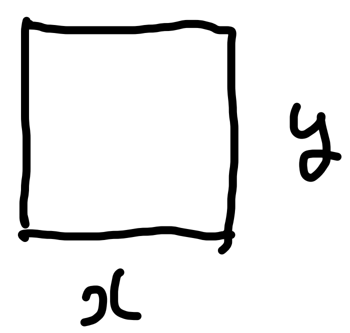
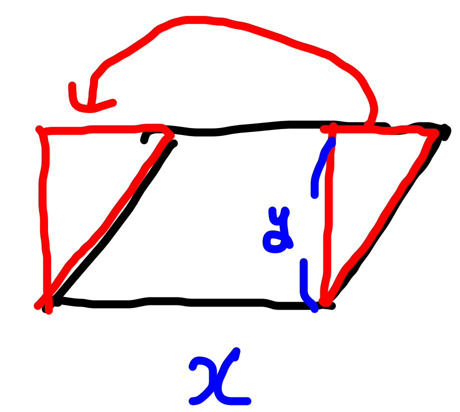
機械学習と
統計検定のための数学

〜区分求積法と積分〜

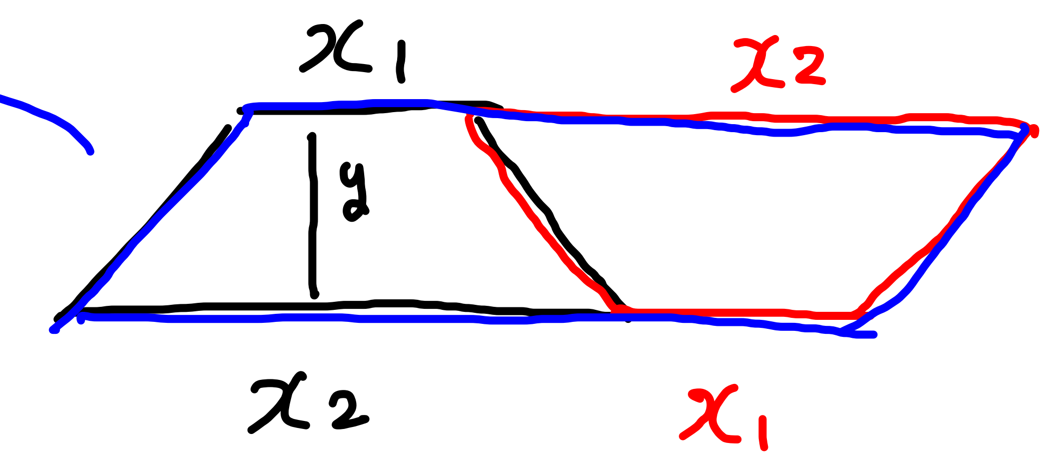
面積を求めるということ.



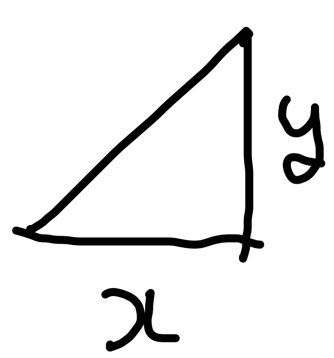
$x \times y$



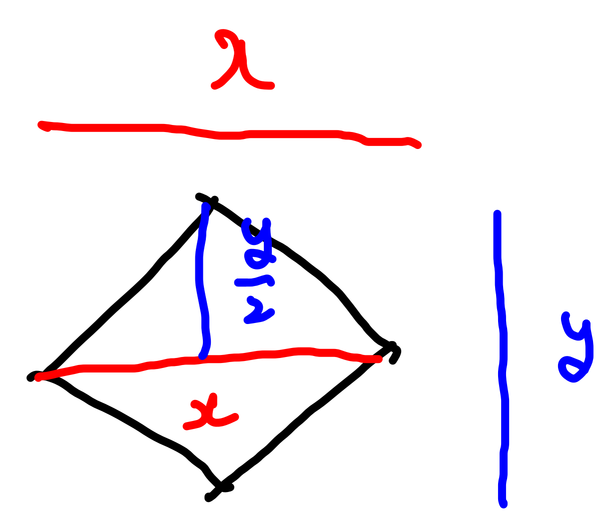
$x \times y$



$(x_1 + x_2) \times y \times \frac{1}{2}$

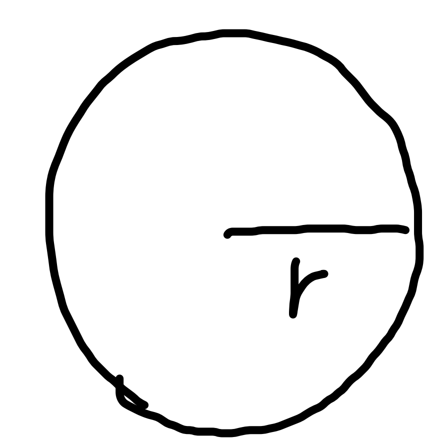


$\frac{x \times y}{2}$



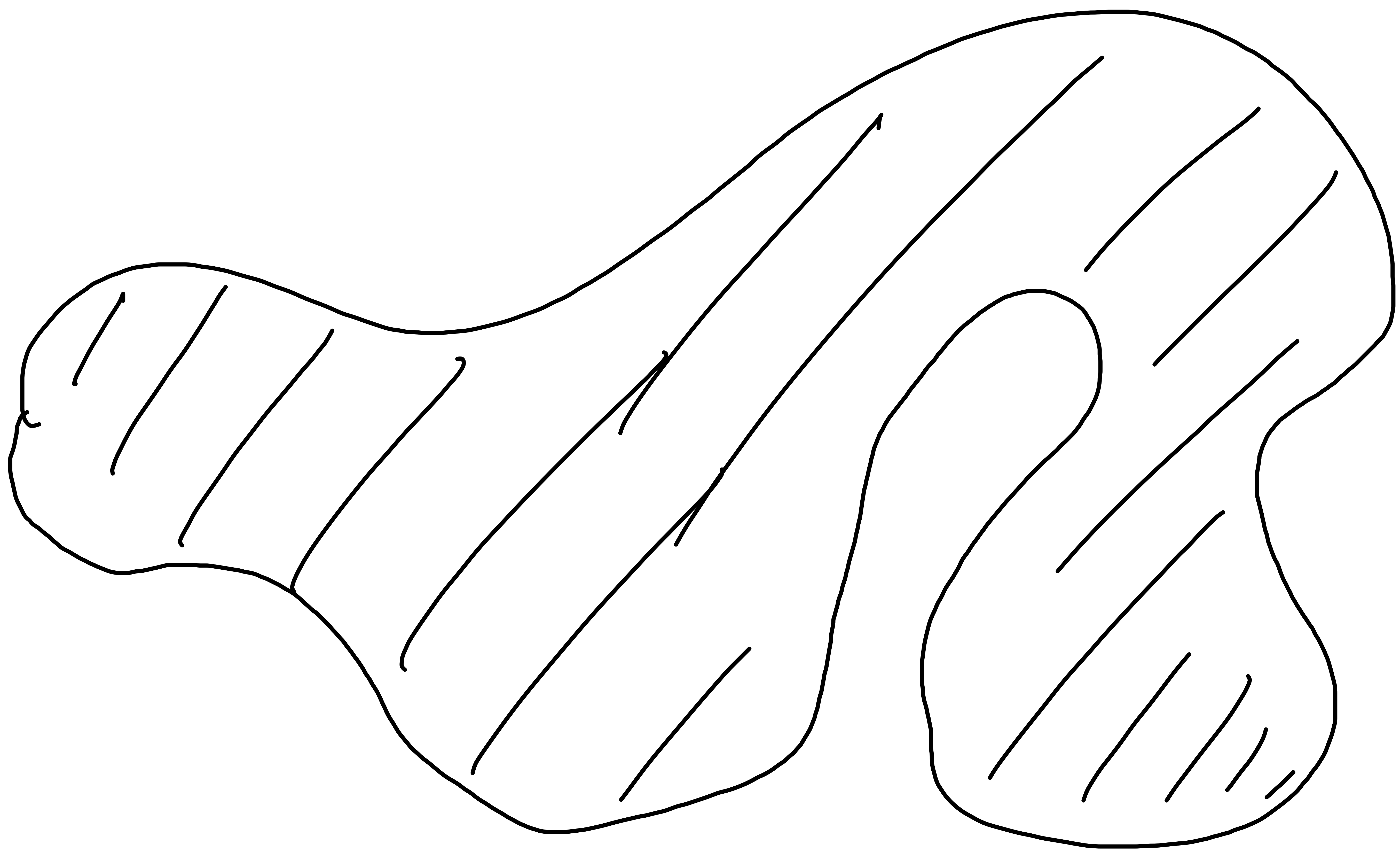
$\frac{x \times \frac{y}{\cancel{2}}}{2} \times \cancel{2}$

