ホワイトヘッド ／ ラッセル

数学原理

1

鴎海ねこ　訳

（最終更新日：2022 年 1 月 28 日）

はじめに

数学の原理を数学的に取扱う，ということが本書の主題であるが，これはきわめて現代的な 2 つの異なる研究分野が重なり合うところに生じたものである．ひとつは，解析学・幾何学の学者によってなされている公理の定式化と体系化に関する研究，あるいはカントールらの集合体 [訳注：aggregates] の理論に関する同様の研究である．もう一方は記号論理学であり，こちらは発展期ののち，今日ではペアノとその追随者のおかげで，数学の開始点とされてきたものを取扱うための数学的道具に見合う，技術的な適応力と論理的な幅広さとを備えるに至った．この 2 つが組み合わさることで，2 つの結果が見えてくる．すなわち，(1) これまで暗黙のうちに，あるいは明示的に公理とされてきたものが，不要あるいは論証可能となり，(2) 公理と思われていたものを論証するのと同じ方法で，無限など，これまで人智の及ばぬところとされてきた領域においても貴重な結果が得られる．したがって数学の視野は，新しい主題を付け加えつつ遡行的に拡張されることで，従来哲学に丸投げされていた範囲へ押し広げられるのである．

本書は，もともと *The Principles of Mathematics* の第 2 巻に収録される予定であった．この目的から，1900 年に執筆が開始された．だが，執筆が進むにつれて，この主題は我々が考えるよりもはるかに大きなものであることが次第に明らかになってきた．さらに，前作中不明瞭で疑問視されていた多くの根本的な問題についても，現在では満足のいく回答と思しきところに到達している．そこで，これを *The Principles of Mathematics* から独立させる必要が出てきた．しかし，我々は議論や一般的な哲学は避け，記述は独断的な形式とした．なぜなら，数学の原理に関するいかなる理論であろうと，それに賛同する主な理由というのは，常に帰納的なもの，つまり当の理論が通常の数学を実行できるという事実に即したものであるはずだからである．数学では普通，最も自明な事柄が最初から見出されることは少なく，それはいくらか後のことになる．したがって，そこに到達するまでの間の初期段階の演繹においては，真なる結論が前提から従うからその前提を信じるのであって，ある前提から結論が従うからその結論を信じるというのではない．

本書にあるような演繹体系というものを構築する場合，2 つの相反する作業を並行して行う必要がある．片方では，どのような前提が採られているか，その前提は互いに無矛盾か，より基本的な前提に還元できないかといった視点から既存の数学に対する分析を行わねばならない．もう片方では，前提を決めたら，それまでに分析したデータから必要と思われるものや，その前提がもたらすその他の結論の中でも特筆に値するような興味深いものを，再度積み上げていかねばならない．予備的な労務であるこの分析は，最終的な叙述には反映されず，分析の結果が，何らかの無定義の概念や未論証の命題という形で示されるだけである．これはなにも，分析をこれ以上行えないということを言っているのではない．我々が出発点としたものをさらに定義し論証できるような，より単純な概念や公理を見つけることが不可能であるといえる根拠は何もない．主張しているのは，我々の出発点となる概念や公理が十分であるということであって，必要であるということではないのである．

我々は，前提から演繹を行っていく中で，通常当然とされている事柄の中で真であると証明されたところまで演繹を運ぶことが，不可欠だと考えている．だが，その作業に過度に固執するのを好ましいとは思わない．たとえ我々の体系で一般的な場合を扱うのがその特殊な場合と同じくらい簡単であっても，特殊な場合だけを考察するのが通例である．例えば，基数の算術は通常**有限の**数と結び付けて考えられるが，

