12.时间演化波函数的关系

对于以下变换：

$$\begin{cases}\vec{A}\to\vec{A}'=\vec{A}+\nabla A\\ \phi\to\phi'=\phi-\frac{\partial\Lambda}{\partial t}\\ \psi\to\psi'=e^{-i\frac{q\Lambda}{\hbar c}}\psi\end{cases}$$

我们熟知，改变电势零点，不会改变变量$\vec{E}$，但是会带来总能量改变：

$$V=q\phi\quad\to\quad V'=q\phi+V_0=q\phi'$$

观察规范变换的标势变化，可以为$\Lambda=-\frac{cV_0}{q}t$，即规范变换涉及势能零点的变换，或更复杂的时候$\Lambda=\int-\frac{cV_0(t)}{q}dt$。

下面考察能量本征态，对于哈密顿算符地变化：$H\to H'=H+V_0$

有$H|E\rangle=E|E\rangle$和$H'|E\rangle=(E+V_0)|E\rangle$

则$t=0$时，$|a'(0)\rangle=g|a\rangle=|a(0)\rangle$

$t>0$时，$|a'(t)\rangle=g|a(t)\rangle=e^{-\frac{iV_0t}{\hbar}}|a(t)\rangle=e^{-\frac{iV_0t}{\hbar}}(e^{-\frac{iHt}{\hbar}}|a(0)\rangle)$

那么将波函数都以零时刻的能量本征态展开：

$$|a'(0)\rangle=\sum_E c_E|E\rangle\quad,|a(t)\rangle=\sum_E c_Ee^{-\frac{iHt}{\hbar}}|E\rangle=\sum_E c_Ee^{-\frac{iEt}{\hbar}}|E\rangle$$

$$|a'(t)\rangle=\sum_E c_Ee^{-\frac{i(V_0+E)t}{\hbar}}|E\rangle$$

并且其中$\frac{E}{\hbar}=\omega$一般是实验测得的频率，但是一般我们只能做到测量相对频率，而无法测到绝对频率，下面我们证明测量期望值仅与相对能量有关，而与零点选取无关。

考察期望值：

$$\begin{aligned}\langle Q\rangle=\langle a'(t)|Q|a'(t)\rangle&=\sum_{E,E'}c^\star_{E'}c_Ee^{\frac{i(V_0+E')t}{\hbar}}e^{-\frac{i(V_0+E)t}{\hbar}}\langle E'|Q|E\rangle\\&=\sum_{E'E'}c^\star_{E'}c_Ee^{\frac{-i(E-E')t}{\hbar}}\langle E'|Q|E\rangle\end{aligned}$$

即与V_0无关，只有相对能量$E=E'$才是重要的。因此，规范变换不影响测量结果。如果势能零点的随时间演化形式并不是线性的，即要进行积分操作，$\Lambda=\int-\frac{cV_0(t)}{q}dt$，尽管过程复杂点，但是上述的过程完全不会变化，最终结果不变。而能量本身的绝对值并没有意义，只是一个零点的选择问题，因此这就回答了之前第十节里我们提到的，规范变换下哈密顿算符期望值似乎发生了变换，意味着能量差了一个时间偏导的大小，对此，我们这一节的答案是，确实会相差，并且这个相差源自于标势零点的变化，不会对其他测量产生任何影响。

因此，我们稍微外推一下，可以认为，所有的对势场零点进行的变换都完全不影响结果吗？答案是有一些变换，尽管经典力学里，不会影响结果，但是在量子力学里，会带来新的影响。以及有一些外界条件，经典力学里不影响粒子，但是在量子力学里确实会影响波函数。

13. 法拉第笼思想实验与Aharonov-Bohn效应

法拉第笼实验：

这里缺一张图

如图所示，粒子先被分开为两束，经过法拉第笼，最后再汇总。
当不通电时，粒子的路程是一样的，因此相位当然相同，最后在面板上发生相干效应。
但是通电时，由于法拉第笼的屏蔽效应，我们知道笼内部是不存在电场的，因此如果这里的粒子是经典的电子，显然是不受任何影响的。但是法拉第笼的确会改变内部的电势。在图上，显然上半侧为电势正区域，下半为电势负区域。又考虑到粒子本身不受力，那么动量是不变的，因此路程还是一样，也就是走的路径花的时间带来的相位是一致的，现在问题来到电势带来的相位，是不一致的。

