Mengolah Dokumen Menggunakan Latex

Disusun Untuk Menenuhi Tugas Mata Kuliah Aplikasi Komputer

Dosen Pengampu:
Bapak Drs. Sahid, M.Sc. dan Bapak Thesa Adi S., M.Cs.

Disusun oleh:
Nama: Umi Nurkhasanah
NIM: 22305141032
Kelas: Matematika E 2022

PRODI MATEMATIKA
DEPARTEMEN PENDIDIKAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS NEGERI YOGYAKARTA
2023

DAFTAR ISI

BAB 1

KB PEKAN 2 (BELAJAR MENGGUNAKAN SOFTWARE EMT)

[a4paper,10pt]article eumat

Pendahuluan dan Pengenalan Cara Kerja EMT

Selamat datang! Ini adalah pengantar pertama ke Euler Math Toolbox (disingkat EMT atau Euler). EMT adalah sistem terintegrasi yang merupakan perpaduan kernel numerik Euler dan program komputer aljabar Maxima.
- Bagian numerik, GUI, dan komunikasi dengan Maxima telah dikembangkan oleh R. Grothmann, seorang profesor matematika di Universitas Eichstätt, Jerman. Banyak algoritma numerik dan pustaka software open source yang digunakan di dalamnya.
- Maxima adalah program open source yang matang dan sangat kaya untuk perhitungan simbolik dan aritmatika tak terbatas. Software ini dikelola oleh sekelompok pengembang di internet.
- Beberapa program lain (LaTeX, Povray, Tiny C Compiler, Python) dapat digunakan di Euler untuk memungkinkan perhitungan yang lebih cepat maupun tampilan atau grafik yang lebih baik.

Yang sedang Anda baca (jika dibaca di EMT) ini adalah berkas notebook di EMT. Notebook aslinya bawaan EMT (dalam bahasa Inggris) dapat dibuka melalui menu File, kemudian pilih "Open Tutorias and Example", lalu pilih file "00 First Steps.en". Perhatikan, file notebook EMT memiliki ekstensi ".en". Melalui notebook ini Anda akan belajar menggunakan software Euler untuk menyelesaikan berbagai masalah matematika.

```
>// ini untuk komen
```

Panduan ini ditulis dengan Euler dalam bentuk notebook Euler, yang berisi teks (deskriptif), baris-baris perintah, tampilan hasil perintah (numerik, ekspresi matematika, atau gambar/plot), dan gambar yang disisipkan dari file gambar.

Untuk menambah jendela EMT, Anda dapat menekan [F11]. EMT akan menampilkan jendela grafik di layar desktop Anda. Tekan [F11] lagi untuk kembali ke tata letak favorit Anda. Tata letak disimpan untuk sesi berikutnya.

Anda juga dapat menggunakan [Ctrl]+[G] untuk menyembunyikan jendela grafik. Selanjutnya Anda dapat beralih antara grafik dan teks dengan tombol [TAB].

Seperti yang Anda baca, notebook ini berisi tulisan (teks) berwarna hijau, yang dapat Anda edit dengan mengklik kanan teks atau tekan menu Edit -> Edit Comment atau tekan [F5], dan juga baris perintah EMT yang ditandai dengan ">" dan berwarna merah. Anda dapat menyisipkan baris perintah baru dengan cara menekan tiga tombol bersamaan: [Shift]+[Ctrl]+[Enter].

Komentar (Teks Uraian)

Komentar atau teks penjelasan dapat berisi beberapa "markup" dengan sintaks sebagai berikut.

```
- * Judul
- ** Sub-Judul
- latex: F (x) = \int_a^x f (t) \, dt
- mathjax: \frac{x^2-1}{x-1} = x + 1
- maxima: 'integrate(x^3,x) = integrate(x^3,x) + C
- http://www.euler-math-toolbox.de
- See: http://www.google.de | Google
- image: hati.png
- ---
```

Hasil sintaks-sintaks di atas (tanpa diawali tanda strip) adalah sebagai berikut.

Judul

Sub-Judul

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$$

$$\frac{x^2-1}{x-1} = x + 1$$

$$\int x^3\, dx = C + \frac{x^4}{4}$$

http://www.euler-math-toolbox.de
See: http://www.google.de | Google

Gambar diambil dari folder images di tempat file notebook berada dan tidak dapat dibaca dari Web. Untuk "See:", tautan (URL)web lokal dapat digunakan.
Paragraf terdiri atas satu baris panjang di editor. Pergantian baris akan memulai baris baru. Paragraf harus dipisahkan dengan baris kosong.

```
>// baris perintah diawali dengan >, komentar (keterangan) diawali dengan //
```

Baris Perintah

Mari kita tunjukkan cara menggunakan EMT sebagai kalkulator yang sangat canggih.
EMT berorientasi pada baris perintah. Anda dapat menuliskan satu atau lebih perintah dalam satu baris perintah. Setiap perintah harus diakhiri dengan koma atau titik koma.
- Titik koma menyembunyikan output (hasil) dari perintah.
- Sebuah koma mencetak hasilnya.
- Setelah perintah terakhir, koma diasumsikan secara otomatis (boleh tidak ditulis).
Dalam contoh berikut, kita mendefinisikan variabel r yang diberi nilai 1,25. Output dari definisi ini adalah nilai variabel. Tetapi karena tanda titik koma, nilai ini tidak ditampilkan. Pada kedua perintah di belakangnya, hasil kedua perhitungan tersebut ditampilkan.

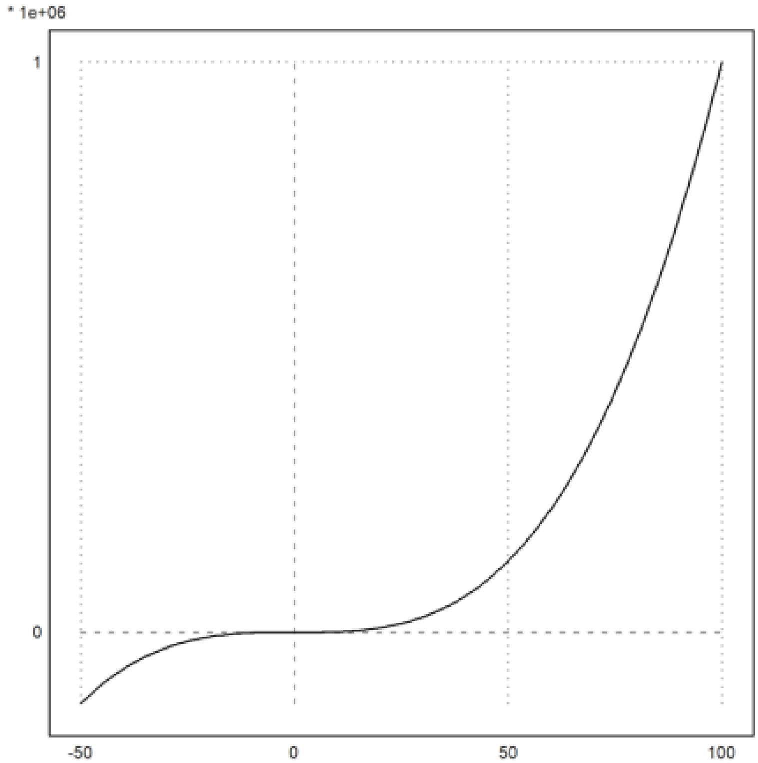
```
>  r=1.25; pi*r^2, 2*pi*r
```

```
  4.90873852123
  7.85398163397
```

Latihan untuk Anda

- Sisipkan beberapa baris perintah baru
- Tulis perintah-perintah baru untuk melakukan suatu perhitungan yang Anda inginkan, boleh menggunakan variabel, boleh tanpa variabel.

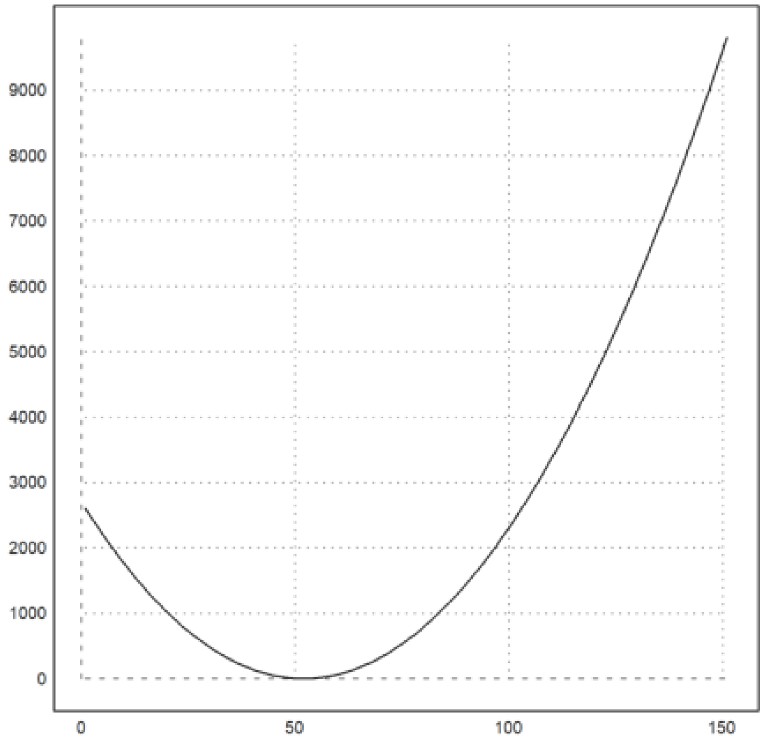
```
>x=-50:100;
>y=x^3;
>plot2d(x,y):
```




```
>5*7+7-0
```

```
42
```

```
>plot2d(x^2-2x+1):
```



Beberapa catatan yang harus Anda perhatikan tentang penulisan sintaks perintah EMT.
- Pastikan untuk menggunakan titik desimal, bukan koma desimal untuk bilangan!
- Gunakan * untuk perkalian dan ^ untuk eksponen (pangkat).
- Seperti biasa, * dan / bersifat lebih kuat daripada + atau -.
- ^ mengikat lebih kuat dari *, sehingga pi * r ^ 2 merupakan rumus luas lingkaran.
- Jika perlu, Anda harus menambahkan tanda kurung, seperti pada 2 ^ (2 ^ 3).

Perintah r = 1.25 adalah menyimpan nilai ke variabel di EMT. Anda juga dapat menulis r: = 1.25 jika mau. Anda dapat menggunakan spasi sesuka Anda.
Anda juga dapat mengakhiri baris perintah dengan komentar yang diawali dengan dua garis miring (//).

```
>r := 1.25 // Komentar: Menggunakan  := sebagai ganti =
```

```
1.25
```

Argumen atau input untuk fungsi ditulis di dalam tanda kurung.

```
>sin(45°), cos(pi), log(sqrt(E))
```

```
0.707106781187
-1
0.5
```

Seperti yang Anda lihat, fungsi trigonometri bekerja dengan radian, dan derajat dapat diubah dengan °. Jika keyboard Anda tidak memiliki karakter derajat tekan [F7], atau gunakan fungsi deg() untuk mengonversi.
EMT menyediakan banyak sekali fungsi dan operator matematika.Hampir semua fungsi matematika sudah tersedia di EMT. Anda dapat melihat daftar lengkap fungsi-fungsi matematika di EMT pada berkas Referensi (klik menu Help -> Reference)

Untuk membuat rangkaian komputasi lebih mudah, Anda dapat merujuk ke hasil sebelumnya dengan "%". Cara ini sebaiknya hanya digunakan untuk merujuk hasil perhitungan dalam baris perintah yang sama.

```
>(sqrt(5)+1)/2, %^2-%+1 // Memeriksa solusi x^2-x+1=0 //sqrt buat akar
```

```
1.61803398875
2
```

Latihan untuk Anda

- Buka berkas Reference dan baca fungsi-fungsi matematika yang tersedia di EMT.
- Sisipkan beberapa baris perintah baru.
- Lakukan contoh-contoh perhitungan menggunakan fungsi-fungsi matematika di EMT.

```
>asinh(8)
```

```
2.77647228072
```

```
>log10(10000)
```

```
4
```

```
>{phi,r}=polar(1,2), degprint(phi), r,
```

```
1.10714871779
63°26'5.82''
2.2360679775
```

```
>primes(20)
```

```
[2,  3,  5,  7,  11,  13,  17,  19]
```

```
>length(primes(20))
```

```
8
```

```
>sinh(1)
```

```
1.17520119364
```

Satuan

EMT dapat mengubah unit satuan menjadi sistem standar internasional (SI). Tambahkan satuan di belakang angka untuk konversi sederhana.

```
>1miles  // 1 mil = 1609,344 m
```

```
1609.344
```

Beberapa satuan yang sudah dikenal di dalam EMT adalah sebagai berikut. Semua unit diakhiri dengan tanda dolar ($), namun boleh tidak perlu ditulis dengan mengaktifkan easyunits.
kilometer$:=1000;
km$:=kilometer$;
cm$:=0.01;
mm$:=0.001;
minute$:=60;
min$:=minute$;
minutes$:=minute$;
hour$:=60*minute$;
h$:=hour$;
hours$:=hour$;
day$:=24*hour$;
days$:=day$;
d$:=day$;
year$:=365.2425*day$;
years$:=year$;
y$:=year$;
inch$:=0.0254;
in$:=inch$;
feet$:=12*inch$;
foot$:=feet$;
ft$:=feet$;
yard$:=3*feet$;
yards$:=yard$;
yd$:=yard$;
mile$:=1760*yard$;
miles$:=mile$;
kg$:=1;
sec$:=1;
ha$:=10000;
Ar$:=100;
Tagwerk$:=3408;
Acre$:=4046.8564224;
pt$:=0.376mm;
Untuk konversi ke dan antar unit, EMT menggunakan operator khusus, yakni ->.

```
>5year -> " days", 1ft -> " inch"
```

```
1826.2125 days
12 inch
```

```
>4km -> miles, 4inch -> " mm"
```

```
2.48548476895
101.6 mm
```

Format Tampilan Nilai

Akurasi internal untuk nilai bilangan di EMT adalah standar IEEE, sekitar 16 digit desimal. Aslinya, EMT tidak mencetak semua digit suatu bilangan. Ini untuk menghemat tempat dan agar terlihat lebih baik. Untuk mengatrtamilan satu bilangan, operator berikut dapat digunakan.

```
>pi
```

```
3.14159265359
```

```
>longest pi
```

```
      3.141592653589793
```

```
>long pi
```

```
3.14159265359
```

```
>short pi
```

```
3.1416
```

```
>shortest pi
```

```
   3.1
```

```
>fraction pi
```

```
312689/99532
```

```
>short 1200*1.03^10, long E, longest pi
```

```
1612.7
2.71828182846
      3.141592653589793
```

Format aslinya untuk menampilkan nilai menggunakan sekitar 10 digit. Format tampilan nilai dapat diatur secara global atau hanya untuk satu nilai.
Anda dapat mengganti format tampilan bilangan untuk semua perintah selanjutnya. Untuk mengembalikan ke format aslinya dapat digunakan perintah "defformat" atau "reset".

```
>longestformat; pi, defformat; pi
```

```
3.141592653589793
3.14159265359
```

Kernel numerik EMT bekerja dengan bilangan titik mengambang (floating point) dalam presisi ganda IEEE (berbeda dengan bagian simbolik EMT). Hasil numerik dapat ditampilkan dalam bentuk pecahan.

```
>1/7+1/4, fraction %
```

```
0.392857142857
11/28
```

Perintah Multibaris

Perintah multi-baris membentang di beberapa baris yang terhubung dengan "..." di setiap akhir baris, kecuali baris terakhir. Untuk menghasilkan tanda pindah baris tersebut, gunakan tombol [Ctrl]+[Enter]. Ini akan menyambung perintah ke baris berikutnya dan menambahkan "..." di akhir baris sebelumnya. Untuk menggabungkan suatu baris ke baris sebelumnya, gunakan [Ctrl]+[Backspace].
Contoh perintah multi-baris berikut dapat dijalankan setiap kali kursor berada di salah satu barisnya. Ini juga menunjukkan bahwa ... harus berada di akhir suatu baris meskipun baris tersebut memuat komentar.

```
>a=4; b=15; c=2; // menyelesaikan a*x^2+b*x+c=0 secara manual ...
>D=sqrt(b^2/(a^2*4)-c/a); ...
>-b/(2*a) + D, ...
>-b/(2*a) - D
```

```
-0.138444501319
-3.61155549868
```

Menampilkan Daftar Variabe

Untuk menampilkan semua variabel yang sudah pernah Anda definisikan sebelumnya (dan dapat dilihat kembali nilainya), gunakan perintah "listvar".

```
>listvar
```

```
phi                 1.10714871779409
r                   2.23606797749979
x                   Type: Real Matrix (1x151)
y                   Type: Real Matrix (1x151)
a                   4
b                   15
c                   2
D                   1.73655549868123
```

Perintah listvar hanya menampilkan variabel buatan pengguna. Dimungkinkan untuk menampilkan variabel lain, dengan menambahkan string termuat di dalam nama variabel yang diinginkan.
Perlu Anda perhatikan, bahwa EMT membedakan huruf besar dan huruf kecil. Jadi variabel "d" berbeda dengan variabel "D".
Contoh berikut ini menampilkan semua unit yang diakhiri dengan "m" dengan mencari semua variabel yang berisi "m$".

```
>listvar m$
```

```
km$                    1000
cm$                    0.01
mm$                    0.001
nm$                    1853.24496
gram$                  0.001
m$                     1
hquantum$              6.62606957e-34
atm$                   101325
```

Untuk menghapus variabel tanpa harus memulai ulang EMT gunakan perintah "remvalue".

```
>remvalue a,b,c,D
>D //soalnya udah diilangin
```

```
Variable D not found!
Error in:
D //soalnya udah diilangin ...
                           ^
```

Menampilkan Panduan

Untuk mendapatkan panduan tentang penggunaan perintah atau fungsi di EMT, buka jendela panduan dengan menekan [F1] dan cari fungsinya. Anda juga dapat mengklik dua kali pada fungsi yang tertulis di baris perintah atau di teks untuk membuka jendela panduan.
Coba klik dua kali pada perintah "intrandom" berikut ini!

```
>intrandom(10,6)
```

```
[4,  2,  6,  2,  4,  2,  3,  2,  2,  6]
```

```
>intrandom(1,7)//1 itu banyak bilangan random yang dicari, 7 itu kayak rentangnya sampai 7
```

```
2
```

Di jendela panduan, Anda dapat mengklik kata apa saja untuk menemukan referensi atau fungsi.
Misalnya, coba klik kata "random" di jendela panduan. Kata tersebut boleh ada dalam teks atau di bagian "See:" pada panduan. Anda akan menemukan penjelasan fungsi "random", untuk menghasilkan bilangan acak berdistribusi uniform antara 0,0 dan 1,0. Dari panduan untuk "random" Anda dapat menampilkan panduan untuk fungsi "normal", dll.

```
>random(10)
```

```
[0.704419,  0.217693,  0.445363,  0.308411,  0.914541,  0.193585,
0.463387,  0.095153,  0.595017,  0.431184]
```

```
>normal(10)
```

```
[1.73589,  -0.264435,  -2.00818,  0.285776,  0.00872827,  -1.28258,
-0.399601,  0.616153,  3.18004,  -0.576101]
```

Matriks dan Vektor

EMT merupakan suatu aplikasi matematika yang mengerti "bahasa matriks". Artinya, EMT menggunakan vektor dan matriks untuk perhitungan-perhitungan tingkat lanjut. Suatu vektor atau matriks dapat didefinisikan dengan tanda kurung siku. Elemen-elemennya dituliskan di dalam tanda kurung siku, antar elemen dalam satu baris dipisahkan oleh koma(,), antar baris dipisahkan oleh titik koma (;).
Vektor dan matriks dapat diberi nama seperti variabel biasa.

```
>v=[4,5,6,3,2,1]
```

```
[4,  5,  6,  3,  2,  1]
```

```
>A=[1,2,3;4,5,6;7,8,9]
```

```
            1            2            3
            4            5            6
            7            8            9
```

Karena EMT mengerti bahasa matriks, EMT memiliki kemampuan yang sangat canggih untuk melakukan perhitungan matematis untuk masalah-masalah aljabar linier, statistika, dan optimisasi.
Vektor juga dapat didefinisikan dengan menggunakan rentang nilai dengan interval tertentu menggunakan tanda titik dua (:),seperti contoh berikut ini.

```
>c=1:5
```

```
[1,  2,  3,  4,  5]
```

```
>w=0:0.2:1
```

```
[0,  0.2,  0.4,  0.6,  0.8,  1]
```

```
>mean(w^2)
```

```
0.366666666667
```

Bilangan Kompleks

EMT juga dapat menggunakan bilangan kompleks. Tersedia banyak fungsi untuk bilangan kompleks di EMT. Bilangan imaginer

$$i = \sqrt{-1}$$

dituliskan dengan huruf I (huruf besar I), namun akan ditampilkan dengan huruf i (i kecil).

```
re(x) : bagian riil pada bilangan kompleks x.
im(x) : bagian imaginer pada bilangan kompleks x.
complex(x) : mengubah bilangan riil x menjadi bilangan kompleks.
conj(x) : Konjugat untuk bilangan bilangan komplkes x.
arg(x) : argumen (sudut dalam radian) bilangan kompleks x.
real(x) : mengubah x menjadi bilangan riil.
```

Apabila bagian imaginer x terlalu besar, hasilnya akan menampilkan pesan kesalahan.

```
>sqrt(-1) // Error!
>sqrt(complex(-1))
```

```
>\z=2+3*I, re(z), im(z), conj(z), arg(z), deg(arg(z)), deg(arctan(3/2))
```

```
Syntax error in expression, or unfinished expression!
Error in:
\z=2+3*I, re(z), im(z), conj(z), arg(z), deg(arg(z)), deg(arct ...
^
```

```
>complex(10)
```

```
10+0i
```

```
>real(10)
```

```
10
```

```
>deg(arg(I)) // 90°
```

```
90
```

```
>sqrt(-1)
```

```
Floating point error!
Error in sqrt
Error in:
sqrt(-1) ...
        ^
```

```
>sqrt(complex(-1))
```

```
0+1i
```

EMT selalu menganggap semua hasil perhitungan berupa bilangan riil dan tidak akan secara otomatis mengubah ke bilangan kompleks.

Jadi akar kuadrat -1 akan menghasilkan kesalahan, tetapi akar kuadrat kompleks didefinisikan untuk bidang koordinat dengan cara seperti biasa. Untuk mengubah bilangan riil menjadi kompleks, Anda dapat menambahkan 0i atau menggunakan fungsi "complex".

```
>complex(-1), sqrt(%)
```

```
-1+0i
0+1i
```

Matematika Simbolik

EMT dapat melakukan perhitungan matematika simbolis (eksak) dengan bantuan software Maxima. Software Maxima otomatis sudah terpasang di komputer Anda ketika Anda memasang EMT. Meskipun demikian, Anda dapat juga memasang software Maxima tersendiri (yang terpisah dengan instalasi Maxima di EMT).

Pengguna Maxima yang sudah mahir harus memperhatikan bahwa terdapat sedikit perbedaan dalam sintaks antara sintaks asli Maxima dan sintaks ekspresi simbolik di EMT.

Untuk melakukan perhitungan matematika simbolis di EMT, awali perintah Maxima dengan tanda "&". Setiap ekspresi yang dimulai dengan "&" adalah ekspresi simbolis dan dikerjakan oleh Maxima.

```
>& (a+b)^2
```

```
                                     2
                              (b + a)
```

```
>&expand((a+b)^2), &factor(x^2+5*x+6)
```

```
                                2             2
                               b  + 2 a b + a

                               (x + 2) (x + 3)
```

```
>&solve(a*x^2+b*x+c,x) // rumus abc
```

```
                        2                          2
             - sqrt(b  - 4 a c) - b      sqrt(b  - 4 a c) - b
        [x = ----------------------, x = --------------------]
                        2 a                        2 a
```

```
>&(a^2-b^2)/(a+b), &ratsimp(%) // ratsimp menyederhanakan bentuk pecahan
```

```
                                  2    2
                                 a  - b
                                 -------
                                  b + a

                                  a - b
```

```
>10! // nilai faktorial (modus EMT)
```

```
3628800
```

```
>&10! //nilai faktorial (simbolik dengan Maxima)
```

```
                    3628800
```

Untuk menggunakan perintah Maxima secara langsung (seperti perintah pada layar Maxima) awali perintahnya dengan tanda "::" pada baris perintah EMT. Sintaks Maxima disesuaikan dengan sintaks EMT (disebut "modus kompatibilitas").

```
>factor(1000) // mencari semua faktor 1000 (EMT)
```

```
  [2,  2,  2,  5,  5,  5]
```

```
>:: factor(1000) // faktorisasi prima 1000 (dengan Maxima)
```

```
                     3  3
                    2  5
```

```
>:: factor(20!)
```

```
              18  8  4  2
             2   3  5  7  11 13 17 19
```

Jika Anda sudah mahir menggunakan Maxima, Anda dapat menggunakan sintaks asli perintah Maxima dengan menggunakan tanda ":::" untuk mengawali setiap perintah Maxima di EMT. Perhatikan, harus ada spasi antara ":::" dan perintahnya.

```
>::: binomial(5,2); // nilai C(5,2)
```

```
                     10
```

```
>::: binomial(m,4); // C(m,4)=m!/(4!(m-4)!)
```

```
             (m - 3) (m - 2) (m - 1) m
             -------------------------
                        24
```

```
>::: trigexpand(cos(x+y)); // rumus cos(x+y)=cos(x) cos(y)-sin(x)sin(y)
```

```
                        cos(x) cos(y) - sin(x) sin(y)
```

```
>::: trigexpand(sin(x+y));
```

```
                        cos(x) sin(y) + sin(x) cos(y)
```

```
>::: trigsimp(((1-sin(x)^2)*cos(x))/cos(x)^2+tan(x)*sec(x)^2) //menyederhanakan fungsi tri
```

```
                                     4
                          sin(x) + cos (x)
                          ----------------
                                 3
                              cos (x)
```

Untuk menyimpan ekspresi simbolik ke dalam suatu variabel digunakan tanda "&=".

```
>p1 &= (x^3+1)/(x+1)
```

```
                                 3
                                x  + 1
                                ------
                                x + 1
```

```
>&ratsimp(p1)
```

```
                               2
                              x  - x + 1
```

Untuk mensubstitusikan suatu nilai ke dalam variabel dapat digunakan perintah "with".

```
>&p1 with x=3 // (3^3+1)/(3+1)
```

```
                                   7
```

```
>&p1 with x=a+b, &ratsimp(%) //substitusi dengan variabel baru
```

```
                                   3
                            (b + a)  + 1
                            ------------
                             b + a + 1


                     2                  2
                    b  + (2 a - 1) b + a  - a + 1
```

```
>&diff(p1,x) //turunan p1 terhadap x
```

```
                                 2      3
                              3 x      x  + 1
                              ----- - --------
                              x + 1          2
                                      (x + 1)
```

```
>&integrate(p1,x) // integral p1 terhadap x
```

```
                                3      2
                             2 x  - 3 x  + 6 x
                             -----------------
                                     6
```

Tampilan Matematika Simbolik dengan LaTeX

Anda dapat menampilkan hasil perhitunagn simbolik secara lebih bagus menggunakan LaTeX. Untuk melakukan hal ini, tambahkan tanda dolar ($) di depan tanda & pada setiap perintah Maxima.
Perhatikan, hal ini hanya dapat menghasilkan tampilan yang diinginkan apabila komputer Anda sudah terpasang software LaTeX.

```
>$&(a+b)^2
```

$$\left(b+a\right)^2$$

```
>$&expand((a+b)^2), $&factor(x^2+5*x+6)
```

$$b^2+2\,a\,b+a^2$$

$$\left(x+2\right)\,\left(x+3\right)$$

```
>$&solve(a*x^2+b*x+c,x) // rumus abc
```

$$\left[x=\frac{-\sqrt{b^2-4\,a\,c}-b}{2\,a} , x=\frac{\sqrt{b^2-4\,a\,c}-b}{2\,a}\right]$$

```
>$&(a^2-b^2)/(a+b), $&ratsimp(%)
```

$$\frac{a^2-b^2}{b+a}$$

$$a-b$$

Selamat Belajar dan Berlatih!

Baik, itulah sekilas pengantar penggunaan software EMT. Masih banyak kemampuan EMT yang akan Anda pelajari dan praktikkan.
Sebagai latihan untuk memperlancar penggunaan perintah-perintah EMT yang sudah dijelaskan di atas, silakan Anda lakukan hal-hal sebagai berikut.
- Carilah soal-soal matematika dari buku-buku Matematika.
- Tambahkan beberapa baris perintah EMT pada notebook ini.
- Selesaikan soal-soal matematika tersebut dengan menggunakan EMT.

Pilih soal-soal yang sesuai dengan perintah-perintah yang sudah dijelaskan dan dicontohkan di atas.

```
>$&f(x)=(2*x^2-4*x+1)^60, $&diff(%,x)
```

$$f\left(x\right)=\left(2\,x^2-4\,x+1\right)^{60}$$

$$\frac{d}{d\,x}\,f\left(x\right)=60\,\left(4\,x-4\right)\,\left(2\,x^2-4\,x+1\right)^{59}$$

```
>$&expand((x+4)^2+(y-2)^2=25)
```

$$y^2-4\,y+x^2+8\,x+20=25$$

```
>$& diff(8*x^2,x)
```

$$16\,x$$

BAB 2

KB PEKAN 3-4: MENGGUNAKAN EMT UNTUK MENYELESAIKAN MASALAH-MASALAH ALJABAR

[a4paper,10pt]article eumat

PENGGUNAAN SOFTWARE EMT UNTUK ALJABAR

Umi Nurkhasanah (22305141032)

Operasi Bentuk-Bentuk Aljabar

Pengertian Aljabar

Aljabar adalah salah satu bagian dari ilmu matematika terkait ilmu bilangan,geometri dan analisis penyelesaiannya dengan menggunakan atau mengandung huruf-huruf atau yang biasa kita sebut sebagai variabel.
Pada aljabar, dikenal beberapa istilah sebagai berikut
1. Variabel, yaitu lambang pengganti nilai yang belum diketahui.
2. Koefisien, yaitu angka yang biasanya mengiringi huruf atau variabel.
3. Konstanta, yaitu angka yang terdapat dalam persamaan dan berdiri sendiri.
4. Suku

```
   a. Suku sejenis, yaitu suku-suku yang memiliki variabel yang sama
```

dan pangkat yang sama pula.

```
   b. Suku tak sejenis, yaitu yaitu suku-suku yang memiliki variabel
```

yang berbeda, atau variabel yang sama namun memiliki pangkat yang berbeda juga tergolong dalam suku ini.
Perhatikan contoh bentuk lajabar berikut

$$2x + 3y + 4$$

x dan y merupakan suatu variabel
2 merupakan koefisien dari x dan 3 merupakan koefisien dari y
4 merupakan suatu konstanta
2x dan 3y merupakan suku tak sejenis

Operasi Penjumlahan Aljabar dengan EMT

Penjumlahan merupakan penambahan sekelompok bilangan atau lebih menjadi suatu bilangan yang disebut jumlah. Dalam konteks aljabar, syarat penjumlahan adalah suku sukunya harus sejenis. Seperti dengan perhitungan aritmatika lainnya, operasi penjumlahan disimbolkan dengan tand "+"

SOAL R.3 No 7
Melakukan operasi yang ditunjukkan

$$(2x+3y+z-7)+(4x-2y-z+8)+(-3x+y-2z-4)$$

```
>$& (2*x+3*y+z-7)+(4*x-2*y-z+8)+(-3*x+y-2*z-4)
```

$$-2\,z+2\,y+3\,x-3$$

Penjelasan:
2x, 4x, dan -3x merupakan suku sejenis, sehingga akan akan dikelompokkan dan dijumlahkan, menghasilkan 3x
3y, -2y, dan y merupakan suku sejenis, sehingga akan dikelompokkan dan dijumlahkan, menghasilkan 3y
z, -z, dan -2z merupakan suku sejenis, sehingga akan dikelompokkan dan dijumlahkan, menghasilkan -2z
-7, 8, dan -4 merupakan konstanta, sehingga akan dikelompokkan dan dijumlahkan, menghasilkan -3
Jadi hasil akhirnya adalah

$$3x+2y-2z-3$$

SOAL 2

$$3x^2+4x^4+9x^2+6x+x^4$$

```
>$& (3*x^2+4*x^4+9*x^2+6*x+x^4)
```

$$5\,x^4+12\,x^2+6\,x$$

Penjelasan:

$$3^2+9x^2$$

merupakan suku sejenis, sehingga akan dikelompokkan dan dijumlahkan, menghasilkan

$$12x^2$$

$$4x^4 + x^4$$

merupakan suku sejenis, sehingga akan dikelompokkan dan dijumlahkan, menghasilkan

$$5x^4$$

6x memiliki 0 pasangan suku sejenis lainnya sehingga tetap ditulis 6x
Jadi hasil akhirnya adalah

$$5x^4 + 12x^2 + 6x$$

SOAL 3

$$y^4 + 4x^4 + 3x^2 + 9x^2 + 6x + 7x$$

```
>$& (3*x^2+4*x^4+9*x^2+6*x+y^4+7*x)
```

$$y^4 + 4\,x^4 + 12\,x^2 + 13\,x$$

Penjelasan:

$$y^4$$

memiliki 0 pasangan suku sejenis lainnya sehingga tetap ditulis

$$y^4$$

4x^4
memiliki 0 pasangan suku sejenis lainnya sehingga tetap ditulis

$$4x^4$$

$$3x^2 + 9x^2$$

merupakan suku sejenis, sehingga dikelompokkan dan dijumlahkan, menghasilkan

$$12x^2$$

$$6x + 7x$$

merupakan suku sejenis, sehingga dikelompokkan dan dijumlahkan, menghasilkan

$$13x$$

Jadi hasil akhirnya adalah

$$y^4 + 4x^4 + 12x^2 + 13x$$

```
>
```

Contoh soal lainnya:

$$3a^2 + 4b^4 + 9c^2 + 6d + e^4 + b^2 + a^2$$

```
>$& (3*a^2+4*b^4+9*c^2+6*d+e^4+b^2+a^2)
```

$$e^4 + 6\,d + 9\,c^2 + 4\,b^4 + b^2 + 4\,a^2$$

langkah pertama yaitu kelompokkan suku-suku yang sejenis.

$$4b^4 + e^4 + 3a^2 + a^2 + 9c^2 + b^2 + 6d$$

lalu jumlahkan suku-suku sejenis yang sudah dikelompokkan tadi dengan yang lainnya.

$$4b^4 + e^4 + 4a^2 + b^2 + 9c^2 + 6d$$

---

latihan soal:

$$(2x^2 + 12xy - 11) + (6x^2 - 2x + 4) + (-x^2 - y - 2)$$

```
>$& (2*x^2+12*x*y-11)+(6*x^2-2*x+4)+(-x^2-y-2)
```

$$12\,x\,y - y + 7\,x^2 - 2\,x - 9$$

Operasi Pengurangan Aljabar dengan EMT

Pengurangan adalah operasi matematika yang digunakan untuk mengurangi satu bilangan dengan bilangan lainnya. Operator pengurangan pada EMT juga disimbolkan dengan tanda "-"

SOAL R.3 No 9

$$(3x^2 - 2x - x^3 + 2) - (5x^2 - 8x - x^3 + 4)$$

```
>$& (3*x^2-2*x-x^3+2)-(5*x^2-8*x-x^3+4)
```

$$-2\,x^2 + 6\,x - 2$$

penjelasan:
Jika soal tersebut diuraikan, maka dengan adanya sifat distributif yang dimiliki oleh aljabar akan diperoleh hasil sebagai berikut

$$3x^2 - 2x - x^3 + 2 - 5x^2 + 8x + x^3 - 4$$

Setelah itu, kelompokkan suku sejenis lalu jumlahkan sesuai dengan suku-suku sejenisnya, maka akan diperoleh hasil sebagai berikut

$$-x^3 + x^3 + 3x^2 - 5x^2 - 2x + 8x + 2 - 4$$

$$-2x^2 + 6x - 2$$

SOAL R.3 No 10

$$(5x^2 + 4xy - 3y^2 + 2) - (9x^2 - 4xy + 2y^2 - 1)$$

```
>$& (5*x^2+4*x*y-3*y^2+2)-(9*x^2-4*x*y+2*y^2-1)
```

$$-5\,y^2 + 8\,x\,y - 4\,x^2 + 3$$

penjelasan:
Jika soal tersebut diuraikan, maka dengan sifat distributif yang dimiliki oleh aljabar akan diperoleh hasil sebagai berikut

$$5x^2 + 4xy - 3y^2 + 2 - 9x^2 + 4xy - 2y^+1$$

Setelah itu, kelompokkan suku sejenis lalu jumlahkan sesuai dengan suku-suku sejenisnya, maka akan diperoleh hasil sebagai berikut

$$5x^2 - 9x^2 + 4xy + 4xy - 3y^2 - 2y^2 + 2 + 1$$

$$-4x^2 + 8xy - 5y^2 + 3$$

SOAL R.3 No 11

$$(x^4 - 3x^2 + 4x) - (3x^3 + x^2 - 5x + 3)$$

```
>$& (x^4-3*x^2+4*x)-(3*x^3+x^2-5*x+3)
```

$$x^4 - 3\,x^3 - 4\,x^2 + 9\,x - 3$$

penjelasan:
Jika soal tersebut diuraikan, maka dengan sifat distributif yang dimiliki oleh aljabar akan diperoleh hasil sebagai berikut

$$x^4 - 3x^2 + 4x - 3x^3 - x^2 + 5x - 3$$

Setelah itu, kelompokkan suku sejenis lalu jumlahkan sesuai dengan suku-suku sejenisnya, maka akan diperoleh hasil sebagai berikut

$$x^4 - 3x^3 - 3x^2 - x^2 + 4x + 5x - 3$$

$$x^4 - 3x^3 - 4x^2 + 9x - 3$$

Latihan soal

$$(2x^4 - 3x^2 + 7x) - (5x^3 + 2x^2 - 3x + 5)$$

```
>$& (2*x^2-3*x^2+7*x)-(5*x^3+2*x^2-3*x+5)
```

$$-5\,x^3 - 3\,x^2 + 10\,x - 5$$

Operasi Perkalian Bentuk Aljabar Dengan EMT

Perkalian secara sederhana dapat dimaknai sebagai penjumlahan berulang.
Perkalian merupakan proses aritmetika dasar dimana suatu bilangan dilipatgandakan sesuai dengan bilangan bilangan pengalinya.
Dalam aljabar, operasi perkalian biasanya identik dengan menguraikan bentuk aljabarnya.
Misal:

$$x(x+2)$$

dengan menggunakan sifat distribusi, maka perkalian tersebut akan menghasilkan

$$x^2 + 2x$$

(Dijabarkan)

SOAL R.3 No

$$(x+6)(x+3)$$

```
>$& expand((x+6)*(x+3))
```

$$x^2+9\,x+18$$

Penjelasan:
Dengan adanya sifat distribusi, maka

$$(x+6)(x+3)$$

akan menghasilkan

$$=x^2+3x+6x+18$$

$$=x^2+6x+18$$

SOAL R.3 No 17

$$(a-b)(2a^3-ab+3b^2)$$

```
>$& expand((a-b)*(2*a^3-a*b+3*b^2))
```

$$-3\,b^3+4\,a\,b^2-2\,a^3\,b-a^2\,b+2\,a^4$$

```
>$powerdisp:true;
```

Penjelasan:
Dengan adanya sifat distributif, maka

$$(a-b)(2a^3-ab+3b^2)$$

akan menghasilkan

$$=2a^4-a^2b+3ab^2-2a^3b+ab^2-3b^3$$

$$=2a^4-a^2b-2a^3b+4ab^2-3b^3$$

SOAL R.3 No 43

$$(2x + 3y + 4)(2x + 3y - 4)$$

```
>$& expand((2*x+3*y+4)*(2*x+3*y-4))
```

$$-16 + 4\,x^2 + 12\,x\,y + 9\,y^2$$

```
>$powerdisp:false;
```

Penjelasan:
Dengan adanya sifat distributif, maka

$$(2x + 3y + 4)(2x + 3y - 4)$$

akan menghasilkan

$$9y^2 + 12xy + 4x^2 - 16$$

SOAL R.3 No 46

$$(y - 2)(y + 2)(y^2 + 4)$$

```
>$& expand((y-2)*(y+2)*(y^2+4))
```

$$y^4 - 16$$

Penjelasan:
Dengan adnaya sifat distributif, maka

$$(y - 2)(y + 2)(y^2 + 4)$$

akan menghasilkan

$$= (y^2 + 2y - 2y - 4)(y^2 + 4)$$

$$= (y^2 - 4)(y^2 + 4)$$

$$= y^4 + 4y^2 - 4y^2 - 16$$

$$= y^4 - 16$$

Latihan Soal

$$(a-8)(a-1)$$

```
>$& expand((a-8)*(a-1))
```

$$a^2-9\,a+8$$

Penjelasan:
Dengan adanya sifat distributif, maka

$$(a-8)(a-1)$$

akan menghasilkan

$$a^2-9a+8$$

Operasi Perpangkatan Aljabar Dengan EMT

Perpangkatan adalah operasi matematika untuk perkalian berulang suatu bilangan sebanyak pangkatnya. Pangkat suatu bilangan adalah angka yang ditulis lebih kecil dan terdapat agak ke atas.

SOAL 1
Sederhanakan soal bentuk penrpangkatan berikut

$$(x+1)^2$$

```
>$& (expand((x+1)^2))
```

$$x^2+2\,x+1$$

Penyelesaian:
Bentuk soal tersebut dapat dituliskan sebagai:

$$(x+1)(x+1)$$

Sehingga dengan memanfaatkan adanya sifat distributif akan dihasilkan

$$x^2+2x+1$$

SOAL 2

$$(x+2)^3$$

```
>$& (expand((x+2)^3))
```

$$x^3+6\,x^2+12\,x+8$$

Penyelesaian:
Bentuk soal tersebut dapat dituliskan sebagai berikut
(x+2)(x+2)(x+2)
Sehingga dengan adanya sifat distributif akan menghasilkan

$$x^3+6x^2+12x+8$$

SOAL 3

$$(x+1)^{-2}$$

```
>$& (expand((x+1)^-2))
```

$$\frac{1}{x^2+2\,x+1}$$

Operasi perpangkatan dengan pangkat negatif diselesaikan dengan cara sebagai berikut

$$(x+1)^{-2}=\frac{1}{(x+1)^2}$$

sehingga didapat hasilnya:

$$\frac{1}{x^2+2x+1}$$

latihan soal:

$$(5x-9y)^3$$

```
>$& expand((5*x-9*y)^3)
```

$$-729\,y^3+1215\,x\,y^2-675\,x^2\,y+125\,x^3$$

```
>$powerdisp:true;
```

Faktorisasi Aljabar dengan EMT

Di faktorisasi, kita akan menggunakan konsep FPB dan sifat distributif aljabar.
Untuk lebih gampang memahaminya, coba faktorisasi dengan angka terlebih dahulu, misal
24+60 = 2(12+30) angka 12 dan 30 masih bisa disederhanakan lagi

```
= 2.2(6+15)    angka 6 dan 15 masih bisa disederhanakan lagi
= 2.2.3(2+5)   karena 2 dan 5 tidak bisa disedderhanakan lagi,
= 12(7)
```

Jadi faktor yang akan kita ambil adalah yang terbesar, yaitu 12 dan 7.
Sekarang, coba dengan variabel

$$5x^3-12x^2=x(5x^2-12x)$$

masih bisa disederhanakan lagi

$$=x.x(5x-12)$$

karena sudah tidak bisa disederhanakan lagi,

$$=x^2(5x-12)$$

Karena angka 12 dan 5 tidak bisa difaktorkan, maka faktor terbesarnya adalah

$$x^2(5x-12)$$

Sekarang kita akan mencoba memfaktorkan di aplikasi EMT dengan mencoba soal-soal berikut ini.

SOAL R.4 No 23

$$t^2+8t+15$$

```
>$& factor(t^2+8*t+15)
```

$$(3+t)\ (5+t)$$

Penjelasan:
Akan dibuktikan benar yaitu ketika mengalikan faktor tersebut akan menghasilkan

$$t^2 + 8t + 15$$

```
>$& expand((t+3)*(t+5))
```

$$15 + 8\,t + t^2$$

Karena hasil dari perkalian faktor tersebut menghasilkan hasil yang sama, maka hasil pemfaktoran tersebut sudah benar.

SOAL R.4 No 54

$$5x^2y - 5yz^4$$

```
>$& factor(5*x^2*y-5*y*z^4)
```

$$-5\,y\,\left(-x+z^2\right)\,\left(x+z^2\right)$$

Penjelasan:
Akan dibuktikan bahwa

$$-5y(z^2 - x)(z^2 + x)$$

merupakan faktor dari

$$5x^2y - 5yz^4$$

yaitu dengan mengalikannya kembali

```
>$& expand(-5*y*(z^2-x)*(z^2+x))
```

$$5\,x^2\,y - 5\,y\,z^4$$

Karena hasil dari perkalian faktor tersebut menghasilkan hasil yang sama, maka hasil pemfaktoran tersebut sudah benar.

SOAL R.4 No 65

$$4p^2 - 8pq + 4q^2$$

```
>$& factor(4*p^2-8*p*q+4*q^2)
```

$$4\,\left(-p+q\right)^2$$

Penjelasan:
Akan dibuktikan bahwa

$$4(-p+q)^2$$

merupakan faktor dari

$$4p^2-8pq+4q^2$$

yaitu dengan mengalikannya kembali

```
>$& expand(4*p^2-8*p*q+4*q^2)
```

$$4\,p^2-8\,p\,q+4\,q^2$$

```
>$ powerdisp:true; //supaya tampilannya tetap 4p^2-8pq+4q^2, bukan 4q^2-8pq+4p^2
```

Karena hasil dari perkalian faktor tersebut menghasilkan hasil yang sama, maka hasil pemfaktoran tersebut terbukti benar.

SOAL R.4 No 73

$$3a^5-24a^2$$

```
>$& factor(3*a^5-24*a^2)
```

$$3\,\left(-2+a\right)\,a^2\,\left(4+2\,a+a^2\right)$$

Penjelasan:
Akan dibuktikan bahwa

$$3(a-2)a^2(a^2+2a+4)$$

merupakan faktor dari

$$3a^5-24a^2$$

yaitu dengan mengalikannya kembali

```
>$& expand(3*(a-2)*a^2*(a^2+2*a+4))
```

$$-24\,a^2+3\,a^5$$

```
>$ powerdisp:false; //supaya tampilannya tidak -12a^2+6a^3+3a^4+3a^5
```

Karena hasil dari perkalian faktor tersebut menghasilkan hasil yang sama, maka hasil pemfaktoran tersebut terbukti benar.

Soal lain

$$m^6+8m^3-20$$

```
>$& factor(m^6+8*m^3-20)
```

$$\left(m^3-2\right)\,\left(m^3+10\right)$$

Operasi dan Fungsi Matematika

Fungsi adalah suatu relasi yang menghubungkan setiap anggota x dalam suatu himpunan yang disebut daerah asal (domain) dengan suatu nilai tunggal f(x) dari suatu himpunan kedua yang disebut daerah kawan (kodomain).
Fungsi merupakan program dalam EMT yang didefinisikan dengan perintah
"function". Fungsi dapat berupa fungsi satu baris atau fungsi
multibaris.
Dalam satu baris, fungsi dapat berupa numerik atau simbolik. Fungsi satu baris numerik didefinisikan oleh ":=".

```
>function f(x):= 2x + 5
```

Fungsi di atas merupakan gambaran dari fungsi satu baris. % Suatu fungsi dapat dievaluasi sama seperti fungsi Euler bawaan lainnya.

```
>f(7)
```

```
19
```

```
>%+f(1)
```

```
26
```

```
>f(10)-f(3)
```

```
14
```

```
>f(3)*f(2)
```

```
99
```

```
>f(8)/f(4)
```

```
1.61538461538
```

```
>f(2)+f(5)-f(6)
```

```
7
```

```
>f(1)^2
```

```
49
```

```
>sqrt(f(10))
```

```
5
```

Fungsi juga dapat digunakan untuk vektor. Kami mengikuti bahasa matriks Euler, karena ekspresi yang digunakan dalam fungsi tersebut dapat divektorkan.

```
>f(0:0.2:2)
```

```
[5,  5.4,  5.8,  6.2,  6.6,  7,  7.4,  7.8,  8.2,  8.6,  9]
```

(0:0.2:2) adalah sintaks yang digunakan untuk membuat vektor dengan langkah 0.2 dari 0 hingga 2. Sintaks ini biasanya digunakan untuk membuat sebuah deret angka.

Parameter Bawaan

Fungsi numerik dapat memiliki parameter default. Parameter default adalah nilai atau konfigurasi yang telah ditentukan sebelumnya untuk suatu fungsi. Parameter default digunakan ketika pemanggil fungsi dan tidak menyediakan nilai untuk parameter tertentu.

```
>function g(x,a=1) := a*x^2+1
>g(4)
```

```
17
```

```
>g(3)+g(2)
```

```
15
```

```
>g(6)/g(1)
```

```
18.5
```

```
>g(2)*g(5)
```

```
130
```

Jika suatu variabel bukanlah parameter, maka harus bersifat global. Fungsi satu baris dapat melihat variabel global.

```
>function h(x) := a*x^2
>a=2; h(3)
```

```
18
```

Fungsi simbolik yang didefinisikan dengan "&=". Maka fungsi tersebut didefinisikan di Euler dan Maxima, dan bekerja di keduanya. Ekspresi yang menentukan dijalankan melalui Maxima sebelum definisi.

```
>function k(x) &= x^2-x*exp(-x); $& k(x)
```

$$x^2 - x\,e^{-x}$$

```
>$&diff(k(x),x), $&% with x=3
```

$$x\,e^{-x} - e^{-x} + 2\,x$$

$$2\,e^{-3} + 6$$

Mereka juga dapat digunakan dalam ekspresi numerik. Tentu saja, ini hanya akan berfungsi jika EMT dapat menafsirkan semua yang ada di dalam fungsi tersebut.
Beberapa fungsi-fungsi yang digunakan dalam EMT:
&= mendefinisikan fungsi simbolik,
:= mendefinisikan fungsi numerik,
&&= mendefinisikan fungsi simbolik murni.

```
>k(5+k(1))
```

```
31.7006135141
```

```
>function P(x,n) &= (2*x-1)^n; $&P(x,n)
```

$$(2\,x-1)^n$$

```
>function Q(x,n) &= (x+2)^n; $&Q(x,n)
```

$$(x+2)^n$$

```
>$&P(x,4), $&expand(%)
```

$$(2\,x-1)^4$$

$$16\,x^4-32\,x^3+24\,x^2-8\,x+1$$

```
>P(3,4)
```

```
625
```

```
>$&P(x,4)+ Q(x,3), $&expand(%)
```

$$(2\,x-1)^4+(x+2)^3$$

$$16\,x^4-31\,x^3+30\,x^2+4\,x+9$$

```
>$&P(x,4)-Q(x,3), $&expand(%), $&factor(%)
```

$$(2\,x-1)^4-(x+2)^3$$

$$16\,x^4-33\,x^3+18\,x^2-20\,x-7$$

$$16\,x^4-33\,x^3+18\,x^2-20\,x-7$$

```
>$&P(x,4)*Q(x,3), $&expand(%), $&factor(%)
```

$$(x+2)^3\ (2\,x-1)^4$$

$$16\,x^7+64\,x^6+24\,x^5-120\,x^4-15\,x^3+102\,x^2-52\,x+8$$

$$(x+2)^3\ (2\,x-1)^4$$

```
>$&P(x,4)/Q(x,1), $&expand(%), $&factor(%)
```

$$\frac{(2\,x-1)^4}{x+2}$$

$$\frac{16\,x^4}{x+2}-\frac{32\,x^3}{x+2}+\frac{24\,x^2}{x+2}-\frac{8\,x}{x+2}+\frac{1}{x+2}$$

$$\frac{(2\,x-1)^4}{x+2}$$

```
>function r(x) &= x^3-x; $&r(x)
```

$$x^3-x$$

```
>$&integrate(r(x),x)
```

$$\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}$$

```
>
```

1. Fungsi Trigonometri

Fungsi sinus, cosinus, dan tangen adalah klasifikasi utama fungsi trigonometri. Adapun ketiga fungsi trigonometri lainnya yaitu cotangen, secan, dan cosecan dapat diturunkan dari ketiga fungsi tersebut.
- Sinus (lambang: sin) dalam matematika adalah perbandingan sisi segitiga yang ada di depan sudut dengan sisi miring.
- Kosinus atau cosinus (simbol: cos) dalam matematika adalah perbandingan sisi segitiga yang terletak di sudut dengan sisi miring.
- Tangen (lambang: tan) dalam matematika adalah perbandingan sisi segitiga yang ada di depan sudut dengan sisi segitiga yang terletak di sudut.
(dengan catatan bahwa segitiga itu adalah segitiga siku-siku atau salah satu sudut segitiga itu 90 derajat).
Adapun untuk ketiga fungsi lainnya yaitu :
- cotangen(cot):

$$\frac{1}{tan(x)}$$

- secan(sec):

$$\frac{1}{cos(x)}$$

- cosecan (cosec/csc):

$$\frac{1}{sin(x)}$$

Perhitungan menggunakan EMT

Dengan menggunakan EMT, kita dapat mencari nilai dari fungsi sin,cos,tan,dll dengan lebih cepat.

```
>x := 60°;
```

Perintah di atas mendefinisikan nilai x adalah 60 derajat. Adapun fungsi dari titik koma dibelakang adalah agar hasilnya tidak terlihat.

```
>sin(x)
```

```
0.866025403784
```

Seperti yang dijelaskan sebelumnya bahwa x telah didefinisikan 60 derajat. Jadi, hanya dengan memanggil x maka program dengan otomatis akan memunculkan nilai dari sin(60°)

```
>&sin(60°)
```

```
sqrt(3)
-------
   2
```

Penulisan sintax di atas berbeda dengan yang sebelumnya. Tetapi untuk hasil keduanya adalah equivalent.Untuk melakukan perhitungan matematika simbolis di EMT, awali perintah maxima dengan tanda "&". Setiap ekspresi yang dimulai dengan "&" adalah ekspresi simbolis dan dikerjakan oleh Maxima.

```
>$&sin(60°)
```

$$\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Penulisan sintax yang ini juga berbeda dengan dua penulisan di atas. Sintaks di atas menampilkan hasil perhitungan simbolik secara lebih bagus menggunakan LaTeX. Perbedaannya adalah adanya tanda "$" di awal perintah di depan tanda & pada perintah Maxima.
Selain fungsi sin, terdapat fungsi lain yang dapat dicari menggunakan EMT. Diantaranya adalah:

```
>$&cos(60°)
```

$$\frac{1}{2}$$

```
>$&tan(60°)
```

$$\sqrt{3}$$

```
>$&cot(60°)
```

$$\frac{1}{\sqrt{3}}$$

```
>$&sec(60°)
```

$$2$$

```
>$&csc(60°)
```

$$\frac{2}{\sqrt{3}}$$

2. Fungsi Eksponensial

Fungsi eksponensial adalah fungsi yang memiliki bentuk

$$F(x) = a^x$$

dengan a > 0 dan a tidak sama dengan 0.

Eksponen pangkat positif

Bentuk fungsi :

$$a^x$$

```
dengan x adalah bilangan bulat positif.
```

jadi jika

$$a^4 = a * a * a * a$$

```
a dikatakan sebagai basis dan 4 sebagai indeks.
```

```
>//gunakan simbol (^) untuk operasi pangkat
>//contoh:
```

Cari nilai dari :

$$(-3)^3$$

Jawaban:

```
>$&(-3)^3
```

$$-27$$

Penjelasan:
Menggunakan EMT, hasil dari nilai tersebut langsung menampilkan hasil akhir. Adapun untuk langkah-langkah manualnya adalah sebagai beriku:

$$(-3) * (-3) * (-3) = -27$$

Eksponen pangkat Negatif

Bentuk fungsi :

$$a^{-x} = \frac{1}{a^x}$$

```
dengan a tidak sama dengan 0
```

```
>//contoh
```

Carilah nilai dari

$$2^{-5}$$

jawaban:

```
>$&2^-5
```

$$\frac{1}{32}$$

Penjelasan:
Menggunakan EMT, hasil dari nilai tersebut langsung menampilkan hasil akhir. Adapun untuk langkah-langkah manualnya adalah sebagai berikut:

$$2^{-5} = \frac{1}{2^5} = \frac{1}{32}$$

Eksponen pangkat nol

Bentuk:

$$a^0 = 1$$

dengan a tidak sama dengan 0

```
>//contoh
```

carilah nilai dari

$$37^0 dan (\frac{-3}{7})^0$$

Jawaban:

```
>$& 37^0
```

$$1$$

```
>$& (-3/7)^0
```

$$1$$

Penjelasan:
Menggunakan EMT, hasil dari nilai tersebut langsung menampilkan hasil akhir.

Sifat-sifat Eksponen

Jika p dan q adalah bilangan real, maka berlaku sifat-sifat berikut:
A. Sifat 1

$$a^p * a^q = a^{p+q}$$

```
>//contoh a.1
```

Carilah nilai dari

$$c^3 * c^5$$

jawaban

```
>& c^3 * c^5
```

```
 8
c
```

Penjelasan:
Menggunakan EMT, hasil dari nilai tersebut langsung menampilkan hasil akhir. Adapun untuk langkah-langkah manualnya adalah sebagai berikut:

$$c^3 * c^5 = c^{3+5} = c^8$$

```
>//contoh a.2
```

Carilah nilai dari

$$3^8 * 3^{-2}$$

Jawaban:

```
>& 3^8 * 3^-2
```

```
729
```

Penjelasan:
Menggunakan EMT, hasil dari nilai tersebut langsung menampilkan hasil akhir. Adapun untuk langkah-langkah manualnya adalah sebagai berikut:

$$3^8 * 3^-2 = 3^{8+(-2)} = 3^6 = 729$$

```
>//latihan soal
```

Carilah nilai dari

$$(x+2)^4(x+2)^{-2}$$

```
>& (x+2)^4 * (x+2)^-2
```

```
               2
        (x + 2)
```

Penjelasan:
Menggunakan EMT, hasil dari nilai tersebut langsung menampilkan hasil akhir. Adapun untuk langkah-langkah manualnya adalah sebagai berikut:

$$(x+2)^4 * (x+2)^{-2} = (x+2)^2$$

B. Sifat 2

$$(a^p)^q = a^{pq}$$

```
>//contoh
```

carilah nilai dari

$$(x^2)^5$$

jawab:

```
>$&(x^2)^5
```

$$x^{10}$$

Penjelasan:
Menggunakan EMT, hasil dari nilai tersebut akan langsung menampilkan hasil akhir. Adapun untuk langkah-langkah manualnya adalah sebagai berikut:

$$(x^2)^5 = x^{2*5} = x^{10}$$

```
>//latihan soal
```

carilah nilai dari:

$$(5^2)^3$$

jawab:

```
>$&(5^2)^3
```

$$15625$$

Penjelasan:
Menggunakan EMT, hasil dari nilai tersebut langsung menampilkan hasil akhir. Adapun untuk langkah-langkah manualnya adalah sebagai berikut:

$$(5^2)^3 = 5^{2*3} = 5^6 = 15625$$

C. Sifat 3
Dengan a tidak sama dengan 0, berlaku:

$$\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$$

```
>//latihan soal
```

carilah nilai dari

$$\frac{x^2y^{-2}}{x^{-1}y}$$

```
>$& (x^2*y^-2)/(x^-1*y)
```

$$\frac{x^3}{y^3}$$

Penjelasan:
Menggunakan EMT, hasil dari nilai tersebut langsung menampilkan hasil akhir. Adapun untuk langkah-langkah manualnya adalah sebagai berikut:

$$\frac{x^2y^{-2}}{x^{-1}y} = \frac{x^3}{y^3}$$

D. Sifat 4

$$(ab)^p = a^p * b^p$$

```
>//latihan soal
```

carilah nilai dari

$$(2x2y)^3$$

Jawaban:

```
>$&(2*x*2*y)^3
```

$$64\,x^3\,y^3$$

Penjelasan:
Menggunakan EMT, hasil dari nilai tersebut langsung menampilkan hasil akhir. Adapun untuk langkah-langkah manualnya adalah sebagai berikut:

$$(2x2y)^3 = (2x)^3(2y)^3 = 64x^3y^3$$

```
>
```

E. Sifat 5
Dengan b tidak sama dengan 0, berlaku:

$$(\frac{a}{b})^p = \frac{a^p}{b^p}$$

```
>//latihan soal
```

Carilah nilai dari

$$(\frac{a^2b^{-3}c^5}{a^2b^{-2}c^3})^{-2}$$

```
>$& ((a^2*b^-3*c^5)/(a^2*b^-2*c^3))^-2
```

$$\frac{b^2}{c^4}$$

Penjelasan:
Menggunakan EMT, hasil dari nilai tersebut langsung menampilkan hasil akhir. Adapun untuk langkah-langkah manualnya adalah sebagai berikut:

$$(\frac{a^2b^{-3}c^5}{a^2b^{-2}c^3})^{-2} = \frac{b^2}{c^4}$$

3. Fungsi Logaritma

Logaritma merupakan kebalikan (invers) dari pemangkatan.
Suatu bentuk pemangkatan dapat diubah menjadi bentuk logaritma
dan sebaliknya.
Bentuk Umum:
Untuk 0<a<1 atau a>1, dan b>0 berlaku:

$$a^n = b$$

$$^a log b = n$$

keterangan :
a disebut bilangan pokok (basis)
b disebut numerus

```
>//cara menggunakan logaritma umum di emt dengan basis a : logbase(b,a)
>//cara menggunakan logaritma umum di emt dengan basis 10 : log10(b)
>3^4
```

```
81
```

Contoh di atas adalah salah satu bentuk contoh eksponen.

```
>logbase(81,3)
```

```
4
```

Cara untuk mencari nilai dari logaritma umum dengan menggunakan EMT adalah dengan menuliskan sintax 'logbase(numerus,basis)'.
Dan sesuai dengan bentuk contoh eksponen di atas, maka persamaan dengan bentuk logaritmanya adalah

$$3^4 = 81 <=>^3 log 81 = 4$$

Sifat-sifat logaritma

Untuk a, b, c bilangan real positif
1. Untuk a tidak sana dengan 0, berlaku

$$^{a}logbc =^{a} logb +^{a} logc$$

```
>//contoh
```

Apakah

$$^{2}log4 +^{2} log8 =^{2} log(4 * 8)?$$

jawab:

```
>logbase(4,2)+ logbase(8,2)
```

```
5
```

```
>logbase(8*4, 2)
```

```
5
```

Apabila mengetahui sintax yang akan digunakan. Seperti yang telah dijelaskan sebelumnya, sintax dari mencari nilai logaritma basis selain 0 adalah 'logbase(numerus,basis)'dan gunakan operasi-operasi yang dibutuhkan seperti perkalian(*) dan penjumlahan(+).
Hal yang perlu dilakukan hanyalah mencari tahu nilai dari kedua ruas apakah memiliki nilai yang sama.

