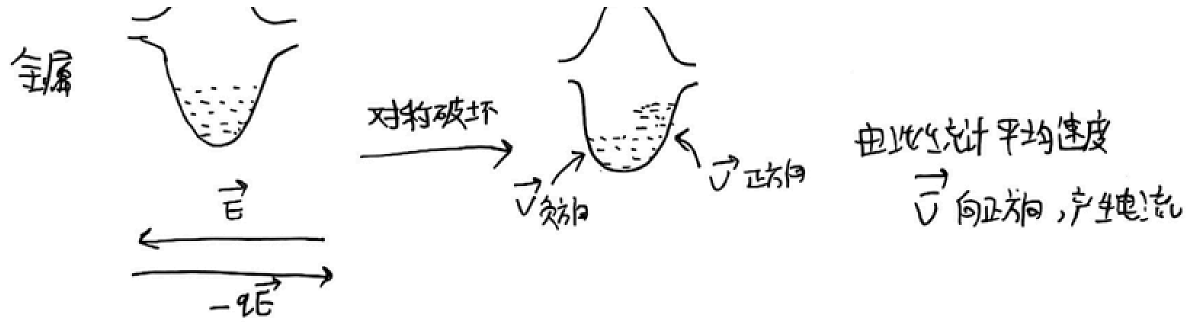
半导体微观欧姆定律

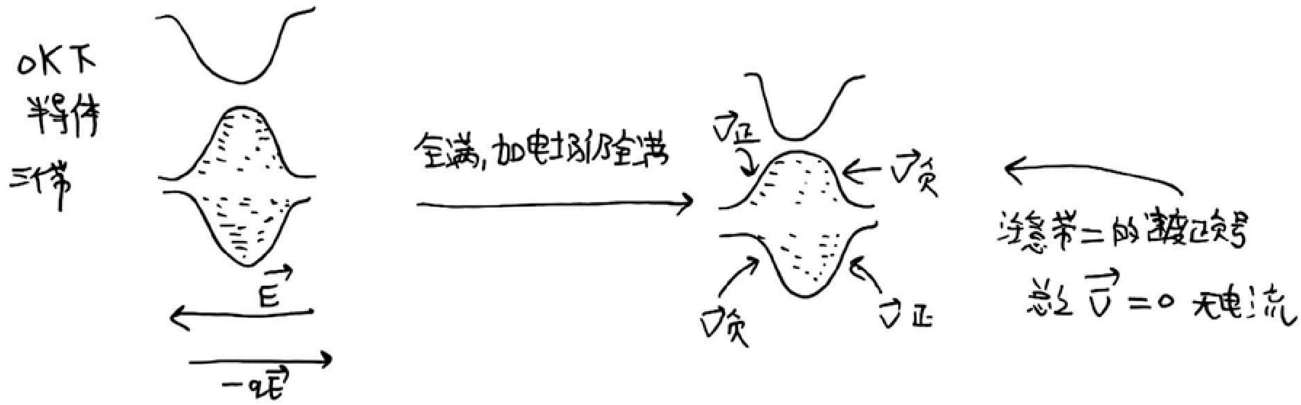
考虑欧姆定律公式：$j = \sigma E$
在半导体的情形，电导率σ与电子、空穴浓度n、p相关，可表示为：

