# 数学原理

## 第 1 巻

A. N. ホワイトヘッド
B. ラッセル
（訳：鴎鵜みね）

（最終更新日：2022 年 5 月 16 日）

用語の日本語訳は概ね以下に従ったが，合致させなかった部分も多い．

A. N. ホワイトヘッド，B. ラッセル（岡本賢吾，戸田山和久，加地大介　訳）『プリンキピア・マテマティカ序論』，哲学書房，1988

# 緒言

翻訳中

# 目次

# 固有名で参照される命題のアルファベット順一覧

翻訳中

# 第二版への序論

翻訳中

# 序論

翻訳中

# 第 I 部

## 数理論理学

# 第 I 部の要約

翻訳中

第 **A** 節

# 演繹論

本節の目的は，純粋数学をその論理的基盤から演繹する第一段階を提示することである．この第一段階には必然的に演繹それ自体も含まれてくる．すなわち，前提から結論を導くための原理も含まれてくるのである．もし我々の目的が，全ての仮定を明示し，その仮定から他の全ての命題を演繹することであるならば，最初に必要となる仮定とは演繹を可能にするための仮定である，ということは明白である．記号論理学は，クラスの理論と命題の理論という二つの対等な部分からなるとされている．しかし我々から見ればこれら二部分は対等ではない．というのも，クラスの理論では，命題の理論に属する原理を用いることである命題から別の命題を演繹するのであるが，一方命題の理論においては，クラスの理論はまったく不要だからである．従って，演繹体系において，命題の理論は必然的にクラスの理論に先立つのである．

しかし以下で扱う対象は**命題**の理論とは言いがたい．実のところ，これはある命題を別の命題から推論する方法についての理論なのである．いま，ある命題が別の命題から推論されるためには，一方がもう一方の結論となるという関係をこの二つが持っていることが必要となる．命題 $q$ が命題 $p$ の結論であるとき，$p$ **は** $q$ **を含意する**（$p$ implies $q$）という．ゆえに演繹は**含意**（implication）関係に依存するのであって，全ての演繹体系は，通常の演繹手続きを正当化するのに必要なだけの含意属性を，その仮定の中に有していなければならない．本節では，いくつかの命題を仮定として述べ，それが一般的な演繹形式の全てを引き出すのに十分であることを示すことにする．それら全てが**必要である**かどうかは示さないし，またその数を減らせる可能性もある．前提について断言できるのは (1) それが真であるということ，(2) それが演繹の理論に対して十分であるということ，(3) その数を減らす方法を我々が見出せないこと，だけなのである．しかし (2) に関しては，ある原理を全く使っていないという確信を持つのが困難であることから，常に疑いがついてまわる．形式的な記号規則に厳格に則るという習慣でもって無意識的な仮定を避けることはできるが，その予防策も，必ずしも適切とは限らないのである．

## ∗1

## 原始概念と命題

言葉の定義は全てまた別の言葉を用いてなされるのだから，循環しない定義の系は全て，いくつかの無定義語から始まっていなければならない．何が数学において無定義であるとするかはある程度自由である．その選択にかかる動機としては (1) 無定義の概念をできるだけ少なくすること，(2) その数が等しい二つの体系のうち，より単純で容易と思われる方を選ぶこと，があろう．我々は，かくかくしかじかの無定義の概念の系がかくかくしかじかの結果を与える最小限のものであるということを証明することはできない[*1]．よって，我々が言えるのは，かくかくしかじかの体系ではかくかくしかじかの概念が無定義であるということであって，それらが定義できないということではないのである．我々はペアノに倣い，無定義の概念，ならびに無論証の命題を，それぞれ**原始**（primitive）概念，**原始**命題と呼ぶ．原始概念は，その意味を読者に明示することを意図した解説を用いることで**説明される**．しかし，説明は

