序列显示出围绕多少值振动?值 $r = 3.45$ 和值 $r = 3.54$(精确到两位小数)也称为分岔值,因为序列的行为在跨过这些值时改变.

(e) 还有更有趣的情况.实际上存在一个分岔值的增加序列 $3 < 3.45 < 3.54 < \cdots < c_n < c_{n+1} < \cdots$,使得对 $c_n < r < c_{n+1}$,逻辑斯谛序列 $\{a_n\}$ 围绕 2^n 个值稳定振动,称为**吸收 2^n - 循环**.并且分岔序列有上界 3.57(从而收敛).如果你取 r 的值小于 3.57,你会看到某类的 2^n - 循环.取 $r = 3.5695$ 并画 300 个点.

(f) 让我们看一看当 $r > 3.57$ 时发生什么.取 $r = 3.65$,计算并画出 $\{a_n\}$ 的头 300 项.观察序列的项怎样以不可预见的混沌方式漫游.

(g) 对 $r = 3.65$,选择 a_0 的两个接近的出发值,比如 $a_0 = 0.3$ 和 $a_0 = 0.301$.计算并画出由每个初始值确定的序列的头 300 个值.比较在你的图中观察到的行为.在多远处两个序列的对应项互相离开?对 $r = 3.75$ 重复这一探索.是否看到图形随 a_0 的选择而不同?我们说逻辑斯谛序列**对初始条件 a_0 是敏感的**.

8.3　无穷级数

级数与部分和 • 几何级数 • 发散级数 • 发散级数的第 n 项判别法 • 添加或取消项 • 重新编号 • 级数的组合

在数学和科学中,我们时常把函数写成无穷多项式,比如

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots, \quad |x| < 1$$

(随着本章的继续我们将看到这样做的重要性).对 x 的任何允许值,我们把无穷个常数的和作为多项式的值.这个和我们称为一个无穷级数.本节目的是让大家熟悉无穷级数.

级数与部分和

关于级数的的第一件事情是它不简单地是加法的一个例子.实数加法是二元运算,这意味着我们一次加两个数.1 + 2 + 3 作为加法有意义的唯一理由是我们可以任意把数组合再相加,即加法结合律保证不论如何组合,都得到同一个和.

$$1 + (2 + 3) = 1 + 5 = 6, \quad 而 \quad (1 + 2) + 3 = 3 + 3 = 6.$$

简而言之,实数的有限和总产生一个实数(有限次二元加法的结果),但实数的无限和则迥然不同.这就是我们为什么需要无穷级数的一个谨慎的定义.

我们从怎样界定像

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots.$$

这样的表达式的意义.为此而采用的方法不是一次加所有的项(我们也做不到),而是从开头一次加一项,并考察这些"部分"和的变动模式.

部分和		值
第 1 项	$s_1 = 1$	$2 - 1$
第 2 项	$s_2 = 1 + \frac{1}{2}$	$2 - \frac{1}{2}$
第 3 项	$s_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$	$2 - \frac{1}{4}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
第 n 项	$s_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}$	$2 - \frac{1}{2^{n-1}}$

实际存在一个模式.部分和组成一个序列,其第 n 项

$$s_n = 2 - \frac{1}{2^{n-1}}$$

(我们马上会看到为什么).因为 $\lim_{n\to\infty}(1/2^n) = 0$,序列收敛到 2.我们称

$$\text{无穷级数的和 } 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} + \cdots \text{ 等于 } 2.$$

是否这个级数的有限项之和等于 2?不.我们事实上能够一项一项地加无穷项吗?不能.不过,我们还是能定义它们的和为部分和当 $n \to \infty$ 时的极限,这里是 2(图 8.9).我们有关序列和极限的知识使我们能够突破有限和的禁锢来定义无穷级数的和这一全新概念.

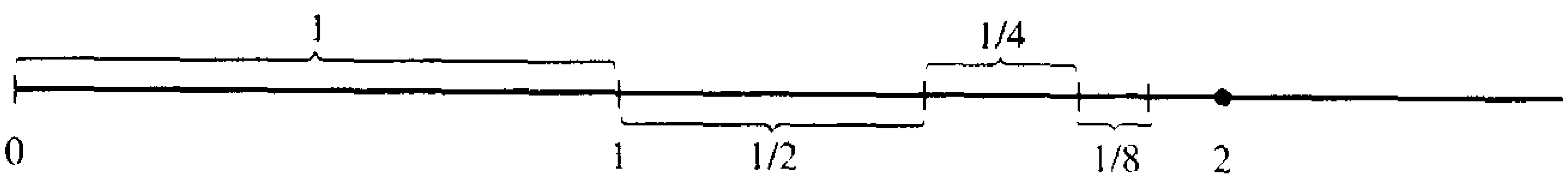


图 8.9　当长度 1,1/2,1/4,… 一一相加时和趋于 2

CD-ROM
WEBsite
历史传记
Blaise Pascal
(1623 — 1662)

定义　无穷级数

给定一个数列 $\{a_n\}$,形如

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$$

的表达式是一个**无穷级数**.数 a_n 称为级数的**第 n 项**.

级数的**部分和**组成一个实数序列

$$s_1 = a_1$$
$$s_2 = a_1 + a_2$$
$$s_3 = a_1 + a_2 + a_3$$
$$\vdots$$
$$s_n = \sum_{k=1}^{n} ak$$
$$\vdots$$

如果部分和序列当 $n \to \infty$ 时有一个极限 S,就说级数**收敛**到 S,并写成

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots = \sum_{k=1}^{n} a_k = S.$$

否则,我们就说级数发散.

例 1(判断一个级数的收敛性) 级数

$$\frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \cdots + \frac{3}{10^n} + \cdots$$

是否收敛?

解 这是写成小数形式的部分和

$$0.3,\quad 0.33,\quad 0.333,\quad 0.3333,\quad \cdots$$

序列有极限 $0.\overline{3}$,我们识别出这是 1/3.级数收敛到和 1/3.

当我们研究给定级数 $a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$ 时,我们不知道它是否收敛.不管哪种情况,下列表示级数的 $\sum$ 符号是便利的.

