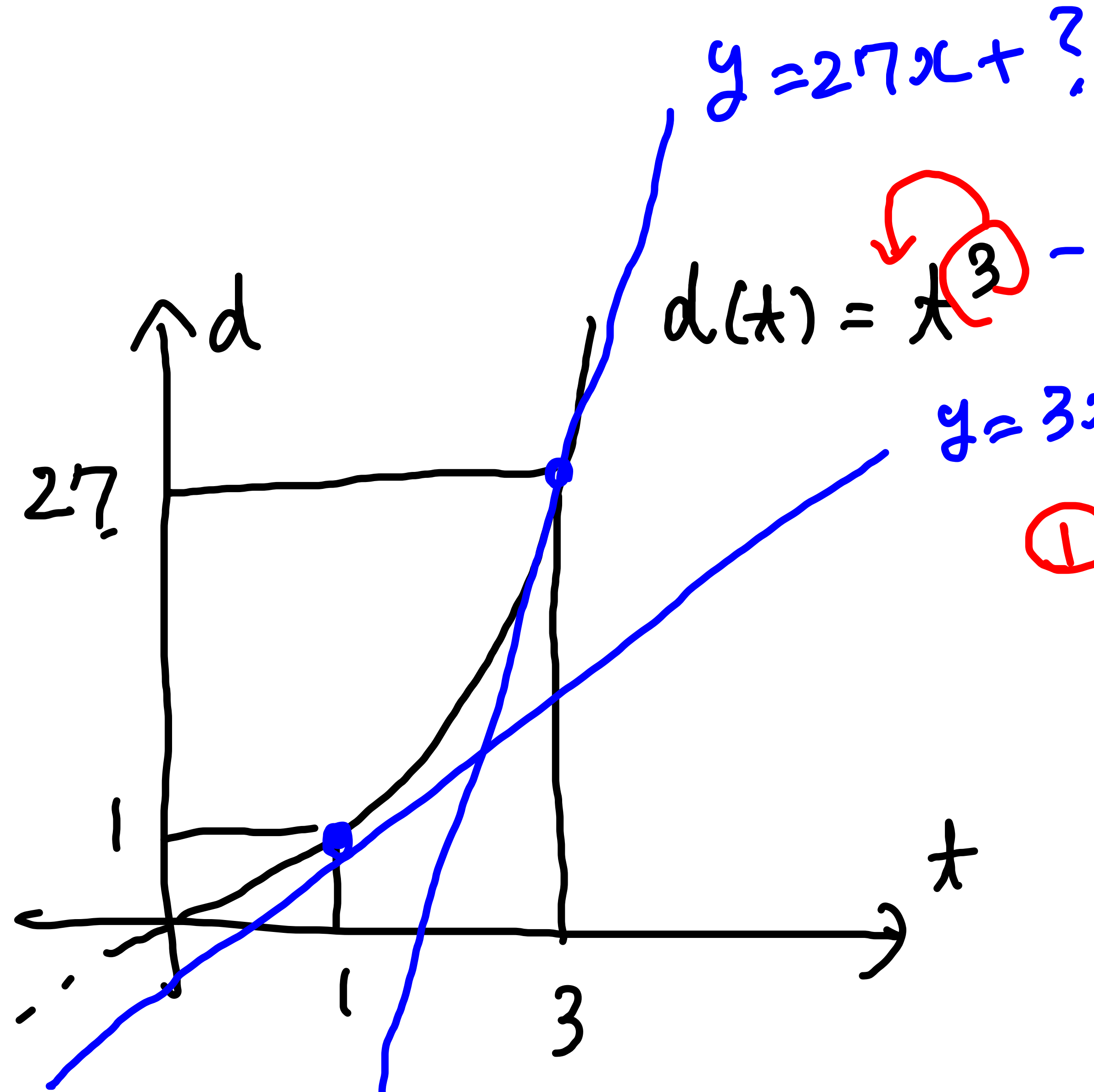
微分係数 : 1点の変化率

↓

1点のみを通る直線の傾き

↓

接線

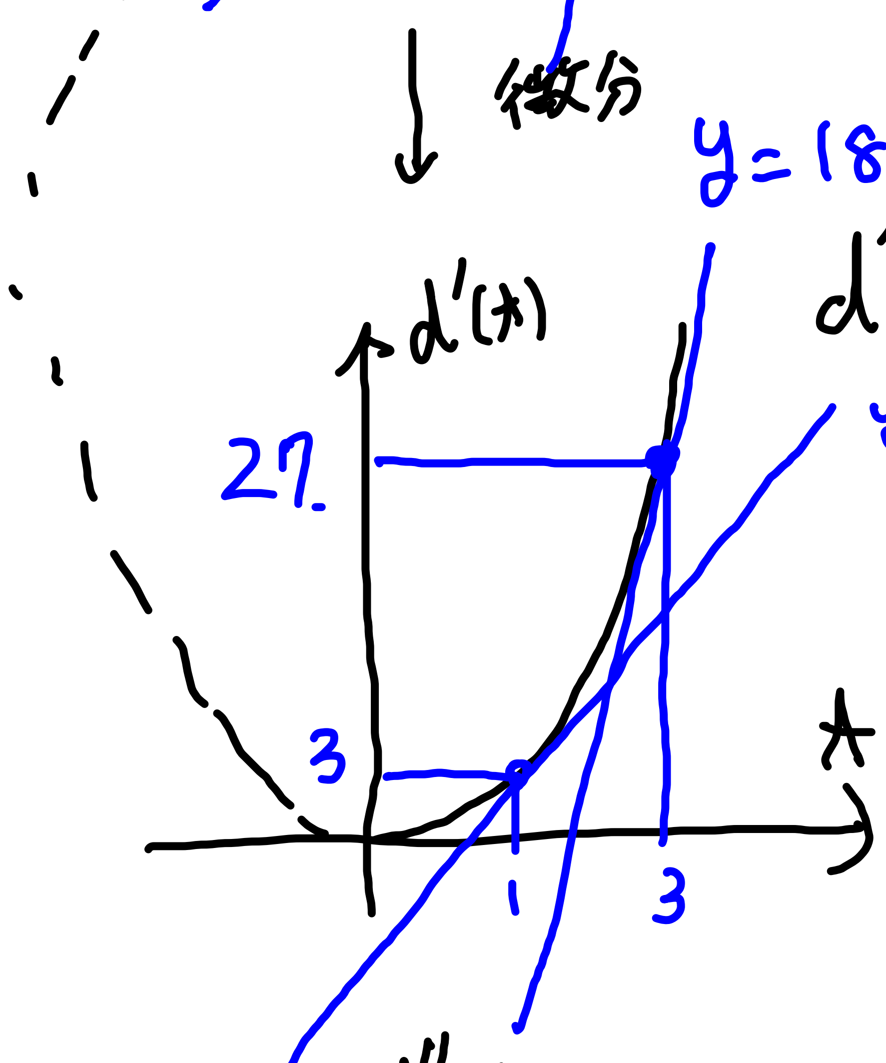


$d(t) = t^3$ −1

① 実際に計測したデータ

