14. 一般的Aharonov-Bohn效应

> 此处一张螺线管路径示意图

如图，电子的运动路径附近有螺线管，但本身电子的路径被限制并不通过螺线管内部，那么对于上下两条路径的波函数的演化，利用矢势$\vec{A}$，我们虽然可以如下直接列出薛定谔方程

$$i\hbar\frac{\partial\psi(\vec{x},t)}{\partial t}=H\psi=\frac{(\vec{P}-\frac{q\vec{A}}{c})^2}{2\mu}\psi(\vec{x},t)$$

但是直接解这个方程不现实，可是我们又想要得到添加磁场后含时演化的结果，因此我们换个思路解决这个方程。

令$\vec{A}=0$时原方程的解为$\psi'(\vec{x},t)$，此时相当于没有外磁场，那么添加完磁场后方程的解相当于进行了一个规范变换$\psi(\vec{x},t)=g\psi'(\vec{x},t)=e^{\frac{iq\Lambda}{\hbar c}}\psi'(\vec{x},t)$

其中变换系数Λ自然是需要满足关系式$\vec{A}=0+\nabla\Lambda$的，那么我们对于给定的磁场，找到矢势，在上一节已经有结论了，现在问题是给定了矢势$\vec{A}$，我们该如何找到对应的变换系数Λ?
这里教师直接给出了答案，总之可以找到$\Lambda=\int_0^{\vec{x}}\vec{A}\cdot d\vec{l}$，这个形式是可以证明$\nabla\Lambda(\vec{x})=\vec{A}(\vec{x})$的，因为该积分由于不涉及旋度，故与路径无关，那么求偏导相当于取积分变量的值，按照如下的数学原理

- 偏导数的求导法则及积分上限函数的求导法则（若$F(x)=\int_a^x f(t)dt$，则$F'(x)=f(x)$）

那么直接求导完就发现$\nabla\Lambda(\vec{x})=\vec{A}(\vec{x})$，因此这就是我我们要的答案，我们就找到了这个函数。

于是这部分找变换系数结束，下面要把薛定谔方程右边的机械动量偏导平方展开，我们不妨先考虑一阶正则动量偏导部分：

$$\nabla\psi(\vec{x},t)=\nabla(e^{\frac{iq\Lambda}{\hbar c}}\psi'(\vec{x},t))=\frac{iq}{\hbar c}\vec{A}\psi(\vec{x},t)+e^{\frac{iq\Lambda}{\hbar c}}\nabla\psi'$$

上述只是简单用了一下前导后不导加后导前不导的链式法则而已，比较轻松，然后我们就会发现，考虑机械动量偏导

$$\vec{\Pi}\psi(\vec{x},t)=e^{\frac{iq\Lambda}{\hbar c}}i\hbar\nabla\psi'(\vec{x},t)$$

上面省略了矢势部分的抵消，因为机械动量表达式里的矢势，刚好会跟上面推导出来的正则动量里矢势

差负号，于是直接抵消，最终只剩下了我们想要的——很简单的结果。这也意味着如果再来一遍机械动量的偏导，很容易验证结果不过是把系数$-i\hbar$再来一次罢了，

$$\vec{\Pi}^2\psi(\vec{x},t) = -\hbar^2 e^{\frac{iq\Lambda}{\hbar c}}\nabla^2\psi'(\vec{x},t)$$

于是这样就考虑完毕了，然后我们考虑薛定谔方程左边时间偏导部分：

$$i\hbar\frac{\partial e^{\frac{iq\Lambda}{\hbar c}}\psi'(\vec{x},t)}{\partial t} = i\hbar e^{\frac{iq\Lambda}{\hbar c}}\frac{\partial\psi'(\vec{x},t)}{\partial t}$$

注意Λ是时间无关的，因此不需要链式法则展开，只保留波函数偏导即可。值得注意的是，尽管Λ涉及各个路径的积分，但是本质上其是一个场，表示电磁场的性质，而场在这里是恒定的不含时，因此也是时间无关的。

由于这个时候我们发现薛定谔方程左右两边，相位因子是相同的，因此是可以直接抵消掉的，于是我们得到了

$$i\hbar\frac{\partial\psi'(\vec{x},t)}{\partial t} = -\hbar^2\nabla^2\psi'(\vec{x},t)$$