---

2. Untuk a>0, a tidak sama dengan 1, dan b>0, berlaku

$$^{a}log(\frac{b}{c}) =^{a} logb -^{a} logc$$

```
>//contoh
```

Apakah

$$^{3}log27 -^{3} log3 =^{3} log(\frac{27}{3})?$$

```
>logbase(27,3)-logbase(3,3)
```

```
2
```

```
>logbase(27/3,3)
```

```
2
```

Apabila mengetahui sintax yang akan digunakan. Seperti yang telah dijelaskan sebelumnya, sintax dari mencari nilai logaritma basis selain 0 adalah 'logbase(numerus,basis)'dan gunakan operasi-operasi yang dibutuhkan seperti pembagian(/) dan pengurangan(-).
Hal yang perlu dilakukan hanyalah mencari tahu nilai dari kedua ruas apakah memiliki nilai yang sama.

---

3. Untuk n bilangan asli serta a>0, a tidak sama dengan 1, dan b>0, berlaku:

$$^{a}logb^{n} = n^{a}logb$$

```
>//contoh
```

Tunjukkan bahwa pernyataan di bawah benar menggunakan EMT!

$$^{2}log4^{2} = 2^{2}log4?$$

```
>logbase(4^2,2)
```

```
4
```

```
>logbase(4,2)*2
```

```
4
```

Terbukti bahwa

$$^{2}log4^{2} = 2^{2}log4$$

Benar

---

4. Untuk a,b,c tidak sama dengan 1

$$^{a}logb = \frac{^{c}logb}{^{c}loga} = \frac{1}{^{b}loga}$$

```
>//contoh
```

Apakah

$$^{3}log7 = \frac{^{7}log7}{^{7}log3} = \frac{1}{^{7}log3}?$$

jawab:

```
>logbase(7,3)
```

```
1.77124374916
```

```
>logbase(7,7)/logbase(3,7)
```

```
1.77124374916
```

```
>1/logbase(3,7)
```

```
1.77124374916
```

Terbukti bahwa

$$^3log7 = \frac{^7log7}{^7log3} = \frac{1}{^7log3}$$

Benar

---

5. Untuk a,b,c tidak sama dengan 1, berlaku:

$$^alogb *^b logc =^a logc$$

```
>//contoh
```

Apakah

$$^2log3 *^3 log32 =^2 log32?$$

Tunjukkan bahwa pernyataan di atas benar!

```
>logbase(3,2)*logbase(32,3)
```

```
5
```

```
>logbase(32,2)
```

```
5
```

Terbukti bahwa

$$^2log3 *^3 log32 =^2 log32$$

Benar

---

6. untuk a tidak sama dengan 1, berlaku:

$$a^{^alogb} = b$$

```
>//contoh
```

Tunjukkan bahwa pernyataan berikut benar

$$2^{^2log4} = 4$$

jawab:

```
>2^logbase(4,2)
```

```
4
```

Terbukti bahwa

$$2^{^2log4} = 4$$

Benar

4. Fungsi Linear

Fungsi linear adalah suatu fungsi yang membentuk grafik secara garis lurus. Fungsi linear ini juga menjadi fungsi yang telah mendapatkan pangkat tertinggi dengan variabelnya sama dengan satu.
Bentuk umum dari fungsi linear
f(x)= ax + b atau y = ax + b
f(x)merupakan fungsi yang didefinisikan
a merupakan koefisien dari x
b merupakan konstanta
Misal ada fungsi

$$y = x + 9$$

kemudian akan dicari nilai dari y dengan nilai x diketahui sebagai 3
lalu subtitusi x = 3 ke persamaan y = x+9

```
>//contoh
>function f(x):= 2x + 5
>f(10)
```

```
25
```

5. Fungsi Pangkat

Fungsi Pangkat merupakan fungsi dengan variabel bebasnya berpangkat suatu bilangan riil dalam persamaannya.
Bentuk umum dari fungsi pangkat

$$f(x) = ax^n + bx + c$$

f(x) = fungsi pangkat
x = variabel
a = koefisien x^n, n tidak boleh sama dengan 0.
b = koefisien x
c = konstanta

```
>//contoh
```

$$f(x,y)=x^2+5y$$

```
>function f(x,y):= x^2+5y
>f(4,10)
```

```
66
```

$$m(x)=x^2+5x+6$$

```
>function m(x):= x^2+5x+6
>m(3)
```

```
30
```

```
>function m(x)&= x^2+5*x+6
```

```
 2
x  + 5 x + 6
```

```
>& m(a)
```

```
 2
a  + 5 a + 6
```

6. Fungsi Polinomial

Fungsi polinomial adalah fungsi yang hanya melibatkan pangkat bilangan bulat non negatif atau hanya eksponen bilangan bulat positif dari suatu variabel dalam persamaan seperti persamaan kuadrat dan lain-lain.
(Polinomial)Suku banyak adalah suatu bentuk matematika yang merupakan penjumlahan atau pengurangan dari satu suku atau lebih dengan pangkat variabelnya harus bilangan bulat dan tidak negatif.
Bentuk umum fungsi polinomial

$$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+...+a_2x^2+a_1x+a_0$$

```
>//contoh
```

$$\frac{(3x^3-4x^2+2x+4)}{(3x+2)}$$

```
>$& factor(3*x^3-4*x^2+2*x+4)
```

$$(3\,x+2)\,\left(x^2-2\,x+2\right)$$

Sederhanakan pembilang dan penyebut dengan dibagi 3x+2

```
>$& factor(3*x^3-4*x^2+2*x+4)/(3*x+2)
```

$$x^2-2\,x+2$$

7. Fungsi Rasional

Fungsi rasional adalah fungsi matematika yang didefinisikan sebagai rasio (pembagian) antara dua polinomial.
Bentuk umum fungsi rasional

$$v(x)=\frac{p(x)}{q(x)}$$

dengan q(x) tidak sama dengan 0

```
>//contoh
```

$$\frac{(16x^4-1)}{(2x-1)}$$

```
>$& factor(16*x^4-1)
```

$$(2\,x-1)\,(2\,x+1)\,\left(4\,x^2+1\right)$$

Sederhanakan pembilang dan penyebut dengan dibagi 2x-1

```
>$& factor(16*x^4-1)/(2*x-1)
```

$$(2\,x+1)\,\left(4\,x^2+1\right)$$

8. Fungsi Komposisi

Fungsi komposisi adalah fungsi yang melibatkan lebih dari satu fungsi. Ketika ada suatu fungsi, kemudian dilanjutkan dengan fungsi lainnya, maka akan membentuk suatu fungsi baru. Fungsi baru inilah fungsi hasil komposisi dari kedua fungsi sebelumnya.
Contoh Fungsi Komposisi
1.

$$(f_o g)(x) <=> f(g(x))$$

(f o g)(x) dapat dibaca "fungsi f komposisi g" atau "f bundaran g", yang artinya fungsi yang dipetakan oleh fungsi g(x) kemudian dilanjutkan oleh fungsi f(x). Jadi, fungsi g nya dikerjakan terlebih dahulu, kemudian hasilnya dimasukkan ke dalam fungsi f.
2.

$$(g_o f)(x) <=> g(f(x))$$

(g o f)(x) dapat dibaca "fungsi g komposisi f" atau "g bundaran f", yang artinya fungsi yang dipetakan oleh fungsi f(x) kemudian dilanjutkan oleh fungsi g(x). Kalau g o f, yang dikerjakan terlebih dahulu adalah fungsi f, kemudian dilanjutkan atau dimasukkan dalam fungsi g.
image: Sifat-Sifat Fungsi Komposisi.png

```
>//contoh
>function f(x):= 2x + 5
>function g(x):= x^2+1
>f(g(1))
```

```
9
```

```
>g(f(1))
```

```
50
```

9. Fungsi Invers

Fungsi invers atau fungsi kebalikan merupakan suatu fungsi yang berkebalikan dari fungsi asalnya. Suatu fungsi f memiliki fungsi invers (kebalikan) f^-1 jika f merupakan fungsi satu-satu dan fungsi pada (bijektif). Hubungan tersebut dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$(f^{-1})^{-1} = f$$

Ada 3 langkah untuk menentukan fungsi invers, yaitu:
1. Ubahlah bentuk y = f(x) menjadi bentuk x = f(y).
2. Tuliskan x sebagai f^-1(y) sehingga f^-1(y) = f(y).
3. Ubahlah variabel y dengan x sehingga diperoleh rumus fungsi invers f^-1(x).
image: table rumus invers.png

```
>//contoh
>function f(x):= 2x + 5
>inv(f(6))
```

```
0.0588235294118
```

Bilangan Kompleks

Penjelasan mengenai Bilangan Kompleks

EMT dapat menggunakan bilangan kompleks. Tersedia banyak fungsi untuk bilangan kompleks di EMT. Bilangan kompleks dimasukkan dengan menambahkan i ke bagian imajiner. Bilangan imaginer
i = v -1
dituliskan dengan huruf I (huruf besar I), namun akan ditampilkan dengan huruf i (i kecil).

```
>sqrt(-1)
```

```
Floating point error!
Error in sqrt
Error in:
sqrt(-1) ...
         ^
```

sqrt(-1) tidak akan berfungsi. Jadi akar kuadrat -1 akan menghasilkan kesalahan.
Untuk mengubah bilangan real x menjadi bilangan kompleks, gunakan complex(x).

```
>sqrt(complex(-1))
```

```
0+1i
```

re(x) : bagian riil pada bilangan kompleks x.
m(x) : bagian imaginer pada bilangan kompleks x.
omplex(x) : mengubah bilangan riil x menjadi bilangan kompleks.
onj(x) : Konjugat untuk bilangan bilangan komplkes x.
rg(x) : argumen (sudut dalam radian) bilangan kompleks x.
eal(x) : mengubah x menjadi bilangan riil.
re(z) dan im(z) hanya menghitung bagian real dan imajiner dari sebuah bilangan kompleks.

Melakukan Perhitungan menggunakan Bilangan Kompleks

```
>$& sqrt(-1)
```

$$i$$

Soal pertama (Ubah bentuk dengan aturan i)

$$\frac{-4-\sqrt{-4}}{2}$$

```
>$& ((-4)-sqrt(-4))/(2)
```

$$\frac{-2\,i-4}{2}$$

```
>$& ((-2*i)/2)-((4)/(2))
```

$$-i-2$$

Jadi untuk penyelesaian di atas pertama-tama mengubah akar -4 menjadi aturan i dengan mengubah bentuk akar negatif 4 menjadi

$$\sqrt{(4).(-1)}$$

Dengan begitu bentuk tersebut kita bisa ubah menjadi

$$\sqrt{4}.\sqrt{-1}$$

Sehingga akar 4 kita bisa ubah bentuk menjadi 2 dan akar negatif 1 sesuai dengan aturan i yaitu

$$i=\sqrt{-1}$$

Sehingga bentuknya dapat kita ubah menjadi

$$\frac{-4-2i}{2}$$

dilanjutkan dengan pembagian biasa dan hasilnya menjadi

$$-2-i$$

```
>(1+sqrt(complex(-1)))^3
```

```
-2+2i
```

Soal Kedua

$$(1+i)^3$$

```
>$& -2+2*i // jawaban menggunakan latex
```

$$2\,i-2$$

Untuk soal nomor 2 dapat dijabarkan menjadi

$$1+3i+3i^2+i^3$$

Karena aturan i yang dimana

$$i=\sqrt{-1}$$

sehingga ketika i pangkat 2 dapat diubah menjadi -1 karena

$$i^2$$

$$= \sqrt{-1}.\sqrt{-1}$$

$$= -1$$

Selanjutnya ketika i pangkat tiga diubah menjadi -1i karena

$$i^3$$

$$= \sqrt{-1}.\sqrt{-1}.\sqrt{-1}$$

$$= -1i$$

Sehingga penjabaran dari soal nomor dua dapat diubah menjadi

$$1 + 3i + 3.(-1) + (-1)i$$

Sehingga ketika dilakukan operasi penjumlahan dan pengurangan jawabannya menjadi

$$-2 + 2i$$

Soal ketiga

$$\frac{i + i^2 + i^3 + i^4}{1 + i}$$

```
>$&  (sqrt(-1)+((sqrt(-1))^2)+(sqrt(-1)^3)+((sqrt(-1)^4)))/(1+sqrt(-1))
```

$$0$$

Pada soal ketiga hasil dari penyederhanaan dari soal ketiga adalah

$$i(i^2 + 1)$$

Sehingga ketika dilanjutkan dengan operasi perkalian menjadi

$$(i^3 + i)$$

Selanjutnya untuk i pangkat 3 dapat diubah menjadi -1i karena

$$i^3$$

$$= \sqrt{-1}.\sqrt{-1}.\sqrt{-1}$$

$$= -1i$$

Kemudian dapat dari operasi tersebut menghasilkan

$$(-1i + i)$$

Dengan operasi penjumlahan, hasil dari permasalahan tersebut adalah

$$0$$

Fungsi-Fungsi Buatan Sendiri

1. Fungsi Inti

Banyak fungsi matematika dasar (operator, fungsi trigonometri, fungsi eksponensial, dll) tercantum dalam fungsi inti.

2. Fungsi Hiperbolik

```
>sinh(60°)
```

```
1.24936705052
```

```
>cosh(60°)
```

```
1.6002868577
```

```
>asinh(30)
```

```
4.09462222433
```

```
>acosh(30)
```

```
4.09406666863
```

```
> sec(60°)
```

```
2
```

```
>cosec(60°)
```

```
1.15470053838
```

```
>cot(60°)
```

```
0.57735026919
```

3. Koordinat kutub

```
>polar(1, 2)
```

```
1.10714871779
```

```
>polar(3,7,4)
```

```
1.16590454051
```

```
>rect(45, sqrt(2))
```

```
0.742917481199
```

4. Polinomial

```
>polydif([0,1,1])
```

```
[1,  2]
```

Menyelesaikan Persamaan dan Sistem Persamaan

Persamaan adalah suatu pernyataan matematika dalam bentuk simbol yang menyatakan bahwa dua hal adalah persis sama. Persamaan ditulis dengan tanda sama dengan (=), seperti berikut:

```
> $& solve(x+3=5)
```

$$[x = 2]$$

```
> $& solve(2*x-8=10)
```

$$[x = 9]$$

Persamaan Linier

Persamaan linear adalah sebuah persamaan aljabar, yang tiap sukunya mengandung konstanta, atau perkalian konstanta dengan variabel tunggal. Persamaan ini dikatakan linear sebab hubungan matematis ini dapat digambarkan sebagai garis lurus dalam Sistem koordinat Kartesius.
*** Persamaan Linier Satu Variabel
Bentuk umum Persamaan Linear Satu Variabel adalah

$$ax + b = 0$$

Contoh sistem persamaan linier dua variabel

$$10x + 2 = 22$$

Selesaikan dari persamaan diatas

```
> $& solve(10*x+2=22)
```

$$[x = 2]$$

*** Persamaan Linier Dua Variabel
Bentuk umum Persamaan Linear Dua Variabel adalah

$$Ax + By = C$$

Contoh sistem persamaan linier dua variabel

$$(i)x + 2y = 10$$

$$5x - 3y + 6 = -9x + 8y + 4$$

$$(ii)5x - 3y + 6 = 0, -9x + 8y + 4 = 0$$

Selesaikan sistem persamaan di atas

```
> $& solve([x+2*y=10,5*x-3*y+6=-9*x+8*y+4])
```

$$\left[\left[y = \frac{142}{39}, x = \frac{106}{39}\right]\right]$$

```
> $& solve([5*x-3*y+6=0 , -9*x+8*y+4=0])
```

$$\left[\left[y = -\frac{74}{13}, x = -\frac{60}{13}\right]\right]$$

*** Persamaan Linier Tiga Variabel
Bentuk umum Persamaan Linear Satu Variabel adalah

$$Ax + By + Cz = D$$

Contoh sistem persamaan linier tiga variabel
Jika diketahui sistem persamaan
a - 6b = -1 + 5c
a + c = b - 3a,
6 = 3c + b - 3a,
maka hasil kali semua x yang memenuhi persamaan
(x-4)(x^2-a^2)=(x+b)(x+c) adalah...
Selesaikan sistem persamaan di atas

```
> sol &= solve([7*a-6*b=-1+5*c,2*a+c=b-3*a,-6=3*c+b-3*a],[a,b,c])
```

```
[[a = 1, b = 3, c = - 2]]
```

Jabarkan bentuk polinomialnya

```
> $& showev('expand((x-4)*(x^2-a^2)=(x+b)*(x+c)))
```

$$\mathit{expand}\left((x-4)\,\left(x^2-a^2\right)=(x+b)\,(x+c)\right)=\left(x^3-4\,x^2-a^2\,x+4\,a^2=x^2+c\,x+b\,x+b\,c\right)$$

Subtitusi nilai a,b, dan c akan diperoleh

```
> $& showev('expand((x-4)*(x^2-a^2)=(x+b)*(x+c))) with a=1 with b=3 with c=-2
```

$$\mathit{expand}\left((x-4)\,\left(x^2-1\right)=(x-2)\,(x+3)\right)=\left(x^3-4\,x^2-x+4=x^2+x-6\right)$$

Kumpulkan di ruas kiri suku-suku yang sejenis

```
> $& (x^3-4*x^2-x+4=x^2+x-6)
```

$$x^3-4\,x^2-x+4=x^2+x-6$$

```
> $&(x^3-5*x^2-2*x+10=0)
```

$$x^3-5\,x^2-2\,x+10=0$$

merupakan polinomial berderajat 3 sehingga memiliki 3 akar-akar penyelesaian. Ditanyakan soal adalah hasil kali semua x yang memenuhi persamaan.
Jika di ketahui persamaan

$$ax^3+bx^2+cx+d$$

Hasil kali semua x yang memenuhi persamaan adalah

$$x1x2x3=\frac{-d}{a}$$

Persamaan

$$x^3 - 5x^2 - 2x + 10 = 0$$

a=1, b=-5, c=-2, d=10
Sehingga, hasil kali semua x yang memenuhi persamaan

$$x^3 - 5x^2 - 2x + 10 = 0$$

adalah

$$\frac{-d}{a} = \frac{-10}{1} = -10$$

Persamaan Logaritma

Persamaan logaritma adalah suatu persamaan matematis yang memuat variabel x di dalam fungsi logaritmanya (numerus).
Bentuk umum Logaritma

$$^a log_b = n$$

Dengan:
a = bilangan pokok atau basis
b = numerus
n = nilai logaritma
Pada persamaan logaritma, numerus memuat suatu variabel, misalnya x atau y
Bentuk umum Persamaan Logaritma

$$^a log f(x) =^a log g(x)$$

Dengan:
a = basis (bilangan pokok)
f(x) dan g(x) = numerus dalam bentuk fungsi
Agar suatu persamaan logaritma bisa terdefinisi, nilai numerus harus lebih besar dari nol. Artinya, solusi persamaan harus mengacu pada syarat tersebut.
Persamaan Logaritma Bentuk 1
image: Logaritma1.png
Contoh soal 1
Tentukan nilai x yang memenuhi persamaan

$$^3 log(2x^2 - x) = 1$$

Penyelesaian :

Persamaan Logaritma Bentuk 2
image: Logaritma2.png

```
>
```

Persamaan Kuadrat

Persamaan kuadrat disebut juga persamaan suku banyak atau polinomial. Persamaan kuadrat adalah sebuah persamaan dengan pangkat tinggi maksimal dua atau berorde dua.
Bentuk umum Persamaan Kuadrat adalah

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Contoh soal 1
tentukan faktor dari

$$m^2 + (m-2)m + 2m - 4 = 0$$

```
>$& solve((m^2+(m-2)*m+2*m-4=0))
```

$$\left[m = -\sqrt{2}, m = \sqrt{2}\right]$$

Contoh soal 2
tentukan soal dari

$$5x^2 + 7x + 10 = 0$$

```
>$& solve(5*x^2+7*x+10=0)
```

$$\left[x = \frac{-\sqrt{151}\,i - 7}{10}, x = \frac{\sqrt{151}\,i - 7}{10}\right]$$

Persamaan Trigonometri

Persamaan trigonometri adalah persamaan matematika yang memuat fungsi trigonometri dari sudut yang belum diketahui nilainya. Persamaan ini mirip persamaan linear atau kuadrat. Yang membedakan antara trigonometri dengan yang lainnya adalah himpunan penyelesaiannya berupa besaran sudut.

```
> $& solve (sin(x)=1)
```

$$\left[x = \frac{\pi}{2}\right]$$

```
> $& solve(cos(x)=1)
```

$$[x = 0]$$

```
> $& solve(2*cos(2*x-60°)- sqrt(3)=0)
```

$$\left[x=\frac{\pi}{4}\right]$$

```
> $& solve(tan(x-45°)=cot(90°))
```

$$\left[x=\frac{\pi}{4}\right]$$

```
> $& solve([sin(x+pi/4) = 0], [x])
```

$$\left[x=-\frac{\pi}{4}\right]$$

Persamaan Eksponensial

Persamaan eksponen adalah persamaan bilangan berpangkat yang memuat variabel di bagian pangkatnya. Oleh karena memuat suatu variabel, maka pangkatnya bisa dinyatakan sebagai suatu fungsi, misal f(x) atau g(x) untuk pangkat bervariabel x
Bentuk umum persamaan eksponen adalah

$$a^{f(x)}=a^{g(x)}$$

dengan
a = basis(bilangan pokok)
f(x) dan g(x) = pangkat atau eksponen
Contoh persamaan eksponen

$$32^{x-3}=81^{x+5}$$

$$3^{x^2+5x+6}$$

$$2^{x+1}=2^5$$

Sifat-sifat Persamaan Eksponen
image: sifat.png
Contoh soal persamaan eksponen
Soal 1

$$2^{x+1}=2^4$$

Penyelesaian :
Identifikasi dahulu kedua basisnya. Jika basisnya sama, maka nilai pangkat basis pertama akan sama dengan pangkat basis kedua

```
> $& solve(x+1=4)
```

$$[x=3]$$

Soal 2

$$2^{5x-2} = 2^{x+2}$$

Penyelesaian :
Identifikasi dahulu kedua basisnya. Jika basisnya sama, maka berlaku sifat kedua

```
> $& solve(5*x-2=x+2)
```

$$[x = 1]$$

Soal 3

$$4^{2x-6} = 5^{2x-6}$$

Penyelesaian :
Identifikasi dahulu kedua basisnya. Jika basisnya tidak sama, namun bentuk eksponennya sama, maka berlaku sifat ketiga

```
> $& solve(2*x-6=0)
```

$$[x = 3]$$

Soal 4
Tentukan himpunan dari

$$(x-6)^{6x} = (x-6)^{5x+1}$$

Penyelesaian:
Identifikasi dahulu kedua ruas. Akan berlaku sifat keempat

```
> function h(x):=x-6
> function f(x):=6*x
> function g(x):=5*x+1
```

Solusi 1

$$f(x) = g(x)$$

```
> $& solve((6*x)=(5*x+1))
```

$$[x = 1]$$

(memenuhi solusi)
Solusi 2

$$h(x) = 1$$

```
> $& solve(x-6=1)
```

$$[x = 7]$$

(memenuhi solusi)
Solusi 3

$$h(x) = -1$$

dengan syarat f(x) dan g(x) keduanya genap/ganjil

```
> $& solve(x-6=-1)
```

$$[x = 5]$$

Untuk x=5, maka

```
>f(5)
```

```
30
```

```
>g(5)
```

```
26
```

Karena keduanya genap maka x=5 memenuhi
Solusi 4

$$f(x) = 0$$

dengan syarat f(x) dan g(x) keduanya positif

```
> $& solve(x-6=0)
```

$$[x = 6]$$

Untuk x=6, maka

```
> f(6)
```

```
36
```

```
> g(6)
```

```
31
```

Pertidaksamaan dan Sistem Pertidaksamaan

1. Pertidaksamaan Linear (Pangkat Satu) a. Pertidaksamaan linear

satu variabel
Pertidaksamaan linear satu variabel merupakan bentuk pertidaksamaan dengan memuat satu peubah (variabel) dengan pangkat tertingginya adalah satu.
Bentuk umum

$$ax + b < c$$

$$ax + b > c$$

$$ax + b \leq c$$

$$ax + b \geq c$$

Contoh soal
Untuk menyelesaikan pertidaksamaan, EMT tidak akan dapat melakukannya,
melainkan dengan bantuan Maxima, artinya secara eksak (simbolik). Perintah Maxima yang digunakan adalah fourier_elim(), yang harus dipanggil dengan perintah "load(fourier_elim)" terlebih dahulu.

```
>&load(fourier_elim)
```

```
        C:/Program Files/Euler x64/maxima/share/maxima/5.35.1/share/f\
ourier_elim/fourier_elim.lisp
```

```
>$&fourier_elim([x + 10 > 0],[x])
```

$$[-10 < x]$$

```
>$&fourier_elim([2*x > 15],[x])
```

$$\left[\frac{15}{2} < x\right]$$

```
>$&fourier_elim([3*x - 18 > 0 ],[x])
```

$$[6 < x]$$

---

b. Pertidaksamaan linear dua variabel
Pertidaksamaan linear dua variabel adalah bentuk pertidaksamaan yang memuat dua peubah (variabel) dengan pangkat tertinggi variabel tersebut adalah satu.
Bentuk umum

$$ax + by < c$$

$$ax + by > c$$

$$ax + by \leq c$$

$$ax + by \geq c$$

Contoh soal

```
>$&fourier_elim((x + y < 5) and (x - y > 0),[x,y])
```

$$\left[y < x, x < 5 - y, y < \frac{5}{2}\right]$$

```
>$&fourier_elim((y - x < 5) and (x - y < 15) and (10 < y),[x,y]) // sistem pertidaksamaan
```

$$[y - 5 < x, x < y + 15, 10 < y]$$

```
>$&fourier_elim((x + y < 9) and (x - y > 7),[x,y])
```

$$[y + 7 < x, x < 9 - y, y < 1]$$

2. Pertidaksamaan Kuadrat Pertidaksamaan kuadrat ialah

pertidaksamaan yang mempunyai variabel dimana pangkatnya memuat satu atau lebih perubahan serta relasi “lebih dari”, “lebih dari atau sama dengan”, “kurang dari”, atau “kurang dari sama dengan”.
Bentuk umum

$$ax^2 + bx + c > 0$$

$$ax^2 + bx + c < 0$$

$$ax^2 + bx + c \geq 0$$

$$ax^2 + bx + c \leq 0$$

Contoh soal

```
>&load (fourier_elim)
```

```
        C:/Program Files/Euler x64/maxima/share/maxima/5.35.1/share/f\
  ourier_elim/fourier_elim.lisp
```

$$x^2 + 9x + 20$$

```
>$& fourier_elim([x^2 + 9*x + 20 >= 0], [x])
```

$$[x = -5] \vee [x = -4] \vee [-4 < x] \vee [x < -5]$$

$$x^2 + 8x + 15$$

```
>$& fourier_elim([x^2 + 8*x + 15 > 0], [x])
```

$$[-3 < x] \vee [x < -5]$$

$$x^2 + 6x + 9$$

```
>$& fourier_elim([x^2 + 6*x + 9 > 0], [x])
```

$$[x < -3] \vee [-3 < x]$$

3. Pertidaksamaan Logaritma Pertidaksamaan logaritma adalah

pertidaksamaan yang memuat fungsi logaritma di dalamnya.
Bentuk umum

$${}^{a}logf(x) <^{a} logg(x)$$

$${}^{a}logf(x) >^{a} logg(x)$$

$${}^{a}logf(x) \leq {}^{a}logg(x)$$

$${}^{a}logf(x) \geq {}^{a}logg(x)$$

Konsep pertidaksamaan logaritma
a) Untuk a > 1, tanda ketaksamaannya tetap (tidak berubah)
b) Untuk a < 1, tanda ketaksamaannya berubah (dibalik)

Contoh soal

$$^2log(x+1) > 3$$

$$^2log(x+1) >^2 log2^3$$

```
>$&fourier_elim ([x + 1 > 8], [x])
```

$$[7 < x]$$

$$^{\frac{1}{3}}log(2x-3) \geq ^{\frac{1}{3}}log(x+1)$$

```
>$&fourier_elim ([2*x - 3 >= x + 1], [x])
```

$$[x = 4] \vee [4 < x]$$

karena a < 1 maka tanda ketaksamaannya berubah sehingga

$$x \geq 4$$

$$^2log(5x+3) <^2 log(x-2)$$

```
>$&fourier_elim ([5*x + 3 < x - 2], [x])
```

$$\left[x < -\frac{5}{4}\right]$$

4. Pertidaksamaan Trigonometri Pertidaksamaan trigonometri merupakan

pertidaksamaan yang mengandung fungsi-fungsi trigonometri, baik sinus, cosinus, tangen, cotangen, secan dan cosecan.
Contoh soal

$$2sinx \leq 1$$

```
>$& fourier_elim([2*sin(x)<=1],[x])
```

$$[2\,\sin x - 1 = 0] \vee [1 - 2\,\sin x > 0]$$

```
>$& solve (2*sin(x)-1=0)
```

$$\left[x = \frac{\pi}{6}\right]$$

```
>
```

$$2cos2x < 1$$

```
>$& fourier_elim([2*cos(2*x)< 1],[x])
```

$$[1 - 2\,\cos\left(2\,x\right) > 0]$$

$$tanx > -1$$

```
>$& fourier_elim([tan(x)> 1],[x])
```

$$[\tan x - 1 > 0]$$

5. Pertidaksamaan Eksponen Eksponen merupakan bentuk penulisan

bilangan berpangkat atau perkalian secara berulang sebanyak pangkatnya. Pertidaksamaan eksponen adalah bentuk pertidaksamaan pada bilangan berpangkat yang memuat variabel, seperti x.
Bentuk pertidaksamaan eksponen:
Secara umum, bentuk pertidaksamaan eksponen dibagi menjadi dua, yaitu sebagai berikut.
a) Jika bilangan pokok a > 1, untuk

$$a^{f(x)} < a^{g(x)} berlaku f(x) < g(x)$$

b) Jika bilangan pokok 0 < a < 1, untuk

$$a^{f(x)} < a^{g(x)} berlaku f(x) > g(x)$$

Contoh soal

$$27^{x-3} < 81^{x+5}$$

ubah bentuk eksponen menjadi basis 3 sehingga

$$3^{3(x-3)} < 3^{4(x+5)}$$

$$3^{(3x-9)} < 3^{(4x+20)}$$

karena basis sudah sama, selesaikan menggunakan bantuan emt

```
>$&fourier_elim ([3*x-9 < 4*x+20],[x])
```

$$[-29 < x]$$

$$2^{2x+3} > 8^{x-5}$$

ubah bentuk ekspnen menjadi basis 2 sehingga

$$2^{(2x+3)} < 2^{3(x-5)}$$

$$2^{(2x+3)} < 2^{(3x-15)}$$

karena basis sudah sama, selesaikan menggunakan bantuan emt

```
>$&fourier_elim ([2*x+3 < 3*x-15],[x])
```

$$[18 < x]$$

$$\frac{2}{3}^{5x-7} < \frac{2}{3}^{x-2}$$

```
>$&fourier_elim ([5*x-7 < x+2],[x])
```

$$\left[x < \frac{9}{4}\right]$$

karena 0 < a < 1, maka tanda pertidaksamaan dibalik. sehingga

$$x > \frac{9}{4}$$

Menggunakan aljabar untuk menyelesaikan masalah sehari-hari

Soal 1
Seorang petani ingin menghitung total luas lahan pertanian yang akan dia tanami dengan dua jenis tanaman berbeda: jagung dan kacang hijau. Dia memiliki bidang persegi panjang dengan panjang 100 meter dan lebar 50 meter. Dia ingin menanam jagung di setengah bidang tersebut dan kacang hijau di setengah sisanya. Luas tanah yang akan ditanami jagung adalah berapa meter persegi?

$$Panjang = 100$$

$$Lebar = 50$$

```
>panjang = 100;
>lebar = 50;
>$&LuasTotal = 100 * 50
```

$$LuasTotal = 5000$$

Luas tanah yang akan ditanami jagung (setengahnya)

```
>$&LuasJagung = 5000/2
```

$$LuasJagung = 2500$$

Luas tanah yang akan ditanami jagung adalah 2500 meter persegi.
Soal 2
Seorang investor ingin menghitung berapa jumlah uang yang akan dia miliki setelah menanam sejumlah uang dalam rekening tabungan dengan suku bunga tertentu selama beberapa tahun. Jika dia menanam Rp. 5,000,000 di rekening tabungan dengan suku bunga tahunan sebesar 5%, berapa jumlah uang yang akan dia miliki setelah 3 tahun?

$$SukuBunga = 0.05$$

$$JumlahTahun = 3$$

$$JumlahAwal = Rp.5,000,000$$

$$JumlahAkhir = JumlahAwal * (1 + SukuBunga)^{JumlahTahun}$$

```
>$& JumlahAkhir = 5000000*(1+0.05)^3
```

$$JumlahAkhir = 5788125.000000001$$

Jumlah uang yang akan dimiliki investor setelah 3 tahun adalah Rp. 5,788,125
Soal 3
Harga 3 buah buku dan 5 pensil adalah Rp. 42.000,00. Jika harga sebuah buku adalah 3 kali harga sebuah pensil.
Tentukanlah harga masing-masing pensil dan buku !

$$Harga1Pensil = x$$

$$Harga5Pensil = 5x$$

$$Harga3Buku = 9x$$

$$9x + 5x = 42.000$$

```
>$&HargaPensil = 42000/14
```

$$HargaPensil = 3000$$

```
>$&HargaBuku = 3*3000
```

$$HargaBuku = 9000$$

Jadi,
Harga sebuah pensil adalah Rp 3.000,00
Harga sebuah buku adalah 3 x Rp 3.000,00 adalah Rp.9.000,00
Karena keduanya positif, maka x = 6 memenuhi.
Jadi, hasil dari himpunan adalah HP = {1, 5, 6, 7}

BAB 3

KB PEKAN 5-6: MENGGUNAKAN EMT UNTUK MENGAMBAR GRAFIK 2 DIMENSI (2D)

[a4paper,10pt]article eumat

NAMA: UMI NURKHASANAH
NIM: 22305141032

Menggambar Grafik 2D dengan EMT

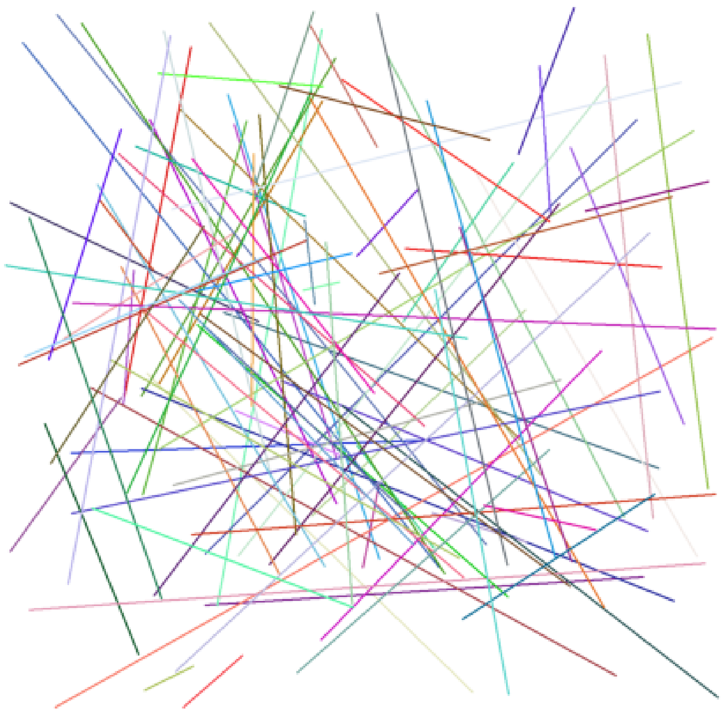
Notebook ini menjelaskan tentang cara menggambar berbagaikurva dan grafik 2D dengan software EMT. EMT menyediakan fungsi plot2d() untuk menggambar berbagai kurva dan grafik dua dimensi (2D).

Basic Plots

Ada fungsi plot yang sangat mendasar. Ada koordinat layar, yang selalu berkisar dari 0 hingga 1024 di setiap sumbu, tidak peduli apakah layarnya persegi atau tidak. Terdapat koordinat plot, yang dapat diatur dengan setplot(). Pemetaan antara koordinat tergantung pada jendela plot saat ini. Sebagai contoh, default shrinkwindow() menyisakan ruang untuk label sumbu dan judul plot.

Pada contoh, kita hanya menggambar beberapa garis acak dalam berbagai warna. Untuk detail mengenai fungsi-fungsi ini, pelajari fungsi-fungsi inti dari EMT.

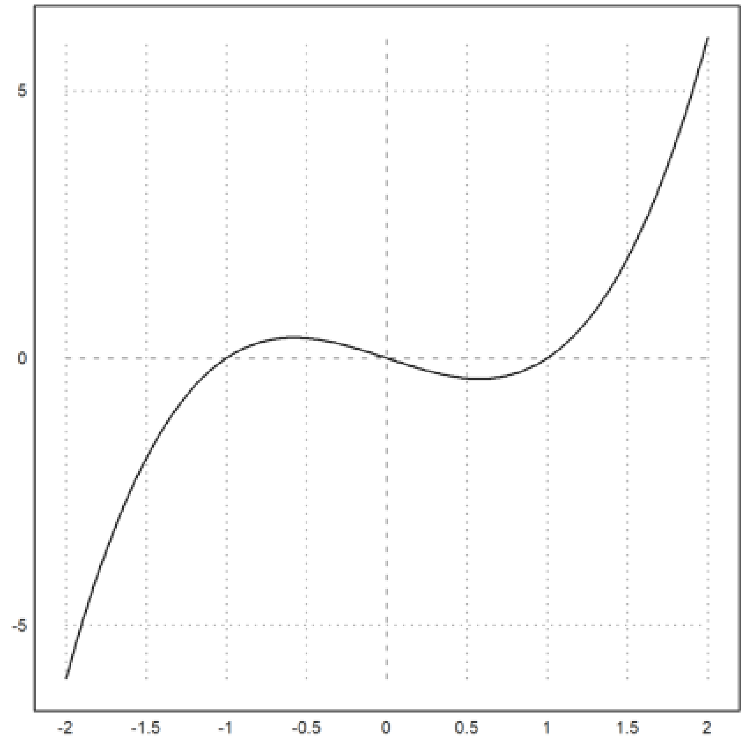
```
>clg; // membersihkan layar
>window(0,0,1024,1024); // menggunakan semua jendela
>setplot(0,1,0,1); // mengatur koordinat plot
>hold on; // memulai mode timpa
>n=100; X=random(n,2); Y=random(n,2);  // mendapatkan titik-titik acak
>colors=rgb(random(n),random(n),random(n)); // mendapatkan warna secara acak
>loop 1 to n; color(colors[#]); plot(X[#],Y[#]); end; // plot
>hold off; // mengakhiri mode penimpaan
>insimg; // memasukkan ke buku catatan
```



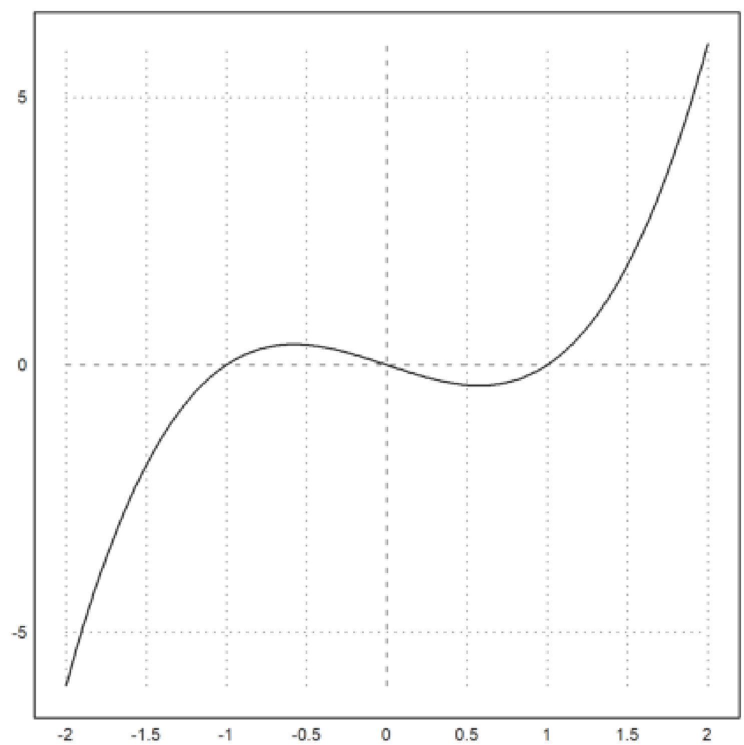
```
>reset;
```

Anda harus menahan grafik, karena perintah plot() akan menghapus jendela plot.
Untuk menghapus semua yang telah kita lakukan, kita gunakan reset().
Untuk menampilkan gambar hasil plot di layar notebook, perintah plot2d() dapat diakhiri dengan titik dua (:). Cara lain adalah perintah plot2d() diakhiri dengan titik koma (;), kemudian gunakan perintah insimg() untuk menampilkan gambar hasil plot.
Sebagai contoh lain, kita menggambar sebuah plot sebagai inset pada plot yang lain. Hal ini dilakukan dengan mendefinisikan jendela plot yang lebih kecil. Perhatikan bahwa jendela ini tidak menyediakan ruang untuk label sumbu di luar jendela plot. Kita harus menambahkan beberapa margin untuk hal ini sesuai kebutuhan. Perhatikan bahwa kita menyimpan dan mengembalikan jendela penuh, dan menahan plot saat ini ketika kita membuat inset.

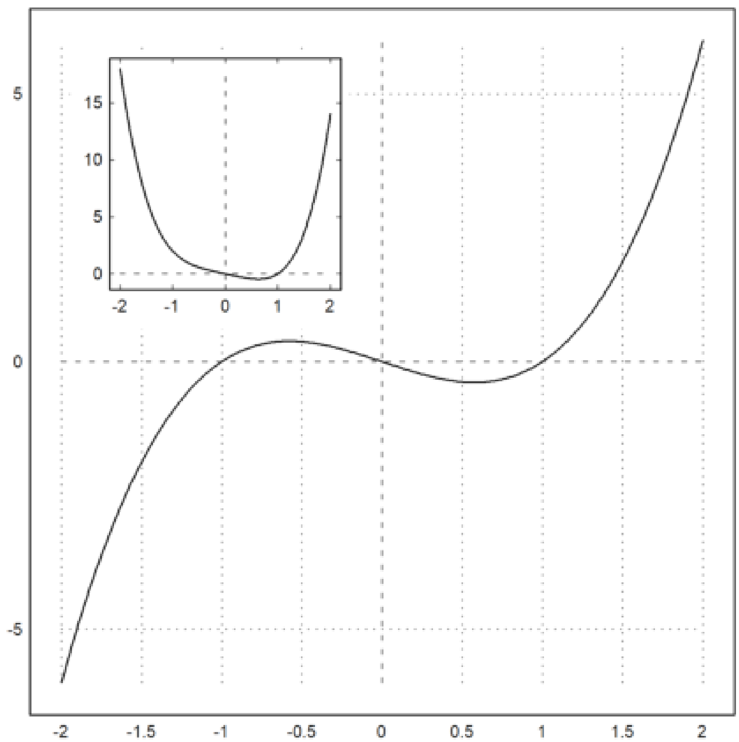
```
>plot2d("x^3-x");
>insimg()
```




```
>plot2d("x^3-x"):
```



```
>xw=200; yw=100; ww=300; hw=300;
>ow=window();
>window(xw,yw,xw+ww,yw+hw);
>hold on
>barclear(xw-50,yw-10,ww+60,ww+60)
>plot2d("x^4-x",grid=6):
```



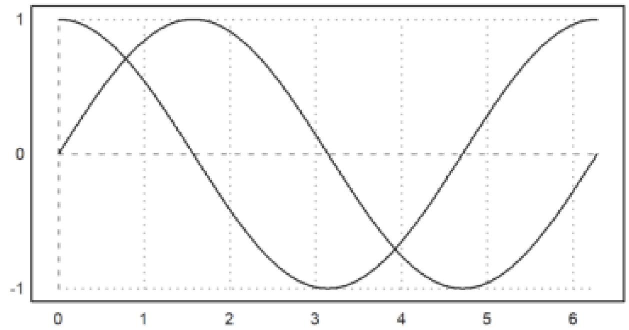

```
>hold off
>window(ow);
```

Plot dengan beberapa angka dicapai dengan cara yang sama. Ada fungsi utility figure() untuk ini.

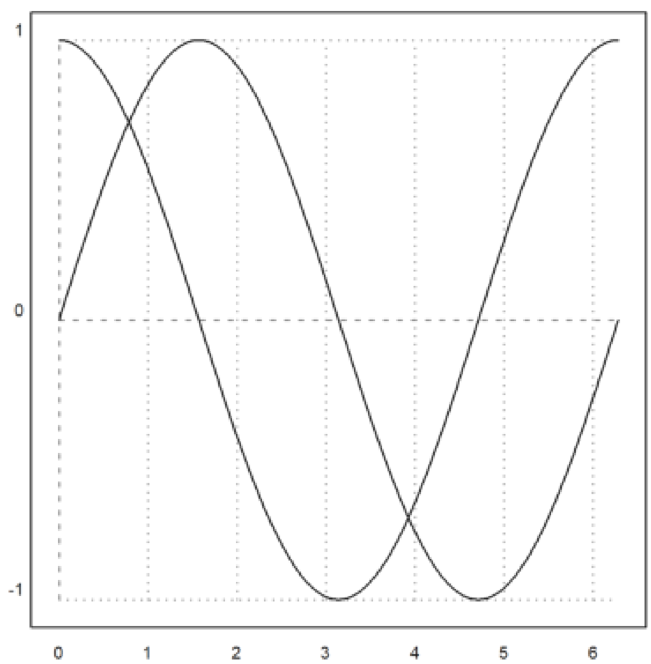
Plot Aspect (Aspek Plot)

Plot default menggunakan jendela plot persegi. Anda dapat mengubahnya dengan fungsi aspect(). Jangan lupa untuk mengatur ulang aspeknya nanti. Anda juga dapat mengubah default ini di menu dengan "Set Aspect" ke rasio aspek tertentu atau ke ukuran jendela grafik saat ini.
Tetapi Anda juga dapat mengubahnya untuk satu plot. Untuk ini, ukuran area plot saat ini diubah, dan jendela diatur sedemikian rupa sehingga label memiliki ruang yang cukup.

```
>aspect(2); // rasio panjang dan lebar 2:1
>plot2d(["sin(x)","cos(x)"],0,2pi):
```




```
>aspect():
```




```
>reset;
```

Fungsi reset () mengembalikan default plot, termasuk rasio aspek.

Plot 2D di Euler

EMT Math Toolbox memiliki plot dalam bentuk 2D, baik untuk data maupun fungsi. EMT menggunakan fungsi plot2d. Fungsi ini dapat memplot fungsi dan data.
Dimungkinkan untuk memplot di Maxima menggunakan Gnuplot atau di Python menggunakan Math Plot Lib.
Euler dapat memplot plot 2D dari

- ekspresi
- fungsi, variabel, atau kurva berparameter,
- vektor nilai x-y,
- awan titik-titik di bidang,
- kurva implisit dengan level atau wilayah level.
- Fungsi yang kompleks

Gaya plot mencakup berbagai gaya untuk garis dan titik, plot batang, dan plot berbayang.

Plot Ekspresi atau Variabel

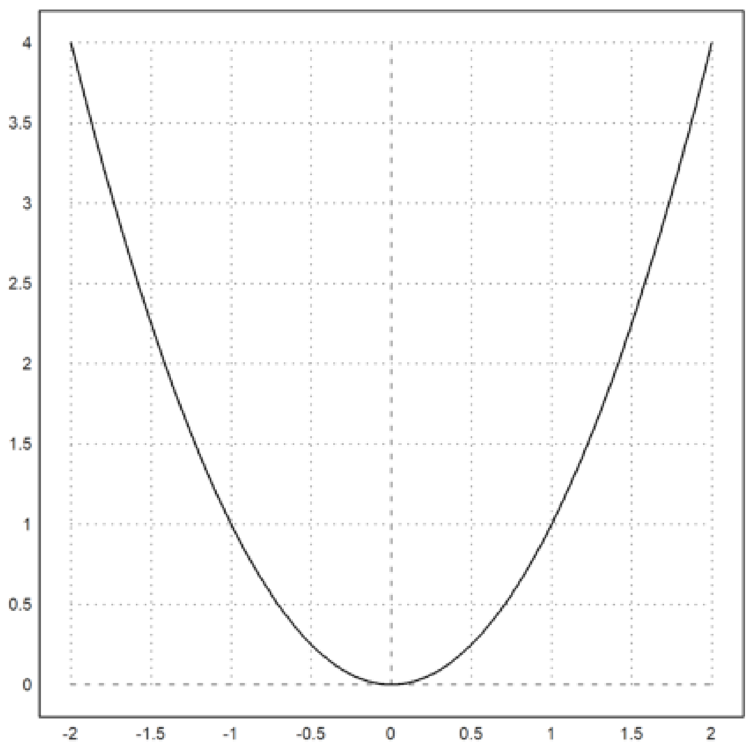
Ekspresi tunggal dalam "x" (misalnya "4*x^2") atau nama fungsi (misalnya "f") menghasilkan grafik fungsi.

Menggambar Grafik Fungsi Satu Variabel

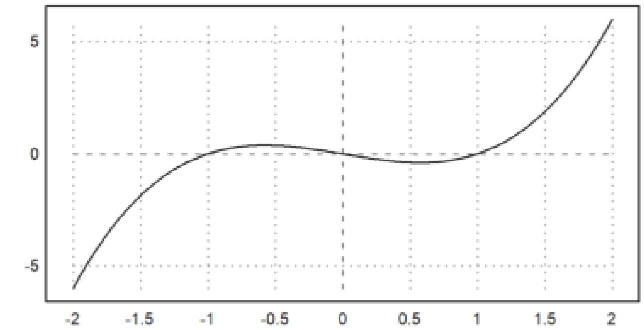
dalam Bentuk Ekspresi Langsung

Berikut ini adalah contoh paling dasar, yang menggunakan rentang default dan menetapkan rentang y yang tepat agar sesuai dengan plot fungsi.
Catatan: Jika Anda mengakhiri baris perintah dengan tanda titik dua ":", plot akan disisipkan ke dalam jendela teks. Jika tidak, tekan TAB untuk melihat plot jika jendela plot tertutup.

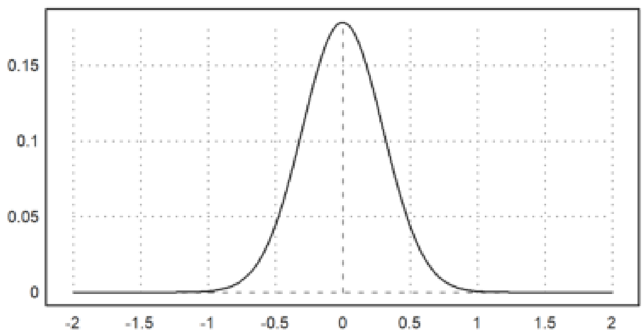
```
>plot2d("x^2"):
```




```
>aspect(2); plot2d("x^3-x"):
```

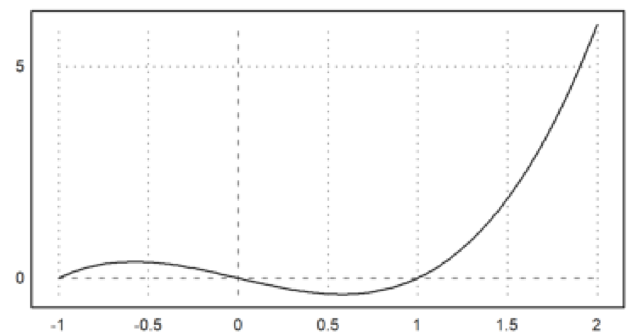



```
>a:=5.6; plot2d("exp(-a*x^2)/a"); insimg(30); // menampilkan gambar hasil plot setinggi 25
```

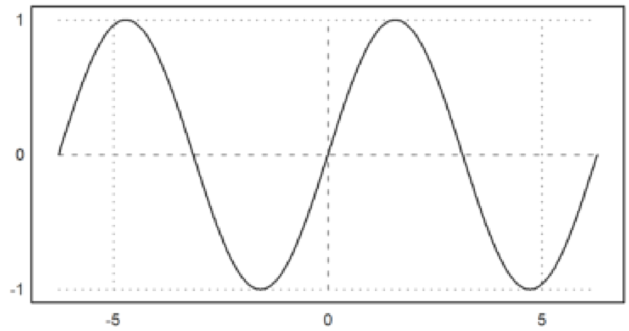


Dari beberapa contoh sebelumnya Anda dapat melihat bahwa aslinya gambar plot menggunakan sumbu X dengan rentang nilai dari -2 sampai dengan 2. Untuk mengubah rentang nilai X dan Y, Anda dapat menambahkan nilai batas X (dan Y) di belakang ekspresi yang digambar.
Rentang plot diatur dengan parameter yang ditetapkan sebagai berikut
- a,b: rentang x (default -2,2)
- c,d: rentang y (default: skala dengan nilai)
- r: sebagai alternatif, radius di sekitar pusat plot
- cx,cy: koordinat pusat plot (default 0,0)

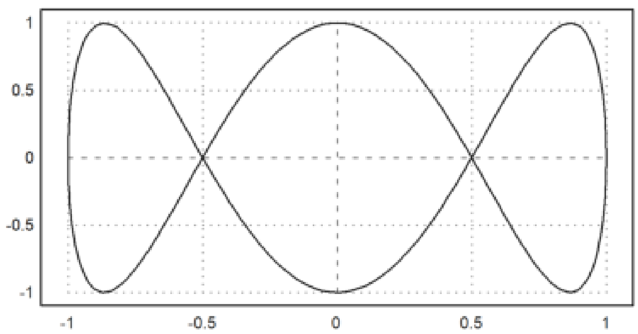
```
>plot2d("x^3-x",-1,2):
```



```
>plot2d("sin(x)",-2*pi,2*pi): // plot sin(x) pada interval [-2pi, 2pi]
```



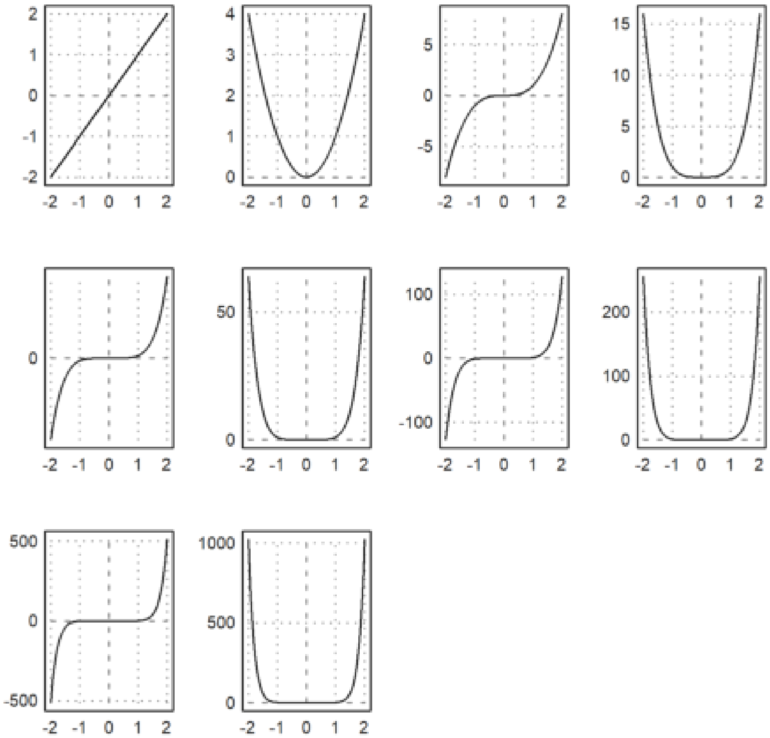
```
>plot2d("cos(x)","sin(3*x)",xmin=0,xmax=2pi):
```



Alternatif untuk tanda titik dua adalah perintah insimg(lines), yang menyisipkan plot yang menempati sejumlah baris teks tertentu.
Dalam opsi, plot dapat diatur untuk muncul
- di jendela terpisah yang dapat diubah ukurannya,
- di jendela buku catatan.