[*1] 率直に言うと，独立性証明における広く認められている方法を基礎論に適用することはできない．cf. *Principles of Mathematics*, §17. 原始命題についてこの中で述べていることは，原始概念にもよりいっそう強力に当てはまる．

定義のうちには入らない．なぜなら，説明はまさしくそれが説明するところの概念を必要とするからである．

この号ではまず，本節で必要となる原始概念を列挙する．次に**含意**（implication）を定義し，そして本節で必要となる原始命題を明記していく．本書の定義や命題には全て参照用の番号が付されている．我々はペアノに倣い，任意の二つの命題の間に新しい命題を挿入できるよう，整数と小数を伴った番号を用いる．整数部分は章が新たとなるのに対応して変更される．定義には，原則として小数部分が ·1 未満の番号を付し，これを章の冒頭に置くことにする．参照時には，命題の番号の整数部分の前には星を付す．従って，「∗1·01」はその番号を付された定義あるいは命題を意味し，「∗1」は命題に整数部分が 1 である番号が付されている章，すなわちこの章を意味することになる．章は原則「号」と呼ばれる．

## 原始概念

(1) **要素的命題**（elementary propositions）．「要素的」命題とは，変項を全く含まない命題，言い換えれば，「全ての」「ある」「唯一の」あるいはこれと同義な語を含まないような命題である．「これは赤い」といった命題は，「これ」が感覚的に与えられていれば，要素的である．与えられた要素的命題を否定，選言，連言（下記参照）を用いて結合させたものも要素的である．本号の原始命題では，またそれゆえ $*2 - *5$ において原始命題から生じる演繹では，文字 $p, q, r, s$ によって要素的命題を表すこととする．

(2) **要素的命題関数**（elementary propositional functions）．「要素的命題関数」とは，一つまたはいくつかの不定構成要素，すなわち変項を含むような表現であって，不定構成要素が決定されたとき，すなわち変項に値が割り当てられたときの，当該表現の返り値が要素的表現であるようなものである．従って，もし $p$ が不定要素的命題であるならば，「$p$ でない」は要素的命題関数である．

以下の号（$*1 - *5$）での結果を要素的でない命題へと拡張する方法は，$*9$ で示すことにする．

(3) **主張**（assertion）．あらゆる命題は，主張されるか，または単に考察されるかのいずれかである．もし私が「カエサルは死んだ」と言えば，「カエサルは死んだ」という命題を主張したことになり，もし「『カエサルは死んだ』は命題である」と言えば，また別の主張をしたことになるのであって，「カエサルは死んだ」はもはや主張されておらず，単に考察されているにすぎない．同様に，仮設的な命題，例えば「$a = b$ ならば，$b = a$ である」には二つの主張されていない命題，つまり「$a = b$」「$b = a$」があり，**主張されている**のは，前者が後者を含意しているということである．言葉上では，命題が単に考察されているとき，「これこれ**であれば**」あるいは「これこれである**ということは**」あるいは単に逆さのコンマで明示する．記号上では，$p$ が命題であれば，主張されていない命題は $p$ そのもので表すことにし，主張された命題は

「$\vdash . p$」

と表すことにする．記号「$\vdash$」は主張符号（assertion-sign）と呼ばれ[*2]，「は真である」と読める（ただし哲学的にはこれは正確な意味ではない）．主張符号の後ろのドットはその範囲を明示するものであり，要するに，含意記号より前のドットが同数個となるか文の終わりに到達するかまでの間にあるものは，全て主張されている．従って「$\vdash : p . \supset . q$」は「$p$ が $q$ を含意するというのは真である」を意味し，一方「$\vdash . p . \supset \vdash . q$」は「$p$ は真である．それゆえ $q$ も真である」を意味するのである[*3]．前者は必ずしも $p$ や $q$ が真であるとは述べていないが，後者は両方が真であることを述べている．

(4) **命題関数の主張**（assertion of a propositional function）．具体的な命題の主張の他にも，「命題関数の主張」と呼ばれるものが必要となる．**任意の**命題関数を主張するという一般的な概念は $*9$ まで用いられないが，様々な特別な**要素的**命題関数を主張するという概念は一挙に使用する．$\phi x$ を $x$ を代入

[*2] この概念および主張の記号はいずれもフレーゲによるものを採用した．
[*3] cf. *Principles of Mathematics*, §38.

