一般化されたPCセットの形式的定義

鴎海

（最終更新日：2022 年 12 月 24 日）

1　イントロダクション

このノートでは，ピッチクラス・セット（PC セット）の形式的な定義を与える．特に，ここでは通常よりも一般化された PC セットの定義を示した後，整数表記が可能であることのより一般的な証明を与える．

PC セットは PC セット理論の基本となる概念であり，いくつかの音の集合をオクターブ差を無視して表現したものである．このオクターブ差無視の原則は octave equivalence という名で規約化され，オクターブ差で束ねられた音たちはピッチクラス（pitch class）と呼ばれる．似たような発想は普通の音楽理論にも存在する．例えば $\{C4, E4, G4\}$, $\{C4, G4, E5\}$, $\{C2, G2, E3, C5, E5, G5, C6\}$ といった和音は全て同じ $\mathrm{C} = \{C, E, G\}$ とみなされる．ただし普通の音楽理論ではこの規則は絶対ではなく，例えば $\{G2, E4, G4, C4\}$ のような和音は C/G などとして C とは区別されることが多い．これは調性音楽での機能による区別を予め反映させているためと思うことができる．PC セット理論ではこうした機能的区別は一旦留保し，octave equivalence に忠実に従いながら，音楽の各旋律や和音をはじめとする音のまとまりを PC セットへと還元していく．さらに PC セット理論では $C, C\sharp, \ldots, B$ などの音名の代わりに 0 から 11 までの整数を用いることで，PC セットを形式的に取り扱えるようになっている．ここでは PC セットの定義よりも後の展開は扱わないので，PC セット理論のそのような概要を知りたい方は参考文献を参照せよ．

この後必要になる数学的な事項をいくつか確認する．

定義 1.1　R を S 上の同値関係とする．

(1) $[s]_R^S \coloneqq \{t \colon (s,t) \in R\}$ を S 上の s の R–同値類という．
(2) $S/R \coloneqq \left\{[s]_R^S \colon s \in S\right\}$ を S の R–商集合という．　□

定義 1.2　$(K, +_K, \cdot_K)$ を体，$+\colon V \times V \to V$，$\cdot\colon K \times V \to V$ とする．$(V, +, \cdot)$ が $(K, +_K, \cdot_K)$ の上のベクトル空間であるとは，任意の $u, v, w \in V$ と $k, l \in K$ に対して次が成り立つことをいう．

(1) $v + w = w + v$
(2) $(u + v) + w = u + (v + w)$
(3) $v + 0_V = v$
(4) $v + (-v)_V = 0_V$
(5) $k \cdot (v + w) = k \cdot v + k \cdot w$
(6) $(k +_K l) \cdot v = k \cdot v + l \cdot v$
(7) $(k \cdot_K l) \cdot v = k \cdot (l \cdot v)$

(8) $1_K \cdot v = v$ □

ここでは 1 次元ベクトル空間しか扱わない．

定義 1.3　$(V, +, \cdot)$ を $(K, +_K, \cdot_K)$ の上のベクトル空間とする．$(V, +, \cdot)$ が $(K, +_K, \cdot_K)$ の上の 1 次元ベクトル空間であるとは，次が成り立つことをいう．

(1) $\exists v \in V\ \forall k \in K\ (k \cdot v = 0_V \to k = 0_K)$
(2) $\neg\exists v, w \in V\ \forall k, l \in K\ (k \cdot v +_K l \cdot w = 0_V \to k = l = 0_K)$ □

次が分かる．

命題 1.4　$(K, +, \cdot)$ を体とする．$(K, +, \cdot)$ は $(K, +, \cdot)$ の上の 1 次元ベクトル空間である． □

定義 1.5　$(V, +_V, \cdot_V)$ を $(K, +_K, \cdot_K)$ の上の 1 次元ベクトル空間，$+\colon A \times V \to A$ とする．$(A, +)$ が $(K, +_K, \cdot_K)$ と $(V, +_V, \cdot_V)$ の上の n 次元アフィン空間であるとは，次が成り立つことをいう．

(1) $\forall a \in A\ \forall v, w \in V\ (a + v) + w = a + (v + w)$
(2) $\forall a, b \in A\ \exists! v \in V\ b = a + v$

$(K, +_K, \cdot_K)$ と $(V, +_V, \cdot_V)$ をそれぞれ $(A, +)$ の係数体，基準ベクトル空間という． □

命題 1.4 から次が分かる．

命題 1.6　$(K, +, \cdot)$ を体とする．$(K, +)$ は $(K, +, \cdot)$ と $(K, +, \cdot)$ の上の 1 次元アフィン空間である． □

定義 1.7　$\leq$ を S 上の 2 項関係とする．$(S, \leq)$ が全順序集合であるとは，任意の $s, t \in S$ に対して次が成り立つことをいう．