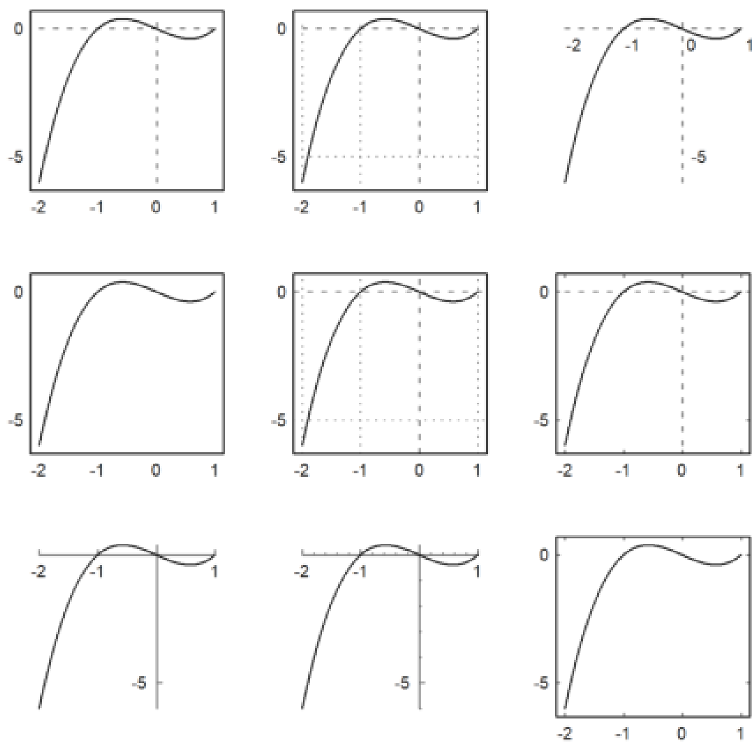
Lebih banyak gaya yang dapat dicapai dengan perintah plot tertentu.
Dalam hal apa pun, tekan tombol tabulator untuk melihat plot, jika disembunyikan.
Untuk membagi jendela menjadi beberapa plot, gunakan perintah figure(). Pada contoh, kita memplot x^1 sampai x^4 ke dalam 4 bagian jendela. figure(0) akan mereset jendela default.

```
>reset;
>figure(3,4); ...
>for n=1 to 10; figure(n); plot2d("x^"+n); end; ...
>figure(0): //(3,4) itu perbandingannya.
```



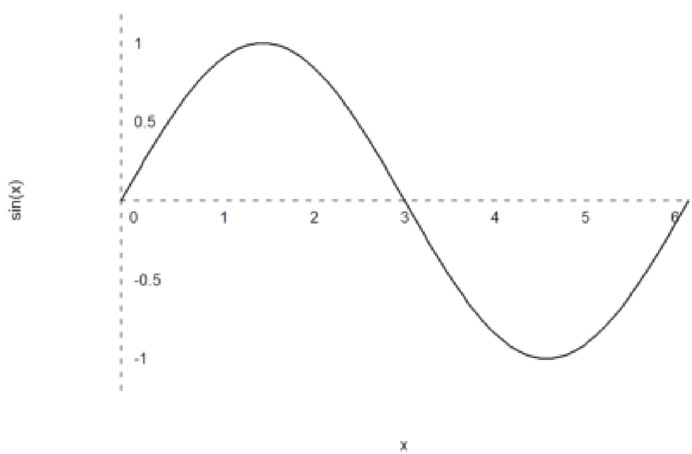
Pada plot2d(), terdapat beberapa gaya alternatif yang tersedia dengan grid=x. Sebagai gambaran umum, kami menampilkan berbagai gaya grid dalam satu gambar (lihat di bawah ini untuk perintah figure()). Gaya grid=0 tidak disertakan. Gaya ini tidak menampilkan grid dan frame.

```
>figure(3,3); ...
>for k=1:9; figure(k); plot2d("x^3-x",-2,1,grid=k); end; ...
>figure(0):
```

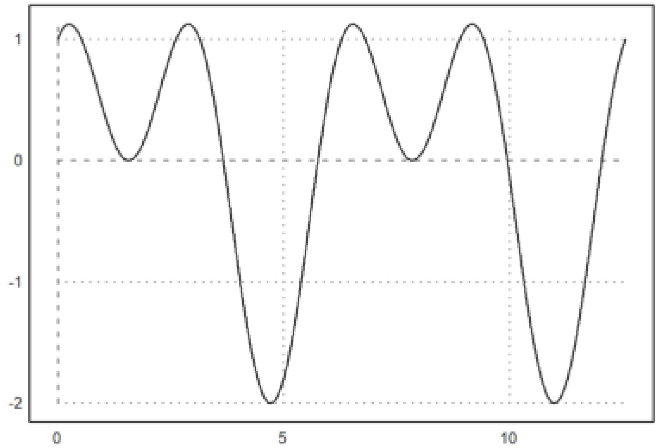


Jika argumen untuk plot2d() adalah sebuah ekspresi yang diikuti oleh empat angka, angka-angka ini adalah rentang x dan y untuk plot.
Atau, a, b, c, d dapat ditentukan sebagai parameter yang ditetapkan sebagai a=... dst.
Pada contoh berikut, kita mengubah gaya grid, menambahkan label, dan menggunakan label vertikal untuk sumbu y.

```
>aspect(1.5); plot2d("sin(x)",0,2pi,-1.2,1.2,grid=3,xl="x",yl="sin(x)"): //x1 buat nama su
```

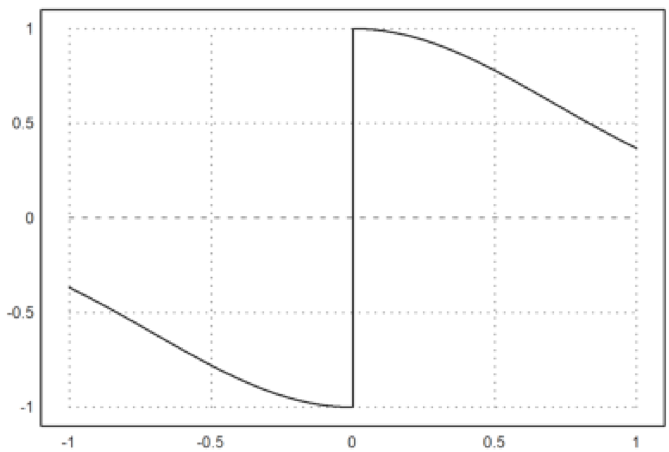



```
>plot2d("sin(x)+cos(2*x)",0,4pi):
```



Gambar yang dihasilkan dengan menyisipkan plot ke dalam jendela teks disimpan dalam direktori yang sama dengan notebook, secara default dalam subdirektori bernama "images". Gambar-gambar tersebut juga digunakan oleh ekspor HTML.
Anda cukup menandai gambar mana saja dan menyalinnya ke clipboard dengan Ctrl-C. Tentu saja, Anda juga dapat mengekspor grafik saat ini dengan fungsi-fungsi pada menu File.
Fungsi atau ekspresi dalam plot2d dievaluasi secara adaptif. Untuk kecepatan yang lebih tinggi, matikan plot adaptif dengan <adaptive dan tentukan jumlah subinterval dengan n=... Hal ini hanya diperlukan pada kasus-kasus yang jarang terjadi.

```
>plot2d("sign(x)*exp(-x^2)",-1,1,<adaptive,n=10000):
```

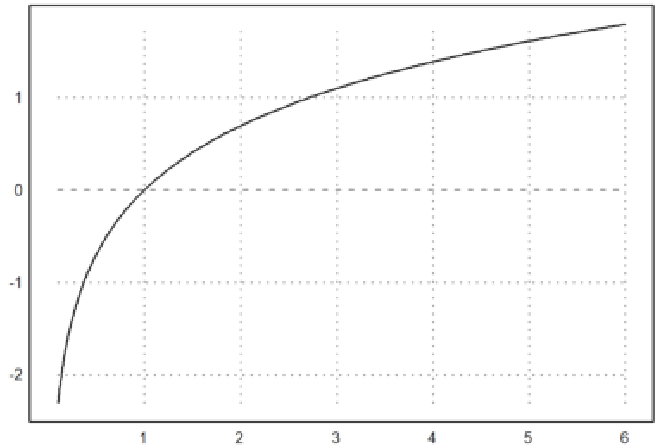



```
>vplot2d("x^x",r=1.2,cx=1,cy=1):
```

```
Function vplot2d not found.
Try list ... to find functions!
Error in:
vplot2d("x^x",r=1.2,cx=1,cy=1): ...
                               ^
```

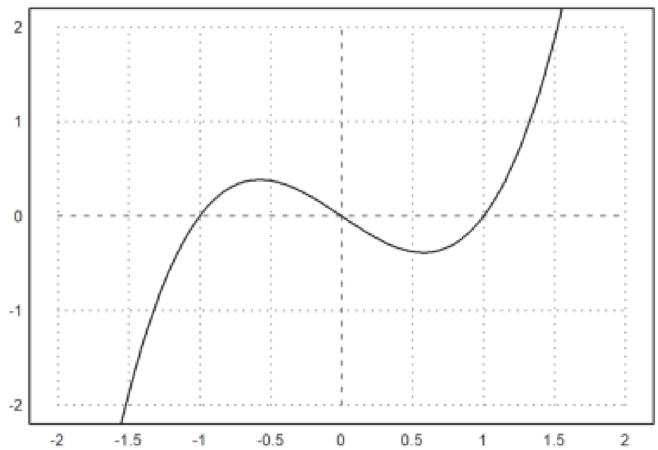
Perhatikan bahwa x^x tidak didefinisikan untuk x<=0. Fungsi plot2d menangkap kesalahan ini, dan mulai memplot segera setelah fungsi didefinisikan. Hal ini berlaku untuk semua fungsi yang mengembalikan NAN di luar jangkauan definisinya.

```
>plot2d("log(x)",0.1,6):
```

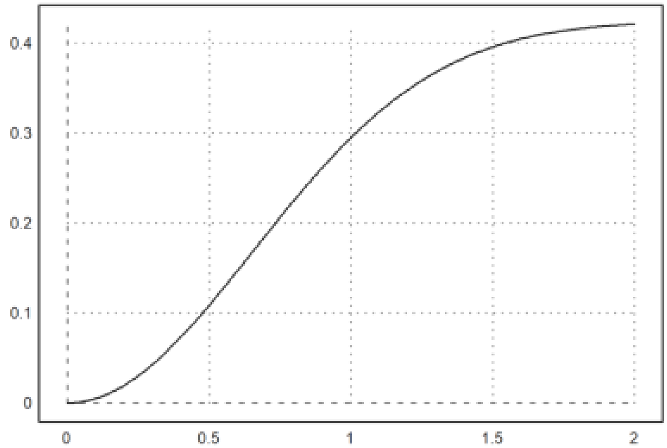


Parameter square=true (atau >square) memilih rentang y secara otomatis sehingga hasilnya adalah jendela plot persegi. Perhatikan bahwa secara default, Euler menggunakan ruang persegi di dalam jendela plot.

```
>plot2d("x^3-x",>square):
```

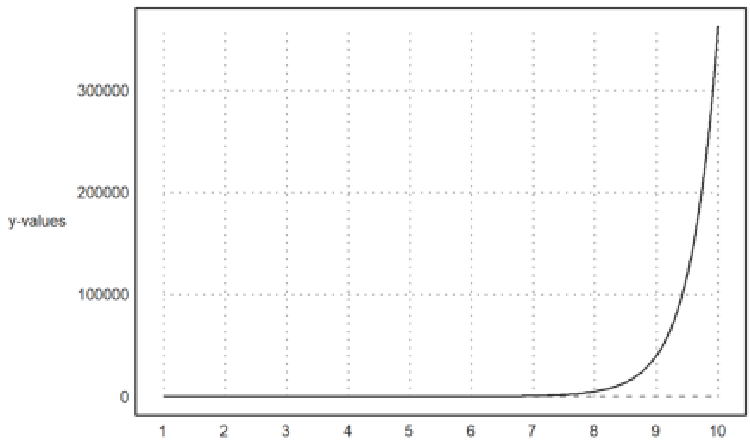



```
>plot2d(''integrate("sin(x)*exp(-x^2)",0,x)'',0,2): // plot integral
```



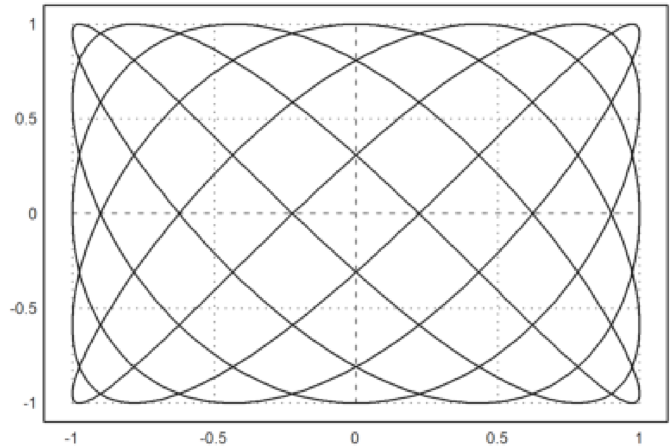
Jika Anda membutuhkan lebih banyak ruang untuk label-y, panggil shrinkwindow() dengan parameter smaller, atau tetapkan nilai positif untuk "smaller" pada plot2d().

```
>plot2d("gamma(x)",1,10,yl="y-values",smaller=6,<vertical):
```

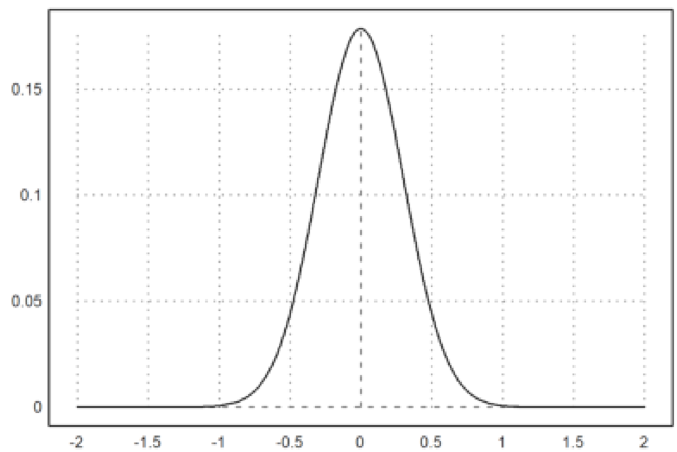


Ekspresi simbolik juga dapat digunakan, karena disimpan sebagai ekspresi string sederhana.

```
>x=linspace(0,2pi,1000); plot2d(sin(5x),cos(7x)):
```



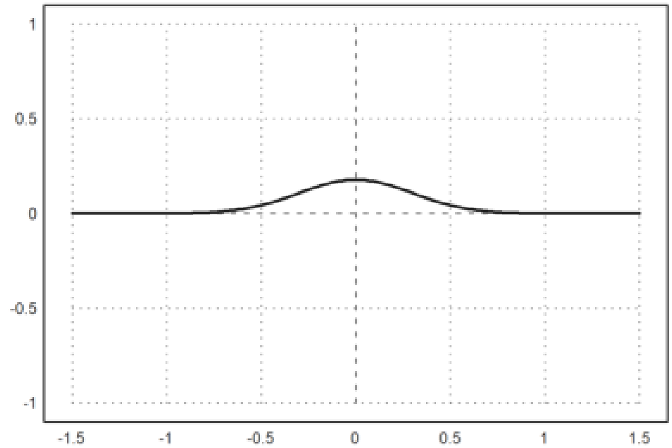

```
>a:=5.6; expr &= exp(-a*x^2)/a; // define expression
>plot2d(expr,-2,2): // plot from -2 to 2
```



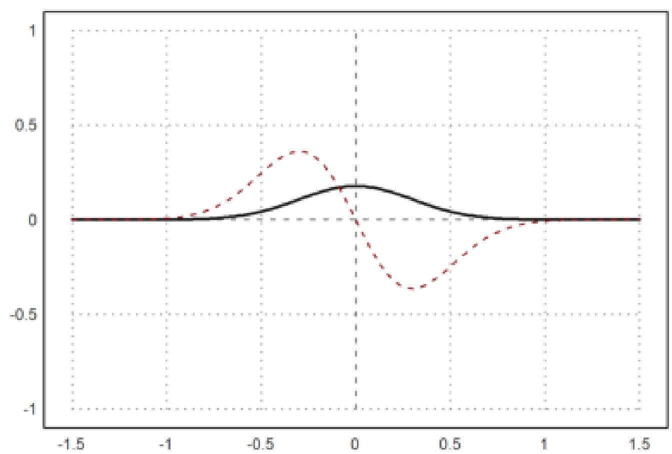
Menggambar Grafik Fungsi Satu Variabel

yang Rumusnya Disimpan dalam Variabel Ekspresi

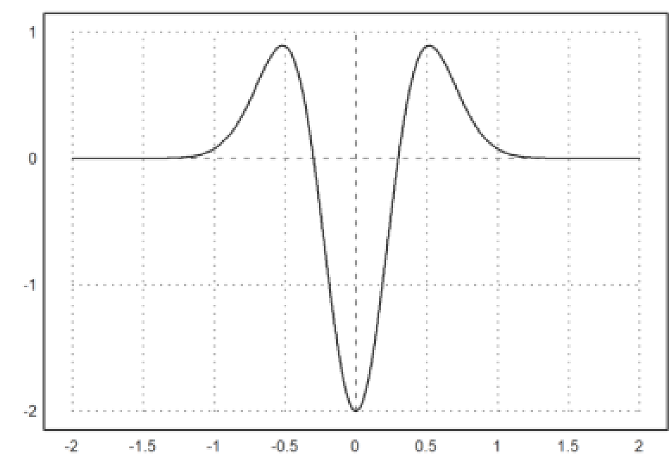
```
>plot2d(expr,r=1,thickness=2): // plot in a square around (0,0)
```



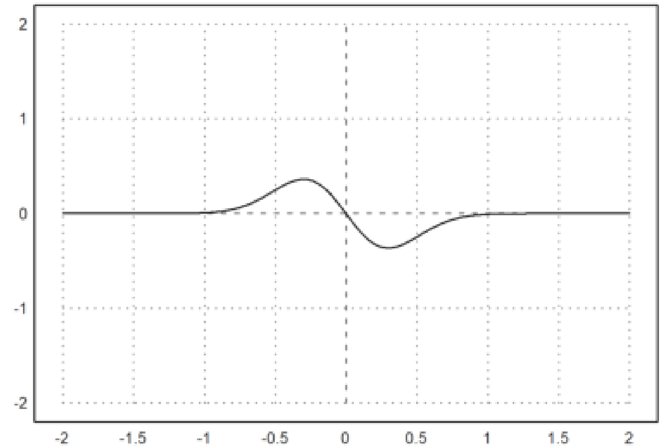

```
>plot2d(&diff(expr,x),>add,style="--",color=red): // add another plot
```



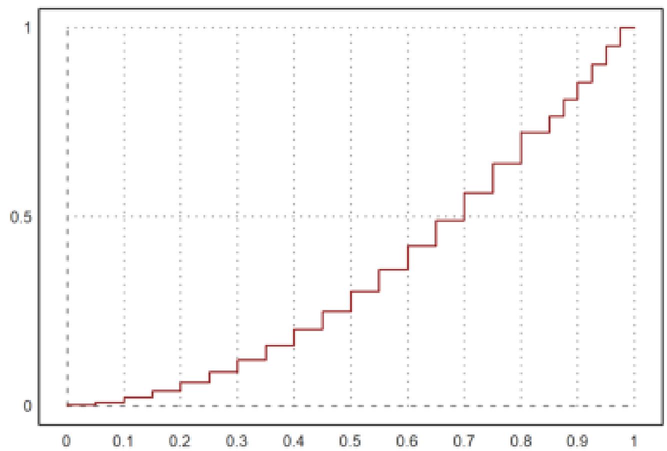

```
>plot2d(&diff(expr,x,2),a=-2,b=2,c=-2,d=1): // plot in rectangle
```



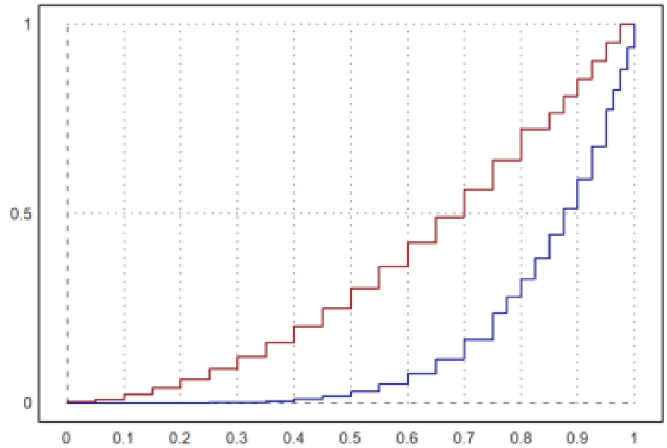
```
>plot2d(&diff(expr,x),a=-2,b=2,>square): // keep plot square
```




```
>plot2d("x^2",0,1,steps=1,color=red,n=10):
```




```
>plot2d("x^5",>add,steps=2,color=blue,n=10):
```



Fungsi dalam satu Parameter

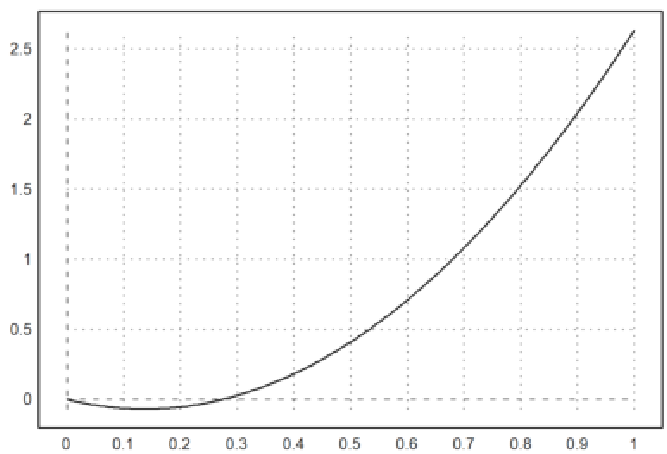
Fungsi plot yang paling penting untuk plot planar adalah plot2d(). Fungsi ini diimplementasikan dalam bahasa Euler dalam file "plot.e", yang dimuat pada awal program.
Berikut adalah beberapa contoh penggunaan fungsi. Seperti biasa dalam EMT, fungsi yang bekerja untuk fungsi atau ekspresi lain, Anda dapat mengoper parameter tambahan (selain x) yang bukan variabel global ke fungsi dengan parameter titik koma atau dengan koleksi panggilan.

Menggambar Grafik Fungsi Satu Variabel

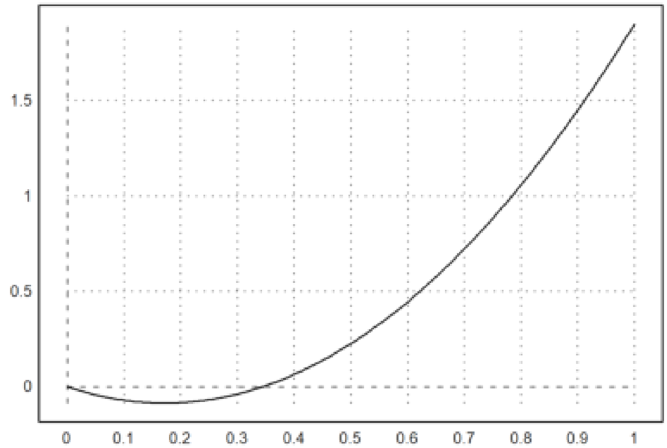
yang Fungsinya Didefinisikan sebagai Fungsi Numerik

Penggunaan fungsi numerik ditandai dengan simbol :=

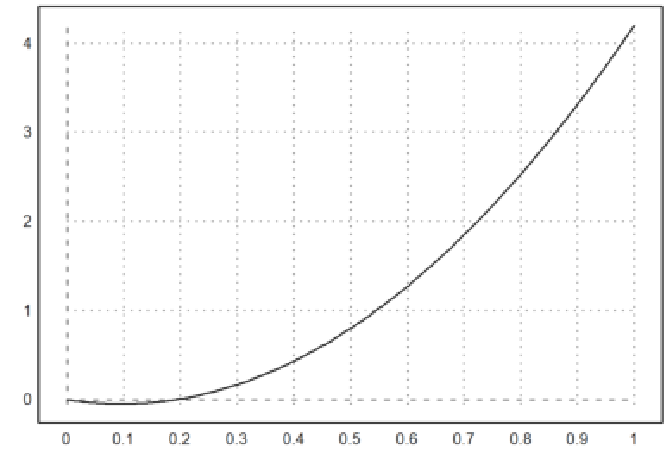
```
>function f(x,a) := x^2/a+a*x^2-x; //mendefinisikan suatu fungsi numerik
>a=0.3; plot2d("f",0,1;a): // plot with a=0.3
```



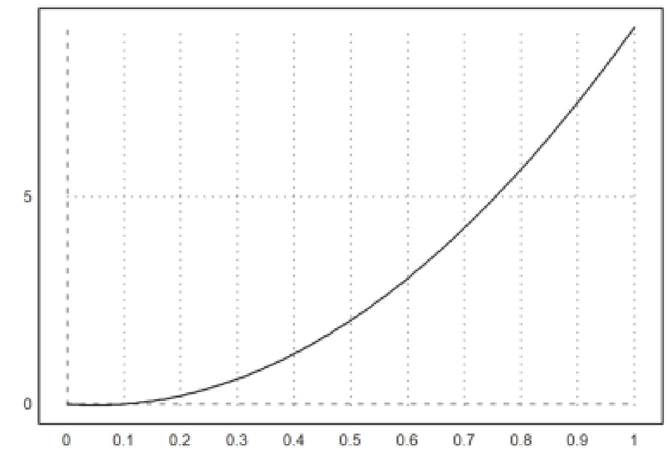

```
>plot2d("f",0,1;0.4): // plot with a=0.4
```



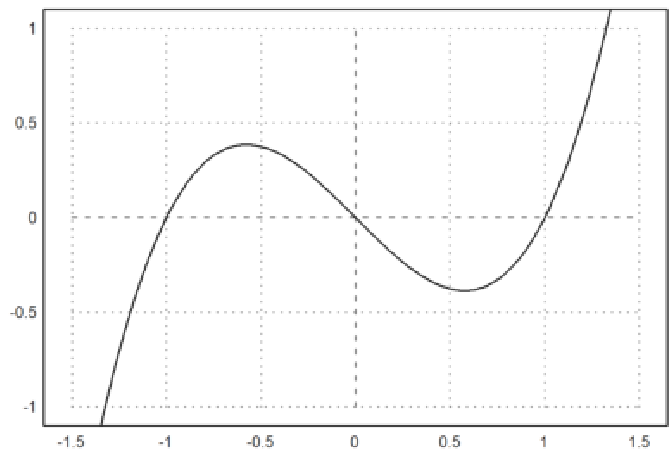

```
>plot2d({{"f",0.2}},0,1): // plot with a=0.2
```




```
>plot2d({{"f(x,b)",b=0.1}},0,1): // plot with 0.1
```



```
>function f(x) := x^3-x; ...
>plot2d("f",r=1):
```



Menggambar Grafik Fungsi Satu Variabel

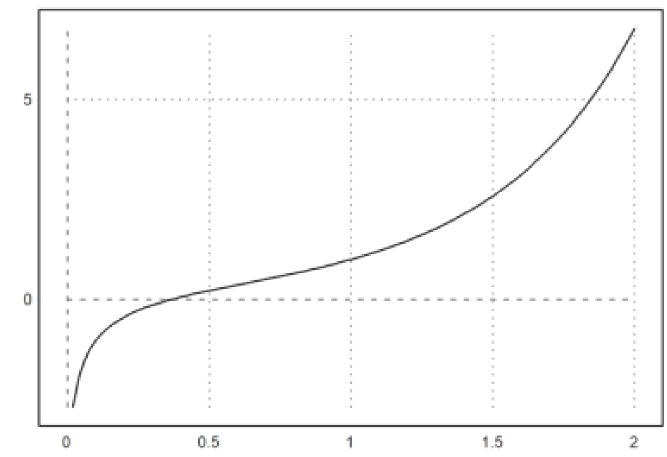
yang Fungsinya Didefinisikan sebagai Fungsi Simbolik.

Berikut ini adalah ringkasan dari fungsi yang diterima
- ekspresi atau ekspresi simbolik dalam x
- fungsi atau fungsi simbolik dengan nama sebagai "f"
- fungsi-fungsi simbolik hanya dengan nama f
Fungsi plot2d() juga menerima fungsi simbolik. Untuk fungsi simbolik, nama saja sudah cukup.

```
>function f(x) &= diff(x^x,x)
```

```
                       x
                      x   (log(x) + 1)
```

```
>plot2d(f,0,2):
```

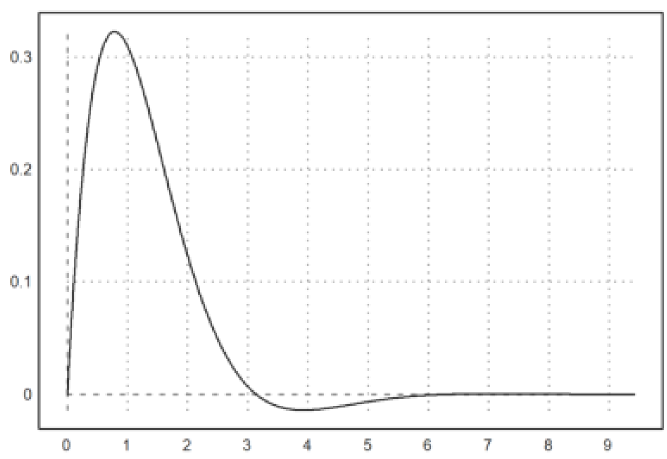


Tentu saja, untuk ekspresi atau ungkapan simbolik, nama variabel sudah cukup untuk memplotnya.

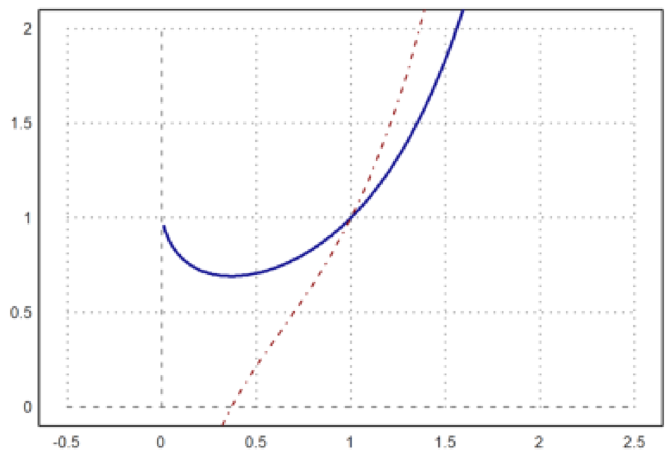
```
>expr &= sin(x)*exp(-x)
```

```
                          - x
                         E     sin(x)
```

```
>plot2d(expr,0,3pi):
```



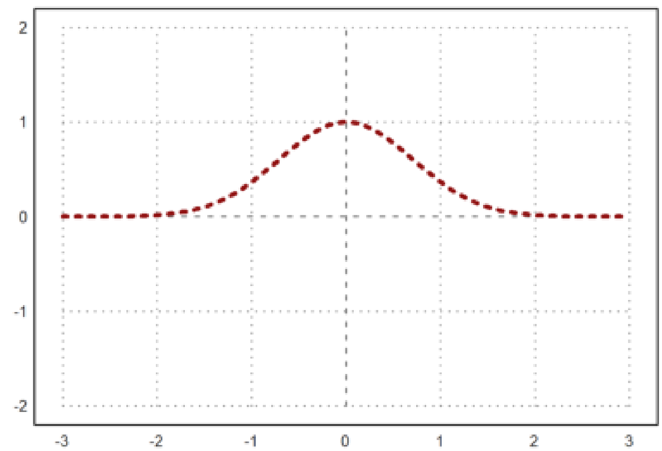

```
>function f(x) &= x^x;
>plot2d(f,r=1,cx=1,cy=1,color=blue,thickness=2);
>plot2d(&diff(f(x),x),>add,color=red,style="-.-"):
```



Untuk gaya garis, ada berbagai pilihan.
- style = "...". Pilih dari "-", "–", "-.", ".", ".-.", "-.-".
- color: Lihat di bawah untuk warna.
- ketebalan: Default adalah 1.

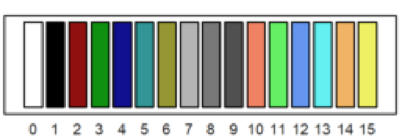
Warna dapat dipilih sebagai salah satu warna default, atau sebagai warna RGB.
- 0..15: indeks warna default.
- konstanta warna: putih, hitam, merah, hijau, biru, cyan, zaitun, abu-abu muda, abu-abu, abu-abu tua, oranye, hijau muda, pirus, biru muda, oranye muda, kuning
- rgb (merah, hijau, biru): parameter adalah real dalam [0,1].

```
>plot2d("exp(-x^2)",r=2,color=red,thickness=3,style="--"):
```



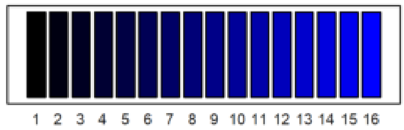
Berikut ini adalah pemandangan warna EMT yang sudah ditetapkan sebelumnya.

```
>aspect(4); columnsplot(ones(1,16),lab=0:15,grid=0,color=0:15):
```



Tetapi Anda bisa menggunakan warna apa pun.

```
>columnsplot(ones(1,16),grid=0,color=rgb(0,0,linspace(0,1,15))):
```



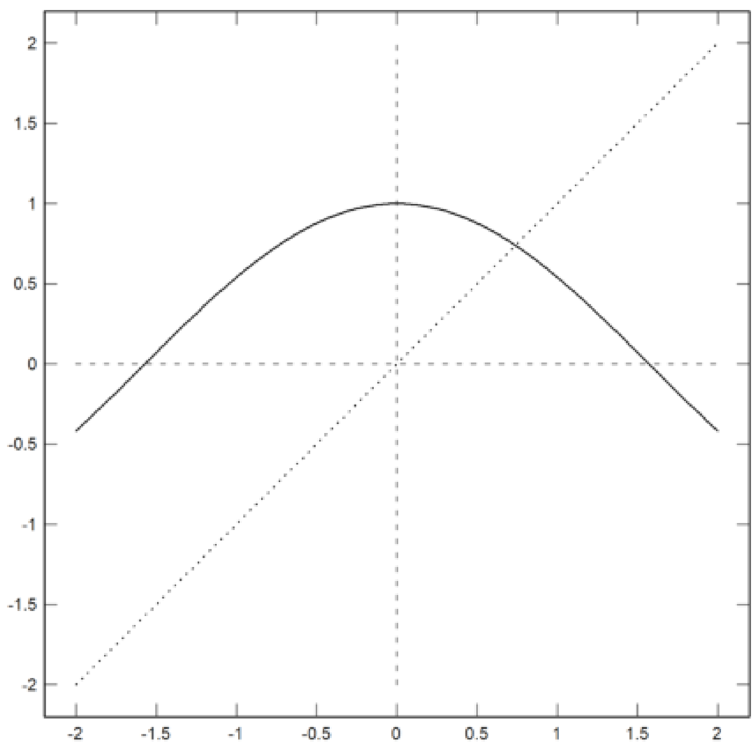
Menggambar Beberapa Kurva Pada

* Bidang Koordinat yang Sama

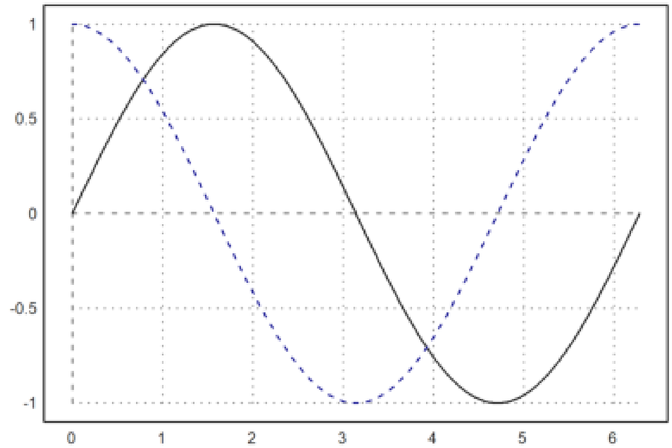
Menggambar Beberapa Kurva Sekaligus

Memplot lebih dari satu fungsi (beberapa fungsi) ke dalam satu jendela dapat dilakukan dengan berbagai cara. Salah satu caranya adalah dengan menggunakan >add untuk beberapa pemanggilan ke plot2d secara bersamaan, kecuali pemanggilan pertama. Kita telah menggunakan fitur ini pada contoh di atas.

```
>aspect(); plot2d("cos(x)",r=2,grid=6); plot2d("x",style=".",>add):
```

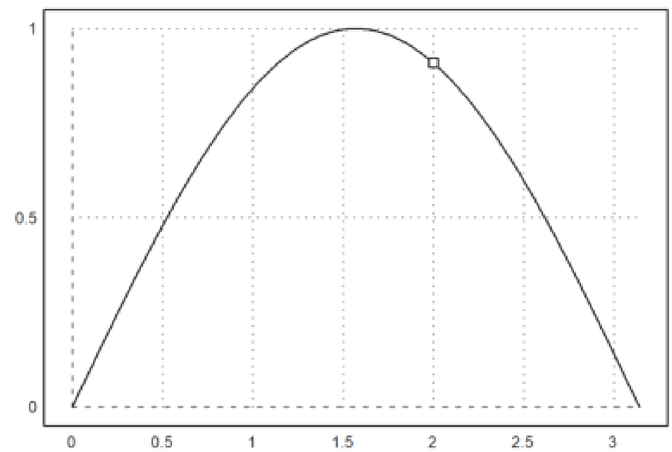



```
>aspect(1.5); plot2d("sin(x)",0,2pi); plot2d("cos(x)",color=blue,style="--",>add):
```



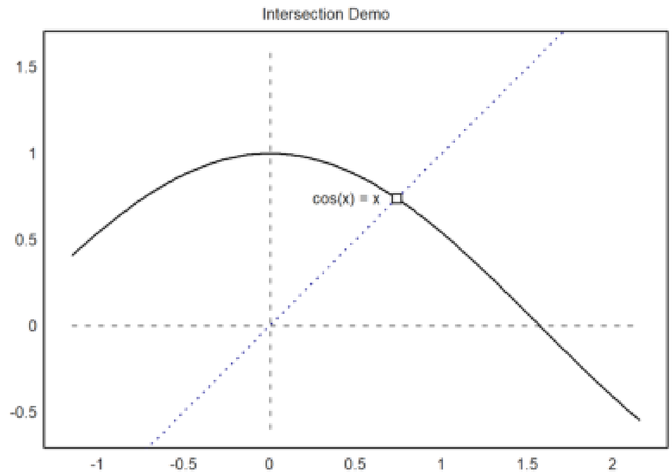
Salah satu kegunaan >add adalah untuk menambahkan titik pada kurva.

```
>plot2d("sin(x)",0,pi); plot2d(2,sin(2),>points,>add):
```



Kami menambahkan titik perpotongan dengan label (pada posisi "cl" untuk kiri tengah), dan menyisipkan hasilnya ke dalam buku catatan. Kami juga menambahkan judul ke plot.

```
>plot2d(["cos(x)","x"],r=1.1,cx=0.5,cy=0.5, ...
>  color=[black,blue],style=["-","."], ...
>  grid=1);
>x0=solve("cos(x)-x",1);  ...
>  plot2d(x0,x0,>points,>add,title="Intersection Demo");  ...
>  label("cos(x) = x",x0,x0,pos="cl",offset=20):
```



Dalam demo berikut ini, kami memplot fungsi sinc(x)=sin(x)/x dan ekspansi Taylor ke-8 dan ke-16. Kami menghitung ekspansi ini menggunakan Maxima melalui ekspresi simbolik.
Plot ini dilakukan dalam perintah multi-baris berikut dengan tiga pemanggilan plot2d(). Perintah kedua dan ketiga memiliki set flag >add, yang membuat plot menggunakan rentang sebelumnya.
Kami menambahkan sebuah kotak label yang menjelaskan fungsi-fungsi tersebut.

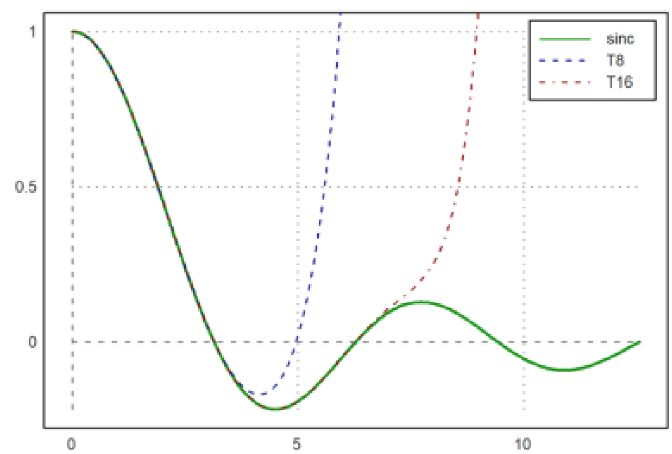
```
>$taylor(sin(x)/x,x,0,4)
```

$$\frac{x^4}{120} - \frac{x^2}{6} + 1$$

Menggambar Beberapa Kurva

dalam Satu Bidang Koordinat

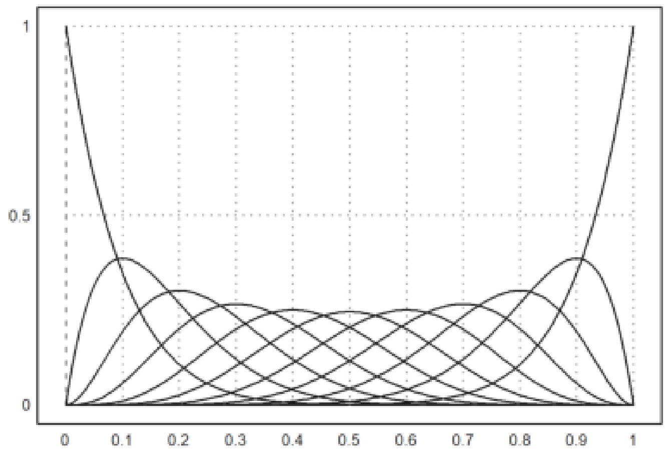
```
>plot2d("sinc(x)",0,4pi,color=green,thickness=2); ...
>  plot2d(&taylor(sin(x)/x,x,0,8),>add,color=blue,style="--"); ...
>  plot2d(&taylor(sin(x)/x,x,0,16),>add,color=red,style="-.-"); ...
>  labelbox(["sinc","T8","T16"],styles=["-","--","-.-"], ...
>    colors=[green,blue,red]):
```



Pada contoh berikut, kami menghasilkan Polinomial Bernstein.

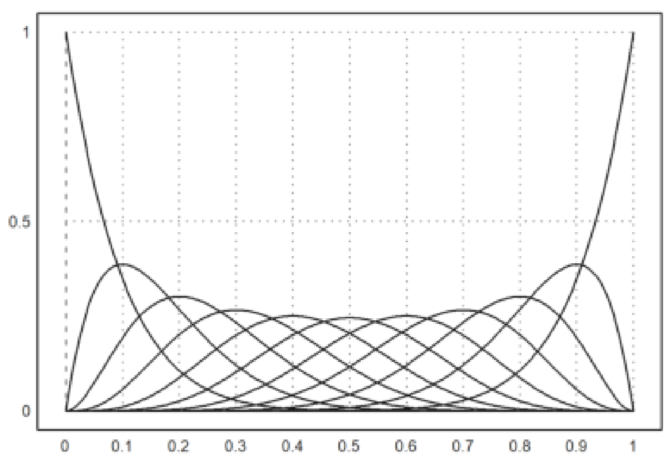
$$B_i(x) = \binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i}$$

```
>plot2d("(1-x)^10",0,1); // plot first function
>for i=1 to 10; plot2d("bin(10,i)*x^i*(1-x)^(10-i)",>add); end;
>insimg;
```



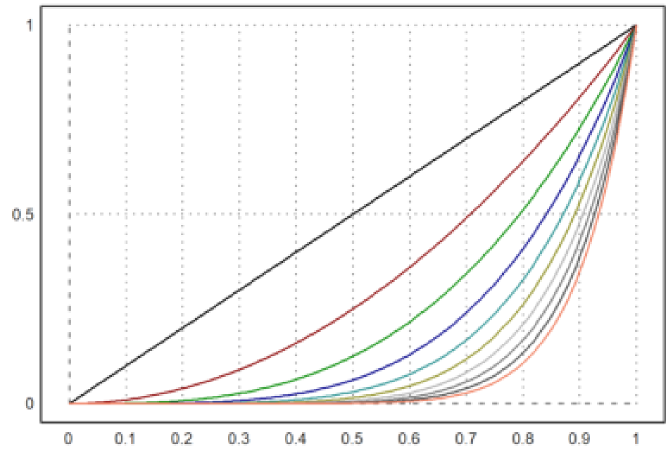
Metode kedua menggunakan sepasang matriks nilai x dan matriks nilai y dengan ukuran yang sama. Kita membuat sebuah matriks nilai dengan satu Polinomial Bernstein di setiap baris. Untuk ini, kita cukup menggunakan vektor kolom i. Lihatlah pengantar tentang bahasa matriks untuk mempelajari lebih lanjut.

```
>x=linspace(0,1,500);
>n=10; k=(0:n)'; // n is row vector, k is column vector
>y=bin(n,k)*x^k*(1-x)^(n-k); // y is a matrix then
>plot2d(x,y):
```



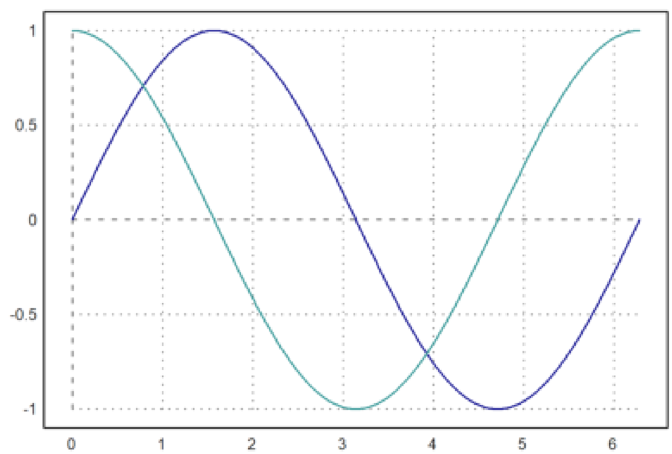
Perhatikan bahwa parameter warna dapat berupa vektor. Kemudian setiap warna digunakan untuk setiap baris matriks.

```
>x=linspace(0,1,200); y=x^(1:10)'; plot2d(x,y,color=1:10):
```

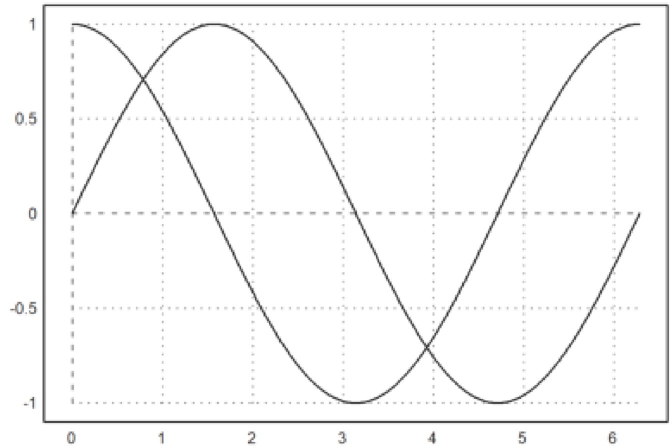


Metode lainnya adalah menggunakan vektor ekspresi (string). Anda kemudian dapat menggunakan larik warna, larik gaya, dan larik ketebalan dengan panjang yang sama.

```
>plot2d(["sin(x)","cos(x)"],0,2pi,color=4:5):
```




```
>plot2d(["sin(x)","cos(x)"],0,2pi): // plot vector of expressions
```



Kita bisa mendapatkan vektor seperti itu dari Maxima dengan menggunakan makelist() dan mxm2str().

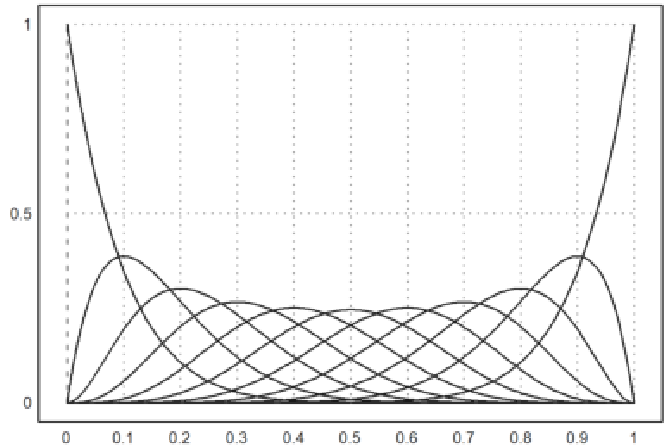
```
>v &= makelist(binomial(10,i)*x^i*(1-x)^(10-i),i,0,10) // make list
```

```
                  10              9                8   2               7   3
         [(1 - x)   , 10 (1 - x)   x, 45 (1 - x)   x , 120 (1 - x)   x ,
              6   4                5   5                4   6                3   7
  210 (1 - x)   x , 252 (1 - x)   x , 210 (1 - x)   x , 120 (1 - x)   x ,
             2   8                 9    10
  45 (1 - x)   x , 10 (1 - x) x , x   ]
```

```
>mxm2str(v) // get a vector of strings from the symbolic vector
```

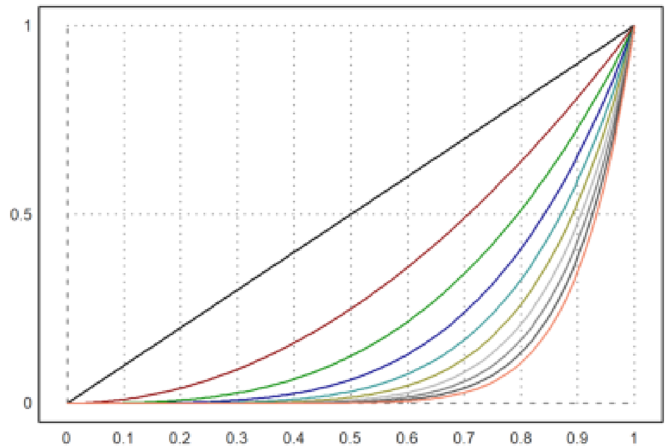
```
(1-x)^10
10*(1-x)^9*x
45*(1-x)^8*x^2
120*(1-x)^7*x^3
210*(1-x)^6*x^4
252*(1-x)^5*x^5
210*(1-x)^4*x^6
120*(1-x)^3*x^7
45*(1-x)^2*x^8
10*(1-x)*x^9
x^10
```

```
>plot2d(mxm2str(v),0,1): // plot functions
```



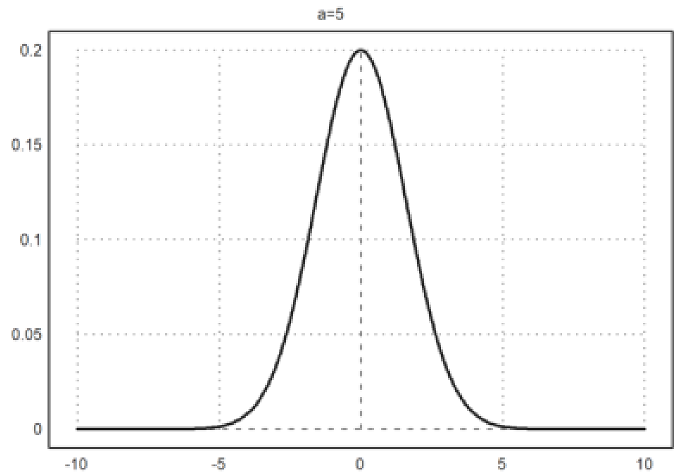
Alternatif lain adalah dengan menggunakan bahasa matriks Euler.
Jika sebuah ekspresi menghasilkan sebuah matriks fungsi, dengan satu fungsi di setiap baris, semua fungsi ini akan diplot ke dalam satu plot.
Untuk ini, gunakan vektor parameter dalam bentuk vektor kolom. Jika sebuah larik warna ditambahkan, maka akan digunakan untuk setiap baris plot.

```
>n=(1:10)'; plot2d("x^n",0,1,color=1:10):
```



Ekspresi dan fungsi satu baris dapat melihat variabel global.
Jika Anda tidak dapat menggunakan variabel global, Anda perlu menggunakan fungsi dengan parameter tambahan, dan memberikan parameter ini sebagai parameter titik koma.
Berhati-hatilah untuk meletakkan semua parameter yang diberikan di akhir perintah plot2d. Pada contoh ini kita mengoper a=5 ke fungsi f, yang kita plot dari -10 ke 10.

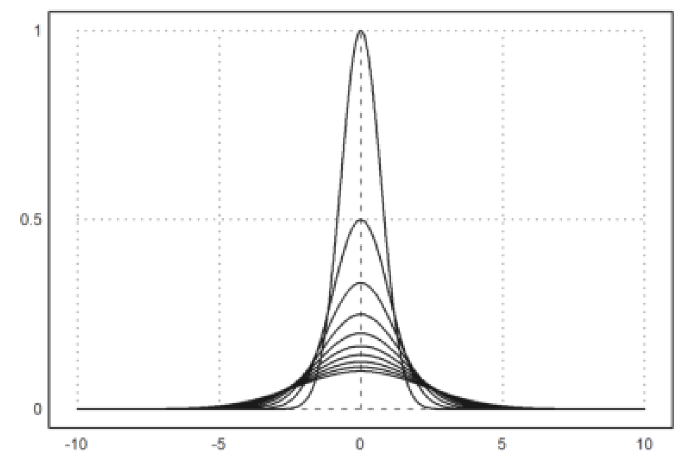
```
>function f(x,a) := 1/a*exp(-x^2/a); ...
>plot2d("f",-10,10;5,thickness=2,title="a=5"):
```



Atau, gunakan koleksi dengan nama fungsi dan semua parameter tambahan. Daftar khusus ini disebut koleksi panggilan, dan itu adalah cara yang lebih disukai untuk mengoper argumen ke fungsi yang dengan sendirinya dioper sebagai argumen ke fungsi lain.