CD-ROM WEBsite

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad \sum_{k=1}^{\infty} a_k, \quad 或 \quad \sum a_n.$$

当默认从 1 至 ∞ 求和时这是一个有用的缩写

几何级数

例 1 中的级数是一个几何级数,因为它的每一项由其前一项乘以同一常数 r 得到,这里 $r = 1/10$.(本章开头的无穷平分正方形所得的面积级数也是几何级数.)

几何级数的收敛性是无穷过程的少数情形之一,对这类级数,数学家可预先方便地进行计算.让我们看看这是为什么.

几何级数是形如

$$a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$$

的级数,其中 a 和 r 是固定的实数,并且 $a \neq 0$. **公比** r 可为正,像

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \cdots,$$

也可是负的,像

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \cdots + \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} + \cdots.$$

如果 $|r| \neq 1$,我们以下列方式确定级数的收敛性和发散性.从第 n 个部分和开始:

$$s_n = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1}$$

$$rs_n = ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + ar^n \qquad s_n \text{ 乘以 } r$$

$$s_n - rs_n = a - ar^n \qquad rs_n \text{ 减去 } s_n\text{,右端大部分项消去}$$

$$s_n(1 - r) = a(1 - r^n) \qquad \text{分解因式}$$

$$s_n = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r}, \quad (r \neq 1). \qquad \text{若 } r \neq 1 \text{ 可以解出 } s_n.$$

如果 $|r| < 1$,则 $n \to \infty$, $r^n \to 0$(表 8.1,公式 4),于是 $s_n \to a/(1 - r)$.如果 $|r| > 1$,则 $|r^n| \to \infty$,从而级数发散.

如果 $r=1$,几何级数的部分和是

$$s_n=a+a(1)+a(1)^2+\cdots+a(1)^{n-1}=na,$$

由于 $\lim_{n\to\infty}s_n=\pm\infty$,级数发散.如果 $r=-1$,因为部分和交替是 a 和 0,级数发散.结果总结如下.

几何级数

$$a+ar+ar^2+ar^3+\cdots+ar^{n-1}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}ar^{n-1}$$

当 $|r|<1$ 时收敛到和 $a/(1-r)$,而当 $|r|\geqslant 1$ 时发散.

注:等式

$$\sum_{n=1}^{\infty}ar^{n-1}=\frac{a}{1-r},\quad |r|<1$$

仅当求和从 $n=1$ 开始时成立.

这就彻底解决了几何级数的收敛问题.我们知道哪一个收敛,哪一个发散.对于收敛情形,我们知道和是什么.区间 $-1<r<1$ 是**收敛区间**.

例 2(分析几何级数) 说明每个级数收敛还是发散,如果收敛,给出它的和.

(a) $\sum_{n=1}^{\infty}3\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

(b) $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\cdots+\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

(c) $\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^{k}=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^{k-1}$

