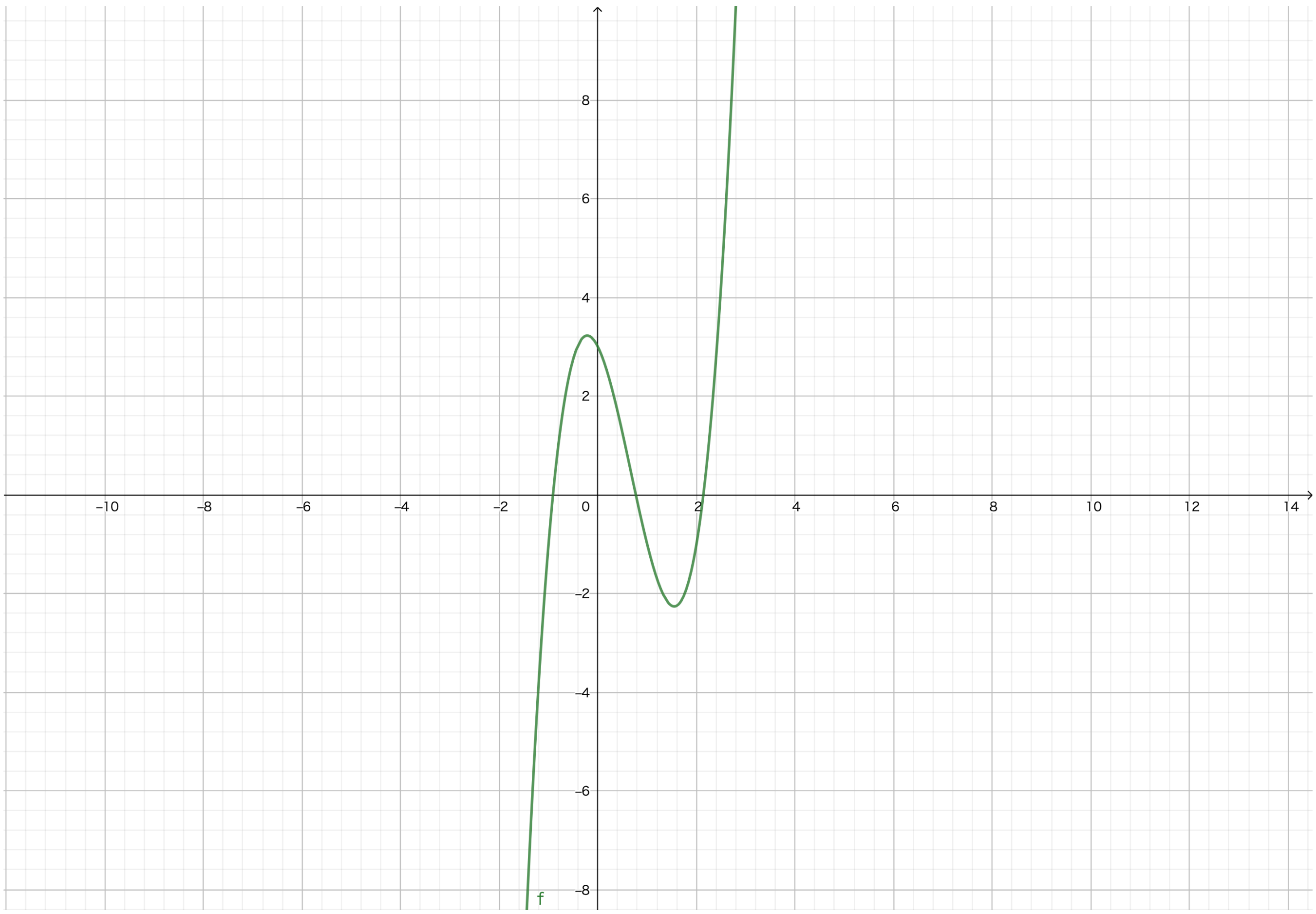
20210531 練習問題解答

次の図の平均変化率を考えましょう



上のグラフは $y=f(x)=2x^3-4x^2-2x+3$ のグラフです.

1. $x=-1$ と $x=3$ のときの$f(x)$ のy座標を求めてください.

