9.电磁场规范不改变薛定谔方程

符合直觉的是,电磁场规范变换下波函数发生变换,但是新表象的波函数当然是符合薛定谔方程的,但 我们需要证明一下,也就是要证明规范变换下也满足方程

$$i\hbar rac{\partial |lpha'
angle}{\partial t} = H'|lpha'
angle$$

我们考虑在坐标表象下进行证明: $\langle x'|lpha'
angle = \langle x'|g|lpha
angle = e^{rac{iq\Lambda(x',t)}{\hbar c}}\psi_lpha(x')$

即此时的薛定谔方程是

$$i\hbarrac{\partial\psi_{lpha'}(x',t)}{\partial t}=H'\psi_{lpha'}(x',t)=H'e^{rac{iq\Lambda}{\hbar c}}\psi_{lpha}(x,t)$$

这里注意一下标记,打了撇的 α 是新表象,没打撇的是旧表象,二者都要被展开到坐标表象x'里。

对左边时间偏导链式法则,注意 Λ 也是含时的,可以得到:

$$i\hbar\left(rac{iq}{\hbar c}rac{\partial\Lambda}{\partial t}
ight)e^{rac{iq\Lambda}{\hbar c}}\psi_{lpha}(x',t)+i\hbar e^{rac{iq\Lambda}{\hbar c}}rac{\partial\psi_{lpha}}{\partial t}$$

下面在考虑式子右边哈密顿算符对波函数的作用之前,我们考虑机械动量的作用,这是有益的,因为哈密顿算符比这复杂多了,我们打算由简入繁:

$$egin{aligned} &(-i\hbar
abla-rac{q}{c}ec{A}')(e^{rac{iq\Lambda}{\hbar c}}\psi_lpha)\ &=(-i\hbar
abla-rac{q}{c}ec{A}-rac{q}{c}
abla\Lambda)(e^{rac{iq\Lambda}{\hbar c}}\psi_lpha)\ &=(rac{q}{c}
abla\Lambda)\psi_{lpha'}+e^{rac{iq\Lambda}{\hbar c}}(-i\hbar
abla)\psi_lpha-(rac{qec{A}}{c})\psi_{lpha'}-(rac{q}{c}
abla\Lambda)\psi_{lpha'}\ &=e^{rac{iq\Lambda}{\hbar c}}(-i\hbar
abla-rac{qec{A}}{c})\psi_lpha \end{aligned}$$

上面第二行代入了规范变换的定义,第三行链式法则展开,其中一二项都是源于坐标偏导,第三第四项乘出来了没动,此时发现有两项可以抵消,于是得到第四行。我们发现这个式子似乎结果就是,如果把 $g=e^{\frac{iQ}{\hbar c}}$ 看作一个相位因子,那么就是把这个提到算符前面了而已,因此我们可以大胆猜测,机械动量算符的平方作用于波函数,结果是小括号变为平方而已,实际上确实是这样,因此就不证了,我们直接给结论

$$(-i\hbar
abla-rac{q}{c}ec{A}')^2(e^{rac{iq\Lambda}{\hbar c}}\psi_lpha)=e^{rac{iq\Lambda}{\hbar c}}(-i\hbar
abla-rac{qec{A}}{c})^2\psi_lpha$$

那么要考虑哈密顿算符对波函数的作用,上面已经求了很重要的机械动量平方部分,下面我们看看标矢 部分会变成怎样

$$q\phi'\psi_{lpha'}=q(\phi-rac{\partial\Lambda}{c\partial t})\left[e^{rac{iq\Lambda}{\hbar c}}\psi_{lpha}
ight]=e^{rac{iq\Lambda}{\hbar c}}q(\phi-rac{\partial\Lambda}{c\partial t})\psi_{lpha}$$