(d) $\frac{\pi}{2}+\frac{\pi^2}{4}+\frac{\pi^3}{8}+\cdots$

解 (a) 第一项是 $a=3$,而 $r=1/2$.级数收敛到

$$\frac{3}{1-(1/2)}=6.$$

(b) 第一项是 $a=1$,而 $r=-1/2$.级数收敛到

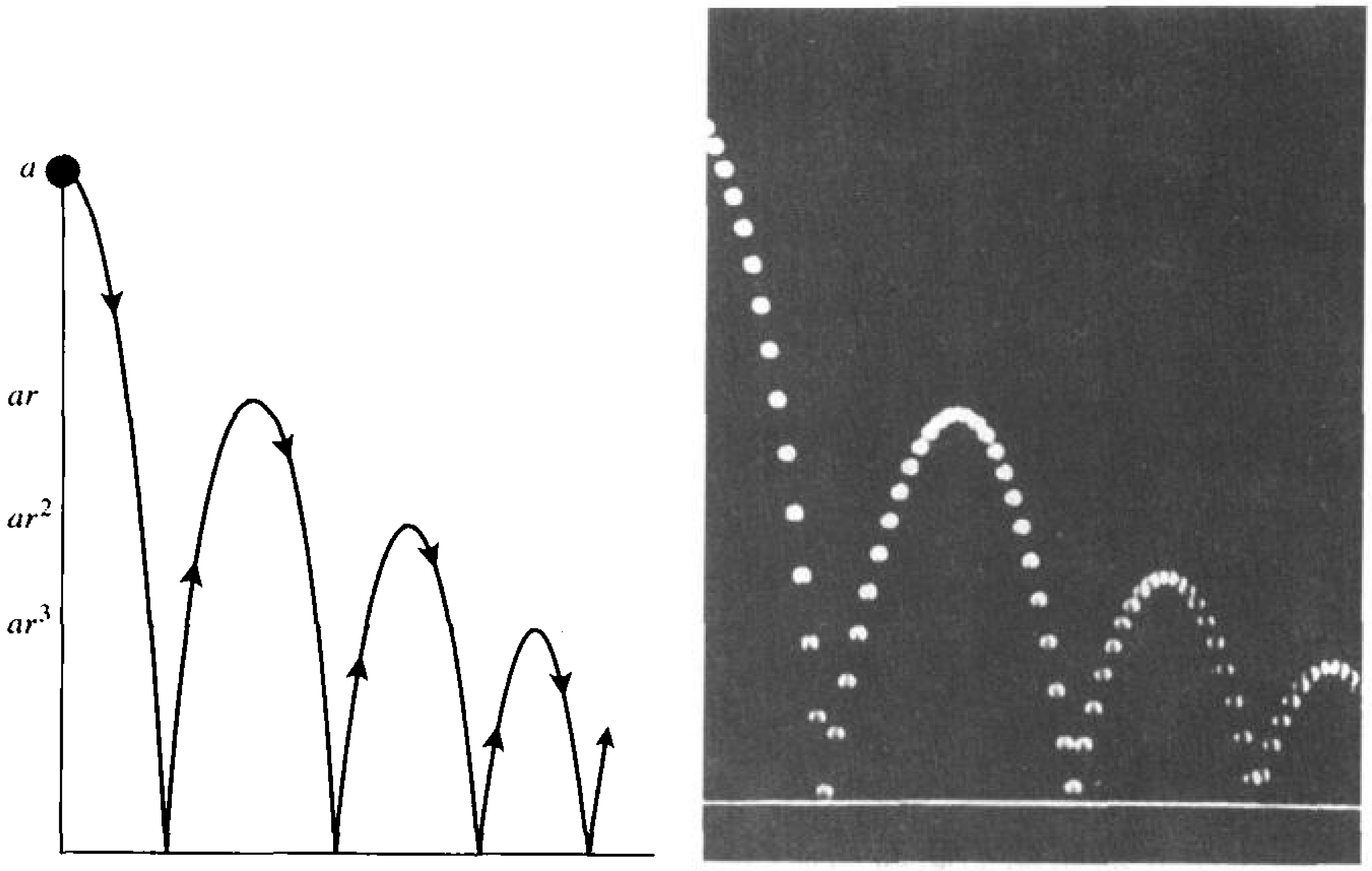
$$\frac{1}{1-(-1/2)}=\frac{2}{3}.$$

(c) 第一项是 $a=(3/5)^0=1$,而 $r=3/5$.级数收敛到

$$\frac{1}{1-(3/5)}=\frac{5}{2}.$$

(d) 对这个级数,$r=\pi/2>1$.级数发散.

例 3(跳跃球) 你从 a 米高度让一个球下落到一个平的表面上.球每次落下距离 h 碰到表面,再跳起距离 rh,r 是一个小于 1 的正数.求这个球上下的总距离(图 8.10).



(a)　　　　(b)

图 8.10　(a) 例 3 指出如何使用几何级数计算一个跳跃球经过的总垂直距离,假定每次弹起的高度以比例系数 r 减少.(b) 跳跃球的频闪观测仪照片.

解　总距离是

CD-ROM WEBsite

$$s = a + \underbrace{2ar + 2ar^2 + 2ar^3 + \cdots}_{\text{这个和是}2ar/(1-r)} = a + \frac{2ar}{1-r} = a\frac{1+r}{1-r}.$$

若 $a = 6, r = 2/3$,总距离是

$$s = 6\frac{1+(2/3)}{1-(2/3)} = 6\left(\frac{5/3}{1/3}\right) = 30\text{ 米}.$$

例 4(循环小数)　把循环小数 5.232323… 表示成两个整数之比.

解

$$\begin{aligned} 5.23\,23\,23\cdots &= 5 + \frac{23}{100} + \frac{23}{(100)^2} + \frac{23}{(100)^3} + \cdots \\ &= 5 + \frac{23}{100}\underbrace{\left(1 + \frac{1}{100} + \left(\frac{1}{100}\right)^2 + \cdots\right)}_{1/(1-0.01)} \qquad a = 1, r = 1/100 \\ &= 5 + \frac{23}{100}\left(\frac{1}{0.99}\right) = 5 + \frac{23}{99} = \frac{518}{99} \end{aligned}$$

我们对无穷级数的研究刚刚开始,而对一整类(几何)级数,我们对其收敛和发散了如指掌,这应是一个给人深刻印象的开端.

遗憾的是,像收敛几何级数的和这样的公式凤毛麟角,我们通常必须解决的问题是估计级数的和(后面更多谈及).不过,下一个例子提供可以直接求和的另一种情况.

例 5(一个非几何的压缩级数)　求级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

的和.

解　我们寻找部分和的一个样式,由它便于导出 s_k 的公式.关键是部分分式.注意到

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

就可以把部分和

$$\sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{k(k+1)}$$

写成

$$s_n = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right).$$

去掉括号,消去正负号相反的项,和就缩短为

$$s_k = 1 - \frac{1}{k+1}.$$

我们现在看到当 $k \to \infty$ 时,$s_k \to 1$.级数收敛,并且其和为 1(图 8.11):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1.$$