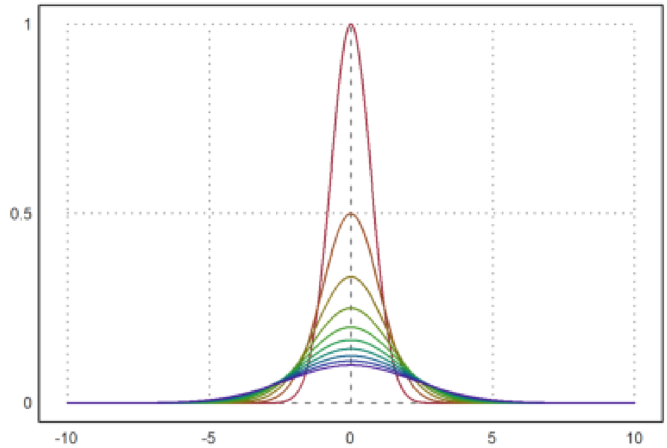
Pada contoh berikut, kita menggunakan perulangan untuk memplot beberapa fungsi (lihat tutorial tentang pemrograman perulangan).

```
>plot2d({{"f",1}},-10,10); ...
>for a=2:10; plot2d({{"f",a}},>add); end:
```



Kita dapat mencapai hasil yang sama dengan cara berikut menggunakan bahasa matriks EMT. Setiap baris dari matriks f(x,a) adalah satu fungsi. Selain itu, kita dapat mengatur warna untuk setiap baris matriks. Klik dua kali pada fungsi getspectral() untuk penjelasannya.

```
>x=-10:0.01:10; a=(1:10)'; plot2d(x,f(x,a),color=getspectral(a/10)):
```

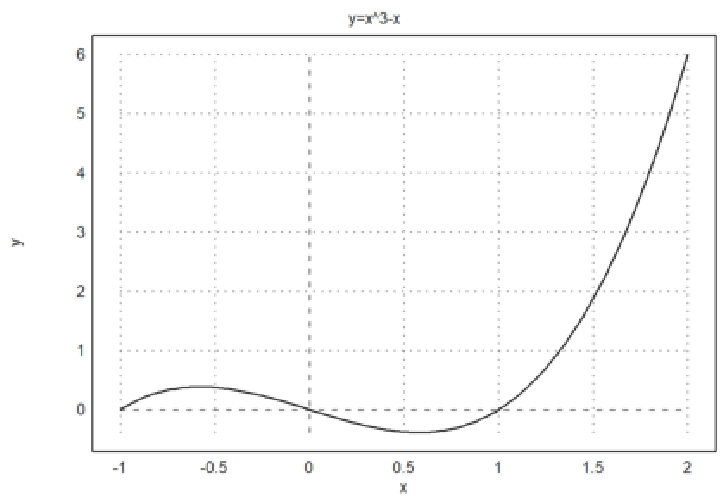


Label Teks

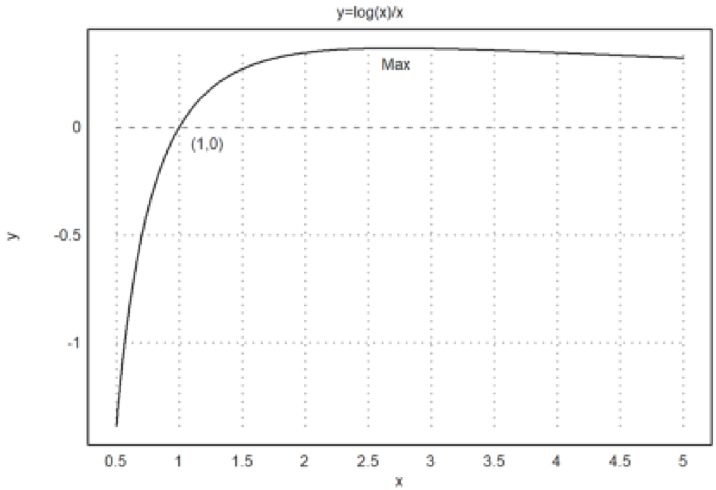
Menuliskan Label Sumbu Koordinat, Label Kurva, dan Keterangan Kurva (Legend)

Dekorasi sederhana dapat berupa
- sebuah judul dengan title="..."
- label x dan y dengan xl="...", yl="..."
- label teks lain dengan label("...",x,y)
Perintah label akan memplotkan ke dalam plot saat ini pada koordinat plot (x,y). Perintah ini dapat menerima sebuah argumen posisi.

```
>plot2d("x^3-x",-1,2,title="y=x^3-x",yl="y",xl="x"):
```

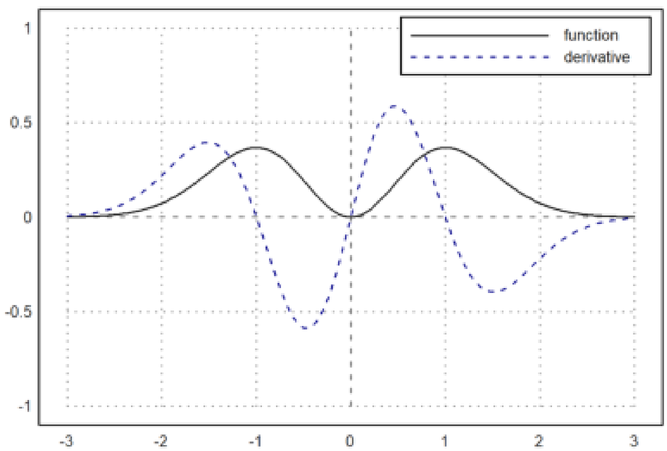



```
>expr := "log(x)/x"; ...
>  plot2d(expr,0.5,5,title="y="+expr,xl="x",yl="y"); ...
>  label("(1,0)",1,0); label("Max",E,expr(E),pos="lc"):
```



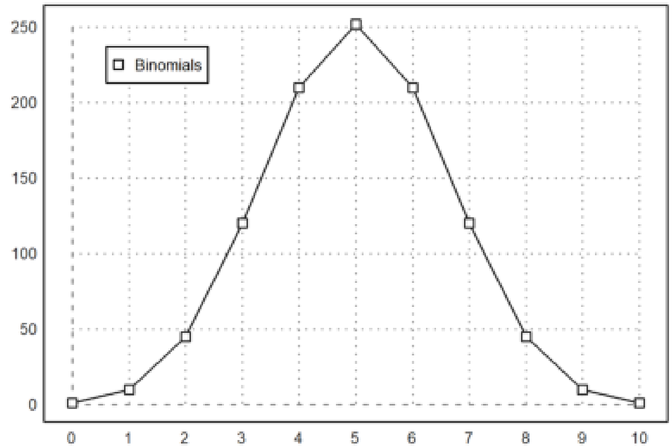
Ada juga fungsi labelbox(), yang dapat menampilkan fungsi dan teks. Fungsi ini membutuhkan vektor string dan warna, satu item untuk setiap fungsi.

```
>function f(x) &= x^2*exp(-x^2);  ...
>plot2d(&f(x),a=-3,b=3,c=-1,d=1);  ...
>plot2d(&diff(f(x),x),>add,color=blue,style="--"); ...
>labelbox(["function","derivative"],styles=["-","--"], ...
>   colors=[black,blue],w=0.4):
```



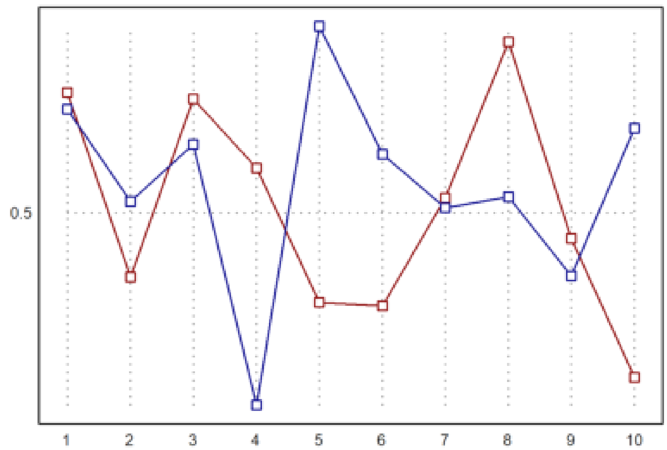
Kotak tersebut berlabuh di kanan atas secara default, tetapi >left menambatkannya di kiri atas. Anda dapat memindahkannya ke tempat mana pun yang Anda suka. Posisi jangkar adalah sudut kanan atas kotak, dan angkanya adalah pecahan dari ukuran jendela grafik. Lebarnya otomatis.
Untuk plot titik, kotak label juga dapat digunakan. Tambahkan parameter >point, atau vektor bendera, satu untuk setiap label.
Pada contoh berikut, hanya ada satu fungsi. Jadi kita dapat menggunakan string sebagai pengganti vektor string. Kita mengatur warna teks menjadi hitam untuk contoh ini.

```
>n=10; plot2d(0:n,bin(n,0:n),>addpoints); ...
>labelbox("Binomials",styles="[]",>points,x=0.1,y=0.1, ...
>tcolor=black,>left):
```



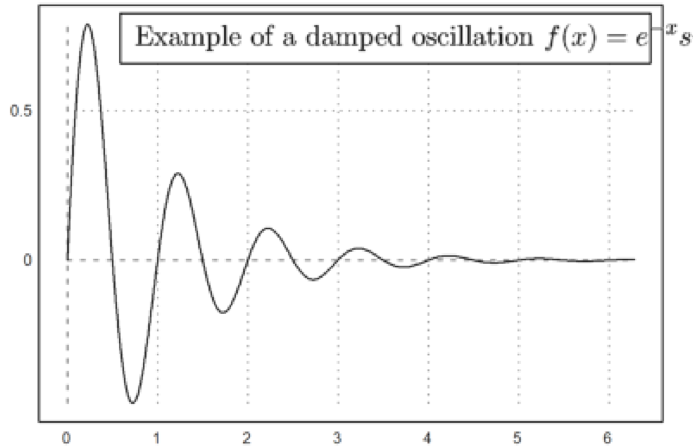
Gaya plot ini juga tersedia di statplot(). Seperti pada plot2d() warna dapat diatur untuk setiap baris plot. Terdapat lebih banyak plot khusus untuk keperluan statistik (lihat tutorial tentang statistik).

```
>statplot(1:10,random(2,10),color=[red,blue]):
```



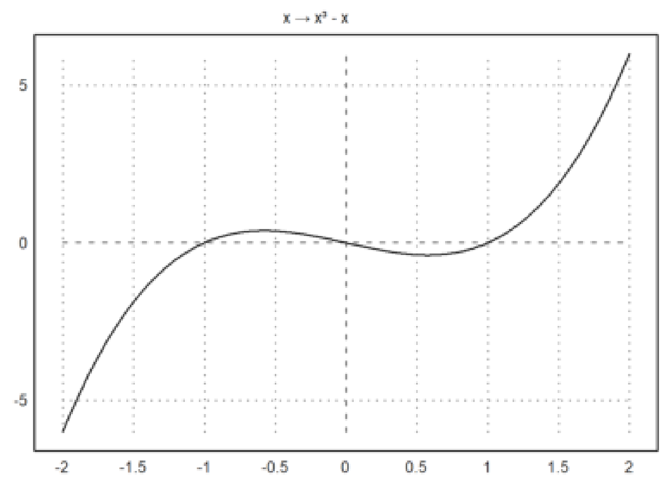
Fitur yang serupa adalah fungsi textbox().
Lebarnya secara default adalah lebar maksimal baris teks. Tetapi bisa juga diatur oleh pengguna.

```
>function f(x) &= exp(-x)*sin(2*pi*x); ...
>plot2d("f(x)",0,2pi); ...
>textbox(latex("\text{Example of a damped oscillation}\ f(x)=e^{-x}sin(2\pi x)"),w=0.85):
```



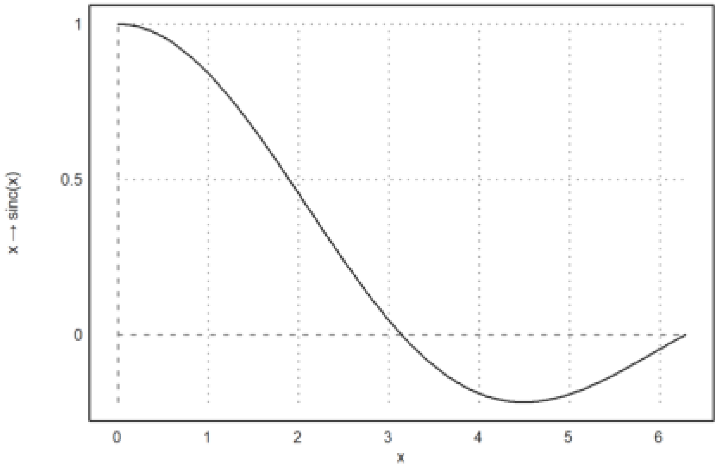
Label teks, judul, kotak label, dan teks lainnya dapat berisi string Unicode (lihat sintaks EMT untuk mengetahui lebih lanjut tentang string Unicode).

```
>plot2d("x^3-x",title=u"x &rarr; x&sup3; - x"):
```



Label pada sumbu x dan y bisa vertikal, begitu juga dengan sumbu.

```
>plot2d("sinc(x)",0,2pi,xl="x",yl=u"x &rarr; sinc(x)",>vertical):
```



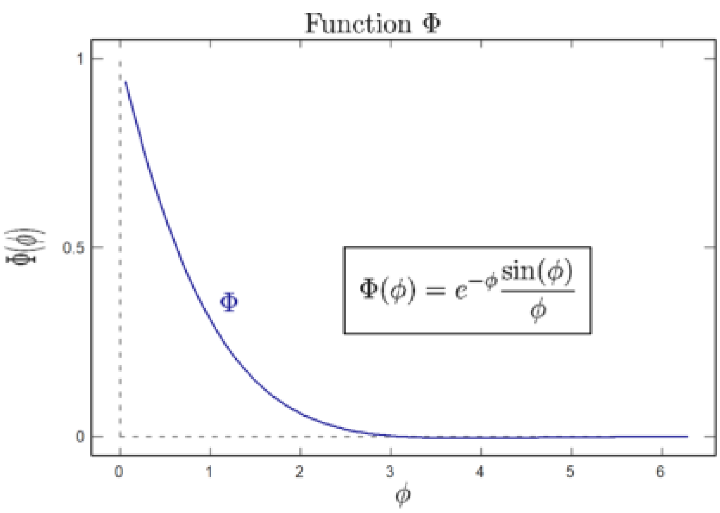
LaTeX

Anda juga dapat memplot formula LaTeX jika Anda telah menginstal sistem LaTeX. Saya merekomendasikan MiKTeX. Jalur ke binari "lateks" dan "dvipng" harus berada di jalur sistem, atau Anda harus mengatur LaTeX di menu opsi.

Perhatikan, bahwa penguraian LaTeX berjalan lambat. Jika Anda ingin menggunakan LaTeX dalam plot animasi, Anda harus memanggil latex() sebelum perulangan satu kali dan menggunakan hasilnya (gambar dalam matriks RGB).

Pada plot berikut ini, kita menggunakan LaTeX untuk label x dan y, sebuah label, kotak label dan judul plot.

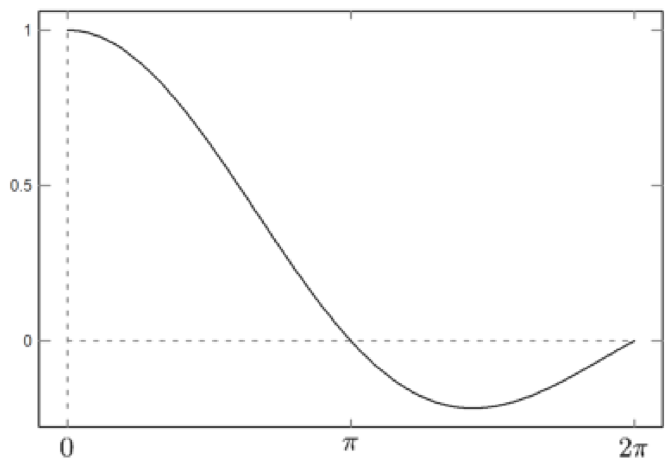
```
>plot2d("exp(-x)*sin(x)/x",a=0,b=2pi,c=0,d=1,grid=6,color=blue, ...
>  title=latex("\text{Function $\Phi$}"), ...
>  xl=latex("\phi"),yl=latex("\Phi(\phi)")); ...
>textbox( ...
>  latex("\Phi(\phi) = e^{-\phi} \frac{\sin(\phi)}{\phi}"),x=0.8,y=0.5); ...
>label(latex("\Phi",color=blue),1,0.4):
```



Seringkali, kita menginginkan spasi dan label teks yang tidak sesuai pada sumbu x. Kita dapat menggunakan xaxis() dan yaxis() seperti yang akan kita tunjukkan nanti.

Cara termudah adalah dengan membuat plot kosong dengan sebuah frame menggunakan grid=4, dan kemudian menambahkan grid dengan ygrid() dan xgrid(). Pada contoh berikut, kita menggunakan tiga buah string LaTeX untuk label pada sumbu x dengan xtick().

```
>plot2d("sinc(x)",0,2pi,grid=4,<ticks); ...
>ygrid(-2:0.5:2,grid=6); ...
>xgrid([0:2]*pi,<ticks,grid=6);  ...
>xtick([0,pi,2pi],["0","\pi","2\pi"],>latex):
```



Tentu saja, fungsi juga bisa digunakan.

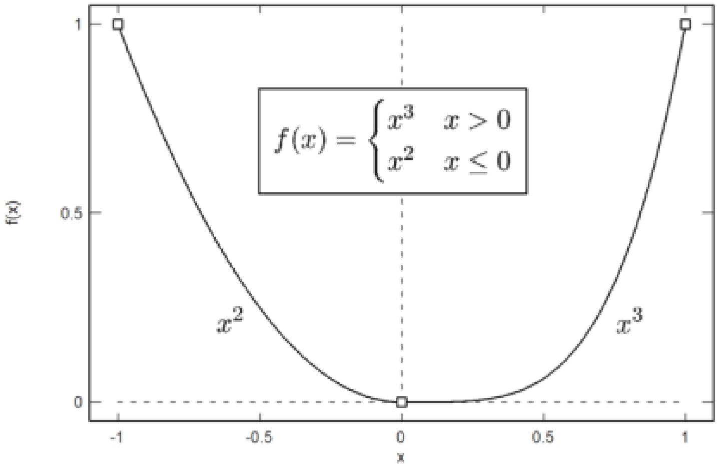
```
>function map f(x) ...
```

```
  if x>0 then return x^4
  else return x^2
  endif
  endfunction
```

Parameter "map" membantu menggunakan fungsi untuk vektor. Untuk plot, hal ini tidak diperlukan. Tetapi untuk mendemonstrasikan bahwa vektorisasi berguna, kami menambahkan beberapa titik kunci pada plot pada x=-1, x=0 dan x=1.

Pada plot berikut, kita juga memasukkan beberapa kode LaTeX. Kita menggunakannya untuk dua label dan sebuah kotak teks. Tentu saja, Anda hanya dapat menggunakan LaTeX jika Anda telah menginstal LaTeX dengan benar.

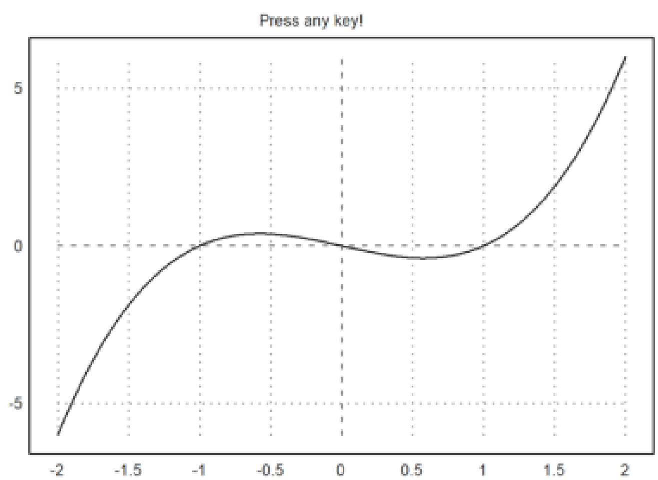
```
>plot2d("f",-1,1,xl="x",yl="f(x)",grid=6);  ...
>plot2d([-1,0,1],f([-1,0,1]),>points,>add); ...
>label(latex("x^3"),0.72,f(0.72)); ...
>label(latex("x^2"),-0.52,f(-0.52),pos="ll"); ...
>textbox( ...
>  latex("f(x)=\begin{cases} x^3 & x>0 \\ x^2 & x \le 0\end{cases}"), ...
>  x=0.7,y=0.2):
```



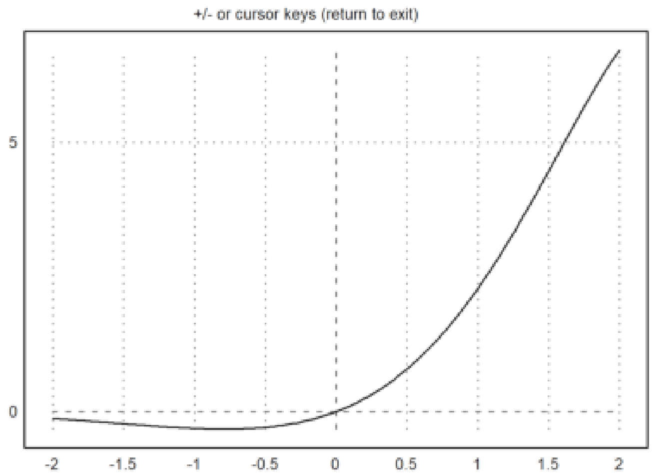
Interaksi Pengguna

Ketika memplot fungsi atau ekspresi, parameter >user memungkinkan pengguna untuk memperbesar dan menggeser plot dengan tombol kursor atau mouse. Pengguna dapat
- memperbesar dengan + atau -
- memindahkan plot dengan tombol kursor
- memilih jendela plot dengan mouse
- mengatur ulang tampilan dengan spasi
- keluar dengan return
Tombol spasi akan mengatur ulang plot ke jendela plot awal.
Ketika memplot data, bendera >user hanya akan menunggu penekanan tombol.

```
>plot2d({{"x^3-a*x",a=1}},>user,title="Press any key!"):
```




```
>plot2d("exp(x)*sin(x)",user=true, ...
>  title="+/- or cursor keys (return to exit)"):
```



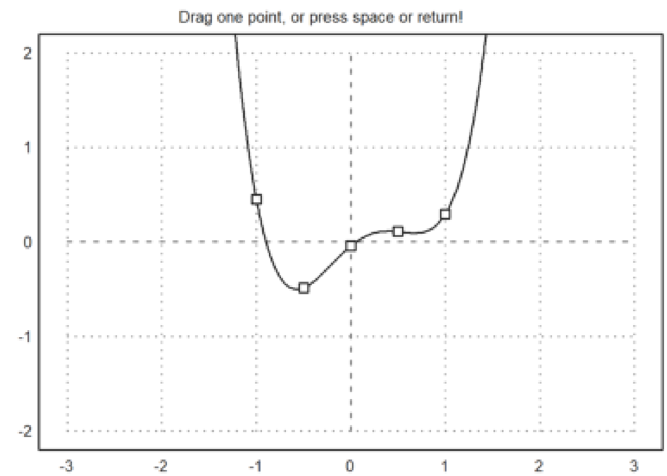
Berikut ini menunjukkan cara interaksi pengguna tingkat lanjut (lihat tutorial tentang pemrograman untuk detailnya).
Fungsi bawaan mousedrag() menunggu peristiwa mouse atau keyboard. Fungsi ini melaporkan mouse ke bawah, mouse bergerak atau mouse ke atas, dan penekanan tombol. Fungsi dragpoints() memanfaatkan hal ini, dan mengizinkan pengguna untuk menyeret titik manapun di dalam plot.
Kita membutuhkan fungsi plot terlebih dahulu. Sebagai contoh, kita melakukan interpolasi pada 5 titik dengan sebuah polinomial. Fungsi ini harus memplot ke dalam area plot yang tetap.

```
>function plotf(xp,yp,select) ...
```

```
    d=interp(xp,yp);
    plot2d("interpval(xp,d,x)";d,xp,r=2);
    plot2d(xp,yp,>points,>add);
    if select>0 then
      plot2d(xp[select],yp[select],color=red,>points,>add);
    endif;
    title("Drag one point, or press space or return!");
  endfunction
```

Perhatikan parameter titik koma pada plot2d (d dan xp), yang diteruskan ke evaluasi fungsi interp(). Tanpa ini, kita harus menulis function plotinterp() terlebih dahulu, untuk mengakses nilai secara global.
Sekarang kita menghasilkan beberapa nilai acak, dan membiarkan pengguna menyeret titik-titiknya.

```
>t=-1:0.5:1; dragpoints("plotf",t,random(size(t))-0.5):
```

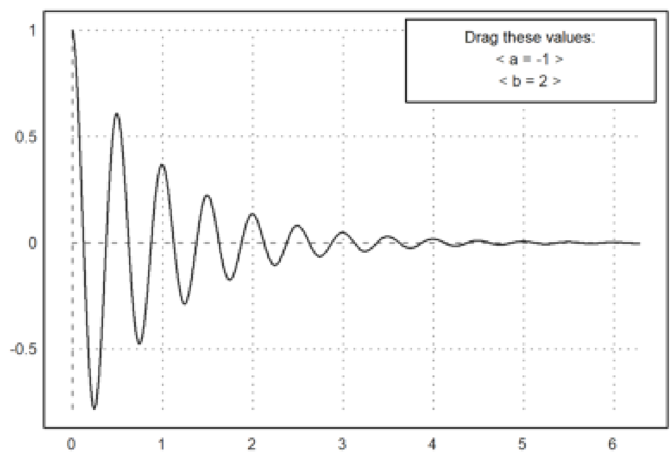


Ada juga fungsi yang memplot fungsi lain tergantung pada vektor parameter, dan memungkinkan pengguna menyesuaikan parameter ini.
Pertama, kita memerlukan fungsi plot.

```
>function plotf([a,b]) := plot2d("exp(a*x)*cos(2pi*b*x)",0,2pi;a,b);
```

Kemudian kita membutuhkan nama untuk parameter, nilai awal dan matriks rentang nx2, dan secara opsional, sebuah garis judul.
Terdapat slider interaktif, yang dapat mengatur nilai oleh pengguna. Fungsi dragvalues() menyediakan ini.

```
>dragvalues("plotf",["a","b"],[-1,2],[[-2,2];[1,10]], ...
>  heading="Drag these values:",hcolor=black):
```



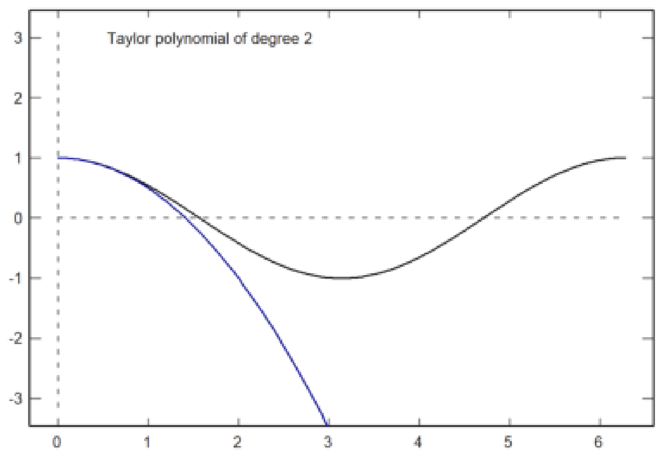
Anda dapat membatasi nilai yang diseret menjadi bilangan bulat. Sebagai contoh, kita menulis fungsi plot, yang memplot polinomial Taylor dengan derajat n ke fungsi kosinus.

```
>function plotf(n) ...
```

```
  plot2d("cos(x)",0,2pi,>square,grid=6);
  plot2d(&"taylor(cos(x),x,0,@n)",color=blue,>add);
  textbox("Taylor polynomial of degree "+n,0.1,0.02,style="t",>left);
  endfunction
```

Sekarang kita membiarkan derajat n bervariasi dari 0 sampai 20 dalam 20 stop. Hasil dari dragvalues() digunakan untuk memplot sketsa dengan n ini, dan untuk menyisipkan plot ke dalam buku catatan.

```
>nd=dragvalues("plotf","degree",2,[0,20],20,y=0.8, ...
>   heading="Drag the value:"); ...
>plotf(nd):
```



Berikut ini adalah peragaan sederhana dari fungsi ini. Pengguna dapat menggambar di atas jendela plot, meninggalkan jejak titik.

```
>function dragtest ...
```

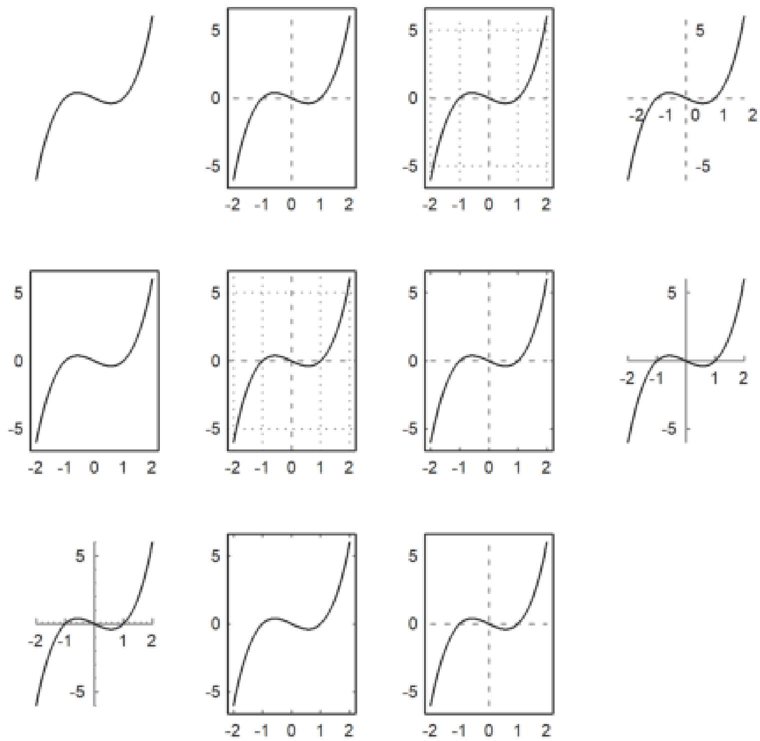
```
    plot2d(none,r=1,title="Drag with the mouse, or press any key!");
    start=0;
    repeat
      {flag,m,time}=mousedrag();
      if flag==0 then return; endif;
      if flag==2 then
        hold on; mark(m[1],m[2]); hold off;
      endif;
    end
  endfunction
```

```
>dragtest // lihat hasilnya dan cobalah lakukan!
```

Gaya Plot 2D

Secara default, EMT menghitung tanda sumbu otomatis dan menambahkan label pada setiap tanda. Hal ini dapat diubah dengan parameter grid. Gaya default sumbu dan label dapat dimodifikasi. Selain itu, label dan judul dapat ditambahkan secara manual. Untuk mengatur ulang ke gaya default, gunakan reset().

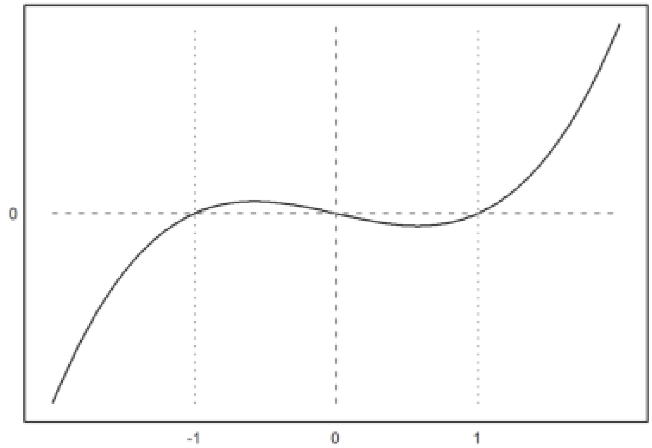
```
>aspect();
>figure(3,4); ...
> figure(1); plot2d("x^3-x",grid=0); ... // no grid, frame or axis
> figure(2); plot2d("x^3-x",grid=1); ... // x-y-axis
> figure(3); plot2d("x^3-x",grid=2); ... // default ticks
> figure(4); plot2d("x^3-x",grid=3); ... // x-y- axis with labels inside
> figure(5); plot2d("x^3-x",grid=4); ... // no ticks, only labels
> figure(6); plot2d("x^3-x",grid=5); ... // default, but no margin
> figure(7); plot2d("x^3-x",grid=6); ... // axes only
> figure(8); plot2d("x^3-x",grid=7); ... // axes only, ticks at axis
> figure(9); plot2d("x^3-x",grid=8); ... // axes only, finer ticks at axis
> figure(10); plot2d("x^3-x",grid=9); ... // default, small ticks inside
> figure(11); plot2d("x^3-x",grid=10); ...// no ticks, axes only
> figure(0):
```



The parameter <frame switches off the frame, and framecolor=blue sets the frame to a blue color.
If you want your own ticks, you can use style=0, and add everything later.

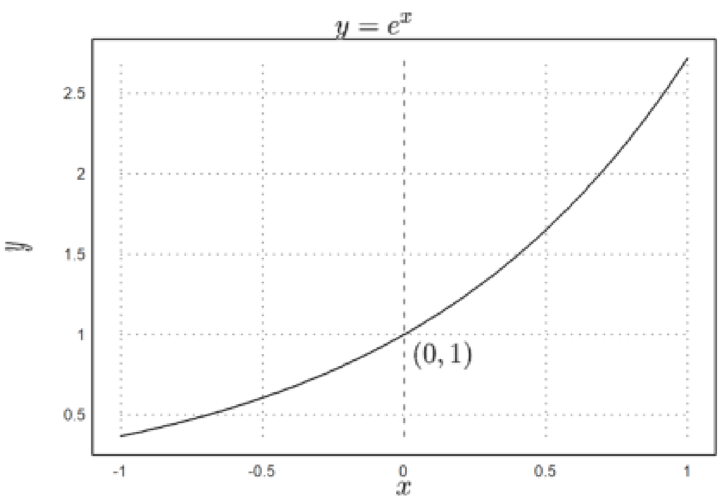
Parameter <frame mematikan bingkai, dan framecolor=blue menetapkan bingkai ke warna biru.
Jika Anda menginginkan tanda centang Anda sendiri, Anda dapat menggunakan style=0, dan menambahkan semuanya nanti.

```
>aspect(1.5);
>plot2d("x^3-x",grid=0); // plot
>frame; xgrid([-1,0,1]); ygrid(0): // add frame and grid
```



Untuk judul plot dan label sumbu, lihat contoh berikut.

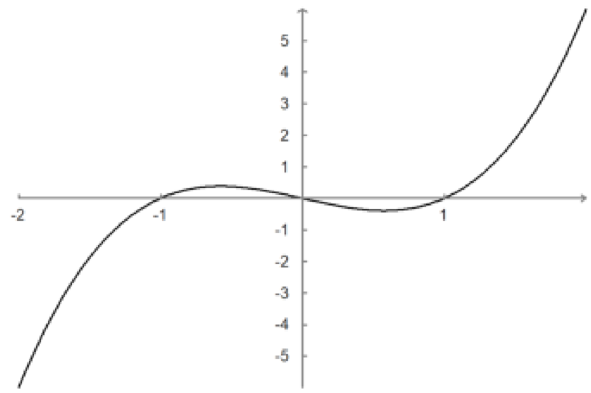
```
>plot2d("exp(x)",-1,1);
>textcolor(black); // set the text color to black
>title(latex("y=e^x")); // title above the plot
>xlabel(latex("x")); // "x" for x-axis
>ylabel(latex("y"),>vertical); // vertical "y" for y-axis
>label(latex("(0,1)"),0,1,color=blue): // label a point
```



The axis can be drawn separately with xaxis() and yaxis().

Sumbu dapat digambar secara terpisah dengan sumbu x() dan sumbu y().

```
>plot2d("x^3-x",<grid,<frame);
>xaxis(0,xx=-2:1,style="->"); yaxis(0,yy=-5:5,style="->"):
```

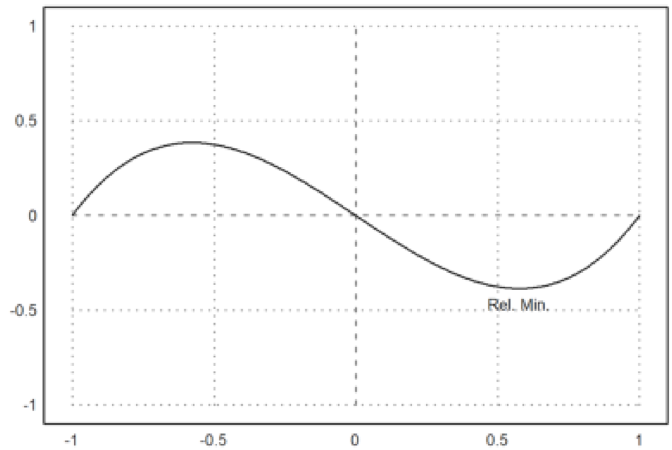


Text on the plot can be set with label(). In the following example, "lc" means lower center. It sets the position of the label relative to the plot coordinates.

```
>function f(x) &= x^3-x
```

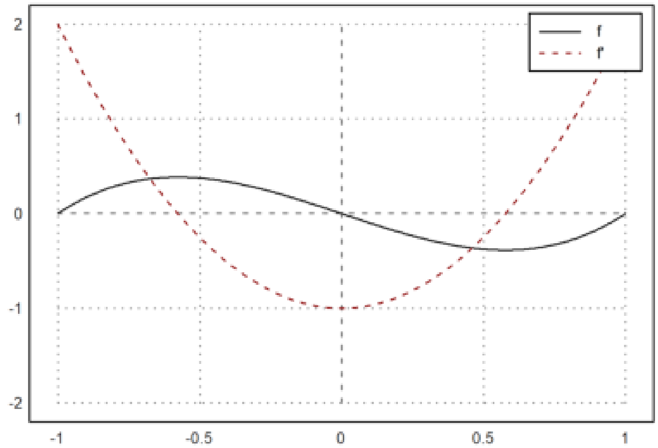
```
 3
x  - x
```

```
>plot2d(f,-1,1,>square);
>x0=fmin(f,0,1); // compute point of minimum
>label("Rel. Min.",x0,f(x0),pos="lc"): // add a label there
```

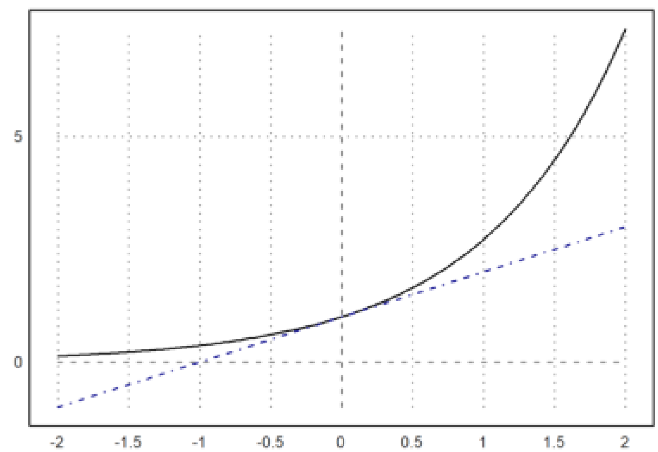


Terdapat juga kotak teks.

```
>plot2d(&f(x),-1,1,-2,2); // function
>plot2d(&diff(f(x),x),>add,style="--",color=red); // derivative
>labelbox(["f","f'"],["-","--"],[black,red]): // label box
```

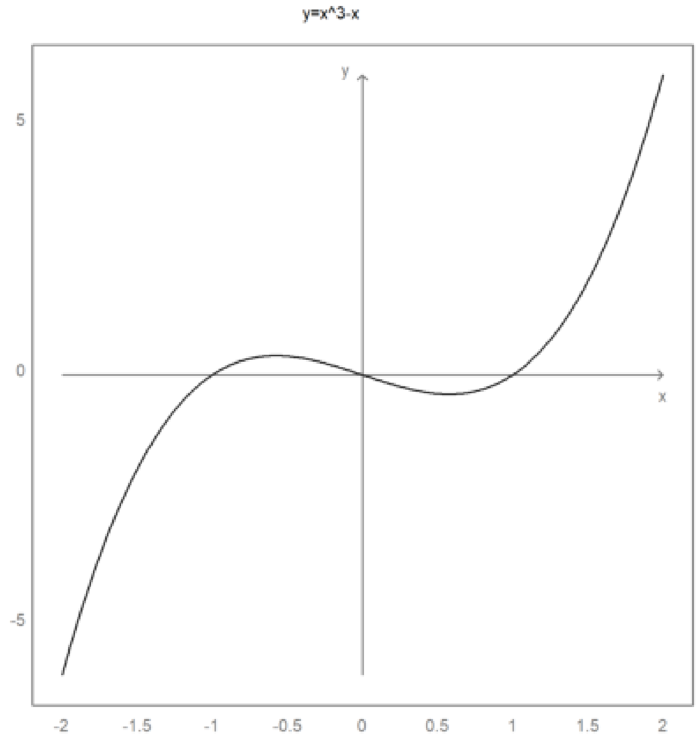



```
>plot2d(["exp(x)","1+x"],color=[black,blue],style=["-","-.-"]):
```



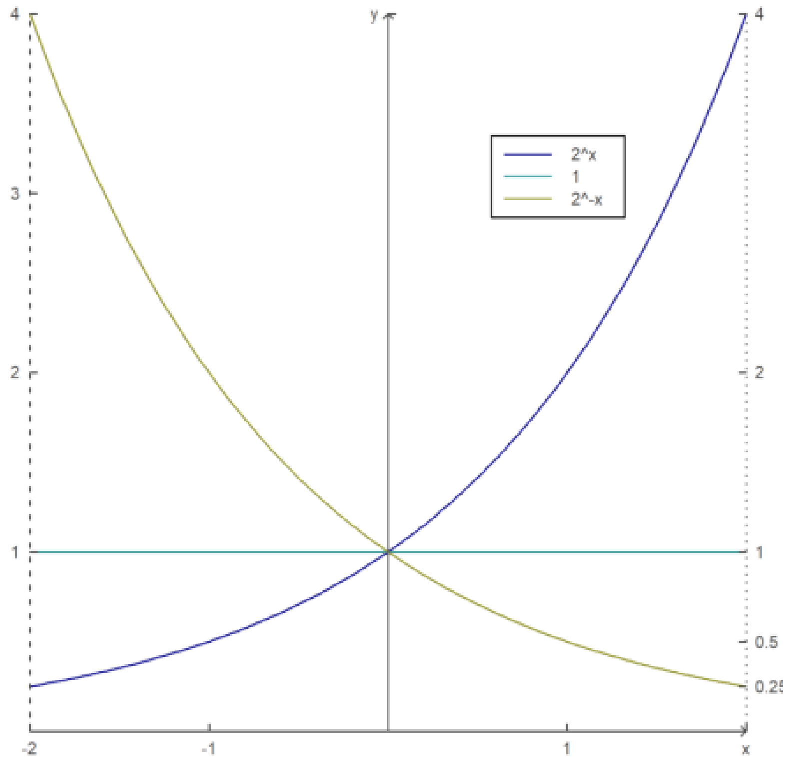
Mengatur Ukuran Gambar, Format (Style), dan Warna Kurva

```
>gridstyle("->",color=gray,textcolor=gray,framecolor=gray);  ...
> plot2d("x^3-x",grid=1);   ...
> settitle("y=x^3-x",color=black); ...
> label("x",2,0,pos="bc",color=gray);  ...
> label("y",0,6,pos="cl",color=gray); ...
> reset():
```



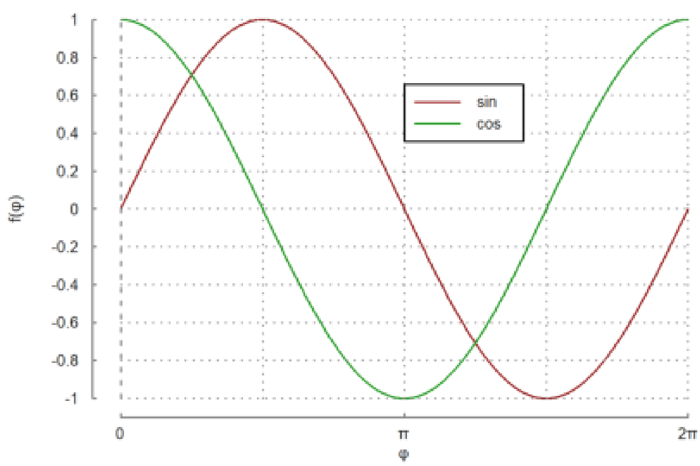
Untuk kontrol yang lebih besar lagi, sumbu x dan sumbu y dapat dilakukan secara manual.
Perintah fullwindow() akan memperluas jendela plot karena kita tidak lagi membutuhkan tempat untuk label di luar jendela plot. Gunakan shrinkwindow() atau reset() untuk mengatur ulang ke default.

```
>fullwindow; ...
> gridstyle(color=darkgray,textcolor=darkgray); ...
> plot2d(["2^x","1","2^(-x)"],a=-2,b=2,c=0,d=4,<grid,color=4:6,<frame); ...
> xaxis(0,-2:1,style="->"); xaxis(0,2,"x",<axis); ...
> yaxis(0,4,"y",style="->"); ...
> yaxis(-2,1:4,>left); ...
> yaxis(2,2^(-2:2),style=".",<left); ...
> labelbox(["2^x","1","2^-x"],colors=4:6,x=0.8,y=0.2); ...
> reset:
```



Berikut ini adalah contoh lain, di mana string Unicode digunakan dan sumbu di luar area plot.

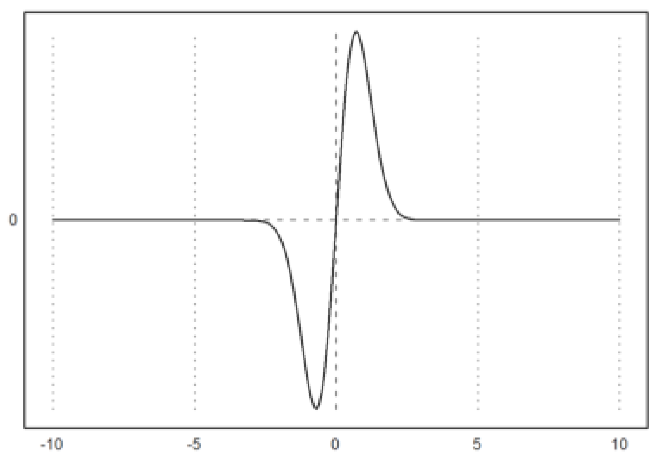
```
>aspect(1.5);
>plot2d(["sin(x)","cos(x)"],0,2pi,color=[red,green],<grid,<frame); ...
> xaxis(-1.1,(0:2)*pi,xt=["0",u"&pi;",u"2&pi;"],style="-",>ticks,>zero);  ...
> xgrid((0:0.5:2)*pi,<ticks); ...
> yaxis(-0.1*pi,-1:0.2:1,style="-",>zero,>grid); ...
> labelbox(["sin","cos"],colors=[red,green],x=0.5,y=0.2,>left); ...
> xlabel(u"&phi;"); ylabel(u"f(&phi;)"):
```



Memplot Data 2D

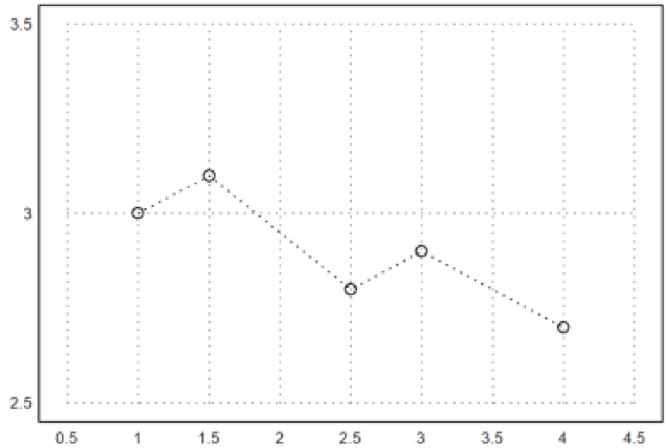
Jika x dan y adalah vektor data, data ini akan digunakan sebagai koordinat x dan y dari sebuah kurva. Dalam hal ini, a, b, c, dan d, atau radius r dapat ditentukan, atau jendela plot akan menyesuaikan secara otomatis dengan data. Sebagai alternatif, >square dapat diatur untuk mempertahankan rasio aspek persegi.
Memplot ekspresi hanyalah singkatan untuk plot data. Untuk plot data, Anda memerlukan satu atau beberapa baris nilai x, dan satu atau beberapa baris nilai y. Dari rentang dan nilai x, fungsi plot2d akan menghitung data untuk diplot, secara default dengan evaluasi adaptif dari fungsi tersebut. Untuk plot titik, gunakan ">points", untuk garis dan titik campuran gunakan ">addpoints".
Namun Anda dapat memasukkan data secara langsung.
- Gunakan vektor baris untuk x dan y untuk satu fungsi.
- Matriks untuk x dan y diplot baris demi baris.
Berikut adalah contoh dengan satu baris untuk x dan y.

```
>x=-10:0.1:10; y=exp(-x^2)*x; plot2d(x,y):
```

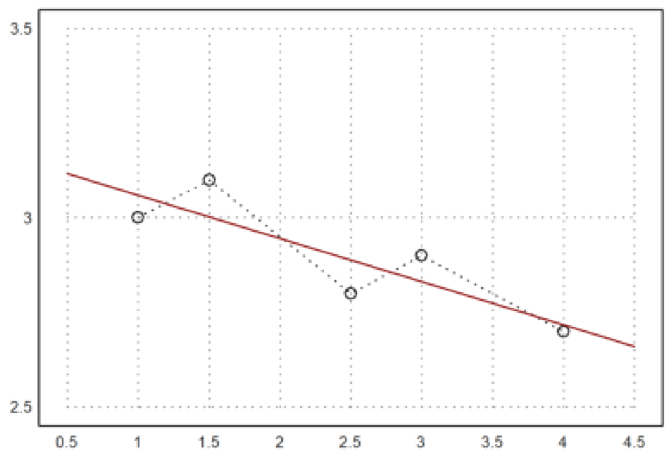


Data juga dapat diplot sebagai titik. Gunakan poin=true untuk ini. Plot ini bekerja seperti poligon, namun hanya menggambar sudut-sudutnya saja.
- style = "...": Pilih dari "[]", "<>", "o", ".", "..", "+", "*", "[] ", "<>", "o", "..", "", "|".
Untuk memplot kumpulan titik, gunakan >points. Jika warna adalah sebuah vektor warna, setiap titik mendapatkan warna yang berbeda. Untuk sebuah matriks koordinat dan vektor kolom, warna berlaku pada baris-baris matriks.
Parameter >addpoints menambahkan titik-titik pada segmen garis untuk plot data.

```
>xdata=[1,1.5,2.5,3,4]; ydata=[3,3.1,2.8,2.9,2.7]; // data
>plot2d(xdata,ydata,a=0.5,b=4.5,c=2.5,d=3.5,style="."); // lines
>plot2d(xdata,ydata,>points,>add,style="o"): // add points
```




```
>p=polyfit(xdata,ydata,1); // get regression line
>plot2d("polyval(p,x)",>add,color=red): // add plot of line
```



Gambar Kurva yang Bersifat Interaktif

```
>function animliss (n,m) ...
```

```
  t=linspace(0,2pi,500);
  f=0;
  c=framecolor(0);
  l=linewidth(2);
  setplot(-1,1,-1,1);
  repeat
    clg;
    plot(sin(n*t),cos(m*t+f));
    wait(0);
    if testkey() then break; endif;
    f=f+0.02;
```

```
end;
framecolor(c);
linewidth(1);
endfunction
```

Tekan sembarang tombol untuk menghentikan animasi ini.

```
>animliss(2,3); // lihat hasilnya, jika sudah puas, tekan ENTER
```

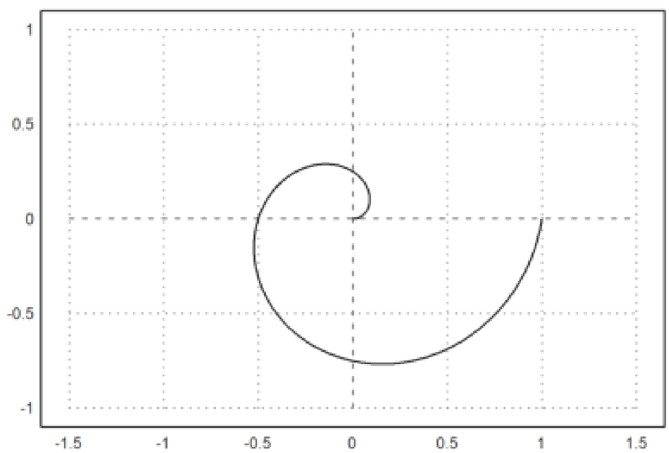
Grafik Fungsi Parametrik

Nilai x tidak perlu diurutkan. (x,y) hanya menggambarkan sebuah kurva. Jika x diurutkan, kurva tersebut adalah grafik fungsi.
Pada contoh berikut, kita memplot spiral

$$\gamma(t) = t \cdot (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$$

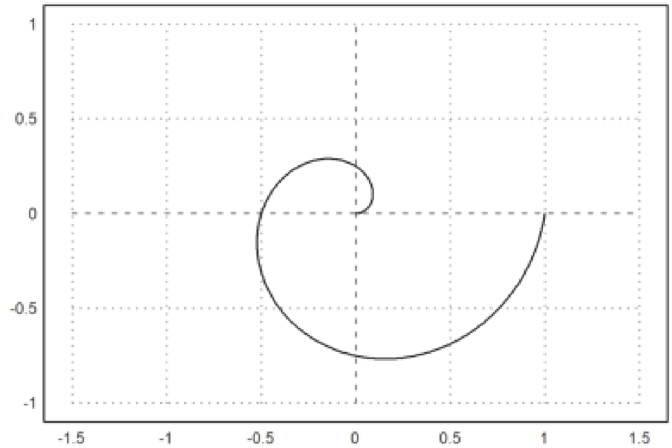
Kita mungkin perlu menggunakan sangat banyak titik untuk tampilan yang halus atau fungsi adaptive() untuk mengevaluasi ekspresi (lihat fungsi adaptive() untuk lebih jelasnya).

```
>t=linspace(0,1,1000); ...
>plot2d(t*cos(2*pi*t),t*sin(2*pi*t),r=1):
```

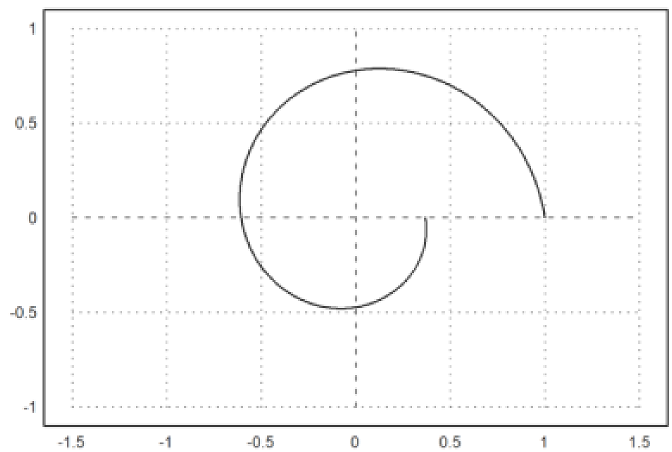


Sebagai alternatif, Anda dapat menggunakan dua ekspresi untuk kurva. Berikut ini memplot kurva yang sama seperti di atas.

```
>plot2d("x*cos(2*pi*x)","x*sin(2*pi*x)",xmin=0,xmax=1,r=1):
```




```
>t=linspace(0,1,1000); r=exp(-t); x=r*cos(2pi*t); y=r*sin(2pi*t);
>plot2d(x,y,r=1):
```



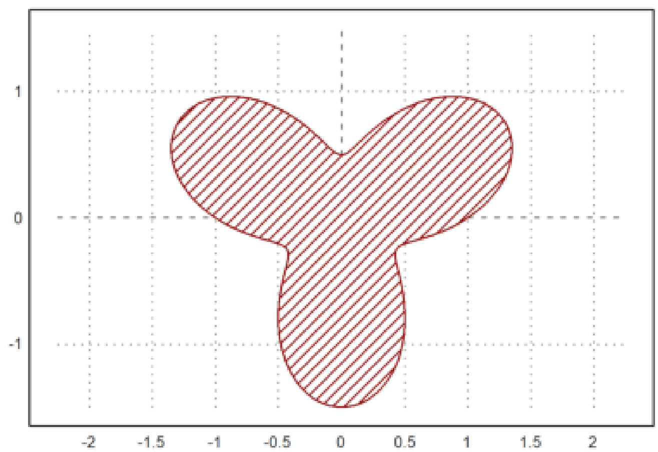
Dalam contoh berikut, kami memplot kurva

$$\gamma(t) = (r(t)\cos(t), r(t)\sin(t))$$

dengan

$$r(t) = 1 + \frac{\sin(3t)}{2}.$$

```
>t=linspace(0,2pi,1000); r=1+sin(3*t)/2; x=r*cos(t); y=r*sin(t); ...
>plot2d(x,y,>filled,fillcolor=red,style="/",r=1.5):
```



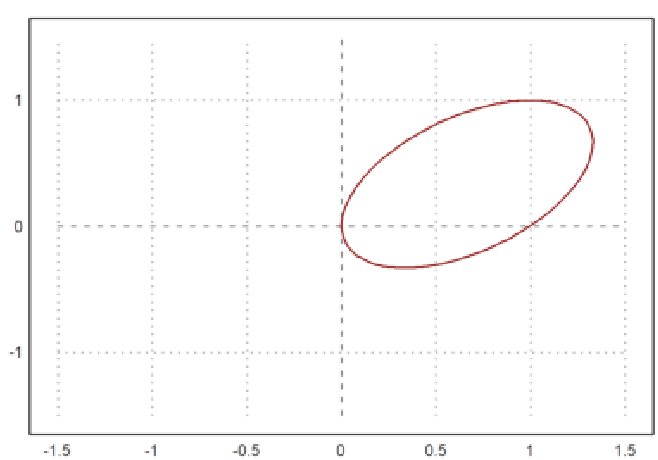
Fungsi Implisit

Plot implisit menunjukkan garis level yang menyelesaikan f(x,y)=level, di mana "level" dapat berupa nilai tunggal atau vektor nilai. Jika level = "auto", akan ada nc garis level, yang akan menyebar di antara minimum dan maksimum fungsi secara merata. Warna yang lebih gelap atau lebih terang dapat ditambahkan dengan >hue untuk mengindikasikan nilai fungsi. Untuk fungsi implisit, xv haruslah sebuah fungsi atau ekspresi dari parameter x dan y, atau, sebagai alternatif, xv dapat berupa matriks nilai.
Euler dapat menandai garis level

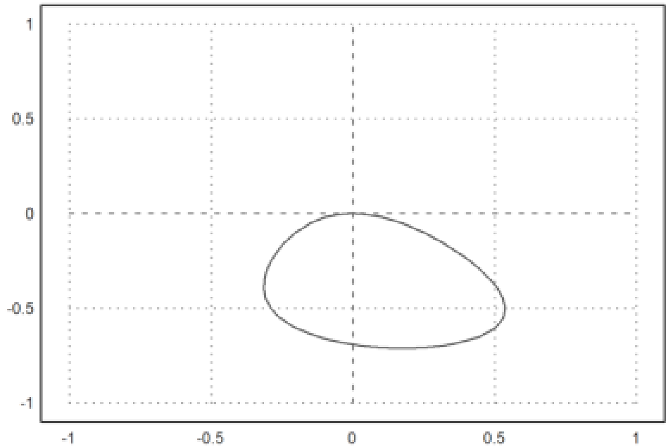
$$f(x,y) = c$$

dari fungsi apa pun.
Untuk menggambar himpunan f(x,y) = c untuk satu atau lebih konstanta c, Anda bisa menggunakan plot2d() dengan plot implisitnya pada bidang. Parameter untuk c adalah level = c, di mana c dapat berupa vektor garis level. Sebagai tambahan, sebuah skema warna dapat digambar pada latar belakang untuk mengindikasikan nilai fungsi untuk setiap titik pada plot. Parameter "n" menentukan kehalusan plot.

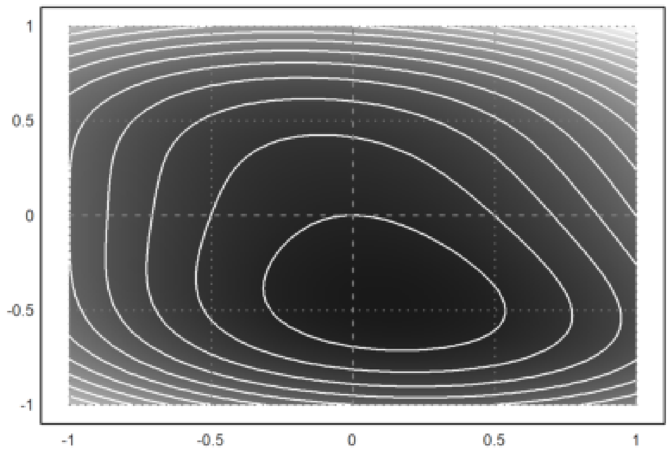
```
>aspect(1.5);
>plot2d("x^2+y^2-x*y-x",r=1.5,level=0,contourcolor=red):
```



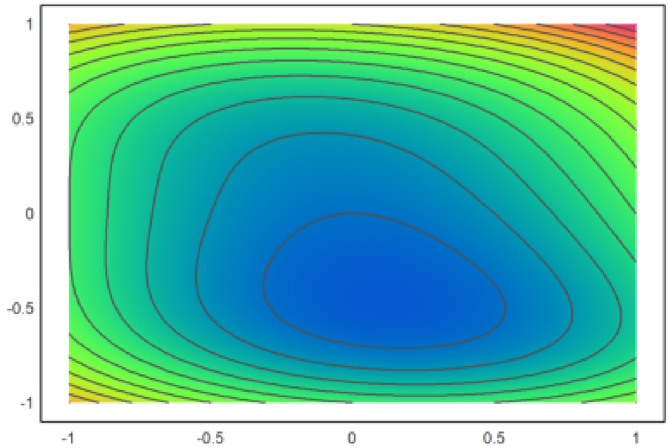
```
>expr := "2*x^2+x*y+3*y^4+y"; // define an expression f(x,y)
>plot2d(expr,level=0): // Solutions of f(x,y)=0
```




```
>plot2d(expr,level=0:0.5:20,>hue,contourcolor=white,n=200): // nice
```

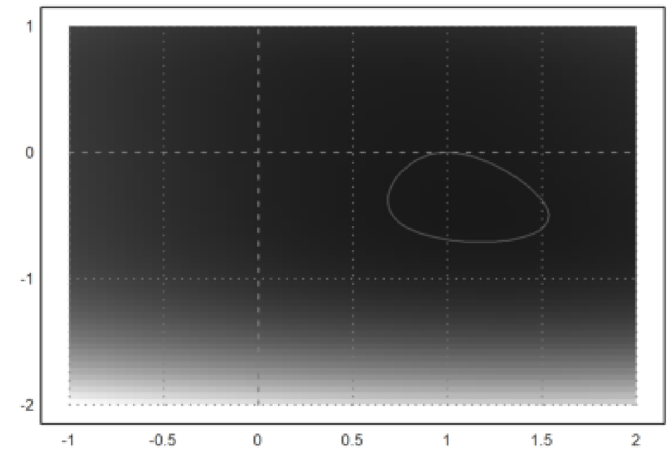



```
>plot2d(expr,level=0:0.5:20,>hue,>spectral,n=200,grid=4): // nicer
```

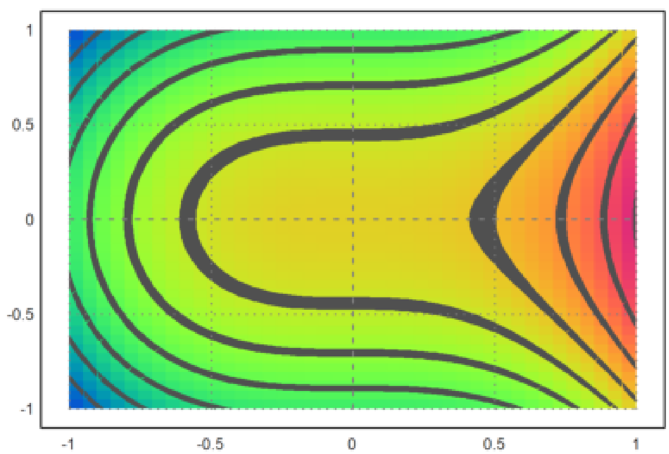


Hal ini juga berlaku untuk plot data. Tetapi Anda harus menentukan rentang untuk label sumbu.

