16. 朗道能级的简并

首先，我们复习一下之前的波函数的形式：

$$\phi(y)=H_n(\alpha(y-y_0))e^{-\frac{\alpha^2(y-y_0)^2}{2}}$$

其中，$y_0=\frac{c\hbar k_x}{eB}$，$\omega_c=\frac{eB}{\mu c}$，$\alpha=\sqrt{\frac{\mu\omega_c}{\hbar}}=\sqrt{\frac{eB}{c\hbar}}$，此外额外定义特征长度$x_0=l=L=\frac{1}{\alpha_L}=\sqrt{\frac{\hbar}{\omega_c\cdot\mu}}=\sqrt{\frac{\hbar c}{eB}}$
最终本征函数的形式是

$$e^{ik_xx}H_n(\alpha(y-y_0))e^{-\frac{\alpha^2(y-y_0)^2}{2}}$$

- 这里进行几点重要说明
- 波函数$\phi(y)$里面的y_0是跟x方向的波矢量k_x有关的，对于不同的波矢量k_x，y_0定义不同，也就是说$\phi(y)$中心不同。这意味着空间里其实有很多很多不同的y_0取值，自然也有很多的波函数，由于我们知道一个波函数最多容纳两个电子，那么我们自然很关心，波函数y_0的取值有多少，这是后面我们要讨论的
- 本身$\phi(y)$作为谐振子，是有分立的能级的，也就是ϕ_n，这个分立跟上面的k_x导致的波函数不同是独立的，因此我们对波函数的标记最好以后用$\phi_{k_x,n}$以避免混淆
- 现在我们感兴趣的是对于相同的谐振子能级n，波函数有多少种k_x就是最大的容纳量，或者说，这就是n能级的简并度，这就是朗道能级的简并度。下面我们开始

第一种情况，假设体系是无限大的，k_x不会有任何的限制，自然任意能级n下的波函数$\phi_{k_x,\ n}$的取值也是无穷的，容纳量也是无穷的，简并度是无穷的，这没有太大的物理意义。

下面我们考虑体系有限，但是假设体系在x方向是周期的，那么由周期性条件有k_x要满足的表达式：

$$k_x\cdot L_x=2\pi\cdot n_x$$

其中取值$n_x\in\mathcal{Z}$,体系的长度用L_x表示，移向得到k_x要满足的表达式

$$k_x=\frac{2\pi}{L_x}\cdot n_x$$

现在乍一看，好像啥也没说，因为k_x取值还是无限的。但是我们现在反过来看y_0的情况，由于$y_0=\frac{c\hbar k_x}{eB}$，显然其不应该在盒子外部，那么其就要满足

$$0 \leq y_0 = \frac{c\hbar \cdot 2\pi \cdot n_x}{eBL_x} \leq L_y$$

上面利用了k_x刚推出来的表达式，那么现在我们发现n_x原本是$n_x \in \mathcal{Z}$，现在却因为盒子的限制，要满足

$$n_x \leq \frac{L_y L_x \cdot B}{(\frac{hc}{e})} \equiv N$$

也就是现在取值并不是无限大了，那么自然的k_x取值就受限了。这里我们再额外说明一下，右边分子实际上是磁通量，分母我们一般称为磁通量子，为什么这么称为呢，因为在第十一节里，我们证明了如果存在磁荷，其元单位应该是

$$e_m = \frac{\hbar c}{2e}$$

因此这种定义下，这就是磁通量子了，磁通量除以磁通量子，自然会得到一个数，这个数就是体系最多有多少个量子，也就是所谓的容纳量，朗道能级简并度

$$f = \frac{A \cdot B}{(\frac{hc}{e})}$$

我们简单考察一下上面各个式子的数量级
取$B = 1T$有特征长度$l = \sqrt{\frac{\hbar c}{eB}} \approx 2.5 \times 10^{-8} m$
取$L_x \sim 10^{-2} m$，可计算y_0的间隔

$$\Delta y_0 = \frac{c\hbar \cdot 2\pi}{eB} \frac{1}{L_x} = l^2 \cdot \frac{2\pi}{L_x} \approx 10^{-6} l$$

这说明y_0间隔很小，远小于特征长度l，而这个特征长度本质上是波函数的弥散程度，这说明波函数还没怎么衰减，就抵达下一个y_0的领域了，因此各个波函数之间可能相互作用比较强，并不是独立的。但我们先不考虑这些独不独立的问题，这暂时不重要。

我们先看看波函数的概率密度是怎样的，根据定义

$$\rho = |\psi_{n,k_x}|^2 = \phi^2_{n,k_x}(y)$$

其中平面波部分取复共轭抵消了。

下面考虑密度流，根据定义,S是相位因子，$\vec{A}$是矢势，代入定义

$$\vec{j}=\frac{\rho}{\mu}(\nabla S+\frac{e\vec{A}}{c})=\frac{\rho}{\mu}(\nabla(\hbar k_x\cdot x)+\frac{e(-By\hat{x})}{c})=\frac{e\rho B}{\mu c}(y_0-y)\hat{x}$$

也就是说密度只在x方向流动，并且当$y_0=y$附近没有流动，而在稍微偏一点的地方，上下偏的流动方向相反。然后我们考虑密度流的散度，直接链式法则展开

$$\nabla\cdot\vec{j}=\frac{\nabla\rho}{\mu}\cdot(\nabla s+\frac{e\vec{A}}{c})+\frac{\rho}{\mu}(\nabla\cdot\nabla s+\frac{e}{c}\nabla\cdot\vec{A})$$

其中第一项，由于括号内是一个矢量，括号外是一个矢量，因此点乘只能取x,y,z分别的分量计算，而ρ之前求过概率密度定义，只跟y方向有关，其他无分量，而相位部分又只跟x方向有关，因此这一项点乘之后都成零了。
第二项，对相位因子求梯度再求散度，代入定义会发现是零。第三项，直接代入矢势具体形式，也发现是零，因此三项都是零，故密度流散度是零。

当然了可以不用从初始定义开始这么麻烦的，直接对之前求的密度流的结果再求一次散度也行，结果一样。这说明：

$$\nabla\cdot\vec{j}=0\rightarrow\frac{\partial\rho}{\partial t}=0$$

也就是波函数是定态，不含时的。当然这个结论也可以从哈密顿量里看得出来，哈密顿确实不含时。

对于$(0,Bx,0)$规范，上述结果调换x,y，各种论述流程不变。