2023 数学オリンピック予選問題 問 9 問 11 問 12

梅山新一郎 2023 年 2 月

以下の記述にあるプログラムは python で書かれています
`https://github.com/umeya/my_math_olympic`

9. $1, 2, \ldots, 2023$ の並べ替え $p_1, p_2, \ldots, p_{2023}$ であって,

$$p_1 + |p_2 - p_1| + |p_3 - p_2| + \cdots + |p_{2023} - p_{2022}| + p_{2023} = 4048$$

をみたすものはいくつあるか. ただし, $1, 2, \ldots, 2023$ の並べ替えとは, 1 以上 2023 以下の整数がちょうど 1 回ずつ現れる長さ 2023 の数列である.

和 $p_1 + |p_2 - p_1| + \cdots + |p_n - p_{n-1}| + p_n$ を順列 $(p_1, p_2, \cdots, p_{n-1}, p_n)$ の和として、S_n と表すことにします。まずはいくつかの推測から始めます。順列 $(1, 2, \cdots, 2022, 2023)$ の和 S_{2023} が
$1 + |2 - 1| + |3 - 2| + \cdots + |2023 - 2022| + 2023 = 1 + 1 \times 2022 + 2023 = 4046$
ここで $p_1, p_2 = 2, 1$ と交換してみると $2 + |1 - 2| + |3 - 1| + \cdots + |2023 - 2022| + 2023 = 2 + (1 + 2 + 1 + \cdots + 1) + 2023 = 4048$　$p_2, p_3 = 3, 2$ と交換してみると $1 + |3 - 1| + |2 - 3| + |4 - 2| + \cdots + |2023 - 2022| + 2023 = 1 + (2 + 1 + 2 + 1 + \cdots + 1) + 2023 = 4048$ となりました。この和 4048 は $2023 \times 2 + 2$ と推測して、数列の和を $S_n = 2 \times n + 2 \cdots$ ⓐ としてみます。この和になる順列の個数を P_n と表すことにします。
$n = 3, 4, 5$ のときの ⓐ を満たす順列の個数を調べてみます。$n = 3$ のとき $3!$ 個、$n = 4$ のとき $4!$ 個、$n = 5$ のとき $5!$ 個のそれぞれすべての順列で和を計算して調べます（全数調査です）。その結果を資料にまとめました。

- $n = 3$ のとき

  順列 $(p_1, p_2, \cdots, p_n)$ と、これを逆に並べた順列 $(p_n, \cdots, p_2, p_1)$ の和は等しい $\cdots$ ⓑ

  は明らかなので、$n = 3$ のときの $3! = 6$ 通りの中で調べる順列は $(1, 2, 3)$ 、$(1, 3, 2)$ と $(2, 1, 3)$ だけになり、和が $2 \times 3 + 2 = 8$ となるのは $(2, 1, 3)$ だけです。この逆順も考えて、

  $n = 3$ のときは、$(2, 1, 3)$ と $(3, 1, 2)$ の 2 通り。ⓒ

- $n = 4, 5$ のとき
  そして $6, 7, \cdots, 2023$ と考えていきますが、「$n = 3, 4, 5$ のときの全数調査」を観察してさらに推測をしてみます。$n = 4$ のならびは $n = 3$ からそのならびにいくつかの操作をくわえて作られて、$n = 5$ のならびは $n = 4$ からつくられるようです。その操作が次に説明する操作 A、B、C です。
  P_k 個の順列 $(p_1, p_2, \cdots, p_k)$ に対して、値が $k + 1$ の項を以下の操作で付け加え順列 $(r_1, r_2, \cdots, r_k, r_{k+1})$ を作り、その和が $S_k = 2k + 2$ から $S_{k+1} = 2\ (k + 1) + 2$ となることを示します。

操作 A　数列 $\{p_k\}$ から $r_1=1, r_2=p_1+1, r_3=p_2+1, \cdots, r_k=p_{k-1}+1, r_{k+1}=p_k+1$ となる数列 $\{r_{k+1}\}$ を作る。

