Fiore: Music and Mathematics
第 1 回

鴎海

（最終更新日：2023 年 8 月 12 日）

目次

定義・定理内で，その内容を完全に形式化した論理式を沿える場合がある．その場合，論理式を四角の枠で囲い，自然言語による記述と区別する．

術語は「**日本語太字**（英語）」の形式で示す．特に，テキストに現れる術語は，その初出ページ番号を明記する．例：**集合**（set, 7）

本文を通して以下の記号を用いる．

- $\begin{cases}\phi_1 \\ \phi_2\end{cases}$　論理式 ϕ_1 と ϕ_2 の連言 $\phi_1 \wedge \phi_2$（論理式の数が 3 つ以上の場合も同様）
- $!x\,\phi$　論理式 ϕ を満たす x は高々 1 つ存在する（i.e. $\exists x\,\phi \to \exists! x\,\phi$）．
- ω　0 以上の整数（i.e. 自然数）全体の集合
- $\mathbb{N}$　正の整数全体の集合
- $\mathbb{Z}$　整数全体の集合
- $\mathbb{R}$　実数全体の集合

1

数学的準備

1.1　集合

ここでは，集合を公理的に導入することはしない．集合の基本的な知識は既知であると想定し，単に術語や記号の素朴な意味を確めるにとどめる．高校数学 I「集合と論理」も参照せよ．

定義 1.1（集合，要素） 対象の集まりを**集合**（set, 7）といい，集合を構成する対象たちを**要素**（element, 7）という．

演習 1.2（演習 2） 集合の例を 3 つ与えよ．

解答

- 標準的な音量記号 pp, p, mp, mf, f, ff の集まり Dyn
- 整数 x の約数の集まり
- 奇数全体の集まり Odd

など．

定義 1.3（∈，外延的記法，内包的記法）

1. x が X の要素であることを $x \in X$ と書き，その否定を $x \notin X$ と書く．
2. x と y のみからなる集合を $\{x, y\}$ と書く．要素の数が 3 つ以上や 1 つの場合も同様の方法で表す．このように，要素を全て列挙することで集合を特定する記法を，集合の**外延的記法**（enumeration notation）という．
$$\boxed{\forall z\,(z \in \{x, y\} \leftrightarrow z = x \vee z = y)}$$
3. $\phi(x)$ を x に関する条件文とする[a]．$\phi(x)$ を満たすような x 全体の集合を $\{x : \phi(x)\}$ と書く．このように，自身の要素が満たすべき条件文を示すことで集合を特定する記法を，集合の**内包的記法**（set-builder notation）という．
$$\boxed{\forall z\,(z \in \{x : \phi(x)\} \leftrightarrow \phi(x))}$$

4. 内包的記法を流用して，$\phi(x)$ を満たす x に対して定まる対象 $t(x)$ 全体の集合も $\{t(x) : \phi(x)\}$ と書く．

[a] 「条件文」とは，より正確には論理式のことである．

例 1.4

1. Dyn は $\{pp, p, mp, mf, f, ff\}$ と定義できる．また，$p \in$ Dyn，$fff \notin$ Dyn である．
2. Odd は $\{x : x \text{ は奇数}\}$ と定義できる．また，$3 \in$ Odd，$6 \notin$ Odd である．
3. Odd は $\{2x + 1 : x \in \mathbb{Z}\}$ と表すこともできる．

事実 1.5

1. 2 つの集合が等しいことと，それらの要素が同じであることは同値である．

$$\boxed{X = Y \leftrightarrow \forall x\,(x \in X \leftrightarrow x \in Y)}$$

2. 集合の外延的記法を行うにあたり，その要素の順序は影響しない（i.e. 要素をどのような順序で書いても同じ集合になる）．

上記の 2 は 1 から直ちに導かれる．

例 1.6

1. $\{0, 1\} = \{1, 0\}$ である．しかし，$\{0, 1\} \neq \{0\}$ である．
2. $\{1, 2, 3\}, \{1, 3, 2\}, \{2, 1, 3\}, \{2, 3, 1\}, \{3, 1, 2\}, \{3, 2, 1\}$ は全て同じ集合である．
3. Odd $= \{x : x \text{ は 2 乗して奇数になる整数}\}$ である．実際，任意の x に対して，

$$\begin{aligned} x \in \text{Odd} &\leftrightarrow x \text{ は奇数} \\ &\leftrightarrow x \text{ は 2 乗して奇数になる整数} \\ &\leftrightarrow x \in \{x : x \text{ は 2 乗して奇数になる整数}\} \end{aligned}$$

であるから，事実 1.5.1 より等式が従う．

定義 1.7（部分集合） 集合 X の要素が全て集合 Y の要素でもあるとき，X は Y の**部分集合**（subset）であるといい，$X \subseteq Y$ と書く．

$$\boxed{X \subseteq Y :\leftrightarrow \forall x\,(x \in X \to x \in Y)}$$

例 1.8

1. $\{pp, p, mp\}, \{p, mf, ff\}, \{f\}$ は全て Dyn の部分集合である．
2. $\{4x + 1 : x \in \mathbb{Z}\} \subseteq$ Odd であり，Odd $\subseteq \mathbb{Z}$ である．

定義 1.9（合併） 集合 X と Y の要素全体からなる集合を X と Y の**合併**（union）といい，$X \cup Y$ と書く．

$$\boxed{x \in X \cup Y \leftrightarrow (x \in X \vee x \in Y)}$$

例 1.10

1. Dyn $= \{pp, mf, f\} \cup \{pp, p, mp, ff\}$ である．
2. Odd $= \{4x + 1 : x \in \mathbb{Z}\} \cup \{4x - 1 : x \in \mathbb{Z}\}$ である．

1.2 関数

関数について素朴な説明を与える．より正確な説明は付録 A を参照せよ．

定義 1.11（関数，関数の値）

1. 集合 X の全要素に対して集合 Y の要素をそれぞれ 1 つだけ対応させる「規則」f があるとき，f は X から Y への**写像**（map）または**関数**（function, 7）であるといい，$f\colon X \to Y$ と書く．
2. 関数 f が x を y に対応付けることを $f\colon x \mapsto y$ と書く．
3. $f\colon x \mapsto y$ のとき，y を，x における f の**値**（value）といい，$f(x)$ と書く．