考虑波函数的含时演化

$$|a'(t)\rangle=\sum_E c_E e^{-\frac{i(V_0+E)t}{\hbar}}|E\rangle$$

粒子的能量部分E的确相同，但是势能V_1和V_2是一正一负的，那么在波函数里，这两部分随时间的演化带来了相位差$\varphi=\frac{(V_1-V_2)}{\pi}\delta t$
调节电源电压使V_1-V_2变化，总的走完全程所用时间δt不变，但是可以改变φ的大小控制相位差，这意味着电子可以被控制发生相干衍射还是相消衍射。

可正如之前所说，在经典力学里，显然电子不受任何影响，但是在这里量子力学里，确实是有影响的，一种合理的解释是这样的。经典粒子有确定位置，只知道当前所在的位置的信息，不知道其他地方的信息，因此对整个势场进行操作，是无效果的。但是量子力学可以周围的空间，那么对势场的操作，也就是上面的势能零点的变化一个正一个负V_1-V_2，被感知到了，因此作用到了相位上。

当然了，有的同学也发现了，这个例子并不是规范变换，而是改变了一些体系信息的，但规不规范其实并不重要，因为我们举这个例子的原因是，考察经典力学和量子力学的进一步区别。我们还有一个新的例子，Aharonov-Bohn(AB)效应。

考虑正在受到束缚正在圆环上进行圆周运动的粒子，其经典哈密顿量显然是

$$H=\frac{L_z^2}{2\mu R^2}=\frac{P_\varphi^2}{2\mu}$$

采用柱坐标，我们直接进行量子化，那么角动量算符可以写为$\hat{L_z}=-i\hbar\frac{\partial}{\partial\varphi}$，那么本征态函数也可以很容易找到，这都是之前学过的内容，我们直接给答案

$$H\left[\frac{e^{im\varphi}}{\sqrt{2\pi}}\right]=\frac{(m\hbar)^2}{2\mu R^2}\left[\frac{e^{im\varphi}}{\sqrt{2\pi}}\right]\quad m=0,\pm1\cdots$$

这是之前学过的结论。
然后我们简单说说m不同取值时的物理图像，$m=0$，显然代入回波函数，这是一个在圆环上均匀分布的图像。$m=\pm1$，这是一个周期震荡的图像，一个顺时针一个逆时针震荡。当m绝对值变大时也是类似地周期震荡，只是震荡频率变大了。

下面我们考虑在原点处外加一束均匀磁场，其磁通量是$\Phi=\pi a^2B$并且满足$a\ll R$（磁通管半径远小于圆环半径）
经典力学中显然，加不加磁场对粒子都一样，因为电荷所处在的地方$r=R$根本就不存在磁场，磁场仅存在于原点周围半径为a的一点点地方。
由于磁通量不适合量子化$\Phi=\pi a^2B$，我们可以将其改写为矢势的形式，由经典电动力学有

$$\vec{A}=\begin{cases}r\le a & \frac{B_0r}{2}\hat{e_\phi}\\ r>a & \frac{B_0a^2}{2r}\hat{e_\phi}\end{cases}$$

这里有两种推导出矢势的方法，因为不是很重要，但是对笔者而言没怎么做过电动力学的题目，因此推导我们放在附录。

下面关注$r=R$时有$|\vec{A}|=\frac{a^2B}{2R}$
则

$$H=\frac{1}{2\mu}\left(P_\varphi-\frac{qA_\varphi}{c}\right)^2=\frac{-\hbar^2}{2\mu R}\left(\frac{\partial}{\partial\varphi}-\frac{i\Phi}{\hbar c/q}\right)^2$$

上面仅是代入了柱坐标系的动量算符的具体形式，然后提取了个因子。要解本征方程$H\psi = E\psi$，我们可以直接猜解，仍猜$e^{im\varphi}$的形式，发现刚好可以，于是得到

$$\left(\frac{\partial}{\partial\varphi} - \frac{i\Phi}{\hbar c/q}\right)^2 e^{im\varphi} = -\left(m - \frac{\Phi}{\hbar c/q}\right)^2 e^{im\varphi}$$

