25.EPR佯谬

考虑一个π^0介子，现在分裂为正电子e^+和负电子e^-，那么由于π^0介子是无自旋的，两电子自旋之和也应满足为0，即一个向上一个向下自旋。

此时我们如何写这正电子负电子的系统的波函数呢？一种表示是这样的，纯态复合态纠缠态写法：

$$|\alpha\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle_1|-\rangle_2-|-\rangle_1|+\rangle_2)$$

即系统一半的概率是正电子向上负电子向下，另一半概率倒过来，而整个波函数的采用减号的形式可以保证测量总自旋为0

也有另一种表示，表示为两个直积态的混态,这种表示是爱因斯坦的想法，后面会说

$$|\alpha\rangle=50\%|+\rangle_1|-\rangle_2+50\%|-\rangle_1|+\rangle_2$$

但是至此我们还暂时不知道这里的两种想法哪种是对的？还是说都是对的？应该不可能都是对的，因为一个介子的塌缩，结果怎么会既可能作为纠缠态，又有可能作为混合态呢？以及就算能，那么这两种的分配比是如何确定？如果说不能，那么哪个不成立，违反了什么而不成立？

我们先来看纠缠态的写法的自旋平均值的计算，$\langle S_z(1)\rangle$：

$$\begin{aligned}\langle S_z(1)\rangle&=\frac{1}{\sqrt{2}}(\langle-|_2\langle+|_1-\langle+|_2\langle-|_1)(S_z\otimes I)\frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle_1|-\rangle_2-|-\rangle_1|+\rangle_2)\\&=\frac{1}{4}(\langle-|_2\langle+|_1-\langle+|_2\langle-|_1)(|+\rangle_1|-\rangle_2+|-\rangle_1|+\rangle_2)\\&=\frac{1}{4}(1-1)\\&=0\end{aligned}$$

这里的计算没啥好说的，把泡利矩阵作用到$|\rangle_2$上面注意变号就行，然后利用正交归一性之，算出结果是0，如果用约化密度做，结果也是一样的

下面我们计算$\langle S_z(1)S_z(2)\rangle$：

$$\langle S_z(1)S_z(2)\rangle=\frac{1}{2}(\frac{\hbar}{2}\cdot(-\frac{\hbar}{2})+\frac{\hbar}{2}\cdot(-\frac{\hbar}{2}))=-\frac{\hbar^2}{4}$$

具体的过程跟上面的类似，只不过此时两个空间的态都要分别被泡利矩阵作用，注意一下符号，最终就得到了计算结果，结果是符合直觉，因为自旋一个向上，另一个必向下，这种情况的乘积正是$-\frac{\hbar^2}{4}$。可以做实验，在π^0左右两侧各放置SG装置，各自记录粒子路径和结果，合并统计即可。

同理可以改变SG装置，测量如下量

$$\langle S_{\vec{n}}(1)S_{\vec{n}'}(2)\rangle = \frac{-\hbar^2}{4}\vec{n}\cdot\vec{n}'$$

也就是期望值是由夹角决定的，这是实验可以做出来的，当然理论也不难想，因为自旋可以被表示为自旋矢量，这就回到了前几节的内容了。

现在问题出现在量子纠缠与相对论的矛盾上，当第一个粒子的结果确定下来$\sigma_z(1)=+1$，则发生塌缩$|\alpha\rangle \to |+\rangle_1|-\rangle_2 \to \sigma_z(2)=-1$；$\sigma_z(1)=-1$，发生$|\alpha\rangle \to |-\rangle_1|+\rangle_2 \to \sigma_z(2)=+1$