これは、数列 $\{r_k\}$ の初項を 1、第 2 項から末項までを数列 $\{p_k\}$ の各項の値に 1 を加えた値の項とすることです。この和 S_{k+1} は

$r_1+|r_2-r_1|+|r_3-r_2|+\cdots+|r_{k+1}-r_k|+r_{k+1}$

$=1+|(p_1+1)-1|+|(p_2+1)-(p_1+1)|+\cdots$

$+|(p_k+1)-(p_{k-1}+1)|+(p_k+1)=1+p_1+|p_2-p_1|+\cdots+|p_k-p_{k-1}|+p_k+1$

$=S_k+2=(2k+2)+2=2(k+1)+2=S_{k+1}$ よって、

この操作 A でつくられる順列の個数を A_{k+1} とすると $A_{k+1}=P_k\cdots ⓓ$

操作 B　操作 A で作った数列 $\{r_{k+1}\}$ の逆順の数列も ⓑ を満たします。よって、

この操作 B でつくられる順列の個数を B_{k+1} とすると $B_{k+1}=A_{k+1}=P_k\cdots ⓔ$

操作 C　数列 $\{p_k\}$ で $p_i=k$ とするとき

$r_i=p_i+1=k+1, r_{i+1}=p_i=k,, r_{i+2}=p_{i+1}, \cdots, r_k=p_{k-1}, r_{k+1}=p_k\cdots$　操作 $C1$

$r_i=p_i=k, r_{i+1}=p_i+1=k+1,, r_{i+2}=p_{i+1}, \cdots, r_k=p_{k-1}, r_{k+1}=p_k\cdots$　操作 $C2$

つまり数列 $\{p_k\}$ のなかで項の値が最大の k の項の前か後かに値が $k+1$ の項を入れて数列 $\{r_{k+1}\}$ を作る操作を操作 C とします。ただしもとの数列 $\{p_k\}$ の $p_1\neq 1$ とします。これで操作 A でつくられる数列との重複を避けます。操作 $C1$ でできる数列数列 $\{r_{k+1}\}$ の和は

$S_{k+1}=r_1+|r_2-r_1|+\cdots+|r_i-r_{i-1}|+|r_{i+1}-r_i|+|r_{i+2}-r_{i+1}|+\cdots+|r_{k+1}-r_k|+r_{k+1}$

$=p_1+|p_2-p_1|+\cdots+|(p_i+1)-p_{i-1}|+|p_i-(p_i+1)|+|p_{i+1}-p_i|+\cdots+|p_k-p_{k-1}|+p_k$

$=p_1+|p_2-p_1|+\cdots+(\mathbf{|p_i-p_{i-1}|+1})+(\mathbf{1})+|p_{i+1}-p_i|+\cdots+|p_k-p_{k-1}|+p_k$

$=S_k+2=(2k+2)+2=2(k+1)+2=S_{k+1}$

操作 $C2$ でできる数列 $\{r_{k+1}\}$ の和は

$S_{k+1}=r_1+|r_2-r_1|+\cdots+|r_i-r_{i-1}|+|r_{i+1}-r_i|+|r_{i+2}-r_{i+1}|+\cdots+|r_{k+1}-r_k|+r_{k+1}$

$=p_1+|p_2-p_1|+\cdots+|p_i-p_{i-1}|+|(p_i+1)-p_i|+|p_{i+1}-(p_i+1)|+\cdots+|p_k-p_{k-1}|+p_k$

$=p_1+|p_2-p_1|+\cdots+|p_i-p_{i-1}|+(\mathbf{1})+(\mathbf{|p_{i+1}-p_i|+1})+\cdots+|p_k-p_{k-1}|+p_k$

$=S_k+2=(2k+2)+2=2(k+1)+2=S_{k+1}$

この操作 C でつくられる順列の個数を C_{k+1} とすると $C_{k+1}=2\times C_k$ であり $C_3=2$ とすると
$C_k=2^{k-2}\cdots ⓕ$