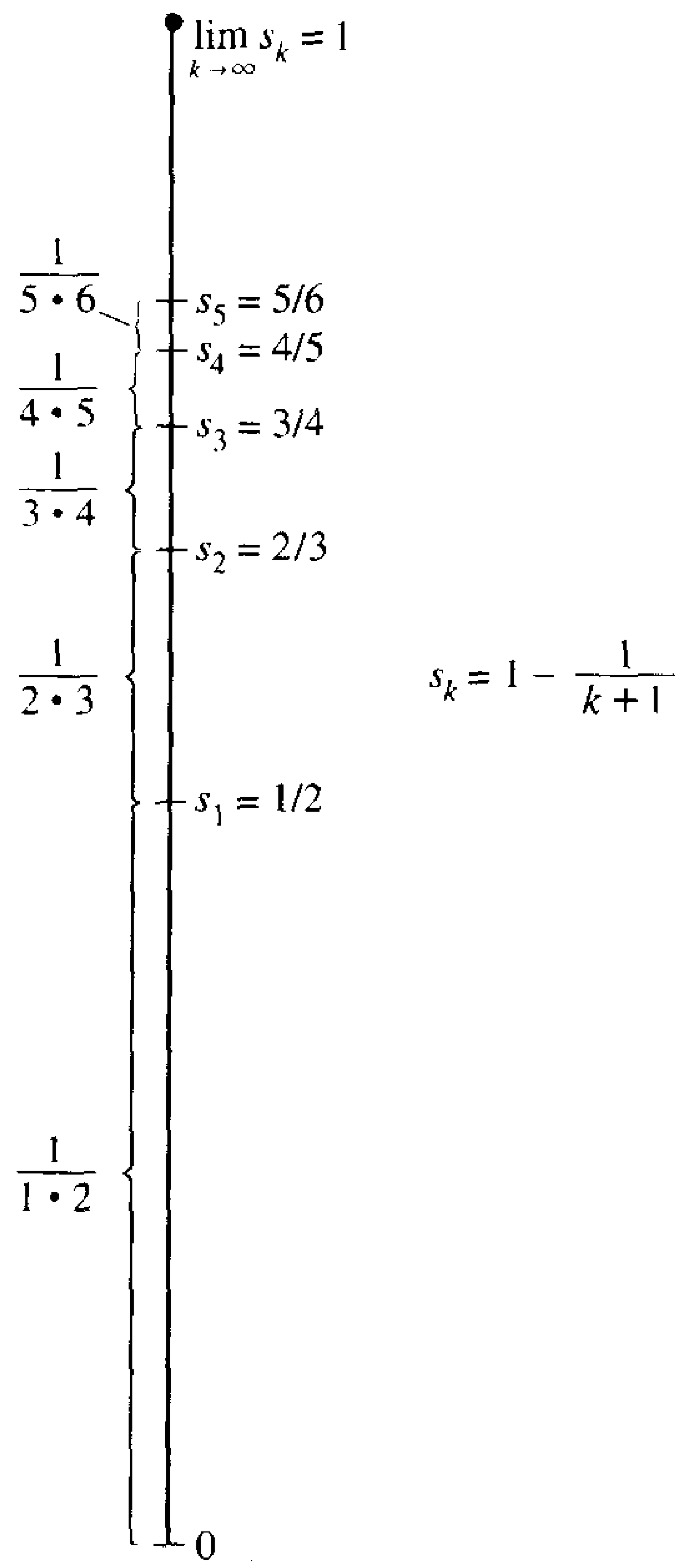


图 8.11　例 5 中的级数的部分和

发散级数

$|r| \geqslant 1$ 的几何级数不是仅有的发散级数.

例 6(识别一个发散级数)　级数 $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$ 是否收敛?

解　你或许会把级数的项两两分组如下

$$(1-1) + (1-1) + (1-1) + \cdots.$$

不过这种方法需要无穷多个配对,从而不能靠加法结合律验证.这是一个无穷级数,而非有限和.从而,如果它有和,这必须是部分和序列

$$1,0,1,0,1,0,1,\cdots$$

的极限.因为这个序列没有极限,级数没有和.它发散.

例 7　部分和超过任何界

(**a**) 级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 = 1 + 4 + 9 + \cdots + n^2 + \cdots$$

发散,因为部分和增长超过任何数 L.在 $n = 1$ 之后,部分和 $s_n = 1 + 4 + 9 + \cdots + n^2$ 大于 n.

(**b**) 级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n} = \frac{2}{1} + \frac{3}{2} + \frac{4}{3} + \cdots + \frac{n+1}{n} + \cdots$$

发散,因为部分和可以超过任何预先指定的数.每一项大于 1,n 项之和大于 n.

发散级数的第 n 项判别法

我们注意到如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛,必有 $\lim_{n\to\infty} a_n$ 为零.为明白为什么,用 S 表示级数的和,$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ 是第 n 个部分和.当 n 变大时,s_n 和 s_{n-1} 都接近于 S,于是它们的差 a_n 接近于零.更形式地

$$a_n = s_n - s_{n-1} \to S - S = 0. \quad \text{序列的差规则}$$

定理 6　收敛级数第 n 项的极限

若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛,则 $a_n \to 0$.

注: 定理 6 不是说,若 $a_n \to 0$,则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.当 $a_n \to 0$ 时级数可能发散.

定理 6 导出一个考察例 6 和例 7 中的级数的发散性的判别法.

发散级数的第 n 项判别法

若 $\lim_{n\to\infty} a_n$ 不存在或异于零,则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

例 8　应用第 n 项判别法

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} n^2$ 发散,因 $n^2 \to \infty$.　　(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n}$ 发散,因 $\frac{n+1}{n} \to 1$.

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}$ 发散,因 $\lim_{n\to\infty} (-1)^{n+1}$ 不存在.

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-n}{2n+5}$ 发散,因 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{-n}{2n+5}\right) = -\frac{1}{2} \neq 0$.

例 9($a_n \to 0$,但级数发散)　级数

$$1 + \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}}_{2\text{项}} + \underbrace{\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}}_{4\text{项}} + \cdots + \underbrace{\frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n} + \cdots + \frac{1}{2^n}}_{2^n\text{项}} + \cdots$$

$$= 1 + 1 + 1 + \cdots + 1 + \cdots$$

发散,虽然它的项组成收敛到零的序列.

添加或取消项

我们可以对级数添加或删减有限项,而不改变收敛性或发散性,虽然在收敛情形,通常会改变级数的和.如果 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛,则对任何 $k > 1$,$\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ 收敛,并且

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_{k-1} + \sum_{n=k}^{\infty} a_n.$$

反之,如果对任何 $k>1$, $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ 收敛,则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛. 比如,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n} = \frac{1}{5} + \frac{1}{25} + \frac{1}{125} + \sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{5^n}$$

而

$$\sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{5^n} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n}\right) - \frac{1}{5} - \frac{1}{25} - \frac{1}{125}.$$

CD-ROM
WEBsite
历史传记
Richard Dedekind
(1831 — 1916)

重新编号

只要保持各项的次序,我们可以对任何级数重新编号而不影响其收敛性(见例2). 为提高编号的开始值 h 个单位,须把 a_n 公式中的 n 换为 $n-h$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1+h}^{\infty} a_{n-h} = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots.$$

为降低编号的开始值 h 个单位,须把 a_n 公式中的 n 换为 $n+h$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1-h}^{\infty} a_{n+h} = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots.$$

这像是水平移动.

例 10(重新编号一个几何级数) 我们可以把开头几项为

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots$$

的几何级数写成

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}, \quad \sum_{n=5}^{\infty} \frac{1}{2^{n-5}}, \quad \text{甚至} \quad \sum_{n=-4}^{\infty} \frac{1}{2^{n+4}}.$$

不论编号如何选取,部分和保持原样.

我们通常偏爱简化表达式的编号.

级数的组合

当我们有两个收敛级数,可以对它们逐项相加,相减和用常数相乘以得到新的收敛级数.