注意 1.12 実際には，関数 f と関数の値 $f(x)$ は同一視される．例えば，実数を 2 乗する関数を与えるとき，正式には「$f\colon x \mapsto x^2$ $(x \in \mathbb{R})$」と書くべきだが，実際は関数の値と関数を同一視して「$f(x) = x^2$ $(x \in \mathbb{R})$」のように書くのが普通である．「関数 $f(x)$」という呼び方も普通に行われる．

例 1.13

1. 以下の対応は関数 $f\colon \{1,2,3\} \to \{4,5,6\}$ を定める．

$$f\colon 1 \mapsto 5,\ 2 \mapsto 5,\ 3 \mapsto 6$$

しかし，関数 $f\colon \{1,2,3\} \to \{4,5,6\}$ が以下を満たすことはない．

$$f\colon 1 \mapsto 5,\ 2 \mapsto 7,\ 3 \mapsto 6$$

なぜなら，$7 \notin \{4,5,6\}$ であり，定義 1.11.1 の「集合 $Y(=\{4,5,6\})$ の要素を対応させる」という条件に反するからである．

2. $f(x) = x^2 + 1$ $(x \in \mathbb{R})$ なる規則は関数である．しかし $f(x) = \dfrac{1}{x}$ $(x \in \mathbb{R})$ なる関数は存在しない．なぜなら，$x = 0$ のとき，x に対応させる対象 $\dfrac{1}{x}$ 自体が存在しないため，定義 1.11.1 の「$X(=\mathbb{R})$ の全要素に対して対応させる」という条件に反するからである．

演習 1.14（演習 4） $f(4) = 5$ かつ $f(4) = 7$ である関数 f は存在するか．

解答 存在しない．なぜなら，4 に複数の対象が対応しており，定義 1.11.1 の「対応させる対象はただ 1 つ」という条件に反するからである（これを無視したために $5 = f(4) = 7$ のような矛盾が生じている）．

定義 1.15（定義域，終域，値域，入力，出力） $f\colon X \to Y$ とする．

1. X を f の**定義域**（domain, 7），Y を**終域**（codomain/range, 7）という[a]．f の定義域を $\mathrm{dom}(f)$ と書く．
2. $\{f(x) : x \in X\}$ を f の**値域**といい，$\mathrm{ran}(f)$ と書く．
3. 定義域の要素を**入力**（input, 7）といい，終域の要素を**出力**（output, 7）という．

[a] Fiore による range の用法は標準的ではない．現在，range といえば値域を指し，Fiore の言う range は codomain と呼ばれるのが普通である．例えば，実数を 2 乗する関数 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ の終域は $\mathbb{R}$ だが，値域は「0 以上の実数全体の集合」である．

演習 1.16（演習 3） 定義域が $\{5,4,7\}$ で終域が $\{1,2\}$ であるような関数の例を 2 つ与えよ．

解答

- $f(5) = 1,\ f(4) = f(7) = 2$
- $f(5) = f(4) = f(7) = 1$

など.

定義 1.17（合成） $\mathrm{ran}(f) \subseteq \mathrm{dom}(f)$ とする．関数 $h(x) = g(f(x))$ を f と g の合成（composition, 8）といい，$g \circ f$ と書く.

例 1.18

1. 関数 $f\colon \{1,2,3\} \to \{4,5,6\}$ と $g\colon \{4,5,6\} \to \{7,8,9\}$ を，それぞれ

$$f(1) = 4,\ f(2) = 5,\ f(3) = 4$$
$$g(4) = 7,\ g(5) = 8,\ g(6) = 9$$

   によって定める．関数 $g \circ f$ は以下のようになる.

$$g \circ f(1) = g(f(1)) = g(4) = 7$$
$$g \circ f(2) = g(f(2)) = g(5) = 8$$
$$g \circ f(3) = g(f(3)) = g(4) = 7$$

2. 関数 $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ と $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ を，それぞれ

$$f(x) = x\ (x \in \mathbb{Z})$$
$$g(x) = x\ (x \in \mathbb{N})$$

   によって定めると，関数 $g \circ f$ は存在しない．なぜなら，$\mathrm{ran}(f) = \mathbb{Z}$ であるが $\mathrm{dom}(g) = \mathbb{N}$ であり，$\mathrm{ran}(f) \subseteq \mathrm{dom}(g)$ が成り立たないからである.

事実 1.19 f, g を関数とする．以下は同値である.

1. $f = g$
2. $\mathrm{dom}(f) = \mathrm{dom}(g)$，かつ任意の $x \in \mathrm{dom}(f)$ に対して $f(x) = g(x)$

注意 1.20 従って，関数 $f\colon X \to Y$ と $g\colon X \to Z$ が等しいことを示すには，任意の $x \in X$ に対して $f(x) = g(x)$ を実際に計算して確かめればよい.

1.3　合同算術

定義 1.21（合同） $n \in \mathbb{N}$，$a, b \in \mathbb{Z}$ とする．$a - b$ が n の倍数となるとき，a と b は n **を法として合同である**（congruent modulo n）といい，$a \equiv b \pmod{n}$ と書く[a].

[a] Fiore は $a \equiv b \pmod{n}$ ではなく $a = b \bmod n$ という表記を用いているが，剰余（定義 1.25）の表記と紛らわしいため，ここでは採用しない.

例 1.22

1. $15 \equiv 3 \pmod{12}$ である．なぜなら，$15 - 3 = 12$ は 12 の倍数だからである.
2. 任意の $x \in \mathbb{Z}$ に対して，$(4x - 1) \equiv 1 \pmod{2}$ である．なぜなら，$4x - 1 - 1 = 4x - 2$ は 2 の倍数だからである.