その一般法則は無限の数に対しても同様に成り立ち，有限と無限との区別に言及することなくきわめて容易に証明される．一方，厳密には数列ではないが数列の特徴的な性質をいくつか持っているような列は，それだけで，数列に通常関連付けられるような多くの性質が成り立つ．このような場合，より一般的に証明されたはずのことを，ある特定の種類の列についてのみ証明するのは，論理的なスタイルとして欠陥がある．これと似たような一般化の手順は，多かれ少なかれ，我々のあらゆる作業に関係している．我々は常に，最も一般的かつ適当に単純で，どのような結論もそこから導き出すことができるような仮定を求めてきたのであった．こうした理由から，特に本書の後半では，命題はその仮定が重要となっている．結論が，その特殊な場合においてよく知られているようなものとなることがよくあるが，仮定は可能な限り常に十分広範にとられており，よく知られた結論以外の多くの場合をも認めるようになっている．

我々は完全無欠な証明を与えることが必要であると考えた．そうしないと，どの仮定が本当に必要なのか，あるいは我々の結果が明示的な前提からはたして導かれているのかが，ほとんど確認できないからである（我々が，単にこれこれの命題が真であるというだけではなく，我々の提示した公理がそれらを証明するのに十分であるということをも主張しているのを忘れてはならない）．と同時に，完全な証明は，誤りを防ぐために，あるいは我々の正当性を疑わしく思う人を納得させるために必要ではあるものの，当の部分に特別な関心を持たない読者や，また着手している問題に対して我々の実質的な正確さに疑いを持たない読者は，命題の証明を各自で省略することができよう．本書の特定の箇所に特別に関心を持つ読者は，それ以前の箇所に関しては，それまでの部，節，番号の要約を見れば十分であろう．なぜならその中で，関連する概念の説明と証明済みの主要な命題の説明がなされているからである．しかしながら，第 I 部 A 節における証明は必須である．というのも，証明の書き方がその間に説明されるからである．最も初めの方で述べられている命題の証明は，いかなるステップも省略されることなく示されているが，内容が進むにつれて証明は次第に圧縮されていく．しかし，参照を行うことで読者がどのステップも省略されていない証明を再構成できるよう，詳細さは十分に保たれている．

採用されている順番は参考程度のものである．例えば，我々は数列を扱う前に基数の算術と関係の算術を扱ったが，数列を先に扱ってもよいであろう．しかしながら，その順番の多くは論理的な必要性によって定められている．

本書を書くのに費やされた労力の大部分は，論理学と集合体理論に蔓延している矛盾やパラドックスへと向けられたものである．このような矛盾に対処するため，我々は非常に数多くの仮定を検討した．多くは他の人々によって提案され，また我々が考案したものも同じくらいある．時として，ある仮定が擁護できないものであることを確信するのに数か月を要することもあった．このような長期的な研究を行う中で，案の定，我々は時々考えを修正することとなったが，次第に，矛盾を避けるためには型の原則が適用されねばならないということが明らかになっていった．本書で提唱されている型の原則の特別な形は，論理的には不可欠なものではなく，我々の演繹の正しさと等価に適合するような形は他にもいろいろある．これが選ばれたのは，我々の提唱する形が最も確からしいように思え，また矛盾を回避できる完全に確定された理論を少なくとも 1 つ与える必要があったからである．だが，別の形の型の原則を採用したとしても，この本の内容はほとんど変わらないであろう．それどころか，矛盾を回避できる他の方法が存在するとしても，矛盾を導かない数学的論理の構築が**可能である**ことが示された（と我々が主張した）時点で，いかなる形の型の原則を採用しようとも，明示的に型を扱っているところを除き，この本の大部分はそれに依存しない，と言える．型の原則のもたらす影響は全体としては減算的であるということに注意しよう．そこでは，他の場合では有効であった何らかの推論は禁じられるが，無効であったものが認められるということはない．したがって我々は，型の原則が認める推論は，たとえその原則が無効であることが見出さ

れたとしても有効であり続ける，という予測を正当に持つことができる．

我々の論理体系は全て番号の降られた命題に含まれており，序論や要約からは独立している．序論と要約は完全に説明であり，演繹の連なりの一部を構成するものではない．序論での型の階層の説明は，本編の $*12$ で与えられる説明と若干異なっている．後者の説明の方が厳密であり，かつ本書の残りの部分を通して想定されているものである．