定理 7 收敛级数的性质

若 $\sum a_n = A$, $\sum b_n = B$,则

1. 和规则 $\sum(a_n + b_n) = \sum a_n + \sum b_n = A + B$

2. 差规则 $\sum(a_n - b_n) = \sum a_n - \sum b_n = A - B$

3. 常倍数规则 $\sum k a_n = k \sum a_n = kA$ (任何数 k).

例 11(应用定理 7) 求下列级数的和

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n-1}-1}{6^{n-1}} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{n-1}} - \frac{1}{6^{n-1}}\right)$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{6^{n-1}} \qquad \text{差规则}$$

$$= \frac{1}{1-(1/2)} - \frac{1}{1-(1/6)} \qquad a = 1 \text{ 和 } r = 1/2、1/6 \text{ 的几何级数}$$

$$= 2 - \frac{6}{5}$$

$$= \frac{4}{5}$$

(**b**) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{2^{n-1}} = 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} \qquad \text{常倍数规则}$$

$$= 4\left(\frac{1}{1-(1/2)}\right) \qquad a = 1, r = 1/2 \text{ 的几何级数}$$

$$= 8$$

定理 7 的证明 这三个级数的规则从 8.1 节定理 1 的类似规则推出. 为证明和规则, 令

$$A_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n, \quad B_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n.$$

则 $\sum (a_n + b_n)$ 的部分和是

$$S_n = (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + \cdots + (a_n + b_n)$$
$$= (a_1 + \cdots + a_n) + (b_1 + \cdots + b_n)$$
$$= A_n + B_n.$$

因为 $A_n \to A$ 和 $B_n \to B$, 由序列的和规则我们有 $S_n \to A + B$. 差规则的证明类似.

为证明级数的常倍数规则, 注意 $\sum ka_n$ 的部分和形成序列

$$S_n = ka_1 + ka_2 + \cdots + ka_n = k(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) = kA_n,$$

由序列的常倍数规则它收敛到 kA.

对发散性解释定理 7

1. 发散级数的每个常倍数仍发散.
2. 若 $\sum a_n$ 收敛, 而 $\sum b_n$ 发散, 则 $\sum (a_n + b_n)$ 和 $\sum (a_n - b_n)$ 都发散.

我们略去证明.

习题 8.3

求第 n 个部分和

在题 1 – 6 中, 求每个级数的第 n 个部分和的公式, 并在级数收敛时据此求级数的和.

1. $2 + \frac{2}{3} + \frac{2}{9} + \frac{2}{27} + \cdots + \frac{2}{3^{n-1}} + \cdots$

2. $\frac{9}{100} + \frac{9}{100^2} + \frac{9}{100^3} + \cdots + \frac{9}{100^n} + \cdots$

3. $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{2^{n-1}}+\cdots$

4. $1-2+4-8+\cdots+(-1)^{n-1}2^{n-1}+\cdots$

5. $\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\cdots+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\cdots$

6. $\frac{5}{1\cdot 2}+\frac{5}{2\cdot 3}+\frac{5}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{5}{n(n+1)}+\cdots$

带几何项的级数

在题 7 – 12 中，写出每个级数的开头几项以显示级数如何开始. 然后求级数的和.

7. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4^n}$

8. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7}{4^n}$

9. $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{5}{2^n}+\frac{1}{3^n}\right)$

10. $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{5}{2^n}-\frac{1}{3^n}\right)$

11. $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n}+\frac{(-1)^n}{5^n}\right)$

12. $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2^{n+1}}{5^n}\right)$

压缩级数

使用部分分式求习题 13 – 16 中每个级数的和.

13. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{(4n-3)(4n+1)}$

14. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6}{(2n-1)(2n+1)}$

15. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{40n}{(2n-1)^2(2n+1)^2}$

16. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$

求习题 17 和 18 中每个级数的和.

17. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$

18. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\ln(n+2)}-\frac{1}{\ln(n+1)}\right)$

收敛或发散

题 19 – 32 中哪个级数收敛？哪个级数发散？对你的答案给出理由. 如果级数收敛，求它的和.

19. $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$

20. $\sum_{n=0}^{\infty}(\sqrt{2})^n$

21. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{3}{2^n}$

22. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos n\pi}{5^n}$

23. $\sum_{n=0}^{\infty}e^{-2n}$

24. $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\frac{1}{n}$

25. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{x^n},\quad |x|>1$

26. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n-1}{3^n}$

27. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$

28. $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{e}{\pi}\right)^n$

29. $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$

30. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{n\pi}}{\pi^{ne}}$

31. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!}{1000^n}$

32. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{n!}$

几何级数

对题 33 – 36 的每个几何级数，写出级数的头几项以求得 a 和 r，并求级数的和. 然后通过 x 表示不等式 $|r|<1$，求使不等式成立从而使级数收敛的 x 值.

33. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$

34. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$

35. $\sum_{n=0}^{\infty}3\left(\frac{x-1}{2}\right)^n$

36. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2}\left(\frac{1}{3+\sin x}\right)^n$

在题 37 – 40 中，求使几何级数收敛的 x 的值. 对这些 x 的值求级数的和(作为 x 的函数).

37. $\sum_{n=0}^{\infty}2^n x^n$

38. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{-2n}$

39. $\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n(x-3)^n$

40. $\sum_{n=0}^{\infty}(\ln x)^n$

循环小数

把题 41 – 46 中的每个数表示成两个整数之比.