事実 1.23 $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{Z}$ とする．$0 \leq q < n$ かつ $a \equiv q \pmod{n}$ であるような $q \in \mathbb{Z}$ がただ 1 つ存在する．

例 1.24 例えば $n = 12$, $a = -3$ のとき，$0 \leq q < 12$ と $-3 \equiv q \pmod{12}$ を満たす整数 q は 9 だけである．

定義 1.25（剰余） $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{Z}$ とする．事実 1.23 よりただ 1 つ存在する q を，a を n で割った**余り**（remainder）または**剰余**（residue）といい，$a \bmod n$ または $(a)_n$ と書く．

演習 1.26（演習 5） 以下の計算を mod12 で行え．

$$7+5,\ 1+4,\ 8+8,\ 6+6,\ 9-7,\ 7-9,\ 2-8$$

解答

$$\begin{aligned}
(7+5) \bmod 12 &= 12 \bmod 12 = 0\\
(1+4) \bmod 12 &= 5 \bmod 12 = 5\\
(8+8) \bmod 12 &= 16 \bmod 12 = 4\\
(6+6) \bmod 12 &= 12 \bmod 12 = 0\\
(9-7) \bmod 12 &= 2 \bmod 12 = 2\\
(7-9) \bmod 12 &= -2 \bmod 12 = 10\\
(2-8) \bmod 12 &= -6 \bmod 12 = 6
\end{aligned}$$

事実 1.27 $n \in \mathbb{N}$, $a, b \in \mathbb{Z}$, $*$ を $+, -, \times$ のいずれかとする．以下が成り立つ．

$$(a * b)_n = ((a)_n * (b)_n)_n$$

定義 1.28（$\mathbb{Z}_n$） $n \in \mathbb{N}$ とする．$\{0, 1, \ldots, n-1\}$ を $\mathbb{Z}_n$ と書く．

2 移置と転回

2.1 ピッチクラス

n オクターブ離れた**音高**（pitch, 11）全体の集合を**ピッチクラス**（pitch class, 11）という．ここではピッチクラスに関する細かな議論は行わない．ほとんどの音楽に含まれる音高は 12 種類のピッチクラスのいずれかに属し，それらは順に $C, C\sharp/D\flat, D, D\sharp/E\flat, E, F, F\sharp/G\flat, G, G\sharp/A\flat, A, A\sharp/B\flat, B$ と呼ばれる．

定義 2.1（整数表記） 対応 Int を以下のように定める．

$$\begin{gathered}
C \mapsto 0, C\sharp \mapsto 1,\ D \mapsto 2,\ D\sharp \mapsto 3,\ E \mapsto 4,\ F \mapsto 5,\\
F\sharp \mapsto 6,\ G \mapsto 7,\ G\sharp \mapsto 8,\ A \mapsto 9,\ A\sharp \mapsto 10,\ B \mapsto 11
\end{gathered}$$

ピッチクラス x に対し，$Int(x)$ を x の**整数表記**（integer notation/integer model, 11）という．

注意 2.2 $Int\colon \{C, C\sharp, \ldots, B\} \to \mathbb{Z}_{12}$ であることが分かる．以下，ピッチクラスは全て断りなく整数表記される．

定義 2.3（順序対） n 個の対象 $x_1, \ldots, x_n$ を順序を考慮して並べたものを n **重順序対**（n–tuple）といい，$\langle x_1, \ldots, x_n \rangle$ と書く．

定義 2.4（PC セット，PC セグメント）

1. $\mathbb{Z}_{12}$ の部分集合を **PC セット**（pcset, 11）という．
2. $\mathbb{Z}_{12}$ の要素からなる順序対を **PC セグメント**（pcseg, 11）という．

演習 2.5（演習 6） ヴェルディ『アイーダ』第 1 幕から「清きアイーダ」（録音）のメロディ

$$\langle G, A, B, C, D, G, G \rangle$$

を整数表記せよ．

解答 $\langle 7, 9, 11, 0, 2, 7, 7 \rangle$

演習 2.6（演習 7） ビゼー『カルメン』第 2 幕から「闘牛士の歌」（録音）のメロディ

$$\langle C, D, C, A, A, A, G, A, B\flat, A, B\flat, G, C \rangle$$

を整数表記せよ．

解答 $\langle 0, 2, 0, 9, 9, 9, 7, 9, 10, 9, 10, 7, 0 \rangle$

2.2　移置と転回

定義 2.7（移置，転回） $n \in \mathbb{Z}_{12}$ とする．

1. 関数 $T_n\colon \mathbb{Z}_{12} \to \mathbb{Z}_{12}$ を，$T_n(x) = (n + x) \bmod 12$ によって定め，これを**移置**（transposition）という．
2. 関数 $I_n\colon \mathbb{Z}_{12} \to \mathbb{Z}_{12}$ を，$I_n(x) = (n - x) \bmod 12$ によって定め，これを**転回**（inversion）という．

演習 2.8（演習 8） $T_4(3), T_1(2), T_8(7), I_4(6), I_4(8)$ を求めよ．

解答

$$\begin{aligned}
T_4(3) &= (4 + 3) \bmod 12 = 7 \\
T_1(2) &= (1 + 2) \bmod 12 = 3 \\
T_8(7) &= (8 + 7) \bmod 12 = 3 \\
I_4(6) &= (4 - 6) \bmod 12 = 10 \\
I_4(8) &= (4 - 8) \bmod 12 = 8
\end{aligned}$$

定義 2.9 $n, x_1, \ldots, x_i \in \mathbb{Z}_{12}$ とし，F は T_n または I_n とする．

1. PC セット $\{x_1, \ldots, x_i\}$ に対し，$\{F(x_1), \ldots, F(x_i)\}$ を $F\{x_1, \ldots, x_i\}$ と書く．

2. PC セグメント $\langle x_1, \ldots, x_i \rangle$ に対し，$\langle F(x_1), \ldots, F(x_i) \rangle$ を $F\langle x_1, \ldots, x_i \rangle$ と書く．

演習 2.10（演習 9） 演習 2.5 のメロディに T_7 を適用せよ．

解答

$$\begin{aligned}
&T_7\langle 7, 9, 11, 0, 2, 7, 7\rangle \\
=&\langle T_7(7), T_7(9), T_7(11), T_7(0), T_7(2), T_7(7), T_7(7)\rangle \\
=&\langle 2, 4, 6, 7, 9, 2, 2\rangle
\end{aligned}$$

演習 2.11（演習 10） 演習 2.6 のメロディに I_6 を適用せよ．

解答

$$\begin{aligned}
&I_6\langle 0, 2, 0, 9, 9, 9, 7, 9, 10, 9, 10, 7, 0\rangle \\
=&\langle I_6(0), I_6(2), I_6(0), I_6(9), I_6(9), I_6(9), I_6(7), I_6(9), I_6(10), I_6(9), I_6(10), I_6(7), I_6(0)\rangle \\
=&\langle 6, 4, 6, 9, 9, 9, 11, 9, 8, 9, 8, 11, 6\rangle
\end{aligned}$$