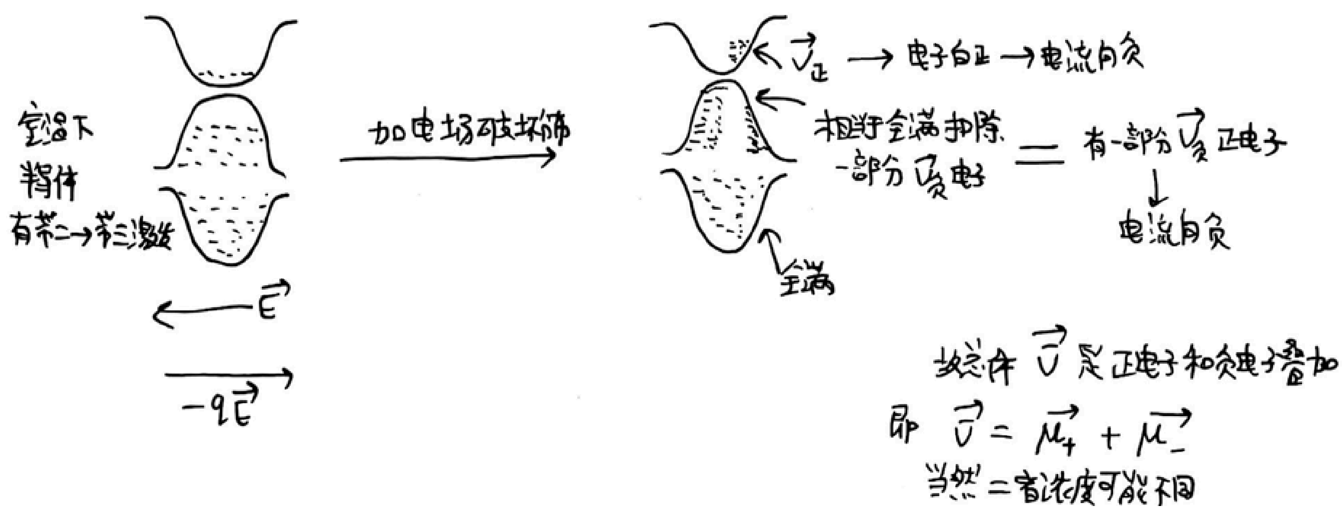
$$\sigma = ne\mu_n + pe\mu_p$$

其中μ_n、μ_p为电子、空穴迁移率(跟上一章的能带不对称分布的速度期望值是一个东西)，由能带特征（如有效质量，反映加速难易）和散射几率决定。事实上这个可以这么理解，半导体无非是特殊的金属。我们上一章考虑金属的费米面附近的电子的不对称分布，就是值得非满的带在电场下发生不对称的分布偏移，以及碰撞导致偏移回归对称分布的问题。

而实际中，半导体定义为绝对零度为满带的材料，其就算能带上的电子发生了平移，也会因为周期性而不产生电子的定向移动（仍然保持正负速度抵消）。但是半导体一般在室温下就会发生电子的激发，此时分为价带和导带，原先满的价带现在产生正电子空穴，原先空的导带现在填充部分电子。其中导带部分，就跟之前讨论的非满的能带的电场中分布发生变化，然后各种碰撞回归分布等等一样了，因此这部分是完全按照之前的理论处理的。而价带的顶部是正电子，其性质其实是完全一样的，电场下空穴也是不对称的，然后也会有碰撞，因此结果来看，这部分也完全跟之前一样的处理。因此这里考察导带和价带的迁移率μ_n, μ_p，本质上就是之前的能带特征和散射几率影响的定向移动速度，将其累加当然当然就是总的电导率了。我们来看一个示意图，更好地理解







如图，最顶部是的图是之前上一章考虑的金属体系的例子，加电场使得电子分布对称被打破，然后就会有期望速度不为零，这就是电流。中间的图是绝对零度下的半导体(或者绝缘体)，此时满带的情况，加了电场也会因为电子在布里渊区周期运动而保持对称分布，因此是没有电流的。注意一下电子速度是切线方向，第二个带和第一个带在同一个波矢处切线不一定一样，因此要注意速度正负号。

我们关心的来到第三幅图，室温下半导体被激发(如果激发稀少或者是绝缘体，就仍然维持图二)，那么此时加电场，对于最顶部的导带就会有电子，中间的价带就会有空穴，外加电场会导致这二者都不对