41. $0.\overline{23} = 0.23\ 23\ 23\cdots$

42. $0.\overline{234} = 0.234\ 234\ 234\cdots$

43. $0.\overline{7} = 0.7777\cdots$

44. $1.\overline{414} = 1.414\ 414\ 414\cdots$

45. $1.24\overline{123} = 1.24\ 123\ 123\ 123\cdots$

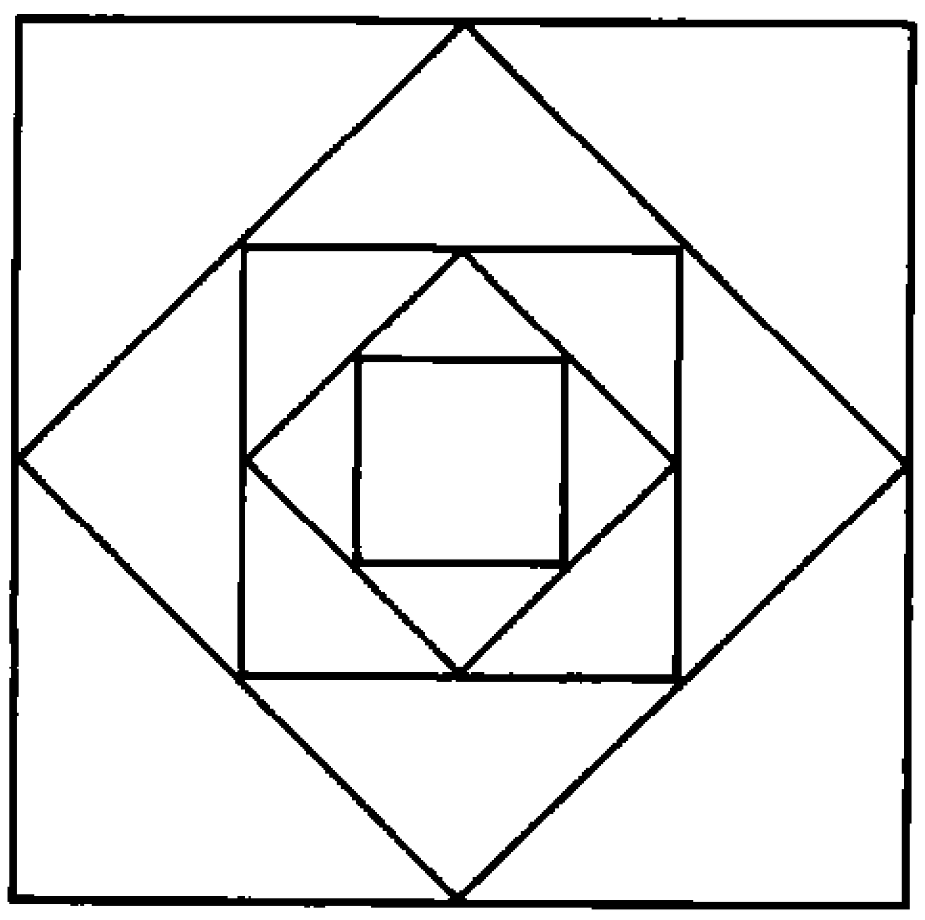
46. $3.\overline{142857} = 3.142857\ 142857\cdots$

理论和例子

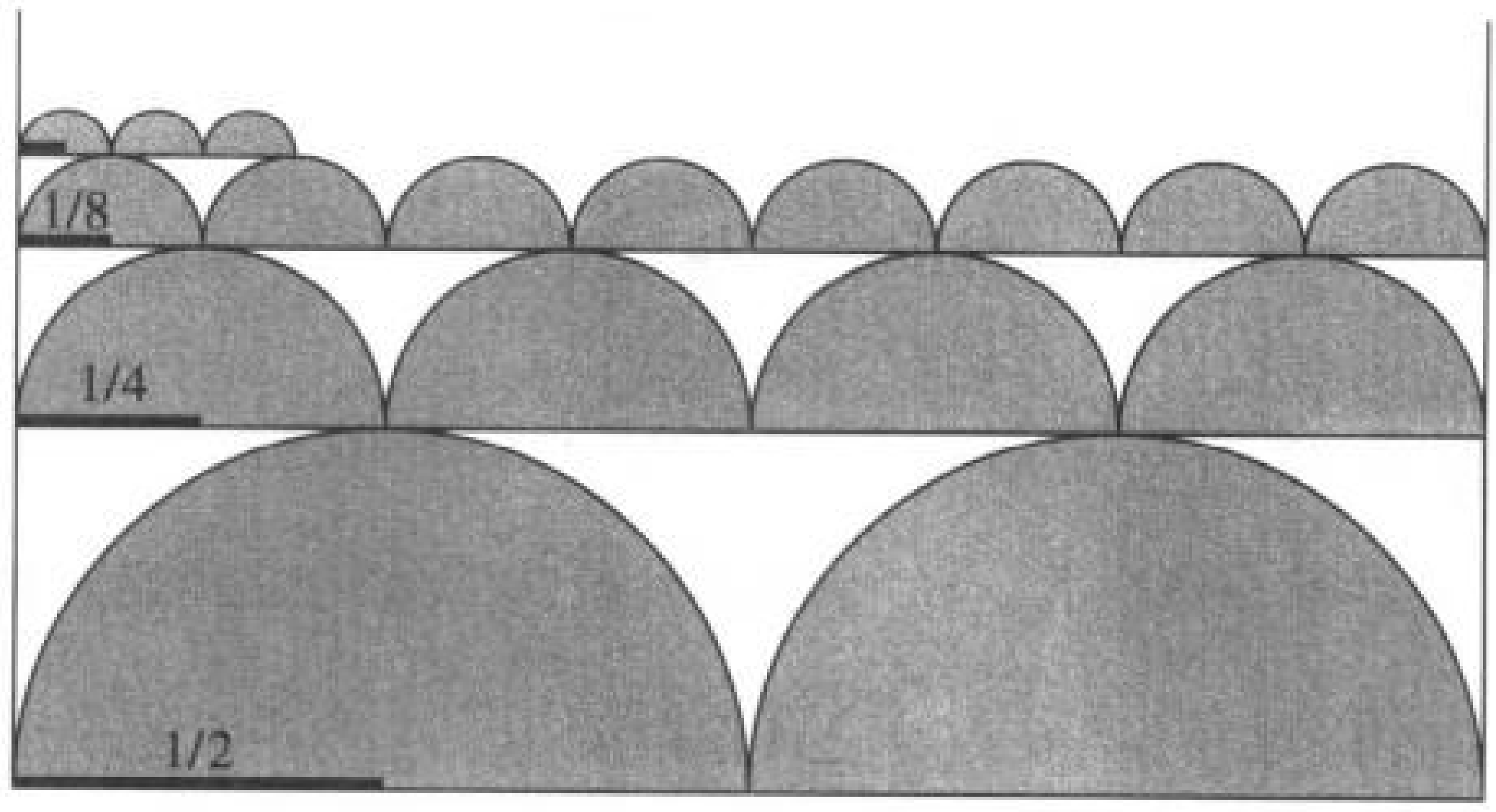
CD-ROM WEBsite **47. 跳动球距离** 一个球从 4 米高度落下.每次它从高度 h 米处落下,碰地面后跳起 $0.75h$ 米.求球上下经过的总距离.