其中也是,先用了新旧标势的定义,然后显然标势不会作用于相位因子,直接把g提前即可,那么我们的哈密顿算符的作用就写出来了

$$H'\psi_{lpha'}=e^{rac{iq\Lambda}{\hbar c}}\left[(-i\hbar
abla-rac{qec{A}}{c})^2+q\phi
ight]\psi_lpha-rac{q}{c}rac{\partial\Lambda}{\partial t}\psi_{lpha'}$$

这是薛定谔方程的右边,这该如何跟一开始给出的薛定谔方程左边时间部分相等呢?答案是借助一下规 范变换旧表象的薛定谔方程,其定义是:

$$i\hbarrac{\partial\psi_{lpha}(x',t)}{\partial t}=H\psi_{lpha}(x',t)$$

这里的lpha是没打撇的,这个式子可以对新薛定谔方程的项进行替换,于是替换结果

$$H'\psi_{lpha'}=i\hbar e^{rac{iq\Lambda}{\hbar c}}rac{\partial\psi_{lpha}}{\partial t}-rac{q}{c}rac{\partial\Lambda}{\partial t}\psi_{lpha'}$$

现在观察这两项,这正是之前新表象薛定谔方程左边时间求导部分的内容,于是证毕。

笔者有一个新的想法,或许我们可以不依赖于坐标表象,我们新表象的薛定谔方程,由于表象变换算符 是酉算符,即幺正算符,因此可以进行单位算符的插入

$$i\hbarrac{\partial |lpha'
angle}{\partial t}=i\hbarrac{\partial (g|lpha
angle)}{\partial t}=H'|lpha'
angle=gg^\dagger H'g|lpha
angle$$

上面第一个等号是用了新表象的定义,第四个等号利用定义的同时插入了单位算符。这里棘手的是,算g因为 Λ 有关,这个玩意作为一个外场可能是跟时间相关的,因此不能直接提取,要链式法则。

$$i\hbar grac{\partial(\ket{lpha})}{\partial t}+i\hbarrac{\partial g}{\partial t}\ket{lpha}=gH\ket{lpha}+i\hbarrac{\partial g}{\partial t}\ket{lpha}=gg^\dagger H'g\ket{lpha}$$

第一个等号用到了旧表象的薛定谔方程定义,现在我们的目标是证明其跟最后一块内容相等我们考虑同时左乘 q^\dagger ,就是要证明

$$\langle H|lpha
angle + g^\dagger i\hbarrac{\partial g}{\partial t}|lpha
angle = g^\dagger H'g|lpha
angle .$$

由于要对于任意的 $|lpha\rangle$ 使得式子成立,因此等式左边两侧的算符是相同的,也就是要证明算符等式

$$H+g^{\dagger}i\hbarrac{\partial g}{\partial t}=g^{\dagger}H^{\prime}g^{\dagger}$$

后续应该就是按部就班的了,因为哈密顿算符跟g的对易关系上一节求过,也用过好多次,因此结论肯定是得证,具体过程会不会卡壳,笔者就懒得想了。

作业二

好吧上面这个不依赖于坐标表象进行证明居然是一道作业题,本来笔者懒得算了,这下不得不算了。

首先当然是把这跟时间求导部分拆了,不好看;由于g求导出来会出来常数,又因为其是幺正算符,因此固然可以推导出如下的结果。

$$rac{\partial g}{\partial t} = rac{iq}{\hbar c}rac{\partial \Lambda}{\partial t}g \implies g^\dagger rac{\partial g}{\partial t} = rac{iq}{\hbar c}rac{\partial \Lambda}{\partial t}.$$

于是原方程化简为:

$$H-rac{q}{c}rac{\partial \Lambda}{\partial t}=g^{\dagger}H'g$$

下一面我们很自然的想到展开等式右边的新哈密顿算符

$$g^\dagger H' g = g^\dagger \left(rac{1}{2m}\Pi^2 + q\phi'
ight)g = g^\dagger \left(rac{1}{2m}\left(\mathbf{p} - rac{q}{c}\mathbf{A}'
ight)^2 + q\phi'
ight)g$$