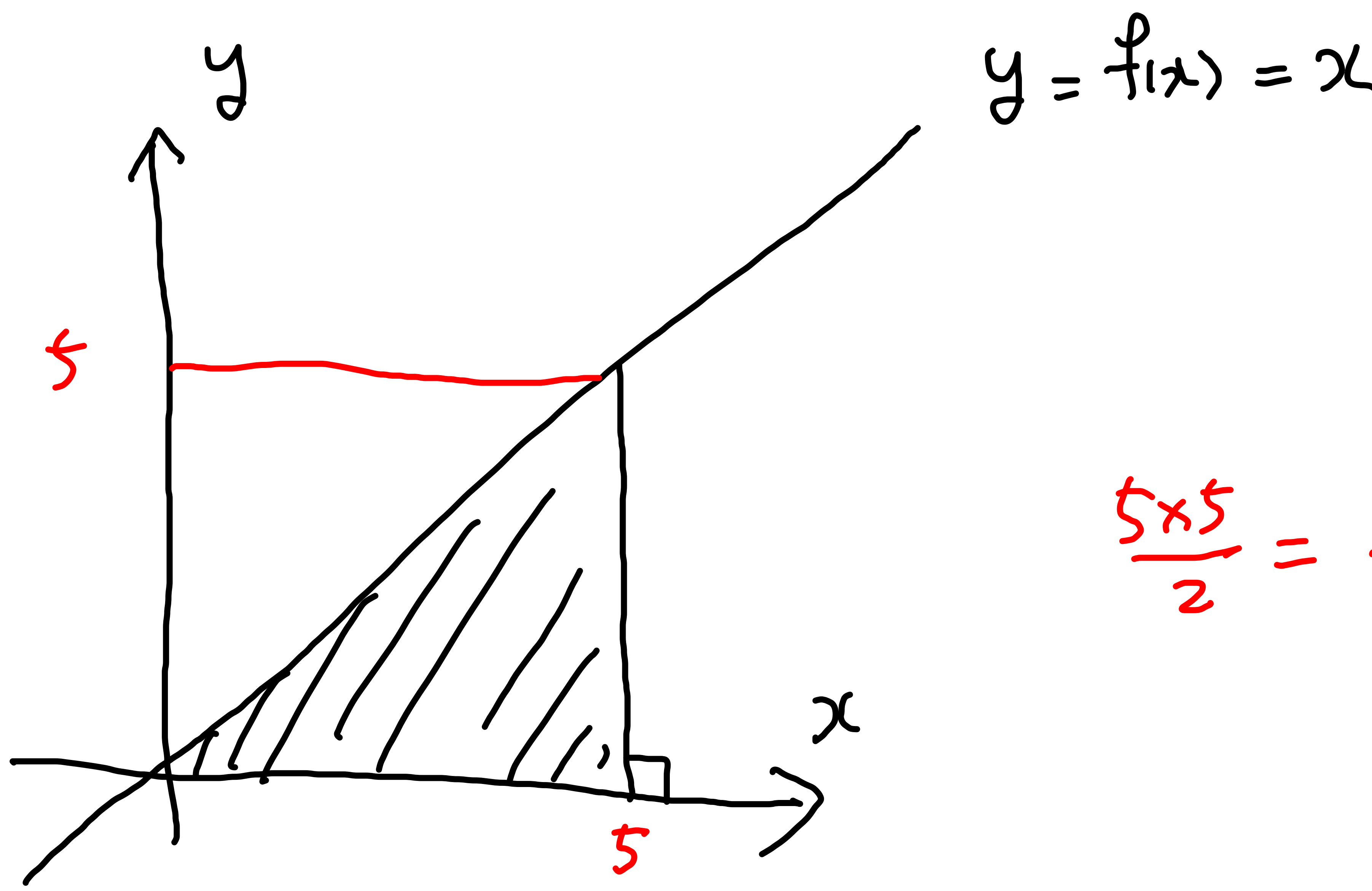
$= \frac{x \times y}{2}$



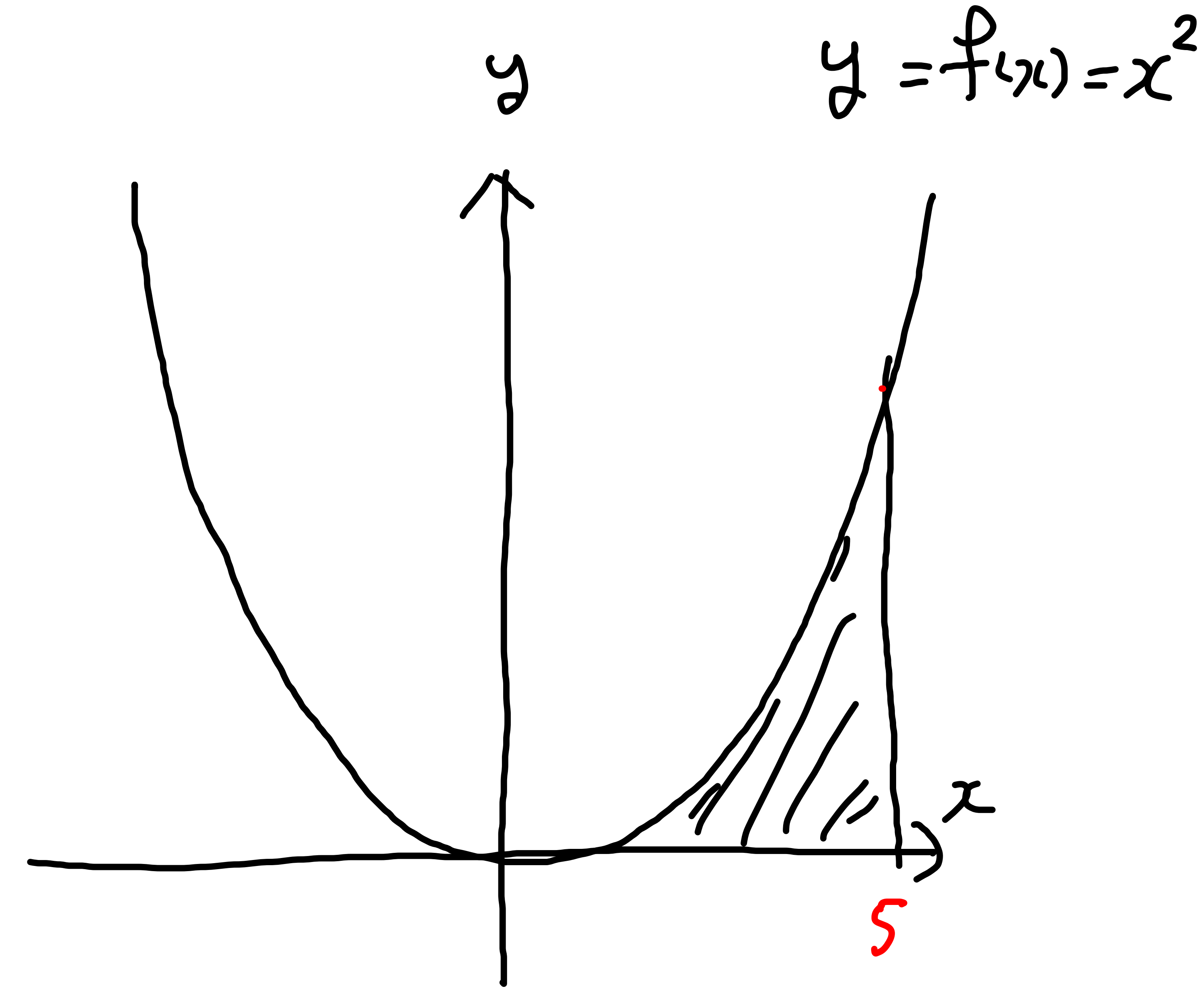
πr^2

この面積は？





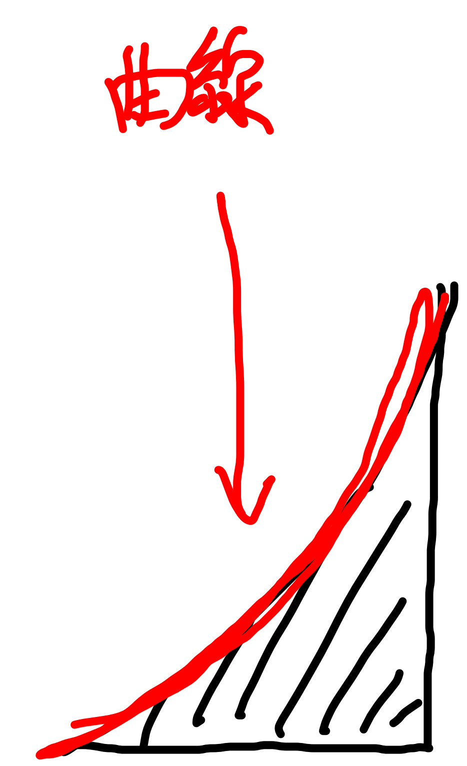
$$\frac{5\times5}{2} = \frac{25}{2}$$



の面積は