本書の記号的な姿は必要に迫られてのものであり，それなくして必要不可欠な推測を行うことはできなかったであろう．これは実際の行為の結果として築き上げられたものであり，単に説明を行うために導入された無用の長物ではないのである．我々が論理記号を扱う指針となる一般的な手法はペアノによる．彼の偉大な功績は，論理に関する決定的発見とか記法の詳細さよりも（いずれも卓越しているが），記号論理学が通常の代数学の形式への過度な固執からいかにして解き放たれるべきかを最初に示し，それゆえにこれを研究の道具としてふさわしいものにしたことにある．彼の手法の検討を指針に，我々は主題の全ての部分を扱うのに適した記号体系を，きわめて自由に構築あるいは再構築した．いかなる記号も，その時点での推論の目的の役に立つかという面でのみ導入されている．

注釈や説明の中には先の内容の参照が一定数見られるであろう．この参照の正確さを担保するために我々はあらゆる適当な策を取ってきたが，もちろん，その正確さを，既視の内容の参照と同程度の信頼をもって保証することはできない．

我々は，近年の著述家たちの寄与に対する謝辞を詳しく述べることはできなかった．というのも取り入れたものをみな我々の体系と記法に沿うように変形せねばならなかったからだ．この主題の文献に親しい読者であれば，その主な寄与というのは明らかであろう．記法に関しては，我々はできる限りペアノに従い，必要に応じてフレーゲやシュレーダーの記法をそこに補った．しかしながら，記号体系の大部分は新しいものでなければならなかった．これは他の人々の記号体系に対する不満からではなく，かつて記号化されたことのない概念を我々が扱っているという事実からである．論理的分析に関する問題の全てにおいて，我々はフレーゲに負うところが最も大きい．どこかに彼と異なるところがあるとすれば，それは主に，彼が古今東西の他の論理学者と同じく，前提に何らかの誤りを忍ばせていたことが矛盾から明らかとなったためであるが，矛盾以外でその誤りを指摘するのはほとんど不可能であっただろう．算術と数列の理論では，我々の研究は総じてゲオルグ・カントールのものに基づいている．幾何学では，v. シュタウト，パッシュ，ペアノ，ピエーリ，ヴェブレンの著書を常に手元に置いた．

様々な場面で，友人，特にボドリアン図書館の G. G. ベリー氏と R. G. ホートリー氏の指摘が助けとなった．

政府出版基金による 200 ポンドの印刷費用を助成して頂いた王立協会理事会，および寛大にも本書の制作にかかった費用の大部分を負担して頂いたケンブリッジ大学出版局の出版団にも感謝せねばならない．大学出版局のあらゆる部門の優れた技術と，その職員の熱意と厚意は，校正の仕事を大いに軽減してくれた．