上述讨论表明，对于测量一个粒子，另外一个粒子的态也被确定下来，这就是量子关联现象，或者说量子纠缠。但是爱因斯坦认为这里的现象是存在因果性的，因为信息在相对论中有局域性，这里可能发生的情况是，两个地方的SG装置测量有时间差，在这个时间差内粒子被测量的信息传播到了另外一个粒子那里，因此其实不是量子纠缠，而是不违背相对论的信息上的传播。但是，要排除这种测量触发因果性的说法，其实也不难，即如果A比B早测了Δt，那么只要控制(\Delta t 尽可能小，同时通过设置SG装置两地的距离尽可能大以满足d\gg c\Delta t$，使得其在相对论中是“类空的”，如果此时还有纠缠现象，那么这违背了相对论，于是这种量子纠缠现象超出了相对论的范畴，这就有了EPR佯谬。

26.隐变量与贝尔不等式

量子纠缠的说法是现在普遍接受的，这一部分我们放到后面讨论。现在我们先回到之前提过的第二种体系的波函数写法，即混合态，这种态是处在相对论框架的，其解释是:
介子π^0有隐变量λ，这个变量在粒子产生的一刻就会决定两电子的自旋，即50%上下$+50\%$下上的自旋态全部由λ控制，用1标记第一个粒子，2标记第二个粒子，那么其影响可以用如下式子表示

$$S_z(1,\lambda)=\pm 1=-S_z(2,\lambda)$$

即λ决定正负自旋，并且当λ使得粒子1自旋是正时，同样的λ使得粒子2自旋是负的。这种说法尽管并不“美观”，因为其没有任何关于λ的具体形式的讨论，也就是这是纯随机的，但其似乎确实可以在相对论的框架内解决“量子纠缠”，因为这种观点下，纠缠是不存在的，粒子诞生开始，他们的状态早已被确定好，自然就不需要信息进行光速传播了，也不会发生类空。

那么上面的两种观点究竟哪个是对的呢？后来这件事情被贝尔解决，贝尔证明了后者爱因斯坦的隐变量说法是有误的。

记自旋算符乘积的期望值的符号是

$$P(\vec{n},\vec{n}')=\langle S_{\vec{n}}(1)S_{\vec{n}'}(2)\rangle$$

由于隐变量是一个自变量，有两个问题，其一λ取什么值导致粒子1是正自旋的，或者相反，这是不知道的，其二，可能就是每一个λ出现的可能性是不均等的，因此这带来了上面式子分析的一定麻烦，然而贝尔提出，把λ值出现的概率用ρ表示即可，具体的形式不重要，那么此时上面的式子具体可以写为

$$P(\vec{n}_1, \vec{n}_2) = \int \rho(\lambda) S_{\vec{n}_1}(1, \lambda) S_{\vec{n}_2}(2, \lambda) d\lambda$$

即每个λ出现的概率乘上对应的粒子自旋纠缠的测量结果(尽管λ对粒子的具体影响不知道，但是写作上面的形式也不需要知道具体形式)，随后利用这个定义，使用基本的概率论知识，可以证明下面的不等式成立

$$|P(\vec{n}_1, \vec{n}_2) - P(\vec{n}_1, \vec{n}_3)| \leq 1 + P(\vec{n}_2, \vec{n}_3)$$

即假设现在有3个装置。现在只需进行实验测量，把$\vec{n}_1$放在x方向，$\vec{n}_2$放在y方向，$\vec{n}_3$放在$x+y$方向。然后测量就可以了。或者不测量也行，因为之前我们分析过其结果，两个装置的测量结果是矢量的点乘，也就是

$$\langle S_{\vec{n}}(1) S_{\vec{n}'}(2) \rangle = \frac{-\hbar^2}{4} \vec{n} \cdot \vec{n}'$$

利用这结果，我们有$P(\vec{n}_1, \vec{n}_2) = 0$，$P(\vec{n}_1, \vec{n}_3) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$，$P(\vec{n}_2, \vec{n}_3) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$
也就是$|0 - (-\frac{1}{\sqrt{2}})| \leq 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$，这当然是不成立的。
说明贝尔不等式被破坏了，而贝尔不等式的来源其实没有引入新的假设，是直接从爱因斯坦的隐变量说法来的，那么爱因斯坦的隐变量λ说法自然就被破坏了。