以上の操作 A、B、C で数列 $\{p_{n-1}\}$ からつくられる n 項の数列の個数 P_n は

$$P_n=A_{n-1}+B_{n-1}+2\times C_{n-1}=2\times P_{n-1}+2\times 2^{n-3}\ \ (n\geq 4)、p_3=2\ \cdots ⓖ$$

これを解く。$\dfrac{p_n}{2^n}=q_n$ とき $q_3=\dfrac{1}{4}$ で、$q_n=q_{n-1}+\dfrac{1}{4}\ (n\geq 4)=q_3+(n-3)\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{4}(n-2)$

よって $p_n=(n-2)2^{n-2}\ \ (n\geq 4)$、$p_3=2\cdots ⓗ$

以上、求める順列の個数は $\mathbf{p_{2023}=(2023-2)\times 2^{2023-2}=2021\times 2^{2021}}$

■**資料**　$n=3,4,5$ のときの全数調査

N=3, S3=6, P3=2 -
-- A
-- B
-- C
no=1 , (2, 1, 3)
no=2 , (3, 1, 2)

N=4, S4=10, P4=8 --
-- A
no=1 , (1, 3, 2, 4)
no=2 , (1, 4, 2, 3)
-- B
no=1 , (3, 2, 4, 1)
no=2 , (4, 2, 3, 1)
-- C
no=1 , (2, 1, 3, 4)
no=2 , (2, 1, 4, 3)
no=3 , (3, 4, 1, 2)
no=4 , (4, 3, 1, 2)

N=5, S5=12, P5=24 ---
-- A
no=1 , (1, 2, 4, 3, 5)
no=2 , (1, 2, 5, 3, 4)
no=3 , (1, 3, 2, 4, 5)
no=4 , (1, 3, 2, 5, 4)
no=5 , (1, 4, 3, 5, 2)
no=6 , (1, 4, 5, 2, 3)
no=7 , (1, 5, 3, 4, 2)
no=8 , (1, 5, 4, 2, 3)
-- B
no=1 , (2, 4, 3, 5, 1)
no=2 , (2, 5, 3, 4, 1)
no=3 , (3, 2, 4, 5, 1)
no=4 , (3, 2, 5, 4, 1)
no=5 , (4, 3, 5, 2, 1)
no=6 , (4, 5, 2, 3, 1)
no=7 , (5, 3, 4, 2, 1)
no=8 , (5, 4, 2, 3, 1)
-

- C
no=1 , (2, 1, 3, 4, 5)
no=2 , (2, 1, 3, 5, 4)
no=3 , (2, 1, 4, 5, 3)
no=4 , (2, 1, 5, 4, 3)
no=5 , (3, 4, 5, 1, 2)
no=6 , (3, 5, 4, 1, 2)
no=7 , (4, 5, 3, 1, 2)
no=8 , (5, 4, 3, 1, 2)