称。此时顶部导带的考虑结果跟第一幅图是一样的，而中间的价带，采取准粒子——空穴的思路，认为与其说是全满的带扣除了电子，不如说是一个空的体系填入了正电子，那么这么看的话就是一部分正电子向切线方向(这个地方切线负斜率)行动，就是负方向电流。这跟导带的负方向电流是一样的。因此我们说价带空穴和导带电子的行为是一样的，都可以类似地讨论

尽管空穴不是实粒子而是虚拟粒子，但是我们后续的讨论总是说处理载流子，这是因为就算后续的讨论是建立在价带电子的情形的，也总可以将其替换为对应空穴的定义再走一遍，结论是不变的。因此后续统称载流子。

霍尔效应，这一节跳了

非平衡载流子与扩散电流

然后我们考虑一个问题，之前我们说电流是电场下产生的，对应的关系由电导率描述，这就是说载流子对电场的响应使得载流子在k空间的分布不再是均匀的，从而整个体系的电子定向移动速率的期望不是零，这对应的电流是**漂移电流**。在之前的考虑的问题里，我们其实求的是一个外场$\vec{E}$下，非平衡统计分布f的稳态解，即稳态分布是非对称的，但是解是不随时间变化的稳态(因为之前用了恒定电流假设)。

现在，我们现在马上考虑的是非平衡载流子，这里的平衡不是之前的k空间对称的平衡。这里的平衡指的是电子-空穴的数量关系因为**实空间**的不同导致的非平衡。我们说非平衡载流子会因为不同区域的浓度差而产生**扩散电流**，下面是详细的说明。

尽管我们一直以来，前面这么多节讨论电子和空穴，都是建立在k空间的基础上，在平衡的时候，电子和空穴对称分布，k空间的电子波函数是整体离域的，我们可以在实空间里定域化考察某一个点的电子密度，这应该是没问题的，只需要对波函数取模方就好了。整个实空间各点的电子密度应该是均匀的，即每个晶胞中的电子数量是一样的，只是晶胞内部一些点的密度会有起伏罢了。

但是考虑到外加电场，此时k空间的分布就不是均匀了，对应到实空间的描述，会不会出现一些晶胞的电子密度显著高，一些其余显著低的现象，同样空穴也是一样的现象呢?
其实，这个现象，一般不会出现在均匀的金属体系内，因此我们之前第六章的讨论都是针对金属的，不用担心实空间的电子分布会变化，金属的这种能力也是电子气的高屏蔽能力的一种体现。但是现在我们待会要研究的，不是金属，也不止是半导体，而是PN结，这是一个非均匀体系，就会出现实空间的电子分布不均。因此讨论PN结之前，我们先来看看实空间的不均匀引起的非平衡载流子服从的物理规律，以及其对应的扩散效应——扩散电流

在材料热激发平衡时，电子与空穴满足热平衡关系：$n_0p_0=\sqrt{N_cN_v}e^{-\frac{E_g}{kT}}$（$N_c$、$N_v$为导带、价带有效状态密度；$E_g$为禁带宽度 ）。
当外界作用（如光照、电场）破坏某一处的热平衡，在这一处会产生非平衡载流子(假设暂时不考虑扩散)，我们记此时参考平衡态下，额外电子为Δn、额外空穴Δp。

作为一个例子可以回顾之前的例子(但是之前的例子是说在k空间的电子和空穴数量，下面这个例子改为在实空间的电子数量):

在原点处的晶胞处在平衡态应该有初始的电子-空穴各自数量为$5-5$，此时加入施主使得导带数目多，$12.5-5$，此时乘积从25变为62.5，不满足公式，因此要发生平衡，必须有2.5个导带电子湮灭掉2.5个价带空穴，成为电子和空穴数量$10-2.5$

尽管这个例子很粗糙，但是至少我们肯定知道，一个非平衡体系会趋于平衡，问题只是出在这个弛豫的时间罢了(以及回归的机制)