因此量子纠缠的说法胜出。但其实也是可以解释量子纠缠不违背相对论的，只要解释量子关联不传递信息就行。
因为对量子进行测量的塌缩是随机的，那么任何的预先定义都无法在双方不交换额外信息的条件下产生信息。比如，事先约定，甲方连续出现三个向上后接四个向下代表“字母A”，可是测量当然是做不到控制结果的，自然什么时候出现“字母A”不可能，因此任何事先约定的方式，无法成为信息交流的方式，此时量子纠缠没带来信息。而如果要测量结果完毕后，根据拿到的数据，以及想要传递的信息，编码一个如何阅读上下信息的密码本，随后把这个解码方式(密码本)发给对方，对方尽管不需要拿到我方的结果，而是只用拿已有的测量结果，进行解码，提取信息，似乎这确实成功实现了信息的交换，但是这没有任何意义，因为两方人已经碰面交换密码本了，此时信息自然不属于类空的范畴。

不过量子加密倒可能是可行的，也有相关的研究。因为量子比特只有接收方和发射放持有，那么密码本随便流传是没关系的，因此可以通过这种方式把中介传递消息的方式换为密码本传递，而外方不持有量子比特，就算劫持了密码本，那也自然是无法破译的。

贝尔不等式的数学证明

这个直接问AI就完事了，毕竟是老东西了，大概率在AI的训练库里。

根据$P(\vec{n}_1,\vec{n}_2)=\int\rho(\lambda)S_{\vec{n}_1}(1,\lambda)S_{\vec{n}_2}(2,\lambda)d\lambda$，$P(\vec{n}_1,\vec{n}_3)=\int\rho(\lambda)S_{\vec{n}_1}(1,\lambda)S_{\vec{n}_3}(2,\lambda)d\lambda$，则

$$P(\vec{n}_1,\vec{n}_2)-P(\vec{n}_1,\vec{n}_3)=\int\rho(\lambda)S_{\vec{n}_1}(1,\lambda)\left(S_{\vec{n}_2}(2,\lambda)-S_{\vec{n}_3}(2,\lambda)\right)d\lambda$$

因为$S_{\vec{n}_i}(j,\lambda)=\pm1$，所以$|S_{\vec{n}_2}(2,\lambda)-S_{\vec{n}_3}(2,\lambda)|\leq 2$。

由绝对值不等式有

$$\begin{aligned}&|\int\rho(\lambda)S_{\vec{n}_1}(1,\lambda)\left(S_{\vec{n}_2}(2,\lambda)-S_{\vec{n}_3}(2,\lambda)\right)d\lambda|\\ &\leq\int\rho(\lambda)|S_{\vec{n}_1}(1,\lambda)\left(S_{\vec{n}_2}(2,\lambda)-S_{\vec{n}_3}(2,\lambda)\right)|d\lambda\end{aligned}$$

又因为$|S_{\vec{n}_1}(1,\lambda)|=1$，$|S_{\vec{n}_2}(2,\lambda)-S_{\vec{n}_3}(2,\lambda)|\leq 2$，可得$|P(\vec{n}_1,\vec{n}_2)-P(\vec{n}_1,\vec{n}_3)|\leq\int\rho(\lambda)\times 2d\lambda=2$

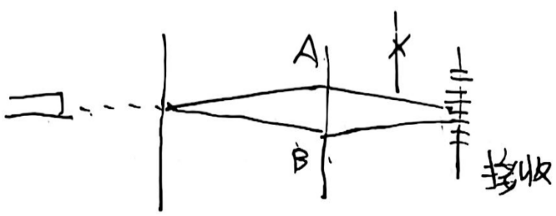
考虑到$1+P(\vec{n}_2,\vec{n}_3)=\int\rho(\lambda)\left(1+S_{\vec{n}_2}(2,\lambda)S_{\vec{n}_3}(2,\lambda)\right)d\lambda$，而$\left(1+S_{\vec{n}_2}(2,\lambda)S_{\vec{n}_3}(2,\lambda)\right)\geq 0$。