N=6, S6=14, P6=64

-- A
no=1 , (1, 2, 3, 5, 4, 6)
no=2 , (1, 2, 3, 6, 4, 5)
no=3 , (1, 2, 4, 3, 5, 6)
no=4 , (1, 2, 4, 3, 6, 5)
no=5 , (1, 2, 5, 4, 6, 3)
no=6 , (1, 2, 5, 6, 3, 4)
no=7 , (1, 2, 6, 4, 5, 3)
no=8 , (1, 2, 6, 5, 3, 4)
no=9 , (1, 3, 2, 4, 5, 6)
no=10 , (1, 3, 2, 4, 6, 5)
no=11 , (1, 3, 2, 5, 6, 4)
no=12 , (1, 3, 2, 6, 5, 4)
no=13 , (1, 3, 5, 4, 6, 2)
no=14 , (1, 3, 6, 4, 5, 2)
no=15 , (1, 4, 3, 5, 6, 2)
no=16 , (1, 4, 3, 6, 5, 2)
no=17 , (1, 4, 5, 6, 2, 3)
no=18 , (1, 4, 6, 5, 2, 3)
no=19 , (1, 5, 4, 6, 3, 2)
no=20 , (1, 5, 6, 3, 4, 2)
no=21 , (1, 5, 6, 4, 2, 3)
no=22 , (1, 6, 4, 5, 3, 2)
no=23 , (1, 6, 5, 3, 4, 2)
no=24 , (1, 6, 5, 4, 2, 3)
-- B
no=1 , (2, 3, 5, 4, 6, 1)
no=2 , (2, 3, 6, 4, 5, 1)
no=3 , (2, 4, 3, 5, 6, 1)
no=4 , (2, 4, 3, 6, 5, 1)
no=5 , (2, 5, 4, 6, 3, 1)
no=6 , (2, 5, 6, 3, 4, 1)
no=7 , (2, 6, 4, 5, 3, 1)
no=8 , (2, 6, 5, 3, 4, 1)
no=9 , (3, 2, 4, 5, 6, 1)
no=10 , (3, 2, 4, 6, 5, 1)
no=11 , (3, 2, 5, 6, 4, 1)
no=12 , (3, 2, 6, 5, 4, 1)
no=13 , (3, 5, 4, 6, 2, 1)
no=14 , (3, 6, 4, 5, 2, 1)
no=15 , (4, 3, 5, 6, 2, 1)
no=16 , (4, 3, 6, 5, 2, 1)
no=17 , (4, 5, 6, 2, 3, 1)
no=18 , (4, 6, 5, 2, 3, 1)
no=19 , (5, 4, 6, 3, 2, 1)
no=20 , (5, 6, 3, 4, 2, 1)
no=21 , (5, 6, 4, 2, 3, 1)
no=22 , (6, 4, 5, 3, 2, 1)
no=23 , (6, 5, 3, 4, 2, 1)
no=24 , (6, 5, 4, 2, 3, 1)
-- C
no=1 , (2, 1, 3, 4, 5, 6)
no=2 , (2, 1, 3, 4, 6, 5)
no=3 , (2, 1, 3, 5, 6, 4)
no=4 , (2, 1, 3, 6, 5, 4)
no=5 , (2, 1, 4, 5, 6, 3)
no=6 , (2, 1, 4, 6, 5, 3)
no=7 , (2, 1, 5, 6, 4, 3)
no=8 , (2, 1, 6, 5, 4, 3)
no=9 , (3, 4, 5, 6, 1, 2)
no=10 , (3, 4, 6, 5, 1, 2)
no=11 , (3, 5, 6, 4, 1, 2)
no=12 , (3, 6, 5, 4, 1, 2)
no=13 , (4, 5, 6, 3, 1, 2)
no=14 , (4, 6, 5, 3, 1, 2)
no=15 , (5, 6, 4, 3, 1, 2)
no=16 , (6, 5, 4, 3, 1, 2)

11. A さんと B さんが黒板を使ってゲームを行う. はじめ, 黒板には 2 以上 50 以下の整数が 1 つずつ書かれており, 2 以上 50 以下の整数からなる空でない集合 S が定まっている. まず, 最初のターンで A さんは S の要素をすべて黒板から消す. その後, 2 人は B さんから始めて交互に黒板から 1 つ以上の整数を選んで消すことを繰り返す. ただし, 直前の相手のターンで消されたどの整数とも互いに素であるような整数は消すことができない. 自分のターンが始まったとき消せる整数がなければゲームを終了し, その人の負け, もう一方の勝ちとする.

B さんの行動にかかわらず, A さんが必ず勝つことができるような S はいくつあるか.

