附录:关于量子力学解磁场中粒子的讨论

磁场中圆周运动的粒子与朗道能级

示意图

考虑如图所示，在垂直于纸面的匀强磁场(只在z方向有强度，强度用符号B标记，即$\vec{B}=(0,0,B)$)里有一个粒子在纸内做圆周运动，显然由高中物理有：

$$\frac{e\vec{v}\times\vec{B}}{c}=\frac{\mu v^2}{r}$$

以及可以写出圆周运动的周期，以及角频率

$$T=\frac{2\pi r}{v}=\frac{2\pi\mu c}{eB}\quad \omega_c=\frac{eB}{\mu c}$$

同时也很容易一眼得出粒子的速度表达式：

$$\frac{dx}{dt}=v_x=-v\cdot\sin(\omega_c t)$$
$$\frac{dy}{dt}=v_y=v\cdot\cos(\omega_c t)$$

对速度积分得到坐标表达式：

$$x(t)=x_0+\frac{v}{\omega_c}\cos(\omega_c t)$$
$$y(t)=y_0-\frac{v}{\omega_c}\sin(\omega_c t)$$

粒子的加速度表示式为：

$$\mu\frac{dv_x}{dt}=-\mu\cdot v\cdot\omega_c\cdot\cos(\omega_c t)=-\mu\omega_c^2(x-x_0)$$
$$\mu\frac{dv_y}{dt}=-\mu v\cdot\omega_c\cdot\sin(\omega_c t)=-\mu\omega_c^2(y-y_0)$$

上述的第二个等号用了位置公式进行了一次替换，这种形式更直观，因为由此我们一眼就看出来了这个加速度式子，本质上就是简谐运动。

下面我们进入大学物理的范畴，显然经典的哈密顿量是

$$H=\frac{\pi_x^2}{2\mu}+\frac{\pi_y^2}{2\mu}\quad 其中\vec{\pi}=\vec{p}-\frac{e\vec{A}}{c}$$

上述可以直接进行量子化，变为量子力学里的算符，然后我们就可以解薛定谔方程了，但是直接解其实是不现实的，有点困难，因此我们另辟蹊径。我们先对算符进行处理，回忆机械动量的对易关系：

$$[\pi_x,\pi_y]=i\hbar\frac{e(\vec{B})_z}{c}$$

$$[\pi_x,\pi_x]=0=[\pi_y,\pi_y]$$

我们发现上面的对易关系，跟$[X,P]=i\hbar$的对易关系非常相似，只差常数，因此定义

$$X\equiv\frac{c}{eB}\pi_x\quad P\equiv\pi_y$$

则现在利用这个定义，改写原本的哈密顿算符，得到

$$H=\frac{1}{2\mu}(\frac{eB}{c})^2X^2+\frac{P^2}{2\mu}=\frac{1}{2}(\frac{eB}{\mu c})^2X^2+\frac{P^2}{2\mu}$$

这里$\frac{eB}{\mu c}=\omega_c$是前面定义过的角频率，这意味着此时这个体系被映射为了谐振子——上面这个哈密顿算符显然就是我们熟悉的谐振子形式，并且对易关系也确实是坐标和动量的对易关系，那这就是一个谐振子！

那么其解的能量本征值当然为$E_n=(n+\frac{1}{2})\hbar\cdot\omega_c$，这就是分立的能级，这说明磁场里运动的粒子的能级发生分立，这些能级也称为朗道能级。

但是至此我们只解决了三个问题的两个，即拿到了方程，拿到了本征值，但是没拿到本征函数。下面我们想求本征函数就没有这么简单了，我们需要首先定义体系的矢势，对于上述磁场$\vec{B}=(0,0,B)$
之前我们学过，电磁场的矢势并不唯一，那么什么形式的矢势有利于我们解本征函数呢？有两种选法

第一种是朗道 gauge$\vec{A}=(-By,0,0)$
第二种是对称 gauge$\vec{A}=\frac{1}{2}\vec{B}\times\vec{r}=(-\frac{1}{2}By,\frac{1}{2}Bx,0)$
上面注意，B没打箭头，这是因为这是磁场强度大小，磁场仅沿z轴方向，因此简单起见就拿字母B标记了强度。可以自行验证上述两种选法都是满足磁感应矢量的定义$\vec{B}=\nabla\times\vec{A}$