演習 2.12（演習 11） $T_5 \circ I_3(4)$ と $I_3 \circ T_5(4)$ を計算せよ．等しくなるだろうか．

解答

$$T_5 \circ I_3(4) = T_5(11) = 4$$

であり，

$$I_3 \circ T_5(4) = I_3(9) = 6$$

であるから，$T_5 \circ I_3(4) \neq I_3 \circ T_5(4)$ である．

注意 2.13 上の演習で示されたように，移置 T_n と転回 I_m は必ずしも可換（i.e. $T_n \circ I_m = I_m \circ T_n$）ではない．これが可換になるのは $n = 0, 6$ の時に限られる．

証明 $x \in \mathbb{Z}_{12}$ を任意に取る．まず，

$$\begin{aligned}
T_n \circ I_m(x) &= T_n((m - x)_{12}) \\
&= (n + (m - x)_{12})_{12} \\
&= (n + m - x)_{12}
\end{aligned}$$

また，

$$\begin{aligned}
I_m \circ T_n(x) &= I_m((n + x)_{12}) \\
&= (m - ((n + x)_{12}))_{12} \\
&= (m - n - x)_{12}
\end{aligned}$$

よって，$T_n \circ I_m = I_m \circ T_n$ を仮定すると，

$$(n + m - x)_{12} = (m - n - x)_{12}$$

よって，

$$n \bmod 12 = (-n) \bmod 12$$

を得る．これを満たす $n \in \mathbb{Z}_{12}$ は $0, 6$ のみである．

逆に，$n = 0, 6$ のとき $T_n \circ I_m = I_m \circ T_n$ であることは容易に示される．

命題 2.14　$n, m \in \mathbb{Z}_{12}$ とする．以下が成り立つ．

1. $I_n = T_n \circ I_0$
2. $T_m \circ T_n = T_{(n+m)_{12}}$
3. $T_m \circ I_n = I_{(m+n)_{12}}$
4. $I_m \circ T_n = I_{(m-n)_{12}}$
5. $I_m \circ I_n = T_{(m-n)_{12}}$

証明　$x \in \mathbb{Z}_{12}$ を任意に取る．

1.
$$
\begin{aligned}
I_n(x) &= (n-x)_{12} \\
T_n \circ I_0(x) &= T_n((-x)_{12}) = (n-x)_{12}
\end{aligned}
$$

2.
$$
\begin{aligned}
T_m \circ T_n(x) &= T_m((n+x)_{12}) = (m+n+x)_{12} \\
T_{(m+n)_{12}}(x) &= (m+n+x)_{12}
\end{aligned}
$$

3.
$$
\begin{aligned}
T_m \circ I_n(x) &= T_m((n-x)_{12}) = (m+n-x)_{12} \\
I_{(m+n)_{12}}(x) &= (m+n-x)_{12}
\end{aligned}
$$

4.
$$
\begin{aligned}
I_m \circ T_n(x) &= I_m((n+x)_{12}) = (m-n-x)_{12} \\
I_{(m-n)_{12}}(x) &= (m-n-x)_{12}
\end{aligned}
$$

5.
$$
\begin{aligned}
I_m \circ I_n(x) &= I_m((n-x)_{12}) = (m-n+x)_{12} \\
T_{(m-n)_{12}}(x) &= (m-n+x)_{12}
\end{aligned}
$$

2.3　実例 1：バッハ

ここでは，バッハ『平均律クラヴィーア曲集第 1 巻』第 6 フーガ（録音）における移置と転回の実例を示す．以下，本作の主題（図 1，1–2 小節）から得られる PC セグメントを P とする．つまり

$$P \coloneqq \langle 2, 4, 5, 7, 4, 5, 2, 1, 2, 10, 7, 9 \rangle$$

2.3.1　移置

- 3–5 小節の第 2 声部は
$$T_7 P = \langle 9, 11, 0, 2, 11, 0, 9, 8, 9, 5, 2, 4 \rangle$$
である．
- 8–10 小節の第 1 声部
$$\langle 4, 5, 7, 9, 5, 10, 7, 6, 7, 3, \mathbf{1}, 2 \rangle$$

は，最初の 5 音が T_2P に一致し，太字部を除く最後の 7 音が T_5P に一致する．

- 17–19 小節の第 3 声部，18–20 小節の第 2 声部，21–23 小節の第 3 声部

$$\langle 9, 11, 0, 2, 11, \mathbf{1}, 9, 8, 9, 5, 2, 4\rangle$$
$$\langle 9, 11, \mathbf{1}, 2, 11, 0, 9, 8, 9, 5, 2, 4\rangle$$
$$\langle 9, 11, \mathbf{1}, 2, 11, \mathbf{1}, 9, 8, 9, 5, 2, 4\rangle$$

  は，いずれも太字部を除き T_7P に一致する．

など．

2.3.2　転回

14–16 小節の第 2 声部，22–24 小節の第 1 声部

$$\langle 4, 2, 1, 11, 2, 1, 4, 5, 4, \mathbf{9}, \mathbf{0}, \mathbf{10}\rangle$$
$$\langle 4, 2, 1, 11, 2, 1, 4, 5, 4, \mathbf{7}, \mathbf{10}, 9\rangle$$

は，いずれも太字部を除き

$$I_6P = \langle 4, 2, 1, 11, 2, 1, 4, 5, 4, 8, 11, 9\rangle$$

に一致する．

図 1　1–25 小節．P とその移置を赤色で，転回を青色で示す．×印の付された音は，関数の適用結果と一致しない音である．[2] を改変．

2.4　実例 2：ワーグナー

ここでは，ワーグナー『トリスタンとイゾルデ』第 1 幕への前奏曲（録音）における移置と転回の実例を示す．

以下，$A \coloneqq \{0, 2, 5, 8\}$，$B \coloneqq \{0, 2, 6, 8\}$ とする．図 2 の P_1 から P_{13} までの和音（P_{10}, P_{11} を除く）は以下のように表される．