这个公式就是新的波函数的演化方程，至此我们的任务已经完成了一半，剩下的问题是我们没有拿到新的波函数的形式。

下面我们考虑对于最终走到电子屏幕中间的波函数，把这部分分为两部分考虑，一部分走上面的路径一部分走下面的部分，那么其可以表示为

$$\begin{aligned}\psi(\vec{x},t) &= \psi_{up}(\vec{x},t) + \psi_{down}(\vec{x},t)\\ &= (e^{\frac{iq\Lambda_u}{\hbar c}} + e^{\frac{iq\Lambda_d}{\hbar c}})\psi'(\vec{x},t)\end{aligned}$$

两个路径在无磁场的时候显然是没有区别的，但是加入磁场后就有了，这里用u和d标记了不同的路径下波函数受到的矢势影响，下面我们考虑一下利用环路积分

$$A_d - A_u = \oint \vec{A}\cdot d\vec{l} = \Phi$$

环路积分的物理意义是很明显的，对环形区域积分，积分值相当于区域内的通量，在这里就是磁通量，而我们的上下两条路径，起点是一样的，终点是一样的，刚好就构成了一个环路，因此利用这个公式，代入我们有

$$\psi(\vec{x},t) = \psi'(\vec{x},t) \cdot e^{\frac{iq\Lambda_u}{\hbar c}} \cdot (1 + e^{\frac{iq}{\hbar c}\Phi})$$

这就得到了有磁场下波函数跟无磁场波函数的联系，二者除了通过一个相位Λ_u进行波动外，还多了一个比较特殊的项，也就是问题来到$\frac{\Phi}{\hbar c/q}$这一项的取值。显然这一项为0的时候是相干，为π的时候则相消

对波函数直接观察形式可能不是很直观，因此可以取模方，可以发现取模方后，上面相位因此当然是抵消的，但是小括号内可无法抵消，这说明波函数的密度确实可以变化的，并且变化被磁通量进行调节。这里方便起见给磁通量补上一个因子π，可以直接从模方表达式看出来$\rho \sim \cos^2[\frac{\pi\Phi}{\hbar c/q}]$

这个强度随磁通量变化的关系，在1960年代已经得到实验的证实，这就是一般的Aharonov-Bohn效应

但是需要注意的是，上述问题：其实只考虑了电子屏幕中心的通量。因为对于不在中心的点上，实际上没有考虑路径相位差，即A_u和A_d两部分不仅是矢势不一样，而还有无磁场时，路径走的距离是不一样的，这带来了路径相位差。如何严格地考虑这一点，这是一个更复杂的问题了。

15. 磁场中圆周运动的粒子与朗道能级

示意图

考虑如图所示，在垂直于纸面的匀强磁场(只在z方向有强度，强度用符号B标记，即$\vec{B} = (0,0,B)$)里有一个粒子在纸内做圆周运动，显然由高中物理有：

$$\frac{e\vec{v} \times \vec{B}}{c} = \frac{\mu v^2}{r}$$

以及可以写出圆周运动的周期，以及角频率

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi\mu c}{eB} \quad \omega_c = \frac{eB}{\mu c}$$

同时也很容易一眼得出粒子的速度表达式：

$$\frac{dx}{dt} = v_x = -v \cdot \sin(\omega_c t)$$

$$\frac{dy}{dt} = v_y = v \cdot \cos(\omega_c t)$$

对速度积分得到坐标表达式：

$$x(t) = x_0 + \frac{v}{\omega_c}\cos(\omega_c t)$$

$$y(t) = y_0 - \frac{v}{\omega_c}\sin(\omega_c t)$$

粒子的加速度表示式为：

$$\mu\frac{dv_x}{dt} = -\mu \cdot v \cdot \omega_c \cdot \cos(\omega_c t) = -\mu\omega_c^2(x - x_0)$$

$$\mu\frac{dv_y}{dt} = -\mu v \cdot \omega_c \cdot \sin(\omega_c t) = -\mu\omega_c^2(y - y_0)$$

上述的第二个等号用了位置公式进行了一次替换，这种形式更直观，因为由此我们一眼就看出来了这个加速度式子，本质上就是简谐运动。

下面我们进入大学物理的范畴，显然经典的哈密顿量是

$$H = \frac{\pi_x^2}{2\mu} + \frac{\pi_y^2}{2\mu} \quad \text{其中}\vec{\pi} = \vec{p} - \frac{e\vec{A}}{c}$$