我们似乎不是很好处理上面的算符,因为机械动量算符是平方,尽管原则上可以慢慢求出来跟g的对易关系,直接大力出奇迹,把里边的平方展开,慢慢处理对易关系就行,但是有没有更简单的办法呢,答案是有的,利用上一节的一个结论,机械动量的测量期望值在新旧表象下不变,其表示为

$$\langle \alpha | \Pi | \alpha \rangle = \langle \alpha | g^\dagger \Pi' g | \alpha \rangle \implies \Pi = g^\dagger \Pi' g \implies g \Pi g^\dagger = \Pi'$$

那么新表象哈密顿就满足如下推导

$$H' = rac{1}{2m} (\mathbf{\Pi}')^2 + q\phi' \ = rac{1}{2m} (g\mathbf{\Pi}g^\dagger)^2 + q\left(\phi - rac{1}{c}rac{\partial\Lambda}{\partial t}
ight) \ = rac{1}{2m} (g\mathbf{\Pi}g^\dagger)^2 + q\phi - rac{q}{c}rac{\partial\Lambda}{\partial t} \ = rac{1}{2m} g\mathbf{\Pi}g^\dagger g\mathbf{\Pi}g^\dagger + q\phi - rac{q}{c}rac{\partial\Lambda}{\partial t} \ = g\left(rac{1}{2m}\mathbf{\Pi}^2 + q\phi
ight)g^\dagger - rac{q}{c}rac{\partial\Lambda}{\partial t} \ = gHg^\dagger - rac{q}{c}rac{\partial\Lambda}{\partial t}.$$

第一行是新哈密顿定义,第二行用了机械动量的表象变换,第三行拆了个括号,第四行把平方拆开,随后利用幺正算符性质得到第五行。此时发现第五行正可以利用旧哈密顿的定义。观察这跟式子,这跟我们要证明的式子一模一样,于是原式证毕。

值得注意的是,有些同学们发现,哈密顿算符本征值是能量,那么能量在新旧表象下的期望值当然是不 变的啊,也就是自然满足

$$\langle \alpha | H | \alpha \rangle = \langle \alpha | g^{\dagger} H' g | \alpha \rangle$$

可是这是不对的,因为上面我们已经证明的结论是

$$\langle lpha' | H' | lpha'
angle = \langle lpha | g^\dagger H' g | lpha
angle = \langle lpha | H | lpha
angle - rac{q}{c} rac{\partial \Lambda}{\partial t}.$$

不难发现差了一个时间偏导。固然只有一个结论是正确的,那么哪个对了哪个错了,又是为什么呢?显然我们作业需要证明的是正确的,但是为什么能量的期望要相差一个时间偏导呢?而这个时间偏导还偏偏依赖于时间,为什么呢?

这个可以这么理解, Λ 随时间变化,相当于系统处于一个随时间变化的"电磁参考系"中。这种参考系的改变当然会导致能量的表观变化,因为就像规定标势零点不一样,那么自然电势能不一样了,这类似于经典力学中非惯性参考系引入的惯性力,如果没有考虑到惯性力,那么系统能量就会发生变化,为了考虑惯性力的作用,就相当于在上面的电磁场能量期望值中引入了 Λ 时间偏导来保证能量守恒。

后面在第十二节,会提到规范变换的 Λ 相当于对标势的零点进行变换。因此这个上述的想法确实是比较合理的解释。

10.规范变换下几率密度流不变

显然,波函数的概率密度 $|
ho|^2 = |
ho'|^2$ 在规范变换下是不变的,因为波函数只是相位改变了而已

那么 $ec{j}=rac{1}{2\mu}(\psi_lpha^*ec{p}\psi_lpha+\psi_lphaec{p}\psi_lpha^*)$ (这里写成机械动量算符的形式会好一些) 会在规范变换下改变吗?