三角形の面積の公式

で求められる。

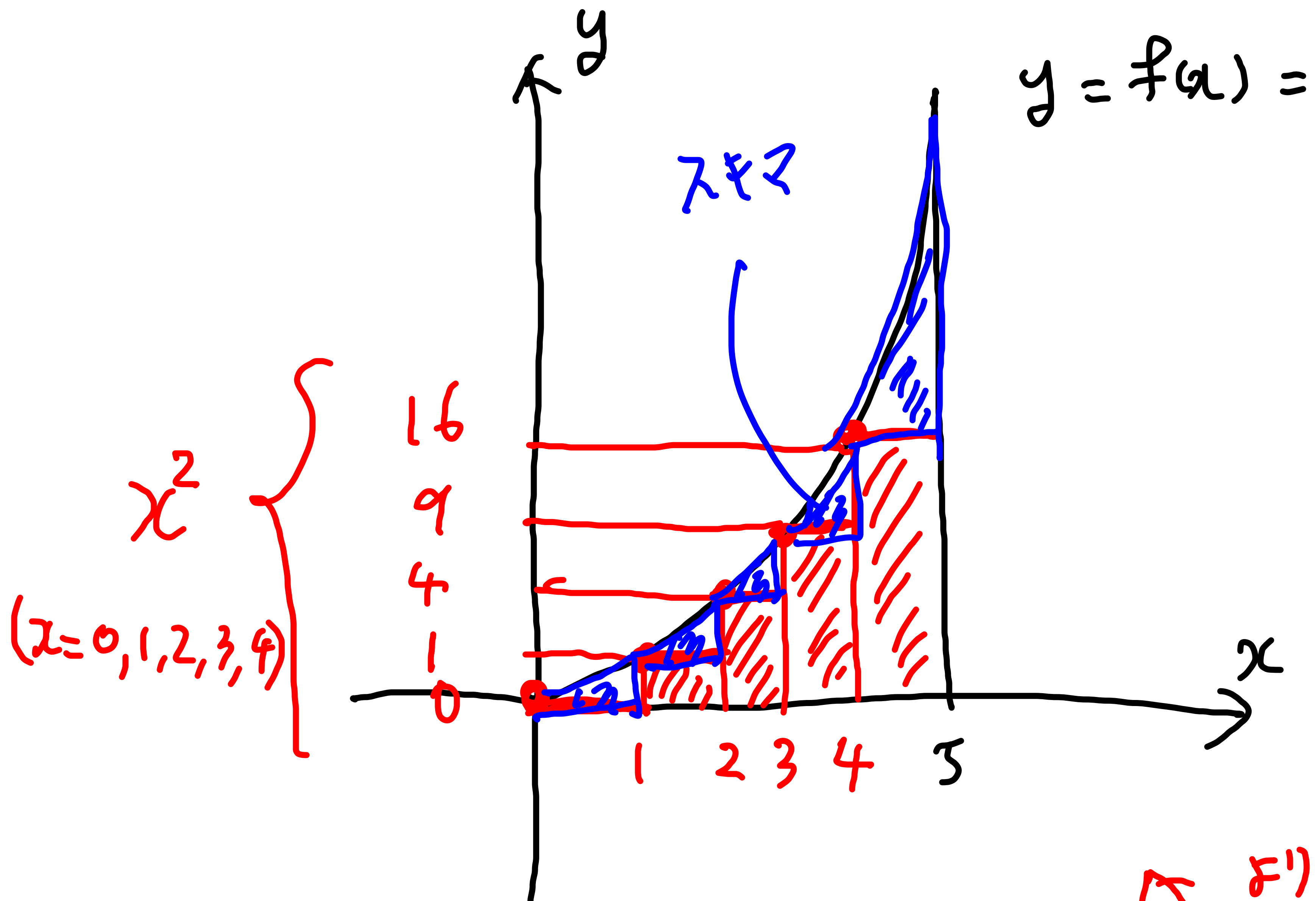


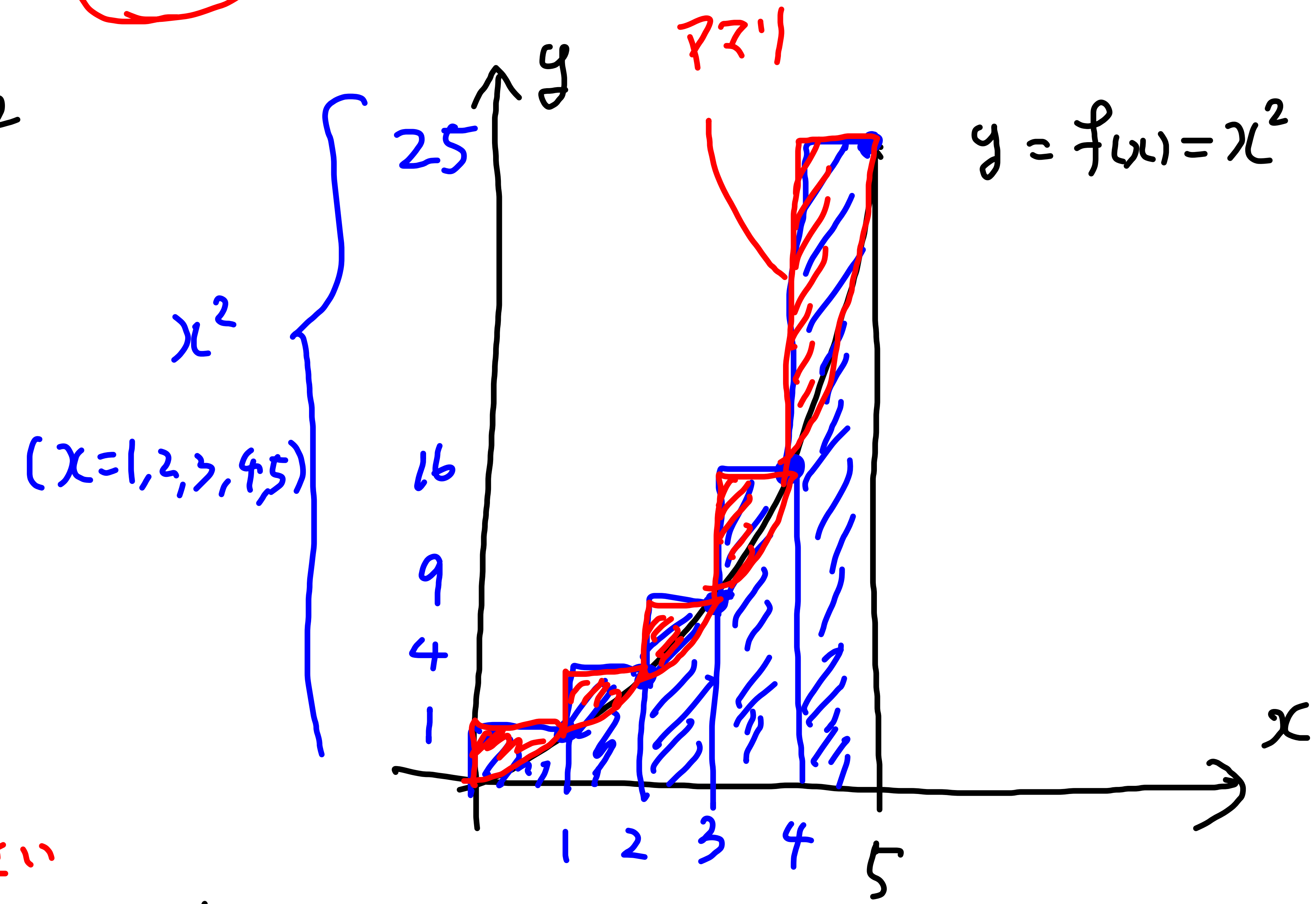
の面積は

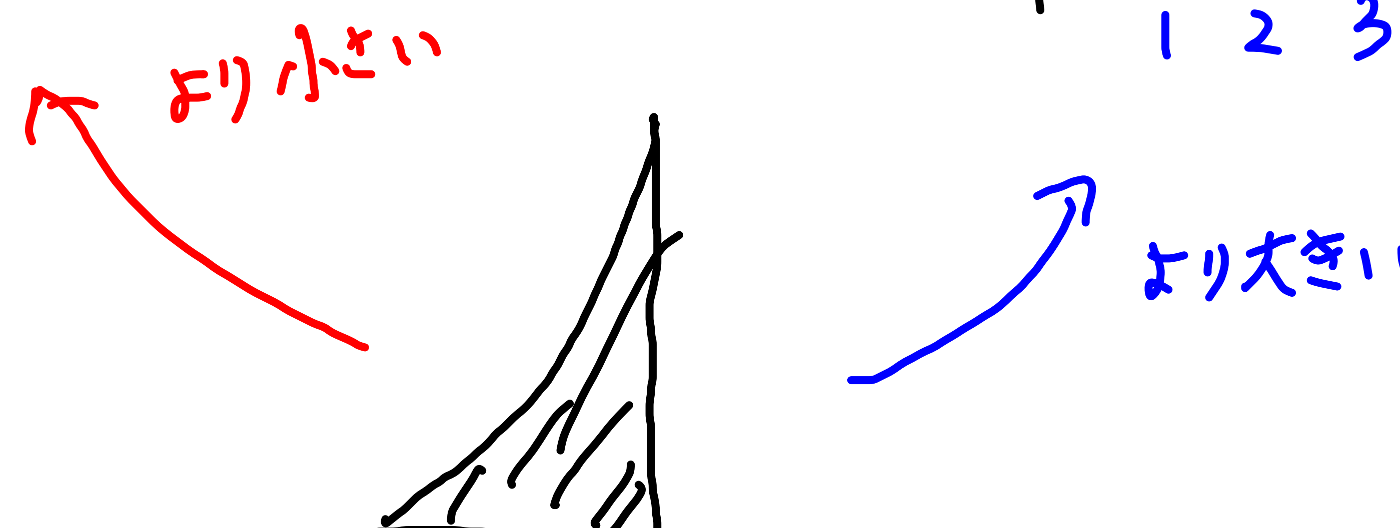
今までの公式では

求められなさそう。

今までの知識を活用 → 移動や分割。



