数理論理学

ジョセフ・R・シェーンフィールド
訳：鴎鵜みね (@km_ine)

はしがき

数学の教科書を書く人間は，往々にして紙面の都合でその内容を十分に扱えないことに悩まされるものです．今日，解析・代数・位相の入門書では，その分野の中心的な事項でさえ網羅することは不可能となっています．これは数理論理学では辛うじて可能ですが，その他多くの興味深い事項は全て省略する必要があります．そこで，私が考える数理論理学での中心的な事項，すなわち証明論，モデル理論，再帰理論，公理的自然数論，集合論における主要な結果を載せることに努めました．私は決して多値論理や再帰的同値型ないしその他の特殊な事項に対する偏見を植え付けようとしているわけではないのですが，読者はこれらを他所で学ばねばならないでしょう．省略した事項の中で特に重要なものは，直観主義の分野です．この分野に関する適切な入門書が存在すること，ならびにこの領域に対して筆者が無知であることを，その主な言い訳としておきましょう．

主要な事項も完全には網羅できませんでしたが，各事項で自明でない定理や証明をいくらか載せるよう努めました．問題に着手すれば，得られる結果の数はかなり増えます．これらは型通りの練習問題などではなく，それを証明する上でしばしば本文中の手法をそれなりに拡張せねばならないような意義ある結果となっています．理解力のある生徒が問題を解くのに十分なヒントは常に添えたつもりですが，その多くがきわめて難しく思えても落胆することはありません．

数理論理学は数学の哲学と常に密接な関係にあります．私は数学的内容との密接な関係がある場合を除き，哲学的な問題は基本的に避けています．とはいえ，もし私が何かの拍子に，反対意見も多くあることを顧みずに何か哲学的な私見を述べたとしても，悪く思わないでください．

本書は概ね，1958 年以降デューク大学で数回行った数理論理学の講義録に内容を補ったものです．いくつかの内容は，1964-1965 年のスタンフォード大学での再帰理論の講義も元にしています．本書の内容は私が年間講義で扱うよりもいくらか多くなっています．

本書は大学院 1 年生の教科書となることを目指して書かれているので，それなりに数学に成熟していることを想定しています．一方で，前提となる数学的知識は非常に限られたものです．自然数，実数，集合のきわめて簡単な性質を知っていて，現代代数のわずかな知識さえあれば十分でしょう．いくつかの問題では，さらに進んだ事項の知識が必要になります．

本文中での結果と問題のうち，筆者によるものはごくわずかです．各結果に対してその著者を明記することはしていません．主要な定理に付されている名前は，単に誰がそれを作り上げたかを読者が多少なりとも理解するために付されているに過ぎません．参考文献も全て省略しました．ただし，私にとって特に価値のあった本を一冊紹介しておきましょう．クリーネの『超数学入門』です．

文献に加え，多くの論理学者との会話や文通も大いに活用しました．特にジョン・アディソン，ソロモン・フェファーマン，アズリエル・レヴィ，アンジェイ・モストフスキ，リチャード・プラテク，ハートレイ・ロジャース，デイナ・スコット，クリフォード・スペクター，W. W. テイト，ロバート・ヴォートに感謝したいと思います．この一覧は完全なものではありませんが，他の多くの方々も，その貢献に対する私からの感謝の言葉を受け取っていただければ幸いです．

ゲオルク・クライゼルには特別な恩義を感じています．彼との多年に渡る議論や文通を通じて，私は数理論理学が漫然と繋がった結果の集まりではなく，数学者の前にそびえ立つ最も面白い問題たちに立ち向かうための方法なのだと気付かされたのでした．この考えを読者にどれだけ伝えられるかが，この本の成功の指標になると思っています．

ノースカロライナ州ダーラム　　　　J. R. S.
1967 年 5 月

目次

クリフォード・スペクター（1930-1961）に捧ぐ

第 1 章

数理論理学の本旨

1.1 公理系

論理学とは推論の学問であり，数理論理学は数学者によって行われる推論についての学問です．従って，数理論理学に対する正しいアプローチを得るためには，数学者の手法を精査しなければなりません．

他の科学とは異なる，数学に顕著な特徴は，観察の代わりに証明を用いることです．物理学者は物理法則を別の物理法則から導くでしょうが，たいていは，観察結果との一致こそ物理法則の究極の検証法であるとみなしています．数学者も時に観察を行うことでしょう．例えばたくさんの三角形の角度を測って，三角形の角の和は常に 180° であるという結論を出すかもしれません．しかし，数学者がそれを数学の法則として受け入れるのはそれが証明されたときに限るのです．

それでも，全ての数学法則を証明することは明らかに不可能です．最初に私たちが受け入れる法則は，その前にそれらを証明できる法則が存在しないので，証明できません．よって私たちは，**公理**と呼ばれる，証明なしに受け入れるいくつかの法則を得ることになります．残りの法則は**定理**と呼ばれ，公理から証明されます．

公理はどういった理由で受け入れればよいのでしょうか．こうなると観察に頼ろうと思うかもしれませんが，あまり実践的とは言えませんし，数学の精神にも反しています．従って私たちは，当該概念の性質上明らかと思われるようないくつかの法則を公理として選ぼうと考えるわけです．

かくして私たちは膨大な数の法則を少数の公理へと還元します．数学的概念についてもほぼ同じような還元が起こります．ある概念が別の概念によって定義できることに気付かれるでしょう．しかしやはり，私たちが最初に用いる概念は，その前にそれらを定義するための概念が存在しないので，定義できません．従って，**基本概念**と呼ばれる，無定義のままのいくつかの概念を得ることになります．残りの概念は**派生概念**と呼ばれ，基本概念によって定義されます．基本概念たりえる基準も公理の場合と似ており，詳細な定義なく私たちがそれを理解できるほどに単純かつ自明なものでなければなりません．