$R_0 = \{2, 3, \cdots, 50\}$ から A さんが消した数の集合 S を除いた残りを R_1 として、R_0 の素数の集合を $P = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47\}$ と表します。

A さんが消す整数を**「P の要素の素数 p_i とその倍数」**$\cdots (*)$ とすると、p_i が 29、31、37、41、43、47 のときは p_i の全てと R_1 の数は互いに素となりますから、B が消せる数はなく A さんが勝ちます。

p_i が上の 6 個の素数以外のときは、消された数 $p_i \times q_i$ の因数 q_i に p_i 以外の素因数 k_i がある場合のみ k_i の倍数を B さんは消すことができる。B さんがこの k_i の倍数 $k_i \times l_i$ を一個以上消したとき、A さんは l_i の倍数を消せば良い。倍数 $k_i \times l_i$ が一つもないのは B さんの手番で消せる数がないことになっているからその時点で A さんの勝ち。つまり、A さんの手番では必ず消せる数があるから $(*)$ で S を作れば良い。

S は素数 15 個いずれかを使ってできるので、1 個も使わない場合を除いて $2^{15} - 1$ 通りあります。こうして S を定めると B さんはいつも消せないのでゲーム終了となります。

よって求める S は

$$\mathbf{2^{15} - 1} \text{ 通り}$$

12. 集合 $\mathcal{A}$ は, 1 以上 2023 以下の整数に対して定義され 1 以上 2023 以下の整数値をとる関数からなり, 次の 2 つの条件をみたしている.

- 任意の $\mathcal{A}$ に属する関数 f および任意の $x < y$ をみたす 1 以上 2023 以下の整数 x, y に対し, $f(x) \geqq f(y)$ が成り立つ.
- 任意の $\mathcal{A}$ に属する関数 f, g および任意の 1 以上 2023 以下の整数 x に対し, $f\big(g(x)\big) = g\big(f\big(g(x)\big)\big)$ が成り立つ.

このとき, $\mathcal{A}$ の要素の個数としてありうる最大の値を求めよ.

いくつかの記号を定めておきます。単調増加である、という一つ目の条件を条件 C1、$f(g(x)) = g(f(g(x)))$ の二つ目の条件を条件 C2 と書きます。関数の値 $f(x_1) = y_1, f(x_2) = y_2, \cdots, f(x_n) = y_n$ を $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$ または簡単に $(y_1, y_2, \cdots, y_n)$ という形式で書くことにします。1 以上 n 以下の整数に対して条件 C1、C2 をみたす関数の集合 $\mathcal{A}$ の要素の個数の最大値を $\mathcal{A}(n)$ とします。

まず条件 C1 は関数の値 $(y_1, y_2, \cdots, y_n)$ で $y_1 \geq y_2 \geq \cdots \geq y_n$ となるのだから、それは 1 以上 n 以下の整数から n 個の重複を許した組み合わせの一つを降順にならべた並び $y_1y_2\cdots y_n$ で表せます。これは ${}_{n+n-1}\mathrm{C}_n$ 通りあります。この個数を m とすると、この m この中から $r(= n, n-1, \cdots, 2)$ 個の関数の組み合わせで条件 C2 をみたす関数の集合 $\mathcal{A}$ を探していきます。約 2^n 通りの全数探索です。「わからないとき」のいつもの方法で「n を小さくして」実験してみます。

$n = 1$ **のときと** $n = 2$ **のとき**　$\mathcal{A} = \{(1)\}$、$\mathcal{A} = \{(2, 2)\}$ と,$\{(1, 1)\}$ の 2 セットでいずれも $\mathcal{A}(n) = 1$ です。

$n = 3$ **のとき**　要素が 2 個の集合が 2 セットありました。$\mathcal{A} = \{(3, 2, 2), (2, 2, 2)\}$ と $\{(2, 2, 2,), (2, 2, 1)\}$ で $\mathcal{A}(n) = 2$ です。

$n = 4$ **のとき**　要素が 3 個の集合が 4 セットありました。$\mathcal{A} = \{(4, 4, 3, 3), (4, 3, 3, 3), (3, 3, 3, 3)\}$、$\{(4, 2, 2, 2), (3, 2, 2, 2), (2, 2, 2, 2)\}$、$\{(3, 3, 3, 3), (3, 3, 3, 2), (3, 3, 3, 1)\}$、$\{(2, 2, 2, 2), (2, 2, 2, 1), (2, 2, 1, 1)\}$ で $\mathcal{A}(n) = 3$ です。