好吧一个具体的有现实意义的这种非平衡统计趋于平衡的例子可能实在是很难计算，因此我们考虑一个理想化模型，非平衡载流子通过复合回到平衡态，其数量随时间衰减的规律满足：

$$\frac{d\Delta n}{dt}=-\frac{\Delta n}{\tau}$$

即发生衰变的粒子与当前的粒子成正比，这是一个很经典的类似于核衰变，以及化学上一级反应的假设，也就是认为每个粒子的衰变都是独立的，期望时间是τ，对应的解当然是$\Delta n=(\Delta n)_0e^{-\frac{t}{\tau}}$，即非平衡的粒子指数衰减，多数场景下这个公式或许可有效描述复合过程

扩散电流

考虑一个半导体中在原点进行光照或者电激发，使得在实空间处这一点的载流子的浓度相较于不进行扰动的平衡态发生了偏离，将其记为$\Delta n=N$(下面简单起见，都用N标记非平衡的浓度)，除了发生之前说的湮灭复合衰变外，我们注意原点处的载流子此时与周围就不同了，有了数量上的差异，那么这必然会产生载流子的扩散，扩散电流密度

$$j_{\text{扩散}}=-D\frac{dN}{dx}$$

其中D为扩散系数，反映扩散能力；负号表示扩散方向与浓度梯度方向相反，即从高浓度到低浓度

上述的扩散是对任意地方都满足的，但是我们又知道非平衡载流子扩散同时会复合湮灭，因此又发生扩散又发生湮灭，体系在稳态下应该要满足方程：

$$\frac{d}{dx}\left(-D\frac{dN}{dx}\right)-\frac{N}{\tau}=0$$

这样的二阶微分方程的解必定是$x=Ae^{\frac{-x}{\sqrt{D\tau}}}+Be^{\frac{x}{\sqrt{D\tau}}}$

代入边界条件，假设原点处持续光照，其浓度是固定的，无穷远处是没有浓度的：$x=x_0$时$N=N_0$；$x\to\infty$时$N=0$

那么就得到稳态下各点的密度的表达式$N(x)=N_0e^{-\frac{x}{\sqrt{D\tau}}}$
对坐标求导取负，得到扩散电流密度的表达式：$j_{扩散}(x)=N_0\frac{D}{\sqrt{D\tau}}e^{-\frac{x}{\sqrt{D\tau}}}$

PN结

下面到了我们终于要关注的PN结——这个在现代的电子信息技术工业上，是一个基石的存在——信息时代的技术原点。

利用之前的结论，热平衡态时，导带电子与价带空穴的分布是：

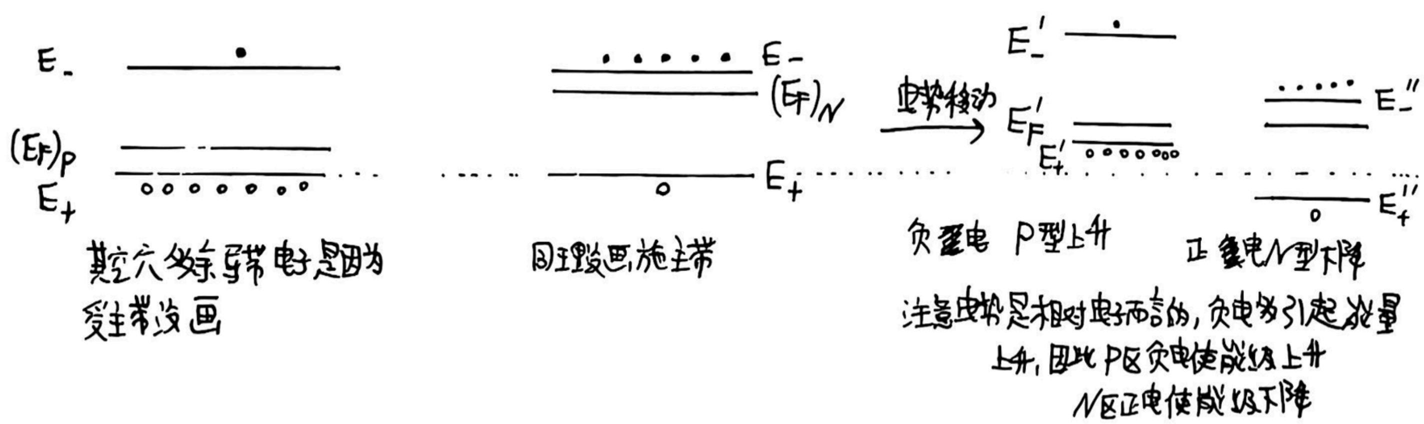
$$\begin{cases} n=N_-e^{-(E_--E_{\mathrm{F}})/k_{\mathrm{B}}T} \\ p=N_+e^{-(E_{\mathrm{F}}-E_+)/k_{\mathrm{B}}T} \end{cases}$$