Group 1	$P_1 = T_3A$	$P_2 = T_3B$	$P_3 = T_2B$	$P_4 = I_4A$
Group 2	$P_5 = T_6A$	$P_6 = T_6B$	$P_7 = T_5B$	$P_8 = I_7A$
Group 3	$P_9 = T_0A$	–	$P_{12} = T_3B$	$P_{13} = I_{11}A$

さらに，Group1–3 のメロディの開始/終止音は，順に

$$8/11, 11/2, 2/6$$

であり，これから得られる PC セットは $\{8, 11, 2, 6\} = T_6A$ である．

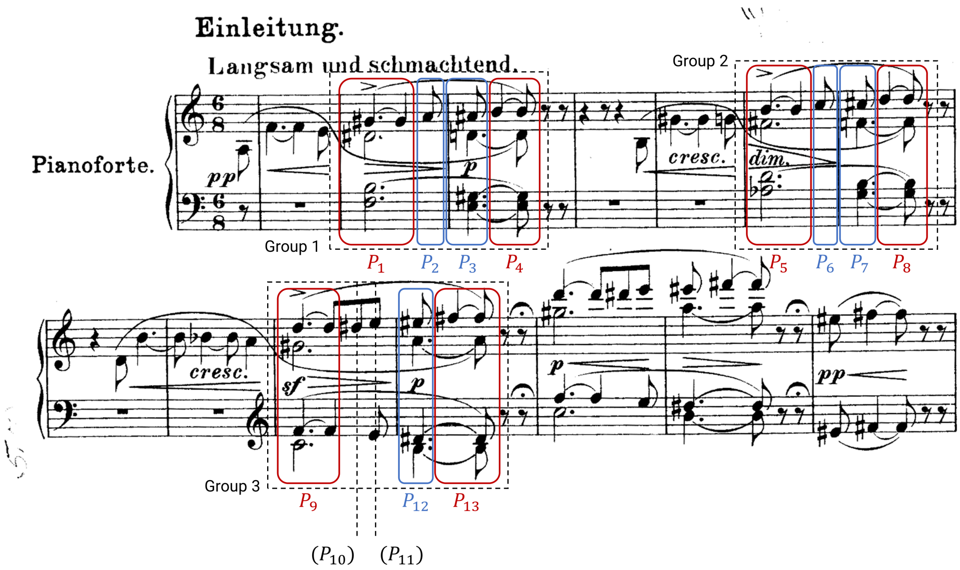

図 2　1–14 小節における P_1 から P_{13} までの和音．A の移置または転回を赤色で，B の移置または転回を青色で示す．[3] を改変.

演習 2.15（演習 Challenge）　上記の和音 P_9, P_{13} について，$I_nP_9 = P_{13}$ となる $n \in \mathbb{Z}_{12}$ を求めよ．

解答　$P_9 = A$ であるから，上表で示した通り $P_{13} = I_{11}A = I_{11}P_9$，つまり $n = 11$ である．

3

文脈的転回

3.1　定義

定義 3.1（移置形，転回形，セットクラス） $a, b, c \in \mathbb{Z}_{12}$ とする．

1. $$Tr_{\langle a,b,c\rangle} \coloneqq \{T_n\langle a, b, c\rangle : n \in \mathbb{Z}_{12}\}$$
   の要素を，$\langle a, b, c\rangle$ に関する**移置形**（transposed form/prime form, 18）という[a].
2. $$Inv_{\langle a,b,c\rangle} \coloneqq \{I_n\langle a, b, c\rangle : n \in \mathbb{Z}_{12}\}$$
   の要素を，$\langle a, b, c\rangle$ に関する**転回形**（inverted form, 18）という．
3. $$S_{\langle a,b,c\rangle} \coloneqq Pr_{\langle a,b,c\rangle} \cup Inv_{\langle a,b,c\rangle}$$

[a] 普通，PC セット理論において，prime form はこれとは異なるものを意味する．

注意 3.2 移置形と転回形の PC セグメントを，それぞれ互いの**逆のタイプ**（opposite type, 18）と呼ぶことがある．

命題 3.3 $a, b, c \in \mathbb{Z}_{12}$，$X, Y \in S_{\langle a,b,c\rangle}$ とする．以下は同値である．

1. Y は X と逆のタイプである．
2. $Y = I_nX$ なる $n \in \mathbb{Z}_{12}$ が存在する．

証明 1. → 2. を示す．X が転回形のときは，

$$X = T_m\langle a, b, c\rangle,\ Y = I_k\langle a, b, c\rangle$$

なる $m, k \in \mathbb{Z}_{12}$ が存在する．このとき，

$$\begin{aligned} I_{(m+k)_{12}}X &= I_{(m+k)_{12}}(T_m\langle a, b, c\rangle) \\ &= I_k\langle a, b, c\rangle \\ &= Y \end{aligned}$$

である．X が移置形のときは，

$$X = I_m\langle a, b, c\rangle,\ Y = T_k\langle a, b, c\rangle$$

なる $m, k \in \mathbb{Z}_{12}$ が存在する．このとき，

$$\begin{aligned} I_{(m+k)_{12}}X &= I_{(m+k)_{12}}(I_m\langle a, b, c\rangle) \\ &= T_k\langle a, b, c\rangle \\ &= Y \end{aligned}$$

である．

2. → 1. を示す．X が転回形のときは，

$$\begin{aligned} Y &= I_nX \\ &= I_n(T_m\langle a, b, c\rangle) \\ &= I_{(n-m)_{12}}\langle a, b, c\rangle \in Inv_{\langle a,b,c\rangle} \end{aligned}$$

であり，X が移置形のときは,

$$\begin{aligned}Y &= I_n X\\ &= I_n(I_m\langle a,b,c\rangle)\\ &= T_{(n-m)_{12}}\langle a,b,c\rangle \in Tr_{\langle a,b,c\rangle}\end{aligned}$$

である．

定義 3.4（文脈的転回） $x,y,z \in \mathbb{Z}_{12}$ とする．関数 J を,

$$\begin{aligned}J\langle x,y,z\rangle &= I_{(x+y)_{12}}\langle x,y,z\rangle\\ &= \langle y,x,(x+y-z)_{12}\rangle\end{aligned}$$