我们选择朗道规范进行后续步骤，直接把矢势代入得到：

$$H=\frac{1}{2\mu}(p_x-\frac{eB}{c}y)^2+\frac{p_y^2}{2\mu}$$

这里我们发现$[H,p_x]=0$是对易的，这意味着我们如果求出了p_x的本征函数，那么其自然也是哈密顿

H的本征函数，而前者一般好求一些，因此我们转而想要先求p_x本征函数。

这个时候我们很容易注意到啊，p_x是什么？这个算符是什么？这不是正则动量算符吗？那正则动量算符的本征函数，就是说偏导算符的本征函数是什么样？这其实很早之前我们就学过，其实是指数函数啊

$$\hat{p}_x e^{ik_x x} = -i\hbar \frac{e^{ik_x x}}{\partial x} = \hbar k_x \cdot e^{ik_x x}$$

那么哈密顿的本征函数就是$e^{ik_x x}$，但是这肯定是不完整的，或者说，我们只拿到了特解，没拿到通解，因为我们没有考虑y分量部分，不过也还好，因为至少我们拿到了x部分的解，因此下一步我们就可以假设哈密顿的通解形式为

$$\psi = e^{ik_x x}\phi(y)$$

本征函数回代有：

$$H\psi = \frac{1}{2\mu}\left[(p_x - \frac{eB}{c}y)^2 + p_y^2\right] e^{ik_x x}\phi(y) = Ee^{ik_x x}\phi(y)$$

左边动量算符作用于波函数后直接替换成本征值：

$$\frac{1}{2\mu}\left[(\hbar k_x - \frac{eB}{c}y)^2 + p_y^2\right] e^{ik_x x}\phi(y) = Ee^{ik_x x}\phi(y)$$

此时等式左右已无坐标x相关的算符，因此消去$e^{ik_x x}$，然后进行系数的提取和改写

$$\left[\frac{\mu}{2}\frac{e^2B^2}{\mu^2c^2}(y - \frac{c\hbar k_x}{eB})^2 + \frac{p_y^2}{2\mu}\right]\phi(y) = E\phi(y)$$

上述进行了很多系数上的改写，这主要是为了突出方程的特点，因为令$y_0 = \frac{c\hbar k_x}{eB}$，$\omega_c = \frac{eB}{\mu c}$，可以发现这也是一个一维谐振子方程，这类方程的解我们已经学过，是

$$\begin{aligned}\phi(y) &= H_n \cdot e^{-\frac{\alpha^2(y-y_0)^2}{2}} \\ &= H_n(\alpha(y-y_0))e^{-\frac{\alpha^2(y-y_0)^2}{2}}\end{aligned}$$

其中$\alpha = \sqrt{\frac{\mu\omega_c}{\hbar}}$是常数，有时我们会额外定义特征长度$\alpha = \frac{1}{x_0}$，那么$x_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{\omega_c \cdot \mu}} = \sqrt{\frac{\hbar c}{eB}} = L$是一个与磁场相关的量，可能会便于一些领域的使用。

总之至此，我们就拿到了最终本征函数的形式，原问题解决

$$e^{ik_x x}H_n(\alpha(y-y_0))e^{-\frac{\alpha^2(y-y_0)^2}{2}}$$

不过值得一提的是，讨论还没结束，因为如果我们把本征函数回代哈密顿算符，会发现能量本征值此时除了谐振子，还会多出一项

$$E=\left(n+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega_c+\frac{\hbar^2k_x^2}{2\mu}$$

但是在之前，我们在分析的时候给出的结果只有这里的谐振子能量，没有多出来的这个自由动能k_x部分，这是怎么回事呢？这个其实也比较好理解，因为原本在分析的时候，把方程当成了谐振子给出了能量解，这意味对于给定的能量E，如果指定x就必须有唯一的p，即圆环上的粒子的x和y是一一对应的关系，自由度为1，但是我们这里厄米多项式得到的解可以不局限于此，而是x自由度是可以更加自由的，比原本谐振子假设多了一个自由度，因此带来多出的一项，也就是多的能量。