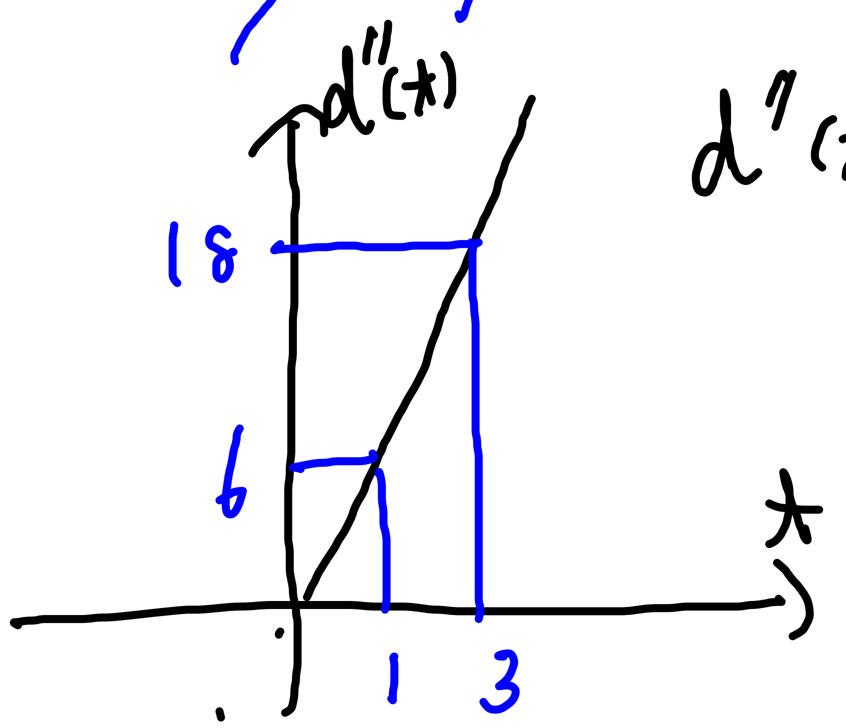
速度が上がると
実際に進む距離が
増加する！

↓ 微分



$d'(t) = 3t^2$

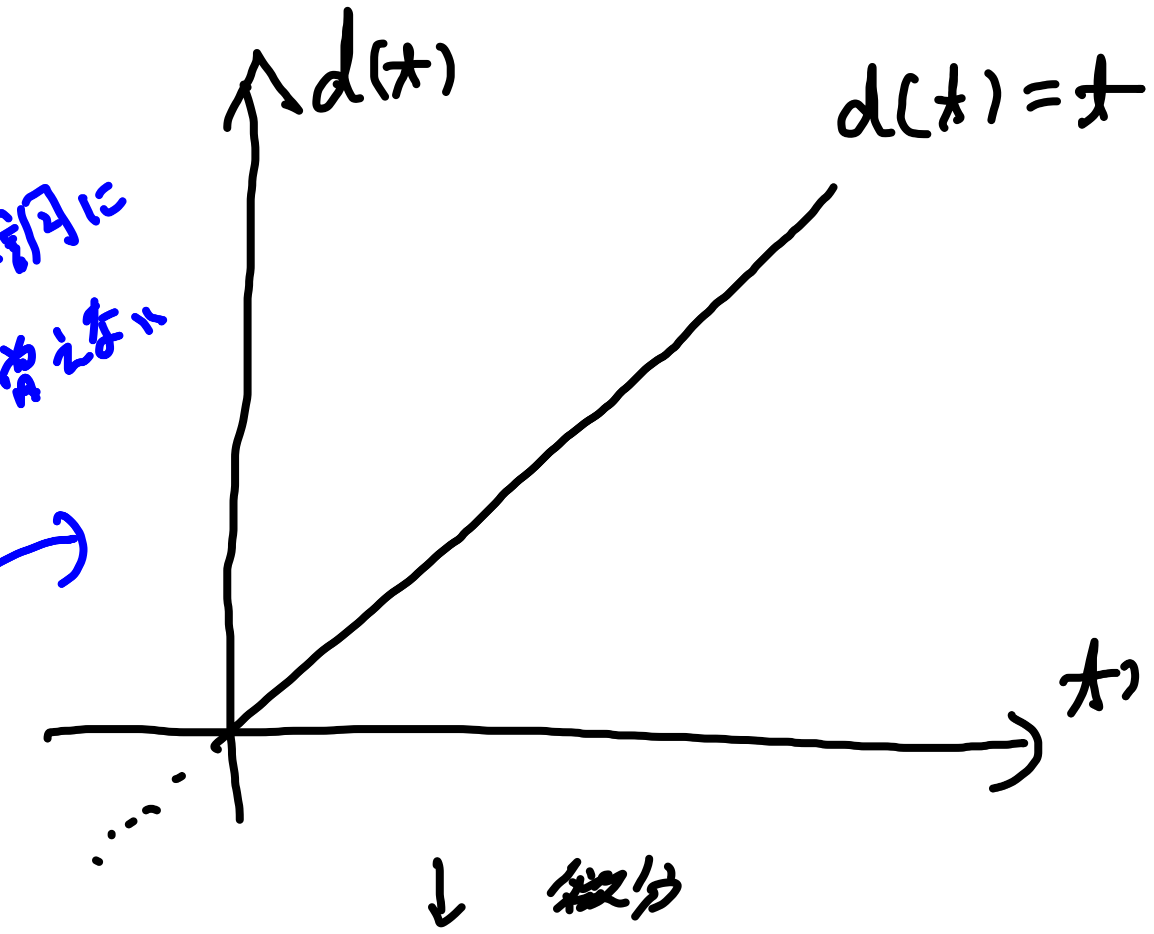
② ①を使って計算した
各時間における速度