項とする命題関数とするとき，$x$ に値を割り当てることなく $\phi x$ を主張してもよい．例えば「$A$ は $A$ である」という形で同一性の法則が主張されているときにはこれが行われている．ここで $A$ は不定のままである．なぜなら，$A$ をどのように決めてもその結果は真であろうからである．従って，$x$ を不定にしたまま $\phi x$ を主張するとき，我々はこの関数による不定な値を主張していることになる．これが正当化されるのは，この不定値をどのように決めてもその結果が真となるときに限る．従って，実例として以下の原始命題 ∗1·2，つまり

$$「\vdash : p \vee p . \supset . p」$$

すなわち「『$p$ または $p$』は $p$ を含意する」を考えてみよう．ここで $p$ は任意の要素的命題であってよい．$p$ を不定のままにしておくことで，我々は任意の具体的な要素的命題へと適用可能な主張を得るのである．こうした主張は，ユークリッドにおける何らかの主張に似ている．「$ABC$ を二等辺三角形とするとき，底辺の角は等しいであろう」と言うとき，その内容は**任意の**二等辺三角形へと適用される．**一つの**三角形について述べられてはいるが，具体的な三角形について述べられているのではないのである．本書の全ての主張は，ごく少数の例外を除き，具体的な命題ではなく命題関数が述べられている．

実のところ，定項的要素的命題は本書には登場しないし，論理的概念のみを援用する他書にはあるいは登場するかもしれない．論理学の概念や命題はみな**普遍的な**ものであって，（例えば）ソクラテスには真だがプラトンには真でないような主張は論理学には属さず[*4]，また双方にとって真なる主張が論理学に登場するのであれば，それはどちらか一方に対してではなく，変項 $x$ に対するものでなくてはならない．命題関数の代わりに具体的な命題を論理学で得るには，ある命題関数を取り，それが常に，もしくはある時に真である，すなわち，変項が取りうる全ての値，もしくはある値に対して真であると主張する必要がある．従って，命題でも関数でもないものを「個体」と名付けることにすれば，命題「全ての個体はそれ自身と同一である」は論理に属する命題となる．しかしこの命題は要素的命題ではない．

(5) **否定**（negation）．$p$ を任意の命題とするとき，「$p$ でない」もしくは「$p$ は偽である」を「$\sim p$」と表す．このとき，$p$ は**要素的**命題でなければならない．

(6) **選言**（disjunction）．$p$ と $q$ を任意の命題とするとき，「$p$ または $q$」，すなわち「$p$ が真であるか，$q$ が真であるかのいずれかである」であってその選択は互いに排他的とは限らないようなものを，

$$「p \vee q」$$

と表す．これは**選言**もしくは**論理和**（logical sum）と呼ばれる．従って，「$\sim p \vee q$」は「$p$ が偽であるか，$q$ が真である」を意味することになる．「$\sim(p \vee q)$」とは「$p$ か $q$ のいずれかは真である，というのは偽である」を意味し，これは「$p$ と $q$ はいずれも偽である」と同義である．「$\sim(\sim p \vee \sim q)$」は「$p$ が偽であるか $q$ が偽である，というのは偽である」を意味し，これは「$p$ と $q$ はいずれも真である」と同義である，という具合に．このとき，$p$ と $q$ は要素的命題でなければならない．