朗道能级的简并

首先，我们复习一下之前的波函数的形式：

$$\phi(y)=H_n(\alpha(y-y_0))e^{-\frac{\alpha^2(y-y_0)^2}{2}}$$

其中，$y_0=\frac{c\hbar k_x}{eB}$，$\omega_c=\frac{eB}{\mu c}$，$\alpha=\sqrt{\frac{\mu\omega_c}{\hbar}}=\sqrt{\frac{eB}{c\hbar}}$，此外额外定义特征长度$x_0=l=L=\frac{1}{\alpha_L}=\sqrt{\frac{\hbar}{\omega_c\cdot\mu}}=\sqrt{\frac{\hbar c}{eB}}$
最终本征函数的形式是

$$e^{ik_xx}H_n(\alpha(y-y_0))e^{-\frac{\alpha^2(y-y_0)^2}{2}}$$

- 这里进行几点重要说明
- 波函数$\phi(y)$里面的y_0是跟x方向的波矢量k_x有关的，对于不同的波矢量k_x，y_0定义不同，也就是说$\phi(y)$中心不同。这意味着空间里其实有很多很多不同的y_0取值，自然也有很多的波函数，由于我们知道一个波函数最多容纳两个电子，那么我们自然很关心，波函数y_0的取值有多少，这是后面我们要讨论的
- 本身$\phi(y)$作为谐振子，是有分立的能级的，也就是ϕ_n，这个分立跟上面的k_x导致的波函数不同是独立的，因此我们对波函数的标记最好以后用$\phi_{k_x,n}$以避免混淆
- 现在我们感兴趣的是对于相同的谐振子能级n，波函数有多少种k_x就是最大的容纳量，或者说，这就是n能级的简并度，这就是朗道能级的简并度。下面我们开始

第一种情况，假设体系是无限大的，k_x不会有任何的限制，自然任意能级n下的波函数$\phi_{k_x,\ n}$的取值也是无穷的，容纳量也是无穷的，简并度是无穷的，这没有太大的物理意义。

下面我们考虑体系有限，但是假设体系在x方向是周期的，那么由周期性条件有k_x要满足的表达式：

$$k_x\cdot L_x=2\pi\cdot n_x$$

其中取值$n_x \in \mathcal{Z}$,体系的长度用L_x表示，移向得到k_x要满足的表达式

$$k_x = \frac{2\pi}{L_x} \cdot n_x$$

现在乍一看，好像啥也没说，因为k_x取值还是无限的。但是我们现在反过来看y_0的情况，由于$y_0 = \frac{c\hbar k_x}{eB}$，显然其不应该在盒子外部，那么其就要满足

$$0 \leq y_0 = \frac{c\hbar \cdot 2\pi \cdot n_x}{eBL_x} \leq L_y$$

上面利用了k_x刚推出来的表达式，那么现在我们发现n_x原本是$n_x \in \mathcal{Z}$，现在却因为盒子的限制，要满足

$$n_x \leq \frac{L_y L_x \cdot B}{(\frac{hc}{e})} \equiv N$$

也就是现在取值并不是无限大了，那么自然的k_x取值就受限了。这里我们再额外说明一下，右边分子实际上是磁通量，分母我们一般称为磁通量子，为什么这么称为呢，因为在第十一节里，我们证明了如果存在磁荷，其元单位应该是

$$e_m = \frac{\hbar c}{2e}$$

因此这种定义下，这就是磁通量子了，磁通量除以磁通量子，自然会得到一个数，这个数就是体系最多有多少个量子，也就是所谓的容纳量，朗道能级简并度

$$f = \frac{A \cdot B}{(\frac{hc}{e})}$$

我们简单考察一下上面各个式子的数量级
取$B = 1T$有特征长度$l = \sqrt{\frac{\hbar c}{eB}} \approx 2.5 \times 10^{-8} m$
取$L_x \sim 10^{-2} m$，可计算y_0的间隔

$$\Delta y_0 = \frac{c\hbar \cdot 2\pi}{eB} \frac{1}{L_x} = l^2 \cdot \frac{2\pi}{L_x} \approx 10^{-6} l$$

这说明y_0间隔很小，远小于特征长度l，而这个特征长度本质上是波函数的弥散程度，这说明波函数还没怎么衰减，就抵达下一个y_0的领域了，因此各个波函数之间可能相互作用比较强，并不是独立的。但我们先不考虑这些独不独立的问题，这暂时不重要。