(1) $s \leq s$
(2) $s \leq t \wedge t \leq u \to s \leq u$
(3) $s \leq t \wedge t \leq s \to s = t$
(4) $s \leq t \vee t \leq s$ □

定義 1.8　$(K, +, \cdot)$ を体とする．$(K, +, \cdot, \leq)$ が順序体であるとは，任意の $k, l, m \in K$ に対して次が成り立つことをいう．

(1) $(K, \leq)$ は全順序集合
(2) $k \leq l \to k + m \leq l + m$
(3) $0_K \leq k \wedge 0_K \leq l \to 0_K \leq k \cdot l$ □

以下，演算や集合は誤解のない範囲で省略することがある．

2　音-ピッチ対応

音から音高を度外視した概念であるピッチクラスに対し，その高さまで考慮された概念をピッチ（pitch）という．これは本来の音に相当する．ピッチクラスを最も基本的な概念とみなして逆にピッチを「定義」することも可能であるが，ここではピッチをより基本的な概念とみなす[*1]．この節では，まず手持ちの音をピッチに

[*1] 一般的な PC セット理論の教科書でも，ピッチクラスはピッチによる非形式的な説明が明示的・非明示的に行われることが多い（ピッチとピッチクラスとの対比が明示されている例には [4] がある）．音楽を実際に構成するものはピッチクラスではなく音自体

対応付ける過程を示す．

定義 2.1 ある空でない全順序集合を音集合と呼ぶ． □

定義 2.2 係数体が順序体であるような，ある 1 次元アフィン空間をピッチ空間という． □

定義 2.3 K と V をそれぞれピッチ空間 A の係数体と基準ベクトル空間，$s, t \in A$ とする．

(1) $0 \neq v \in V$ であるような，ある v をオクターブ（octave）という．

(2) v をオクターブ，$K^{\geq 0} := \{k \in K : 0 \leq k\}$ とする．s が t より高くない，または $s \preceq t$ とは，$\exists k \in K^{\geq 0}\ t = s + k \cdot v$ をいう． □

「高くない」の定義から分かるように，ここでのオクターブは通常と同様，下向きではなく上向きの音程を想定している．

命題 2.4 A をピッチ空間とする．$(A, \preceq)$ は全順序集合である． □

証明 簡単に証明できる． ■

定義 2.5 $(T, \leq)$ を音集合，A をピッチ空間とする．次が成り立つような，ある写像 φ を音-ピッチ対応という．

(1) $\varphi\colon T \to A$

(2) $\forall s, t \in T\ (\varphi(s) \preceq \varphi(t) \to s \leq t)$ □

ここでは一般的な定義を示してきたが，実際はもっと狭く基準ベクトル空間 V もピッチ空間 A も係数体 K（cf. 命題 1.6），特に $K = \mathbb{R}$ であることが普通である[*2]（cf. 例 4.4）．

3 PC セット

定義 3.1 A をピッチ空間とする．

(1) s がピッチ（pitch）であるとは，$s \in A$ をいう．

(2) S がピッチ集合であるとは，$\varnothing \neq S \subseteq A$ をいう． □

以降は必ずしも音集合 T については考えず，一般のピッチ集合 S を起点にして話を進める．音との対応付けを考えたい場合は $S = \varphi(T)$ とすればよい．

以下，$a \in \mathbb{Z}$，$v \in V$ に対して

$$av = \begin{cases} (\underbrace{1_K + 1_K + \cdots + 1_K}_{|a|\ \text{回}})v & a > 0\ \text{のとき} \\ 0 & a = 0\ \text{のとき} \\ -(\underbrace{1_K + 1_K + \cdots + 1_K}_{|a|\ \text{回}})v & a < 0\ \text{のとき} \end{cases}$$

と定める．

（に紐づけられたピッチ）であるため，音楽分析を行う立場から見る場合はこの序列は妥当といえる．

[*2] これにより，音-ピッチ対応 φ の明示が容易になる．例えば $A = V = K = \mathbb{R}$ の場合の自然な対応付けの一つとして，音の周波数 f に対し $\varphi(f) = \log_2 f$ とし，オクターブ v を 1 とするものがある．

定義 3.2　v をオクターブ，S をピッチ集合とする．$Ch_v^S \coloneqq \{s + av : s \in S,\ a \in \mathbb{Z}\}$ を S から生成された半音空間（chromatic space）という．□

$s + av \in Ch_v^S \to (s + av) + v \in Ch_v^S$ から半音空間が周期性を持つことが分かる．半音空間は高低両方向に周期的に広がる半音階に相当する（無限の音域を持つピアノの鍵盤を想像せよ）が，通常であれば音階や和音とみなされるもの（の周期的な広がり）も半音空間として同様に扱うことができる．例えばピッチ集合として適切な 3 元集合を取ることで何らかの三和音の空間を得ることができる．