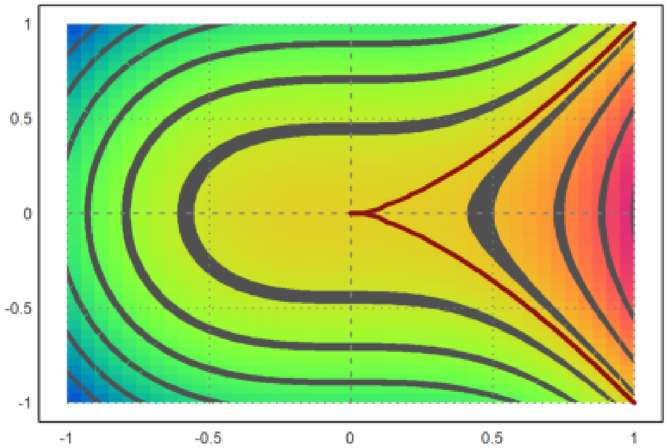
```
>x=-2:0.05:1; y=x'; z=expr(x,y);
>plot2d(z,level=0,a=-1,b=2,c=-2,d=1,>hue):
```



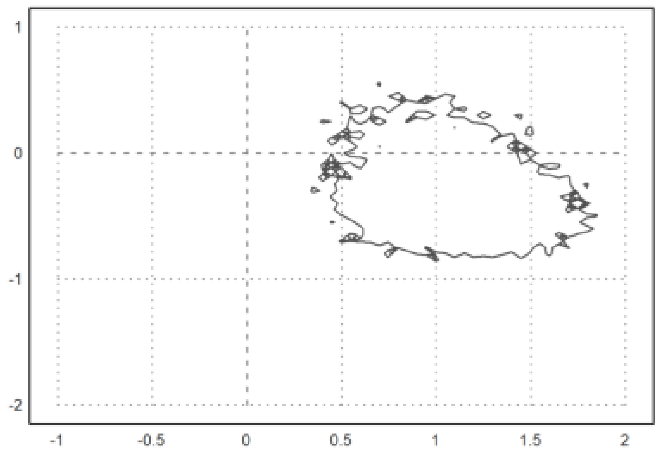

```
>plot2d("x^3-y^2",>contour,>hue,>spectral):
```



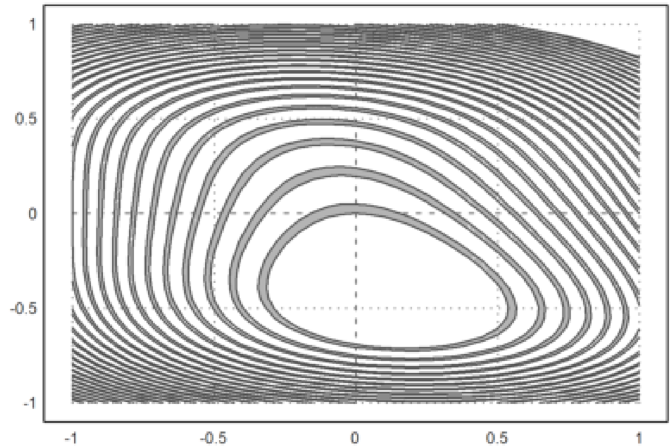
```
>plot2d("x^3-y^2",level=0,contourwidth=3,>add,contourcolor=red):
```



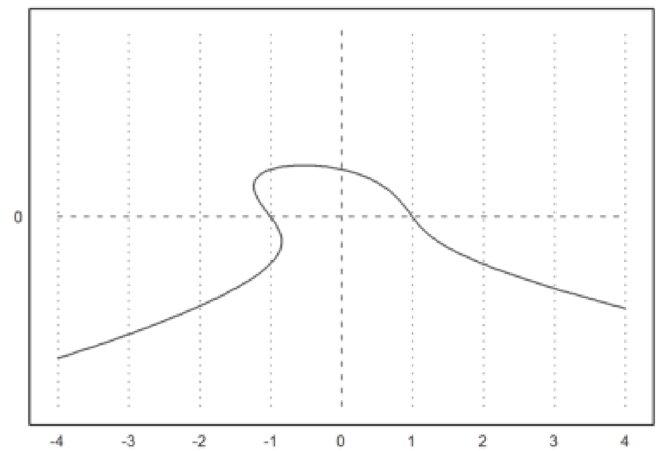

```
>z=z+normal(size(z))*0.2;
>plot2d(z,level=0.5,a=-1,b=2,c=-2,d=1):
```



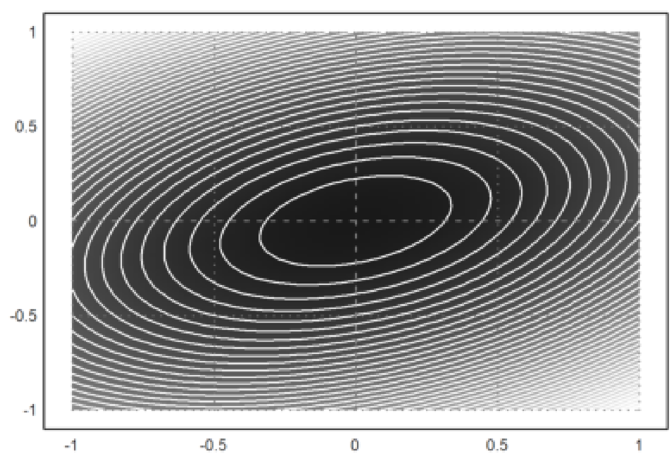

```
>plot2d(expr,level=[0:0.2:5;0.05:0.2:5.05],color=lightgray):
```




```
>plot2d("x^2+y^3+x*y",level=1,r=4,n=100):
```




```
>plot2d("x^2+2*y^2-x*y",level=0:0.1:10,n=100,contourcolor=white,>hue):
```

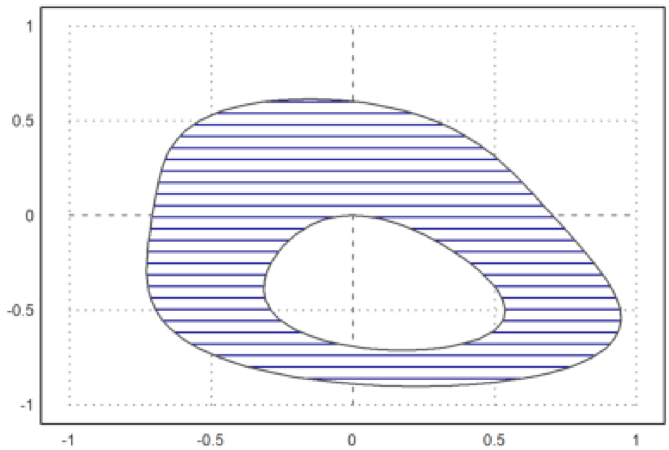


Dimungkinkan juga untuk mengisi set

$$a \leq f(x, y) \leq b$$

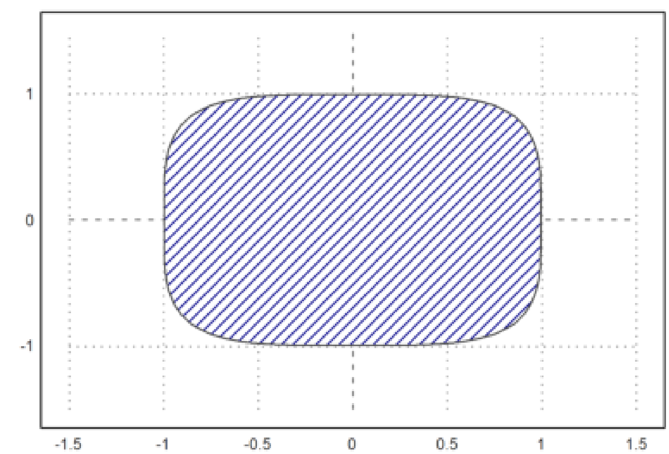
dengan rentang level.
Dimungkinkan untuk mengisi wilayah nilai untuk fungsi tertentu. Untuk ini, level harus berupa matriks 2xn. Baris pertama adalah batas bawah dan baris kedua berisi batas atas.

```
>plot2d(expr,level=[0;1],style="-",color=blue): // 0 <= f(x,y) <= 1
```

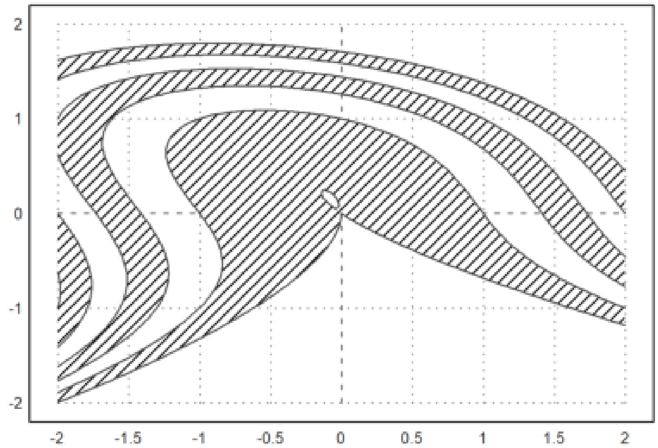


Implicit plots can also show ranges of levels. Then level must be a 2xn matrix of level intervals, where the first row contains the start and the second row the end of each interval. Alternatively, a simple row vector can be used for level, and a parameter dl extends the level values to intervals.

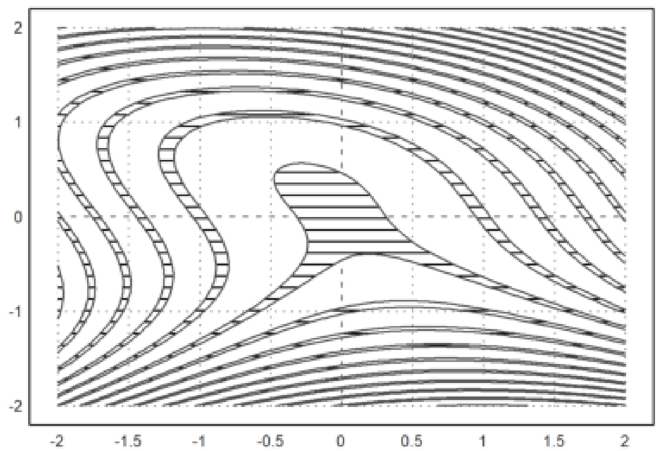
```
>plot2d("x^4+y^4",r=1.5,level=[0;1],color=blue,style="/"):
```



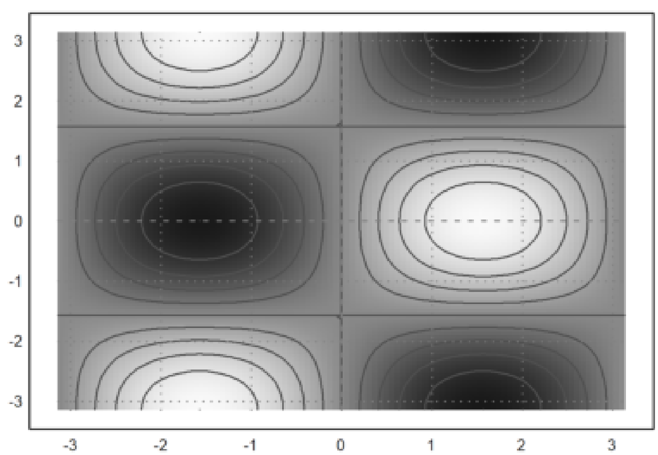

```
>plot2d("x^2+y^3+x*y",level=[0,2,4;1,3,5],style="/",r=2,n=100):
```




```
>plot2d("x^2+y^3+x*y",level=-10:20,r=2,style="-",dl=0.1,n=100):
```




```
>plot2d("sin(x)*cos(y)",r=pi,>hue,>levels,n=100):
```

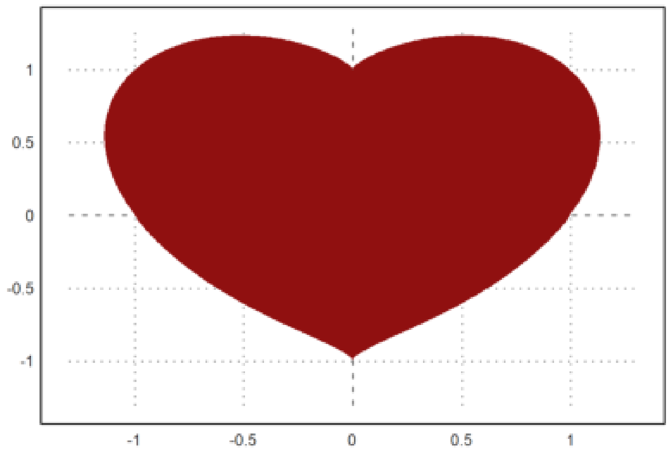


Anda juga dapat menandai suatu wilayah

$$a \leq f(x, y) \leq b.$$

Hal ini dilakukan dengan menambahkan level dengan dua baris.

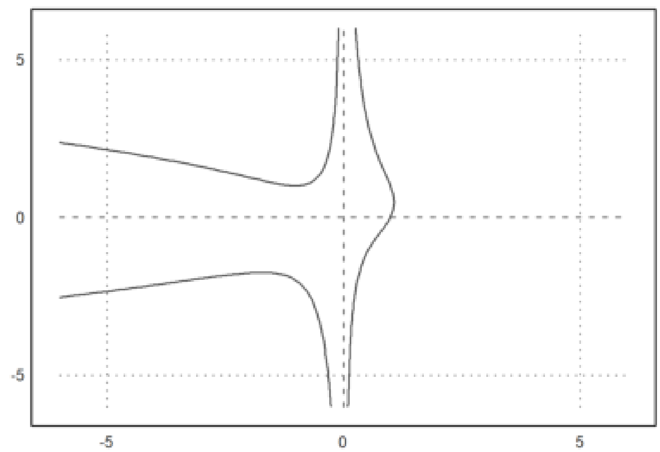
```
>plot2d("(x^2+y^2-1)^3-x^2*y^3",r=1.3, ...
>  style="#",color=red,<outline, ...
>  level=[-2;0],n=100):
```



Dimungkinkan untuk menentukan level tertentu. Misalnya, kita dapat memplot solusi dari persamaan seperti

$$x^3 - xy + x^2y^2 = 6$$

```
>plot2d("x^3-x*y+x^2*y^2",r=6,level=1,n=100):
```

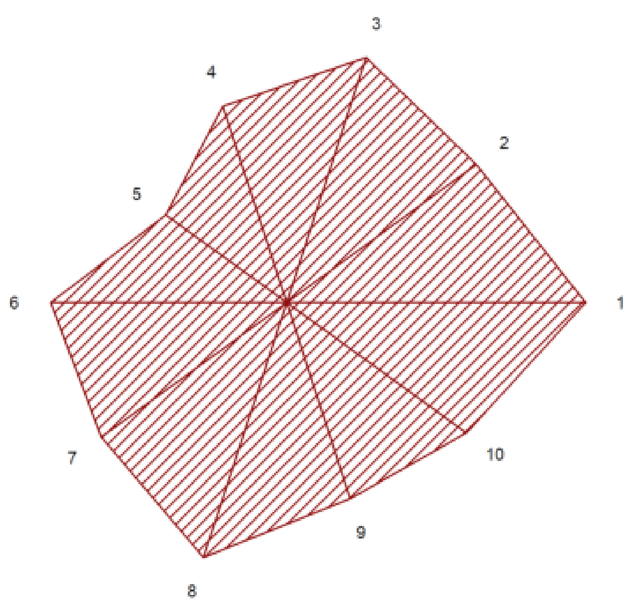



```
>function starplot1 (v, style="/", color=green, lab=none) ...
```

```
    if !holding() then clg; endif;
    w=window(); window(0,0,1024,1024);
    h=holding(1);
    r=max(abs(v))*1.2;
    setplot(-r,r,-r,r);
    n=cols(v); t=linspace(0,2pi,n);
    v=v|v[1]; c=v*cos(t); s=v*sin(t);
    cl=barcolor(color); st=barstyle(style);
    loop 1 to n
      polygon([0,c[#],c[#+1]],[0,s[#],s[#+1]],1);
      if lab!=none then
        rlab=v[#]+r*0.1;
        {col,row}=toscreen(cos(t[#])*rlab,sin(t[#])*rlab);
        ctext(""+lab[#],col,row-textheight()/2);
      endif;
    end;
    barcolor(cl); barstyle(st);
    holding(h);
    window(w);
  endfunction
```

Tidak ada kisi-kisi atau kutu sumbu di sini. Selain itu, kami menggunakan jendela penuh untuk plot.
Kami memanggil reset sebelum kami menguji plot ini untuk mengembalikan default grafis. Hal ini tidak perlu dilakukan, jika Anda yakin bahwa plot Anda berfungsi.

```
>reset; starplot1(normal(1,10)+5,color=red,lab=1:10):
```



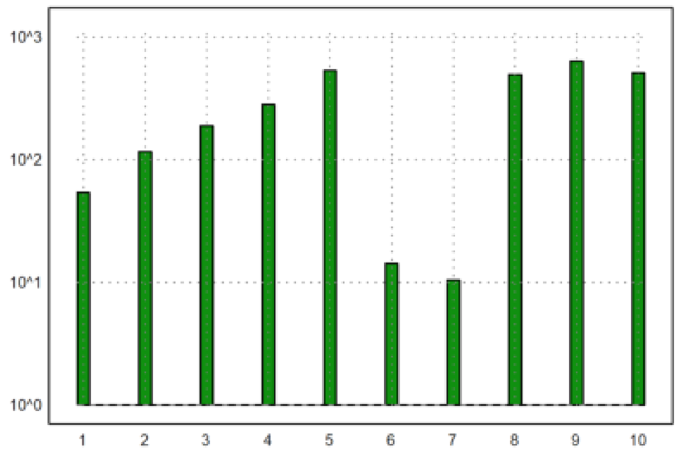
Terkadang, Anda mungkin ingin memplot sesuatu yang tidak dapat dilakukan oleh plot2d, tetapi hampir.
Pada fungsi berikut ini, kita akan membuat plot impuls logaritmik. plot2d dapat membuat plot logaritmik, tetapi tidak untuk batang impuls.

```
>function logimpulseplot1 (x,y) ...
```

```
    {x0,y0}=makeimpulse(x,log(y)/log(10));
    plot2d(x0,y0,>bar,grid=0);
    h=holding(1);
    frame();
    xgrid(ticks(x));
    p=plot();
    for i=-10 to 10;
      if i<=p[4] and i>=p[3] then
         ygrid(i,yt="10^"+i);
      endif;
    end;
    holding(h);
  endfunction
```

Mari kita uji dengan nilai yang terdistribusi secara eksponensial.

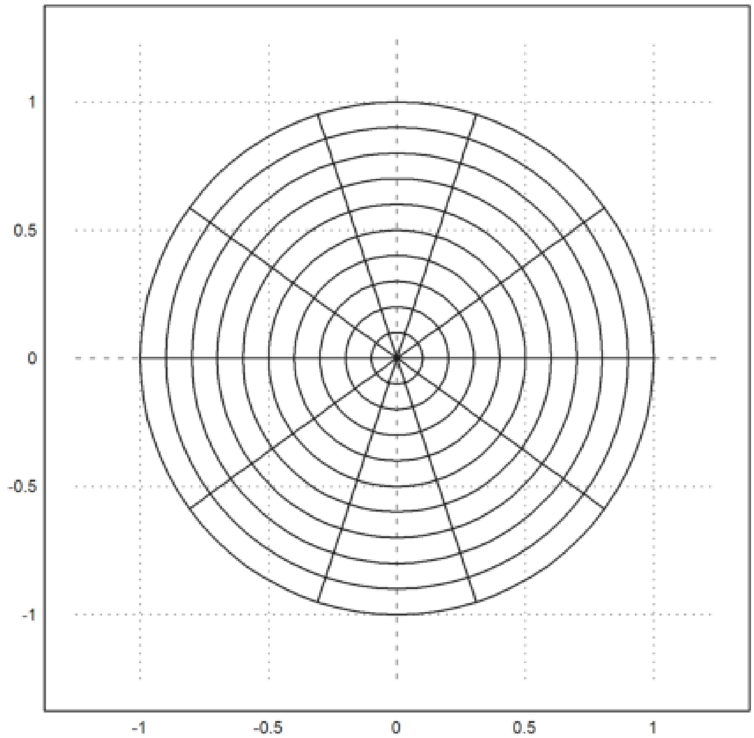
```
>aspect(1.5); x=1:10; y=-log(random(size(x)))*200; ...
>logimpulseplot1(x,y):
```



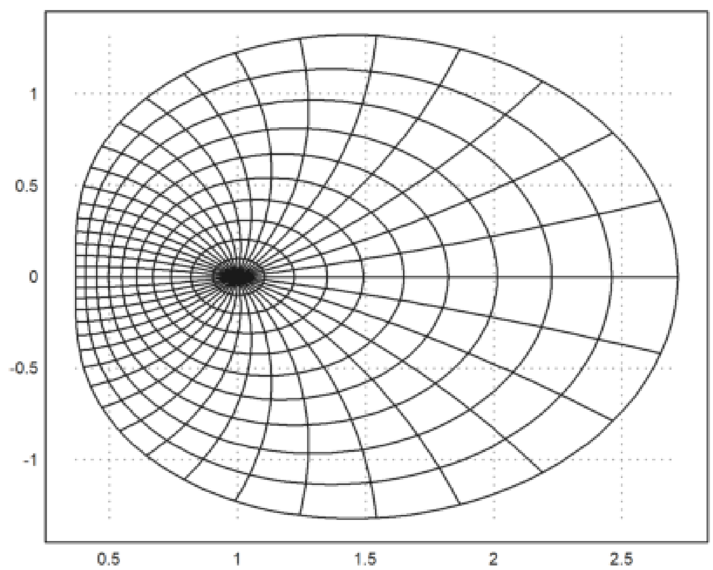
Menggambar Grafik Bilangan Kompleks

Sebuah deretan bilangan kompleks juga dapat diplot. Kemudian titik-titik kisi akan dihubungkan. Jika sejumlah garis kisi ditentukan (atau vektor 1x2 garis kisi) pada argumen cgrid, hanya garis-garis kisi tersebut yang akan terlihat.
Matriks bilangan kompleks akan secara otomatis diplot sebagai sebuah grid pada bidang kompleks.
Pada contoh berikut, kita memplot gambar lingkaran satuan di bawah fungsi eksponensial. Parameter cgrid menyembunyikan beberapa kurva grid.

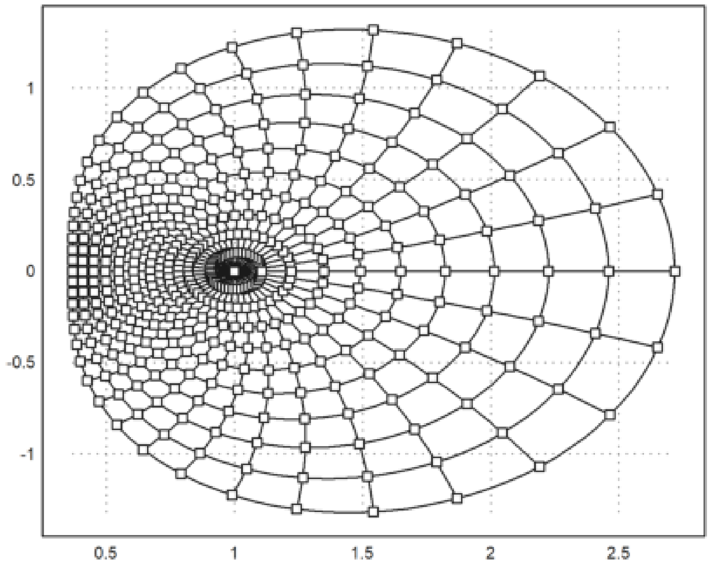
```
>aspect(); r=linspace(0,1,50); a=linspace(0,2pi,80)'; z=r*exp(I*a);...
>plot2d(z,a=-1.25,b=1.25,c=-1.25,d=1.25,cgrid=10):
```




```
>aspect(1.25); r=linspace(0,1,50); a=linspace(0,2pi,200)'; z=r*exp(I*a);
>plot2d(exp(z),cgrid=[40,10]):
```



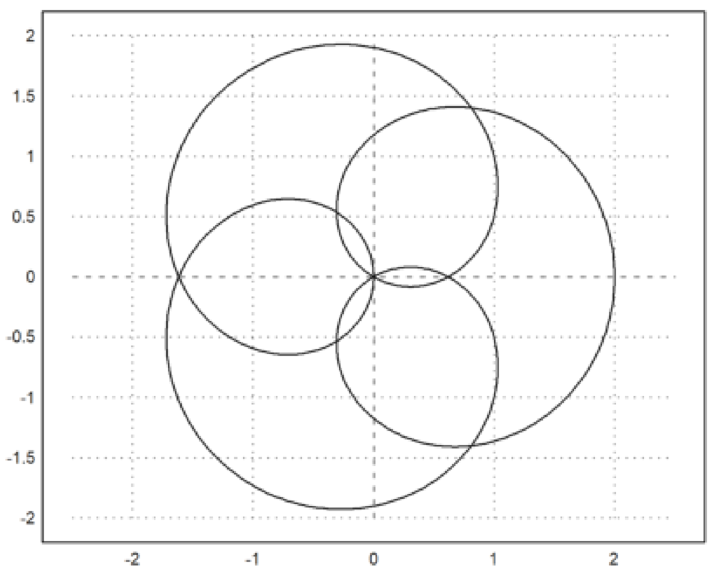

```
>r=linspace(0,1,10); a=linspace(0,2pi,40)'; z=r*exp(I*a);
>plot2d(exp(z),>points,>add):
```



Vektor bilangan kompleks secara otomatis diplot sebagai kurva pada bidang kompleks dengan bagian nyata dan bagian imajiner.
Pada contoh, kami memplot lingkaran satuan dengan

$$\gamma(t) = e^{it}$$

```
>t=linspace(0,2pi,1000); ...
>plot2d(exp(I*t)+exp(4*I*t),r=2):
```



Mari kita menghidupkan kurva 2D dengan menggunakan plot langsung. Perintah plot(x,y) hanya memplot kurva ke dalam jendela plot. setplot(a,b,c,d) mengatur jendela ini.
Fungsi wait(0) memaksa plot untuk muncul pada jendela grafik. Jika tidak, penggambaran ulang akan dilakukan dalam interval waktu yang jarang.

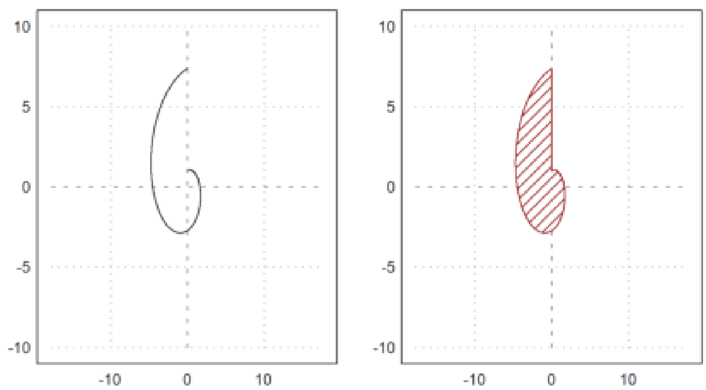
```
>
```

Menggambar Daerah Yang Dibatasi Kurva

Plot data sebenarnya adalah poligon. Kita juga dapat memplot kurva atau kurva yang terisi.
- filled=true mengisi plot.
- style = "...": Pilih dari "", "/", "\", "\/".
- fillcolor: Lihat di atas untuk warna yang tersedia.
Warna isian ditentukan oleh argumen "fillcolor", dan pada pilihan <outline mencegah menggambar batas untuk semua gaya kecuali gaya default.

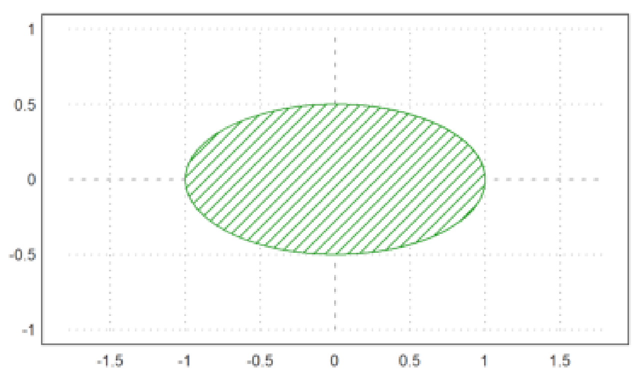
Menggambar Daerah yang Dibatasi oleh Beberapa Kurva

```
>t=linspace(0,2pi,1000); // parameter for curve
>x=sin(t)*exp(t/pi); y=cos(t)*exp(t/pi); // x(t) and y(t)
>figure(1,2); aspect(16/9)
>figure(1); plot2d(x,y,r=10); // plot curve
>figure(2); plot2d(x,y,r=10,>filled,style="/",fillcolor=red); // fill curve
>figure(0):
```



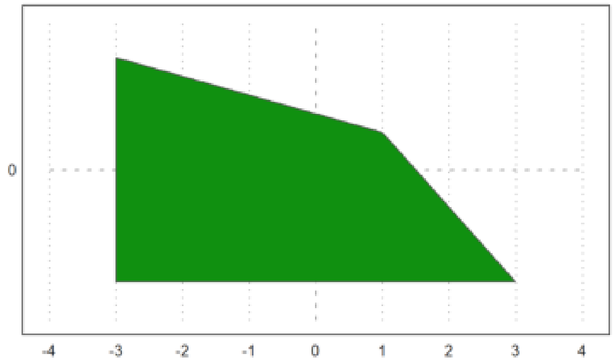
Pada contoh berikut ini, kami memplot elips terisi dan dua segi enam terisi menggunakan kurva tertutup dengan 6 titik dengan gaya isian yang berbeda.

```
>x=linspace(0,2pi,1000); plot2d(sin(x),cos(x)*0.5,r=1,>filled,style="/"):
```



Berikut ini adalah himpunan nilai maksimal dari empat kondisi linier yang kurang dari atau sama dengan 3. Ini adalah A[k].v<=3 untuk semua barisan A. Untuk mendapatkan sudut-sudut yang bagus, kita menggunakan n yang relatif besar.

```
>A=[2,1;1,2;-1,0;0,-1];
>function f(x,y) := max([x,y].A');
>plot2d("f",r=4,level=[0;3],color=green,n=111):
```

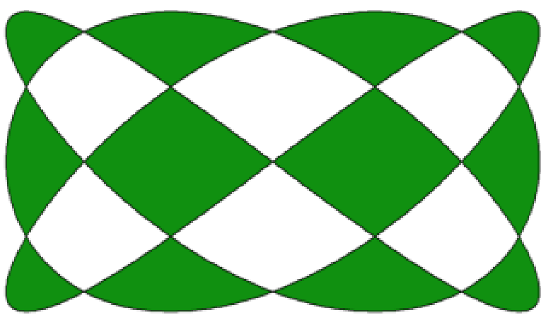


Poin utama dari bahasa matriks adalah bahwa bahasa ini memungkinkan untuk menghasilkan tabel fungsi dengan mudah.

```
>t=linspace(0,2pi,1000); x=cos(3*t); y=sin(4*t);
```

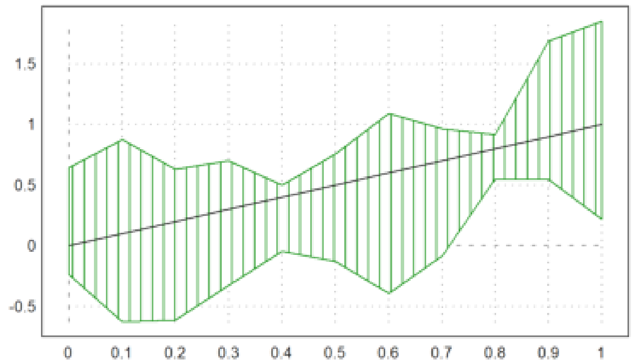
Kita sekarang memiliki vektor nilai x dan y. plot2d() dapat memplot nilai-nilai ini sebagai sebuah kurva yang menghubungkan titik-titik. Plot dapat diisi. Dalam kasus ini, hal ini memberikan hasil yang bagus karena aturan penggulungan, yang digunakan untuk
pengisian.

```
>plot2d(x,y,<grid,<frame,>filled):
```



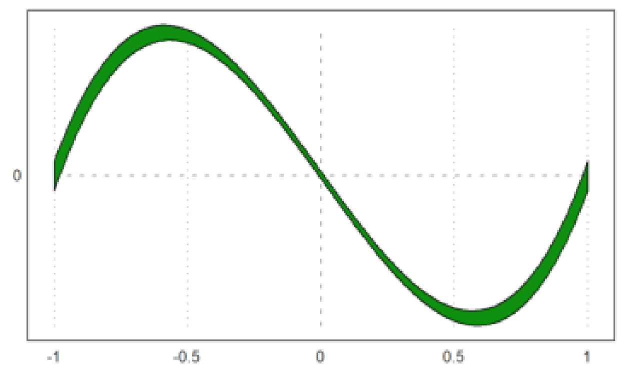
Vektor interval diplot terhadap nilai x sebagai wilayah yang terisi
antara nilai bawah dan atas interval.
Hal ini dapat berguna untuk memplot kesalahan perhitungan. Tapi itu bisa
juga dapat digunakan untuk memplot kesalahan statistik.

```
>t=0:0.1:1; ...
> plot2d(t,interval(t-random(size(t)),t+random(size(t))),style="|");  ...
> plot2d(t,t,add=true):
```



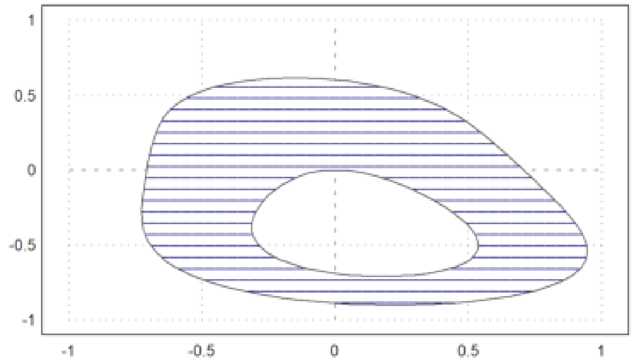
Jika x adalah vektor yang diurutkan, dan y adalah vektor interval, maka plot2d akan memplot rentang interval yang terisi pada bidang, gaya isian sama dengan gaya poligon.

```
>t=-1:0.01:1; x=~t-0.01,t+0.01~; y=x^3-x;
>plot2d(t,y):
```



Dimungkinkan untuk mengisi wilayah nilai untuk fungsi tertentu. Untuk ini, level harus berupa matriks 2xn. Baris pertama adalah batas bawah dan baris kedua berisi batas atas.

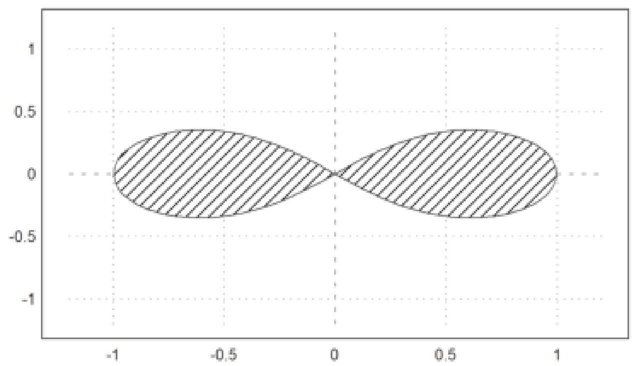
```
>expr := "2*x^2+x*y+3*y^4+y"; // define an expression f(x,y)
>plot2d(expr,level=[0;1],style="-",color=blue): // 0 <= f(x,y) <= 1
```



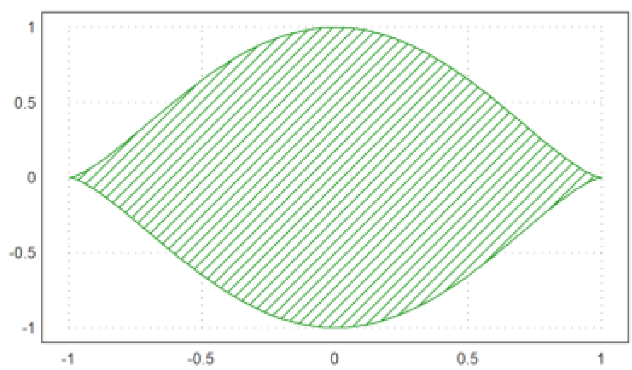
Kita juga dapat mengisi rentang nilai seperti

$$-1 \leq (x^2 + y^2)^2 - x^2 + y^2 \leq 0.$$

```
> plot2d("(x^2+y^2)^2-x^2+y^2",r=1.2,level=[-1;0],style="/"):
```

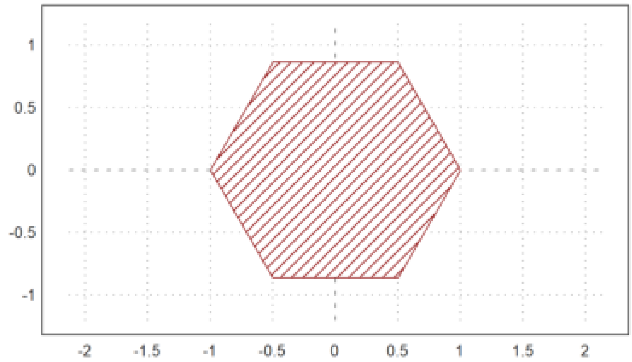



```
>plot2d("cos(x)","sin(x)^3",xmin=0,xmax=2pi,>filled,style="/"):
```

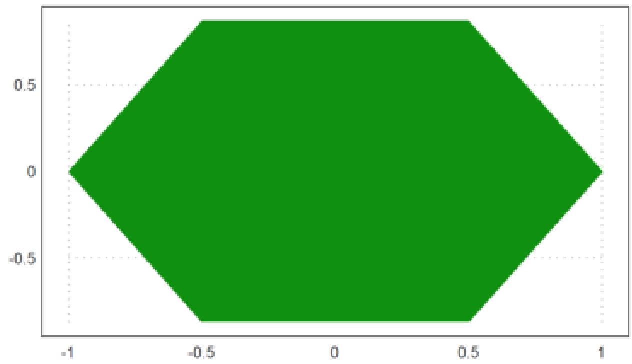


Menggambar Segi Banyak

```
>t=linspace(0,2pi,6); ...
>plot2d(cos(t),sin(t),>filled,style="/",fillcolor=red,r=1.2):
```

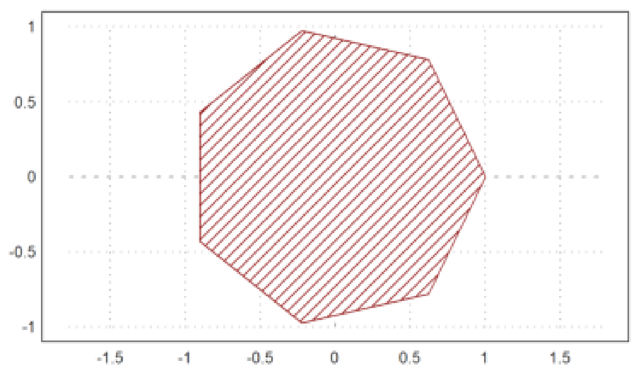



```
>t=linspace(0,2pi,6); plot2d(cos(t),sin(t),>filled,style="#"):
```



Contoh lainnya adalah septagon, yang kita buat dengan 7 titik pada lingkaran satuan.

```
>t=linspace(0,2pi,7);  ...
> plot2d(cos(t),sin(t),r=1,>filled,style="/",fillcolor=red):
```

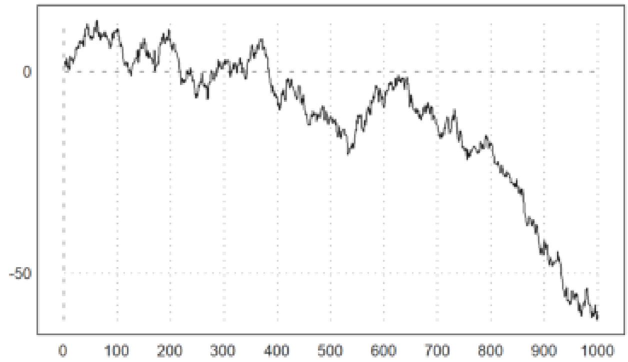


```
>
```

Plot Statistik

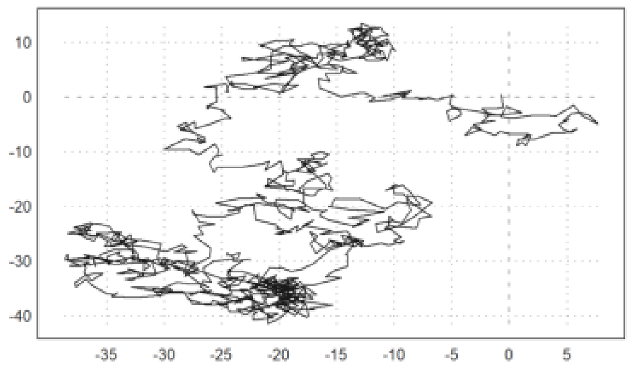
Terdapat banyak fungsi yang dikhususkan untuk plot statistik. Salah satu plot yang sering digunakan adalah plot kolom.
Jumlah kumulatif dari nilai berdistribusi normal 0-1 menghasilkan jalan acak.

```
>plot2d(cumsum(randnormal(1,1000))):
```

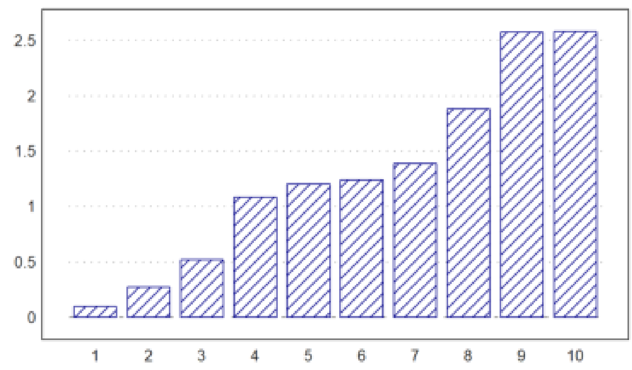


Dengan menggunakan dua baris, ini menunjukkan jalan kaki dalam dua dimensi.

```
>X=cumsum(randnormal(2,1000)); plot2d(X[1],X[2]):
```

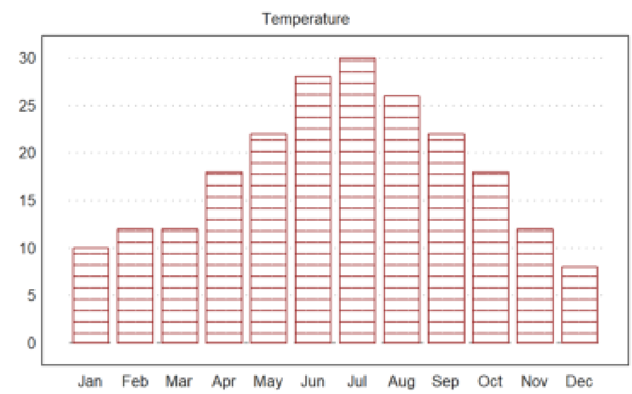



```
>columnsplot(cumsum(random(10)),style="/",color=blue):
```

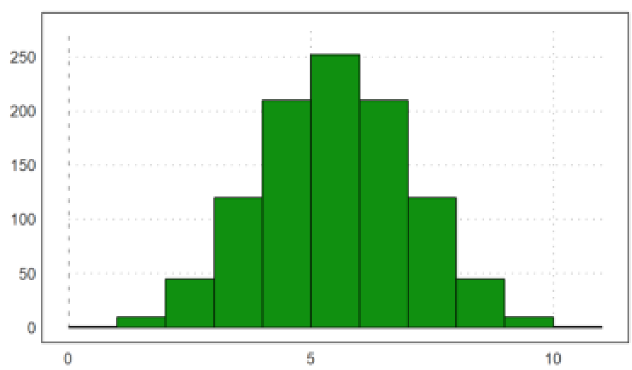


Ini juga dapat menampilkan string sebagai label.

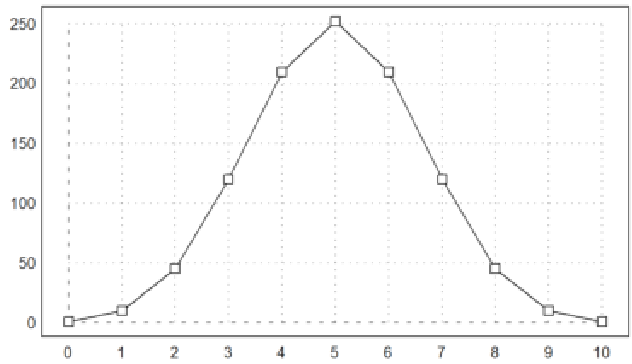
```
>months=["Jan","Feb","Mar","Apr","May","Jun", ...
>  "Jul","Aug","Sep","Oct","Nov","Dec"];
>values=[10,12,12,18,22,28,30,26,22,18,12,8];
>columnsplot(values,lab=months,color=red,style="-");
>title("Temperature"):
```



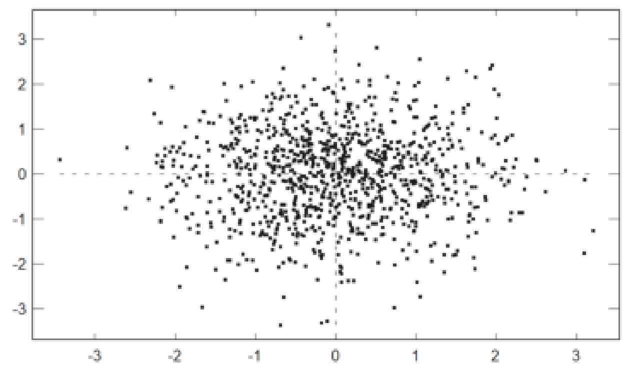

```
>k=0:10;
>plot2d(k,bin(10,k),>bar):
```



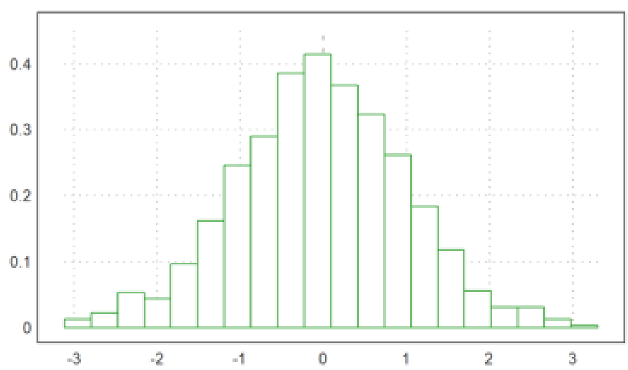
```
>plot2d(k,bin(10,k)); plot2d(k,bin(10,k),>points,>add):
```



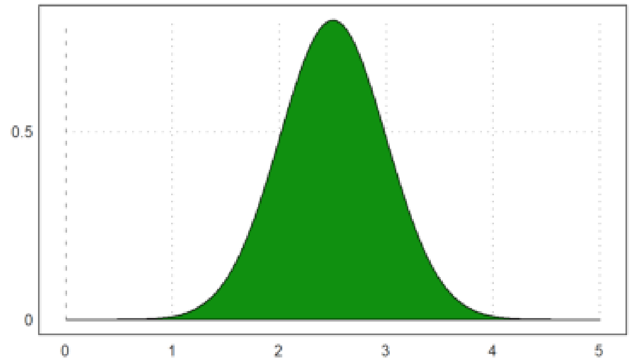
```
>plot2d(normal(1000),normal(1000),>points,grid=6,style=".."):
```



```
>plot2d(normal(1,1000),>distribution,style="O"):
```

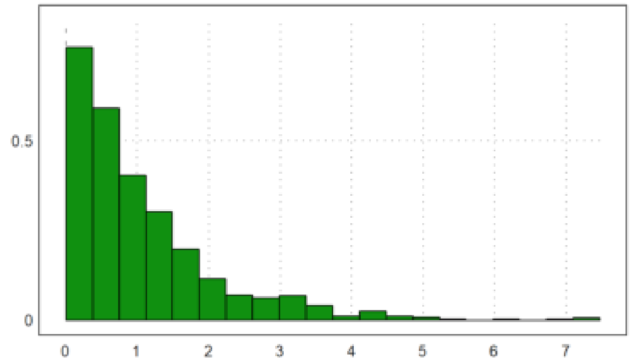


```
>plot2d("qnormal",0,5;2.5,0.5,>filled):
```



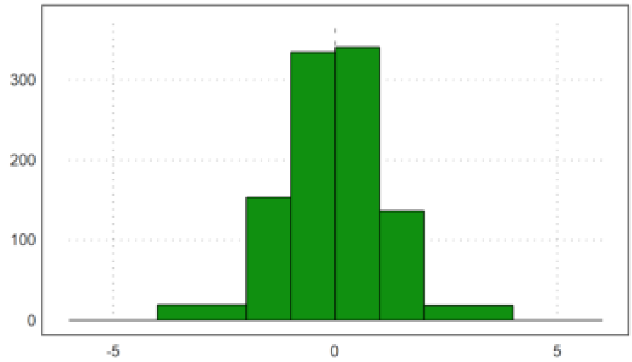
Untuk memplot distribusi statistik eksperimental, Anda dapat menggunakan distribution=n dengan plot2d.

```
>w=randexponential(1,1000); // exponential distribution
>plot2d(w,>distribution): // or distribution=n with n intervals
```



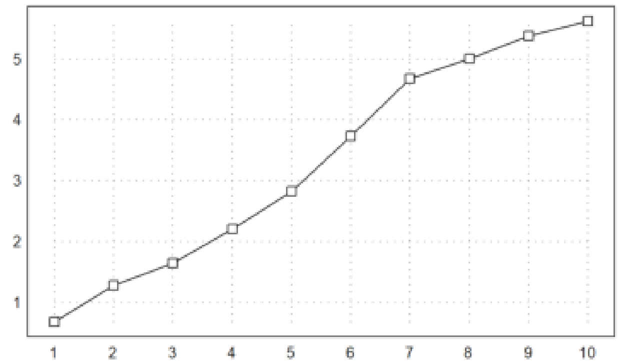
Atau Anda dapat menghitung distribusi dari data dan memplot hasilnya dengan >bar di plot3d, atau dengan plot kolom.

```
>w=normal(1000); // 0-1-normal distribution
>{x,y}=histo(w,10,v=[-6,-4,-2,-1,0,1,2,4,6]); // interval bounds v
>plot2d(x,y,>bar):
```

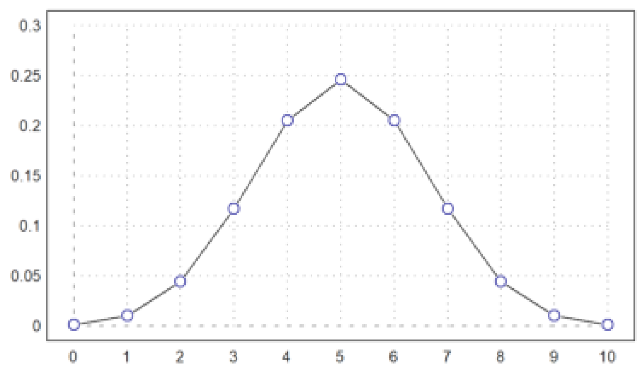


Fungsi statplot() menetapkan gaya dengan string sederhana.

```
>statplot(1:10,cumsum(random(10)),"b"):
```

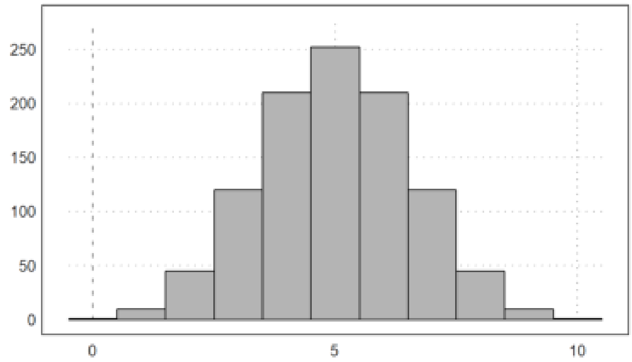


```
>n=10; i=0:n; ...
>plot2d(i,bin(n,i)/2^n,a=0,b=10,c=0,d=0.3); ...
>plot2d(i,bin(n,i)/2^n,points=true,style="ow",add=true,color=blue):
```



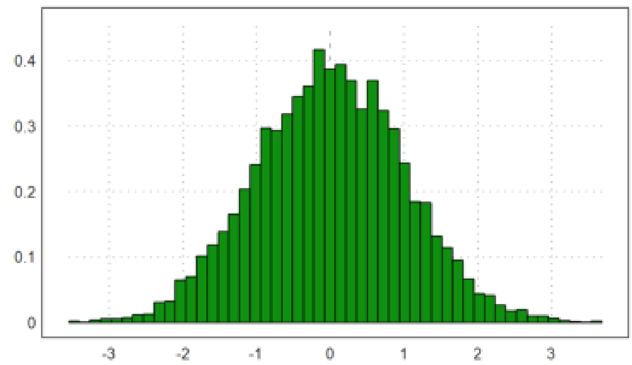
Selain itu, data dapat diplot sebagai batang. Dalam hal ini, x harus diurutkan dan satu elemen lebih panjang dari y. Batang akan memanjang dari x[i] ke x[i+1] dengan nilai y[i]. Jika x memiliki ukuran yang sama dengan y, maka x akan diperpanjang satu elemen dengan jarak terakhir.
Gaya isian dapat digunakan seperti di atas.

```
>n=10; k=bin(n,0:n); ...
>plot2d(-0.5:n+0.5,k,bar=true,fillcolor=lightgray):
```

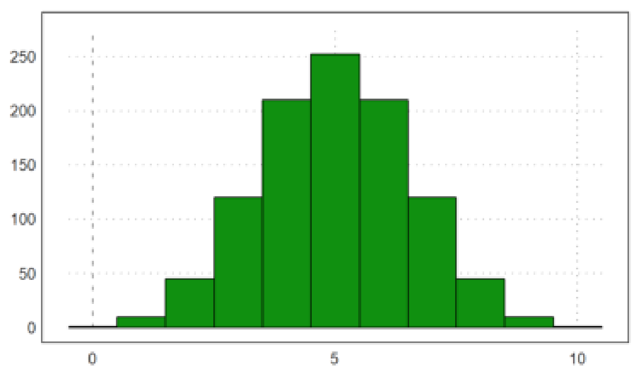


Data untuk plot batang (bar=1) dan histogram (histogram = 1) dapat diberikan secara eksplisit dalam xv dan yv, atau dapat dihitung dari distribusi empiris dalam xv dengan >distribution (atau distribution=n). Histogram dari nilai xv akan dihitung secara otomatis dengan >histogram. Jika >even is specified, nilai xv akan dihitung dalam interval bilangan bulat.