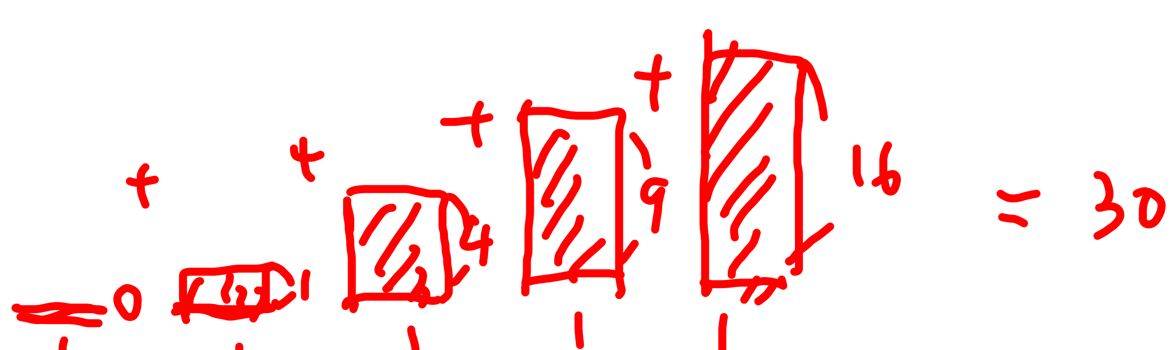


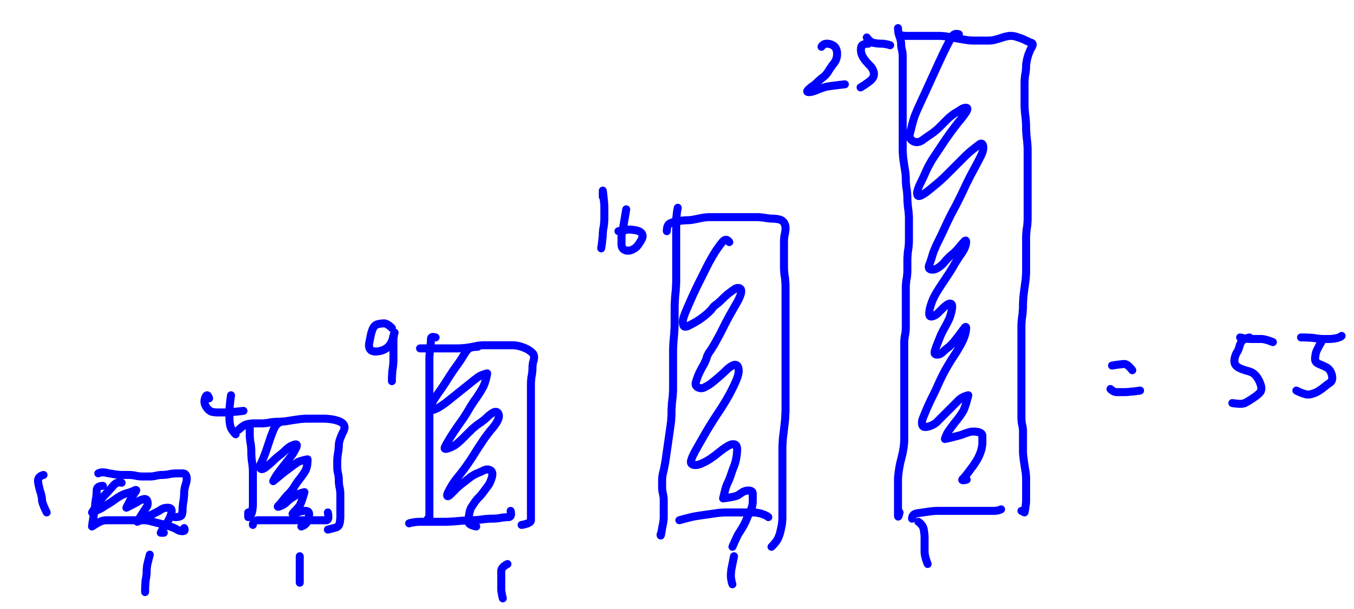


5つに分割。

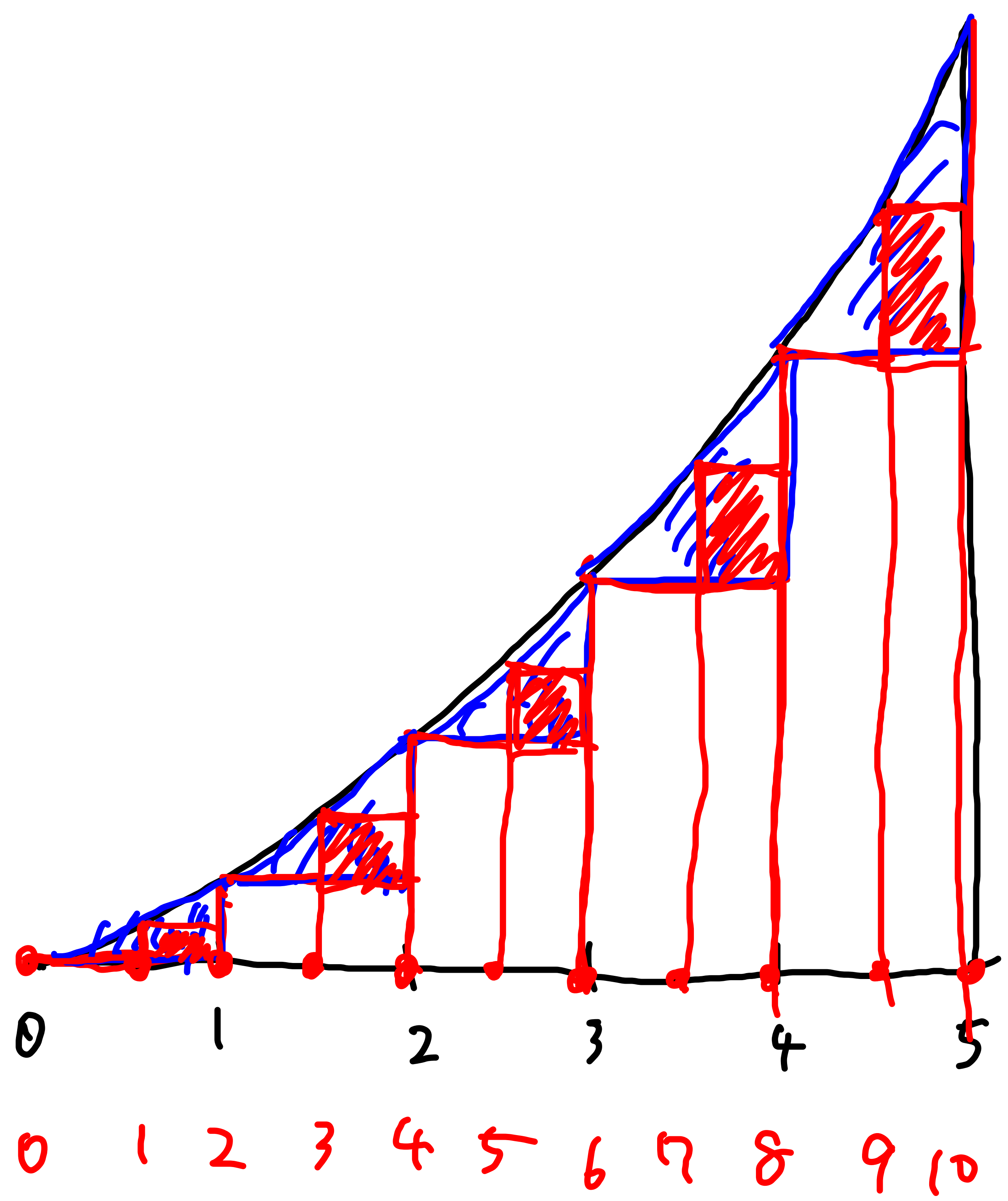
・を左上とする長方形を考える。

・を右上とする長方形を考える。

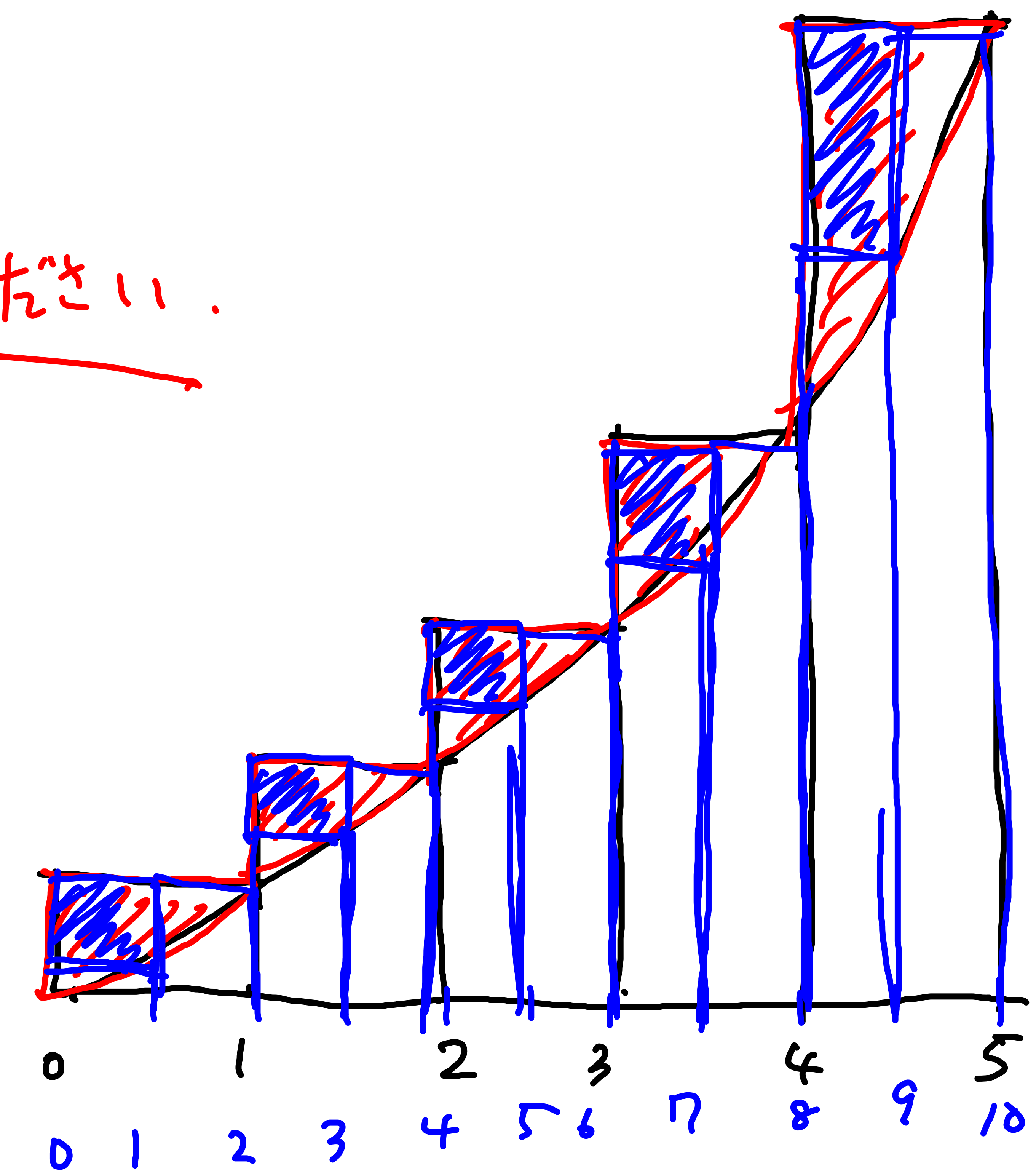




分割数を増やす　5 → 10



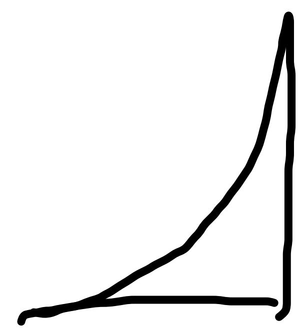
観るだけでなく
実際に描いてみてください。

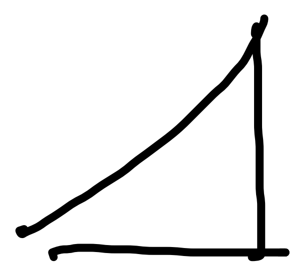


分割数を増やすと、（スキマ）のうち
の部分が埋まった。

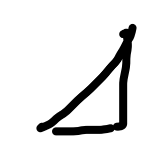
分割数を増やすと、（アマリ）のうち
の部分が減った。

まとめると.