即本征值$E = \left(m - \frac{q\Phi}{\hbar c}\right)^2 \frac{\hbar^2}{2\mu R^2}$而原来在没有磁场束的时候的能量为$E = \frac{m^2\hbar^2}{2\mu R^2}$
这说明有磁通量时，能量变了，尽管粒子似乎是不受影响，因为经典粒子在磁场外头，肯定不受洛伦兹力，不应该受到影响的。但是在量子力学里，的确发生了。我们进一步看看发生了什么类型的变化
考虑能级的变化，若$\frac{q\Phi}{\hbar c} = \frac{1}{2}$

这里需要一副二次函数的能级图

即对能级的x轴进行了平移，能级分布发生变化，现在最低能级是简并的了。类似地对于更大的磁场，能级的平移更加剧烈。

不过要注意的是，磁场本身是不改变正则动量P，而是只改变机械动量$\left(\frac{\partial}{\partial\varphi} - \frac{i\Phi}{\hbar c}\right)$

一种解微分方程求矢势的方法

考虑磁场B和矢势A之间的关系由以下方程给出：

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

由于磁场是均匀的且沿z轴方向，我们可以假设矢势A也具有某种对称性。在柱坐标系中，矢势A通常只有方位角分量，即A_ϕ

那么代入对应分量的∇算符的偏导，方程是

$$B = \frac{1}{r}\frac{\partial(rA_\phi)}{\partial r}$$

由于磁场B在$r < a$区域内是均匀的，我们可以设B=B_0（常数）。因此，上式变为：

$$B_0 = \frac{1}{r}\frac{\partial(rA_\phi)}{\partial r}$$

解这个微分方程：

$$\frac{\partial(rA_\phi)}{\partial r} = B_0 r$$

积分得：

$$rA_\phi = \frac{B_0 r^2}{2} + C$$

其中C是积分常数。由于在$r = 0$时，A_ϕ应为有限值，故C=0。因此：

$$A_\phi = \frac{B_0 r}{2} \quad \text{对于} \quad r < a$$

在$r > a$的区域，磁场$B = 0$，因此：

$$\frac{\partial (rA_\phi)}{\partial r} = 0$$

这意味着：

$$rA_\phi = \text{常数}$$

设常数为D，则：

$$A_\phi = \frac{D}{r}$$

为了确定D，我们需要在$r = a$处匹配A_ϕ的值。在r=a处，A_ϕ应连续，因此：

$$\frac{B_0 a}{2} = \frac{D}{a}$$

解得：

$$D = \frac{B_0 a^2}{2}$$

因此，矢势A在$r > a$的区域为：

$$A_\phi = \frac{B_0 a^2}{2r}$$

环路积分求矢势的方法

根据斯托克斯定理，矢势A沿闭合路径C的环量等于通过该路径所包围的曲面的磁通量：

$$\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \int_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S} = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \Phi_B$$

其中，Φ_B是通过曲面S的磁通量。

在本题中，磁场B仅在半径为a的区域内存在，且沿z轴方向均匀分布。我们需要计算在r > a的区域内的矢势A。

选择一个半径为r（r > a）的圆形路径C，路径C位于xy平面，中心在原点。由于矢势A在柱坐标系中只有方位角分量A_ϕ，因此环积分可以表示为：

$$\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \int_0^{2\pi} A_\phi(r)\, r\, d\phi = 2\pi r A_\phi(r)$$

根据斯托克斯定理，这个环量等于通过路径C所包围的曲面的磁通量。由于磁场B仅在r < a的区域存在，磁通量Φ_B为：

$$\Phi_B = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = B_0 \cdot \pi a^2$$

因此，我们有：

$$2\pi r A_\phi(r) = B_0 \pi a^2$$

解这个方程，得到矢势A的方位角分量：

$$A_\phi(r) = \frac{B_0 a^2}{2r}$$

选择一个半径为r（$r < a$）的圆形路径C，上述思路没有变化，最终的答案很容易发现r跑到了分子上，总之，我们也通过这种方法得到了答案。