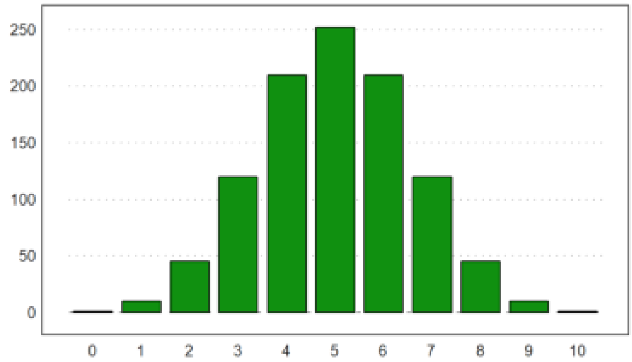
```
>plot2d(normal(10000),distribution=50):
```



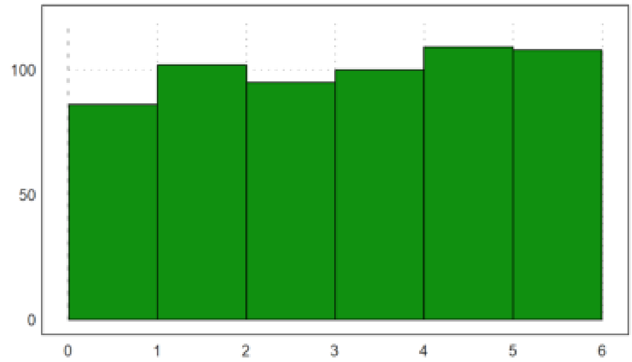

```
>k=0:10; m=bin(10,k); x=(0:11)-0.5; plot2d(x,m,>bar):
```



```
>columnsplot(m,k):
```

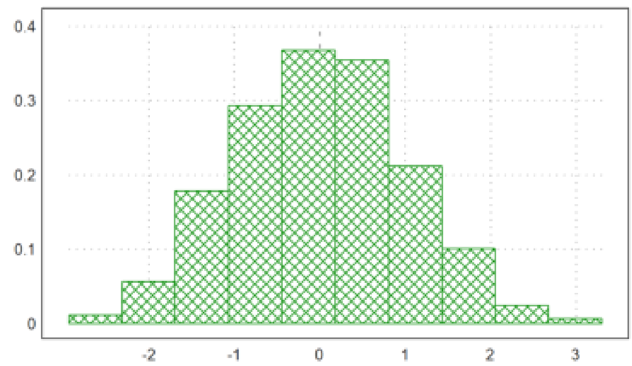



```
>plot2d(random(600)*6,histogram=6):
```



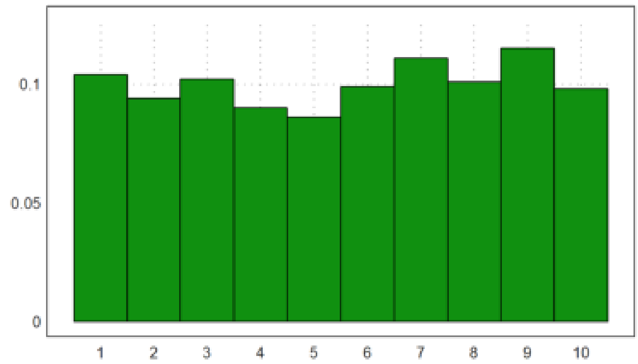
Untuk distribusi, ada parameter distribution=n, yang menghitung nilai secara otomatis dan mencetak distribusi relatif dengan n sub-intervals.

```
>plot2d(normal(1,1000),distribution=10,style="\/"):
```



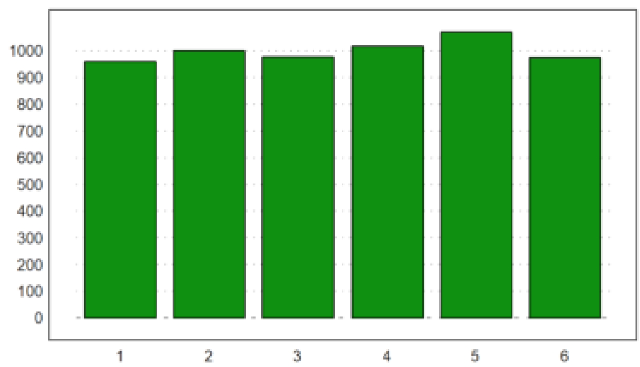
Dengan parameter even=true, ini akan menggunakan interval bilangan bulat.

```
>plot2d(intrandom(1,1000,10),distribution=10,even=true):
```

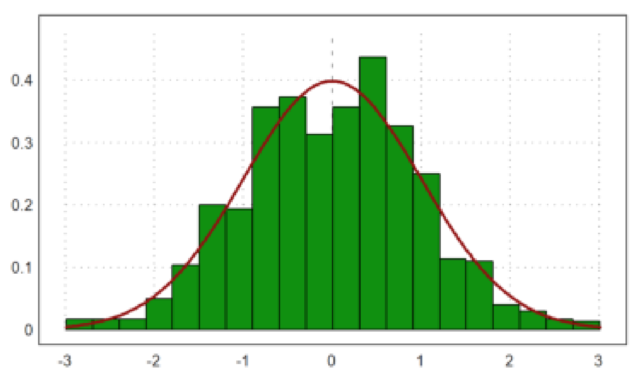


Perhatikan bahwa ada banyak plot statistik yang mungkin berguna. Lihatlah tutorial tentang statistik.

```
>columnsplot(getmultiplicities(1:6,intrandom(1,6000,6))):
```

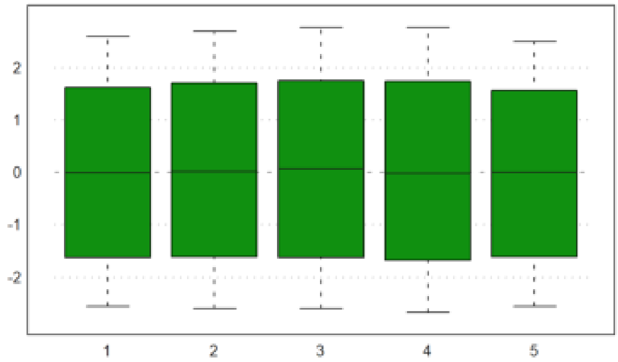



```
>plot2d(normal(1,1000),>distribution); ...
>  plot2d("qnormal(x)",color=red,thickness=2,>add):
```



Ada juga banyak plot khusus untuk statistik. Boxplot menunjukkan kuartil dari distribusi ini dan banyak pencilan. Menurut definisi, pencilan dalam boxplot adalah data yang melebihi 1,5 kali kisaran 50% tengah plot.

```
>M=normal(5,1000); boxplot(quartiles(M)):
```

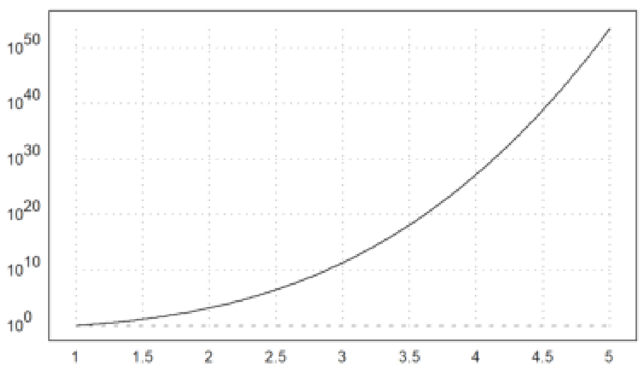


Plot Logaritmik

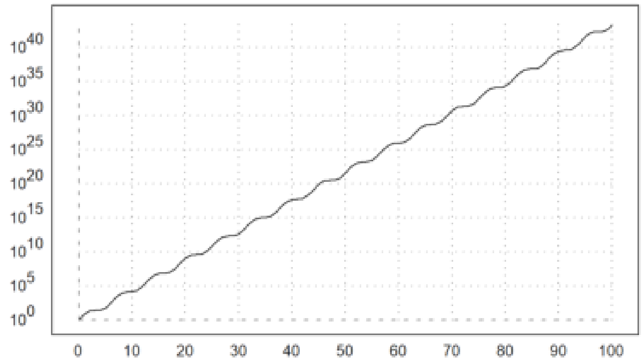
EMT menggunakan parameter "logplot" untuk skala logaritmik.
Plot logaritmik dapat diplot menggunakan skala logaritmik dalam y dengan logplot = 1, atau menggunakan skala logaritmik dalam x dan y dengan logplot = 2, atau dalam x dengan logplot = 3.

```
- logplot=1: y-logarithmic
- logplot=2: x-y-logarithmic
- logplot=3: x-logarithmic
```

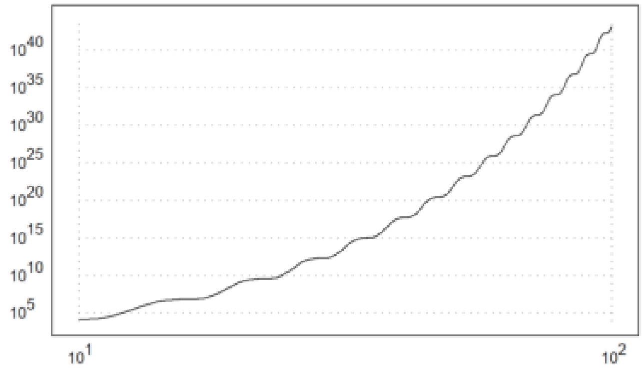
```
>plot2d("exp(x^3-x)*x^2",1,5,logplot=1):
```



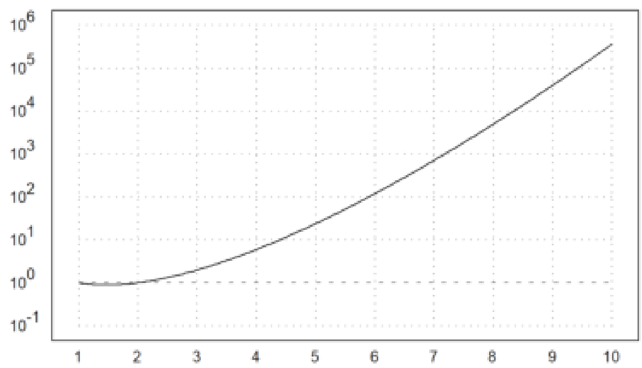

```
>plot2d("exp(x+sin(x))",0,100,logplot=1):
```



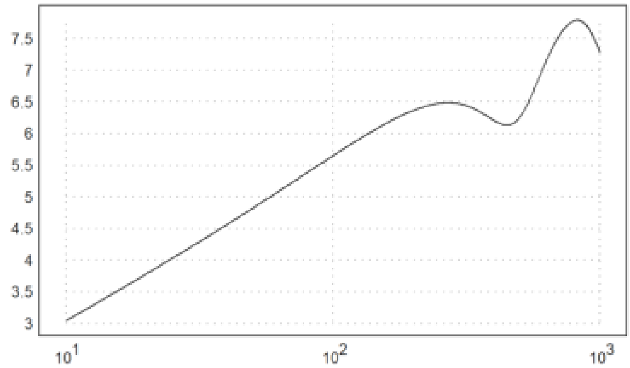

```
>plot2d("exp(x+sin(x))",10,100,logplot=2):
```




```
>plot2d("gamma(x)",1,10,logplot=1):
```

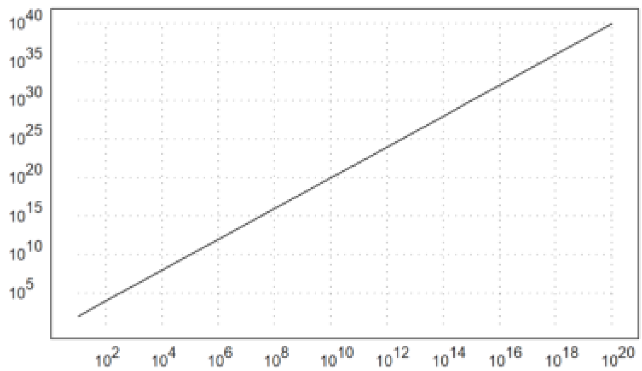



```
>plot2d("log(x*(2+sin(x/100)))",10,1000,logplot=3):
```



Hal ini juga bisa dilakukan dengan plot data.

```
>x=10^(1:20); y=x^2-x;
>plot2d(x,y,logplot=2):
```



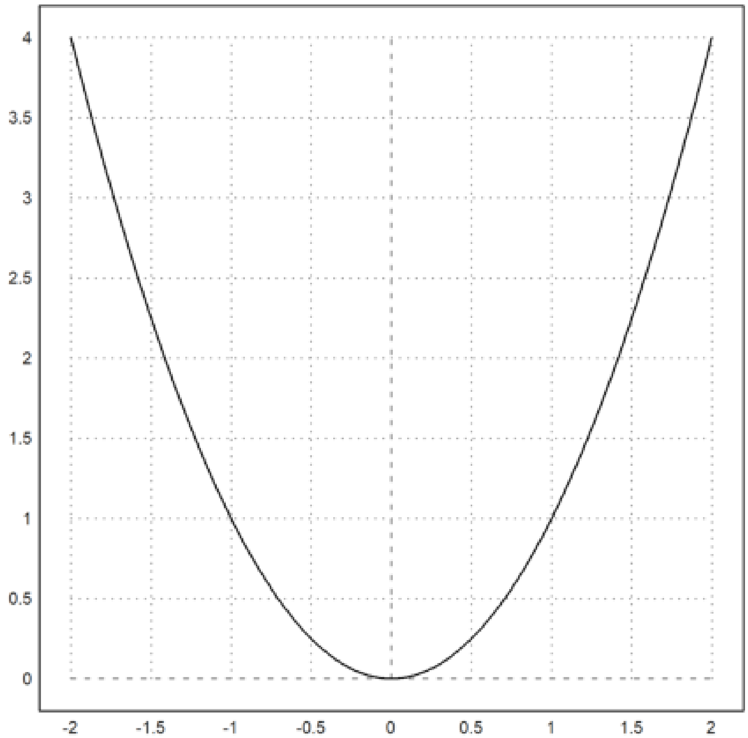
LATIHAN SOAL YANG LAIN

```
> reset;
>clg;
```

Gambarkan grafik dari

$$y = x^2$$

```
>plot2d("x^2"):
```



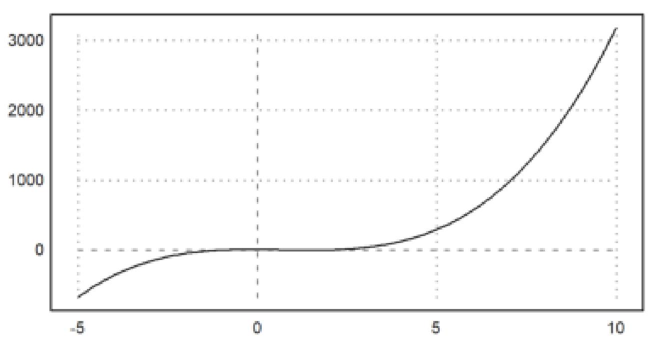
Grafik tersebut akan memasangkan setiap angka rill di sumbu x dengan angka di sumbu y dengan mencari

$$y = f(x) = x^2$$

Gambarlah sketsa kurva

$$f(x) = 4x^3 - 8x^2 - 3x + 9$$

```
>function f(x) := 4*x^3-8*x^2-3*x+9;
>aspect(2); plot2d("f",-5,10):
```

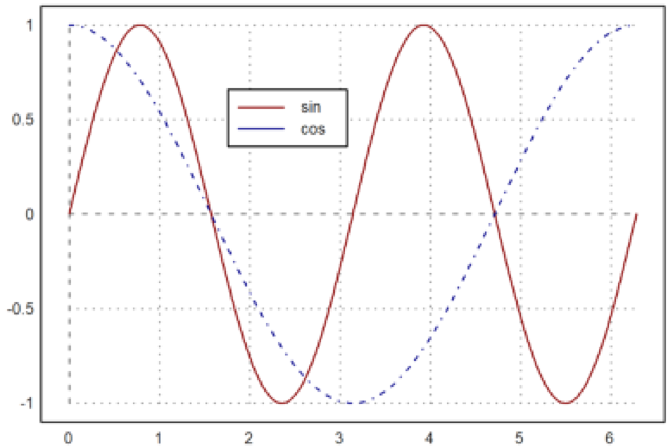


Grafik tersebut menampilkan sketsa grafik dari x=-5 sampai x=10, dengan

$$y = f(x) = 4x^3 - 8x^2 - 3x + 9$$

Gambarkan grafik dari sin(2x) dan cos(x) dengan rentang 0<x<pi

```
>aspect(1.5); plot2d("sin(2*x)",0,2pi, color=red); ...
> plot2d("cos(x)", color=blue, style="-.-", >add); ...
> labelbox(["sin","cos"],colors=[red,blue],x=0.3,y=0.2, >left) :
```



Grafik tersebut akan menampilkan grafik dari sin(2x) dan cos(x) yang digambarkan pada suatu koordinat yang sama dengan dibedakan warnanya. Grafik sin(2x) ditunjukkan dengan warna merah dan grafik cos(x) ditunjukkan dengan warna biru.

```
>
```

Rujukan Lengkap Fungsi plot2d()

```
function plot2d (xv, yv, btest, a, b, c, d, xmin, xmax, r, n,  ..
logplot, grid, frame, framecolor, square, color, thickness, style, ..
auto, add, user, delta, points, addpoints, pointstyle, bar, histogram,  ..
distribution, even, steps, own, adaptive, hue, level, contour,  ..
nc, filled, fillcolor, outline, title, xl, yl, maps, contourcolor, ..
contourwidth, ticks, margin, clipping, cx, cy, insimg, spectral,  ..
cgrid, vertical, smaller, dl, niveau, levels)
```

Multipurpose plot function for plots in the plane (2D plots). This function can do plots of functions of one variables, data plots, curves in the plane, bar plots, grids of complex numbers, and implicit plots of functions of two variables.
Parameters
x,y : equations, functions or data vectors
a,b,c,d : Plot area (default a=-2,b=2)
r : if r is set, then a=cx-r, b=cx+r, c=cy-r, d=cy+r

```
r can be a vector [rx,ry] or a vector [rx1,rx2,ry1,ry2].
```

xmin,xmax : range of the parameter for curves
auto : Determine y-range automatically (default)
square : if true, try to keep square x-y-ranges
n : number of intervals (default is adaptive)
grid : 0 = no grid and labels,

```
1 = axis only,
2 = normal grid (see below for the number of grid lines)
3 = inside axis
4 = no grid
5 = full grid including margin
6 = ticks at the frame
7 = axis only
8 = axis only, sub-ticks
```

frame : 0 = no frame
framecolor: color of the frame and the grid
margin : number between 0 and 0.4 for the margin around the plot
color : Color of curves. If this is a vector of colors,

```
it will be used for each row of a matrix of plots. In the case of
point plots, it should be a column vector. If a row vector or a
full matrix of colors is used for point plots, it will be used for
each data point.
```

thickness : line thickness for curves

```
This value can be smaller than 1 for very thin lines.
```

style : Plot style for lines, markers, and fills.

```
For points use
"[]", "<>", ".", "..", "...",
"*", "+", "|", "-", "o"
"[]#", "<>#", "o#" (filled shapes)
"[]w", "<>w", "ow" (non-transparent)
For lines use
"-", "--", "-.", ".", ".-.", "-.-", "->"
For filled polygons or bar plots use
"#", "#O", "O", "/", "\", "\/",
"+", "|", "-", "t"
```

points : plot single points instead of line segments
addpoints : if true, plots line segments and points
add : add the plot to the existing plot
user : enable user interaction for functions
delta : step size for user interaction
bar : bar plot (x are the interval bounds, y the interval values)
histogram : plots the frequencies of x in n subintervals
distribution=n : plots the distribution of x with n subintervals
even : use inter values for automatic histograms.

steps : plots the function as a step function (steps=1,2)
adaptive : use adaptive plots (n is the minimal number of steps)
level : plot level lines of an implicit function of two variables
outline : draws boundary of level ranges.
If the level value is a 2xn matrix, ranges of levels will be drawn in the color using the given fill style. If outline is true, it will be drawn in the contour color. Using this feature, regions of f(x,y) between limits can be marked.
hue : add hue color to the level plot to indicate the function

```
value
```

contour : Use level plot with automatic levels
nc : number of automatic level lines
title : plot title (default "")
xl, yl : labels for the x- and y-axis
smaller : if >0, there will be more space to the left for labels.
vertical :

```
Turns vertical labels on or off. This changes the global variable
verticallabels locally for one plot. The value 1 sets only vertical
text, the value 2 uses vertical numerical labels on the y axis.
```

filled : fill the plot of a curve
fillcolor : fill color for bar and filled curves
outline : boundary for filled polygons
logplot : set logarithmic plots

```
1 = logplot in y,
2 = logplot in xy,
3 = logplot in x
```

own :

```
A string, which points to an own plot routine. With >user, you get
the same user interaction as in plot2d. The range will be set
before each call to your function.
```

maps : map expressions (0 is faster), functions are always mapped.
contourcolor : color of contour lines
contourwidth : width of contour lines
clipping : toggles the clipping (default is true)
title :

```
This can be used to describe the plot. The title will appear above
the plot. Moreover, a label for the x and y axis can be added with
xl="string" or yl="string". Other labels can be added with the
functions label() or labelbox(). The title can be a unicode
string or an image of a Latex formula.
```

cgrid :

```
Determines the number of grid lines for plots of complex grids.
Should be a divisor of the the matrix size minus 1 (number of
subintervals). cgrid can be a vector [cx,cy].
```

Overview

The function can plot

- expressions, call collections or functions of one variable,
- parametric curves,
- x data against y data,
- implicit functions,
- bar plots,
- complex grids,
- polygons.

If a function or expression for xv is given, plot2d() will compute values in the given range using the function or expression. The expression must be an expression in the variable x. The range must be defined in the parameters a and b unless the default range should be used. The y-range will be computed automatically, unless c and d are specified, or a radius r, which yields the range r,r
for x and y. For plots of functions, plot2d will use an adaptive evaluation of the function by default. To speed up the plot for complicated functions, switch this off with <adaptive, and optionally decrease the number of intervals n. Moreover, plot2d() will by default use mapping. I.e., it will compute the plot element for element. If your expression or your functions can handle a vector x, you can switch that off with <maps for faster evaluation.
Note that adaptive plots are always computed element for element.
If functions or expressions for both xv and for yv are specified, plot2d() will compute a curve with the xv values as x-coordinates and the yv values as y-coordinates. In this case, a range should be defined for the parameter using xmin, xmax. Expressions contained in strings must always be expressions in the parameter variable x.

BAB 4

KB PEKAN 7-8: MENGGUNAKAN EMT UNTUK MENGAMBAR GRAFIK 3 DIMENSI (3D)

[a4paper,10pt]article eumat

Nama: Umi Nurkhasanah
NIM: 22305141032

Menggambar Plot 3D dengan EMT

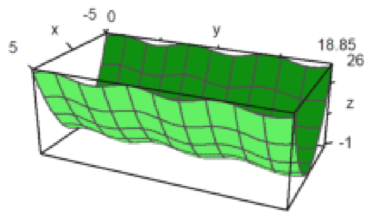
Ini adalah pengenalan plot 3D di Euler. Kita memerlukan plot 3D untuk memvisualisasikan fungsi dua variabel.

Euler menggambar fungsi tersebut menggunakan algoritma pengurutan untuk menyembunyikan bagian di latar belakang. Secara umum Euler menggunakan proyeksi sentral. Defaultnya adalah dari kuadran x-y positif menuju titik asal x=y=z=0, tetapi sudut=0° dilihat dari arah sumbu y. Sudut pandang dan ketinggian dapat diubah.

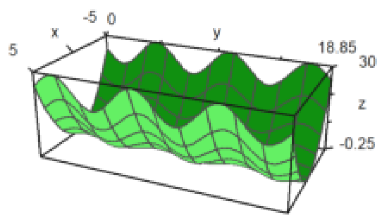
Euler bisa merencanakan
- permukaan dengan garis penetasan dan level atau rentang level,
- awan titik,
- kurva parametrik,
- permukaan implisit.

Plot 3D suatu fungsi menggunakan plot3d. Cara termudah adalah dengan memplot ekspresi dalam x dan y. Parameter r mengatur rentang plot sekitar (0,0).

```
>aspect(1.5); plot3d("x^2+sin(y)",-5,5,0,6*pi):
```



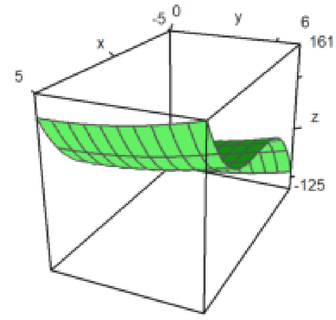

```
>plot3d("x^2+x*sin(y)",-5,5,0,6*pi):
```



Silakan lakukan modifikasi agar gambar "talang bergelombang" tersebut tidak lurus melainkan melengkung/melingkar, baik melingkar secara mendatar maupun melingkar turun/naik (seperti papan peluncur pada kolam renang. Temukan rumusnya.

Contoh:

```
>plot3d("x^3+y^2",-5,5,0,6):
```



Penjelasan:
Perintah "plot3d("x^3+y^2",-5,5,0,6):" memiliki keterangan:
x^3+y^2 sebagai fungsi yang akan diplot di bidang 3 dimensi
-5,5 memiliki arti bahwa sumbu x dari rentang -5 sampai 5
0,6 memiliki arti bahwa sumbu y memiliki rentang 0 sampai 6

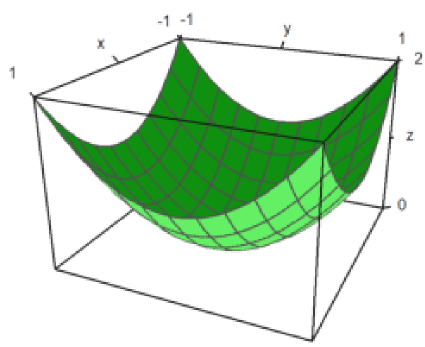
Fungsi dua Variabel

Untuk grafik suatu fungsi, gunakan
- ekspresi sederhana dalam x dan y,
- nama fungsi dari dua variabell
- atau matriks data.

Standarnya adalah kisi-kisi kawat berisi dengan warna berbeda di kedua sisi. Perhatikan bahwa jumlah interval kisi default adalah 10, tetapi plot menggunakan jumlah default persegi panjang 40x40 untuk membuat permukaannya. Ini bisa diubah.
- n=40, n=[40,40]: jumlah garis kisi di setiap arah
- grid=10, grid=[10,10]: jumlah garis grid di setiap arah.

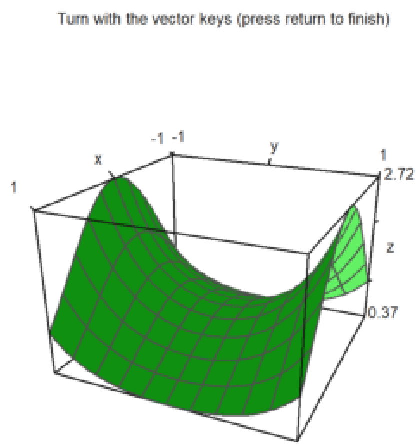
Kami menggunakan default n=40 dan grid=10.

```
>plot3d("x^2+y^2"):
```



Interaksi pengguna dimungkinkan dengan parameter >user. Pengguna dapat menekan tombol berikut.
- kiri, kanan, atas, bawah: memutar sudut pandang
- +,-: memperbesar atau memperkecil
- a: menghasilkan anaglyph (lihat di bawah)
- l : tombol nyalakan sumber cahaya (lihat dibawah)
- spasi: reset ke default
- kembali: akhiri interaksi

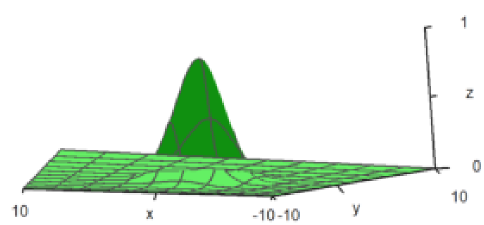
```
>plot3d("exp(-x^2+y^2)",>user, ...
>  title="Turn with the vector keys (press return to finish)"):
```



Rentang plot untuk fungsi dapat ditentukan dengan
- a,b: rentang x
- c,d: rentang y
- r : persegi simetris di sekitar (0,0).
- n : jumlah subinterval untuk plot.

Ada beberapa parameter untuk menskalakan fungsi atau mengubah tampilan grafik.
fscale: menskalakan ke nilai fungsi (defaultnya adalah <fscale).
scale: angka atau vektor 1x2 untuk menskalakan ke arah x dan y.
frame: jenis bingkai (default 1).

```
>plot3d("exp(-(x^2+y^2)/5)",r=10,n=80,fscale=4,scale=1.2,frame=3,>user):
```



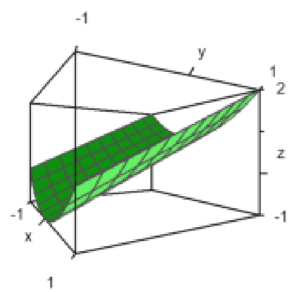
Tampilan dapat diubah dengan berbagai cara.
- Jarak: jarak pandang ke plot.
- zoom: nilai zoom.
- sudut: sudut terhadap sumbu y negatif dalam radian.
- tinggi: ketinggian pandangan dalam radian.
Nilai default dapat diperiksa atau diubah dengan fungsi view(). Ini mengembalikan parameter dalam urutan di atas.

```
>view
```

```
[5,  2.6,  2,  0.4]
```

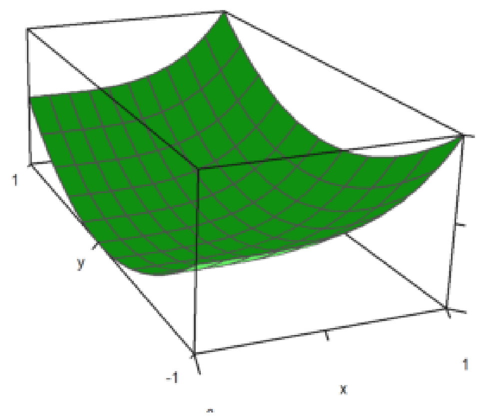
Jarak yang lebih dekat membutuhkan lebih sedikit zoom. Efeknya lebih seperti lensa sudut lebar.
Pada contoh berikut, sudut=0 dan tinggi=0 dilihat dari sumbu y negatif. Label sumbu untuk y disembunyikan dalam kasus ini.

```
>plot3d("x^2+y",distance=3,zoom=1,angle=pi/3,height=0):
```



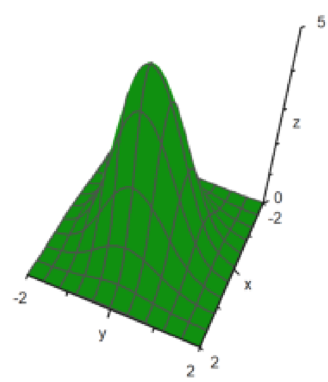
Plot selalu terlihat berada di tengah kubus plot. Anda dapat memindahkan bagian tengah dengan parameter tengah.

```
>plot3d("x^4+y^2",a=0,b=1,c=-1,d=1,angle=-20°,height=20°, ...
>  center=[0.4,0,0],zoom=5): //zoom untuk memperbesar gambar
```



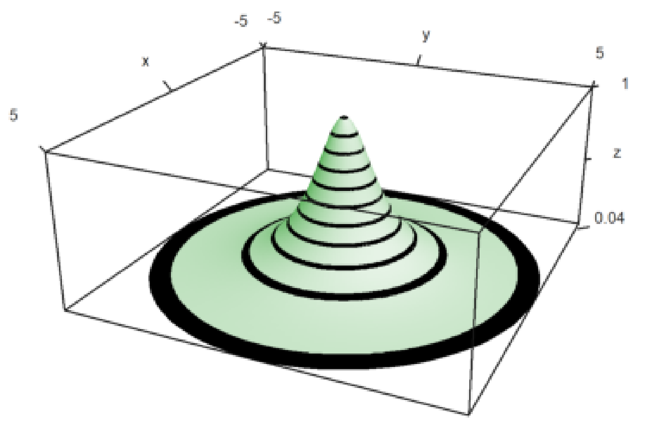
Plotnya diskalakan agar sesuai dengan unit kubus untuk dilihat. Jadi tidak perlu mengubah jarak atau zoom tergantung ukuran plot. Namun labelnya mengacu pada ukuran sebenarnya.
Jika Anda mematikannya dengan scale=false, Anda harus berhati-hati agar plot tetap masuk ke dalam jendela plotting, dengan mengubah jarak pandang atau zoom, dan memindahkan bagian tengah.

```
>plot3d("5*exp(-x^2-y^2)",r=2,<fscale,<scale,distance=13,height=50°, ...
>  center=[0,0,-2],frame=3):
```

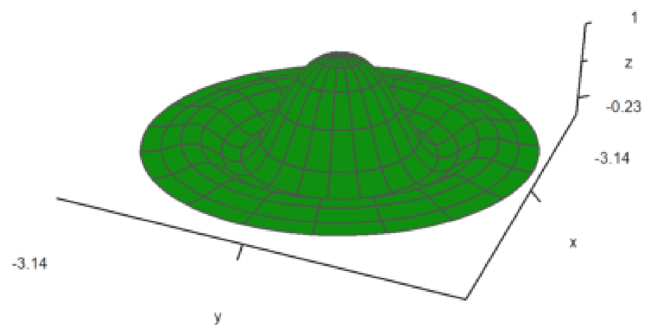


Plot kutub juga tersedia. Parameter polar=true menggambar plot kutub. Fungsi tersebut harus tetap merupakan fungsi dari x dan y. Parameter "fscale" menskalakan fungsi dengan skalanya sendiri. Kalau tidak, fungsinya akan diskalakan agar sesuai dengan kubus.

```
>plot3d("1/(x^2+y^2+1)",r=5,>polar, ...
>fscale=2,>hue,n=100,zoom=4,>contour,color=green):
```

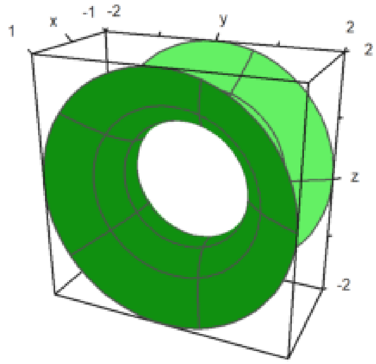



```
>function f(r) := exp(-r/2)*cos(r); ...
>plot3d("f(x^2+y^2)",>polar,scale=[1,1,0.4],r=pi,frame=3,zoom=4):
```

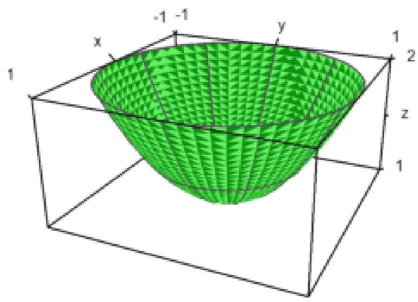


Parameter memutar memutar fungsi di x di sekitar sumbu x.
- rotate=1: Menggunakan sumbu x
- rotate=2: Menggunakan sumbu z

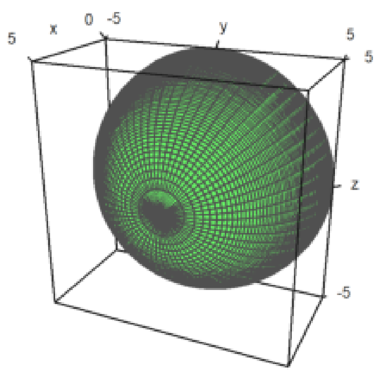
```
>plot3d("x^2+1",a=-1,b=1,rotate=true,grid=5):
```



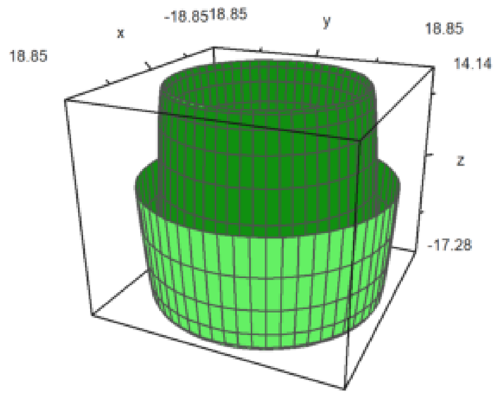

```
>plot3d("x^2+1",a=-1,b=1,rotate=2,grid=5):
```




```
>plot3d("sqrt(25-x^2)",a=0,b=5,rotate=1):
```

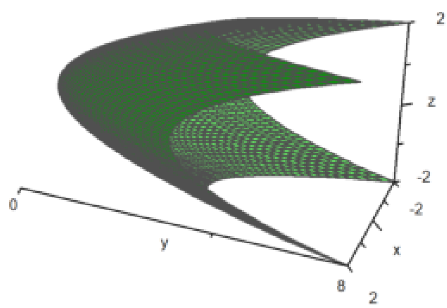


```
>plot3d("x*sin(x)",a=0,b=6pi,rotate=2):
```



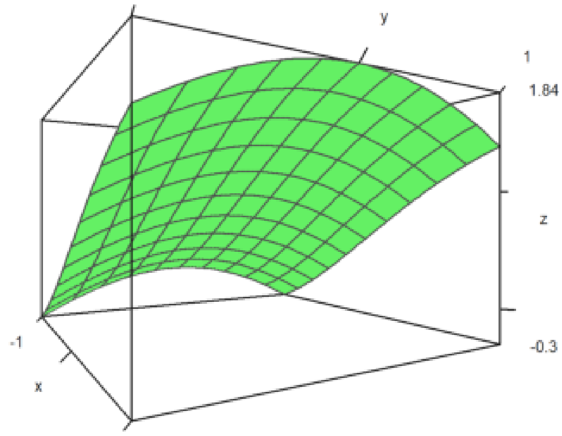
Berikut adalah plot dengan tiga fungsi.

```
>plot3d("x","x^2+y^2","y",r=2,zoom=3.5,frame=3):
```

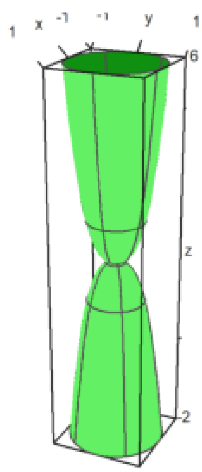


Contoh:

```
> plot3d("sin(x)+cos(y)",distance=3,zoom=2,angle=pi/3,height=0):
```




```
>plot3d("4*x^3+2",a=-1,b=1,rotate=2,grid=5,zoom=4):
```

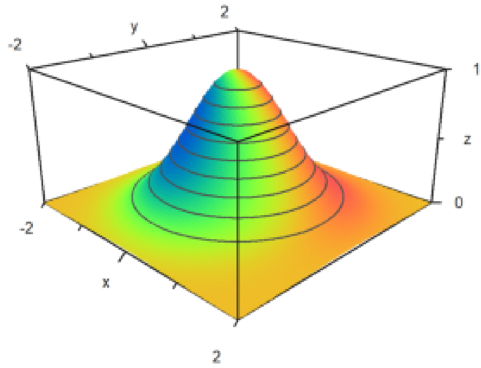


Penjelasan:
Perintah plot3d("4*x^3+2",a=-1,b=1,rotate=2,grid=5,zoom=4): mempunyai keterangan sebagai berikut: grafik di atas merupakan grafik 3d dari fungsi 4*x^3+2 dengan rentang x yaitu dari -1 sampai 1, rotasi=2, garis (grid)=5 dan diperbesar sebanyak 4x

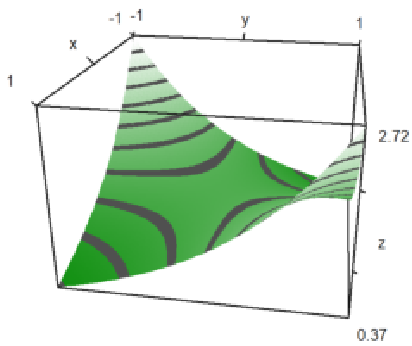
Plot Kontur

Untuk plotnya, Euler menambahkan garis grid. Sebaliknya dimungkinkan untuk menggunakan garis datar dan rona satu warna atau rona warna spektral. Euler dapat menggambar ketinggian fungsi pada plot dengan arsiran. Di semua plot 3D, Euler dapat menghasilkan anaglyph merah/cyan.
->hue: Mengaktifkan bayangan cahaya, bukan kabel.
->contour: Membuat plot garis kontur otomatis pada plot.
- level=... (atau level): Vektor nilai garis kontur.
Standarnya adalah level="auto", yang menghitung beberapa garis level secara otomatis. Seperti yang Anda lihat di plot, level sebenarnya adalah rentang level.
Gaya default dapat diubah. Untuk plot kontur berikut, kami menggunakan grid yang lebih halus berukuran 100x100 poin, menskalakan fungsi dan plot, dan menggunakan sudut pandang yang berbeda.

```
>plot3d("exp(-x^2-y^2)",r=2,n=100,level="thin", ...
> >contour,>hue,>spectral,fscale=1,scale=1.1,angle=45°,height=20°): //spectral yang ngasih
```

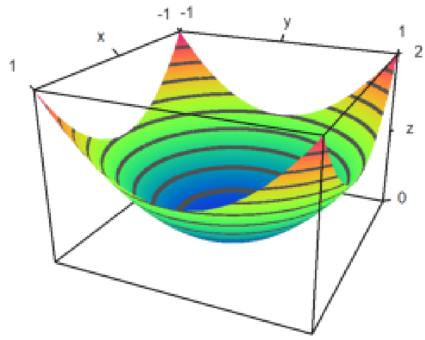



```
>plot3d("exp(x*y)",angle=100°,>contour,color=green): //spectral nggak akan ngaruh kalau co
```



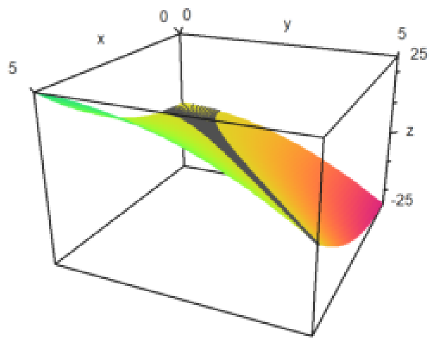
Bayangan defaultnya menggunakan warna abu-abu. Namun rentang warna spektral juga tersedia.
->spectral: Menggunakan skema spektral default
- color=...: Menggunakan warna khusus atau skema spektral
Untuk plot berikut, kami menggunakan skema spektral default dan menambah jumlah titik untuk mendapatkan tampilan yang sangat mulus.

```
>plot3d("x^2+y^2",>spectral,>contour,n=100): //semakin banyak nilai n, semakin mulus warna
```



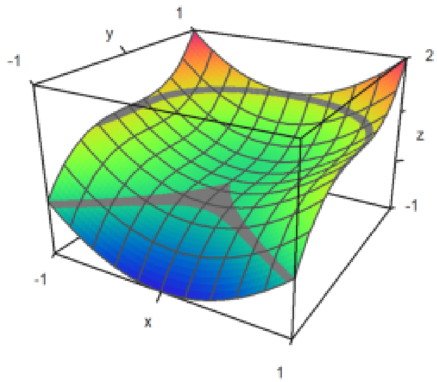
Alih-alih garis level otomatis, kita juga dapat menetapkan nilai garis level. Hal ini akan menghasilkan garis level yang tipis, alih-alih rentang level.

```
>plot3d("x^2-y^2",0,5,0,5,level=-1:0.1:1,color=redgreen):
```



Pada plot berikut ini, kami menggunakan dua pita level yang sangat luas dari -0,1 hingga 1, dan dari 0,9 hingga 1. Ini dimasukkan sebagai matriks dengan batas-batas level sebagai kolom.
Selain itu, kami menghamparkan grid dengan 10 interval di setiap arah.

```
>plot3d("x^2+y^3",level=[-0.1,0.9;0,1], ...
>   >spectral,angle=30°,grid=10,contourcolor=gray):
```

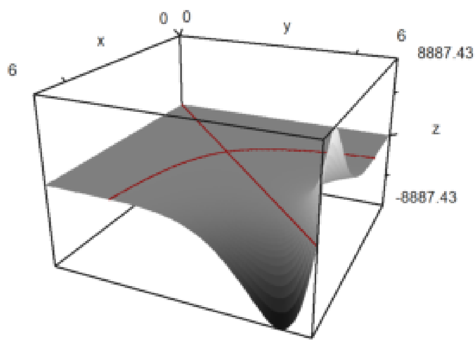


Pada contoh berikut, kami memplot himpunan, di mana

$$f(x, y) = x^y - y^x = 0$$

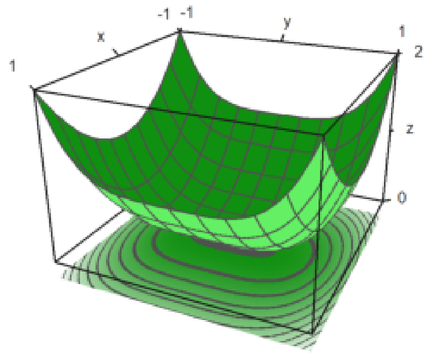
Kami menggunakan satu garis tipis untuk garis level.

```
>plot3d("x^y-y^x",level=0,a=0,b=6,c=0,d=6,contourcolor=red,n=100):
```



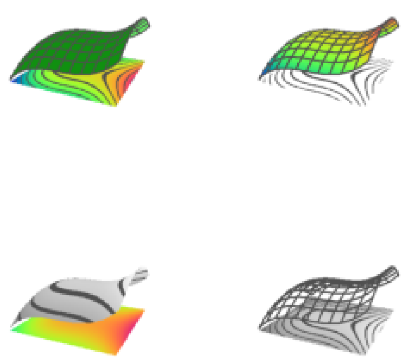
Dimungkinkan untuk menampilkan bidang kontur di bawah plot. Warna dan jarak ke plot dapat ditentukan.

```
>plot3d("x^2+y^4",>cp,cpcolor=green,cpdelta=0.1):
```



Berikut ini beberapa gaya lainnya. Kami selalu mematikan bingkai, dan menggunakan berbagai skema warna untuk plot dan kisi-kisi.

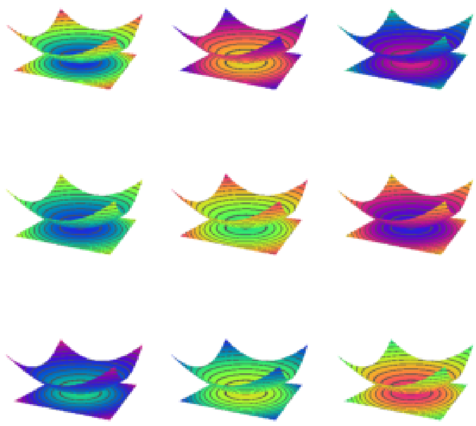
```
>figure(2,2); ...
>expr="y^3-x^2"; ...
>figure(1);  ...
>  plot3d(expr,<frame,>cp,cpcolor=spectral); ...
>figure(2);  ...
>  plot3d(expr,<frame,>spectral,grid=10,cp=2); ...
>figure(3);  ...
>  plot3d(expr,<frame,>contour,color=gray,nc=5,cp=3,cpcolor=greenred); ...
>figure(4);  ...
>  plot3d(expr,<frame,>hue,grid=10,>transparent,>cp,cpcolor=gray); ...
>figure(0):
```



Ada beberapa skema spektral lainnya, yang diberi nomor dari 1 hingga 9. Tetapi Anda juga dapat menggunakan color=value, di mana value

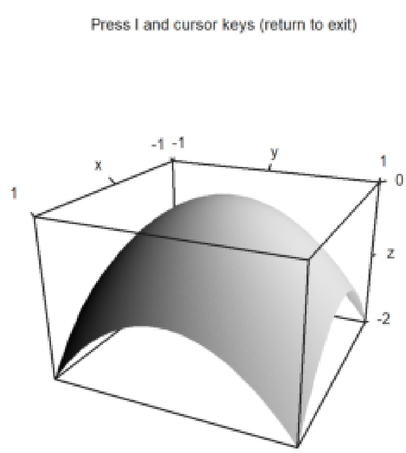
- spectral: untuk rentang dari biru ke merah
- white: untuk rentang yang lebih redup
- yellowblue,purplegreen,blueyellow,greenred
- blueyellow, greenpurple,yellowblue,redgreen

```
>figure(3,3); ...
>for i=1:9;  ...
>  figure(i); plot3d("x^2+y^2",spectral=i,>contour,>cp,<frame,zoom=4);  ...
>end; ...
>figure(0):
```



Sumber cahaya dapat diubah dengan l dan tombol kursor selama interaksi pengguna. Ini juga dapat ditetapkan dengan parameter.
- light: arah cahaya
- amb: cahaya sekitar antara 0 dan 1
Perhatikan, bahwa program ini tidak membuat perbedaan di antara sisi-sisi plot. Tidak ada bayangan. Untuk ini Anda akan membutuhkan Povray.

```
>plot3d("-x^2-y^2", ...
>  hue=true,light=[0,1,1],amb=0,user=true, ...
>  title="Press l and cursor keys (return to exit)"):
```

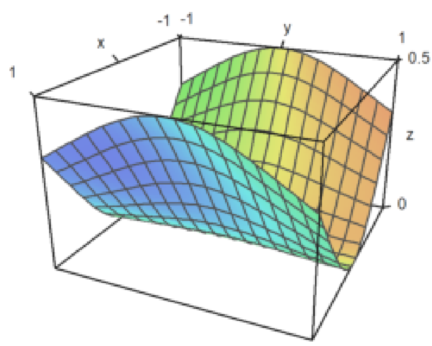


Parameter warna mengubah warna permukaan. Warna garis level juga dapat diubah.

```
>plot3d("-x^2-y^2",color=rgb(0.2,0.2,0),hue=true,frame=false, ...
>   zoom=3,contourcolor=red,level=-2:0.1:1,dl=0.01):
```

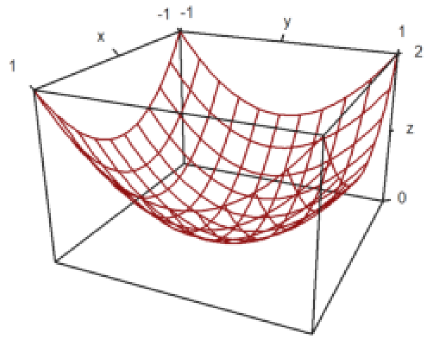
Warna 0 memberikan efek pelangi yang istimewa.

```
>plot3d("x^2/(x^2+y^2+1)",color=0,hue=true,grid=15): //kalau hue=false, warnanya nggak bag
```



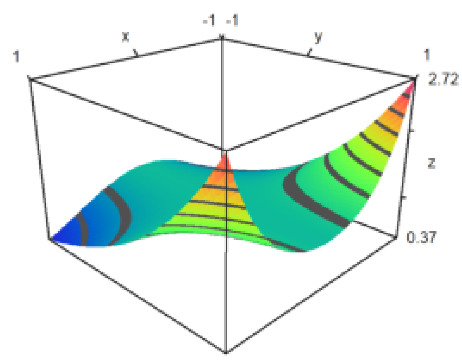
The surface can also be transparent.

```
>plot3d("x^2+y^2",>transparent,grid=10,wirecolor=red): //transparent nanti jadinya kayak j
```



Contoh:

```
>plot3d("exp(x^2*y)",angle=100°,>contour,>spectral,>user):
```



Penjelasan:
perintah plot3d("exp(x^2*y)",angle=100°,>contour,>spectral,>user):
memiliki keterangan bahwa:
grafik di atas merupakan grafik 3d dari fungsi e^(x^2*y) yang digambarkan dengan kontur dan warna spectral. Tampilan tersebut sebelunya diatur oleh pengguna sedemikian sehingga membentuk grafik dengan tampilan seperti di atas.

Plot Implisit

Ada juga plot implisit dalam tiga dimensi. Euler menghasilkan potongan melalui objek. Fitur plot3d termasuk plot implisit. Plot-plot ini menunjukkan himpunan nol dari sebuah fungsi dalam tiga variabel.
Solusi dari

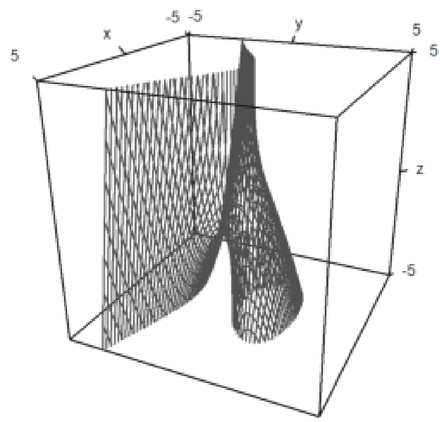
$$f(x,y,z)=0$$

dapat divisualisasikan dalam potongan yang sejajar dengan bidang x-y, bidang x-z, dan bidang y-z.
- implisit = 1: potong sejajar dengan bidang-y-z
- implicit = 2: memotong sejajar dengan bidang x-z
- implicit=4: memotong sejajar dengan bidang x-y

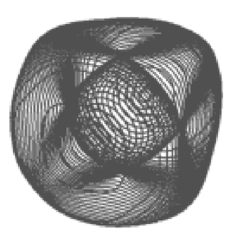
Tambahkan nilai-nilai ini, jika Anda mau. Pada contoh, kami memplot

$$M = \{(x, y, z) : x^2 + y^3 + zy = 1\}$$

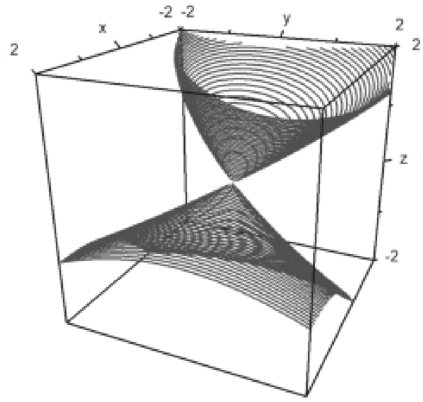
```
>plot3d("x^2+y^3+z*y-1",r=5,implicit=3):
```




```
>c=1; d=1;
>plot3d("((x^2+y^2-c^2)^2+(z^2-1)^2)*((y^2+z^2-c^2)^2+(x^2-1)^2)*((z^2+x^2-c^2)^2+(y^2-1)^
```

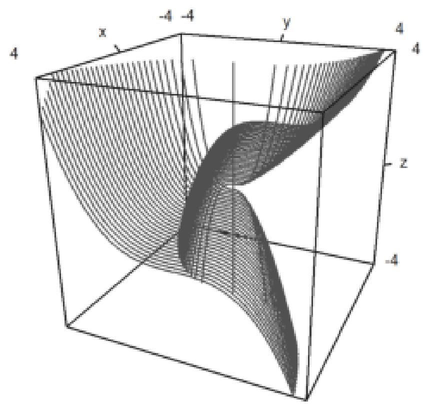


```
>plot3d("x^2+y^2+4*x*z+z^3",>implicit,r=2,zoom=2.5):
```



Contoh:

```
>plot3d("x^2+y^3+4*x*z",>implicit,r=4,zoom=2.5):
```



Penjelasan:
Perintah plot3d("x^2+y^3+4*x*z",>implicit,r=4,zoom=2.5):
mempunyai keterangan bahwa:
grafik tersebut menggambarkan fungsi implisit x^2+y^3+4*x*z dengan radius 4 dan diperbesar 2,5

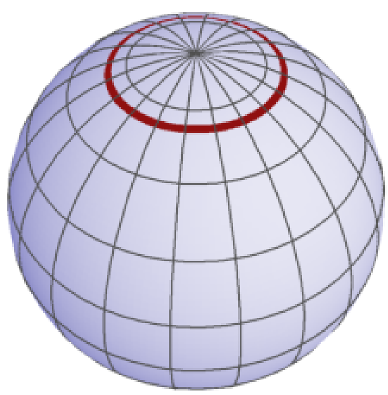
Memplot Data 3D

Sama seperti plot2d, plot3d menerima data. Untuk objek 3D, Anda perlu menyediakan matriks nilai x, y, dan z, atau tiga fungsi atau ekspresi fx(x,y), fy(x,y), fz(x,y).

$$\gamma(t,s) = (x(t,s), y(t,s), z(t,s))$$

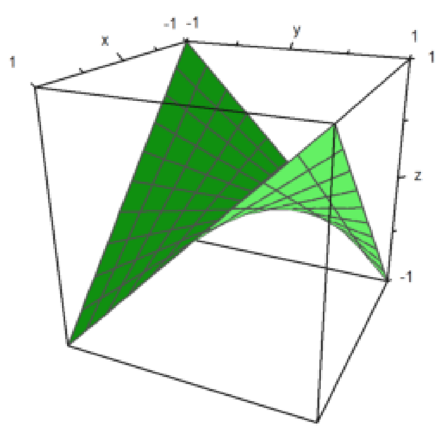
Karena x,y,z adalah matriks, kita mengasumsikan bahwa (t,s) berjalan melalui kotak persegi. Hasilnya, Anda dapat memplot gambar persegi panjang dalam ruang.
Anda dapat menggunakan bahasa matriks Euler untuk menghasilkan koordinat secara efektif.
Pada contoh berikut, kita menggunakan vektor nilai t dan vektor kolom nilai s untuk memparameterkan permukaan bola. Pada gambar kita dapat menandai daerah, dalam kasus kita daerah kutub.

```
>t=linspace(0,2pi,180); s=linspace(-pi/2,pi/2,90)'; ...
>x=cos(s)*cos(t); y=cos(s)*sin(t); z=sin(s); ...
>plot3d(x,y,z,>hue, ...
>color=blue,<frame,grid=[10,20], ...
>values=s,contourcolor=red,level=[90°-24°;90°-22°], ...
>scale=1.4,height=50°):
```



Berikut ini adalah contoh, yang merupakan grafik suatu fungsi.

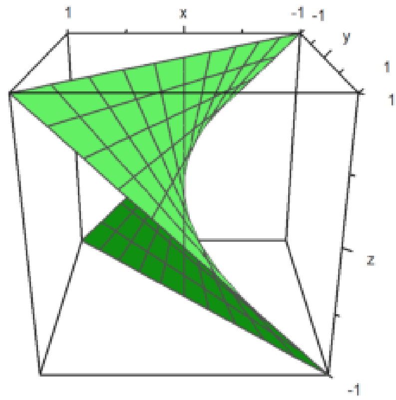
```
>t=-1:0.1:1; s=(-1:0.1:1)'; plot3d(t,s,t*s,grid=10):
```



Namun demikian, kita bisa membuat segala macam permukaan. Berikut ini adalah permukaan yang sama dengan suatu fungsi

$$x = y\,z$$

```
>plot3d(t*s,t,s,angle=180°,grid=10):
```



Dengan lebih banyak upaya, kita bisa menghasilkan banyak permukaan.
Dalam contoh berikut ini, kami membuat tampilan berbayang dari bola yang terdistorsi. Koordinat biasa untuk bola adalah

$$\gamma(t,s) = (\cos(t)\cos(s), \sin(t)\sin(s), \cos(s))$$

dengan

$$0 \le t \le 2\pi, \quad \frac{-\pi}{2} \le s \le \frac{\pi}{2}.$$

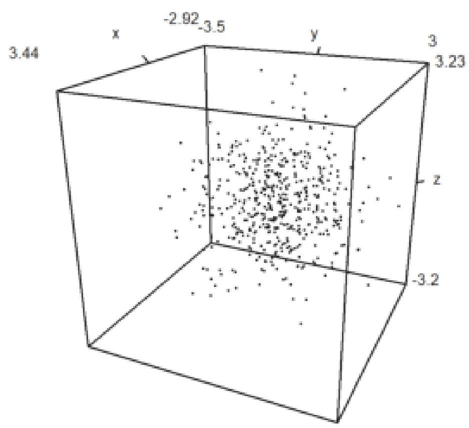
Kami mengurangi ini dengan sebuah faktor

$$d(t,s) = \frac{\cos(4t)+\cos(8s)}{4}.$$

```
>t=linspace(0,2pi,320); s=linspace(-pi/2,pi/2,160)'; ...
>d=1+0.2*(cos(4*t)+cos(8*s)); ...
>plot3d(cos(t)*cos(s)*d,sin(t)*cos(s)*d,sin(s)*d,hue=1, ...
>  light=[1,0,1],frame=0,zoom=5):
```

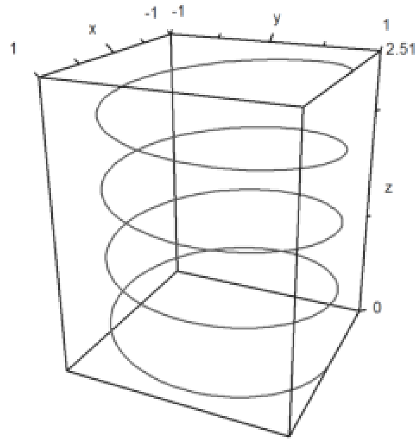
Tentu saja, awan titik juga dimungkinkan. Untuk memplot data titik dalam ruang, kita membutuhkan tiga vektor untuk koordinat titik.
Gaya-gayanya sama seperti pada plot2d dengan points=true;

```
>n=500;  ...
>  plot3d(normal(1,n),normal(1,n),normal(1,n),points=true,style="."):
```

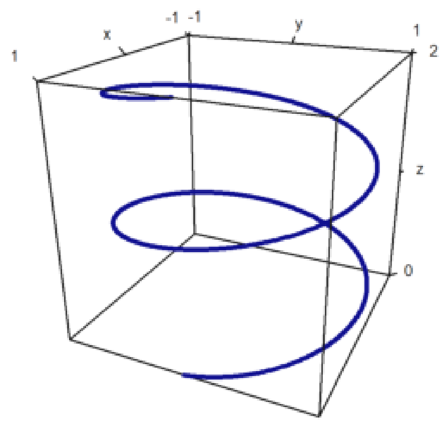


Anda juga dapat memplot kurva dalam bentuk 3D. Dalam hal ini, akan lebih mudah untuk menghitung titik-titik kurva. Untuk kurva pada bidang, kami menggunakan urutan koordinat dan parameter wire = true.

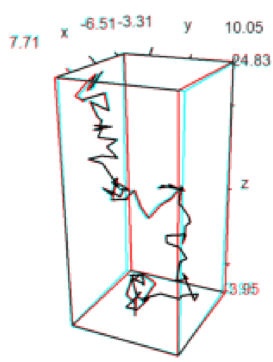
```
>t=linspace(0,8pi,500); ...
>plot3d(sin(t),cos(t),t/10,>wire,zoom=3): //wire tuh kayak pir
```




```
>t=linspace(0,4pi,1000); plot3d(cos(t),sin(t),t/2pi,>wire, ...
>linewidth=3,wirecolor=blue):
```

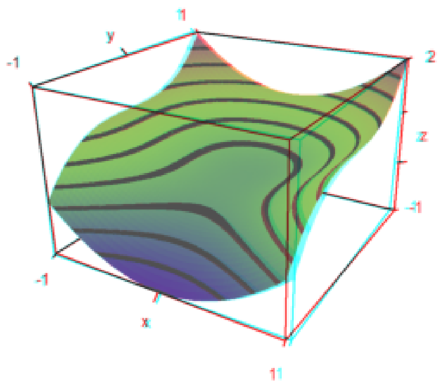



```
>X=cumsum(normal(3,100)); ...
> plot3d(X[1],X[2],X[3],>anaglyph,>wire): //tiap dienter, tampilannya berubah
```



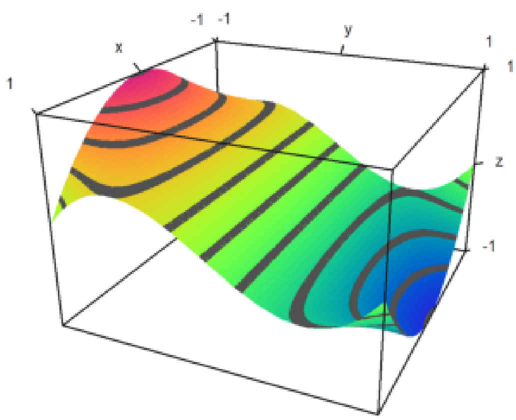
EMT juga dapat membuat plot dalam mode anaglyph. Untuk melihat plot semacam itu, Anda memerlukan kacamata merah/cyan.

```
> plot3d("x^2+y^3",>anaglyph,>contour,>spectral,angle=30°):
```



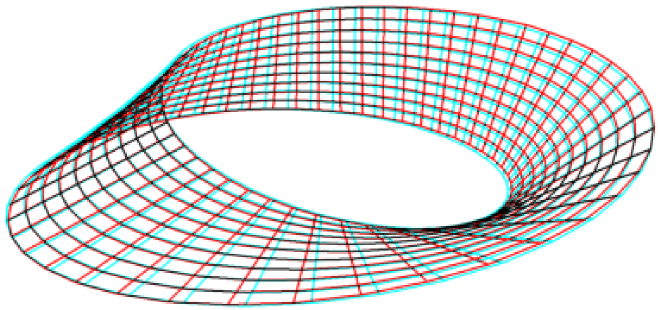
Sering kali, skema warna spektral digunakan untuk plot. Hal ini menekankan ketinggian fungsi.

```
>plot3d("x^2*y^3-y",>spectral,>contour,zoom=3.2):
```



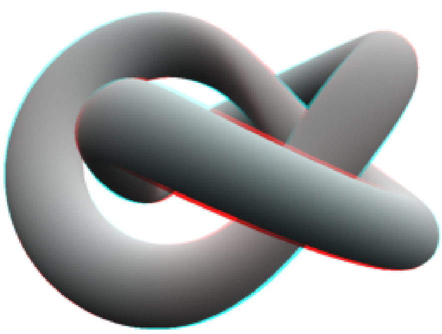
Euler juga dapat memplot permukaan yang diparameterkan, ketika parameternya adalah nilai x-, y-, dan z-dari gambar kisi-kisi persegi panjang dalam ruang.
Untuk demo berikut ini, kami menyiapkan parameter u- dan v-, dan menghasilkan koordinat ruang dari parameter ini.

```
>u=linspace(-1,1,10); v=linspace(0,2*pi,50)'; ...
>X=(3+u*cos(v/2))*cos(v); Y=(3+u*cos(v/2))*sin(v); Z=u*sin(v/2); ...
>plot3d(X,Y,Z,>anaglyph,<frame,>wire,scale=2.3):
```



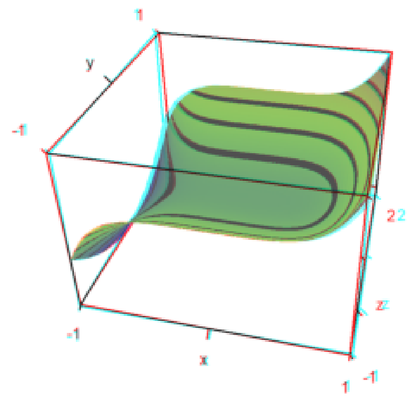
Berikut ini contoh yang lebih rumit, yang tampak megah dengan kacamata merah/cyan.

```
>u:=linspace(-pi,pi,160); v:=linspace(-pi,pi,400)';  ...
>x:=(4*(1+.25*sin(3*v))+cos(u))*cos(2*v); ...
>y:=(4*(1+.25*sin(3*v))+cos(u))*sin(2*v); ...
> z=sin(u)+2*cos(3*v); ...
>plot3d(x,y,z,frame=0,scale=1.5,hue=1,light=[1,0,-1],zoom=2.8,>anaglyph):
```



Contoh:

```
>plot3d("x^5+y^2",>contour,>spectral,angle=30°,>user,>anaglyph):
```

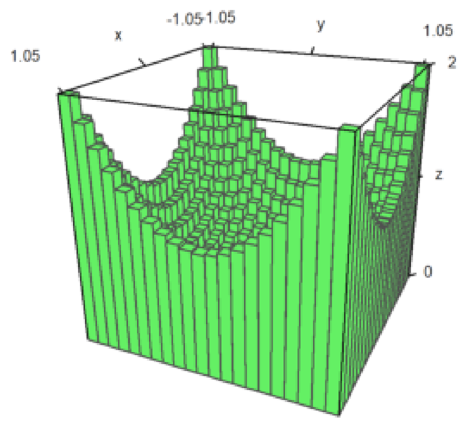


Plot Statistik

Plot batang juga dapat digunakan. Untuk ini, kita harus menyediakan
- x: vektor baris dengan n+1 elemen
- y: vektor kolom dengan n+1 elemen
- z: matriks nilai berukuran nxn.

