２０２２数学オリンピック予選

問題 8,9,10

と、問題 11 のメモ

梅山新一郎 2022 年 2 月

問 8

$a_1 < a_2 < \cdots < a_{2022}$ をみたす正の整数の組 $(a_1, a_2, \cdots, a_{2022})\cdots$ 条件 A であって、

$$a_1^2 - 6^2 \geq a_2^2 - 7^2 \geq \cdots \geq a_{2022}^2 - 2027^2 \cdots \text{条件 } B$$

がなりたつものはいくつあるか。

まず、a_{2022} の上限を調べます。

条件 A より $2021 \leq a_{2021}$、$2022 \leq a_{2022} \cdots$ 条件 A1

条件 B より $(a_{2022}^2 - 2027^2) - (a_{2021}^2 - 2026^2) \leq 0$。これから $(a_{2022}^2 - a_{2021}^2)(a_{2022}^2 + a_{2021}^2) \leq 4053$

条件 A1 から $a_{2022} + a_{2021} \geq 4043$ であり

$a_{2022} - a_{2021} = 1$、$(a_{2022}, a_{2021}) = (2027, 2026), (2026, 2025), \cdots, (2022, 2021)$

次に、$a_i = i + k(k = 0, 1, 2, \cdots)$、$a_{i+1} - a_i = d(d = 1, 2, 3, \cdots)$ とおき、差 d を順に調べていく。

$d = 1$　のとき、$(a_i^2 - (i+5)^2) - (a_{i+1}^2 - (i+6)^2)) \leq 0$ より

$((i+k)^2 - (i+5)^2) - ((i+k+1)^2 - (i+6)^2) = -2k+10 \leq 0$ から $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ が得られる。これから、すべての i にて、$(a_i, a_{i+1}) = (i, i+1), (i+1, i+2) = (i+2, i+3), (i+3, i+4), (i+4, i+5), (i+5, i+6)$ の６通りの組で条件 B をみたす。よって求める整数の組に

a_1	a_2	a_3	a_4	$\cdots$	a_{2021}	a_{2022}
1	2	3	4		2021	2022
2	3	4	5		2022	2023
3	4	5	6	$\cdots$	2023	2024
4	5	6	7		2024	2025
5	6	7	8		2025	2026
6	7	8	9		2026	2027

の６通りがある。

$d=2$　のとき

$((i+k)^2-(i+5)^2)-((i+k+2)^2-(i+6)^2)=-4k-2i+7\leq 0$ から $4k\leq 7-2i$ この不等式から

$i=1$　のとき $4k\leq 5$ より $k=0,1$ が条件 B をみたす。よって $(a_1,a_2)=(1,2),(2,3)$ の 2 組がある。

$i=2$　のとき $4k\leq 3$ より $k=0$ が条件 B をみたす。よって $(a_2,a_3)=(2,4)$ の 1 組がある。

$i=3$　のとき $4k\leq 1$ より $k=0$ が条件 B をみたす。よって $(a_3,a_4)=(3.5)$ の 1 組がある。

$i\geq 4$　のとき $4k\leq 7-2i\leq 7-8=-1$ で条件 B をみたす k はない。

これらから求める整数の組が

a_1	a_2	a_3	a_4	$\cdots$	a_{2021}	a_{2022}
1	3	4	5		2022	2023
2	4	5	6	$\cdots$	2023	2024
1	2	4	5		2022	2023
1	2	3	5		2022	2023

の 4 通りがある。

$d\geq 3$　のとき

$((i+k)^2-(i+5)^2)-((i+k+d)^2-(i+6)^2)=-2dk-d^2+2i-2di+7\leq 0$ から $2dk\leq -d^2-2di+2i+11$

$d\geq 3$、$i\geq 1$ から $-d^2-2di+2i+11\leq -3^2-2\cdot 3i+2i+11=-4i+2<0$

$2dk<0$ だから、条件 B をみたす k はない。

以上から、条件を満たす整数の組は 10 組。

問 9

$1, 2, \cdots, 1000$ の並べ替え $(p_1, p_2, \cdots, p_{1000})$ であって、任意の 1 以上 999 以下の整数 i に対して、「p_i が i の倍数である $\cdots$ 条件 A」ようなものはいくつあるか。