$d''(t) = 6t$

加速度が上がると
速度が増加する！

③ ②を使って計算した
各時間における加速度

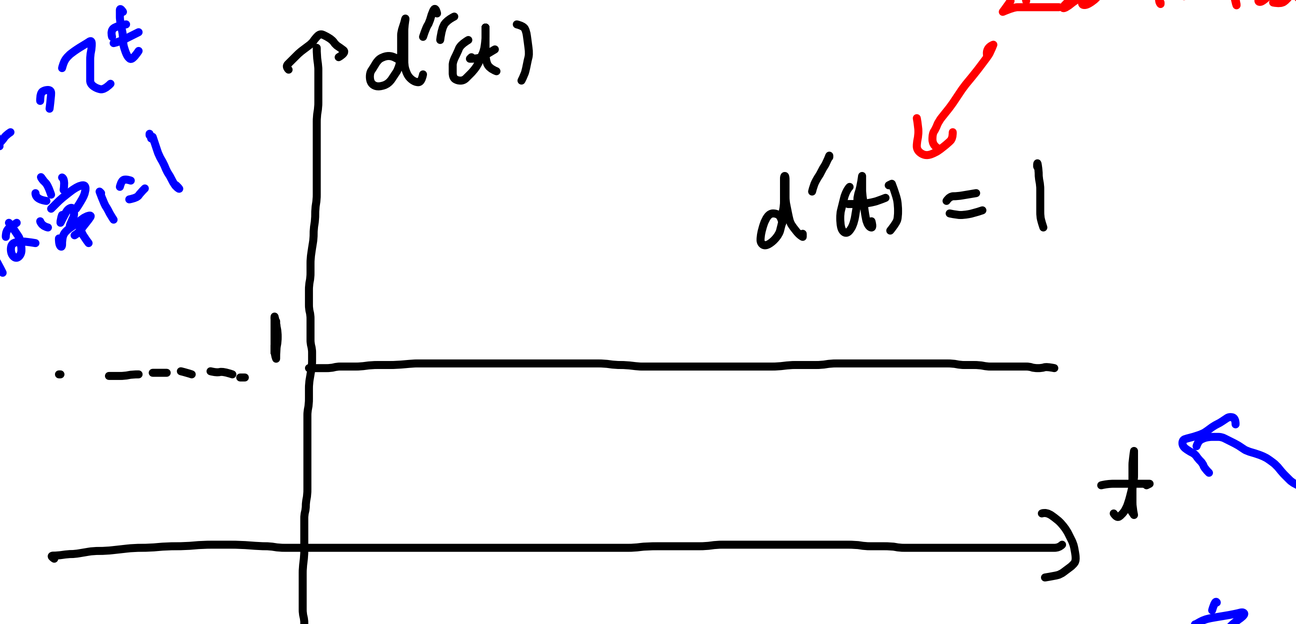


$d(t) = t$

距離は単調に
しか増えない

↓ 微分

定数関数