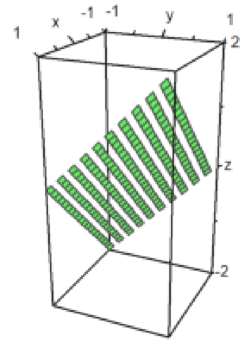
z dapat lebih besar, tetapi hanya nilai nxn yang akan digunakan.
Pada contoh, pertama-tama kita menghitung nilainya. Kemudian kita sesuaikan x dan y, sehingga vektor berada di tengah-tengah nilai yang digunakan.

```
>x=-1:0.1:1; y=x'; z=x^2+y^2; ...
>xa=(x|1.1)-0.05; ya=(y_1.1)-0.05; ...
>plot3d(xa,ya,z,bar=true):
```



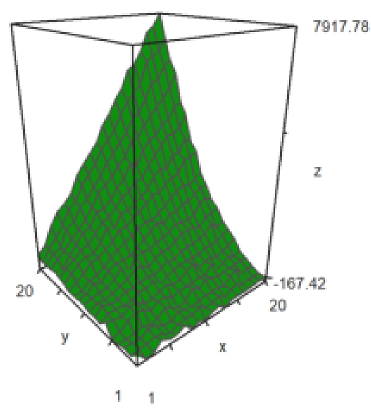
Dimungkinkan untuk membagi plot permukaan menjadi dua bagian atau lebih.

```
>x=-1:0.1:1; y=x'; z=x+y; d=zeros(size(x)); ...
>plot3d(x,y,z,disconnect=2:2:20):
```

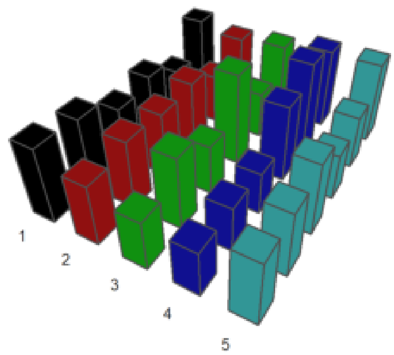


Jika memuat atau menghasilkan matriks data M dari file dan perlu memplotnya dalam 3D, Anda dapat menskalakan matriks ke [-1,1] dengan scale(M), atau menskalakan matriks dengan >zscale. Hal ini dapat dikombinasikan dengan faktor penskalaan individual yang diterapkan sebagai tambahan.

```
>i=1:20; j=i'; ...
>plot3d(i*j^2+100*normal(20,20),>zscale,scale=[1,1,1.5],angle=-40°,zoom=1.8):
```

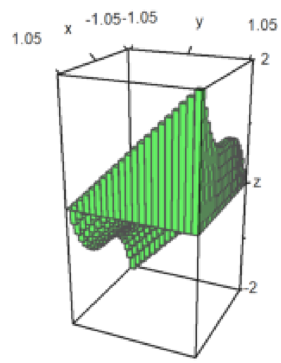



```
>Z=intrandom(5,100,6); v=zeros(5,6); ...
>loop 1 to 5; v[#]=getmultiplicities(1:6,Z[#]); end; ...
>columnsplot3d(v',scols=1:5,ccols=[1:5]):
```



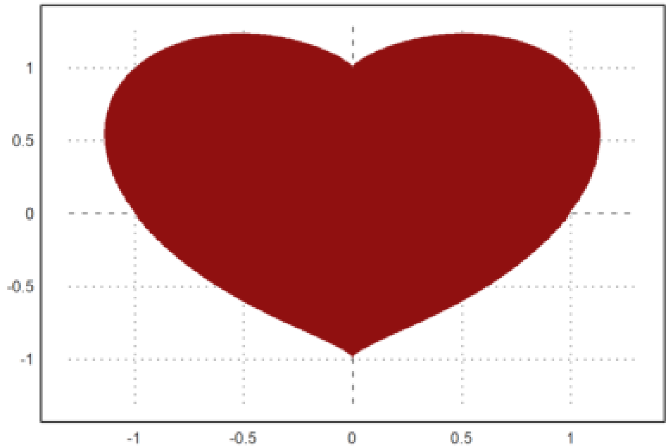
Contoh:

```
>x=-1:0.1:1; y=x'; z=x^3+y; ...
>xa=(x|1.1)-0.05; ya=(y_1.1)-0.05; ...
>plot3d(xa,ya,z,bar=true):
```



Permukaan Benda Putar

```
>plot2d("(x^2+y^2-1)^3-x^2*y^3",r=1.3, ...
>style="#",color=red,<outline, ...
>level=[-2;0],n=100):
```




```
>ekspresi &= (x^2+y^2-1)^3-x^2*y^3; $ekspresi
```

$$\left(y^2+x^2-1\right)^3-x^2\,y^3$$

Kami ingin memutar kurva jantung di sekitar sumbu y. Inilah ekspresi yang mendefinisikan jantung:

$$f(x,y)=(x^2+y^2-1)^3-x^2.y^3.$$

Selanjutnya kita atur

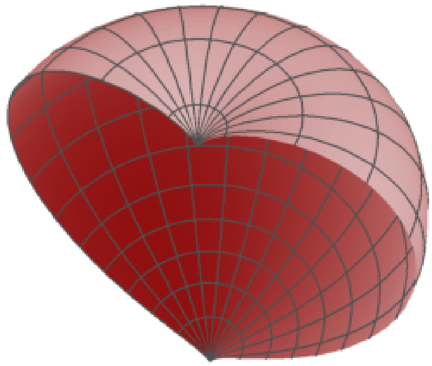
$$x=r.cos(a),\quad y=r.sin(a).$$

```
>function fr(r,a) &= ekspresi with [x=r*cos(a),y=r*sin(a)] | trigreduce; $fr(r,a)
```

$$\left(r^2-1\right)^3+\frac{\left(\sin\left(5\,a\right)-\sin\left(3\,a\right)-2\,\sin a\right)\,r^5}{16}$$

Hal ini memungkinkan untuk mendefinisikan fungsi numerik, yang menyelesaikan untuk r, jika a diberikan. Dengan fungsi tersebut kita dapat memplotkan jantung yang diputar sebagai permukaan parametrik.

```
>function map f(a) := bisect("fr",0,2;a); ...
>t=linspace(-pi/2,pi/2,100); r=f(t);  ...
>s=linspace(pi,2pi,100)'; ...
>plot3d(r*cos(t)*sin(s),r*cos(t)*cos(s),r*sin(t), ...
>>hue,<frame,color=red,zoom=4,amb=0,max=0.7,grid=12,height=50°):
```

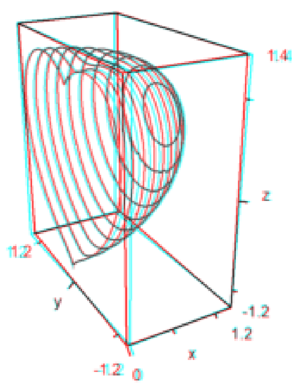


Berikut ini adalah plot 3D dari gambar di atas yang diputar mengelilingi sumbu-z. Kami mendefinisikan fungsi, yang menggambarkan objek.

```
>function f(x,y,z) ...
```

```
  r=x^2+y^2;
  return (r+z^2-1)^3-r*z^3;
   endfunction
```

```
>plot3d("f(x,y,z)", ...
>xmin=0,xmax=1.2,ymin=-1.2,ymax=1.2,zmin=-1.2,zmax=1.4, ...
>implicit=1,angle=-30°,zoom=2.5,n=[10,100,60],>anaglyph):
```




```
>
```

Plot 3D Khusus

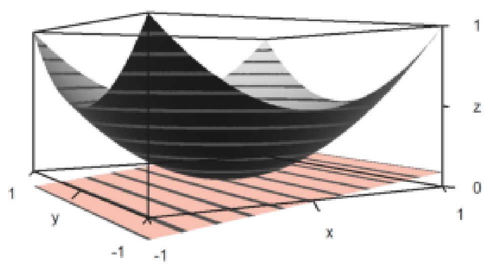
Fungsi plot3d memang bagus untuk dimiliki, tetapi tidak memenuhi semua kebutuhan. Selain rutinitas yang lebih mendasar, Anda juga bisa mendapatkan plot berbingkai dari objek apa pun yang Anda sukai.
Meskipun Euler bukan program 3D, namun dapat menggabungkan beberapa objek dasar. Kami mencoba memvisualisasikan parabola dan garis singgungnya.

```
>function myplot ...
```

```
    y=-1:0.01:1; x=(-1:0.01:1)';
    plot3d(x,y,0.2*(x-0.1)/2,<scale,<frame,>hue, ..
      hues=0.5,>contour,color=orange);
    h=holding(1);
    plot3d(x,y,(x^2+y^2)/2,<scale,<frame,>contour,>hue);
    holding(h);
  endfunction
```

Sekarang framedplot() menyediakan frame, dan mengatur tampilan.

```
>framedplot("myplot",[-1,1,-1,1,0,1],height=0,angle=-30°, ...
>  center=[0,0,-0.7],zoom=3):
```

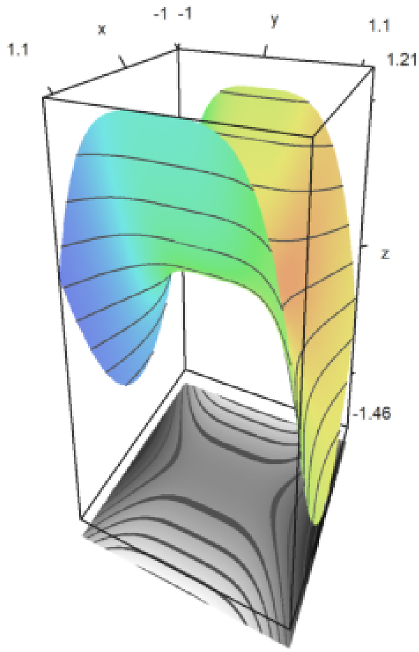


Dengan cara yang sama, Anda dapat memplot bidang kontur secara manual. Perhatikan bahwa plot3d() mengatur jendela ke fullwindow() secara default, namun plotcontourplane() mengasumsikannya.

```
>x=-1:0.02:1.1; y=x'; z=x^2-y^4;
>function myplot (x,y,z) ...
```

```
    zoom(2);
    wi=fullwindow();
    plotcontourplane(x,y,z,level="auto",<scale);
    plot3d(x,y,z,>hue,<scale,>add,color=white,level="thin");
    window(wi);
    reset();
  endfunction
```

```
>myplot(x,y,z):
```

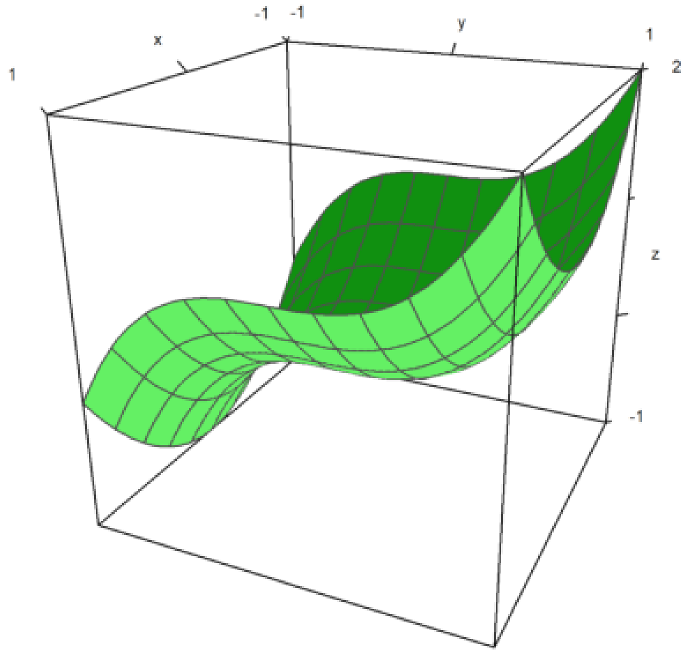



```
>
```

Animasi

Euler dapat menggunakan frame untuk melakukan pra-komputasi animasi.
Salah satu fungsi yang memanfaatkan teknik ini adalah rotate. Fungsi ini dapat mengubah sudut pandang dan menggambar ulang plot 3D. Fungsi ini memanggil addpage() untuk setiap plot baru. Akhirnya fungsi ini menganimasikan plot tersebut.
Silakan pelajari sumber dari rotate untuk melihat lebih detail.

```
>function testplot () := plot3d("x^2+y^3"); ...
>rotate("testplot"); testplot():
```



Menggambar Povray

Dengan bantuan file Euler povray.e, Euler dapat menghasilkan file Povray. Hasilnya sangat bagus untuk dilihat.
Anda perlu menginstal Povray (32bit atau 64bit) dari http://www.povray.org/,
dan letakkan sub-direktori "bin" dari Povray ke dalam jalur lingkungan, atau atur variabel "defaultpovray" dengan jalur lengkap yang mengarah ke "pvengine.exe".
Antarmuka Povray dari Euler menghasilkan file Povray di direktori home pengguna, dan memanggil Povray untuk mengurai file-file ini. Nama file default adalah current.pov, dan direktori defaultnya adalah eulerhome(), biasanya c:\Users\Username\Euler. Povray menghasilkan file PNG, yang dapat dimuat oleh Euler ke dalam buku catatan. Untuk membersihkan berkas-berkas ini, gunakan povclear().
Fungsi pov3d memiliki semangat yang sama dengan plot3d. Fungsi ini dapat menghasilkan grafik dari sebuah fungsi f(x,y), atau sebuah permukaan dengan koordinat X,Y,Z dalam bentuk matriks, termasuk garis-garis level yang bersifat opsional. Fungsi ini memulai raytracer secara otomatis, dan memuat adegan ke dalam notebook Euler.
Selain pov3d(), ada banyak fungsi yang menghasilkan objek Povray. Fungsi-fungsi ini mengembalikan string, yang berisi kode Povray untuk objek. Untuk menggunakan fungsi-fungsi ini, mulai file Povray dengan povstart(). Kemudian gunakan writeln(...) untuk menulis objek ke file scene. Terakhir, akhiri file dengan povend(). Secara default, raytracer akan dimulai, dan PNG akan dimasukkan ke dalam buku catatan Euler.
Fungsi objek memiliki parameter yang disebut "look", yang membutuhkan string dengan kode povray untuk tekstur dan hasil akhir objek. Fungsi povlook() dapat digunakan untuk menghasilkan string ini. Fungsi ini memiliki parameter untuk warna, transparansi, Phong Shading, dll.
Perhatikan bahwa Povray universe memiliki sistem koordinat lain. Antarmuka ini menerjemahkan semua koordinat ke sistem Povray. Jadi Anda dapat tetap berpikir dalam sistem koordinat Euler dengan z yang mengarah vertikal ke atas, dan sumbu x, y, z di tangan kanan.
Anda perlu memuat file povray.

```
>load povray;
```

Pastikan direktori bin povray berada di dalam path. Jika tidak, edit variabel berikut sehingga berisi jalur ke povray yang dapat dieksekusi.

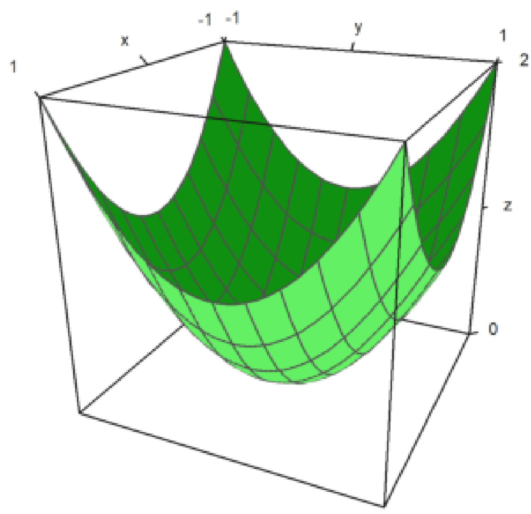
```
>defaultpovray="C:\Program Files\POV-Ray\v3.7\bin\pvengine.exe"
```

```
C:\Program Files\POV-Ray\v3.7\bin\pvengine.exe
```

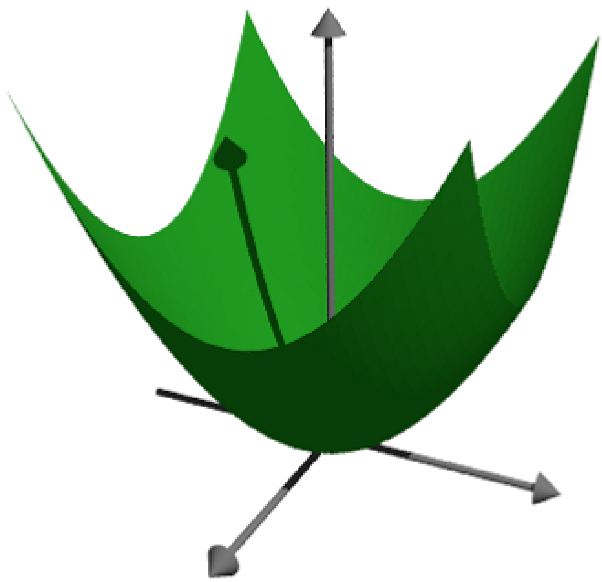
Sebagai kesan pertama, kita merencanakan sebuah fungsi sederhana. Perintah berikut ini menghasilkan file povray di direktori pengguna Anda, dan menjalankan Povray untuk melacak sinar pada file ini.

Jika Anda memulai perintah berikut, GUI Povray akan terbuka, menjalankan file, dan menutup secara otomatis. Karena alasan keamanan, Anda akan ditanya, apakah Anda ingin mengizinkan file exe dijalankan. Anda dapat menekan cancel untuk menghentikan pertanyaan lebih lanjut. Anda mungkin harus menekan OK pada jendela Povray untuk mengetahui dialog awal Povray.

```
>plot3d("x^2+y^2",zoom=2):
```

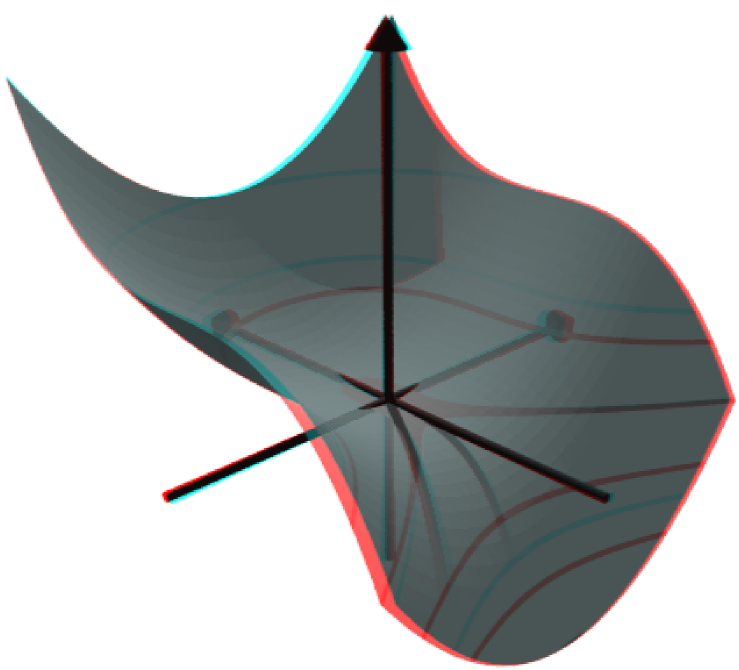



```
>pov3d("x^2+y^2",zoom=3);
```



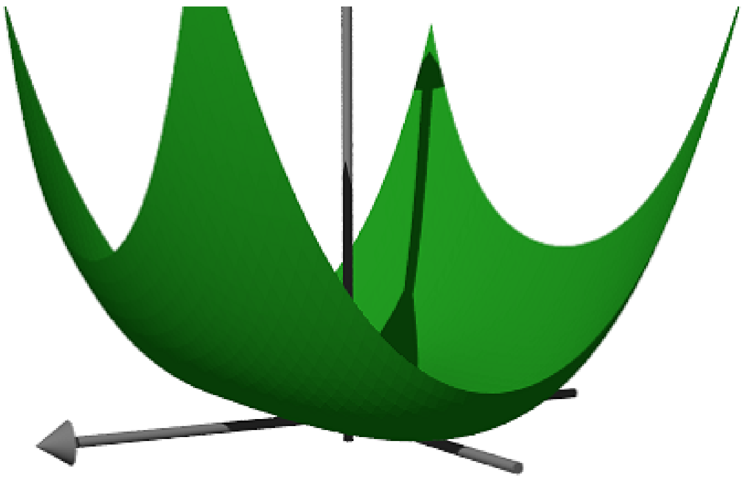
Kita dapat membuat fungsi menjadi transparan dan menambahkan hasil akhir lainnya. Kita juga dapat menambahkan garis level ke plot fungsi.

```
>pov3d("x^2+y^3",axiscolor=red,angle=-45°,>anaglyph, ...
>   look=povlook(cyan,0.2),level=-1:0.5:1,zoom=3.8);
```



Kadang-kadang perlu untuk mencegah penskalaan fungsi, dan menskalakan fungsi dengan tangan.
Kami memplot kumpulan titik pada bidang kompleks, di mana hasil kali jarak ke 1 dan -1 sama dengan 1.

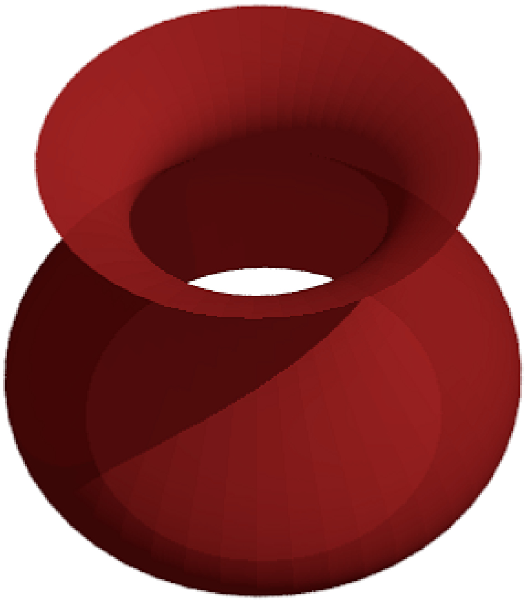
```
>pov3d("((x-1)^2+y^2)*((x+1)^2+y^2)/40",r=2, ...
>  angle=-120°,level=1/40,dlevel=0.005,light=[-1,1,1],height=10°,n=50, ...
>  <fscale,zoom=3.8);
```



Merencanakan dengan Koordinat

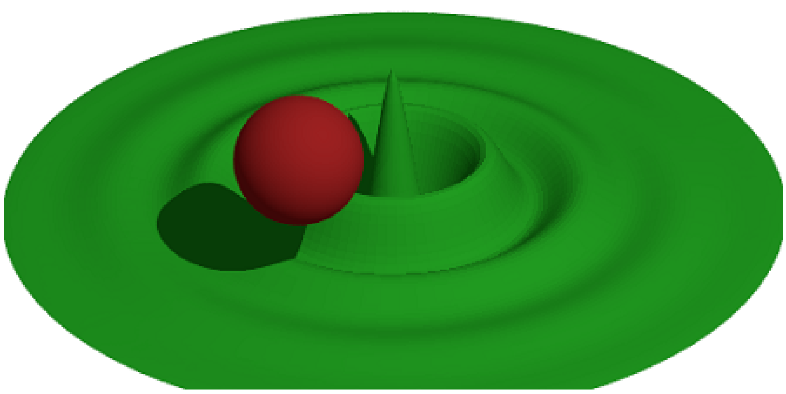
Sebagai pengganti fungsi, kita dapat membuat plot dengan koordinat. Seperti pada plot3d, kita membutuhkan tiga matriks untuk mendefinisikan objek.
Pada contoh, kita memutar sebuah fungsi pada sumbu z.

```
>function f(x) := x^3-x+1; ...
>x=-1:0.01:1; t=linspace(0,2pi,50)'; ...
>Z=x; X=cos(t)*f(x); Y=sin(t)*f(x); ...
>pov3d(X,Y,Z,angle=40°,look=povlook(red,0.1),height=50°,axis=0,zoom=4,light=[10,5,15]);
```



Pada contoh berikut, kita memplot gelombang teredam. Kami menghasilkan gelombang dengan bahasa matriks Euler.
Kami juga menunjukkan, bagaimana objek tambahan dapat ditambahkan ke adegan pov3d. Untuk pembuatan objek, lihat contoh berikut. Perhatikan bahwa plot3d menskalakan plot, sehingga sesuai dengan kubus satuan.

```
>r=linspace(0,1,80); phi=linspace(0,2pi,80)'; ...
>x=r*cos(phi); y=r*sin(phi); z=exp(-5*r)*cos(8*pi*r)/3;  ...
>pov3d(x,y,z,zoom=6,axis=0,height=30°,add=povsphere([0.5,0,0.25],0.15,povlook(red)), ...
>  w=500,h=300);
```



Dengan metode bayangan canggih Povray, hanya sedikit titik yang bisa menghasilkan permukaan yang sangat halus. Hanya pada batas-batas dan bayangan, trik ini bisa terlihat jelas.
Untuk itu, kita perlu menambahkan vektor normal di setiap titik matriks.

```
>Z &= x^2*y^3
```

```
 2  3
x  y
```

Persamaan permukaannya adalah [x,y,Z]. Kami menghitung dua turunan terhadap x dan y dari persamaan ini dan mengambil hasil perkalian silang sebagai normal.

```
>dx &= diff([x,y,Z],x); dy &= diff([x,y,Z],y);
```

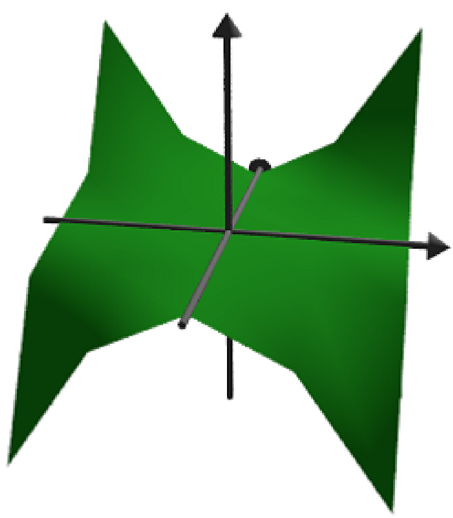
Kami mendefinisikan normal sebagai hasil kali silang dari turunan ini, dan mendefinisikan fungsi koordinat.

```
>N &= crossproduct(dx,dy); NX &= N[1]; NY &= N[2]; NZ &= N[3]; N,
```

```
           3         2  2
[- 2 x y , - 3 x  y , 1]
```

Kami hanya menggunakan 25 poin.

```
>x=-1:0.5:1; y=x';
>pov3d(x,y,Z(x,y),angle=10°, ...
>  xv=NX(x,y),yv=NY(x,y),zv=NZ(x,y),<shadow);
```



Berikut ini adalah simpul Trefoil yang dibuat oleh A. Busser di Povray. Ada versi yang lebih baik dari ini dalam contoh.
See: Examples\Trefoil Knot | Trefoil Knot
Untuk tampilan yang bagus dengan tidak terlalu banyak titik, kita tambahkan vektor normal di sini. Kita menggunakan Maxima untuk menghitung normal untuk kita. Pertama, tiga fungsi untuk koordinat sebagai ekspresi simbolik.

```
>X &= ((4+sin(3*y))+cos(x))*cos(2*y); ...
>Y &= ((4+sin(3*y))+cos(x))*sin(2*y); ...
>Z &= sin(x)+2*cos(3*y);
```

Kemudian dua vektor turunan terhadap x dan y.

```
>dx &= diff([X,Y,Z],x); dy &= diff([X,Y,Z],y);
```

Sekarang yang normal, yang merupakan produk silang dari dua turunan.

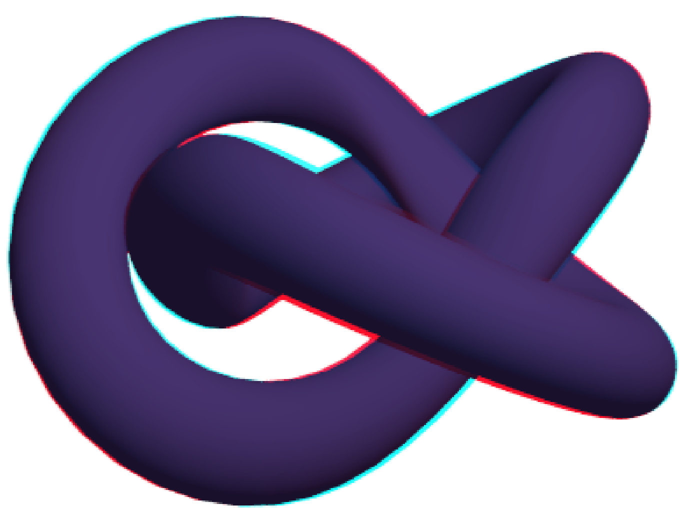
```
>dn &= crossproduct(dx,dy);
```

Kami sekarang mengevaluasi semua ini secara numerik.

```
>x:=linspace(-%pi,%pi,40); y:=linspace(-%pi,%pi,100)';
```

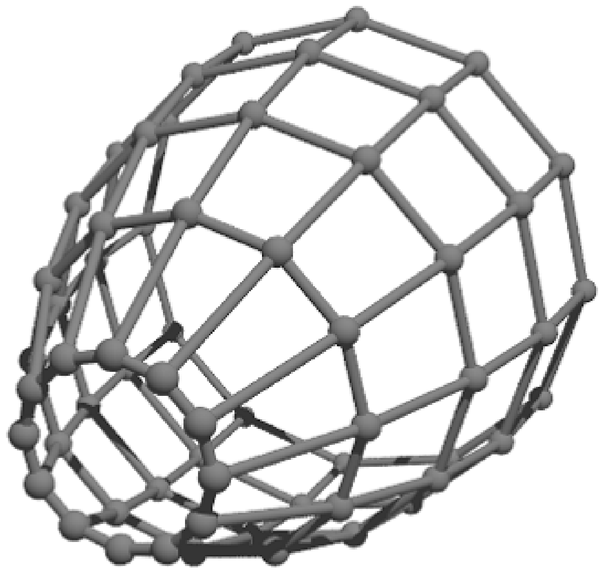
Vektor normal adalah evaluasi dari ekspresi simbolik dn[i] untuk i=1,2,3. Sintaks untuk ini adalah &"ekspresi"(parameter). Ini adalah sebuah alternatif dari metode pada contoh sebelumnya, di mana kita mendefinisikan ekspresi simbolik NX, NY, NZ terlebih dahulu.

```
>pov3d(X(x,y),Y(x,y),Z(x,y),>anaglyph,axis=0,zoom=5,w=450,h=350, ...
>  <shadow,look=povlook(blue), ...
>  xv=&"dn[1]"(x,y), yv=&"dn[2]"(x,y), zv=&"dn[3]"(x,y));
```



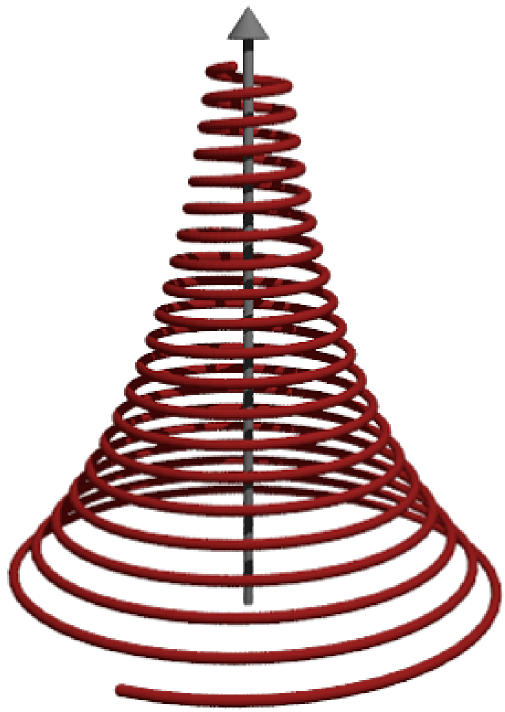
Kami juga dapat menghasilkan kisi-kisi dalam bentuk 3D.

```
>povstart(zoom=4); ...
>x=-1:0.5:1; r=1-(x+1)^2/6; ...
>t=(0°:30°:360°)'; y=r*cos(t); z=r*sin(t); ...
>writeln(povgrid(x,y,z,d=0.02,dballs=0.05)); ...
>povend();
```



Dengan povgrid(), kurva dapat dibuat.

```
>povstart(center=[0,0,1],zoom=3.6); ...
>t=linspace(0,2,1000); r=exp(-t); ...
>x=cos(2*pi*10*t)*r; y=sin(2*pi*10*t)*r; z=t; ...
>writeln(povgrid(x,y,z,povlook(red))); ...
>writeAxis(0,2,axis=3); ...
>povend();
```



Objek Povray

Di atas, kami menggunakan pov3d untuk memplot permukaan. Antarmuka povray di Euler juga dapat menghasilkan objek Povray. Objek-objek ini disimpan sebagai string di Euler, dan perlu ditulis ke file Povray.
Kita memulai output dengan povstart().

```
>povstart(zoom=4);
```

Pertama, kita mendefinisikan tiga silinder, dan menyimpannya dalam bentuk string di Euler.
Fungsi povx() dll. hanya mengembalikan vektor [1,0,0], yang dapat digunakan sebagai gantinya.

```
>c1=povcylinder(-povx,povx,1,povlook(red)); ...
>c2=povcylinder(-povy,povy,1,povlook(yellow)); ...
>c3=povcylinder(-povz,povz,1,povlook(blue)); ...
```

String berisi kode Povray, yang tidak perlu kita pahami pada saat itu.

```
>c2
```

```
cylinder { <0,0,-1>, <0,0,1>, 1
 texture { pigment { color rgb <0.941176,0.941176,0.392157> }  }
 finish { ambient 0.2 }
 }
```

Seperti yang Anda lihat, kami menambahkan tekstur ke objek dalam tiga warna berbeda.
Hal ini dilakukan dengan povlook(), yang mengembalikan sebuah string dengan kode Povray yang relevan. Kita dapat menggunakan warna default Euler, atau menentukan warna kita sendiri. Kita juga dapat menambahkan transparansi, atau mengubah cahaya sekitar.

```
>povlook(rgb(0.1,0.2,0.3),0.1,0.5)
```

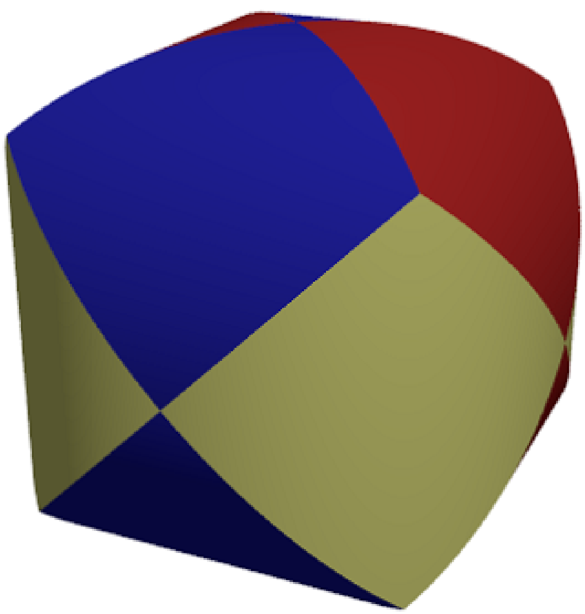
```
texture { pigment { color rgbf <0.101961,0.2,0.301961,0.1> }  }
finish { ambient 0.5 }
```

Sekarang kita mendefinisikan objek perpotongan, dan menulis hasilnya ke file.

```
>writeln(povintersection([c1,c2,c3]));
```

Perpotongan tiga silinder sulit dibayangkan, jika Anda belum pernah melihatnya.

```
>povend;
```

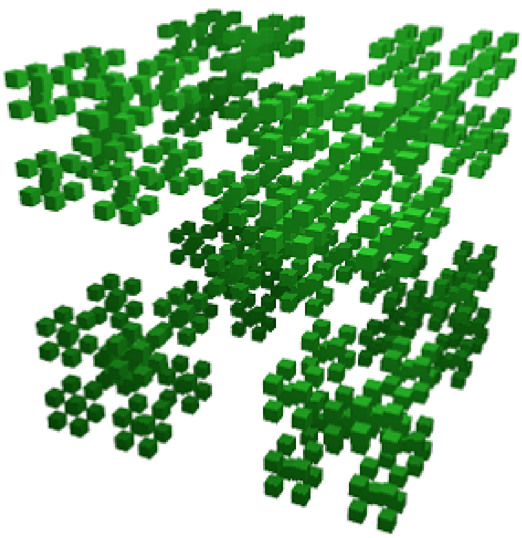


Fungsi-fungsi berikut ini menghasilkan fraktal secara rekursif.
Fungsi pertama menunjukkan, bagaimana Euler menangani objek Povray sederhana. Fungsi povbox() mengembalikan sebuah string, yang berisi koordinat kotak, tekstur dan hasil akhir.

```
>function onebox(x,y,z,d) := povbox([x,y,z],[x+d,y+d,z+d],povlook());
>function fractal (x,y,z,h,n) ...
```

```
    if n==1 then writeln(onebox(x,y,z,h));
    else
      h=h/3;
      fractal(x,y,z,h,n-1);
      fractal(x+2*h,y,z,h,n-1);
      fractal(x,y+2*h,z,h,n-1);
      fractal(x,y,z+2*h,h,n-1);
      fractal(x+2*h,y+2*h,z,h,n-1);
      fractal(x+2*h,y,z+2*h,h,n-1);
      fractal(x,y+2*h,z+2*h,h,n-1);
      fractal(x+2*h,y+2*h,z+2*h,h,n-1);
      fractal(x+h,y+h,z+h,h,n-1);
    endif;
  endfunction
```

```
>povstart(fade=10,<shadow);
>fractal(-1,-1,-1,2,4);
>povend();
```



Perbedaan memungkinkan pemotongan satu objek dari objek lainnya. Seperti persimpangan, ada bagian dari objek CSG Povray.

```
>povstart(light=[5,-5,5],fade=10);
```

Untuk demonstrasi ini, kita mendefinisikan sebuah objek di Povray, alih-alih menggunakan string di Euler. Definisi akan langsung dituliskan ke file.
Koordinat kotak -1 berarti [-1,-1,-1].

```
>povdefine("mycube",povbox(-1,1));
```

Kita dapat menggunakan objek ini dalam povobject(), yang mengembalikan sebuah string seperti biasa.

```
>c1=povobject("mycube",povlook(red));
```

Kami menghasilkan kubus kedua, dan memutar serta menskalakannya sedikit.

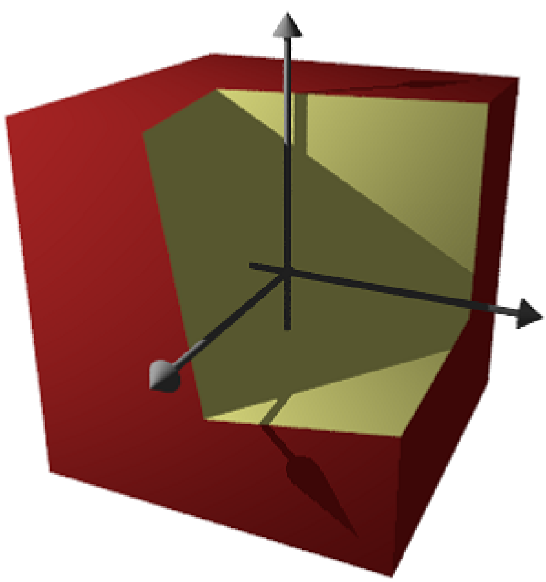
```
>c2=povobject("mycube",povlook(yellow),translate=[1,1,1], ...
>  rotate=xrotate(10°)+yrotate(10°), scale=1.2);
```

Kemudian kita ambil selisih dari kedua objek tersebut.

```
>writeln(povdifference(c1,c2));
```

Sekarang tambahkan tiga sumbu.

```
>writeAxis(-1.2,1.2,axis=1); ...
>writeAxis(-1.2,1.2,axis=2); ...
>writeAxis(-1.2,1.2,axis=4); ...
>povend();
```



Fungsi Implisit

Povray dapat memplot himpunan di mana f(x,y,z)=0, seperti parameter implisit di plot3d. Namun, hasilnya terlihat jauh lebih baik.
Sintaks untuk fungsi-fungsi tersebut sedikit berbeda. Anda tidak dapat menggunakan output dari ekspresi Maxima atau Euler.

$$((x^2+y^2-c^2)^2+(z^2-1)^2)*((y^2+z^2-c^2)^2+(x^2-1)^2)*((z^2+x^2-c^2)^2+(y^2-1)^2)=d$$

```
>povstart(angle=70°,height=50°,zoom=4);
>c=0.1; d=0.1; ...
>writeln(povsurface("(pow(pow(x,2)+pow(y,2)-pow(c,2),2)+pow(pow(z,2)-1,2))*(pow(pow(y,2)+p
>povend();
```

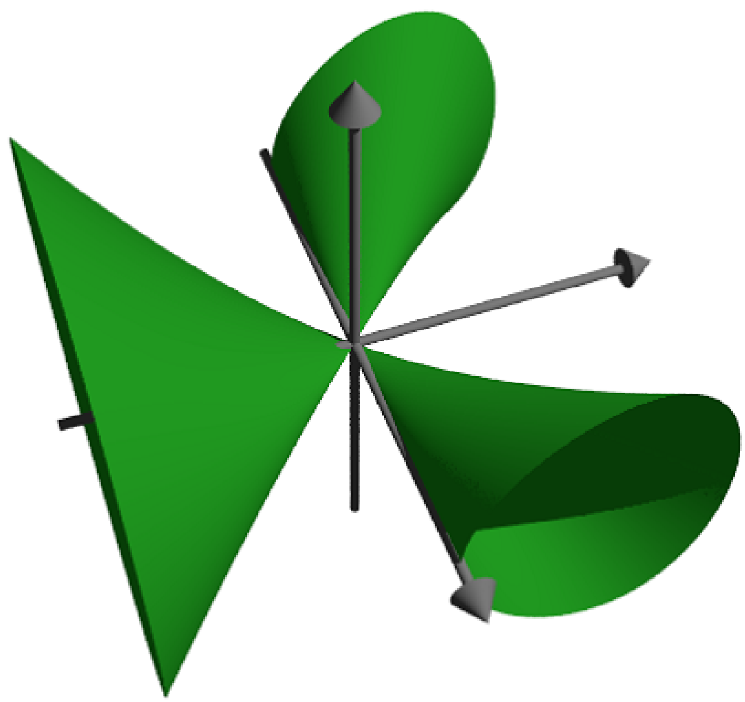
```
Error : Povray error!

Error generated by error() command

povray:
    error("Povray error!");
Try "trace errors" to inspect local variables after errors.
povend:
    povray(file,w,h,aspect,exit);
```

```
>povstart(angle=25°,height=10°);
>writeln(povsurface("pow(x,2)+pow(y,2)*pow(z,2)-1",povlook(blue),povbox(-2,2,"")));
>povend();
```

```
>povstart(angle=70°,height=50°,zoom=4);
```

Membuat permukaan implisit. Perhatikan sintaks yang berbeda dalam ekspresi.

```
>writeln(povsurface("pow(x,2)*y-pow(y,3)-pow(z,2)",povlook(green))); ...
>writeAxes(); ...
>povend();
```



Objek Jaring

Pada contoh ini, kami menunjukkan cara membuat objek mesh, dan menggambarnya dengan informasi tambahan.
Kami ingin memaksimalkan xy di bawah kondisi x+y = 1 dan mendemonstrasikan sentuhan tangensial dari garis level.

```
>povstart(angle=-10°,center=[0.5,0.5,0.5],zoom=7);
```

Kita tidak dapat menyimpan objek dalam sebuah string seperti sebelumnya, karena ukurannya terlalu besar. Jadi kita mendefinisikan objek dalam file Povray menggunakan declare. Fungsi povtriangle() melakukan hal ini secara otomatis. Fungsi ini dapat menerima vektor normal seperti halnya pov3d().
Berikut ini mendefinisikan objek mesh, dan menuliskannya langsung ke dalam file.

```
>x=0:0.02:1; y=x'; z=x*y; vx=-y; vy=-x; vz=1;
>mesh=povtriangles(x,y,z,"",vx,vy,vz);
```

Sekarang kita tentukan dua cakram, yang akan berpotongan dengan permukaan.

```
>cl=povdisc([0.5,0.5,0],[1,1,0],2); ...
>ll=povdisc([0,0,1/4],[0,0,1],2);
```

Tuliskan permukaan dikurangi kedua cakram.

```
>writeln(povdifference(mesh,povunion([cl,ll]),povlook(green)));
```

Tuliskan kedua perpotongan tersebut.

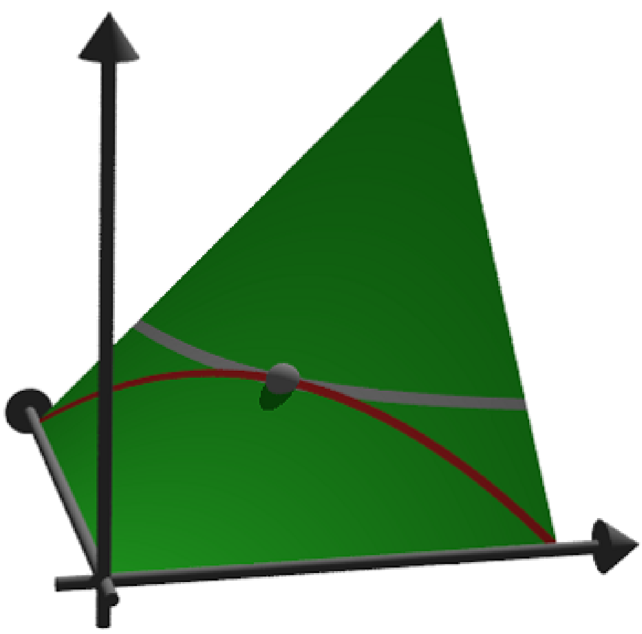
```
>writeln(povintersection([mesh,cl],povlook(red))); ...
>writeln(povintersection([mesh,ll],povlook(gray)));
```

Tulislah satu titik secara maksimal.

```
>writeln(povpoint([1/2,1/2,1/4],povlook(gray),size=2*defaultpointsize));
```

Tambahkan sumbu dan selesaikan.

```
>writeAxes(0,1,0,1,0,1,d=0.015); ...
>povend();
```



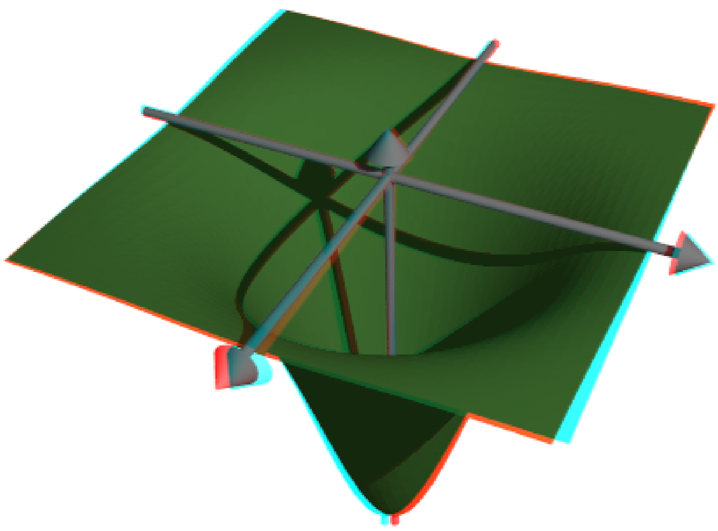
Anaglyph dalam Povray

Untuk menghasilkan anaglyph untuk kacamata merah/cyan, Povray harus dijalankan dua kali dari posisi kamera yang berbeda. Ini menghasilkan dua file Povray dan dua file PNG, yang dimuat dengan fungsi loadanaglyph().

Tentu saja, Anda membutuhkan kacamata merah/cyan untuk melihat contoh berikut dengan benar.

Fungsi pov3d() memiliki tombol sederhana untuk menghasilkan anaglyph.

```
>pov3d("-exp(-x^2-y^2)/2",r=2,height=45°,>anaglyph, ...
>  center=[0,0,0.5],zoom=3.5);
```



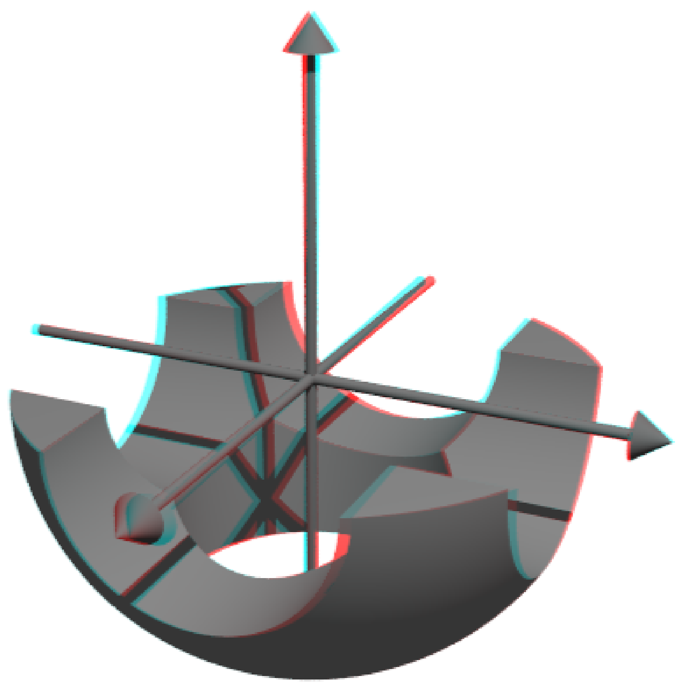
Jika Anda membuat scene dengan objek, Anda harus menempatkan pembuatan scene ke dalam suatu fungsi, dan menjalankannya dua kali dengan nilai yang berbeda untuk parameter anaglyph.

```
>function myscene ...
```

```
    s=povsphere(povc,1);
    cl=povcylinder(-povz,povz,0.5);
    clx=povobject(cl,rotate=xrotate(90°));
    cly=povobject(cl,rotate=yrotate(90°));
    c=povbox([-1,-1,0],1);
    un=povunion([cl,clx,cly,c]);
    obj=povdifference(s,un,povlook(red));
    writeln(obj);
    writeAxes();
  endfunction
```

Fungsi povanaglyph() melakukan semua ini. Parameter-parameternya seperti pada povstart() dan povend() yang digabungkan.

```
>povanaglyph("myscene",zoom=4.5);
```



Mendefinisikan Objek sendiri

Antarmuka povray Euler berisi banyak objek. Namun Anda tidak dibatasi pada objek-objek tersebut. Anda dapat membuat objek sendiri, yang menggabungkan objek-objek lain, atau objek yang benar-benar baru. Kami mendemonstrasikan sebuah torus. Perintah Povray untuk ini adalah "torus". Jadi kita mengembalikan sebuah string dengan perintah ini dan parameternya. Perhatikan bahwa torus selalu berpusat pada titik asal.

```
>function povdonat (r1,r2,look="") ...
```

```
    return "torus {"+r1+","+r2+look+"}";
  endfunction
```

Inilah torus pertama kita.

```
>t1=povdonat(0.8,0.2)
```

```
  torus {0.8,0.2}
```

Mari kita gunakan objek ini untuk membuat torus kedua, ditranslasikan dan diputar.

```
>t2=povobject(t1,rotate=xrotate(90°),translate=[0.8,0,0])
```

```
object { torus {0.8,0.2}
 rotate 90 *x
 translate <0.8,0,0>
 }
```

Sekarang, kita tempatkan semua benda ini ke dalam suatu pemandangan. Untuk tampilannya, kami menggunakan Phong Shading.

```
>povstart(center=[0.4,0,0],angle=0°,zoom=3.8,aspect=1.5); ...
>writeln(povobject(t1,povlook(green,phong=1))); ...
>writeln(povobject(t2,povlook(green,phong=1))); ...
```

```
>povend();
```

memanggil program Povray. Namun, jika terjadi kesalahan, program ini tidak menampilkan kesalahan. Oleh karena itu, Anda harus menggunakan

```
>povend(<exit);
```

jika ada yang tidak berhasil. Ini akan membiarkan jendela Povray tetap terbuka.

```
>povend(h=320,w=480);
```

Berikut adalah contoh yang lebih rumit. Kami menyelesaikan

$$Ax \leq b, \quad x \geq 0, \quad c.x \to \text{Max.}$$

dan menunjukkan titik-titik yang layak dan optimal dalam plot 3D.

```
>A=[10,8,4;5,6,8;6,3,2;9,5,6];
>b=[10,10,10]';
>c=[1,1,1];
```

First, let us check, if this example has a solution at all.

```
>x=simplex(A,b,c,>max,>check)'
```

```
[0,   1,   0.5]
```

Ya, benar.
Selanjutnya kita mendefinisikan dua objek. Yang pertama adalah pesawat

$$a \cdot x \leq b$$

```
>function oneplane (a,b,look="") ...
```

```
    return povplane(a,b,look)
  endfunction
```

Kemudian kita tentukan perpotongan semua setengah ruang dan kubus.

```
>function adm (A, b, r, look="") ...
```

```
    ol=[];
    loop 1 to rows(A); ol=ol|oneplane(A[#],b[#]); end;
    ol=ol|povbox([0,0,0],[r,r,r]);
    return povintersection(ol,look);
  endfunction
```

Sekarang kita bisa merencanakan adegan terseebut.

```
>povstart(angle=120°,center=[0.5,0.5,0.5],zoom=3.5); ...
>writeln(adm(A,b,2,povlook(green,0.4))); ...
>writeAxes(0,1.3,0,1.6,0,1.5); ...
```

Berikut ini adalah lingkaran di sekeliling optimal.

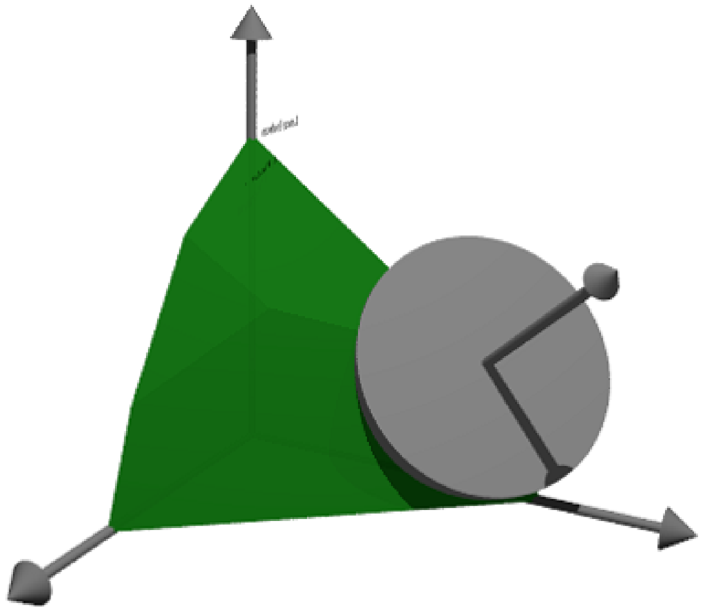
```
>writeln(povintersection([povsphere(x,0.5),povplane(c,c.x')], ...
>  povlook(red,0.9)));
```

Dan kesalahan pada arah yang optimal.

```
>writeln(povarrow(x,c*0.5,povlook(red)));
```

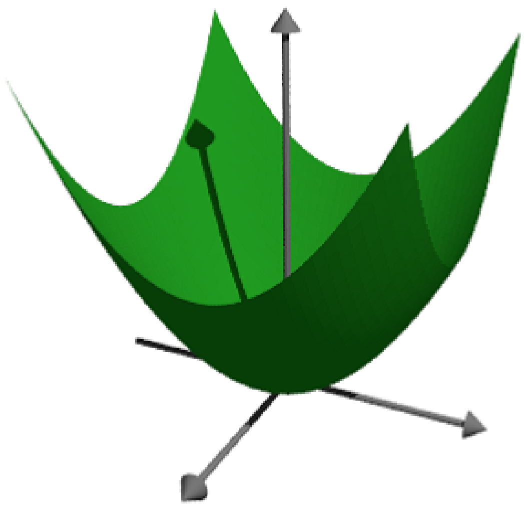
Kami menambahkan teks ke layar. Teks hanyalah sebuah objek 3D. Kita perlu menempatkan dan memutarnya sesuai dengan pandangan kita.

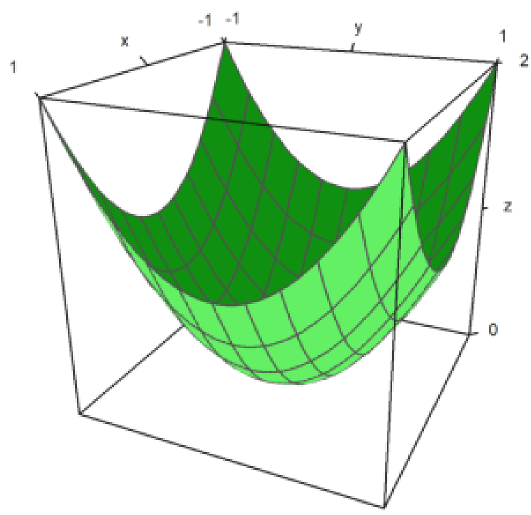
```
>writeln(povtext("Linear Problem",[0,0.2,1.3],size=0.05,rotate=5°)); ...
>povend();
```



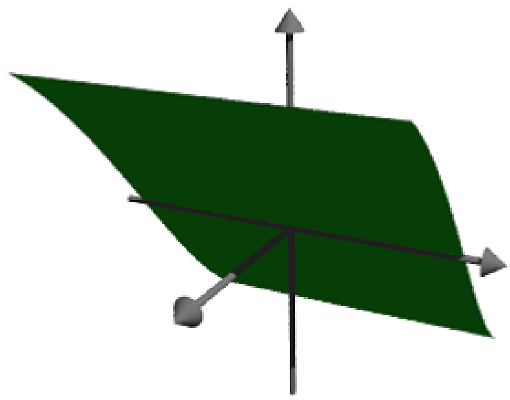
Contoh lain:

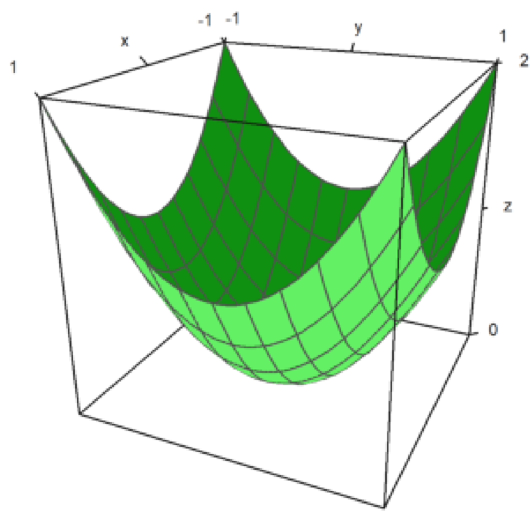
```
>pov3d("x^2+y^2"):
```






```
>pov3d("sin(x)"):
```





Contoh Lainnya

Anda dapat menemukan beberapa contoh lain untuk Povray di Euler dalam file-file berikut.
See: Examples/Dandelin Spheres
See: Examples/Donat Math

See: Examples/Trefoil Knot
See: Examples/Optimization by Affine Scaling

BAB 5

KB PEKAN 9-10: MENGGUNAKAN EMT UNTUK KALKULUS

[a4paper,10pt]article eumat

Umi Nurkhasanah
22305141032
Matematika E 2022

Kalkulus dengan EMT

Materi Kalkulus mencakup di antaranya:
- Fungsi (fungsi aljabar, trigonometri, eksponensial, logaritma, komposisi fungsi)
- Limit Fungsi,
- Turunan Fungsi,
- Integral Tak Tentu,
- Integral Tentu dan Aplikasinya,
- Barisan dan Deret (kekonvergenan barisan dan deret).