定義 3.3　v をオクターブ，S をピッチ集合とする．

(1) $R_v^S \coloneqq \{(s, s + av) : s \in S,\ a \in \mathbb{Z}\}$．これは同値関係である．
(2) $PC_v^S \coloneqq Ch_v^S / R_v^S$ を S から生成されたピッチクラス空間という．□

R_v^S–商集合を取る操作は octave equivalence の適用に相当する．以下，$[s]_v^S$ とは $[s]_{R_v^S}^S = \{s + av : a \in \mathbb{Z}\}$ のこととすると，$PC_v^S = \left\{[s]_v^S : s \in Ch_v^S\right\}$ であり，ピッチクラスとは $[s]_v^S$ に他ならない．

定義 3.4　v をオクターブ，S をピッチ集合とする．

(1) x が S から生成されたピッチクラス（pitch class）であるとは，$x \in PC_v^S$ をいう．
(2) X が S から生成された PC セット（PC set）であるとは，$X \subseteq PC_v^S$ をいう．□

4　ピッチクラスの整数表記

以下，$s \prec t$ とは $s \preceq t \land s \neq t$ のこととする．

定義 4.1　S をピッチ集合，v をオクターブ，$p, q \in Ch_v^S$ とする．$[p, q)_v^S \coloneqq \left\{x \in PC_v^S : p \preceq x \prec q\right\}$．□

命題 4.2　$s \in Ch_v^S$ とする．$\exists! t \in Ch_v^S\ \exists a \in \mathbb{Z}\ (s = t + av \land s - v \prec t \preceq s)$．この t を $s \mod v$ と書く．□

定理 4.3　$\circ$ を Ch_v^S 上の演算とする．以下の well-defined な PC_v^S 上の演算 $\circ_v$ と $[p, p + v)_v^S$ 上の演算 $\circ'_v$ を定めると，$\forall p \in Ch_v^S\ (PC_v^S, \circ_v) \cong ([p, p + v)_v^S, \circ'_v)$.

(1) $[s]_v^S \circ_v [t]_v^S = [s \circ t]_v^S$
(2) $s \circ'_v t = (s \circ t) \mod v$

□

証明　概略のみ記す．$\min\{s + av : p \preceq x,\ a \in \mathbb{Z}\}$ が存在するので，これを単に m_s と書く．$m_s \prec p + v$ がいえるので，$m_s \in [p, p + v)_v^S$ である．$H\colon PC_v^S \to [p, p + v)_v^S$ を $H([s]_v^S) = m_s$ と定めると，H は同型写像となる．■

PC セット理論ではピッチクラス x を全て $H(x)$ で代替することが普通であり，これを整数表記（integer notation）を行うという．また，PC セット X に対し $H(X)$ もその整数表記と呼ぶことにする．当然 $H(x)$ は整数とは限らないが，一般の PC セット理論では次の例が専ら扱われることが「整数」表記という呼び名の所以となっている．

例 4.4（n 平均律のピッチクラスとその整数表記）　ピッチ空間として $\mathbb{R}$ を取り，オクターブを正整数 n，ピッチ集合 S を $\{1, 2, \ldots, n\}$ とする[*3]．半音空間 $Ch_n^S = \{s + an : s \in S,\ a \in \mathbb{Z}\} = \mathbb{Z}$ を n 平均律半

[*3] S は様々な取り方がある．一般にある半音空間を生成したとき，各ピッチクラスの元を 1 つずつ選んでできる集合もまた同じ半音

音空間という．$[s]^S_n = \{s + an \colon a \in \mathbb{Z}\}$，ピッチクラス空間は $PC^S_n = \left\{[s]^S_n \colon s \in \mathbb{Z}\right\}$，その整数表記は $[p, p+n)^S_n = \{p, p+1, \ldots, p+n-1\}$ であり，普通 $p = 0$ として $\{0, 1, \ldots, n-1\}$ が扱われる．この上の演算 $s \circ'_n t = (s \circ t) \mod n$ は n を法とする通常の合同算術と同じである．$n = 12$ とすれば通常の 12 平均律のピッチクラスとその整数表記が得られる． □

参考文献

[1] Allen Forte, *The structure of atonal music*, Vol. 304, Yale University Press, 1973

[2] David Lewin, *Generalized musical intervals and transformations*, Oxford University Press, 2007

[3] MirandaAduplex, ピッチクラス・セット理論　覚書, `https://mirandaaduplex.hatenablog.com/entry/pitch-class-set-glossary`

[4] Joseph N. Straus, *Introduction to post-tonal theory*, WW Norton & Company, 2016

空間を生成する．