我们先看看波函数的概率密度是怎样的，根据定义

$$\rho = |\psi_{n,k_x}|^2 = \phi_{n,k_x}^2(y)$$

其中平面波部分取复共轭抵消了。

下面考虑密度流，根据定义,S是相位因子，$\vec{A}$是矢势，代入定义

$$\vec{j}=\frac{\rho}{\mu}(\nabla S+\frac{e\vec{A}}{c})=\frac{\rho}{\mu}(\nabla(\hbar k_x\cdot x)+\frac{e(-By\hat{x})}{c})=\frac{e\rho B}{\mu c}(y_0-y)\hat{x}$$

也就是说密度只在x方向流动，并且当$y_0=y$附近没有流动，而在稍微偏一点的地方，上下偏的流动方向相反。然后我们考虑密度流的散度，直接链式法则展开

$$\nabla\cdot\vec{j}=\frac{\nabla\rho}{\mu}\cdot(\nabla s+\frac{e\vec{A}}{c})+\frac{\rho}{\mu}(\nabla\cdot\nabla s+\frac{e}{c}\nabla\cdot\vec{A})$$

其中第一项，由于括号内是一个矢量，括号外是一个矢量，因此点乘只能取x,y,z分别的分量计算，而ρ之前求过概率密度定义，只跟y方向有关，其他无分量，而相位部分又只跟x方向有关，因此这一项点乘之后都成零了。
第二项，对相位因子求梯度再求散度，代入定义会发现是零。第三项，直接代入矢势具体形式，也发现是零，因此三项都是零，故密度流散度是零。

当然了可以不用从初始定义开始这么麻烦的，直接对之前求的密度流的结果再求一次散度也行，结果一样。这说明：

$$\nabla\cdot\vec{j}=0\rightarrow\frac{\partial\rho}{\partial t}=0$$

也就是波函数是定态，不含时的。当然这个结论也可以从哈密顿量里看得出来，哈密顿确实不含时。

对于$(0,Bx,0)$规范，上述结果调换x,y，各种论述流程不变。

对称规范解电子运动问题

我们首先重述一遍对称规范：$\vec{A}=(-\frac{1}{2}By,\frac{1}{2}Bx,0)$
那么自然代入哈密顿算符，把括号直接拆掉

$$\begin{aligned}H&=\frac{(p_x-\frac{eBy}{2})^2}{2\mu}+\frac{(p_y-\frac{eBx}{2c})^2}{2\mu}\\&=\frac{1}{2\mu}(p_x^2+p_y^2)+\frac{eB}{2\mu c}L_z+\frac{e^2B^2}{8\mu c^2}(x^2+y^2)\end{aligned}$$

其中我们把交叉项记作了角动量算符L_z，这一项的物理意义像$-\mu\cdot\vec{B}$磁矩。而第三项的物理意义是抗磁项。

直接求解这个方程也是不现实的，我们发现这里x,y的地位是对称的，这很难不让人想起极坐标，因此考虑极坐标下偏导表达式

$$-\hbar^2\nabla^2 = -\hbar^2(\frac{\partial^2}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}) - \frac{\hbar^2}{\rho^2}\cdot\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$$

然后新定义一个量,这个量是之前的ω_c的一半

$$\omega_L = \frac{eB}{2\mu c} \equiv \frac{\omega_c}{2}$$

那么现在我们就可以把哈密顿算符改到极坐标下

$$H = \frac{p_\rho^2}{2\mu} + \frac{L_z^2}{2\mu\rho^2} + \frac{1}{2}\mu\omega_L^2\rho^2 + \omega_L L_z$$

这里第一项对应拉普拉斯算符的括号内，第二项是拉普拉斯算符的括号外的项，这一项根据角动量算符的定义，又被改写了，这是令我们欣慰了，第三项对应之前距离平方项，第四项则是利用新定义的频率稍微改写了一下

现在哈密顿算符稍微好看了点，但是我们好像还是束手无策，但是没关系，我们注意到这个哈密顿跟角动量算符是对易的，选取$[L_z, H] = 0$本征态。于是

$$\Psi_E(\rho,\varphi) = R(\rho)e^{im\varphi}$$

由于极坐标里求归一化时往往要用到像这样的$\int rf(r)dr$，因此方便起见，额外定义

$$\chi(\rho) \equiv \rho^{\frac{1}{2}}R(\rho)$$

于是代入Ψ到H里，作用掉φ相关的角动量算符，得到

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu}\chi'' + \frac{\hbar^2}{2\mu\rho^2}(m^2 - \frac{1}{4})\chi + \frac{1}{2}\mu\omega_L^2\rho^2\chi = (E - m\hbar\omega_L)\chi$$