上述的各项参数是材料固有的性质，E_{F}，N_-、N_+都是确定的。因此考虑两份一样的的材料，但是进行了少量的掺杂，使得其中一个成为 n 型半导体，室温下，n 型的N_-导带会额外有一些电子(源于施主能级)，使得$n>p$，同时其费米能级E_{F}现在标记为$(E_{\mathrm{F}})_N$，显然高于原始的E_{F}

另一个我们进行少量的受主掺杂，使得其成为 p 型，其受主带接收N_+提供的电子，使导带上$n<p$，此时体系的其费米能级为$(E_{\mathrm{F}})_P$，显然小于E_{F}

将这两个材料肩并肩放在一块，在接触之前，上述的结论告诉我们$(E_{\mathrm{F}})_N>E_{\mathrm{F}}>(E_{\mathrm{F}})_P$，因此会使电子的流动产生电荷积累，因为$E_{\mathrm{F}}$反映的是体系失去一个或者获得一个电子的能量，故电子当然希望从$(E_{\mathrm{F}})_N$处跑到$(E_{\mathrm{F}})_P$处，但这样就会使 N 型半导体失去电子，使得其从原本的正常不带电的材料带上正电荷，类似地P 型现在带负电，因此这种正负电荷就会产生势场，形成势差V_0，使$(E_{\mathrm{F}})_N$下移，$(E_{\mathrm{F}})_P$上移，直到二者平衡，当然了同样的，这时两个材料各自的导带和价带E_-和E_+也是一样的要进行平移，最终二者平移的距离要满足填平费米能差别的条件，即$qV_0=(E_{\mathrm{F}})_N-(E_{\mathrm{F}})_P$。

如图所示，这个过程可以如此表述



注意一下能级是相对电子而言的，带正电的N区是能级下降而不是上升。此外就是因为要满足$qV_0=(E_{\mathrm{F}})_N-(E_{\mathrm{F}})_P$，那么这个条件可以理解为P区上升一半，即$0.5qV_0$，N区一样，也下降一半$0.5qV_0$

。

此时观察，N 区导带电子比 P 区导带多，但能级越高能量越大，故电子要从N区走到 P 区，有个势垒，这个势垒，原本是不存在的，但是因为上述P上升和N下降，最终导致势垒现在就是热平衡时移动的总距离qV_0。

而对于 P 区的价带空穴多于 N 区价带电子，注意空穴是越往下走能量越大，故也会有势垒，故也是qV_0
。

因此此时的 N 与 P 间通过qV_0达到一种平衡。尽管电子数量不同，但是反正有势垒，认为过不去，或者说认为过去的跟回来的数量一样

在达到新平衡时，我们可定量考察各个部分的电子比例，无论是 P 区还是 N 区，此时考察其导带电子数量 n 的自然要满足：

$$n = N_{-} \exp\left[-\frac{(\text{导带与 } E_{\mathrm{F}} \text{ 距离})}{k_{\mathrm{B}}T}\right]$$