以上が演繹論で必要な全ての原始概念である．その他の原始概念は第 B 節で導入することにする．

**含意の定義**（definition of implication）．命題 $q$ が命題 $p$ から従い，それゆえ $p$ が真であれば $q$ も必ず真であるとき，$p$ **は** $q$ **を含意する**（$p$ implies $q$）という．含意の概念は，我々が要求する形で定義できる．含意に対して以下で与えられる意味は，一見するといくぶん人工的に映るかもしれない．しかし，他にも正当な意味づけはあるとはいえ，ここで採用されているものは，他のどれよりも我々の目的にとって非常に便利なのである．我々が求める含意の本質は「真な命題によって含意されるものは全て真である」である．この性質により，含意は証明をもたらす．しかしこの性質は，一切が偽の命題から含意されるかどうか，またそのとき何が含意されるのかについては決して何も語らない．これが語るのは，$p$ が $q$ を含意するとき，$p$ が真であって $q$ が偽であるようなことは起こりえないということなのである．含意

[*4] 命題が「論理学に属する」と言うとき，それは論理学の原始概念のみによって表現できるという意味である．論理学を**適用できる**という意味ではない．それは当然任意の命題で可能だからである．

の解釈として最も便利なのは，逆に，$p$ が偽であるか $q$ が真であるかであれば「$p$ は $q$ を含意する」というものである．よって「$p$ は $q$ を含意する」は「$p$ が偽であるか，$q$ が偽である」なる意味として定義できる．よって，

$*1{\cdot}01.\quad p \supset q \,.\!=.\, {\sim}p \vee q \quad \mathrm{Df}$

ここで，文字「Df」は「定義（definition)」の略である．これと等号は，「は次の意味として定義される」の略としての一つの記号をともに形成しているとみなされる[*5]．等号の左にあるものは，右にあるものと同じ意味として定義される．定義は原始概念ではない．なぜなら定義の関心は記号のみにあり，記号化されるものとは関係ないからである．これが導入されるのは実用上便利だからであって，理論的には不要である．

上記の定義により，「$p \supset q$」が成り立つとき，$p$ が偽であるか，$q$ が真である．よってもし $p$ が真であれば，$q$ は真でなければならない．従って，上記の定義は含意の本質的性格を保持している．実はここでは，この性格と両立する意味の中で最も広いものを与えているのである．

## 原始命題

$*1{\cdot}1.$　真なる要素的命題によって含意されるものは全て真である．　Pp [*6]

上記の原理は $*9$ で，要素的ではない命題の場合にも拡張される．これは「$p$ が真であれば，もし $p$ が $q$ を含意すれば $q$ は真である」と同じ意味ではない．これは真なる命題ではあるが，しかし $p$ が真でないときや $p$ が $q$ を含意しないときにもこれは真である．我々がいま注目している原理のように，いかなる仮設もなしに単に $q$ を主張するということはできないのである．この原理を記号的に表すことはできない．一つには，$p$ が変項であるようないかなる記号体系においても，$p$ が真であるという**事実**ではなく，その**仮設**しか得られないためである[*7]．

上記の原理は，**命題**から**命題**を演繹する必要があるごとに使用される．しかし本書における主張のきわめて多くは命題関数の主張であり，すなわち不定の変項を含んでいる．命題関数の主張は命題の主張とは異なる原始概念であるから，$*1{\cdot}1$ とは異なる原始命題が，とはいえそれとよく似たものが，必要となるわけだが，これによって命題関数「$\psi x$」の主張を二つの命題関数「$\phi x$」および「$\phi x \supset \psi x$」から演繹できればよい．この原始命題は以下のようになる．

$*1{\cdot}11.$　$x$ を真の変項として $\phi x$ を主張でき，また $x$ を真の変項として $\phi x \supset \psi x$ を主張できるとき，$x$ を真の変項として $\psi x$ を主張できる．　Pp