によって定め，これを**文脈的転回**（contextual inversion, 18）という．

注意 3.5 順序対 X の左から n 番目の対象を $\pi_n(X)$ と書くと，この定義は,

$$JX = I_{(\pi_1(X)+\pi_2(X))_{12}}X$$

と言い換えることができる．

演習 3.6（演習 3） 次を計算せよ．また，$x,y,z \in \mathbb{Z}_{12}$ のとき，$J\circ J\langle x,y,z\rangle$ を推測せよ．

$$J\langle 3,8,10\rangle,\ J\langle 5,10,0\rangle,\ J\langle 9,2,4\rangle\ J\langle 8,3,1\rangle\ J\langle 10,5,3\rangle\ J\langle 2,9,7\rangle$$

解答

$$\begin{aligned}J\langle 3,8,10\rangle &= I_{11}\langle 3,8,10\rangle = \langle 8,3,1\rangle\\ J\langle 5,10,0\rangle &= I_{3}\langle 5,10,0\rangle = \langle 10,5,3\rangle\\ J\langle 9,2,4\rangle &= I_{11}\langle 9,2,4\rangle = \langle 2,9,7\rangle\\ J\langle 8,3,1\rangle &= I_{11}\langle 8,3,1\rangle = \langle 3,8,10\rangle\\ J\langle 10,5,3\rangle &= I_{3}\langle 10,5,3\rangle = \langle 5,10,0\rangle\\ J\langle 2,9,7\rangle &= I_{11}\langle 2,9,7\rangle = \langle 9,2,4\rangle\end{aligned}$$

$J\circ J\langle x,y,z\rangle = \langle x,y,z\rangle$ であることが推測されるが，これは次のように証明される．

命題 3.7 $x,y,z \in \mathbb{Z}_{12}$ とする．$J\circ J\langle x,y,z\rangle = \langle x,y,z\rangle$ である．

証明

$$\begin{aligned}J\circ J\langle x,y,z\rangle &= J\langle y,x,(x+y-z)_{12}\rangle\\ &= \langle x,y,((x+y)_{12}-(x+y-z)_{12})_{12}\rangle\\ &= \langle x,y,z\rangle\end{aligned}$$

命題 3.8 $a,b,c,x,y,z \in \mathbb{Z}_{12}$，$\langle x,y,z\rangle \in S_{\langle a,b,c\rangle}$ とする．$S_{\langle a,b,c\rangle}$ の要素のうち，$\langle x,y,z\rangle$ と逆のタイプであって，$\langle y,x,w\rangle$（$w \in \mathbb{Z}_{12}$）の形をしたものは，$J\langle x,y,z\rangle$ に限られる．

証明 $\langle y,x,w\rangle$ は $\langle x,y,z\rangle$ と逆のタイプであるから，命題 3.3 より $\langle y,x,w\rangle = I_n\langle x,y,z\rangle$ なる $n \in \mathbb{Z}_{12}$ が存在する．このとき，PC セグメントの第 1 成分より $(n-x)_{12} = y$ が成り立つので，$n = (x+y)_{12}$ を得る．

注意 3.9 この命題の「逆のタイプである」という条件は必要である．この条件が無い場合，例えば $\langle 0,6,7\rangle \in S_{\langle 0,6,7\rangle}$ に対して，$\langle 6,0,w\rangle$ の形をしたものは，

$$\begin{aligned} T_6\langle 0,6,7\rangle &= \langle 6,0,1\rangle \\ I_6\langle 0,6,7\rangle &= \langle 6,7,11\rangle \end{aligned}$$

の 2 つ存在する．このうち後者のみが $\langle 0,6,7\rangle$ と逆のタイプである．

定理 3.10 $n \in \mathbb{Z}_{12}$ とし，F は T_n または I_n とする．$F \circ J = J \circ F$ である．

証明 PC セグメント $\langle x,y,z\rangle$ を任意に取る．

$$\begin{aligned} T_n \circ J\langle x,y,z\rangle &= T_n\langle y,x,(x+y-z)_{12}\rangle \\ &= \langle (n+y)_{12},(n+x)_{12},(n+x+y-z)_{12}\rangle \\ J \circ T_n\langle x,y,z\rangle &= J\langle (n+x)_{12},(n+y)_{12},(n+z)_{12}\rangle \\ &= I_{(2n+x+y)_{12}}\langle (n+x)_{12},(n+y)_{12},(n+z)_{12}\rangle \\ &= \langle (n+y)_{12},(n+x)_{12},(n+x+y-z)_{12}\rangle \end{aligned}$$

であり，

$$\begin{aligned} I_n \circ J\langle x,y,z\rangle &= I_n\langle y,x,(x+y-z)_{12}\rangle \\ &= \langle (n-y)_{12},(n-x)_{12},(n-x-y+z)_{12}\rangle \\ J \circ I_n\langle x,y,z\rangle &= J\langle (n-x)_{12},(n-y)_{12},(n-z)_{12}\rangle \\ &= I_{(2n-x-y)_{12}}\langle (n-x)_{12},(n-y)_{12},(n-z)_{12}\rangle \\ &= \langle (n-y)_{12},(n-x)_{12},(n-x-y+z)_{12}\rangle \end{aligned}$$

である．

3.2　実例：ヒンデミット

ここでは，ヒンデミット『ルードゥス・トナリス』第 2 フーガ（録音）における文脈的転回の実例を示す．本作の主題（図 3，1–2 小節）から最初の反復を取り除いた

$$\langle 7,0,2,7,0,5\rangle$$

の前半部分 $\langle 7,0,2\rangle$ を考える．

- 後半部分 $\langle 7,0,5\rangle$ は，$J\langle 7,0,2\rangle = \langle 0,7,5\rangle$ と順序を無視して同じである．
- 4 小節に現れる主題の前半部分は
$$T_5\langle 7,0,2\rangle = \langle 0,5,7\rangle$$
であり，後半部分は
$$JT_5\langle 7,0,2\rangle = J\langle 0,5,7\rangle = \langle 5,0,10\rangle = T_5\langle 0,5,7\rangle = T_5J\langle 7,0,2\rangle$$
と順序を無視して同じである．

可換図式で表せば，

$$\begin{tikzcd} \langle 7,0,2\rangle \arrow[r, mapsto, "J"] \arrow[d, mapsto, "T_5"] & \langle 0,7,5\rangle \arrow[d, mapsto, "T_5"] \\ \langle 0,5,7\rangle \arrow[r, mapsto, "J"] & \langle 5,0,10\rangle \end{tikzcd}$$

この可換性は定理 3.10 より従う.