即

$$\chi'' + \frac{2\mu}{\hbar^2}(E' - \frac{(m+\frac{1}{2})(m-\frac{1}{2})}{2\mu\rho^2} - \frac{1}{2}\mu\omega_L^2\rho^2)\chi = 0$$

其中$E' = E - m\hbar\omega_L$

理论上现在这就是一个一元二阶微分方程，我们直接级数展开是可以求解的，但是其实，在量子力学I里我们已经见过这个方程了，回忆一下三维谐振子

回忆三维谐振子

其面临的方程是

$$\chi''+\frac{2\mu}{\hbar^2}(E-\frac{l(l+1)\hbar^2}{2\mu r^2}-\frac{1}{2}\mu\omega^2r^2)\chi=0$$

其解为

$$\chi=r^{l+1}e^{-\frac{\alpha^2r^2}{2}}F(-n_r,l+\frac{3}{2},\alpha^2r^2)$$

其中F为合流超几何函数,能量本征值为$E=(2n_r+l+\frac{3}{2})\hbar\omega$

因此我们发现类比定义$l=|m|-\frac{1}{2}$可以类似求解

此时$E'=(2n_\rho+(|m|-\frac{1}{2})+\frac{3}{2})\hbar\omega_L=(n_\rho+\frac{1}{2})\hbar\omega_c+|m|\hbar\omega_L$

那么根据定义，原本的能量，跟其他规范下是形式一样的

$$E=E'+m\hbar\omega_L=(n_\rho+\frac{|m|+m}{2}+\frac{1}{2})\hbar\omega_c\equiv(n+\frac{1}{2})\hbar\omega_c$$

以及解得的波函数

$$\chi(\rho)=\rho^{|m|+\frac{1}{2}}e^{-\frac{\alpha_L^2\rho^2}{2}}F(-n_\rho,|m|+1,\alpha_L^2\rho^2)$$

其中特征长度平方倒数为$\alpha_L^2=\frac{\mu\omega_L}{\hbar}=\frac{\mu\omega_c}{2\hbar}=\frac{eB}{2\hbar c}$

以及全部往回代得到总波函数定义

$$\Psi_E(\rho,\varphi)=e^{im\varphi}\rho^{|m|}e^{-\frac{\alpha_L^2\rho^2}{2}}F(-n_\rho,|m|+1,\alpha_L^2\rho^2)$$

至此，结束

作业题对称规范讨论简并度

1. 在对称规范下求简并度f

首先，我们给出要用到的重要定义。

$$\chi=\rho^{|m|+\frac{1}{2}}e^{-\frac{\alpha_L^2\rho^2}{2}}F\left(-n_\rho,|m|+1,\alpha_L^2\rho^2\right)$$

其中$\alpha_L^2=\mu\omega_L/\hbar=eB/(2\hbar c)=eB\pi/(\hbar c)$

以及能量部分

$$E = E' + m\hbar\omega_L = (N+1)\hbar\omega_L = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega_c$$

其中$N = 2n_\rho + |m| + m$，$n = n_\rho + \frac{|m|+m}{2}$

根据作业的提示思路，我们求导就行了，即求出最可几半径，然后考察该半径取最大值的时候的情况就行。这个应该好做一点。

首先，对于基态，量子数$n_\rho = 0$，$m = 0$，代入定义，合流超几何函数$F(0, 1, \alpha_L^2\rho^2) = 1$，波函数简化为：

$$\chi(\rho) = \rho^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{\alpha_L^2\rho^2}{2}}.$$

于是根据定义有，概率密度：

$$dP = 2\pi\rho|\chi(\rho)|^2 d\rho = 2\pi\rho^2 e^{-\alpha_L^2\rho^2} d\rho.$$

前面的2π不管了，对后面的求导并令其为零：

$$\frac{d}{d\rho}\left(\rho^2 e^{-\alpha_L^2\rho^2}\right) = 2\rho e^{-\alpha_L^2\rho^2} - 2\alpha_L^2\rho^3 e^{-\alpha_L^2\rho^2} = 0 \implies \rho_{\max} = \frac{1}{\alpha_L}.$$