上述可以直接进行量子化，变为量子力学里的算符，然后我们就可以解薛定谔方程了，但是直接解其实是不现实的，有点困难，因此我们另辟蹊径。我们先对算符进行处理，回忆机械动量的对易关系：

$$[\pi_x, \pi_y] = i\hbar\frac{e(\vec{B})_z}{c}$$

$$[\pi_x, \pi_x] = 0 = [\pi_y, \pi_y]$$

我们发现上面的对易关系，跟$[X, P] = i\hbar$的对易关系非常相似，只差常数，因此定义

$$X \equiv \frac{c}{eB}\pi_x \quad P \equiv \pi_y$$

则现在利用这个定义，改写原本的哈密顿算符，得到

$$H=\frac{1}{2\mu}(\frac{eB}{c})^2X^2+\frac{P^2}{2\mu}=\frac{1}{2}(\frac{eB}{\mu c})^2X^2+\frac{P^2}{2\mu}$$

这里$\frac{eB}{\mu c}=\omega_c$是前面定义过的角频率，这意味着此时这个体系被映射为了谐振子——上面这个哈密顿算符显然就是我们熟悉的谐振子形式，并且对易关系也确实是坐标和动量的对易关系，那这就是一个谐振子！

那么其解的能量本征值当然为$E_n=(n+\frac{1}{2})\hbar\cdot\omega_c$，这就是分立的能级，这说明磁场里运动的粒子的能级发生分立，这些能级也称为朗道能级。

但是至此我们只解决了三个问题的两个，即拿到了方程，拿到了本征值，但是没拿到本征函数。下面我们想求本征函数就没有这么简单了，我们需要首先定义体系的矢势，对于上述磁场$\vec{B}=(0,0,B)$
之前我们学过，电磁场的矢势并不唯一，那么什么形式的矢势有利于我们解本征函数呢？有两种选法

第一种是朗道 gauge$\vec{A}=(-By,0,0)$
第二种是对称 gauge$\vec{A}=\frac{1}{2}\vec{B}\times\vec{r}=(-\frac{1}{2}By,\frac{1}{2}Bx,0)$
上面注意，B没打箭头，这是因为这是磁场强度大小，磁场仅沿z轴方向，因此简单起见就拿字母B标记了强度。可以自行验证上述两种选法都是满足磁感应矢量的定义$\vec{B}=\nabla\times\vec{A}$

我们选择朗道规范进行后续步骤，直接把矢势代入得到：

$$H=\frac{1}{2\mu}(p_x-\frac{eB}{c}y)^2+\frac{p_y^2}{2\mu}$$

这里我们发现$[H,p_x]=0$是对易的，这意味着我们如果求出了p_x的本征函数，那么其自然也是哈密顿H的本征函数，而前者一般好求一些，因此我们转而想要先求p_x本征函数。

这个时候我们很容易注意到啊，p_x是什么？这个算符是什么？这不是正则动量算符吗？那正则动量算符的本征函数，就是说偏导算符的本征函数是什么样？这其实很早之前我们就学过，其实是指数函数啊

$$\hat{p}_xe^{ik_xx}=-i\hbar\frac{e^{ik_xx}}{\partial x}=\hbar k_x\cdot e^{ik_xx}$$

那么哈密顿的本征函数就是e^{ik_xx}，但是这肯定是不完整的，或者说，我们只拿到了特解，没拿到通解，因为我们没有考虑y分量部分，不过也还好，因为至少我们拿到了x部分的解，因此下一步我们就可以假设哈密顿的通解形式为

$$\psi=e^{ik_xx}\phi(y)$$

本征函数回代有：

$$H\psi = \frac{1}{2\mu}\left[(p_x - \frac{eB}{c}y)^2 + p_y^2\right]e^{ik_x x}\phi(y) = Ee^{ik_x x}\phi(y)$$

左边动量算符作用于波函数后直接替换成本征值：

$$\frac{1}{2\mu}\left[(\hbar k_x - \frac{eB}{c}y)^2 + p_y^2\right]e^{ik_x x}\phi(y) = Ee^{ik_x x}\phi(y)$$

此时等式左右已无坐标x相关的算符，因此消去$e^{ik_x x}$，然后进行系数的提取和改写

$$\left[\frac{\mu}{2}\frac{e^2B^2}{\mu^2c^2}(y - \frac{c\hbar k_x}{eB})^2 + \frac{p_y^2}{2\mu}\right]\phi(y) = E\phi(y)$$