この原理は複数変項の関数についても同様に仮定される．

上記の原始命題の重要性は，部分的には，記号認識を要する型の理論から従う結果を，記号体系によって表現しているという事実から来るものである．**命題関数**による二つの主張「$\vdash .\, \phi x$」と「$\vdash .\, \phi x \supset \psi x$」があるとしよう．すると $\phi x$ 中の「$x$」は，代入項として関数「$\phi x$」を有意味たらしめるものに他ならない．同様に「$\phi x \supset \psi x$」において，$x$ は「$\phi x \supset \psi x$」を有意味たらしめるものに他ならない．「$\phi x \supset \psi x$」を有意味たらしめる $x$ が「$\phi x$」を有意味たらしめるそれと同じであるかどうかは，いくつかの公理を除いて分からない．原始命題 $*1{\cdot}11$ は，それを保証することで**命題関数**「$\phi x$」および「$\phi x \supset \psi x$」を主張すれば命題関数「$\psi x$」をも主張できるようになるわけだが，これによって，型の理論から従う重要な原理，つまり，もしある何らかの代入項 $a$ が存在して「$\phi a$」および「$\psi a$」を有意味たらしめるとき，「$\phi x$」を有意味たらしめる代入項の範囲は「$\psi x$」を有意味たらしめる代入項の範囲と同じであるという原理における部分的な記号認識が，演繹を実際に行う上で最も有用な形で保証されるのである．命題関数「$\phi x \supset \psi x$」を主張できるなら，「$\phi a \supset \psi a$」を有意味たらしめる代入項 $a$ が必ず存在し，それゆえそ

[*5] 文字「Df」が後続しない等号は，後で定義されるように異なる意味を持つ．
[*6] 文字「Pp」 は，ペアノと同様「原始命題」の略である．
[*7] この原理に関するさらなる注意については *Principles of Mathematics*, §38 を参照．

れが「$\phi a$」および「$\psi a$」を有意味たらしめるのは明白である．よって，我々の原理から，「$\phi x$」を有意味たらしめる $x$ の値は「$\psi x$」のそれと同じ，すなわち $\phi\hat{x}$（cf. p. ??）が取りうる代入項の型は $\psi\hat{x}$ のそれと同じになる．原始命題 $*1{\cdot}11$ はこの事実の実用上重要な結果を述べているので，「型の同一視の公理」（axiom of identification of type）と呼ばれる．

ある代入項 $a$ が存在して $\phi a$ と $\psi a$ を有意味たらしめるならば，$\psi x$ が有意味であるとき必ず $\phi x$ も有意味であってその逆も成り立つ，という原理からのもう一つの結論は，「真の変項の同一視の公理」（axiom of identification of real variables）として与えられ，$*1{\cdot}72$ で導入されることとなる．

上記の命題 $*1{\cdot}11$ は，ある主張命題から別の主張命題を導くような推論一切に対して用いられる．その使用法を，$*2{\cdot}06$ の証明でこの命題が始めて用いられる過程をこまごまと説明することで解説してみよう．当の命題は

$$「\vdash :. \, p \supset q \,.\supset : q \supset r \,.\supset .\, p \supset r」$$

である．命題

$$\vdash :. \, q \supset r \,.\supset : p \supset q \,.\supset .\, p \supset r$$

は $*2{\cdot}05$ で既に証明されている．$*2{\cdot}04$，つまり

$$\vdash :. \, p \,.\supset .\, q \supset r : \supset : q \,.\supset .\, p \supset r$$

を用いることで $*2{\cdot}06$ が $*2{\cdot}05$ から導かれるのは明らかである．この命題で $p$ を $q \supset r$ に，$q$ を $p \supset q$ に，$r$ を $p \supset r$ に置換すれば，$*2{\cdot}04$ から直ちに命題

$$\vdash :: q \supset r \,.\supset : p \supset q \,.\supset .\, p \supset r :. \supset :. \, p \supset q \,.\supset : q \supset r \,.\supset .\, p \supset r \tag{1}$$