どのような言明の中でも，派生概念を，その定義によって基本概念に置き換えることができます．特に，公理に対してもこれを行います．これにより，公理に現れる全ての概念を基本概念とみなすことができるのです．

いまや数学者が行っていることを次のように説明できます．まず，基本概念ならびに基本概念に関する公理を提示します．次に，私たちがその概念を十分に理解してその公理を正しいと思えるようになるまでその概念を説明します．次に，派生概念を定義して，基本概念や派生概念に関する定理を証明します．こうして構築された，基本概念，派生概念，公理，定理からなる体系は**公理系**と呼ばれます．公理系は全数学に及ぶものかもしれませんし，あるいはその一部，例えば平面幾何学や実数論のものかもしれません．

ここまで，私たちは特定の概念を思い浮かべていると仮定してきました．そうは言っても，公理が真となるような他の概念が見つかることもあるかもしれません．この場合，証明された定理はこの新しい概念に対しても真となります．このことから数学者は，数多くの概念に対して公理が真となるような公理系を構築するようになりました．典型的な例は群の公理です．こうした公理系は**現代的な**公理系と呼

ばれ，反対に上で述べたような公理系は**古典的な**公理系と呼ばれます．もちろん，その違いは公理系にあるのではなく，公理系の制定者の意図にあるのです．

この議論に従えば，数理論理学を学ぶにあたっては公理系を調べることから始めるべきだと言えます．そして最終的にはここから数々の問いが，公理系との関わりが薄いものも含め，生じることになるのです．

1.2

形式体系

公理（あるいは定理）に対する見方は二通りあります．これを文として，つまり公理を書き下したときに紙の上に現れる対象として見るか，文が意味することとして，つまり公理によって表現されている事実として見るか，です．一見，後者の方がはるかに重要そうに見えます．文の用途というのは明らかにその文の意味することを明確かつ正確に伝えることです．この用途は有用ではありますが，数学の基礎とはあまり関係ないように見えます．

それでも，公理や定理を文として学ぶことの理由が二つあります．第一に，公理を表現する言語を適切に選べば，その文構造は公理の意味をある程度反映するようになります．よって，公理を表現している文の構造を調べることで公理系における概念を調べることができるのです．これは特に現代的な公理系に対して有効です．なぜなら現代的な公理系においては，初めのうちは基本概念に対する理解が非常に弱いものだからです．

第二の理由は，数学の概念は非常に抽象的でそれゆえ理解が難しいからです．一方文は具体的な対象ですから，公理を文として調べることで具体を通して抽象へと接近できるのです．

一つ明らかなこととして，（抽象的ではなく）具体的な対象を調べるのに，具体的あるいは構成的な方法を採らなければ意味がありません．例えばある性質を持つ具体的な対象が存在することを証明したい場合，単にそうした対象の非存在から矛盾が生じるというだけではなく，実際にそうした対象を構成しなければならないのです．

構成的な方法で具体的な対象を扱っているような証明は**有限的である**と言われます．あるいはクライゼルの言うところでは，証明はそれを**可視化できる**とき有限的であるとされます．もちろん，どちらの説明もあまり精密なものではありませんが，多くの場合はこれらを適用することで，ある証明が有限的であるかを見ることができます．

具体的・抽象的な対象の根本的な違いが分かれば，様々な問いを挙げられても，有限的な証明を調べるだけでそれを解決できてしまいます．例えばこの研究を最初に打ち立てたヒルベルトは，私たちの直観で直ちに正当化されるのは有限的な数学だけであると考えました．抽象的な数学は，有限的な結果を得るための容易でエレガントな方法として導入されています．そこで彼は，一般に認められている全ての（あるいは大部分の）抽象数学はこのように考えられることを示そう，というプログラムを提唱しました．こうしたプログラムがどれだけ進められるのかという問いは，抽象数学に対するヒルベルトの考えに親しみを持てない人にとっても大変興味をそそられるものです．

公理や定理を文として調べることは，公理系の**構文論的**研究であると呼ばれます．これらの文の意味を調べることは，公理系の**意味論的**研究であると呼ばれます．明らかに，研究の構文論的な部分と意味論的な部分とはしばしば分けて考えるべきです．もし可能でさほど難しくなければ，意味論的研究を有限的な方法で行うべきでしょう．公理や定理は常に文として，従って構文論的対象として捉えるべきであり，意味論的にそれらを調べたい場合は公理や定理の意味に言及します．

構文論的研究の指針として，**形式体系**という概念を導入します．形式体系とは，大まかには公理系の構文論的な部分のことです．正確な定義を与えていきましょう．

形式体系の最初の部分は**言語**です．前述の通り，言語はできるだけその構造が意味を反映するように選ばれるべきです．こうした諸々の理由から，通常形式体系には人工言語を用います．

言語を定めるには，何よりもまずその**記号**を定める必要があります．英語の場合だと，文字や数字や句読点が記号になります．ここでの人工言語の多くは無数に多くの記号を持っています．

言語の記号による任意の有限列は，その言語の**表現**と呼ばれます．表現の中には一つの記号が数回現れうると考えられます．このような現われの各々は，表現中のその記号の**出現**と呼ばれます．表現中の記号の出現の数は，その表現の**長さ**と呼ばれます（従って英語での表現 boot の長さは 4 です）．空な記号列も表現とみなされ，長さが 0 の唯一の表現となります．