其导带底是各自对应的E_{-}，但 N 区和 P 区的E_{F}在平衡时是同一高度，由此两边导带底$E_{-}^{''}, E_{-}^{'}$,之间的差就源于电势，差值是qV_0。

因此两边的导带电子比值就会相差这个差值：

$$\frac{n_P^0}{n_N^0} = e^{-qV_0/k_{\mathrm{B}}T}$$

这就是二者在导带的电子比值，上标 0 表示这是处于平衡时的。

类似的空穴也有：

$$\frac{p_N^0}{p_P^0} = e^{-qV_0/k_{\mathrm{B}}T}$$

PN结外加电场

下面考虑外加电场的行为，加电场本质上也是改变两边的电势差 。

我们把在 P 区通正极，N 区通负极，称正向电压，显然电压为 V 时，这会其带来电势eV，这与之前 N 区和 P 区形成的势垒V_0是反向的，因为之前势垒是 N 区带正电，P 区带负电，V_0是从$N \to P$；现在加正向电压的V是从$P \to N$。

那么此时，如果达到新的热平衡态，本质上就是P区的电子增加，N区电子减少，在电压加的比较少的时候，我们认为之前的规律保持不变，现在去掉上标0,电势部分取差：

$$\frac{n_P}{n_N} = e^{-q(V_0-V)/k_\mathrm{B}T}$$

并且假设因为N区电子是大量的，认为其没有什么变化，即$n_N \approx n_N^0$，这样就得到了

$$\frac{n_P}{n_N^0} = e^{-q(V_0-V)/k_\mathrm{B}T}$$

跟之前平衡时的P区电子做一个对比，数量上就是

$$\frac{n_P}{n_P^0} = e^{qV/k_\mathrm{B}T}$$

即添加的正向电压 V，使n_P从之前n_P^0的数量的情况下增多非常多倍数

但是此时体系，相较于之前的n_P^0，这是一种非平衡态，其多余的部分就是：

$$\Delta n = n_P - n_P^0 = n_P^0\left(e^{qV/k_\mathrm{B}T} - 1\right)$$

作为P区的一部分，这部分的电子浓度显著高于远离PN结区域的浓度，因此这部分固然会往周围发生扩散运动，也会发生复合等，因此套用上一小节的讨论，这样的扩散流密度是(方向是P区往P远端区域，也就是N往P的方向的电子运动，对应到外电路就是P往N的电流)

$$n_P^0\left(e^{qV/k_\mathrm{B}T} - 1\right)\frac{D_n}{L_n}$$

乘上电荷就是扩散电流：

$$j_n = -q\frac{D_n}{L_n}n_P^0\left(e^{qV/k_\mathrm{B}T} - 1\right)$$

类似的对空穴也有在N区，要往N远端进行正电子的扩散，方向是P到N的电流：

$$j_p = -q\frac{D_p}{L_p}p_N^0\left(e^{qV/k_\mathrm{B}T} - 1\right)$$

上述电流同向，直接相加得到总电流$j = j_n + j_p$，为方便起见，额外定义一个值为反向饱和电流(名字含义见下一小节)：

$$j_0 = q\left(\frac{D_n}{L_n}n_P^0 + \frac{D_p}{L_p}p_N^0\right)$$

那么此时的电流表示：

$$j = -j_0\left(e^{qV/k_\mathrm{B}T} - 1\right)$$

这个电流就是PN结在外加P到N的电压下，产生的P到N的电流，这当然是符合我们期望的——PN结正向电压产生正向电流。值得一提的是电源的作用，因为在上述的扩散过程中，P区的额外载流子(电子)是不断向远P区域扩散，这使得P区域电子浓度趋于恢复正常，如果说外加电压只加了一瞬间就停下，随着时间弛豫，额外的电子部分Δn消耗完毕，N区空穴也是类似的消耗完毕，此时体系回到平衡状态下的PN结，也就是只有势差V_0的状态，不发生扩散(或者说扩散正负抵消)，无扩散电流的状态。