1.  の面積を求めたい。

2.  を分割する。

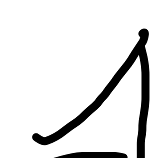
3. 2. で分割した点を

3-1 左上にした長方形を考える → ・より小さい面積の長方形の集まりができる。

・スキマを減らしたい。

・分割数を増やすとスキマが減る。

3-2 右上にした長方形を考える

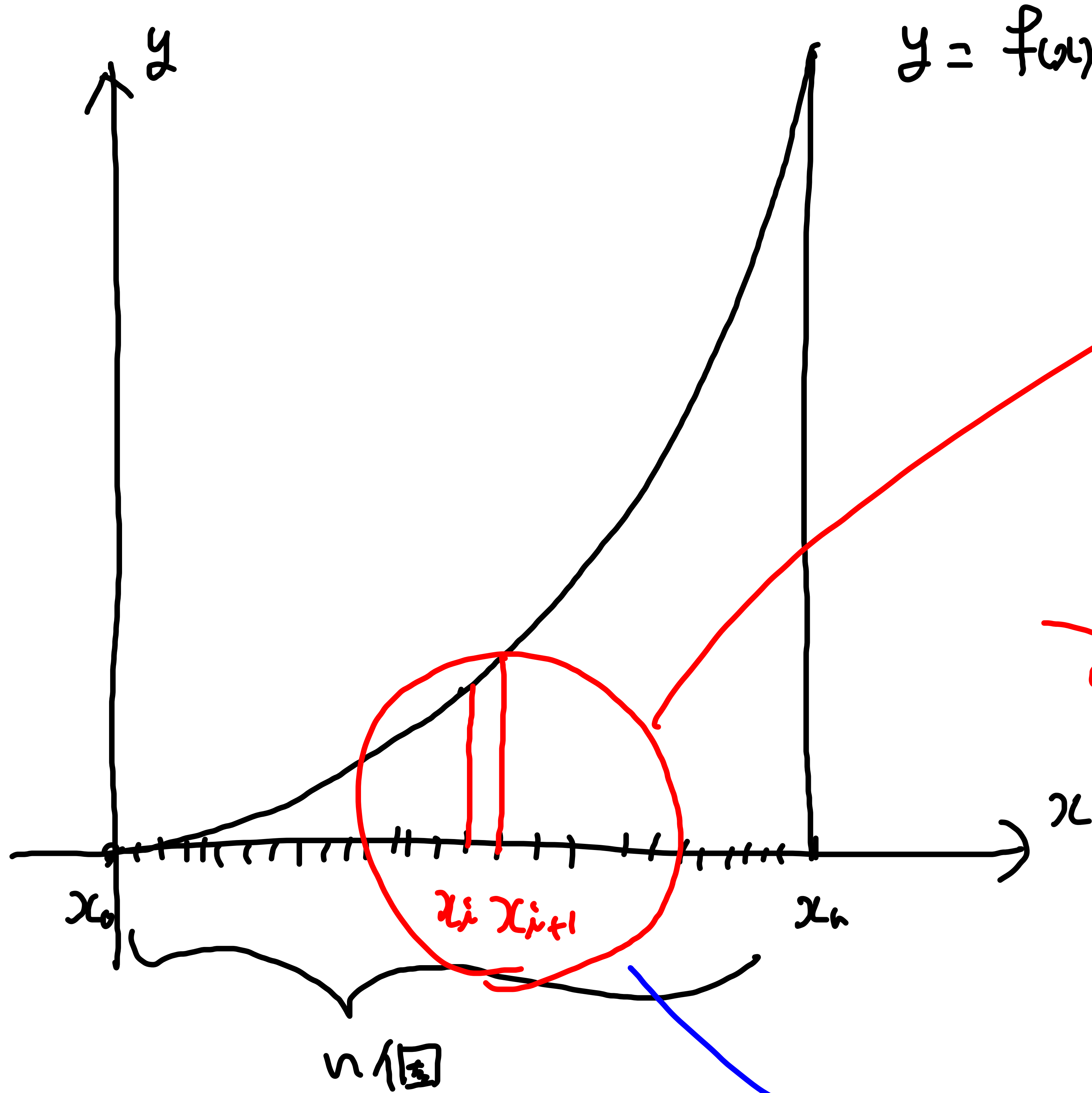
→ ・より大きい面積の長方形の集まりができる。

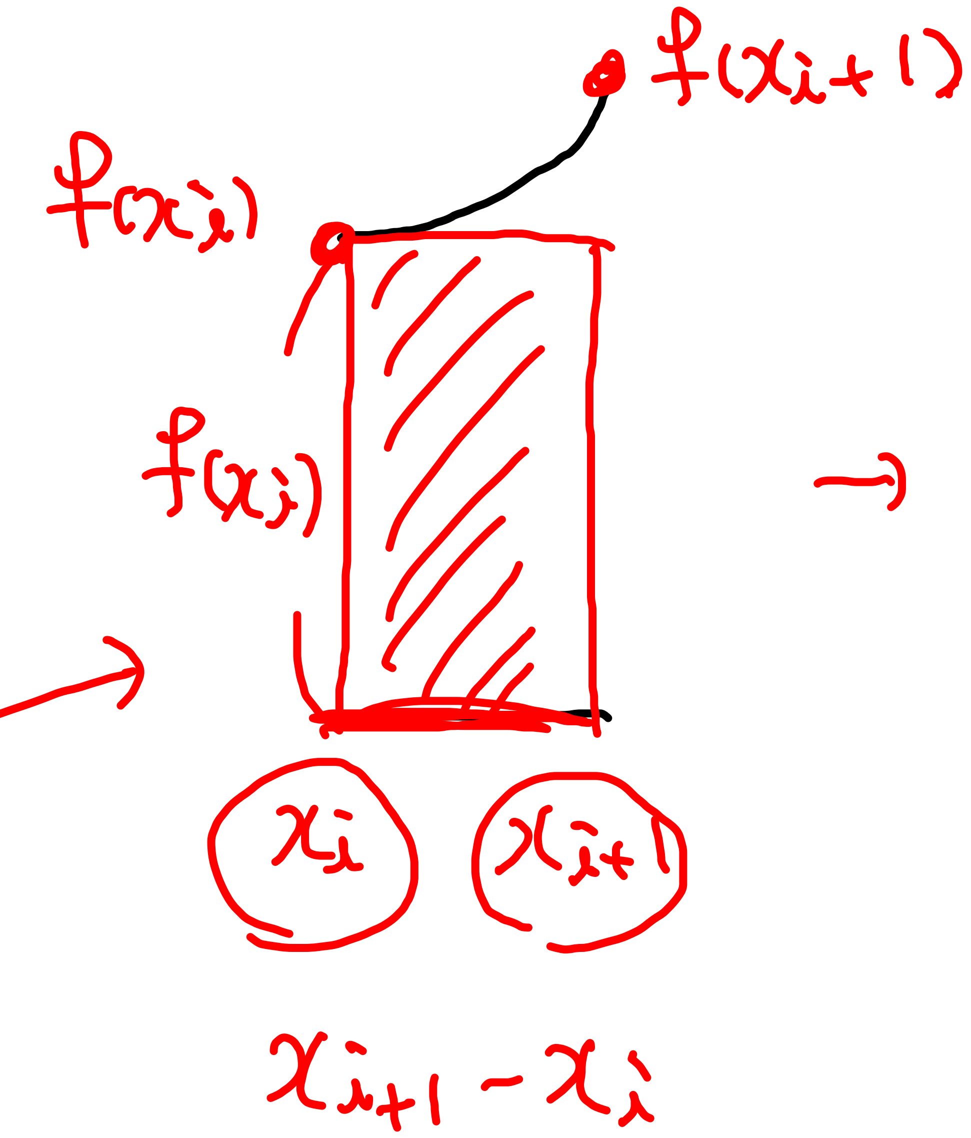
・アマリを減らしたい。

・分割数を増やすと、アマリが減る。

n個に分割 (等間隔)

$y = f(x) = x^2$



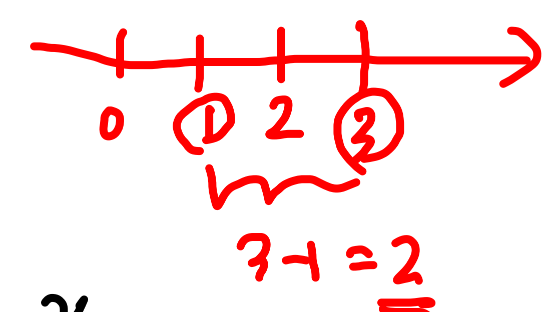


$\rightarrow$ $f(x_i)(x_{i+1}-x_i)$

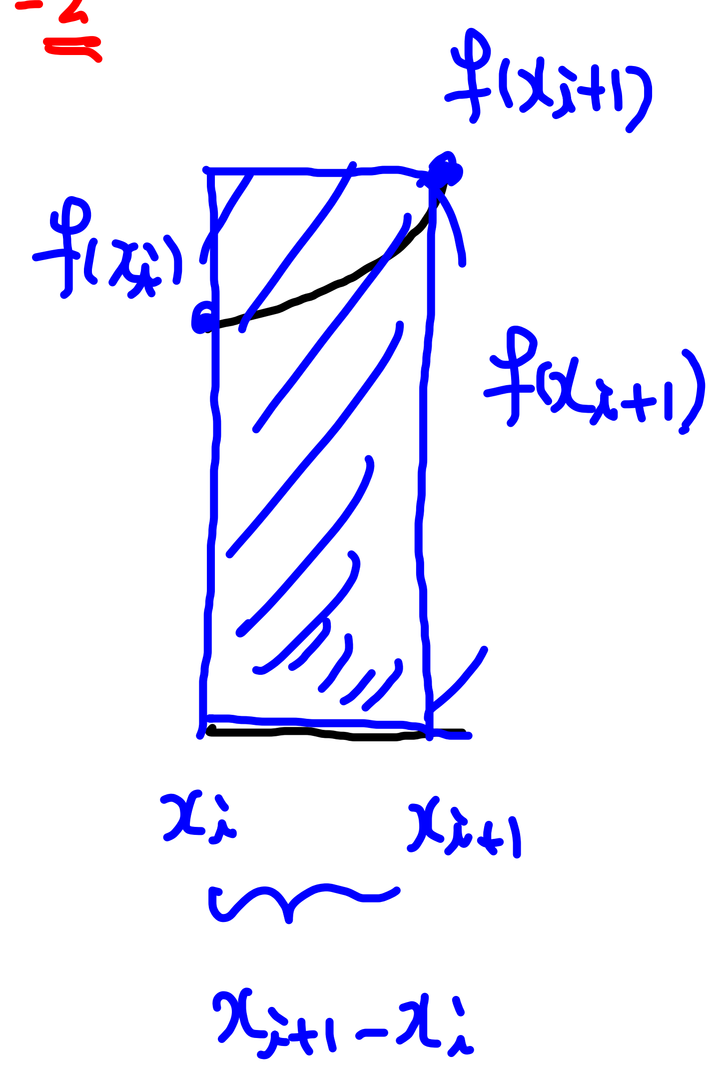
$i=0,1,2,\dots,\underline{n-1}$

$i=n-1$ $i+1=n$

$\cancel{i=n}$ $\cancel{i+1=n+1}$



$$\sum_{i=0}^{n-1} \underline{f(x_i)}(x_{i+1}-x_i)$$



$\rightarrow$ $f(x_{i+1})(x_{i+1}-x_i)$

$$\sum_{i=0}^{n-1} \underline{f(x_{i+1})}(x_{i+1}-x_i)$$

小さい分割 $$\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)(x_{i+1} - x_i)$$

大きい分割 $$\sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+1})(x_{i+1} - x_i)$$

分割数を無限に近づける。

すなわち、nを無限に近づける

この面積はnを増やしていくごとに元の図形の面積に近づく．

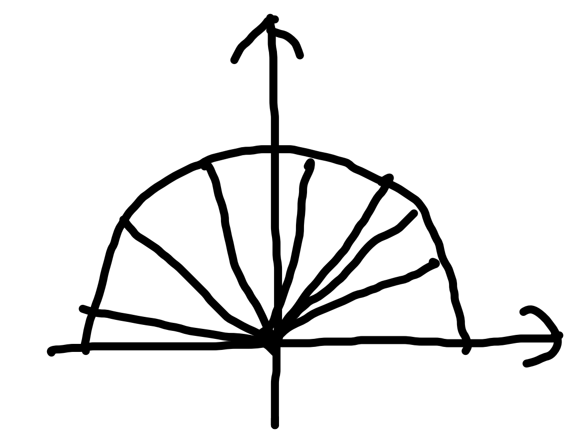
このように面積を求める方法を区分求積法という。

Riemann和

区分求積法では

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\,(x_i - x_{i-1})$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+1})\,(x_i - x_{i-1})$$