CD-ROM WEBsite **48.** 求题 47 中的球经过的总秒数(**提示**:公式 $s = 4.9t^2$ 给出 $t = \sqrt{s/4.9}$).

49. 面积求和 下图表示一个正方形序列的头五个.最外面的正方形的面积是 4 米^2.后面的正方形由连结其前一个每边中点而得.求所有正方形面积之和.



第 49 题图



第 50 题图

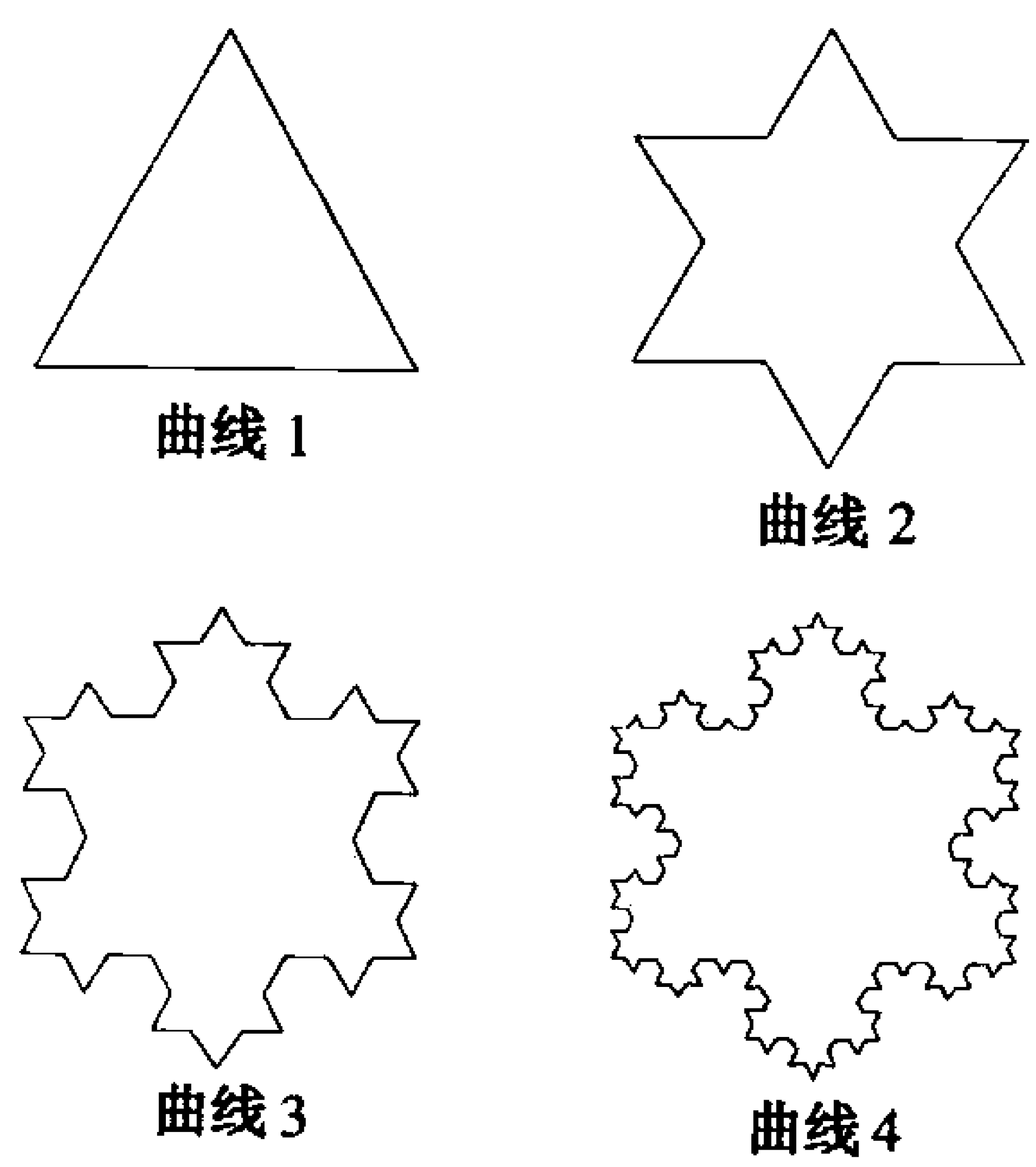
50. 面积求和 右上图表示半圆序列的头三行和第四行的一部分.第 n 行有 2^n 个半圆,每个半径是 $1/2^n$.求所有半圆面积之和.

51. 雪花曲线 从一个称为曲线 1 的边长为 1 的等边三角形开始.在每边中间三分之一的线段上做朝外的等边三角形,擦去老的边上的中间三分之一的线段内部.称展开的曲线为曲线 2.现在,在曲线 2 的每个线段中间三分之一的线段上做朝外的等边三角形.擦去老的边上的中间三分之一的线段内部,得到曲线 3.重复上述过程得到平面曲线的无穷序列.序列的极限是 Koch 的雪花曲线.

这里是如何证明雪花曲线是一个无穷长曲线,但围出有限的面积.