$n = 5$ **のとき**　要素が 6 個の集合が 2 セットありました。

$\mathcal{A} = \{(5, 5, 3, 3, 3), (5, 4, 3, 3, 3), (5, 3, 3, 3, 3), (4, 4, 3, 3, 3), (4, 3, 3, 3, 3), (3, 3, 3, 3, 3)\}$、

$\{(3, 3, 3, 3, 3), (3, 3, 3, 3, 2), (3, 3, 3, 3, 1), (3, 3, 3, 2, 2), (3, 3, 3, 2, 1), (3, 3, 3, 1, 1)\}$ で $\mathcal{A}(n) = 6$ です。

$n = 6$ **のとき**　要素が１０個の集合が 4 セットありました。

$\mathcal{A}$ ={(6,6,6,4,4,4),(6,6,5,4,4,4),(6,6,4,4,4,4),(6,5,5,4,4,4),(6,5,4,4,4,4),(6,4,4,4,4,4),
(5,5,5,4,4,4),(5,5,4,4,4,4),(5,4,4,4,4,4),(4,4,4,4,4,4) }、

{ (6,6,3,3,3,3),(6,5,3,3,3,3),(6,4,3,3,3,3),(6,3,3,3,3,3),(5,5,3,3,3,3),(5,4,3,3,3,3),
(5,3,3,3,3,3),(4,4,3,3,3,3),(4,3,3,3,3,3),(3,3,3,3,3,3)}、

{ (6,6,3,3,3,3),(6,5,3,3,3,3),(6,4,3,3,3,3),(6,3,3,3,3,3),(5,5,3,3,3,3),(5,4,3,3,3,3),
(5,3,3,3,3,3),(4,4,3,3,3,3),(4,3,3,3,3,3),(3,3,3,3,3,3)}、

$\{(3, 3, 3, 3, 3, 3), (3, 3, 3, 3, 3, 2), (3, 3, 3, 3, 3, 1), (3, 3, 3, 3, 2, 2), (3, 3, 3, 3, 2, 1), (3, 3, 3, 3, 1, 1),$
$(3, 3, 3, 2, 2, 2), (3, 3, 3, 2, 2, 1), (3, 3, 3, 2, 1, 1), (3, 3, 3, 1, 1, 1)\}$ で $\mathcal{A}(n) = 10$ です。

以上のセットの一部ですが、$f(g(x))$ と $g(f(g(x)))$ の検算を図にしてあります。

さて、この実験からも推測できるのですが条件 C2 をみたす関数のパターンを考えてみます。

パターン P1

関数 $f(x_1,\cdots,x_{i-1},x_i.x_{i+1},\cdots x_n)=(y_1,\cdots,y_{i-1},y_i,y_{i+1},\cdots,y_n)$ において
$y_1,\cdots,y_{i-1}$ は i 以上 n 以下の整数で $y_i=i=y_{i+1}=\cdots=y_n\cdots(*1)$

このパターンの集合から関数 f と g を選びます。
$g(1,2,\cdots,i-1,i,i+1,\cdots,n)=(y_1,y_2,\cdots,y_{i-1},i,i\cdots,i)$ において y_1 から y_{i-1} までは i 以上だから $f(y_1)=f(y_2)=\cdots=f(y_{i-1})=i$ であるから $f(g(1,2,\cdots,i-1,i,i+1,\cdots,n))=(i,i,\cdots,i,i,i,\cdots,i)$
$g(i)=i$ だから $g(f(g(1,2,\cdots,i-1,i,i+1,\cdots,n)))=(i,i,\cdots,i,i,i,\cdots,i)$
よって、この f と g は条件 C2 をみたす。このパターンでつくれる関数の個数は $y_1,y_2,\cdots,y_{i-1}$ のならびの個数になります。それは、$y_1\geq y_2\geq\cdots\geq y_{i-1}$ だから i 以上 n 以下の整数 $n-i+1$ 個から $i-1$ 個を重複を許して作る組み合わせの個数に等しく

$${}_{(n-i+1)+(i-1)-1}\mathrm{C}_{i-1}={}_{n-1}\mathrm{C}_{i-1}\cdots(*1*)\text{ 個になります。}$$