上述进行了很多系数上的改写，这主要是为了突出方程的特点，因为令$y_0 = \frac{c\hbar k_x}{eB}$，$\omega_c = \frac{eB}{\mu c}$，可以发现这也是一个一维谐振子方程，这类方程的解我们已经学过，是

$$\begin{aligned}\phi(y) &= H_n \cdot e^{-\frac{\alpha^2(y-y_0)^2}{2}} \\ &= H_n(\alpha(y-y_0))e^{-\frac{\alpha^2(y-y_0)^2}{2}}\end{aligned}$$

其中$\alpha = \sqrt{\frac{\mu\omega_c}{\hbar}}$是常数，有时我们会额外定义特征长度$\alpha = \frac{1}{x_0}$，那么$x_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{\omega_c \cdot \mu}} = \sqrt{\frac{\hbar c}{eB}} = L$是一个与磁场相关的量，可能会便于一些领域的使用。

总之至此，我们就拿到了最终本征函数的形式，原问题解决

$$e^{ik_x x}H_n(\alpha(y-y_0))e^{-\frac{\alpha^2(y-y_0)^2}{2}}$$

不过值得一提的是，讨论还没结束，因为如果我们把本征函数回代哈密顿算符，会发现能量本征值此时除了谐振子，还会多出一项

$$E = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega_c + \frac{\hbar^2 k_x^2}{2\mu}$$

但是在之前，我们在分析的时候给出的结果只有这里的谐振子能量，没有多出来的这个自由动能k_x部分，这是怎么回事呢？这个其实也比较好理解，因为原本在分析的时候，把方程当成了谐振子给出了能量解，这意味对于给定的能量E，如果指定x就必须有唯一的p，即圆环上的粒子的x和y是一一对应的关系，自由度为1，但是我们这里厄米多项式得到的解可以不局限于此，而是x自由度是可以更加自由的，比原本谐振子假设多了一个自由度，因此带来多出的一项，也就是多的能量。

作业三

1. 对于上述过程，如果朗道规范的选取改为$\vec{A}=(0,Bx,0)$，同样走全流程解方程。

可以预估的是过程是很无聊的，无非是复制粘贴一遍，因为只是对xy进行了对调，定义上有一点点区别，注意正负号就行。首先哈密顿方程形式为

$$H=\frac{p_x^2}{2\mu}+\frac{1}{2\mu}(p_y+\frac{eB}{c}x)^2$$

然后对易关系也是显然的，那么解可以写作

$$\psi=e^{ik_yy}\phi(x)$$

直接代入哈密顿方程然后把动量算符作用完毕替换成本征值:

$$\left[\frac{p_x^2}{2\mu}+\frac{1}{2\mu}\left(\hbar k_y+\frac{eB}{c}x\right)^2\right]\phi(x)=E\phi(x)$$

发现这个解是厄米多项式，于是最终

$$\psi(x,y)=e^{ik_yy}H_n\left(\alpha(x-x_0)\right)e^{-\frac{\alpha^2(x-x_0)^2}{2}}$$

能量也是完全类似的替换一下

$$E=\left(n+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega_c+\frac{\hbar^2k_y^2}{2\mu}$$

2. 按照经典力学，磁场中带电粒子的圆周运动有中心位置(x_0,y_0). 定义算符$x_0=x-\Pi_y/\mu\omega_c \quad y_0=y+\Pi_x/\mu\omega_c$请问$x_0,y_0$对易吗？对于朗道能级的基态，$x_0$和$y_0$的涨落多大?

直接大力出奇迹，展开对易关系式

$$[x_0,y_0]=[x,y]+\left[x,\frac{\pi_x}{\mu\omega_c}\right]-\left[\frac{\pi_y}{\mu\omega_c},y\right]-\left[\frac{\pi_y}{\mu\omega_c},\frac{\pi_x}{\mu\omega_c}\right]$$