の部分を等間隔としたが、等間隔でなくても

成立するとき、それらをリーマン和という

Riemann積分

Riemann和のn個の分割を無限に近づける、すなわち

$$S_m = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\,(x_i - x_{i-1})$$

$$S_M = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+1})\,(x_i - x_{i-1})$$

とする。このとき $f(x)$ が Riemann積分が可能とは $S_m = S_M$ が成立するときをいい、

$$\int_a^b f(x)\,dx \qquad (a = x_0,\ b = x_n)$$ と表す。

積分の万能でない計算方法、

$\int_a^b f(x)\,dx$　　$\int f(x)\,dx$

定積分　　不定積分

$f(x) = x^2$

$\int f(x)\,dx = \frac{1}{2+1}x^{2+1}$

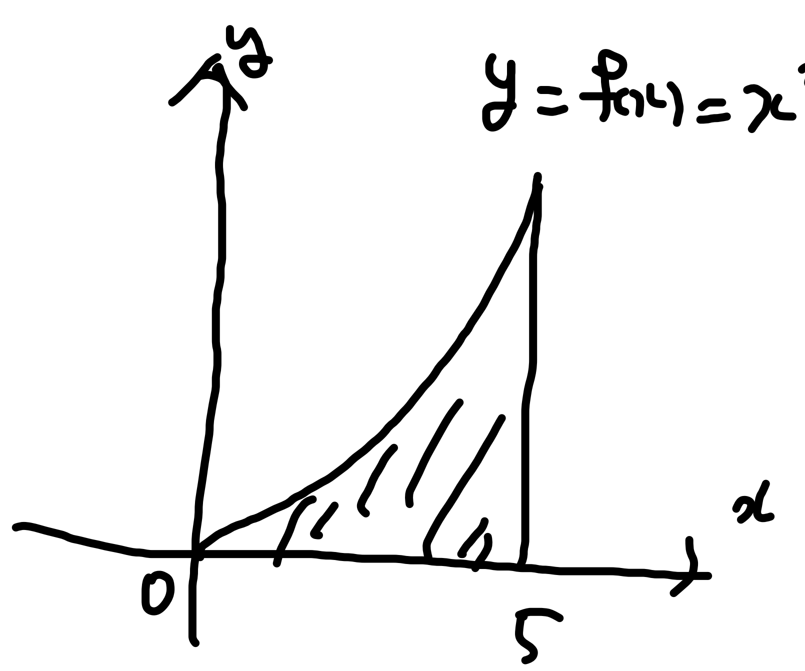
$\frac{1}{\bigcirc+1}x^{2}$ $+1$ ②

①

$= \frac{1}{3}x^3 \ (+C)$

C = 単なる数 1, 5, 6, …

不定積分のときに積分定数をつけるが
とりあえずあまり気にせず。でも重要。



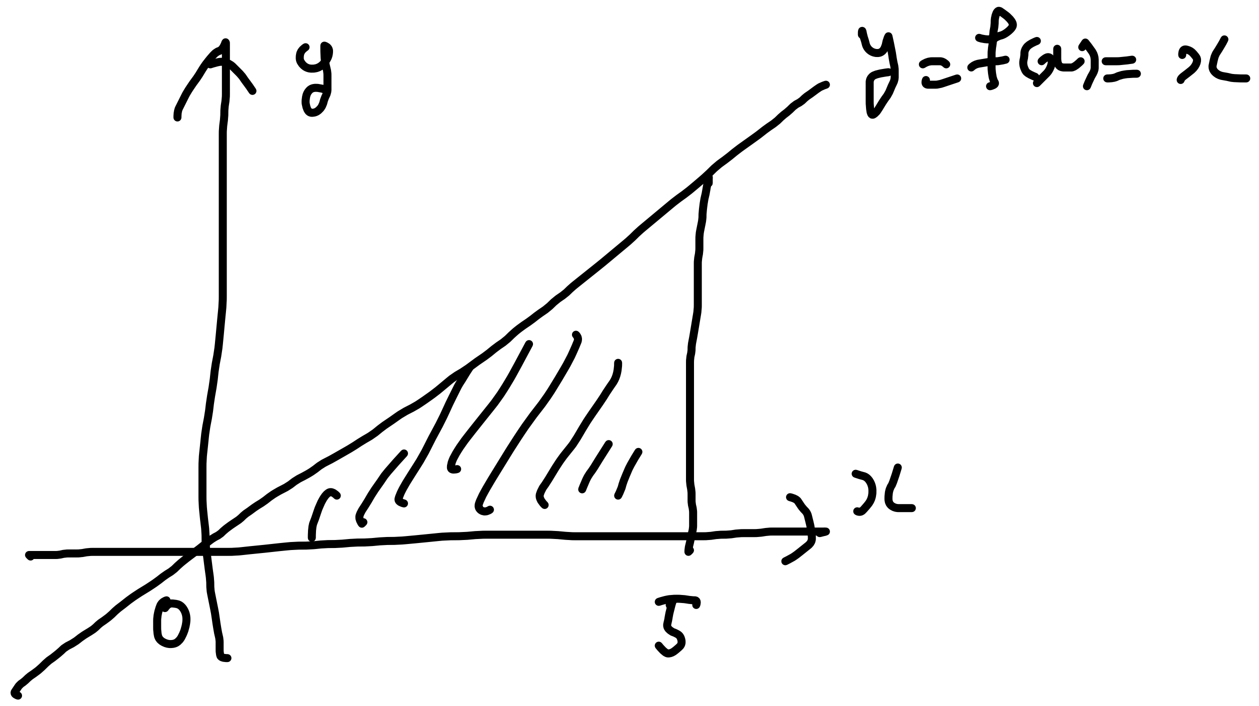
$\int_0^5 f(x)\,dx = \int_0^5 x^2\,dx$

範囲

$= \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^5$　　$\bigcirc - \bigcirc$

$\frac{125}{3} - \frac{0}{3} = \frac{125}{3}$ ← 面積

最初の $y = x$



$$\int_0^5 f(x)\,dx = \int_0^5 x\,dx$$

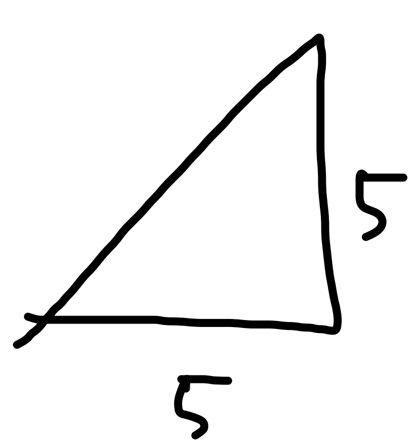
$$= \left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^5$$