パターン P2

関数 $f(x_1,\cdots,x_{i-1},x_i.x_{i+1},\cdots x_n)=(y_1,\cdots,y_{i-1},y_i,y_{i+1},\cdots,y_n)$ において
$y_1=\cdots=y_{i-1}=y_i=i$ で $y_{i+1},\cdots,y_n$ は 1 以上 $i-1$ 以下の整数 $\cdots(*2)$

このパターンのときは、
$g(1,2,\cdots,i-1,i,i+1,\cdots,n)=(i,i,\cdots,i,i,y_{i+1},\cdots,y_n)$ において y_i から y_n までは i 以下だから $f(y_i)=f(y_{i+1})=\cdots=f(y_n)=i$ となり、$f(g(1,2,\cdots,i-1,i,i+1,\cdots,n))=(i,i,\cdots,i,i,i,\cdots,i)$
$g(i)=i$ だから $g(f(g(1,2,\cdots,i-1,i,i+1,\cdots,n)))=(i,i,\cdots,i,i,i,\cdots,i)$
よって、この f と g は条件 C2 をみたす。このパターンでつくれる関数の個数は $y_{i+1},\cdots,y_n$ のならびの個数になります。それは、$y_{i+1}\geq y_{i+2}\geq\cdots\geq y_n$ だから 1 以上 i 以下の整数 i 個から $n-i$ 個を重複を許して作る組み合わせの個数に等しく

$${}_{i+(n-i)-1}\mathrm{C}_{n-i}={}_{n-1}\mathrm{C}_{n-i}=\cdots(*2*)\text{ 個になります。}$$

これは ${}_{n-1}\mathrm{C}_{n-i}={}_{n-1}\mathrm{C}_{(n-1)-(n-i)}={}_{n-1}\mathrm{C}_{i-1}$ で $(*1*)$ に等しく、いずれのパターンでも条件 C2 をみたす関数の集合の要素の個数は ${}_{n-1}\mathrm{C}_{i-1}$ 個。この 2 項係数の最大値は n が奇数（$n-1$ が偶数）のとき、$i-1=\dfrac{n-1}{2}$ のとき最大、n が偶数（$n-1$ が奇数）のとき、$i-1=\dfrac{n}{2}-1$ または $\dfrac{n}{2}$ のとき最大となるから

$$\mathcal{A}(\mathbf{2023})={}_{\mathbf{2023-1}}\mathrm{C}_{\frac{2023-1}{2}}={}_{\mathbf{2022}}\mathrm{C}_{\mathbf{1011}}$$

n=3 : 2 sets------- 2 elements

A={(3,2,2),(2,2,2)}

x	123	123	123	123
g(x)	322	322	222	222
f(x)	322	222	322	222
f(g(x))	222	222	222	222
g(f(g(x)))	222	222	222	222

A={(2,2,2),(2,2,1)}

x	123	123	123	123
g(x)	222	222	221	221
f(x)	222	221	222	221
f(g(x))	222	222	222	222
g(f(g(x)))	222	222	222	222

図 1　$n = 3$ のときの $f(g(x)) = g(f(g(x)))$ の検算

n=4 : 4 sets------- 3 elements

A={(4,4,3,3),(4,3,3,3),(3,3,3,3)}

x	1234	1234	1234	1234	1234	1234	1234	1234	1234
g(x)	4433	4433	4433	4333	4333	4333	3333	3333	3333
f(x)	4433	4333	3333	4433	4333	3333	4433	4333	3333
f(g(x))	3333	3333	3333	3333	3333	3333	3333	3333	3333
g(f(g(x)))	3333	3333	3333	3333	3333	3333	3333	3333	3333