体系能一直产生电流是因为电源持续不断地在维持电压，这种电压使得P区域电子浓度n_P发生扩散后$n_P-\delta$及时得到补充恢复到n_P,因为这个值才是外加电压下的稳态浓度(电子希望从费米能级高的地方往低了走，外加的电压确实把N区能级抬高，P区降低，使得电子自发的从N往P运动)，其一边发生扩散消耗(还有湮灭)一边接受来自电压压力的从N区往P区运输过来的电子，由此整个电路的电子形成闭环，不断运动。

反向注入电压

反向时，上面各种过程不变，只是此时P区的电子从之前的变更多变成了变更少，我们只需要把$e^{qV/k_{\mathrm{B}}T}-1$换成$e^{qV_r/k_{\mathrm{B}}T}-1$即可，也就是

$$j_n=q\frac{D_n}{L_n}n_P^0\left(1-e^{qV_r/k_{\mathrm{B}}T}\right)$$

这里把括号外面的负号跟括号乘起来，使得括号内维持一个正数。一样的，此时的总电流的形式不变，此时我们还是要用到上面定义过的反向饱和电流

$$j=j_0\left(1-e^{qV_r/k_{\mathrm{B}}T}\right)\approx j_0$$

取约等号是因为外部电压只需要稍微加一点点就会导致指数项为0，因此实际上这个时候电流就是饱和的。因此我们说，反向PN结有饱和电流

注意此时非平衡载流子是负数$\Delta n<0$，因此我们跟之前的情况做一个对比，之前是P区电子多了(电压从N区搬运到P区)，发生向外的扩散，同时要发生原地的复合湮灭。现在是P区电子更少了(被电压抽走到N区了)，因此外部向内的扩散，以及现在是发生原地的产生过程。由此，我们的反向饱和电流的定义，为了突出本质，将里面的扩散长度L_n代入其定义$L_n=\sqrt{D\tau}$，得到

$$j_0=q\left(\frac{D_n}{L_n}n_P^0+\frac{D_p}{L_p}p_N^0\right)=q\left(\frac{D_n}{\sqrt{D_n\tau_n}}n_P^0+\frac{D_p}{\sqrt{D_p\tau_p}}p_N^0\right)=q\left(\frac{L_n}{\tau_n}n_P^0+\frac{L_p}{\tau_p}p_N^0\right)$$

按照这个形式，我们更明显的看出来$\frac{n_p^0}{\tau_n},\frac{p_N^0}{\tau_p}$，在式子里这两项其实代表的是电子复合湮灭速率的取负，我们找一找之前的定义

“非平衡载流子通过复合回到平衡态，其数量随时间衰减的规律满足”：

$$\frac{d\Delta n}{dt}=-\frac{\Delta n}{\tau}$$

那么回到这里，这里的这两项是取负的，就相当于是产生效率，也就是说反向饱和电流，是取决于产生效率的。其中再乘以的扩散长度L_n, L_p意思就是这样产生的电子(或者空穴)其运动的距离，那么综合来看反向饱和电流的来源是——自然产生的电子发生的扩散长度。

遗憾的是，在平衡态时，P区电子和N区空穴已经是小量，就算将这二者置于零，其对应的产生速率也是一个很小的数值，因此这注定了反向饱和电流是一个小量。这就导致了PN结在注入反向电压的时候，电流很快达到饱和，并且该饱和值是一个很小的值。

不过如果对于特殊的材料，其中P区电子和N区空穴并不是小量，那么这个饱和值就不小，不过这不改变其饱和了的事实。

总之这就是PN结的内容了，后面的各自内容比较无趣，或者说难度可能更大，对应的领域更加特化，因此笔者就不想看了。就算看，估计也是第八章看看磁性的解释吧。