$x=-1$ と $x=3$ のときの $f(x)$のy座標は,xに代入することで求めることができます.

$$\begin{aligned} f(-1) &= 2\times(-1)^3-4\times(-1)^2-2\times(-1)+3 \\ &= -1 \\ f(3) &= 2\times 3^3-4\times 3^2-2\times 3+3 \\ &= 15 \end{aligned}$$

2. (x_1, y_1)**と**(x_2, y_2)**のときの平均変化率は**

$$\text{平均変化率} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

で求めることができます.

$x = -1$ と $x = 3$ のときの$f(x)$ の平均変化率を求めてください.

1.より $f(x)$ は$(-1, -1)$ と$(3, 15)$ を通ることがわかります.
平均変化率の求め方より,

$$\frac{15 - (-1)}{3 - (-1)} = 4$$

3. $x = 0$ と $x = 3$ のときの$f(x)$の平均変化率を求めてください.

$$f(0) = 3$$

より,$f(x)$ は $(0, 3)$を通ります.$x = 3$のときは$y = 15$であったため,平均変化率は,

$$\frac{15 - 3}{3 - 0} = 4$$

ちなみに, 2. と 3. で平均変化率が一致したのはたまたまです.

4. $x = -2$ と $x = 2$ のときの$f(x)$のy座標を求めてください.

1.と同様に,$f(x)$に代入して求めましょう.

$$\begin{aligned} f(-2) &= 2 \times (-2)^3 - 4 \times (-2)^2 - 2 \times -2 + 3 \\ &= -25 \\ f(2) &= 2 \times (2)^3 - 4 \times (2)^2 - 2 \times 2 + 3 \\ &= -1 \end{aligned}$$

5. $x = -2$ と $x = 2$ のときの$f(x)$の平均変化率を求めてください.

4.より平均変化率は,

$$\frac{-1-(-25)}{2-(-2)}=6$$

6. (a_1, b_1)と(a_2, b_2)を通るときの$f(x)$を通る直線は,

$$y-b_1=\frac{b_2-b_1}{a_2-a_1}(x-a_1)$$

もしくは

$$y-b_2=\frac{b_2-b_1}{a_2-a_1}(x-a_2)$$

で求めることができます.平均変化率をαとすると,

$$y-b_i=\alpha(x-a_i) \qquad (i=1,2)$$

です.$x=-2$ と $x=2$のときの$f(x)$の座標を通る直線の関数の式を求めてください.

5.より$f(x)$の$(-2,-25)$と$(2,-1)$における平均変化率は,6.よって

$$\begin{aligned} y-(-1)&=6(x-2) \\ y&=6x-12-1 \\ y&=6x-13 \end{aligned}$$

実際に直線の関数があっているかは,$x=-2$ もしくは $x=2$を代入してy座標と一致しているかで確認することができます.

7. $f(x)$を微分すると,ある 1 点における接線の傾きを求めることができます.$f(x)$を微分して$f'(x)$ $\quad(\frac{df(x)}{dx}のこと)$ を求めてください.

$f(x)$ をx に関して微分すると

$$\begin{aligned} f'(x)&=3\times 2x^{(3-1)}+2\times -4x^{(2-1)}+1\times -2x^{(1-1)} \\ &=6x^2-8x-2 \end{aligned}$$

8. $x=-2$ と $x=2$ における$f(x)$の接線の傾きを求めてください.

7.で求めた導関数に$x=-2$,$x=2$ をそれぞれ代入すると,

$$\begin{aligned} f'(-2) &= 6\times(-2)^2-8\times(-2)-2 \\ &= 38 \\ f'(2) &= 6\times 2^2-8\times 2-2 \\ &= 6 \end{aligned}$$

9. $x=a$ における$f(x)$の接線の関数は,

$$y-f(a)=f'(a)(x-a)$$

で求めることができます.$x=2$と$x=-2$の接線の関数を求めてください.

8. より $x=-2$ と $x=-2$のときの$f(x)$のy座標はそれぞれ$-25,-1$ である.また,
   8.より$x=-2$ と $x=-2$のときの$f(x)$の接線の傾きはそれぞれ$38,6$ である。
   よって$x=-2$の場合は

$$\begin{aligned} y-(-25) &= 38(x-(-2)) \\ y &= 38x+72-25 \\ y &= 38x+47 \end{aligned}$$

であり、$x=2$の場合は、

$$\begin{aligned} y-(-1) &= 6(x-2)) \\ y &= 6x-12-1 \\ y &= 6x-13 \end{aligned}$$