注意到$S_{\vec{n}_i}(j,\lambda)^2=1$，对$|P(\vec{n}_1,\vec{n}_2)-P(\vec{n}_1,\vec{n}_3)|$进行放缩：

$$\begin{aligned}|P(\vec{n}_1,\vec{n}_2)-P(\vec{n}_1,\vec{n}_3)|&=|\int\rho(\lambda)S_{\vec{n}_1}(1,\lambda)\left(S_{\vec{n}_2}(2,\lambda)-S_{\vec{n}_3}(2,\lambda)\right)d\lambda|\\&=|\int\rho(\lambda)S_{\vec{n}_1}(1,\lambda)S_{\vec{n}_2}(2,\lambda)\left(1-S_{\vec{n}_2}(2,\lambda)S_{\vec{n}_3}(2,\lambda)\right)d\lambda|\\&\leq\int\rho(\lambda)|1-S_{\vec{n}_2}(2,\lambda)S_{\vec{n}_3}(2,\lambda)|d\lambda\end{aligned}$$

又因为$|1-S_{\vec{n}_2}(2,\lambda)S_{\vec{n}_3}(2,\lambda)|=1+S_{\vec{n}_2}(2,\lambda)S_{\vec{n}_3}(2,\lambda)$（因为$S_{\vec{n}_i}(j,\lambda)=\pm1$），所以$|P(\vec{n}_1,\vec{n}_2)-P(\vec{n}_1,\vec{n}_3)|\leq\int\rho(\lambda)\left(1+S_{\vec{n}_2}(2,\lambda)S_{\vec{n}_3}(2,\lambda)\right)d\lambda=1+P(\vec{n}_2,\vec{n}_3)$证毕

27.路径积分的概念



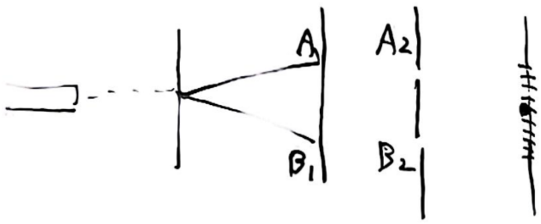
如图，考虑一束波分开再合并，路径差将会导致相位差。对于A、B路径，相位差表达为

$$\Psi_A(x)=\Psi_B(x)e^{i\varphi}$$

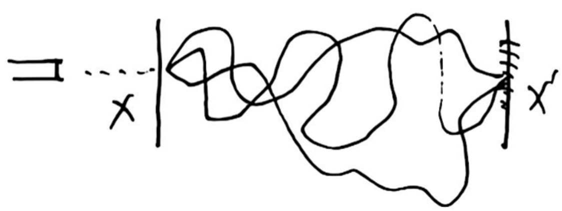
对应的模方是：

$$|\Psi_A(x)+\Psi_B(x)|^2=|\Psi_A(x)|^2|1+e^{i\varphi}|^2=|\Psi_A(x)|^2(2+2\cos\varphi)$$

也就是根据相位不同，可能发生相干可能发生相消，这是大家都很熟悉的内容。倘若多加几个板子，变为下面的的样子



那么现在路径有多种选择，也就是AA，AB，BA，BB一共四种选择。继续假设板子无限，孔也不止有A、B两个孔，最终一切路径都是允许的，我们得到。



那么这种情况下要表示模方，就要对所有的路径求和再取模方

$$\left|\sum_{Path}\Psi_{Path}(x',x)\right|^2$$

这个形式就是路径积分，这也是化学里路径积分的基础概念，只是化学里跑的快很多，很多假设和娓娓道来都省去了。

下面我们考虑经典力学里自由落体的球，其运动方程显然：

$$x(t)=x(0)+\frac{1}{2}gt^2$$

如果用波函数来描述的话，暂时我们没有波函数的解，我们只有演化方程

$$i\hbar\frac{\partial\Psi(x,t)}{\partial t}=(\frac{p^2}{2m}-mgx)\Psi$$

该如何解决体系的演化呢？我们采用时间演化算符的形式：

$$|\Psi(t')\rangle=U(t',t)|\Psi(t)\rangle \quad ，其中U(t',t)=e^{-iH\cdot\frac{(t'-t)}{\hbar}}$$