A={(4,2,2,2),(3,2,2,2),(2,2,2,2)}

x	1234	1234	1234	1234	1234	1234	1234	1234	1234
g(x)	4222	4222	4222	3222	3222	3222	2222	2222	2222
f(x)	4222	3222	2222	4222	3222	2222	4222	3222	2222
f(g(x))	2222	2222	2222	2222	2222	2222	2222	2222	2222
g(f(g(x)))	2222	2222	2222	2222	2222	2222	2222	2222	2222

A={(3,3,3,3),(3,3,3,2),(3,3,3,1)}

x	1234	1234	1234	1234	1234	1234	1234	1234	1234
g(x)	3333	3333	3333	3332	3332	3332	3331	3331	3331
f(x)	3333	3332	3331	3333	3332	3331	3333	3332	3331
f(g(x))	3333	3333	3333	3333	3333	3333	3333	3333	3333
g(f(g(x)))	3333	3333	3333	3333	3333	3333	3333	3333	3333

A={(2,2,2,2),(2,2,2,1),(2,2,1,1)}

x	1234	1234	1234	1234	1234	1234	1234	1234	1234
g(x)	2222	2222	2222	2221	2221	2221	2211	2211	2211
f(x)	2222	2221	2211	2222	2221	2211	2222	2221	2211
f(g(x))	2222	2222	2222	2222	2222	2222	2222	2222	2222
g(f(g(x)))	2222	2222	2222	2222	2222	2222	2222	2222	2222

図 2　$n = 4$ のときの $f(g(x)) = g(f(g(x)))$ の検算

n=5 : 2 sets------- 6 elements

A=[[0, 5, 5, 3, 3, 3], [0, 5, 4, 3, 3, 3], [0, 5, 3, 3, 3, 3], [0, 4, 4, 3, 3, 3], [0, 4, 3, 3, 3, 3], [0, 3, 3, 3, 3, 3]]

x	12345	12345	12345	12345	12345	12345
g(x)	55333	55333	55333	55333	55333	55333
f(x)	55333	54333	53333	44333	43333	33333
f(g(x))	33333	33333	33333	33333	33333	33333
g(f(g(x)))	33333	33333	33333	33333	33333	33333

x	12345	12345	12345	12345	12345	12345
g(x)	54333	54333	54333	54333	54333	54333
f(x)	55333	54333	53333	44333	43333	33333
f(g(x))	33333	33333	33333	33333	33333	33333
g(f(g(x)))	33333	33333	33333	33333	33333	33333

x	12345	12345	12345	12345	12345	12345
g(x)	53333	53333	53333	53333	53333	53333
f(x)	55333	54333	53333	44333	43333	33333
f(g(x))	33333	33333	33333	33333	33333	33333
g(f(g(x)))	33333	33333	33333	33333	33333	33333

x	12345	12345	12345	12345	12345	12345
g(x)	44333	44333	44333	44333	44333	44333
f(x)	55333	54333	53333	44333	43333	33333
f(g(x))	33333	33333	33333	33333	33333	33333
g(f(g(x)))	33333	33333	33333	33333	33333	33333

x	12345	12345	12345	12345	12345	12345
g(x)	43333	43333	43333	43333	43333	43333
f(x)	55333	54333	53333	44333	43333	33333
f(g(x))	33333	33333	33333	33333	33333	33333
g(f(g(x)))	33333	33333	33333	33333	33333	33333

x	12345	12345	12345	12345	12345	12345
g(x)	33333	33333	33333	33333	33333	33333
f(x)	55333	54333	53333	44333	43333	33333
f(g(x))	33333	33333	33333	33333	33333	33333
g(f(g(x)))	33333	33333	33333	33333	33333	33333

図 3　$n = 5$ のときの $f(g(x)) = g(f(g(x)))$ の検算 (1 セットのみ)