第 1000 項には倍数の条件が適用されないので、第 1000 項 p_{1000} には 1 から 1000 までの数のいずれを置ける。l が 1000 の約数とすると、$p_l = 1000$ 、$p_{1000} = l$ で並び $(1, 2, \cdots, 1000, \cdots, l)$ がつくれる。さらに k が l の約数のであれば $p_k = l$ 、$p_l = 1000$ 、$p_{1000} = k$ の並び $(1, 2, \cdots, l, \cdots, 1000, \cdots, k)$ がつくれる。

1000 の約数ではない l の項 $p_l = l$ の数を条件を満たすために l の約数 k の項 p_k に置くと、その項の数を k の約数の項に置くことになり、これを繰り返すとすべての数の最小の約数 1 を p_1 以外のところに置くことになる。このような場合か、1 までの途中の約数でも、その数を p_{1000} に置くと 1000 を置く場所さがすことで最終的に置く場所を見つけられない数がでてきてしまう。

よって求める並びは 1000 を 1000 の約数の項に置き、その約数の項の数を別の約数の項に置く。このことを繰り返しおこない、それぞれの約数を p_{1000} に置くことで新しい並びを作りそれを数え上げて総数をもとめる。

約数 10 の場合を考えてみる。$p_{10} = 1000$ のときで、それぞれのならびを $(p_1, p_2, \cdots, p_5, \cdots, p_{10}, \cdots, p_{1000})$ と書くと、10 の約数には 1、2、5、10 があり以下のようになる。

- 1000 と 10 の入れ替えの 10 を使うものは、$p_{1000} = 10$ で $(1, 2, \cdots, 5, \cdots, 1000, \cdots, 10)$ この並びは約数には必ず１つはある。$\cdots$Ⓐ
- 10 の約数 1 を使うと、$p_1 = 10$、$p_{1000} = 1$ で $(10, 2, \cdots, 5, \cdots, 1000, \cdots, 1)$ $\cdots$Ⓑ
- 10 の約数 2 を使うとき $p_2 = 10$ で、2 には約数 1 と 2 があり、$\cdots$Ⓒ
  * 2 の約数 1 を使うと、$p_1 = 2$、$p_{1000} = 1$ で $(2, 10, \cdots, 5, \cdots, 1000, \cdots, 1)$
  * 2 の約数 2 を使うと、$p_2 = 10$、$p_{1000} = 2$ で $(1, 10, \cdots, 5, \cdots, 1000, \cdots, 2)$
- 10 の約数 5 を使うとき $p_5 = 10$ で、5 には約数 1 と 5 があり、$\cdots$Ⓓ
  * 5 の約数 1 を使うと、$p_1 = 5$、$p_{1000} = 1$ で $(5, 2, \cdots, 10, \cdots, 1000, \cdots, 1)$
  * 5 の約数 5 を使うと、$p_5 = 10$、$p_{1000} = 5$ で $(1, 2, \cdots, 10, \cdots, 1000, \cdots, 5)$

$p_{10} = 1000$ のときにできる並びの個数は、10 の約数のうち 10 と 1000 の入れ替えで 1 通り、10 の約数 1 のものが 1 通り、2 のものが 2 通り、5 のものが 2 通りの合計 6 とおりになる。よって、$p_{10} = 1000$ のときにできる並びの個数を求める方法は、10 の約数 1 のものが 1 通り、2 のものが 2 通り、5 のものが 2 通りを求めておいて、それらの総和に 1 を加えれば良い。この方法を、以下のように表を使って計算できるようにしてみる。

表の $2^p5^q(p, q = 0, 1, 2, 3)$ の 1000 の約数に対応している格子点に 1 を置く。これは、1000 とその約数との交換でできる並びの個数 1 である。この表を、上から下へ左から右へ順に第 1 行 1 列から求める各約数の格子点までの長方形の辺とその内部（または線分上）の数の総和を計算していく。

	5^0	5^1	5^2	5^3	(行)
2^0	1	1	1	1	(1)
2^1	1	1	1	1	(2)
2^2	1	1	1	1	(3)
2^3	1	1	1	1	(4)
(列)	(1)	(2)	(3)	(4)	

表 1

右の表 2 は、約数 10 での並びの個数を求めるところである。前述の約数 10 の Ⓑ、Ⓒ、Ⓓ、Ⓐ の順で
$(2^0 5^0 Ⓑ)\mathbf{1} + (2^1 5^0 Ⓒ)\mathbf{2} + (2^0 5^1 Ⓓ)\mathbf{2} + (2^1 5^1 Ⓐ)\mathbf{1} = 6$