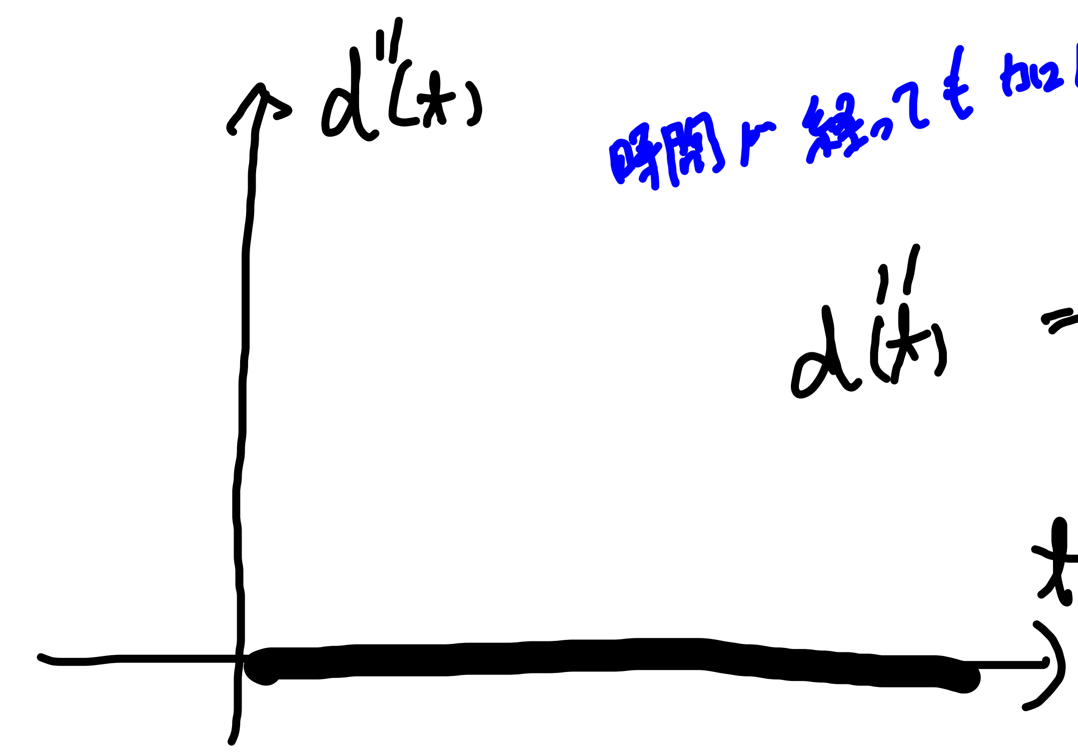
$d'(t) = 1$

時間が経っても
速度は常に1

一定

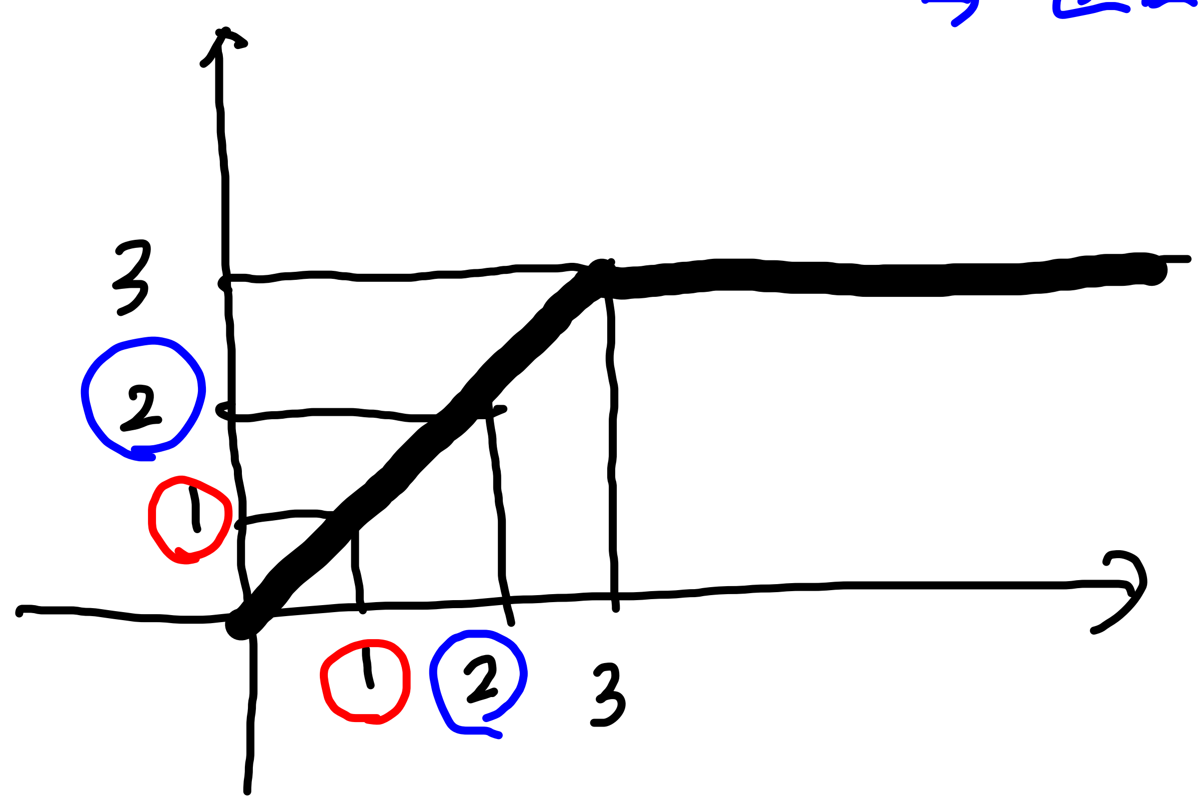
↓ 微分

時間が経っても加速度は0



$d''(t) = 0$

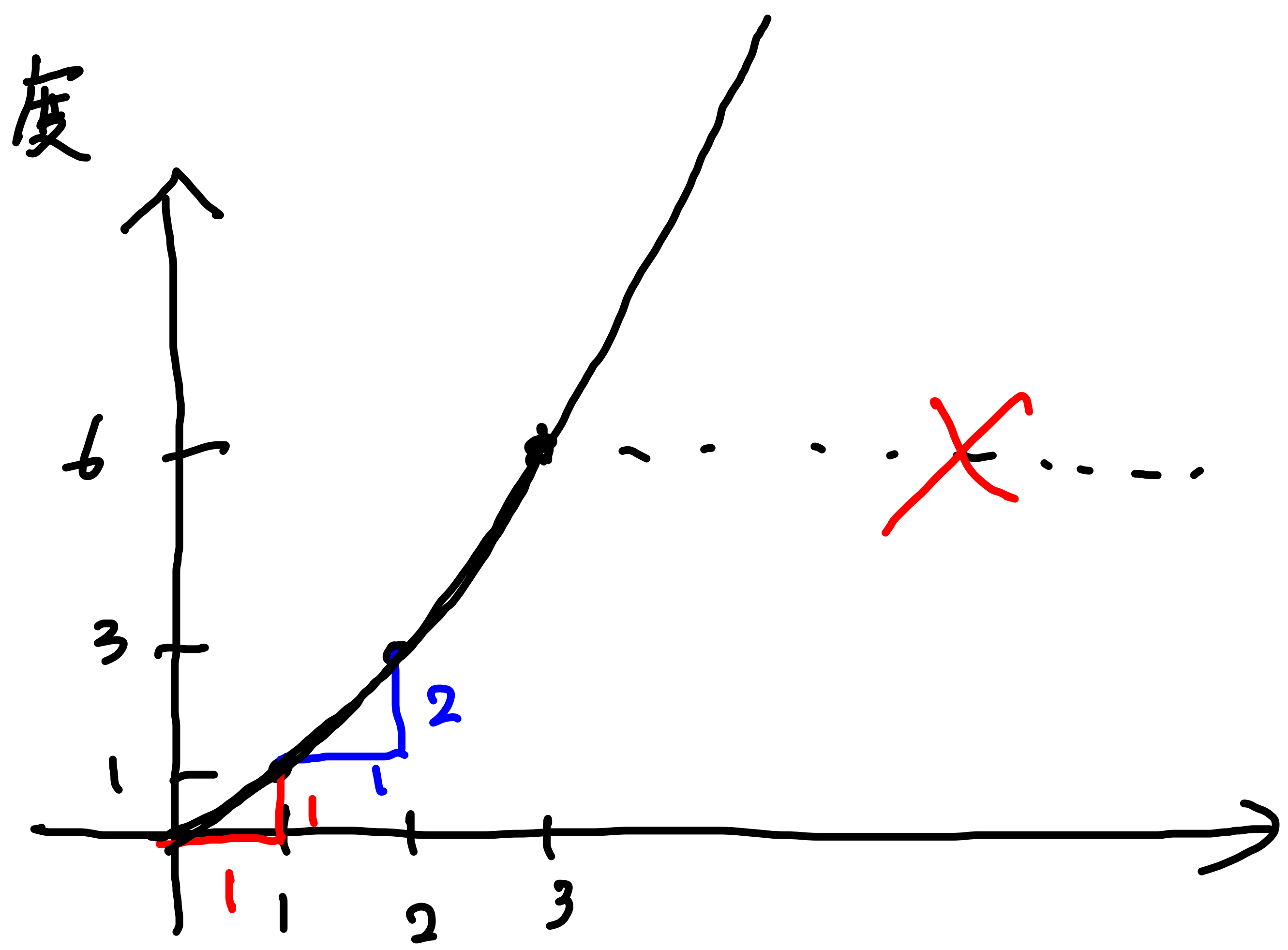