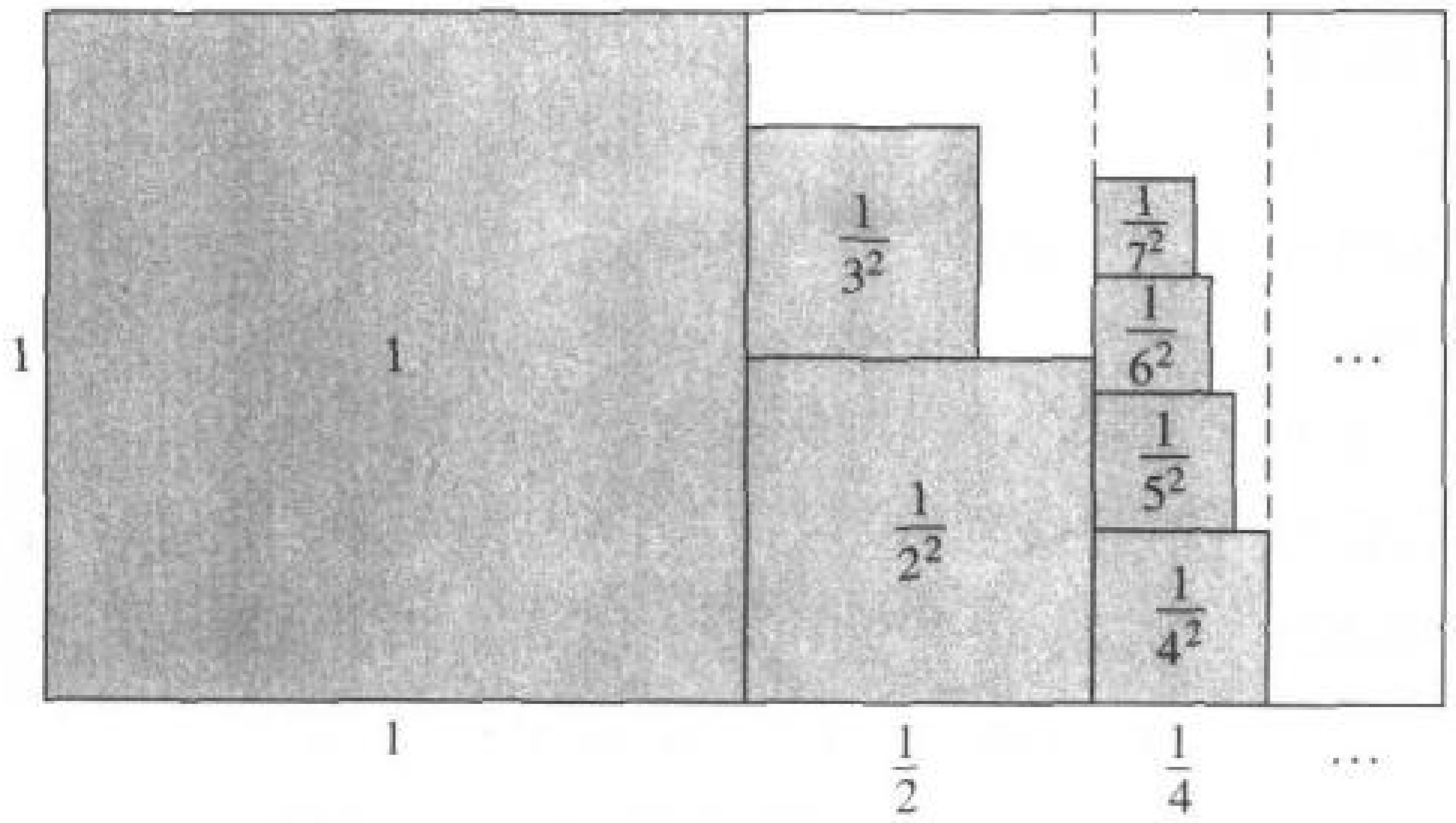
(a) 求曲线 C_n 的长度 L_n,并证明 $\lim_{n\to\infty} L_n = \infty$.

(b) 求 C_n 所围的区域的面积 A_n,并求 $\lim_{n\to\infty} A_n$.



第 51 题图

52. 为学而写 下图提供$\sum_{n=1}^{\infty}(1/n^2)$小于 2 的一个非正式证明.说明怎样进行下去.(来源:"Convergence with picture"P.J.Rippon, *American Mathematical Monthly*, Vol .93, No.6(1986), pp.476 – 478.)



53. 重新编号 题 5 中的级数可以写成

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+2)} \quad 和 \quad \sum_{n=-1}^{\infty}\frac{1}{(n+3)(n+4)}.$$

以下列 n 作为开始编号,重新写级数.

(a)$n=-2$ (b)$n=0$ (c)$n=5$

54. 为学而写 构造一个非零项无穷级数,其和是

(a)1 (b)-3 (c)0.

你能否构造一个非零项无穷级数,使它收敛到你要的任何数?做出解释.

55. 几何级数 求 b 的值,使得

$$1+e^b+e^{2b}+e^{3b}+\cdots=9.$$

56. 修改后的几何级数 对怎样的 r 值,级数

$$1+2r+r^2+2r^3+r^4+2r^5+r^6+\cdots$$

收敛?当级数收敛时求其和.

57. 部分和的误差 证明收敛几何级数的和 L 与其部分和 s_n 之差$(L-s_n)$是 $ar^n/(1-r)$.

58. 逐项相乘 求几何级数 $A=\sum a_n$ 和 $B=\sum b_n$,用以说明$\sum a_nb_n$ 收敛但并不收敛到 AB.

59. 逐项相除 用例子说明,虽然 $A=\sum a_n$ 和 $B=\sum b_n$, b_n 不等于零,$\sum a_n/b_n$ 可能收敛到一个不等于 A/B 的某个数.

60. 逐项相除 用例子说明,虽然$\sum a_n$ 和$\sum b_n$ 都收敛,b_n 不等于零,$\sum(a_n/b_n)$仍可能发散.

61. 逐项求倒数 如果$\sum a_n$ 收敛且对所有 n 有 $a_n>0$,对$\sum(1/a_n)$能说些什么?对你的回答给出理由.

62. 添加或取消项 往一个发散级数添加有限项,或从一个发散级数删减有限项,将会发生什么?对你的回答给出理由.

63. 收敛和发散级数相加 如果$\sum a_n$ 收敛 而$\sum b_n$ 发散,关于逐项相加级数$\sum(a_n+b_n)$可以说些什么?对你的回答给出理由.