	5^0	5^1	5^2	5^3
2^0	**1**	**2**	1	1
2^1	**2**	**1**	1	1
2^2	1	1	1	1
2^3	1	1	1	1

表 2

これで、約数 10 での並びの個数が求められ、表 3 になる。

	5^0	5^1	5^2	5^3
2^0	**1**	**2**	1	1
2^1	**2**	**6**	1	1
2^2	1	1	1	1
2^3	1	1	1	1

表 3

この方法で、表 1 にて順に総和を求めていくと

1 行 1 列:1、2 列:$(1)+1=2$、3 列:$(1+2)+1=4$、4 列:$(1+2+4)+1=8$
2 行 1 列:$(1)+1=2$、2 列:$(1+2)+(2)+1=6$、3 列:$(1+2+4)+(2+6)+1=16$、
4 列:$(1+2+4+8)+(2+6+16)+1=40$
3 行 1 列:$(1)+(2)+1=4$、2 列:$(1+2)+(2+6)+(4)+1=16$、3 列:$(1+2+4)+(2+6+16)+(4+16)+1=52$、
4 列:$(1+2+4+8)+(2+6+16+40)+(4+16+52)+1=152$
4 行 1 列:$(1)+(2)+(4)+1=8$、2 列:$(1+2)+(2+6)+(4+16)+(8)+1=40$、
3 列:$(1+2+4)+(2+6+16)+(4+16+52)+(8+40)+1=152$、
4 列:$(1+2+4+8)+(2+6+16+40)+(4+16+52+152)+(8+40+152)+1=504$

下の表ができる。

	5^0	5^1	5^2	5^3
2^0	1	2	4	8
2^1	2	6	16	40
2^2	4	16	52	152
2^3	8	40	152	504

以上から、並びは 504 通り。

問 10

1 以上 50 以下の整数から相異なる 25 個の整数を選ぶ方法であって、選ばれたどの相異なる 2 つの整数についても、一方が他方の約数となることがないようなものは何通り あるか。

$M_1 = \{26, 27, \cdots, 49, 50\}$ の 25 個の組は条件を満たす。この中の数を一方が他方の約数となることがないように他の数と入れかえて条件を満たす組を作る。この M_1 の中の一つだけの数の約数で他の数の約数とらないもの $D_1 = \{17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25\}$ となる。それは $d \in D_1$ のとき、$2 \times d \in M_1$ ではあるが $3 \times d \in M_1$ ではないから。

$$M_1 = \{26, 27, \cdots, 34(17), 35, 36(18), 39, \cdots, 48(24), 49, 50(25)\}$$

この M_1 の括弧内の数がそれぞれの D_1 にある数で M_1 の約数である。

この約数を対応する（倍数となる）数と入れ替えて条件を満たす組がつくれる。その個数は、1 組替えるのが ${}_9\mathrm{C}_1$ 通り、2 組替えるのが ${}_9\mathrm{C}_2$ 通り、$\cdots$、9 組全部替える替えるのが ${}_9\mathrm{C}_9$ 通り、なにも替えない場合も入れて $2^9 = 512 \cdots$ ① 通り

つぎに入れ替える数に D_1 以外の 16 以下の数を加えて調べていく。新たに加える 16 以下の数は M_1 の複数個の数の約数となるので、次のようにして 25 個の数を作っていく。16 以下の数を d とし、d を約数にもつ M_1 の数を m_1、m_2、$\cdots$、m_l とする。この M_1 の数の一つを d で置き換、残りの数を D_1 の数でかつ d の約数にならないもので置き換える。この置き換えが m_1、m_2、$\cdots$、m_l 全てできて条件を満たす 25 個の数ができる。

しかし、16 以下の数のうち 15、13 、11、 10、 9 そして 7 以下の数を使ったときには求め 25 個の数はできない。15 は 30 と 45 の約数。D の数には 30 または 40 の約数になるものはない。