加速度



加速度が2

→ 速度が2増える

速度

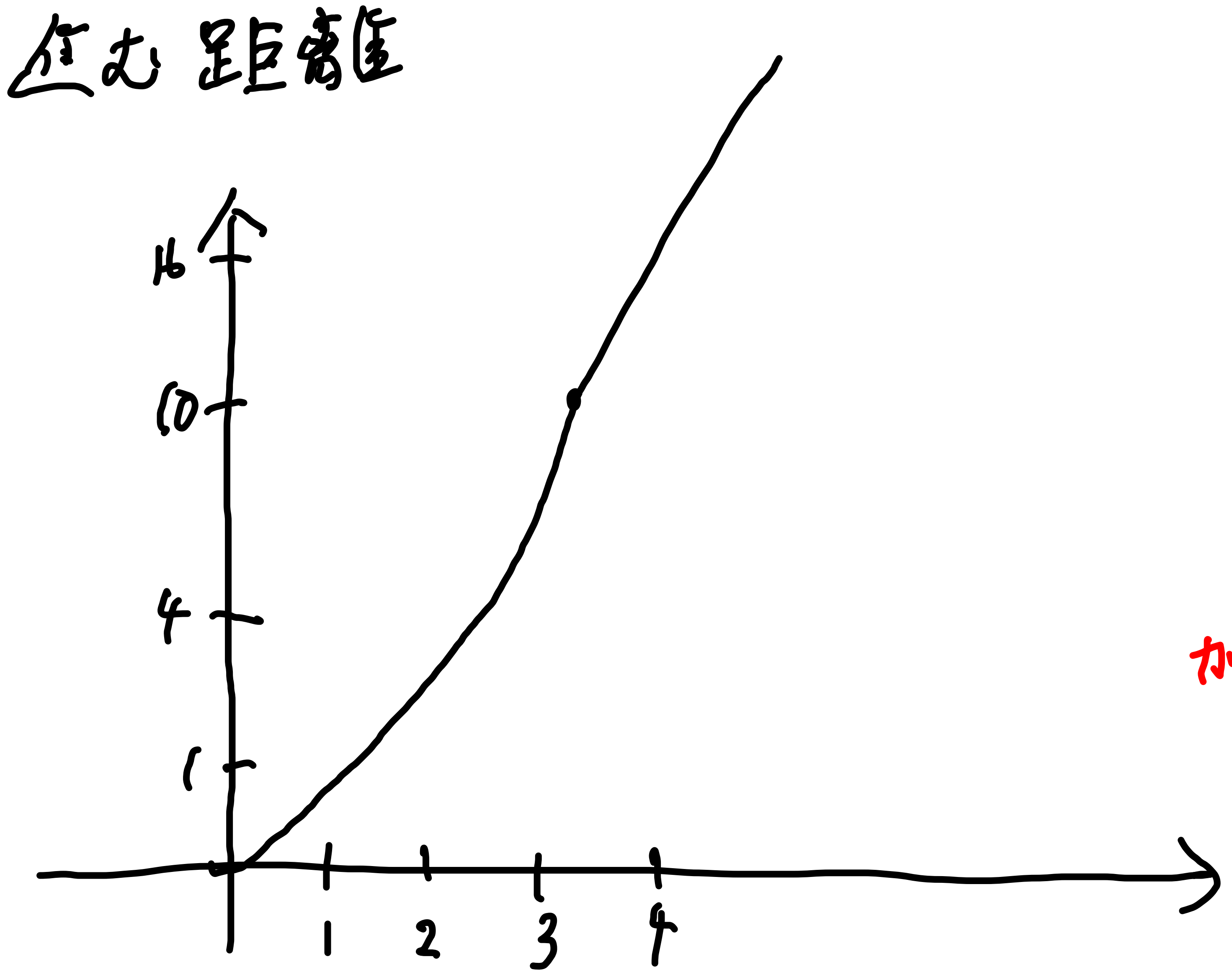


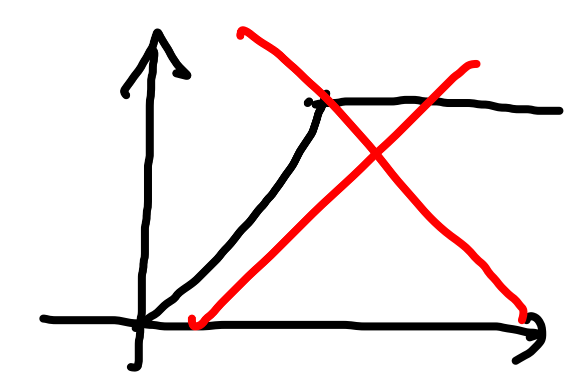
加速度が一定 → 速度はその前で
- 増加していれば増加