$$\frac{1}{1+1}x^{(1)+1} = \frac{1}{2}x^2$$

$$= \frac{1}{2}5^2 - \frac{1}{2}0$$

三角形の公式

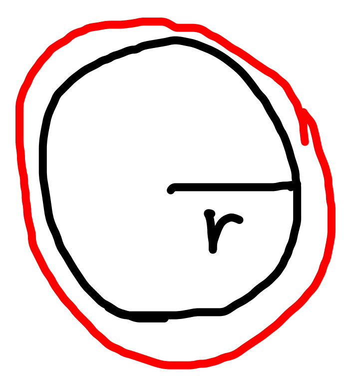
$$= \frac{25}{2}$$



$$5 \times 5 \times \frac{1}{2} = \frac{25}{2}$$

一致！

皆さんが知ってる公式



円周 $2\pi r$

面積 πr^2

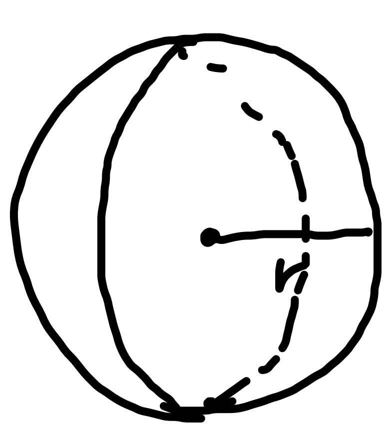
導関数　　rに関して積分

$$\int 2\pi r\, dr = 2\pi \int r\, dr$$

$$= \cancel{2}\pi \left(\frac{1}{\cancel{2}} r^2 \right)$$

$$= \pi r^2$$

一致！



球

表面積 $4\pi r^2$

体積 $\frac{4}{3}\pi r^3$

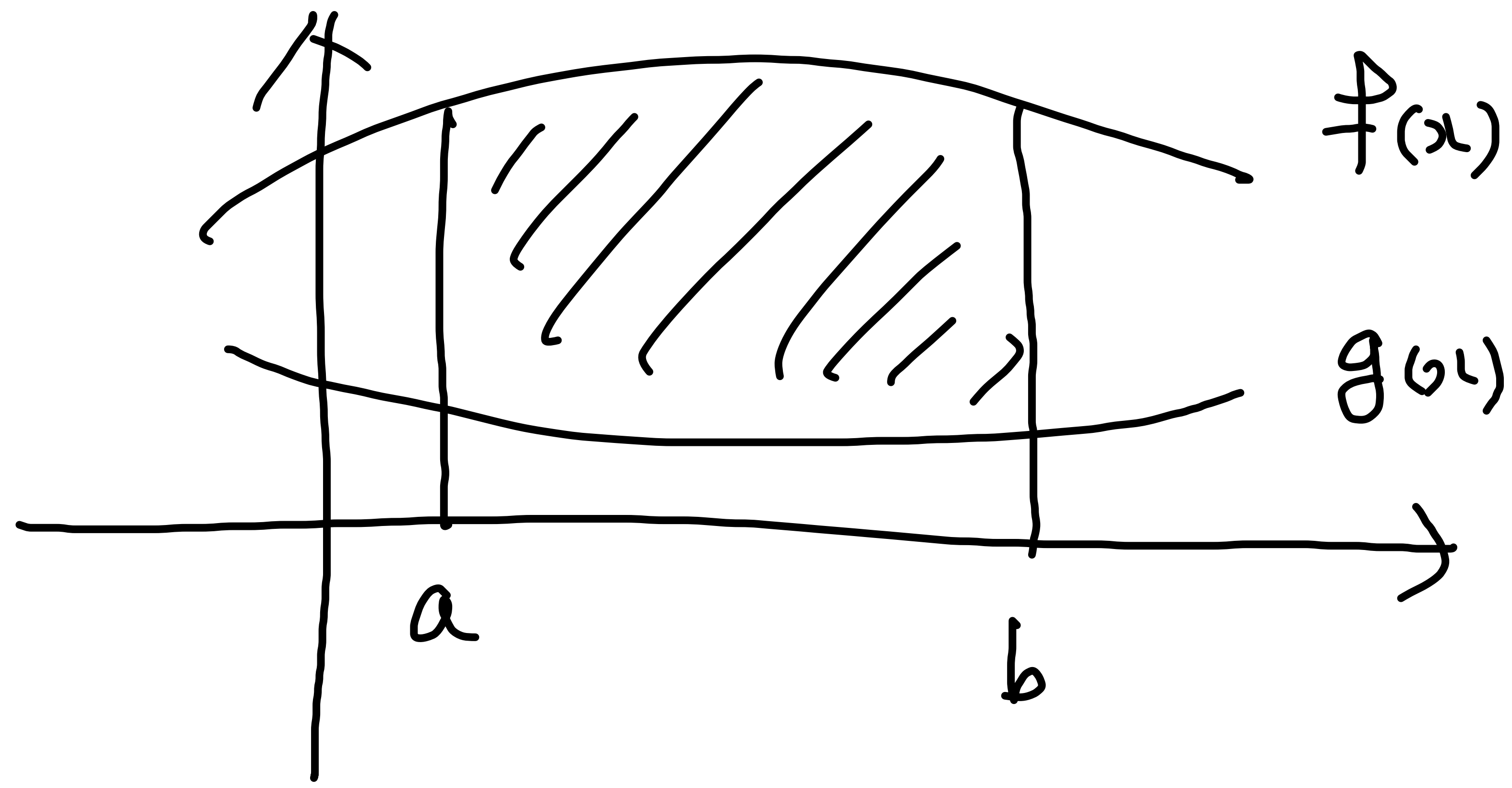
$$\int 4\pi r^2\, dr = 4\pi \int r^2\, dr$$

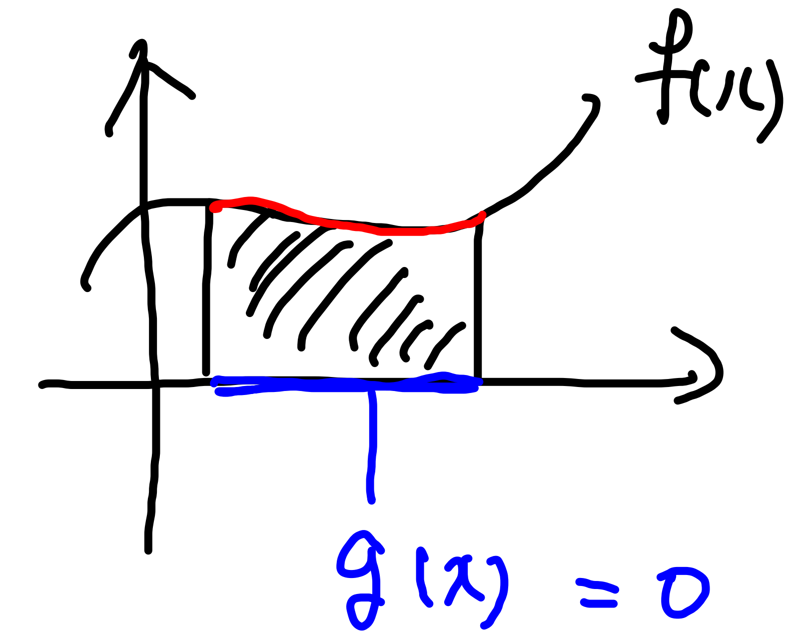
$$= 4\pi \left(\frac{1}{3} r^3 \right)$$

$$= \frac{4}{3}\pi r^3$$

一致！

一般に





の面積は

$$\int_a^b f(x) - g(x) \, dx$$

で求められる。

$$\int_a^b f(x) - 0 \, dx$$

$$= \int_a^b f(x) \, dx$$

まとめ

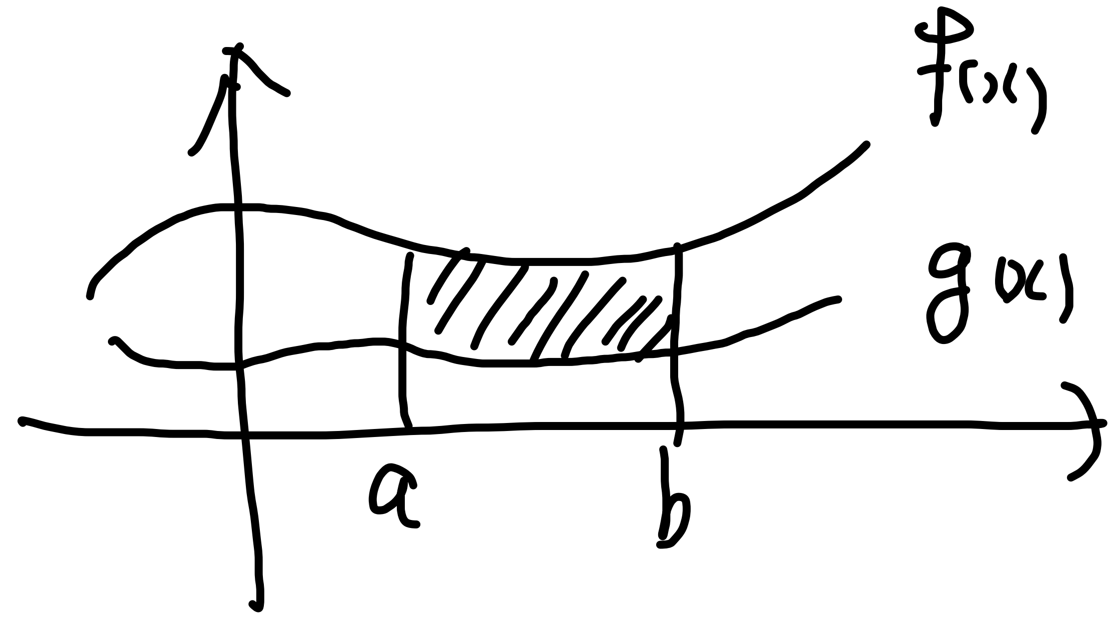
・面積を求める

・複雑な形は分割して求める

→ 区分求積法、リーマン和

等間隔　　バラバラ

・分割数を無限に ⟶ Riemann積分



$\int_a^b f(x) - g(x)\, dx$　定積分

$\int f(x) - g(x)\, dx$　不定積分

現段階

・微分：平均変化率の応用
（接線の傾き）

・積分：区分求積法、Riemann和の応用
（面積の求め方）

全く別の概念

次回

微分積分学の基本定理(Newton, Leibniz)

微分・積分の諸性質

なぜ統計・確率に微分・積分が必要か?