- 15 は 30 と 45 の約数。30 の約数が 15、 6、3、 2、 1。 45 の約数が 15 、9、3、 1 だから 15 以外の約数 $\notin D_1$。
- 13 は 26 と 39 の約数。26 の約数が 13、 2、 1。 39 の約数が 13 、3、 1 だから 13 以外の約数 $\notin D_1$。
- 11 は 33 と 44 の約数。 33 の約数が 11、3、1。 44 の約数が 22、11、4 、2、 1。22 以外の約数 $\notin D_1$。$22 \in D_1$ であるが 11 自身を約数にもつので置き換えに使えない。
- 10 は 30 と 40 の約数。$20 \in D_1$ で 40 の約数であるが 10 を約数にもつし、30 の約数は $15, 5, 3, 1 \notin D_1$。
- 9 は 27 、36 と 45 の約数。27 の約数が 9 、3、 1。 36 の約数が 18、 12、 9、 6 、3 、2、 1。 45 の約数が 15、 9、 3、 1。18 以外の約数 $\notin D_1$。 $18 \in D_1$ であるが 9 自身を約数にもつので置き換えに使えない。
- 7 以下の数も同様にして置き換えに使うことができない。

次に、残りの 16 、14、 12、 8 を使った置き換えを調べる。

- 16 を使う
  16 は 32 と 48 の約数だから 32 を 16 で 48 を 24 で置き換えておき $D_2 = \{17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 25\}$ の 8 個の数を
  $$M_2 = \{26, 27, \cdots, 31, \mathbf{16}, 33, 34(17), 35, 36(18), 39, \cdots, 47, \mathbf{24}, 49, 50(25)\}$$
  の数と置き換える。それは $2^8 = 256 \cdots$ ② 通りある。
- 14 を使う。14 は 28 と 42 の約数
  - * 28 を 14 で 42 を 21 で置き換えておき $D_3 = \{17, 18, 19, 20, 22, 23, 24, 25\}$ の 8 個の数を
    $$M_3 = \{26, 27, \mathbf{14} \cdots, 33, 34(17), 35, 36(18), 39, 40(20), 41, \mathbf{21}, 43, \cdots, 49, 50(25)\}$$
    の数と置き換える。それは $2^8 = 256 \cdots$ ③ 通りある。
  - * 28 を 14 で 42 を 21 で置き換え、さらに 32 を 16 で 48 を 24 で置き換え $D_4 = \{17, 18, 19, 20, 22, 23, 25\}$ の 7 個の数を
    $$M_4 = \{26, 27, \mathbf{14} \cdots, 31, \mathbf{16}, 33, 34(17), 35, 36(18), \cdots, 39, 40(20), 41, \mathbf{21}, 43, \cdots, 47, \mathbf{24}, 49, 50(25)\}$$
    の数と置き換える。それは $2^7 = 128 \cdots$ ④ 通りある。
- 12 を使う。12 は 36 と 48 の約数。
  - * 48 を 12 で 36 を 18 で置き換え $D_5 = \{17, 19, 20, 21, 22, 23, 25\}$ の 7 個の数を
    $$M_5 = \{26, 27, \cdots, 35, \mathbf{18}, 37, 34(17), , \cdots, 47, \mathbf{12}, 43, \cdots, 49, 50(25)\}$$
    の数と置き換える。それは $2^7 = 128 \cdots$ ⑤ 通りある。
  - * 48 を 12 で 36 を 18 で置き換え、さらに 32 を 16 で置き換え $D_6 = \{17, 19, 20, 21, 22, 23, 25\}$ の 7 個の数を
    $$M_6 = \{26, 27, \cdots, 31, \mathbf{16}, 33, 34(17), 35, \mathbf{18}, 37, \cdots, 47, \mathbf{12}, 49, 50(25)\}$$
    の数と置き換える。それは $2^7 = 128 \cdots$ ⑥ 通りある。
  - * 48 を 12 で 36 を 18 で置き換え、さらに 28 を 14、42 を 21 で置き換え $D_7 = \{17, 19, 20, 22, 23, 25\}$ の 6 個の数を
    $$M_7 = \{26, 27, \mathbf{14}, 29, \cdots .35, , \mathbf{18}, 37, \cdots 41, \mathbf{21}, 43, \cdots, 47, \mathbf{12}, 49, 50(25)\}$$
    の数と置き換える。それは $2^6 = 64 \cdots$ ⑦ 通りある。
  - * 上の置き換えに 32 を 16 で置き換えを追加して $D_8 = \{17, 19, 20, 22, 23, 25\}$ の 6 個の数を
    $$M_8 = \{26, 27, \mathbf{14}, 29, 30, 31, \mathbf{16}, 35, \mathbf{18}, 37, \cdots 41, \mathbf{21}, 43, \cdots, 47, \mathbf{12}, 49, 50(25)\}$$
    の数と置き換える。それは $2^6 = 64 \cdots$ ⑧ 通りある。