- 一定であれば一定
- 減少していれば減少

少し止めて考えてみましょう!

進む距離

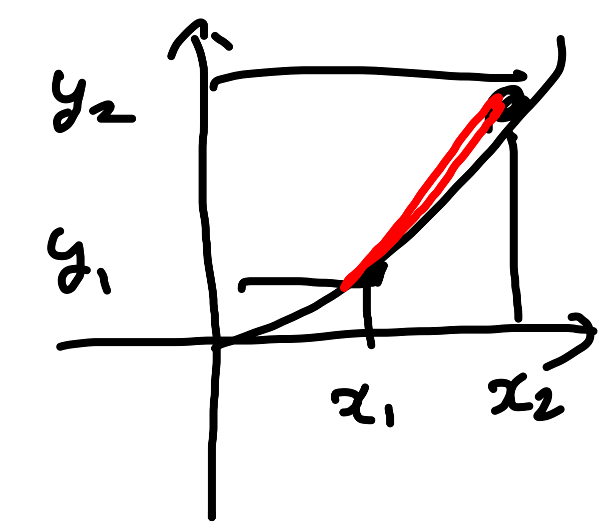
?





加速度が減少しないと停止しないよ!

平均変化率 ： $\dfrac{y\text{の変化量}}{x\text{の変化量}} = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$



2点を通る直線の傾き.

微分係数 ： $y = f(x)$ の あるx=aに対する接線の傾き

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

(実際は $y = f(x)$ の定義域 かつ 微分可能なx)

微分 ． $y = f(x)$ の 全てのxに関して 接線の傾きを表す関数を求めること.

↓

導関数という.

速度や加速度を求めることができる

これを覚えてもらいたい!

高校

~~積分 ⟷ 微分~~

忘れてほしい.