为了证明,首先我们把波函数改写成幅角和模的形式 $\psi_lpha=
ho^{rac{1}{2}}e^{rac{iS}{\hbar}}$

这样的好处是,规范变换下的波函数由于模是一样的,仅有相位不一样,因此上面波函数的差异就可以用S来描述了,就不用算符g了。那么这种表示下

$$ec{j} = rac{1}{2\mu} \left[\psi_lpha^* (-i\hbar
abla - rac{q}{c}ec{A})\psi_lpha + \psi_lpha (i\hbar
abla - rac{q}{c}ec{A})\psi_lpha^*
ight] = rac{
ho}{\mu} (
abla S - rac{qec{A}}{c})$$

上面这个式子等号怎么来的呢,其实本质上是大力出奇迹,直接把波函数幅角模的定义丢进去,注意链式法则。

$$egin{aligned} ec{j} &= rac{1}{2\mu} \left[
ho^{rac{1}{2}} e^{-rac{iS}{\hbar}} \left(-i\hbar (
abla
ho^{rac{1}{2}}) e^{rac{iS}{\hbar}} +
ho^{rac{1}{2}} e^{rac{iS}{\hbar}}
abla S - rac{q}{c} ec{A} (
ho^{rac{1}{2}} e^{rac{iS}{\hbar}})
ight) \ &+
ho^{rac{1}{2}} e^{rac{iS}{\hbar}} \left(i\hbar (
abla
ho^{rac{1}{2}}) e^{-rac{iS}{\hbar}} -
ho^{rac{1}{2}} e^{-rac{iS}{\hbar}}
abla S - rac{q}{c} ec{A} (
ho^{rac{1}{2}} e^{-rac{iS}{\hbar}})
ight)
ight] \ &= rac{1}{2\mu} \left[2
ho
abla S - 2rac{q}{c}
ho ec{A}
ight] \ &= rac{
ho}{\mu} (
abla S - rac{q}{c} ec{A}) \end{aligned}$$

上面链式法则抵消掉了 $\nabla \rho^{\frac{1}{2}}$ 的项,而因为相位带了一个i导致相减变为相加合并了,然后标势部分直接合并即可,就得到了最终结果。那么假设我们现在进行规范变换,那么新表象的几率密度流,显然其中的 S, \vec{A} 的定义是发生变换的,那么 \vec{j}' 表示为

$$ec{j}' = rac{
ho}{\mu} (
abla S + rac{q}{c}
abla \Lambda - rac{q
abla \Lambda}{c} - rac{q ec{A}}{c}) = ec{j}$$

这里S相位,源于 $|\psi_{\alpha'}|=|e^{\frac{iq\Lambda}{\hbar c}}\psi_{\alpha}|$ 的相位因此多出来一项(第二项),然后又因为规范变换 $\vec{A}\to\vec{A}+$ $\nabla\Lambda$ 又多出来一项(第三项),然后发现两个抵消掉了,因此就证明了几率密度流不变。

还有一种证法是从坐标表象出发的,仍然将|lpha
angle o |lpha'
angle看作 $g=e^{rac{iq\Lambda}{\hbar c}}$ 相位变换,那么 $\langle x
angle = \langle lpha'|ec{x}|lpha'
angle$ 的成立是基于测量原理的,但是回过头来我们可以稍微在坐标表象进一步验证一

$$\langle lpha' | ec{x} | lpha'
angle = \int d^3 x' \ \psi_{lpha'}^*(x') x' \psi_{lpha'}(x') = \int d^3 x' \ \psi_{lpha}(x') x' \psi_{lpha}(x') = \langle lpha | ec{x} | lpha
angle$$

其中最中间的等号直接把相位提取出来,由于坐标算符不影响相位,因此相位 $e^{rac{iq\Lambda}{\hbar c}}e^{-rac{iq\Lambda}{\hbar c}}$ 直接抵消了。于是证毕。