第一项显然为零，然后第二第三项，注意机械动量里包含了一个矢势(坐标算符)以及一个动量算符，那

么机械动量跟坐标的对易关系，就成为了动量算符跟坐标的关系，也就是一个因子$i\hbar$的关系。第四项要注意一下，慢慢来

$$\left[\frac{\pi_y}{\mu\omega_c}, \frac{\pi_x}{\mu\omega_c}\right] = \frac{1}{(\mu\omega_c)^2}[\pi_y, \pi_x] = -\frac{1}{(\mu\omega_c)^2}[\pi_x, \pi_y] = -\frac{i\hbar\frac{eB}{c}}{(\mu\omega_c)^2} = -\frac{i\hbar}{\mu\omega_c}$$

其中最后一个等号利用了角频率的定义。然后综合四项，我们得到

$$[x_0, y_0] = 0 + \frac{i\hbar}{\mu\omega_c} - -\frac{i\hbar}{\mu\omega_c} - -\frac{i\hbar}{\mu\omega_c} = \frac{3i\hbar}{\mu\omega_c}$$

欲求涨落，直接利用不确定关系

$$\Delta x_0 \cdot \Delta y_0 \geq \frac{1}{2}\left|\langle[x_0, y_0]\rangle\right| = \frac{3\hbar}{2\mu\omega_c}$$

结束？但是物理直觉告诉我们，往往这种对易关系出来是一倍，而不是三倍，我们大概率是某个地方正负号有问题？但是检查了好多遍发现符号没问题，可能真是三倍？

3. 如图，考虑两条路径，上面无磁场，下面有一小圈磁场，一束中子分叉经过两条路径后汇聚，显然中子内禀磁矩会受到磁场影响，那么调节磁场就可以调节汇聚时的相干和相消，求证相干相消的周期由磁场变化量决定,即每间隔一定的磁场ΔB，是一个周期，求证其表达式如下：

$$\Delta B = \frac{4\pi\hbar c}{eg_n\lambda l} = \frac{2\pi\hbar^2}{\lambda l\mu m_n} = \frac{p\hbar}{l\mu m_n} = \frac{\hbar}{t\mu}$$

这一题和之前电子的实验没有本质上的区别，因为都是相位引起的，只是中子受到磁场的影响反映在内禀磁矩上，而不是传统电磁学中的洛伦兹力，并且中子必须要显式通过磁场才能被影响，而电子是包围的区域有不为零的磁场就被影响，但是总之之前的式子都没有变化，仍然可以拿来用，仍然看作上下两部分，注意将电荷q替换成磁矩μ

$$\begin{aligned}\psi(\vec{x}, t) &= \psi_{up}(\vec{x}, t) + \psi_{down}(\vec{x}, t) \\ &= (e^{\frac{i\mu\Lambda_u}{\hbar}} + e^{\frac{i\mu\Lambda_d}{\hbar}})\psi'(\vec{x}, t)\end{aligned}$$

然后现在要考虑两部分相位，上半部分没有磁场没有影响，下半部分，我们考虑粒子在磁场中长度是l，宽度显然是德布罗意波长λ，于是对应的影响为$\Lambda_u = Bl\lambda$，那么波函数有

$$\psi(\vec{x}, t) = \psi'(\vec{x}, t) \cdot (1 + e^{\frac{i\mu}{\hbar}Bl\lambda})$$

很容易看出相位差就是

$$\Delta\phi = \frac{\mu}{\hbar} B l \lambda$$

令相位差等于2π，可以解得

$$\Delta B = \frac{2\pi\hbar}{\mu\lambda l}$$

代入旋磁比定义

$$\Delta B = \frac{2\pi\hbar}{(\frac{g_n e}{2m_p c})\lambda l} = \frac{4m_p\pi\hbar c}{g_n e\lambda l}$$

与原本式子差了一个质量m_p,有点疑问?

需要疑问的是：这里究竟把中子当成什么？事实上笔者认为问题出在相位的影响上，即我们应该把磁场的影响，通过中子通过磁场的时间联系起来，即把磁通量用磁时间累计替换$\Phi = Bt = Bl/v = Blm_p/p = Blm_p\lambda/h$,这个样子是能凑出来题目的质量的。这个时候我们有

$$\Delta\phi = \frac{\mu}{\hbar} B l m_p \lambda / h$$

于是代入相位为2π，就得到了

$$\Delta B = \frac{2\pi h\hbar}{\mu\lambda l m_p}$$

对比之前我们要证明的式子，仅仅只是差了一点点——h应该是$\hbar$，但考虑到似乎很多同学都是这样，因此这个可能是对的，原题是有问题的。

总之，按照这种时间积累的角度，我们就得到了答案。