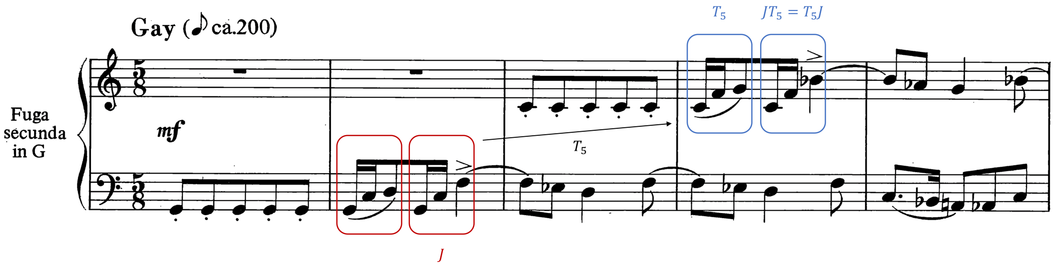

図 3　1–5 小節．[1] を改変.

9/16 小節，37/39 小節，55/57 小節にも同様の関係がある（下演習).

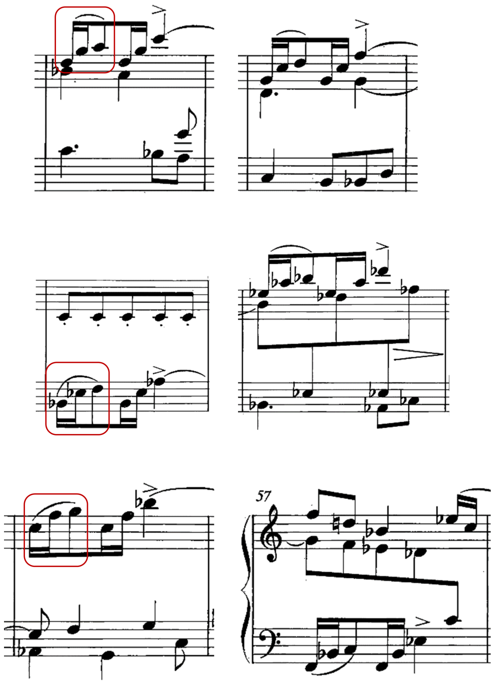

図 4　上から 9/16 小節，37/39 小節，55/57 小節．[1] を改変.

演習 3.11（演習 4–6） PC セグメント $\langle 2,7,9\rangle$（9 小節前半)，$\langle 10,3,5\rangle$（37 小節前半)，$\langle 0,5,7\rangle$（55 小節前半）について同様の可換図式を作成せよ.

解答

$$\begin{tikzcd} \langle 2,7,9\rangle \arrow[r, mapsto, "J"] \arrow[d, "T_5"] & \langle 7,2,0\rangle \arrow[d, "T_5"] \\ \langle 7,0,2\rangle \arrow[r, mapsto, "J"] & \langle 0,7,5\rangle \end{tikzcd}$$

$$\begin{array}{ccc} \langle 10,3,5\rangle & \stackrel{J}{\longmapsto} & \langle 3,10,8\rangle \\ \downarrow{\scriptstyle T_5} & & \downarrow{\scriptstyle T_5} \\ \langle 3,8,10\rangle & \stackrel{J}{\longmapsto} & \langle 8,3,1\rangle \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \langle 0,5,7\rangle & \stackrel{J}{\longmapsto} & \langle 5,0,10\rangle \\ \downarrow{\scriptstyle T_5} & & \downarrow{\scriptstyle T_5} \\ \langle 5,10,0\rangle & \stackrel{J}{\longmapsto} & \langle 10,5,3\rangle \end{array}$$

付録 A

関数のより形式的な定義

ここでは，§1.2 と同じ内容をより厳密な形で展開する．この節は必ずしも読む必要が無い．

定義 A.1（関係，関数）

1. r が**関係**（relation）であるとは，r の要素が全て順序対であることをいう．

$$\boxed{\mathrm{Rel}(r) :\leftrightarrow \forall z \in r\, \exists x, y\, (z = \langle x, y\rangle)}$$

2. $f\colon x \mapsto y$ とは，$\langle x, y\rangle \in f$ であることをいう．

$$\boxed{f\colon x \mapsto y :\leftrightarrow \langle x, y\rangle \in f}$$

3. 関係 f が**写像**（map）または**関数**（function, 7）であるとは，任意の x に対し，$f\colon x \mapsto y$ なる y が高々 1 つ存在することをいう．

$$\boxed{\mathrm{Func}(f) :\leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{Rel}(f) \\ \forall x\, !y\, (f\colon x \mapsto y) \end{cases}}$$

定義 A.2（関数の値） f を関数とし，$f\colon x \mapsto y$ なる y が存在するとする．定義 A.1.3 より，この y はただ 1 つ存在する．これを $f(x)$ と書き，x における f の**値**（value）という．

$$\boxed{f\colon x \mapsto f(x)} \quad \text{when} \quad \begin{cases} \mathrm{Func}(f) \\ \exists y\, (f\colon x \mapsto y) \end{cases}$$

定義 A.3（定義域，値域，終域） f を関数とする．

1. f の**定義域**（domain）$\mathrm{dom}(f)$ とは，$\{x : \exists y\, (f\colon x \mapsto y)\}$ である．

$$\boxed{\mathrm{dom}(f) \coloneqq \{x : \exists y\, (f\colon x \mapsto y)\}} \quad \text{when} \ \ \mathrm{Func}(f)$$

2. f の**値域**（range）$\mathrm{ran}(f)$ とは，$\{y : \exists x\, (f\colon x \mapsto y)\}$ である．

$$\boxed{\mathrm{ran}(f) \coloneqq \{y : \exists x\, (f\colon x \mapsto y)\}} \quad \text{when} \ \ \mathrm{Func}(f)$$

3. Y が f の**終域**（codomain/range, 7）であるとは，$\mathrm{ran}(f) \subseteq Y$ であることをいう．

$$\boxed{\mathrm{Codom}(Y, f) :\leftrightarrow \mathrm{ran}(f) \subseteq Y} \quad \text{when} \ \ \mathrm{Func}(f)$$