根据提示，波函数能放在半径为R的圆盘内，需满足$\rho_{\max} < R$，即$\frac{1}{\alpha_L} < R$。考虑到α_L一般是以平方出现好一些，而这里各个量显然都是正的，于是两边平方得到

$$\frac{1}{\alpha_L^2} < R^2$$

代入α_L定义，得到

$$\frac{hc}{\pi e B} < R^2$$

移项并且代入面积定义，有

$$1 < \frac{\pi R^2 B}{hc/e} = \frac{AB}{hc/e}$$

右边正是我们的简并度定义，于是简并度得证

“有效面积”的角度

在教案中的思路，跟作业里的不太一样，作业的思路是，波函数存在一个平均面积，也就是有效面积的概念，那么圆盘的面积除以波函数平均面积，就是能容纳的波函数的数量。笔者认为，这个思路更自然，是所有人都会接受的，而作业里用最可几半径小于圆盘半径的思路证明不能容纳得下，这不一定是所有人都可以立即接受的。

但是现在问题来到，什么是平均半径？什么是平均面积

平均面积是，坐标算符作用两次于波函数的均值的开方，也就是均方位移开根号，$\sqrt{\langle \rho^2 \rangle}$，对应的平均面积就是平均半径为圆心的圆，也就是$\pi\langle \rho^2 \rangle$。这些的理解是，坐标算符作用两次于波函数，提取的就是一种面积量纲的东西，取平均，那么反映的就是一种对空间的占据情况，开方作为长度量纲，反映的就是波函数分布的的平均半径，画一个圆，就是$A_0 = \pi\langle \rho^2 \rangle$，就是平均面积。

好吧其实这个定义可能也不是所有人都能接受的，但是笔者认为其实感觉还好。因为类比一下正态分布，均方根是离散程度，那么我们这里均方根也是离散程度，也是长度度量，就称为平均半径，笔者认为还是可以接受的。

给定的基态波函数（$m = 0$,$n_\rho = 0$）为：

$$\chi(\rho) = \rho^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{\alpha_L^2 \rho^2}{2}}.$$

注意我们要首先计算归一化常数N，注意不需要再额外补ρ了，使得：

$$\int_0^\infty |\chi(\rho)|^2 \, d\rho = 1.$$

代入波函数：

$$\int_0^\infty \left(\rho^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{\alpha_L^2 \rho^2}{2}} \right)^2 d\rho = \int_0^\infty \rho e^{-\alpha_L^2 \rho^2} \, d\rho.$$

利用一个积分公式：

$$\int_0^\infty x e^{-ax^2} dx = \frac{1}{2a}, \quad (a > 0)$$

得到：

$$N^2 \cdot \frac{1}{2\alpha_L^2} = 1 \implies N = \sqrt{2}\alpha_L$$

那么现在归一化后的波函数为：

$$\chi(\rho) = \sqrt{2}\alpha_L\, \rho^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{\alpha_L^2\rho^2}{2}}$$

下面，根据定义，均方位移为，注意积分时候也不需要补ρ：

$$\langle \rho^2 \rangle = \int_0^\infty \rho^2 |\chi(\rho)|^2\, d\rho$$

代入归一化波函数：

$$\langle \rho^2 \rangle = 2\alpha_L^2 \int_0^\infty \rho^3 e^{-\alpha_L^2\rho^2}\, d\rho$$

利用积分公式：

$$\int_0^\infty x^3 e^{-ax^2} dx = \frac{1}{2a^2}$$

得到：

$$\langle \rho^2 \rangle = 2\alpha_L^2 \cdot \frac{1}{2\alpha_L^4} = \frac{1}{\alpha_L^2}.$$

于是这样就出来了，有效面积是

$$A_0 = \pi\langle \rho^2 \rangle = \pi \cdot \frac{1}{\alpha_L^2} = \frac{\pi}{\alpha_L^2}.$$

我们的圆盘，假设系统总面积为A，则简并度就是圆盘里塞下多少个上面的有效面积：

$$f = \frac{A}{A_0} = \frac{A\alpha_L^2}{\pi}$$

代入α_L^2定义，就是

$$f = \frac{A}{A_0} = \frac{AB}{hc/e}$$

于是完毕！