- 8 を使う。8 は 32、 40 と 48 の約数。

  * 32 を 8、40 を 20、48 を 12 で置き換えるが、12 を約数にもつ 36 があるのでそれを 18 で置き換える。$D_9 = \{17, 19, 21, 22, 23, 25\}$ の 6 個の数を

$$M_9 = \{26, 27, \mathbf{14}, \cdots, 31, \mathbf{16}, \cdots, 35, \mathbf{18}, \cdots, 39, \mathbf{20}, 41, \cdots, 47, \mathbf{12}, 49, 50(25)\}$$

    の数と置き換える。それは $2^6 = 64 \cdots$ ⑨ 通りある。

  * 上の置き換えに 42 を 21 の置き換えを追加して $D_{10} = \{17, 19, 22, 23, 25\}$ の 5 個の数を

$$M_{10} = \{26, 27, \mathbf{14}, \cdots, 31, \mathbf{16}, \cdots, 35, \mathbf{18}, \cdots, 39, \mathbf{20}, 41, \mathbf{21}, 43, \cdots, 47, \mathbf{12}, 49, 50(25)\}$$

    の数と置き換える。それは $2^5 = 32 \cdots$ ⑩ 通りある。

以上の合計で、求める総数は 1632 通り。

コンピュータでそれぞれのケースを検証し、数の組みの例を４通りずつプリントしてみた。

```
,,,
case 17-25 : 512 通り
  D = [(17,34),(18,36),(19,38),(20,40),(21,42),(22,44),(23,46),(24,48),(25,50)]
  M = [26,27,28,29,30,31,32,33,34,35,36,37,38,39,40,41,42,43,44,45,46,47,48,49,50]
  2 : [26,27,28,29,30,31,32,33,17,35,36,37,38,39,40,41,42,43,44,45,46,47,48,49,50]
257 : [26,27,28,29,30,31,32,33,17,35,18,37,19,39,20,41,21,43,44,45,46,47,48,49,50]
512 : [26,27,28,29,30,31,32,33,17,35,18,37,19,39,20,41,21,43,22,45,23,47,24,49,25]
case b 16,24 : 256 通り
  D = [(17,34),(18,36),(19,38),(20,40),(21,42),(22,44),(23,46),(25,50)]
  M = [26,27,28,29,30,31,16,33,34,35,36,37,38,39,40,41,42,43,44,45,46,47,24,49,50]
  2 : [26,27,28,29,30,31,16,33,17,35,36,37,38,39,40,41,42,43,44,45,46,47,24,49,50]
129 : [26,27,28,29,30,31,16,33,34,35,18,37,19,39,20,41,21,43,44,45,46,47,24,49,50]
256 : [26,27,28,29,30,31,16,33,17,35,18,37,19,39,20,41,21,43,22,45,23,47,24,49,25]
case c 14,21 : 256 通り
  D = [(17,34),(18,36),(19,38),(20,40),(22,44),(23,46),(24,48),(25,50)]
  M = [26,27,14,29,30,31,32,33,34,35,36,37,38,39,40,41,21,43,44,45,46,47,48,49,50]
  2 : [26,27,14,29,30,31,32,33,17,35,36,37,38,39,40,41,21,43,44,45,46,47,48,49,50]
129 : [26,27,14,29,30,31,32,33,34,35,18,37,19,39,20,41,21,43,22,45,46,47,48,49,50]
256 : [26,27,14,29,30,31,32,33,17,35,18,37,19,39,20,41,21,43,22,45,23,47,24,49,25]
case c 14,21,16,24 : 128 通り
  D = [(17,34),(18,36),(19,38),(20,40),(22,44),(23,46),(25,50)]
  M = [26,27,14,29,30,31,16,33,34,35,36,37,38,39,40,41,21,43,44,45,46,47,24,49,50]
  2 : [26,27,14,29,30,31,16,33,17,35,36,37,38,39,40,41,21,43,44,45,46,47,24,49,50]
 65 : [26,27,14,29,30,31,16,33,17,35,18,37,19,39,20,41,21,43,44,45,46,47,24,49,50]
128 : [26,27,14,29,30,31,16,33,17,35,18,37,19,39,20,41,21,43,22,45,23,47,24,49,25]
```

case d 12,18 : 128 通り

D = [(17,34),(19,38),(20,40),(21,42),(22,44),(23,46),(25,50)]