が得られ，その仮設は $*2{\cdot}05$ で主張されている．従って原始命題 $*1{\cdot}11$ によって結論を主張できるのである．

$*1{\cdot}2.$　$\vdash : p \vee p \,.\supset .\, p$　Pp

この命題は「$p$ が真であるか $p$ が真であれば，$p$ は真である」ということを述べている．これを「トートロジー原理」（principle of tautology）と呼び，略称「Taut」によって引用する．参照の便宜上，さらにいくつかのより重要な命題にも名前を付けると便利である．命題は原則その番号で参照する．

$*1{\cdot}3.$　$\vdash : q \,.\supset .\, p \vee q$　Pp

この原理は「$q$ が真であれば，『$p$ または $q$』は真である」ということを述べている．従って，例えば $q$ が「今日は水曜日である」，$p$ が「今日は火曜日である」であれば，この原理が述べるのは「もし今日が水曜日であれば，今日は火曜日か水曜日である」となる．命題が真ならば任意の分岐を追加しても偽にならない，ということをこの原理は述べているので，これを「追加原理」（principle of addition）と呼ぶ．この原理は「Add」として参照される．

$*1{\cdot}4.$　$\vdash : p \vee q \,.\supset .\, q \vee p$　Pp

この原理は「$p$ または $q$」が「$q$ または $p$」を含意するということを述べている．これは命題の論理和に関する交換則を述べており，「交換原理」（principle of permutation）と呼ばれる．これは「Perm」として参照される．

$*1{\cdot}5.$　$\vdash : p \vee (q \vee r) \,.\supset .\, q \vee (p \vee r)$　Pp

この原理は「$p$ が真であるか『$q$ または $p$』が真であれば，$q$ が真であるか『$p$ または $q$』が真である」ということを述べている．これは論理和に関する結合法則を形成しており，「結合原理」（associative principle）と呼ばれる．これは「Assoc」として参照される．命題

$$p \vee (q \vee r) \,.\supset .\, (p \vee q) \vee r$$

の方が結合法則としては自然な形だが，演繹能力が劣り，それゆえ原始命題としては採用されない．

$*1{\cdot}6.\quad \vdash :. \, q \supset r \,.\supset : p \lor q \,.\supset .\, p \lor r \quad \mathrm{Pp}$

この原理は「$q$ が $r$ を含意するならば，『$p$ または $q$』は『$p$ または $r$』を含意する」ということを述べている．言い換えれば，含意において仮定と結論に分岐を追加しても，その含意は真であり続けるのである．この原理は「総和原理」（principle of summation）と呼ばれ，「Sum」として参照される．

$*1{\cdot}7.$　$p$ が要素的命題であれば，$\sim p$ も要素的命題である．　Pp

$*1{\cdot}71.$　$p$ と $q$ が要素的命題であれば，$p \lor q$ も要素的命題である．　Pp

$*1{\cdot}72.$　$\phi p$ と $\psi p$ が代入項として要素的命題を取るような要素的命題関数であれば，$\phi p \lor \psi p$ も要素的命題関数である．　Pp

この公理は二変項以上の関数にも適用される．これを「真の変項の同一視の公理」と呼ぶ．$\phi$ と $\psi$ が異なる型の代入項をとる関数のとき「$\phi p \lor \psi p$」なる関数は存在しないことが分かる．なぜなら $\phi$ と $\psi$ が有意味でありながら同じ代入項を持つということは起こりえないからである．上記の公理のより一般的な形は $*9$ で与えることとする．

上記の公理 $*1{\cdot}7{\cdot}71{\cdot}72$ の使用は原則として暗黙に行われる．序論で説明された型の理論が関わり始めるのはこれらと $*9$ の公理においてのみであり，これらの公理を正当化する論理学的見解は，型理論を運用する後続の論証をも正当化するものなのである．

以上が要素的命題に適用される演繹論に必要な原始命題の一覧である．