定義 A.4（X から Y への関数） 関数 f が **X から Y への関数**（goes from X to Y, 7）であるとは，f の定義域が X で，Y が f の終域であることをいう．

$$\boxed{f\colon X \to Y :\leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{Func}(f) \\ \mathrm{dom}(f) = X \\ \mathrm{Codom}(Y, f) \end{cases}}$$

命題 A.5 $f\colon X \to Y$ であれば，$f(x) \in Y$ である．

$$\boxed{f\colon X \to Y \to f(x) \in Y} \quad \text{when} \ \exists y\, (f\colon x \mapsto y)$$

証明 $f\colon x \mapsto f(x)$ であるから，$\exists x\, f\colon x \mapsto f(x)$ を得る．よって，

$$f(x) \in \{y : \exists y\, (f\colon x \mapsto y)\} = \mathrm{ran}(f)$$

を得る．これと $\mathrm{Codom}(Y, f)$ より，$f(x) \in Y$ を得る．

定義 A.6（関数の合成） f, g を $\mathrm{ran}(f) \subseteq \mathrm{dom}(g)$ なる関数とする．f と g の**合成**（composition, 8）$g \circ f$ とは，$\{\langle x, g(f(x))\rangle : x \in \mathrm{dom}(f)\}$ である．

$$\boxed{g \circ f \coloneqq \{\langle x, g(f(x))\rangle : x \in \mathrm{dom}(f)\}} \quad \text{when} \ \begin{cases} \mathrm{Func}(f), \ \mathrm{Func}(g) \\ \mathrm{ran}(f) \subseteq \mathrm{dom}(g) \end{cases}$$

命題 A.7 f, g を $\mathrm{ran}(f) \subseteq \mathrm{dom}(g)$ なる関数とする．

1. $g \circ f$ は関数である．

$$\boxed{\mathrm{Func}(g \circ f)} \quad \text{when} \ \begin{cases} \mathrm{Func}(f), \ \mathrm{Func}(g) \\ \mathrm{ran}(f) \subseteq \mathrm{dom}(g) \end{cases}$$

2. 任意の $x \in \mathrm{dom}(f)$ に対して，$g \circ f(x) = g(f(x))$ である．

$$\boxed{\forall x \in \mathrm{dom}(f)\, (g \circ f(x) = g(f(x)))} \quad \text{when} \ \begin{cases} \mathrm{Func}(f), \ \mathrm{Func}(g) \\ \mathrm{ran}(f) \subseteq \mathrm{dom}(g) \end{cases}$$

3. $f\colon X \to Y$，$g\colon Y \to Z$ であれば，$g \circ f\colon X \to Z$ である．

$$\boxed{\begin{cases} f\colon X \to Y \\ g\colon Y \to Z \end{cases} \to (g \circ f\colon X \to Z)} \quad \text{when} \ \begin{cases} \mathrm{Func}(f), \ \mathrm{Func}(g) \\ \mathrm{ran}(f) \subseteq \mathrm{dom}(g) \end{cases}$$

証明

1. $\mathrm{Rel}(g \circ f)$ は定義 A.6 から明らかである．$\forall x\, !y\, (f\colon x \mapsto y)$ を示す．x を任意に取る．もし $f\colon x \mapsto y$ なる y が存在すれば，それは $g(f(x))$ であり，従ってただ 1 つ存在する．よって $\forall x\, !y\, (f\colon x \mapsto y)$

を得る．

2. 定義 A.6 から明らかである．
3. $\mathrm{Func}(g \circ f)$ は既に示した．$\mathrm{dom}(g \circ f) = X$ を示す．

$$
\begin{aligned}
x \in \mathrm{dom}(g \circ f) &\leftrightarrow \exists y \, \langle x, y \rangle \in g \circ f \\
&\leftrightarrow \exists y \begin{cases} y = g(f(x)) \\ x \in \mathrm{dom}(f) \end{cases} \\
&\leftrightarrow x \in \mathrm{dom}(f)
\end{aligned}
$$

を得，従って $\mathrm{dom}(f) = X$ を得る．$\mathrm{Codom}(Z, g \circ f)$ を示す．

$$
\begin{aligned}
y \in \mathrm{ran}(g \circ f) &\rightarrow \exists x \begin{cases} y = g(f(x)) \\ x \in \mathrm{dom}(f) \end{cases} \\
&\rightarrow y \in g(f(x)) \\
&\rightarrow y \in Z
\end{aligned}
$$

ただし，3 つ目の $\rightarrow$ は命題 A.5 より従う．

命題 A.8 f, g を関数とする．以下は同値である．

1. $f = g$
2. $\mathrm{dom}(f) = \mathrm{dom}(g)$，かつ任意の $x \in \mathrm{dom}(f)$ に対して $f(x) = g(x)$

$$
\boxed{f = g \leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{dom}(f) = \mathrm{dom}(g) \\ \forall x \in \mathrm{dom}(f) \, (f(x) = g(x)) \end{cases}} \quad \text{when} \begin{cases} \mathrm{Func}(f),\ \mathrm{Func}(g) \\ \exists y \, (f \colon x \mapsto y),\ \exists y \, (g \colon x \mapsto y) \end{cases}
$$

参考文献

[1] Billeter, Bernhard. von Fischer, Kurt & Finscher, Ludwig (Eds.). (1943). *Ludus Tonalis*. Paul Hindemith: Sämtliche Werke, Band V, 10: Klaviermusik II. Schott. `https://petruccimusiclibrary.ca/linkhandler.php?path=/imglnks/caimg/1/16/IMSLP453425-PMLP501152-hindemithSWV,10Ludustonalisscore.pdf`

[2] Dürr, Alfred (Ed.). (1989). *J. S. Bach: Das Wohltemperierte Klavier I*. Bärenreiter-Verlag. `https://imslp.eu/linkhandler.php?path=/imglnks/euimg/c/c4/IMSLP821757-PMLP05948-Bach--WTK1.pdf`

[3] Singer II, Otto. (1909). *Tristan und Isolde*. Richard Wagner's Werke: Opern und Musikdramen, Band V. Breitkopf und Härtel. `https://imslp.org/wiki/Special:ImagefromIndex/220656/wc28`

[4] Straus, Joseph N. (2016). *Introduction to Post-Tonal Theory* (4th ed.). W. W. Norton & Company.