M = [26,27,28,29,30,31,32,33,34,35,18,37,38,39,40,41,42,43,44,45,46,47,12,49,50]

2 : [26,27,28,29,30,31,32,33,17,35,18,37,38,39,40,41,42,43,44,45,46,47,12,49,50]

65 : [26,27,28,29,30,31,32,33,17,35,18,37,19,39,20,41,21,43,44,45,46,47,12,49,50]

128 : [26,27,28,29,30,31,32,33,17,35,18,37,19,39,20,41,21,43,22,45,23,47,12,49,25]

case d 12,18,16 : 128 通り

D = [(17,34),(19,38),(20,40),(21,42),(22,44),(23,46),(25,50)]

M = [26,27,28,29,30,31,16,33,34,35,18,37,38,39,40,41,42,43,44,45,46,47,12,49,50]

2 : [26,27,28,29,30,31,16,33,17,35,18,37,38,39,40,41,42,43,44,45,46,47,12,49,50]

65 : [26,27,28,29,30,31,16,33,17,35,18,37,19,39,20,41,21,43,44,45,46,47,12,49,50]

128 : [26,27,28,29,30,31,16,33,17,35,18,37,19,39,20,41,21,43,22,45,23,47,12,49,25]

case d 12,18,14,21 : 64 通り

D = [(17,34),(19,38),(20,40),(22,44),(23,46),(25,50)]

M = [26,27,14,29,30,31,32,33,34,35,18,37,38,39,40,41,21,43,44,45,46,47,12,49,50]

2 : [26,27,14,29,30,31,32,33,17,35,18,37,38,39,40,41,21,43,44,45,46,47,12,49,50]

33 : [26,27,14,29,30,31,32,33,34,35,18,37,19,39,20,41,21,43,22,45,46,47,12,49,50]

64 : [26,27,14,29,30,31,32,33,17,35,18,37,19,39,20,41,21,43,22,45,23,47,12,49,25]

case d 12,18,16,14,21 : 64 通り

D = [(17,34),(19,38),(20,40),(22,44),(23,46),(25,50)]

M = [26,27,14,29,30,31,16,33,34,35,18,37,38,39,40,41,21,43,44,45,46,47,12,49,50]

2 : [26,27,14,29,30,31,16,33,17,35,18,37,38,39,40,41,21,43,44,45,46,47,12,49,50]

33 : [26,27,14,29,30,31,16,33,34,35,18,37,19,39,20,41,21,43,22,45,46,47,12,49,50]

64 : [26,27,14,29,30,31,16,33,17,35,18,37,19,39,20,41,21,43,22,45,23,47,12,49,25]

case e 8,20,12,18 : 64 通り

D = [(17,34),(19,38),(21,42),(22,44),(23,46),(25,50)]

M = [26,27,28,29,30,31,8,33,34,35,18,37,38,39,20,41,42,43,44,45,46,47,12,49,50]

2 : [26,27,28,29,30,31,8,33,17,35,18,37,38,39,20,41,42,43,44,45,46,47,12,49,50]

33 : [26,27,28,29,30,31,8,33,34,35,18,37,19,39,20,41,21,43,22,45,46,47,12,49,50]

64 : [26,27,28,29,30,31,8,33,17,35,18,37,19,39,20,41,21,43,22,45,23,47,12,49,25]

case e 8,20,12,18,14,21 : 32 通り

D = [(17,34),(19,38),(22,44),(23,46),(25,50)]

M = [26,27,28,29,30,31,8,33,34,35,18,37,38,39,20,41,21,43,44,45,46,47,12,49,50]

2 : [26,27,28,29,30,31,8,33,17,35,18,37,38,39,20,41,21,43,44,45,46,47,12,49,50]

17 : [26,27,28,29,30,31,8,33,17,35,18,37,19,39,20,41,21,43,22,45,46,47,12,49,50]

32 : [26,27,28,29,30,31,8,33,17,35,18,37,19,39,20,41,21,43,22,45,23,47,12,49,25]