第 2 巻は既に印刷中であり，第 3 巻含めいずれも印刷が完了次第掲載される予定である．

A. N. W.

B. R.

ケンブリッジにて　1910 年 11 月

目次

名前で参照される命題のアルファベット順一覧表

名前	番号	
Abs	$*2.01$	$\vdash: p \supset \sim p. \supset . \sim p$
Add	$*1.3$	$\vdash: q. \supset .p \vee q$
Ass	$*3.35$	$\vdash: p \cdot p \supset q. \supset .q$
Assoc	$*1.5$	$\vdash: p \vee (q \vee r). \supset .q \vee (p \vee r)$
Comm	$*2.04$	$\vdash:.p. \supset .q \supset r :\supset: q. \supset .p \supset r$
Comp	$*3.43$	$\vdash:.p \supset q \cdot p \supset r. \supset: p. \supset .q \cdot r$
Exp	$*3.3$	$\vdash:.p \cdot q. \supset .r :\supset: p. \supset .q \supset r$
Fact	$*3.45$	$\vdash:.p \supset q. \supset: p \cdot r. \supset .q \cdot r$
Id	$*2.08$	$\vdash .p \supset p$
Imp	$*3.31$	$\vdash:.p. \supset .q \supset r :\supset: p \cdot q. \supset .r$
Perm	$*1.4$	$\vdash: p \vee q. \supset .q \vee p$
Simp	$*2.02$	$\vdash: q. \supset .p \supset q$
〃	$*3.26$	$\vdash: p \cdot q. \supset .p$
〃	$*3.27$	$\vdash: p \cdot q. \supset .q$
Sum	$*1.6$	$\vdash:.q \supset r. \supset: p \vee q. \supset .p \vee r$
Syll	$*2.05$	$\vdash:.q \supset r. \supset: p \supset q. \supset .p \supset r$
〃	$*2.06$	$\vdash:.p \supset q. \supset: q \supset r. \supset .p \supset r$
〃	$*3.33$	$\vdash: p \supset q \cdot q \supset r. \supset .p \supset r$
〃	$*3.34$	$\vdash: q \supset r \cdot p \supset q. \supset .p \supset r$
Taut	$*1.2$	$\vdash: p \vee p. \supset .p$
Transp	$*2.03$	$\vdash: p \supset \sim q. \supset .q \supset \sim p$
〃	$*2.15$	$\vdash: \sim p \supset q. \supset . \sim q \supset p$
〃	$*2.16$	$\vdash: p \supset q. \supset . \sim q \supset \sim p$
〃	$*2.17$	$\vdash: \sim q \supset \sim p. \supset .p \supset q$
〃	$*3.37$	$\vdash:.p \cdot q. \supset .r :\supset: p \cdot \sim r. \supset . \sim q$
〃	$*4.1$	$\vdash: p \supset q. \equiv . \sim q \supset \sim p$
〃	$*4.11$	$\vdash: p \equiv q. \equiv . \sim p \equiv \sim q$

第 2 版への序論[*1]

『数学原理』のこの新版を書くにあたり，筆者らは，誤植や小さな誤り[*2]以外は，改善点に気付いていたとしてもテキストを変更しないことが最善であると考えた．命題を差し替えることは参照を差し替えることをも意味し，それには多大な労力を要するから，というのがこの決定の主な理由である．したがって，望ましいと思われる主な改良点について，序論の中で言及しておくのが好ましいと考えた．その中には，ほとんど疑問の余地のないものもあれば，未だ意見が分かれているものもある．

過去 14 年間で数理論理学の研究が遂げた最も決定的な進歩は，第 I 部 A 節の「p ではない」ならびに「p または q である」という 2 つの不定形を「p と q は両立しない」（あるいは代わりに，「p と q はともに偽である」）という 1 つの不定形で置き換えたことである．これは H. M. シェファー博士によるものである[*3]．結果として，M. ジャン・ニコ[*4]によって $*1,2,3,4,5,6$ の 5 つの原始命題は 1 つの原始命題で置き換え可能であることが証明された．

[*1] 本序論において筆者らは，補遺と同様，手書きの原稿に目を通して数々の貴重な指摘と意見を寄せてくれたケンブリッジ大学キングス・カレッジの F. P. ラムゼイ氏に大変お世話になった．

[*2] この点我々は多くの読者，特にゲッティゲン大学のベーマン，ボスコビッチ両教授に負うところが大きい．

[*3] *Trans. Amer. Math. Soc.* Vol. XIV. pp.481-488

[*4] “A reduction in the number of the primitive propositions of logic” *Proc. Camb. Phil. Soc.* Vol. XIX

第 I 部

数理論理学

第 I 部の要約

この部では，伝統的に記号論理学に属するような話題，もしくはその一般性からして記号論理学に属していてもよいような話題を扱うことにする．すなわち，単に数学のある決まりきった分野にとどまらずあらゆる数学的推測に必要とされそうな命題，命題関数，クラス，関係の性質を規定していくことにする．

第 I 部で扱われている主題は，（1）原始命題に依存した演繹の連なり（2）形式的計算，という 2 つの視点から捉えることができる．まず第 1 の視点をとる．∗1 ではまず，ある命題もしくは表明された命題関数を別のそれから演繹することについて述べたいくつかの公理を扱う．A 節では，この原始命題から様々な命題が演繹される．演繹される命題はすべて，与えられた命題から新たな命題を得るための 4 種類の手続きによって生み出され，それぞれを否定，論理和，**，含意というが，後の 2 つは前の 2 つを用いて定義することができる．