但上面这个不是关键,关键的是下面这个,机械动量的测量期望在旧表象下的坐标表象表示可以用不带 撇的 α 波函数 ψ_{lpha} 表示

$$\begin{split} \frac{\langle \alpha | \vec{\Pi} | \alpha \rangle}{\mu} &= \frac{1}{\mu} \int d^3 x' \psi_{\alpha}^*(x') (\vec{p} - \frac{q\vec{A}}{c}) \psi_{\alpha}(x') \\ &= \frac{1}{2\mu} \int d^3 x' \left[\psi_{\alpha}^*(x') (\vec{p} - \frac{q\vec{A}}{c}) \psi_{\alpha}(x') + \psi_{\alpha}(x') (\vec{p} - \frac{q\vec{A}}{c})^* \psi_{\alpha}^*(x') \right] \\ &= \int d^3 x' \, \vec{j} \end{split}$$

上面第一行用了坐标波函数的定义,这个就没啥好说的了。第二行是源于把第一行主动分为两半,因为第二行的两部分由于动量算符本身是厄密算符,因此两部分是完全等价的,只是换了个写法。但是这换一个写法,我们就发现中括号内是几率密度流的定义,就得到了第三行。也就是说,这个式子意味着几率密度流的全空间积分等于速度。由于之前说过换表象,不会影响动量测量值的改变,那么自然几率密度流是不变的了。或者倒过来,如果我们采用之前证明的结论 $\vec{j}=\vec{j}'$,也可以知道 $\langle \vec{\pi} \rangle = \langle \vec{\pi}' \rangle$ 动量期望值是不变的。

11.一种元磁荷是元电荷的倍数的证明

首先让我们回忆一下最正常的麦克斯韦方程组

$$egin{aligned}
abla \cdot ec{E} &= 4\pi
ho \
abla \cdot ec{B} &= 0 \
abla imes ec{E} &= -rac{\partial ec{B}}{\partial t} \
abla imes ec{B} &= rac{4\pi}{c} ec{j} + rac{1}{c} rac{\partial ec{E}}{\partial t} \end{aligned}$$

上面式子虽然正确,但是我们不难发现式子不对称,关于 $ec{E}$ 和 $ec{B}$ 不对称,不好看,因此,假设类比电荷,如果有磁荷 ho_m 存在,那么:

$$egin{align}
abla \cdot ec{E} &= 4\pi
ho \
abla \cdot ec{B} &= 4\pi
ho_m \
abla imes ec{E} &= -rac{\partial ec{B}}{\partial t} + rac{4\pi}{c}ec{j}_m \
abla imes ec{B} &= rac{4\pi}{c}ec{j} + rac{1}{c}rac{\partial ec{E}}{\partial t} \
abla imes ec{B} &= rac{4\pi}{c}ec{j} + rac{1}{c}rac{\partial ec{E}}{\partial t} \
abla imes ec{B} &= rac{4\pi}{c}ec{j} + rac{1}{c}rac{\partial ec{E}}{\partial t} \
abla imes ec{B} &= rac{4\pi}{c}ec{j} + rac{1}{c}rac{\partial ec{E}}{\partial t} \
abla imes ec{B} &= rac{4\pi}{c}ec{j} + rac{1}{c}rac{\partial ec{E}}{\partial t} \
abla imes ec{B} &= rac{4\pi}{c}ec{J} + rac{1}{c}rac{\partial ec{E}}{\partial t} \
abla imes ec{B} &= rac{4\pi}{c}ec{J} + rac{1}{c} rac{\partial ec{E}}{\partial t} \
abla imes ec{B} &= rac{4\pi}{c}ec{J} + rac{1}{c} rac{\partial ec{E}}{\partial t} \
abla imes ec{B} &= rac{4\pi}{c}ec{J} + rac{1}{c} rac{\partial ec{E}}{\partial t} \
abla imes ec{B} &= rac{4\pi}{c} ec{J} + rac{1}{c} rac{\partial ec{E}}{\partial t} \
abla imes ec{B} &= rac{4\pi}{c} ec{J} + rac{1}{c} rac{\partial ec{E}}{\partial t} \
abla imes ec{B} &= rac{4\pi}{c} ec{J} + rac{1}{c} rac{\partial ec{E}}{\partial t} \
abla imes ec{B} &= rac{4\pi}{c} ec{J} + rac{1}{c} rac{\partial ec{E}}{\partial t} \
abla imes ec{B} &= rac{4\pi}{c} ec{J} + rac{1}{c} rac{\partial ec{E}}{\partial t} \
abla imes ec{B} &= rac{2\pi}{c} ec{J} + rac{2\pi}{c} rac{\partial ec{E}}{\partial t} \
abla imes ec{B} &= rac{2\pi}{c} ec{J} + rac{2\pi}{c} rac{\partial ec{E}}{\partial t} \
abla imes ec{B} + rac{2\pi}{c} rac{\partial ec{E}}{\partial t} \
abla imes ec{B} + rac{2\pi}{c} rac{\partial ec{E}}{\partial t} \
abla imes ec{B} + rac{2\pi}{c} rac{\partial ec{E}}{\partial t} \
abla imes ec{B} + rac{2\pi}{c} rac{\partial ec{E}}{\partial t} \
abla imes ec{B} + rac{2\pi}{c} rac{\partial ec{E}}{\partial t} \
abla imes ec{B} + rac{2\pi}{c} rac{\partial ec{E}}{\partial t} \
abla imes ec{B} + rac{2\pi}{c} rac{\partial ec{E}}{\partial t} \
abla imes ec{B} + rac{2\pi}{c} rac{\partial ec{E}}{\partial t} \

abla imes ec{B} + rac{2\pi}{c} rac{\partial ec{E}}{\partial t} \
abla imes ec{B} + rac{2\pi}{c} rac{\partial ec{E}}{\partial t} \

abla imes ec{B} + rac{2\pi}{c} rac{\partial ec{E}}{\partial t} \

abla imes ec{B} + rac{2\pi}{c} rac{\partial ec{E}}{\partial t} \

abla imes ec{B} + rac{2\pi}{c} rac{\partial ec$$

忽略项正负号带来的差异,因为上课的时候老师没有具体管正负号,总之这样比较对称、好看——尽管 磁荷实际不存在(迄今为止没有发现)。但是假设是存在的,那么我们可以证明 $e_m = \frac{\hbar c}{2e} \cdot n$,即磁单极是 电荷单位倍数。

下面开始证明:

假设某元磁荷在原点,根据定义其磁场为

$$ec{B} = rac{e_m}{r^2} \hat{r} =
abla imes ec{A}$$

由于磁场总是可以表示为矢势,因此我们可以想个办法找到 $\vec{A}=rac{e_m(1-\cos\theta)}{r\sin\theta}\hat{\phi}$,这个矢势场是绕xy面转圈的。如何找的我们可以不用管,我们先验证一下其确实可以叉乘得到旋度也就是磁场 \vec{B} :

在球坐标下:

$$egin{aligned}
abla imes ec{A} &= rac{1}{r\sin heta} \left[rac{\partial}{\partial heta} (A_{\phi}\sin heta) - rac{\partial A_{ heta}}{\partial \phi}
ight] \hat{r} \ &+ rac{1}{r} \left[rac{1}{\sin heta} rac{\partial A_r}{\partial \phi} - rac{\partial}{\partial r} (rA_{\phi})
ight] \hat{ heta} \ &+ rac{1}{r} \left[rac{\partial}{\partial r} (rA_{ heta}) - rac{\partial A_r}{\partial heta}
ight] \hat{\phi} \end{aligned}$$