MO2020P10 : 1632 通り

, , ,

問 11 のメモ　　数字和の偶奇性について

$n = a_i 10^i + a_{i-1}10^{i-1} + \cdots + a_2 10^2 + a_1 10 + a_0$ の数字和を $s_d(n) = a_i + a_{i-1} + \cdots + a_2 + a_1 + a_0$ とし、問 11 の $f(n)$ の符号部分を $s(n) = \begin{cases} 1 & (\text{数字和が偶数のとき}) \\ -1 & (\text{数字和が奇数のとき}) \end{cases}$

とする。$n = a_i 10^i + a_{i-1}10^{i-1} + \cdots + a_2 10^2 + a_1 10 + a_0$ の a_0 からの連続する下の位の数字が 0 である個数を p_0 とすると、

$$s(n+1) = (-1) \times s(n) \times (-1)^{(p_0+1)}$$

となる。

$a_0 = 0, 1, 2, \cdots, 8$ のとき数字和 $s(n+1) = s_d(n) + 1$ であり偶数、奇数を交互に繰り返す。$a_0 = 9$ のときを含む n の下の位の数字 $a_0 = a_1 = a_2 = \cdots = a_j = 9$, $a_{j+1} + 1 < 10$ $(j < i)$ とすべて 9 のときは、$n+1$ において、$a_j = a_{j-1} = \cdots = a_0 = 0$ となり $s_d(n+1)$ は以下のようになる。

- 9 の個数が奇数個 ($j =$ 偶数) のときは、偶数から偶数、奇数から奇数となる
  $s_d(n)$ が偶数であれば、$9 \times \text{奇数} = \text{奇数}$ であり $a_i + \cdots + a_{j+1}$ は奇数で、$a_i + \cdots + (a_{j+1} + 1)$ は偶数だから $s_d(n+1) = a_i + \cdots + (a_1 + 1) + 0$ で偶数は変わらない。$s_d(n)$ が奇数のときは、$a_i + \cdots + a_{j+1}$ は偶数で、$a_i + \cdots + (a_{j+1} + 1)$ は奇数だから $s_d(n+1) = a_i + \cdots + (a_1 + 1) + 0$ で奇数は変わらない。
- 9 の個数が偶数個 ($j =$ 奇数) のときは、偶数から奇数、奇数から偶数となる
  $s_d(n)$ が偶数であれば、$9 \times \text{偶数} = \text{偶数}$ であり $a_i + \cdots + a_{j+1}$ は偶数で、$a_i + \cdots + (a_{j+1} + 1)$ は奇数だから $s_d(n+1) = a_i + \cdots + (a_1 + 1) + 0$ で奇数に変わる。$s_d(n)$ が奇数のときは、$a_i + \cdots + a_{j+1}$ は奇数で、$a_i + \cdots + (a_{j+1} + 1)$ は偶数だから $s_d(n+1) = a_i + \cdots + (a_1 + 1) + 0$ で偶数に変わる。

この数字和の偶奇性で問 11 の和 $S = f(1) + f(2) + \cdots + f(10^{100} - 1)$ を書き直すと

$$S = \sum_{n=1}^{10^{100}-1} (-1)^n \times n^{100} \times (-1)^{p_0}$$

となる。これならコンピュータで計算できると思い、次のページのプログラムで計算してみました。$n = 1$ から $10^6 - 1$ の計算で 3 秒近くかかりました。

これではダメです。n^{100} の計算で隣接するいくつかの項を調べれば何かあるのかもしれません。例えば、$n^{100} - (n+1)^{100} - (n+10)^{100} + (n+11)^{100}$ では、n^{100} と n^{99} の項が相殺されます。あとは、、、

```python
import datetime
def digit0s(n):
        p0 = 1
        while True:
                q, r = divmod(n, 10)
                if r != 0:
                        return p0
                p0 *= -1
                n = q
def factor5s(S):
        f5 = 0
        while True:
                q, r = divmod(S, 5)
                if r != 0:
                        return f5
                f5 += 1
                S = q

print(datetime.datetime.now())
p = 6
S, s = 0, 1
for n in range(1, 10 ** p):
        s *= (-1) * digit0s(n)
        S += s * n ** 100

print(f'1 ~ 10**{p}-1 : S=5**{factor5s(S)} * ...')
print(datetime.datetime.now())

""" 実行結果
2022-02-09 21:16:36.960042
1 ~ 10**6-1 : S=5**30 * ...
2022-02-09 21:16:39.199775
"""
```