采用坐标表象

$$\Psi(x',t)=\int\langle x'|U(t',t)|x\rangle\langle x|\Psi(t)\rangle dx=\int\langle x'|U(t',t)|x\rangle\Psi(x,t)dx$$

其中额外的，我们定义$\langle x'|U(t',t)|x\rangle$是传播子，代表$t$时刻波函数$x$位置跑到$t'$时刻新波函数$x'$位置的演化算符，其作用于旧波函数然后对坐标空间积分，就能得到新波函数的x'点的取值。

如果设初始时刻波函数只是一个点，即狄拉克函数的形式$\Psi(x,t)=\delta(x-x_0)$，并且惯例上我们记传播子为$U(x',t';x,t)$,则此时体系的演化是

$$\Psi(x',t')=\int U(x',t';x,t)\delta(x-x_0)dx=U(x',t';x_0,t)$$

上面这个解的形式，其实也是格林函数的形式。
即使对于非单点的波函数，也就是复杂的波函数$\Psi(x,t)\neq\delta(x-x_0)$，其总看作是其对无数点$\delta$的叠加，也就是看作无数的狄拉克函数的求和，那么利用上述格林函数的形式，任意复杂的波函数都可以数值求解。这确实像是格林函数解方程的思想。

但至此我们还没拿到传播子的计算形式，因此下面我们考虑传播子的具体计算，首先之前提到的无数条路径，其可以写作积分的形式，积分要对所有路径，路径是无穷的，也就是全空间进行积分

$$U(t',t)=\underbrace{\int dp\int dx}_{\sum \mathrm{Path}}\, e^{\frac{i}{\hbar}S}$$

其中相位因子的定义是

$$S\equiv\int_t^{t'}dt\ \mathcal{L}(x,\dot{x},p)=\int dt[P(t)\dot{X}(t)-H(X(t),P(t))]$$

即传播子里的每条路径都带一个相位，这个相位由作用量$\mathcal{L}$决定，只不过经典路径只走一条，必定是作用量最小的路径，而量子力学要对所有路径考虑。 而这里的相位因子为什么长这样呢，这个其实是哈密顿形式的作用量，因为我们是从理论力学类比倒量子力学的，这是一种自然的推广。读者如果不满意的话也没关系，因为后面我们会证明这个公式。

下面我们开始讨论传播子计算的预备内容：

$$\begin{aligned}U(t',t)&=e^{-\frac{iH}{\hbar}\cdot\frac{t'-t}{N}\cdot N}\\&=\prod_{k=1}^{N}e^{-\frac{iH\Delta t}{\hbar}}\end{aligned}$$

上面把传播子的时间差均匀划分成了N份，每一份都是$\Delta t = \frac{t'-t}{N}$，然后指数写成连乘的形式。然后由于这里面算符只有哈密顿算符，因此尽管指数算符操作起来很危险，但是现在是安全的，我们再在这些连乘号之间插入单位算符。

$$\langle x'|U(t',t)|x\rangle = \int \langle x'|e^{-\frac{iH\Delta t}{\hbar}}|x_N\rangle\langle x_N|\cdots e^{-\frac{iH\Delta t}{\hbar}}|x\rangle$$

其中积分要对$x_N,\cdots,x_1$进行，因为插入了无数单位算符。
而这里每一小块$\langle x_k|e^{-\frac{iH(t_k-t_{k-1})}{\hbar N}}|x_{k-1}\rangle$都是之前的传播子，只不过时间间隔更小了，这是有利近似计算的，后面会提到。
另一方面，这种形式插入了的中间坐标矢量，对坐标空间进行了全积分，这意味着连接起点和终点的“路径”要进行多次全空间积分，不过好在大部分权重低，仅有少部分权重高，在经典力学里显然只有一条作用量最小的路径，量子力学里，有时候也只需要考虑主要路径即可。而后续进一步的计算，我们放到下一节