这里很多项因为 \vec{A} 没有对应的分量立即变为0,最终计算出来就是我们要的磁场,证毕。

但是啊,我们发现了一个问题,此时考虑麦克斯韦方程组,会有

$$abla \cdot ec{B} =
abla \cdot (
abla imes ec{A}) = 4\pi
ho_m$$

可有一个数学结论是,任意一个矢量先被▽算符叉乘再点乘是必定为0的,也就是

$$abla \cdot (
abla imes ec{A}) = 0$$

必定成立。可是上面麦克斯韦方程组结果不是0,这是怎么回事,有矛盾?

这个原因是,实际上这里 \vec{A} 不是良函数,有奇点,在 $\theta \to \pi$ 时,显然无穷大。我们得解决一下这个问题,于是我们定义一个新的矢势 $\vec{A}^{(II)} = -\frac{e_m(1+\cos\theta)}{r\sin\theta}\hat{\phi}$,这个矢势解决了 $\theta \to \pi$ 奇点问题,但倒过来,却在 $\theta \to 0$ 有问题。

因此一个很自然的思路是把真实的矢势结合上两个式使用,当 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 时一块用,两个加起来除以二即可,当 $\theta\to\pi$ 时用II, $\theta\to0$ 时用I。

显然不出意外,两个矢势之间由规范变换练习起来, $ec{A}^{(II)} = ec{A}^{(I)} +
abla \Lambda$,我们应该是可以找到 Λ 。

下面开始寻找,考虑矢势差: $\vec{A}^{(II)} - \vec{A}^{(I)} = \frac{-2e_m}{r\sin\theta}\hat{\phi}$

而
$$abla \Lambda = rac{\partial \Lambda}{\partial r} \hat{r} + rac{1}{r} rac{\partial \Lambda}{\partial heta} \hat{ heta} + rac{1}{r \sin heta} rac{\partial \Lambda}{\partial \phi} \hat{\phi}$$

显然, $\Lambda = -2e_m\phi$ 满足需求。

于是两种规范下的波函数的变换关系为

$$\psi^{(II)}=e^{rac{iq\Lambda}{\hbar c}}\psi^{(I)}=e^{rac{-2iqe_m\phi}{\hbar c}}\psi^{(I)}$$

考虑波函数的单值性,以及周期边界条件必定要有绕着 θ 转一圈值不变:

$$\psi^{(I)}(r,rac{\pi}{2},0)=\psi^{(I)}(r,rac{\pi}{2},2\pi)$$

这个周期条件对 $\psi^{(II)}$ 显然也成立,因此我们可以得到

$$egin{aligned} \psi^{(II)}(r,rac{\pi}{2},2\pi) &= e^{rac{-4ie_m\pi}{\hbar c}} \psi^{(I)}(r,rac{\pi}{2},2\pi) \ &= e^{rac{-4ie_m\pi}{\hbar c}} \psi^{(I)}(r,rac{\pi}{2},0) \ &= e^{rac{-4ie_m\pi}{\hbar c}} \psi^{(II)}(r,rac{\pi}{2},0) \ &= e^{rac{-4ie_m\pi}{\hbar c}} \psi^{(II)}(r,rac{\pi}{2},2\pi) \end{aligned}$$

上面各个等号就是不断利用了周期条件和波函数变换而已,故有由最后一行和第一行比较,波函数要一样,那么相位必定相差整数倍的 2π ,即要有 $\frac{2e_m}{\hbar c}=n\in\mathbb{Z}$

即 $e_m=n\frac{\hbar c}{2e}$,即磁单位是电荷单位倍数。此外,这个倍数的量级很好确认,考虑精细结构常数 $\frac{\hbar c}{e^2}\sim 137$,则 $e_m=\frac{\hbar c}{e^2}\cdot\frac{ne}{2}=137\cdot\frac{ne}{2}$ 也就是大概七十倍的量级。