EMT (bersama Maxima) dapat digunakan untuk melakukan semua perhitungan di dalam kalkulus, baik secara numerik maupun analitik (eksak).

Mendefinisikan Fungsi

Terdapat beberapa cara mendefinisikan fungsi pada EMT, yakni:
- Menggunakan format nama_fungsi := rumus fungsi (untuk fungsi numerik),
- Menggunakan format nama_fungsi &= rumus fungsi (untuk fungsi simbolik, namun dapat dihitung secara numerik),
- Menggunakan format nama_fungsi &&= rumus fungsi (untuk fungsi simbolik murni, tidak dapat dihitung langsung),
- Fungsi sebagai program EMT.

Setiap format harus diawali dengan perintah function (bukan sebagai ekspresi).
Berikut adalah adalah beberapa contoh cara mendefinisikan fungsi:

$$f(x) = 2x^2 + e^{\sin(x)}.$$

```
>function f(x) := 2*x^2+exp(sin(x)) // fungsi numerik
>f(0), f(1), f(pi)
```

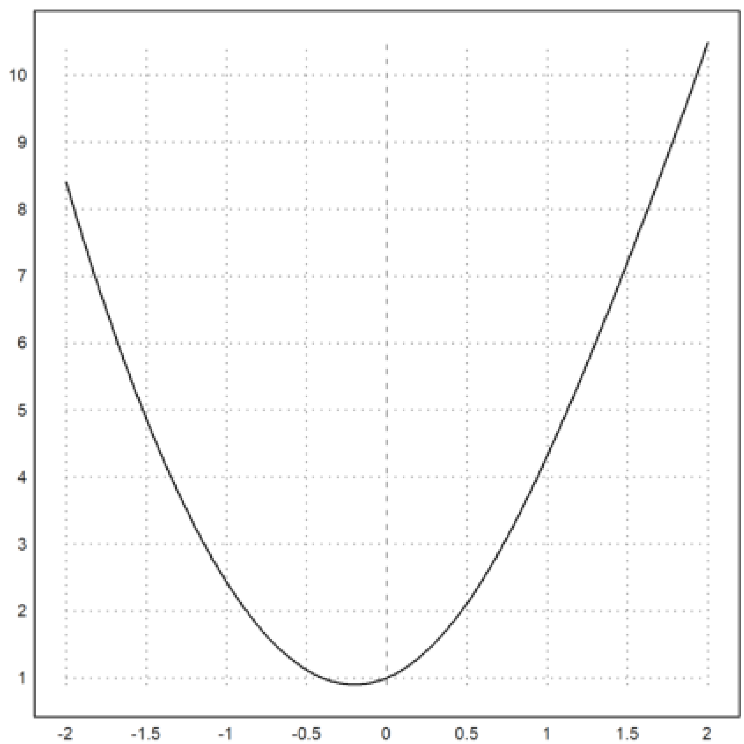
```
1
4.31977682472
20.7392088022
```

```
>f(a) // tidak dapat dihitung nilainya
```

```
Variable or function a not found.
Error in:
f(a) // tidak dapat dihitung nilainya ...
    ^
```

Silakan Anda plot kurva fungsi di atas!

```
> plot2d("f(x)"):
```



Berikutnya kita definisikan fungsi:

$$g(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 3x}}{x + 1}.$$

```
>function g(x) := sqrt(x^2-3*x)/(x+1)
>g(3)
```

0

```
>g(0)
```

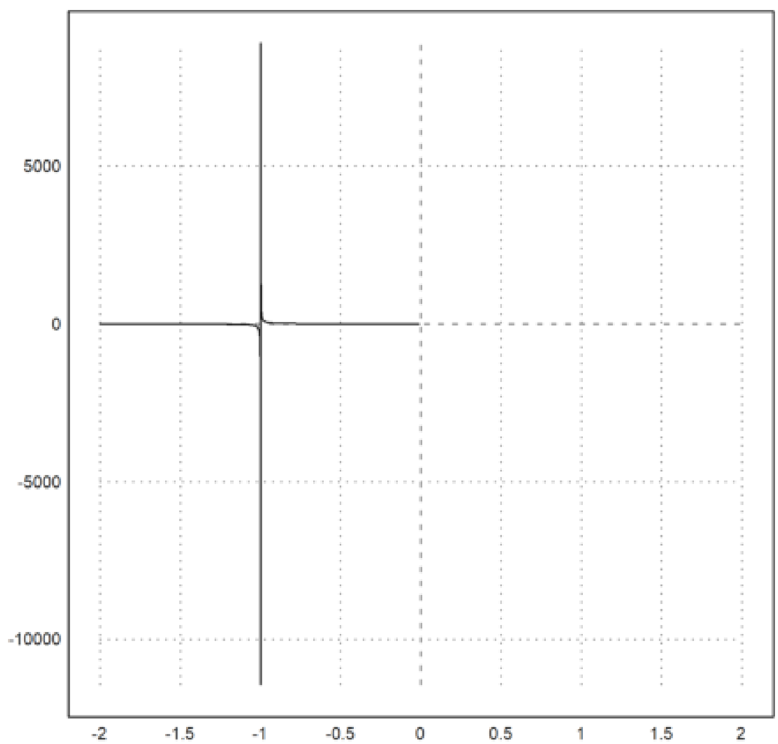
0

```
>g(1) // kompleks, tidak dapat dihitung oleh fungsi numerik
```

```
Floating point error!
Error in sqrt
Try "trace errors" to inspect local variables after errors.
g:
    useglobal; return sqrt(x^2-3*x)/(x+1)
Error in:
g(1) // kompleks, tidak dapat dihitung oleh fungsi numerik ...
    ^
```

Silakan Anda plot kurva fungsi di atas!

```
>plot2d("g(x)"):
```




```
>f(g(5)) // komposisi fungsi
```

2.20920171961

```
>g(f(5))
```

```
0.950898070639
```

```
>function h(x) := f(g(x)) // definisi komposisi fungsi
>h(5) // sama dengan f(g(5))
```

```
2.20920171961
```

Silakan Anda plot kurva fungsi komposisi fungsi f dan g:

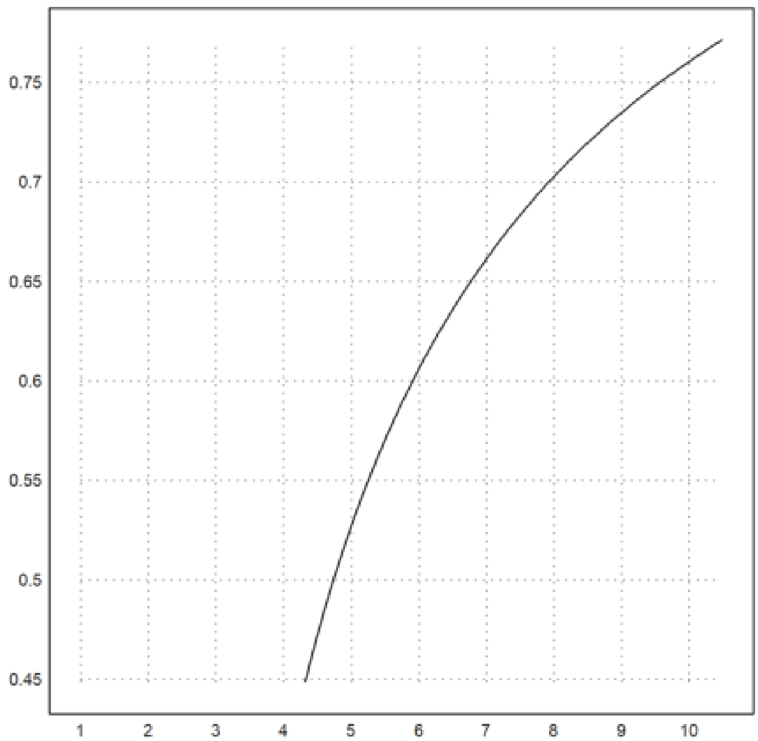
$$h(x) = f(g(x))$$

dan

$$u(x) = g(f(x))$$

bersama-sama kurva fungsi f dan g dalam satu bidang koordinat.

```
>function u(x) := g(f(x))
>plot2d("f(x)","u(x)"):
```




```
>f(0:10) // nilai-nilai f(0), f(1), f(2), ..., f(10)
```

```
[1,  4.31978,  10.4826,  19.1516,  32.4692,  50.3833,  72.7562,
99.929,  130.69,  163.51,  200.58]
```

```
>fmap(0:10) // sama dengan f(0:10), berlaku untuk semua fungsi
```

```
[1,  4.31978,  10.4826,  19.1516,  32.4692,  50.3833,  72.7562,
99.929,  130.69,  163.51,  200.58]
```

```
>gmap(200:210)
```

```
[0.987534,  0.987596,  0.987657,  0.987718,  0.987778,  0.987837,
0.987896,  0.987954,  0.988012,  0.988069,  0.988126]
```

Misalkan kita akan mendefinisikan fungsi

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & x > 0 \\ x^2 & x \leq 0. \end{cases}$$

Fungsi tersebut tidak dapat didefinisikan sebagai fungsi numerik secara "inline" menggunakan format :=, melainkan didefinisikan sebagai program. Perhatikan, kata "map" digunakan agar fungsi dapat menerima vektor sebagai input, dan hasilnya berupa vektor. Jika tanpa kata "map" fungsinya hanya dapat menerima input satu nilai.

```
>function map f(x) ...
```

```
  if x>0 then return x^3
  else return x^2
  endif;
endfunction
```

```
>f(1)
```

```
1
```

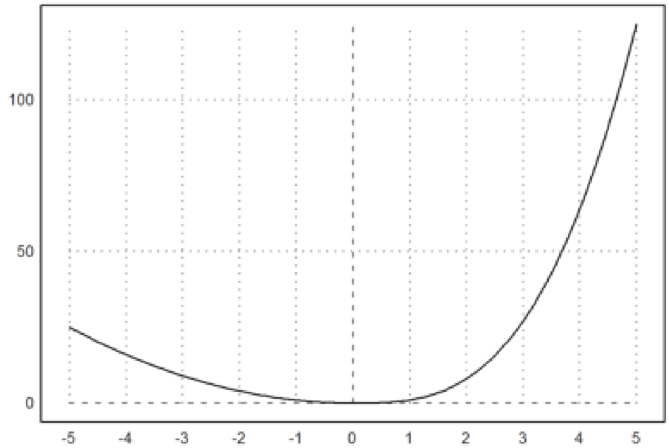
```
>f(-2)
```

```
4
```

```
>f(-5:5)
```

```
[25,  16,  9,  4,  1,  0,  1,  8,  27,  64,  125]
```

```
>aspect(1.5); plot2d("f(x)",-5,5):
```




```
>function f(x) &= 2*E^x // fungsi simbolik
```

```
                                 x
                              2 E
```

```
>$f(a) // nilai fungsi secara simbolik
```

$$2\,e^{a}$$

```
>f(E) // nilai fungsi berupa bilangan desimal
```

```
30.308524483
```

```
>$f(E), $float(%)
```

$$2\,e^{e}$$

$$30.30852448295852$$

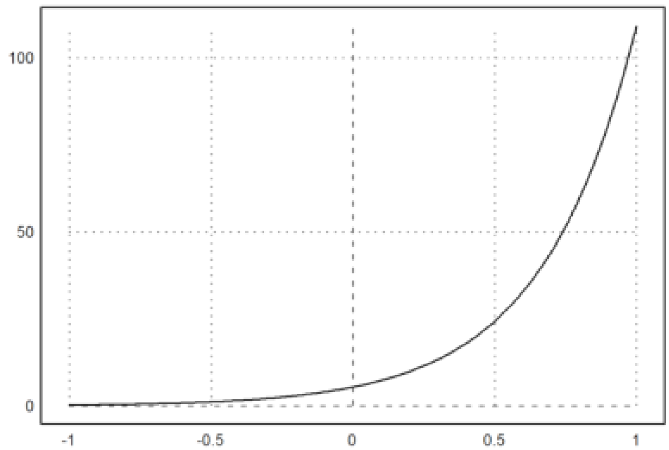
```
>function g(x) &= 3*x+1
```

```
                              3 x + 1
```

```
>function h(x) &= f(g(x)) // komposisi fungsi
```

```
     3 x + 1
  2 E
```

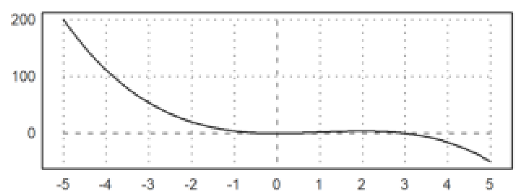
```
>plot2d("h(x)",-1,1):
```



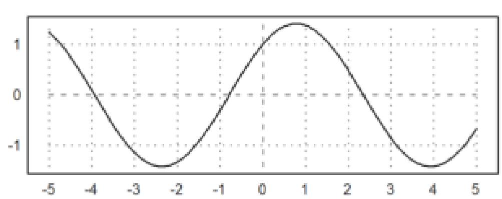
Latihan

Bukalah buku Kalkulus. Cari dan pilih beberapa (paling sedikit 5 fungsi berbeda tipe/bentuk/jenis) fungsi dari buku tersebut, kemudian definisikan fungsi-fungsi tersebut dan komposisinya di EMT pada baris-baris perintah berikut (jika perlu tambahkan lagi). Untuk setiap fungsi, hitung beberapa nilainya, baik untuk satu nilai maupun vektor. Gambar grafik fungsi-fungsi tersebut dan komposisi-komposisi 2 fungsi.
Juga, carilah fungsi beberapa (dua) variabel. Lakukan hal sama seperti di atas.

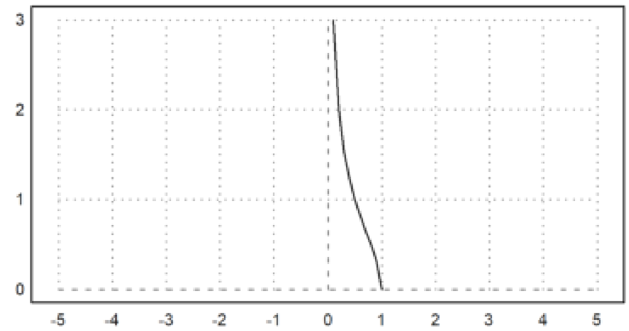
```
>function a(x) := 3*x^2-x^3
>aspect(3); plot2d("a(x)",-5,5):
```



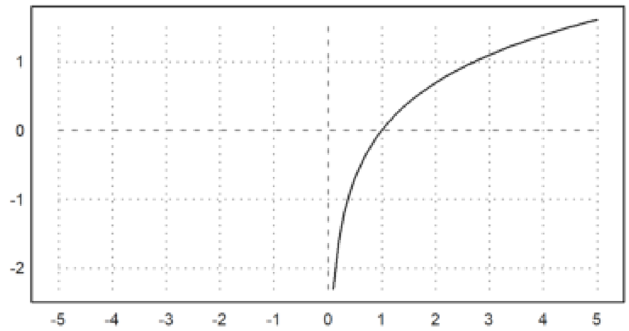
```
>function b(x):= sin(x)+cos(x)
>aspect(3); plot2d("b(x)",-5,5):
```



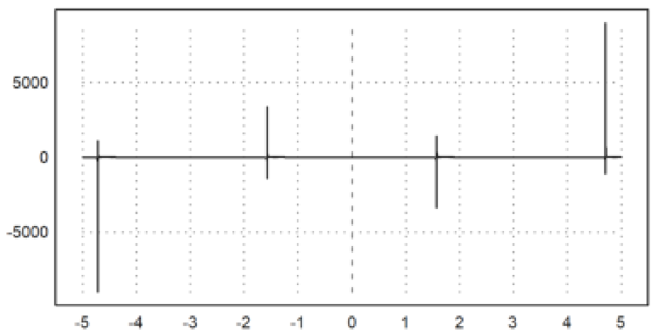
```
>function c(x):= sqrt(1-x)/sqrt(x)
> aspect(2); plot2d("c(x)",-5,5):
```




```
>function d(x):= log(x)
>aspect(2); plot2d("d(x)",-5,5):
```




```
>function e(x):= sin(2*x)-tan(x)
>aspect(2); plot2d("e(x)",-5,5):
```



Menghitung Limit

Perhitungan limit pada EMT dapat dilakukan dengan menggunakan fungsi Maxima, yakni "limit". Fungsi "limit" dapat digunakan untuk menghitung limit fungsi dalam bentuk ekspresi maupun fungsi yang sudah didefinisikan sebelumnya. Nilai limit dapat dihitung pada sebarang nilai atau pada tak hingga (-inf, minf, dan inf). Limit kiri dan limit kanan juga dapat dihitung, dengan cara memberi opsi "plus" atau "minus". Hasil limit dapat berupa nilai, "und" (tak definisi), "ind" (tak tentu namun terbatas), "infinity" (kompleks tak hingga). Perhatikan beberapa contoh berikut. Perhatikan cara menampilkan perhitungan secara lengkap, tidak hanya menampilkan hasilnya saja.

```
>$showev('limit(sqrt(x^2-3*x)/(x+1),x,inf))
```

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2-3\,x}}{x+1}=1$$

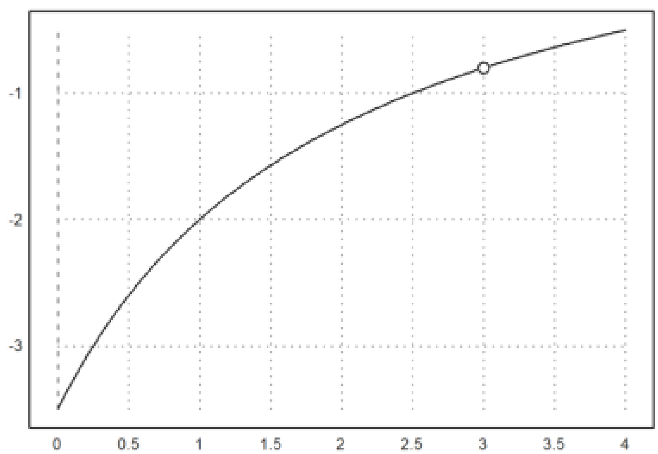
```
>$limit((x^3-13*x^2+51*x-63)/(x^3-4*x^2-3*x+18),x,3)
```

$$-\frac{4}{5}$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^3-13\,x^2+51\,x-63}{x^3-4\,x^2-3\,x+18}=-\frac{4}{5}$$

Fungsi tersebut diskontinu di titik x=3. Berikut adalah grafik fungsinya.

```
>aspect(1.5); plot2d("(x^3-13*x^2+51*x-63)/(x^3-4*x^2-3*x+18)",0,4); plot2d(3,-4/5,>points
```

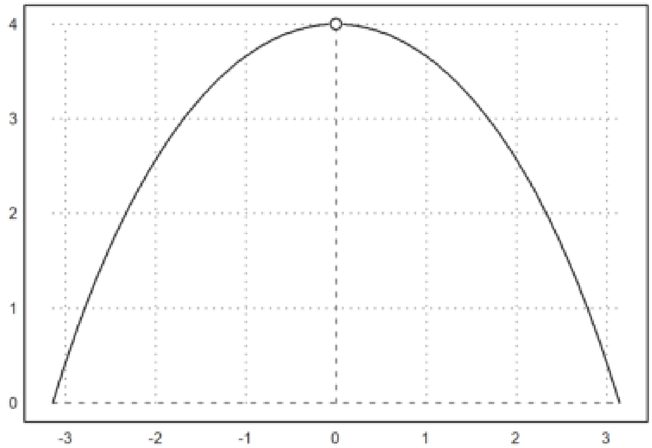



```
>$limit(2*x*sin(x)/(1-cos(x)),x,0)
```

4

maxima: 'limit(2*x*sin(x)/(1-cos(x)),x,0)=limit(2*x*sin(x)/(1-cos(x)),x,0)
Fungsi tersebut diskontinu di titik x=0. Berikut adalah grafik fungsinya.

```
>plot2d("2*x*sin(x)/(1-cos(x))",-pi,pi); plot2d(0,4,>points,style="ow",>add):
```



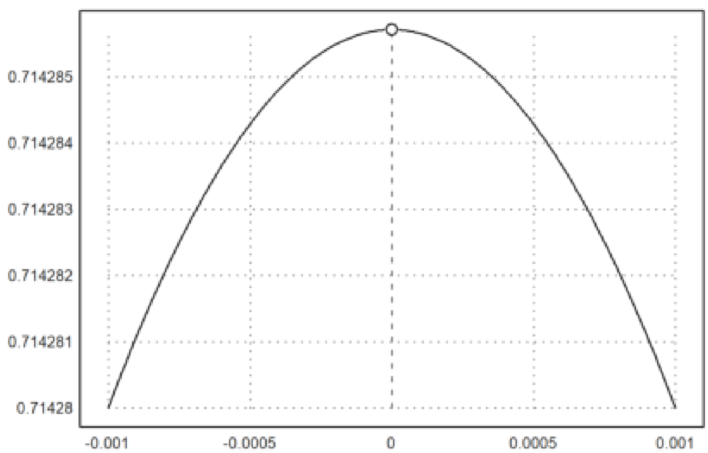

```
>$limit(cot(7*h)/cot(5*h),h,0)
```

$$\frac{5}{7}$$

$$\lim_{h\rightarrow 0}{\frac{\cot \left(7\,h\right)}{\cot \left(5\,h\right)}}=\frac{5}{7}$$

Fungsi tersebut juga diskontinu (karena tidak terdefinisi) di x=0. Berikut adalah grafiknya.

```
>plot2d("cot(7*x)/cot(5*x)",-0.001,0.001); plot2d(0,5/7,>points,style="ow",>add):
```



```
>$showev('limit(((x/8)^(1/3)-1)/(x-8),x,8))
```

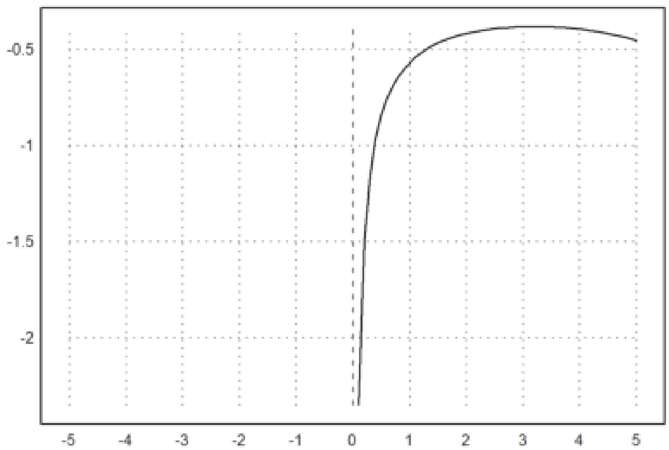
$$\lim_{x\rightarrow 8}{\frac{\frac{x^{\frac{1}{3}}}{2}-1}{x-8}}=\frac{1}{24}$$

```
>$limit(((x/8)^(1/3)-1)/(x-8),x,8)
```

$$\frac{1}{24}$$

Tunjukkan limit tersebut dengan grafik, seperti contoh-contoh sebelumnya.

```
>plot2d("(x/8)^((1/3)-1)/(x-8)",-5,5); plot2d(0,1/24,>points,style="ow",>add):
```




```
>$showev('limit(1/(2*x-1),x,0))
```

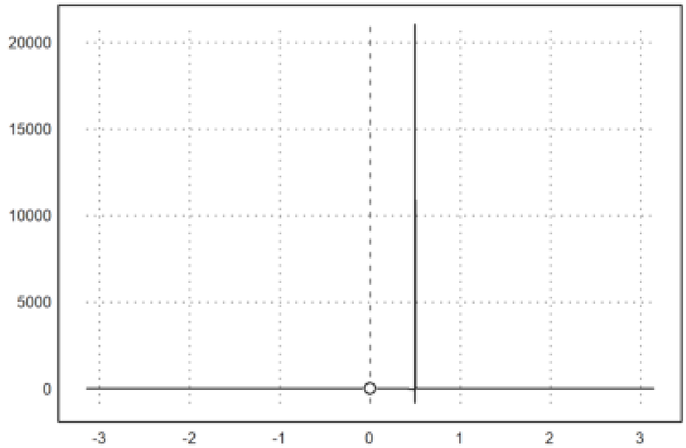
$$\lim_{x\rightarrow 0}{\frac{1}{2\,x-1}}=-1$$

Tunjukkan limit tersebut dengan grafik, seperti contoh-contoh sebelumnya.

```
>$limit(1/(2*x-1),x,0)
```

$$-1$$

```
>plot2d("1/(2*x-1)",-pi,pi); plot2d(0,-1,>points,style="ow",>add):
```




```
>$showev('limit((x^2-3*x-10)/(x-5),x,5))
```

$$\lim_{x\to 5} \frac{x^2-3\,x-10}{x-5} = 7$$

Tunjukkan limit tersebut dengan grafik, seperti contoh-contoh sebelumnya.

```
>$showev('limit(sqrt(x^2+x)-x,x,inf))
```

$$\lim_{x\to \infty} \sqrt{x^2+x}-x = \frac{1}{2}$$

Tunjukkan limit tersebut dengan grafik, seperti contoh-contoh sebelumnya.

```
>$showev('limit(abs(x-1)/(x-1),x,1,minus))
```

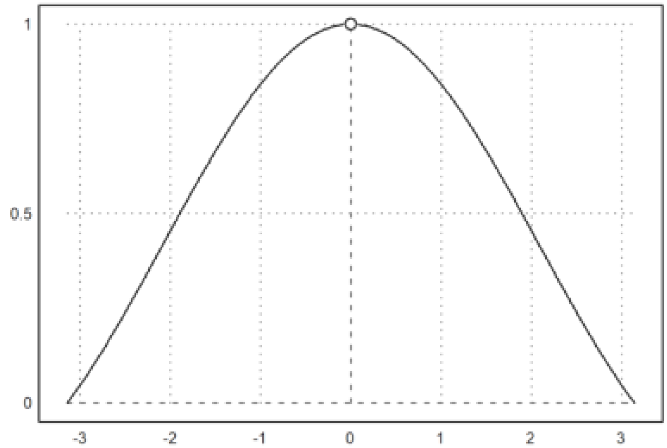
$$\lim_{x\uparrow 1} \frac{|x-1|}{x-1} = -1$$

Hitung limit di atas untuk x menuju 1 dari kanan.
Tunjukkan limit tersebut dengan grafik, seperti contoh-contoh sebelumnya.

```
>$showev('limit(sin(x)/x,x,0))
```

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

```
>plot2d("sin(x)/x",-pi,pi); plot2d(0,1,>points,style="ow",>add):
```

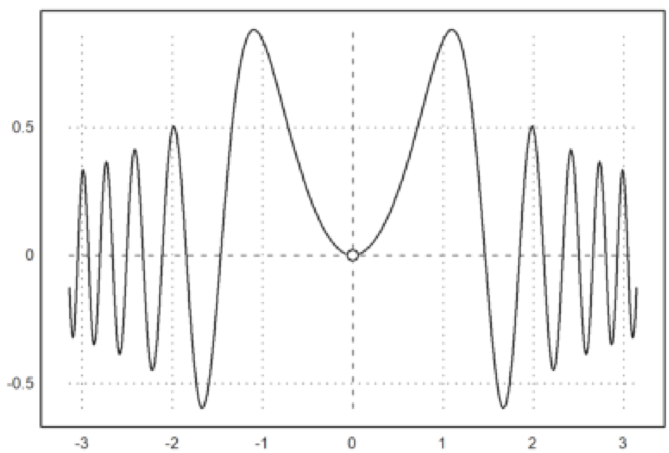



```
>$showev('limit(sin(x^3)/x,x,0))
```

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x^3}{x}=0$$

Tunjukkan limit tersebut dengan grafik, seperti contoh-contoh sebelumnya.

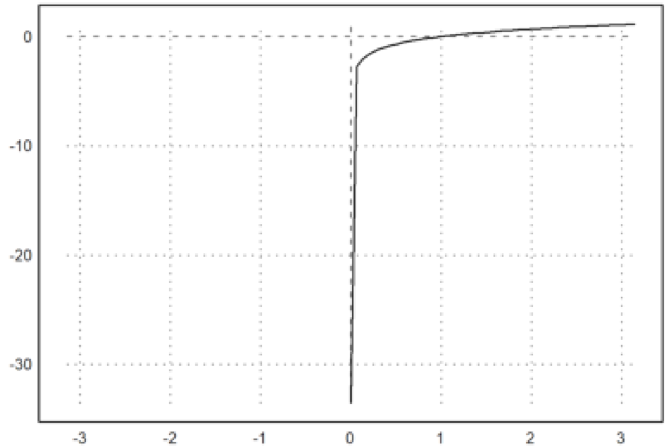
```
>plot2d("sin(x^3)/x",-pi,pi); plot2d(0,0,>points,style="ow",>add):
```




```
>$showev('limit(log(x), x, minf))
```

$$\lim_{x\to -\infty}\log x = infinity$$

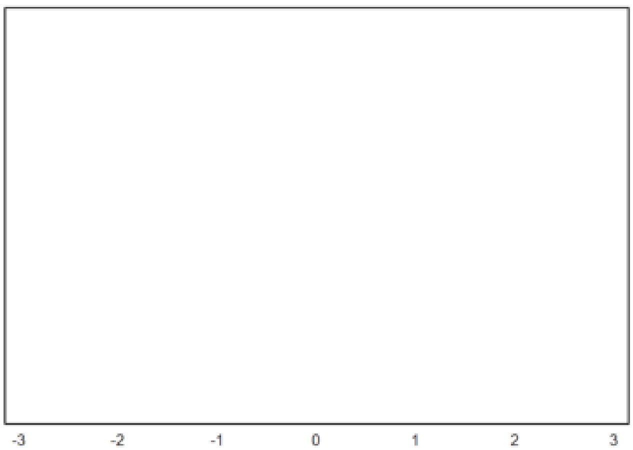
```
>plot2d("log(x)",-pi,pi):
```




```
>$showev('limit((-2)^x,x, inf))
```

$$\lim_{x\to\infty}\left(-2\right)^{x}=\mathit{infinity}$$

```
>plot2d("(-2)^x",-pi,pi):
```




```
>$showev('limit(t-sqrt(2-t),t,2,minus))
```

$$\lim_{t\uparrow 2}t-\sqrt{2-t}=2$$

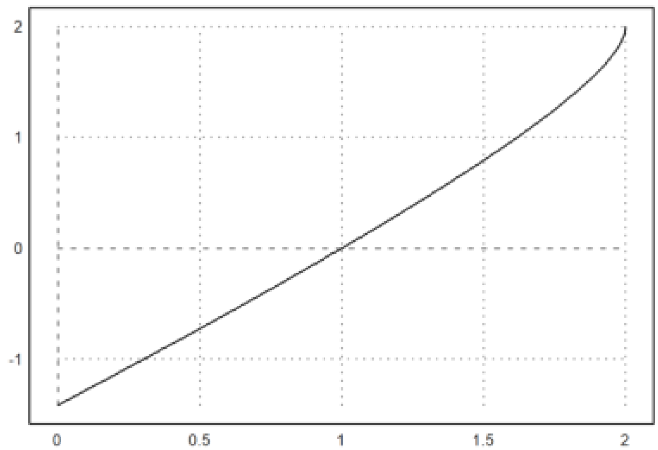
```
>$showev('limit(t-sqrt(2-t),t,2,plus))
```

$$\lim_{t\downarrow 2}t-\sqrt{2-t}=2$$

```
>$showev('limit(t-sqrt(2-t),t,5,plus)) // Perhatikan hasilnya
```

$$\lim_{t\downarrow 5} t-\sqrt{2-t}=5-\sqrt{3}\,i$$

```
>plot2d("x-sqrt(2-x)",0,2):
```

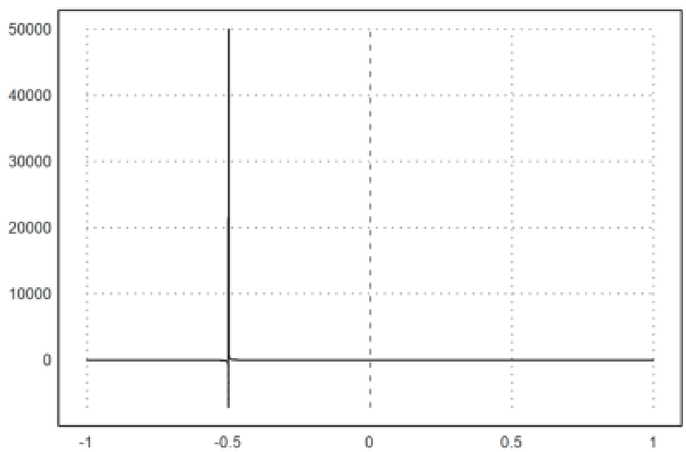


```
>$showev('limit((x^2-9)/(2*x^2-5*x-3),x,3))
```

$$\lim_{x\rightarrow 3} \frac{x^2-9}{2\,x^2-5\,x-3}=\frac{6}{7}$$

Tunjukkan limit tersebut dengan grafik, seperti contoh-contoh sebelumnya.

```
>plot2d("(x^2-9)/(2*x^2-5*x-3)",-1,1); plot2d(3,6/7,>points,style="ow",>add):
```

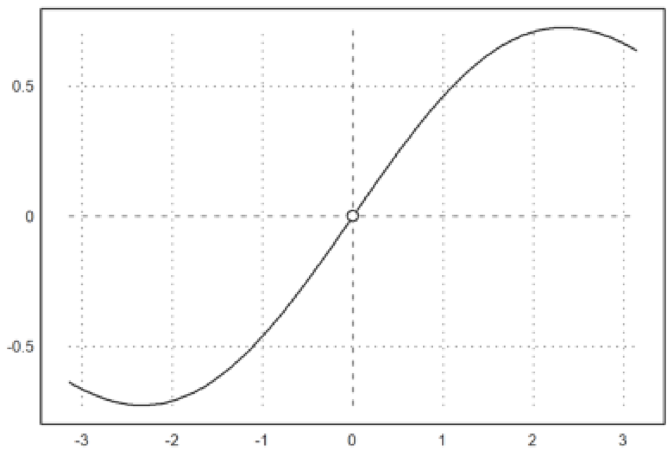


```
>$showev('limit((1-cos(x))/x,x,0))
```

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=0$$

Tunjukkan limit tersebut dengan grafik, seperti contoh-contoh sebelumnya.

```
>plot2d("(1-cos(x))/x",-pi,pi); plot2d(0,0,>points,style="ow",>add):
```




```
>$showev('limit((x^2+abs(x))/(x^2-abs(x)),x,0))
```

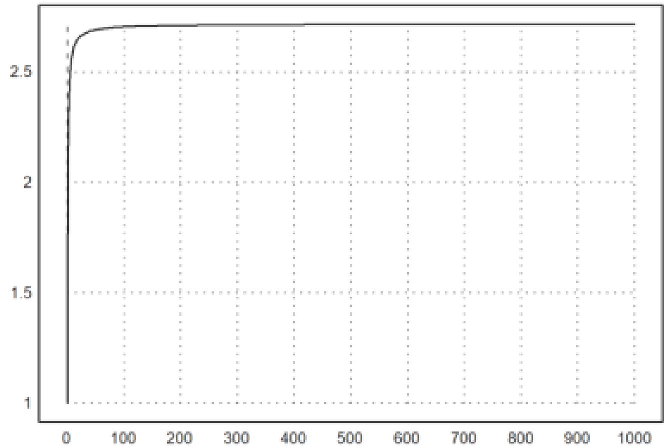
$$\lim_{x\to 0}\frac{|x|+x^2}{x^2-|x|}=-1$$

Tunjukkan limit tersebut dengan grafik, seperti contoh-contoh sebelumnya.

```
>$showev('limit((1+1/x)^x,x,inf))
```

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}+1\right)^x=e$$

```
>plot2d("(1+1/x)^x",0,1000):
```




```
>$showev('limit((1+k/x)^x,x,inf))
```

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{k}{x}+1\right)^x = e^k$$

```
>$showev('limit((1+x)^(1/x),x,0))
```

$$\lim_{x\to 0}(x+1)^{\frac{1}{x}} = e$$

Tunjukkan limit tersebut dengan grafik, seperti contoh-contoh sebelumnya.

```
>$showev('limit((x/(x+k))^x,x,inf))
```

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x+k}\right)^x = e^{-k}$$

```
>$showev('limit((E^x-E^2)/(x-2),x,2))
```

$$\lim_{x\to 2}\frac{e^x-e^2}{x-2} = e^2$$

Tunjukkan limit tersebut dengan grafik, seperti contoh-contoh sebelumnya.

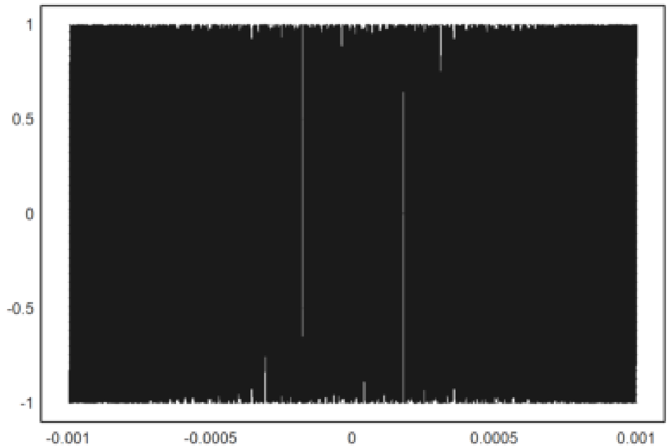
```
>$showev('limit(sin(1/x),x,0))
```

$$\lim_{x\to 0}\sin\left(\frac{1}{x}\right) = ind$$

```
>$showev('limit(sin(1/x),x,inf))
```

$$\lim_{x\to\infty}\sin\left(\frac{1}{x}\right)=0$$

```
>plot2d("sin(1/x)",-0.001,0.001):
```



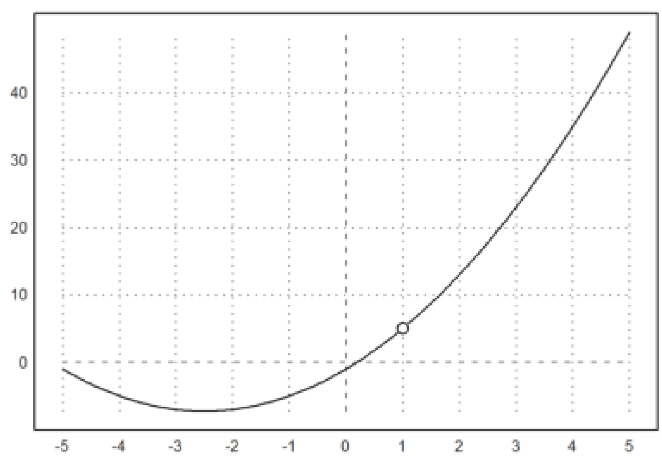
Latihan

Bukalah buku Kalkulus. Cari dan pilih beberapa (paling sedikit 5 fungsi berbeda tipe/bentuk/jenis) fungsi dari buku tersebut, kemudian definisikan di EMT pada baris-baris perintah berikut (jika perlu tambahkan lagi). Untuk setiap fungsi, hitung nilai limit fungsi tersebut di beberapa nilai dan di tak hingga. Gambar grafik fungsi tersebut untuk mengkonfirmasi nilai-nilai limit tersebut.

```
>$showev('limit((x^2+5*x-1),x,1))
```

$$\lim_{x\to 1}x^2+5\,x-1=5$$

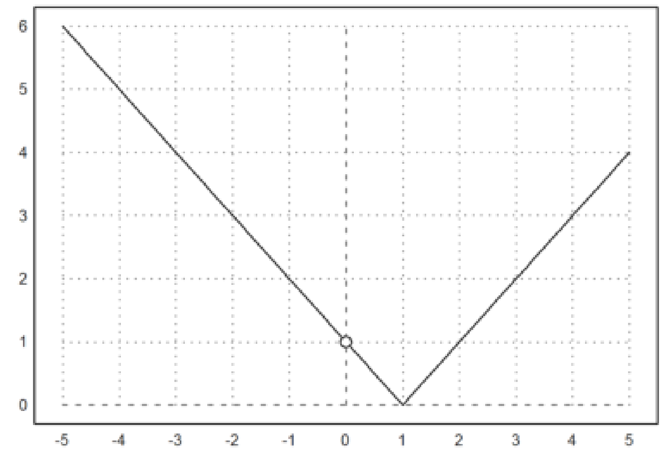
```
>plot2d("(x^2+5*x-1)",-5,5); plot2d(1,5,>points,style="ow",>add):
```



```
>$showev('limit(sqrt(x^2-2*x+1),x,0))
```

$$\lim_{x\rightarrow 0}{\sqrt{x^2-2\,x+1}}=1$$

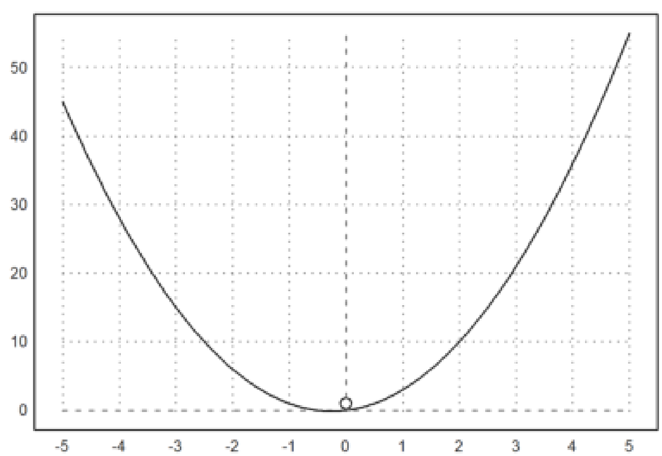
```
>plot2d("sqrt(x^2-2*x+1)",-5,5); plot2d(0,1,>points,style="ow",>add):
```




```
>$showev('limit((x+(2*x^2)),x,3,minus))
```

$$\lim_{x\uparrow 3}{2\,x^2+x}=21$$

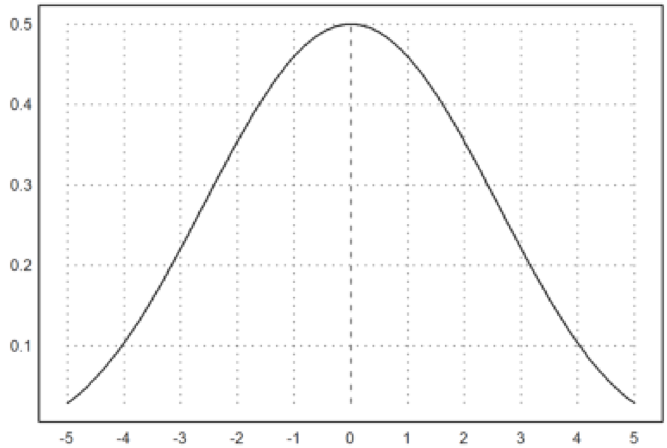
```
>plot2d("x+(2*x^2)",-5,5); plot2d(0,1,>points,style="ow",>add):
```



```
>$showev('limit((1-cos(x))/x^2,x,2))
```

$$\lim_{x\to 2}{\frac{1-\cos x}{x^2}}=\frac{1}{4}-\frac{\cos 2}{4}$$

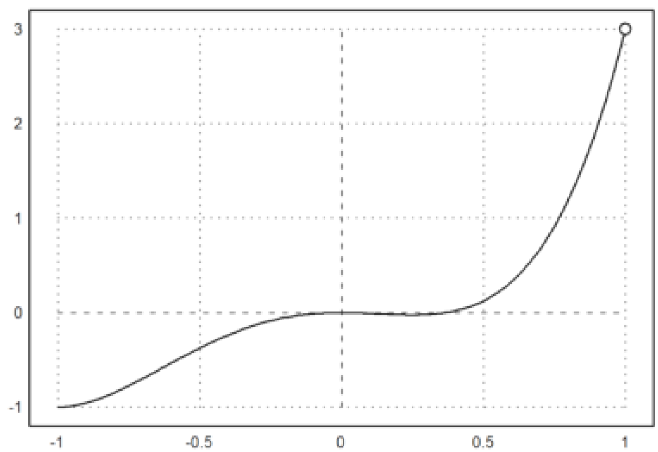
```
>plot2d("(1-cos(x))/x^2",-5,5):
```




```
>$showev('limit((2*x^4 + 2*x^3 - x^2)/(x^2),x,1))
```

$$\lim_{x\to 1}{\frac{2\,x^4+2\,x^3-x^2}{x^2}}=3$$

```
>plot2d("(2*x^4 + 2*x^3 - x^2)",-1,1); plot2d(1,3,>points,style="ow",>add):
```



Turunan Fungsi

Definisi turunan:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Berikut adalah contoh-contoh menentukan turunan fungsi dengan menggunakan definisi turunan (limit).

```
>$showev('limit(((x+h)^2-x^2)/h,h,0)) // turunan x^2
```

$$\lim_{h\to 0}{\frac{\left(x+h\right)^2-x^2}{h}}=2\,x$$

```
>p &= expand((x+h)^2-x^2)|simplify; $p //pembilang dijabarkan dan disederhanakan
```

$$2\,h\,x+h^2$$

```
>q &=ratsimp(p/h); $q // ekspresi yang akan dihitung limitnya disederhanakan
```

$$2\,x+h$$

```
>$limit(q,h,0) // nilai limit sebagai turunan
```

$$2\,x$$

```
>$showev('limit(((x+h)^n-x^n)/h,h,0)) // turunan x^n
```

$$\lim_{h\to 0}{\frac{\left(x+h\right)^{n}-x^{n}}{h}}=n\,x^{n-1}$$

Mengapa hasilnya seperti itu? Tuliskan atau tunjukkan bahwa hasil limit tersebut benar, sehingga benar turunan fungsinya benar. Tulis penjelasan Anda di komentar ini.
Sebagai petunjuk, ekspansikan (x+h)^n dengan menggunakan teorema binomial.

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Untuk

$$f(x) = x^n$$

maka

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{(x^n + \frac{n}{1!}x^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}h^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^{n-3}h^3 + ...) - x^n}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{n.x^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}h^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^{n-3}h^3 + ...}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} n.x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!}.x^{n-2}h + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}.x^{n-3}h^2 + ...$$

$$f'(x) = n.x^{n-1} + 0 + 0 + ... + 0$$

$$f'(x) = n.x^{n-1}$$

Jadi, terbukti bahwa

$$\lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = n.x^{n-1}$$

```
>$showev('limit((sin(x+h)-sin(x))/h,h,0)) // turunan sin(x)
```

$$\lim_{h \to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \cos x$$

Mengapa hasilnya seperti itu? Tuliskan atau tunjukkan bahwa hasil limit tersebut benar, sehingga benar turunan fungsinya benar. Tulis penjelasan Anda di komentar ini. Sebagai petunjuk, ekspansikan sin(x+h) dengan menggunakan rumus jumlah dua sudut.

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Untuk

$$f(x) = sin(x)$$

maka

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{sin(x+h) - sin(x)}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{sin(x)cos(h) + cos(x)sin(h) - sin(x)}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{sin(x)(cos(h) - 1) + cos(x)sin(h)}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} sin(x).\frac{cos(h) - 1}{h} + \lim_{h \to 0} cos(x).\frac{sin(h)}{h}$$

$$f'(x) = sin(x).0 + cos(x).1$$

$$f'(x) = cos(x)$$

Jadi, terbukti bahwa

$$\lim_{h\to 0} \frac{sin(x+h)-sin(x)}{h} = cos(x)$$

```
>$showev('limit((log(x+h)-log(x))/h,h,0)) // turunan log(x)
```

$$\lim_{h\to 0} \frac{\log(x+h)-\log x}{h} = \frac{1}{x}$$

Mengapa hasilnya seperti itu? Tuliskan atau tunjukkan bahwa hasil limit tersebut
benar, sehingga benar turunan fungsinya benar. Tulis penjelasan Anda di komentar ini.
Sebagai petunjuk, gunakan sifat-sifat logaritma dan hasil limit pada bagian sebelumnya di atas.

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

untuk

$$f(x) = log(x)$$

maka

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{log(x+h)-log(x)}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{log\frac{x+h}{x}}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} log(\frac{x+h}{x})^{\frac{1}{h}}$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} log(1+\frac{h}{x})^{\frac{1}{h}}$$

$$f'(x) = log\lim_{h\to 0}(1+\frac{h}{x})^{\frac{1}{h}}$$

$$f'(x) = loge^{\frac{1}{x}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{x}loge$$

$$f'(x) = \frac{1}{x}$$

Jadi, terbukti bahwa

$$\lim_{h\to 0} \frac{log(x+h)-log(x)}{h} = \frac{1}{x}$$

```
>$showev('limit((1/(x+h)-1/x)/h,h,0)) // turunan 1/x
```

$$\lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}}{h} = -\frac{1}{x^2}$$

```
>$showev('limit((E^(x+h)-E^x)/h,h,0)) // turunan f(x)=e^x
```

```
Answering "Is x an integer?" with "integer"
Answering "Is x an integer?" with "integer"
Answering "Is x an integer?" with "integer"
Answering "Is x an integer?" with "integer"
Answering "Is x an integer?" with "integer"
Maxima is asking
Acceptable answers are: yes, y, Y, no, n, N, unknown, uk
Is x an integer?

Use assume!
Error in:
$showev('limit((E^(x+h)-E^x)/h,h,0)) // turunan f(x)=e^x ...
                                     ^
```

Maxima bermasalah dengan limit:

$$\lim_{h\to 0} \frac{e^{x+h}-e^x}{h}.$$

Oleh karena itu diperlukan trik khusus agar hasilnya benar.

```
>$showev('limit((E^h-1)/h,h,0))
```

$$\lim_{h\to 0} \frac{e^h-1}{h} = 1$$

```
>$showev('factor(E^(x+h)-E^x))
```

$$\mathit{factor}\left(e^{x+h}-e^x\right) = \left(e^h-1\right)\, e^x$$

```
>$showev('limit(factor((E^(x+h)-E^x)/h),h,0)) // turunan f(x)=e^x
```

$$\left(\lim_{h\to 0} \frac{e^h-1}{h}\right)\, e^x = e^x$$

```
>function f(x) &= x^x
```

```
 x
x
```

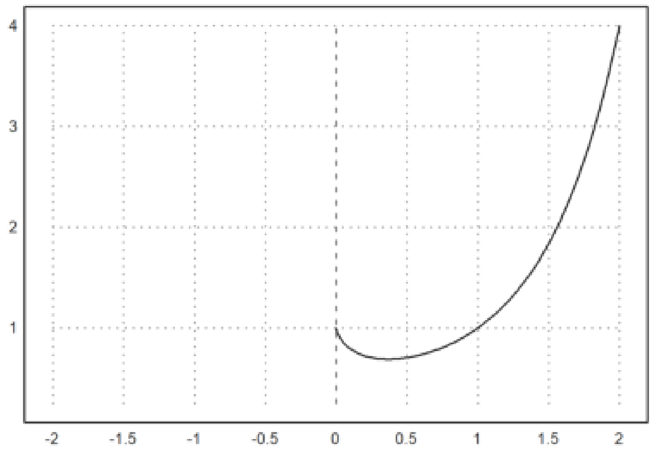
```
>$showev('limit(f(x),x,0))
```

$$\lim_{x\to 0} x^x = 1$$

Silakan Anda gambar kurva

$$y = x^x.$$

```
>function i(x):=x^x
>plot2d("i(x)"):
```



```
>$showev('limit((f(x+h)-f(x))/h,h,0)) // turunan f(x)=x^x
```

$$\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^{x+h}-x^x}{h} = \mathit{infinity}$$

Di sini Maxima juga bermasalah terkait limit:

$$\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^{x+h}-x^x}{h}.$$

Dalam hal ini diperlukan asumsi nilai x.

```
>&assume(x>0); $showev('limit((f(x+h)-f(x))/h,h,0)) // turunan f(x)=x^x
```

$$\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^{x+h}-x^x}{h} = x^x\,(\log x + 1)$$

Mengapa hasilnya seperti itu? Tuliskan atau tunjukkan bahwa hasil limit tersebut benar, sehingga benar turunan fungsinya benar. Tulis penjelasan Anda di komentar ini.

```
>&forget(x>0) // jangan lupa, lupakan asumsi untuk kembali ke semula
```

```
[x > 0]
```

```
>&forget(x<0)
```

```
[x < 0]
```

```
>&facts()
```

```
[]
```

```
>$showev('limit((asin(x+h)-asin(x))/h,h,0)) // turunan arcsin(x)
```

$$\lim_{h\rightarrow 0}{\frac{\arcsin \left(x+h\right)-\arcsin x}{h}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Mengapa hasilnya seperti itu? Tuliskan atau tunjukkan bahwa hasil limit tersebut benar, sehingga benar turunan fungsinya benar. Tulis penjelasan Anda di komentar ini.

```
>$showev('limit((tan(x+h)-tan(x))/h,h,0)) // turunan tan(x)
```

$$\lim_{h\rightarrow 0}{\frac{\tan \left(x+h\right)-\tan x}{h}}=\frac{1}{\cos ^2x}$$

Mengapa hasilnya seperti itu? Tuliskan atau tunjukkan bahwa hasil limit tersebut benar, sehingga benar turunan fungsinya benar. Tulis penjelasan Anda di komentar ini.

```
>function f(x) &= sinh(x) // definisikan f(x)=sinh(x)
```

```
sinh(x)
```

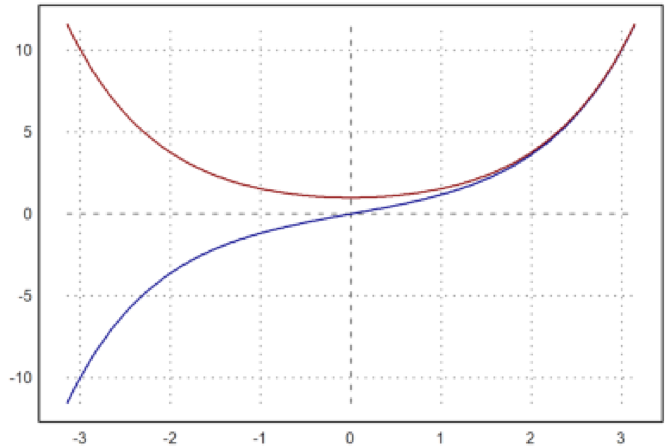
```
>function df(x) &= limit((f(x+h)-f(x))/h,h,0); $df(x) // df(x) = f'(x)
```

$$\frac{e^ {- x }\,\left(e^{2\,x}+1\right)}{2}$$

Hasilnya adalah cosh(x), karena

$$\frac{e^x+e^{-x}}{2}=\cosh(x).$$

```
>plot2d(["f(x)","df(x)"],-pi,pi,color=[blue,red]):
```




```
>function f(x) &= sin(3*x^5+7)^2
```

```
                          2     5
                       sin (3 x  + 7)
```

```
>diff(f,3), diffc(f,3)
```

```
1198.32948904
1198.72863721
```

Apakah perbedaan diff dan diffc?

```
>$showev('diff(f(x),x))
```

$$\frac{d}{d\,x}\,\sin^2\left(3\,x^5+7\right)=30\,x^4\,\cos\left(3\,x^5+7\right)\,\sin\left(3\,x^5+7\right)$$

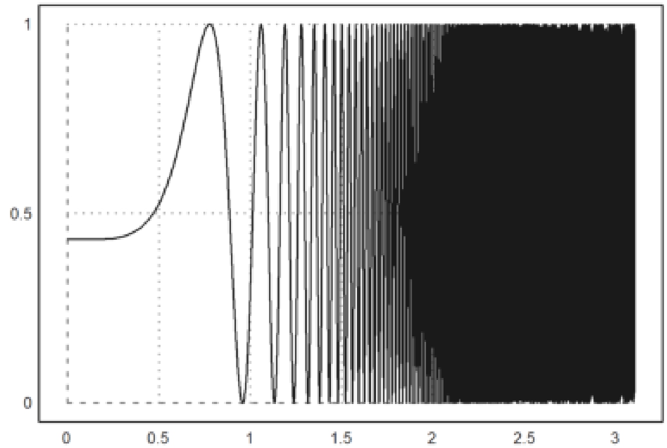
```
>$% with x=3
```

$$\%at\left(\frac{d}{d\,x}\,\sin^2\left(3\,x^5+7\right),x=3\right)=2430\,\cos 736\,\sin 736$$

```
>$float(%)
```

$$\%at\left(\frac{d^{1.0}}{d\,x^{1.0}}\,\sin^2\left(3.0\,x^5+7.0\right),x=3.0\right)=1198.728637211748$$

```
>plot2d(f,0,3.1):
```




```
>function f(x) &=5*cos(2*x)-2*x*sin(2*x) // mendifinisikan fungsi f
```

```
                    5 cos(2 x) - 2 x sin(2 x)
```

```
>function df(x) &=diff(f(x),x) // fd(x) = f'(x)
```

```
                    - 12 sin(2 x) - 4 x cos(2 x)
```

```
>$'f(1)=f(1), $float(f(1)), $'f(2)=f(2), $float(f(2)) // nilai f(1) dan f(2)
```

$$f(1) = 5\cos 2 - 2\sin 2$$

$$-3.899329036387075$$

$$f(2) = 5\cos 4 - 4\sin 4$$

$$-0.2410081230863468$$

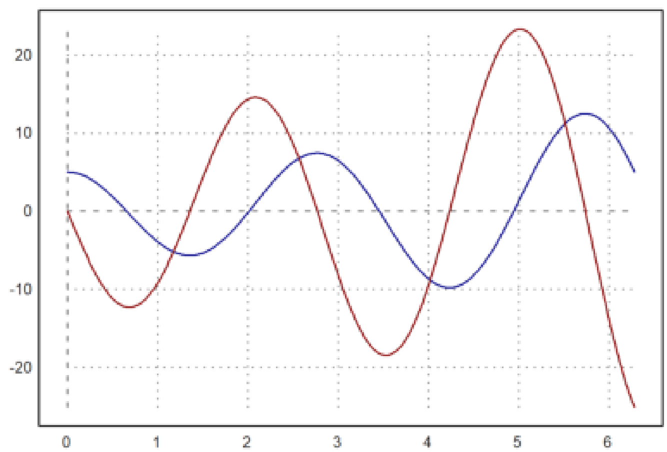
```
>xp=solve("df(x)",1,2,0) // solusi f'(x)=0 pada interval [1, 2]
```

```
 1.35822987384
```

```
>df(xp), f(xp) // cek bahwa f'(xp)=0 dan nilai ekstrim di titik tersebut
```

```
 0
 -5.67530133759
```

```
>plot2d(["f(x)","df(x)"],0,2*pi,color=[blue,red]): //grafik fungsi dan turunannya
```



Perhatikan titik-titik "puncak" grafik y=f(x) dan nilai turunan pada saat grafik fungsinya mencapai titik "puncak" tersebut.

```
>
```

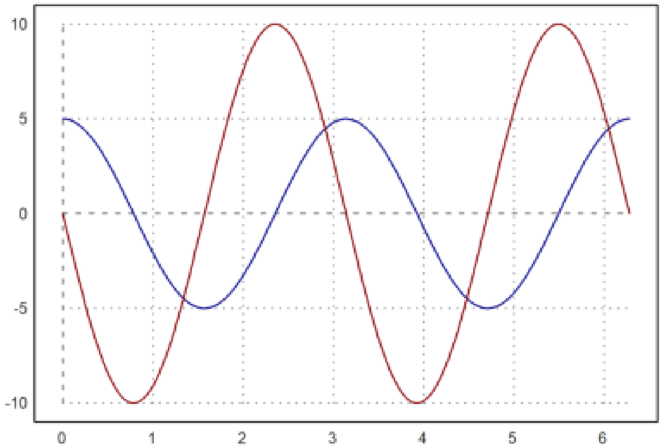
Latihan

Bukalah buku Kalkulus. Cari dan pilih beberapa (paling sedikit 5 fungsi berbeda tipe/bentuk/jenis) fungsi dari buku tersebut, kemudian definisikan di EMT pada baris-baris perintah berikut (jika perlu tambahkan lagi). Untuk setiap fungsi, tentukan turunannya dengan menggunakan definisi turunan (limit), menggunakan perintah diff, dan secara manual (langkah demi langkah yang dihitung dengan Maxima) seperti contoh-contoh di atas. Gambar grafik fungsi asli dan fungsi turunannya pada sumbu koordinat yang sama.

```
>function f(x) &= 5*cos(2*x); function df(x)&= diff(f(x),x)
```

```
                              - 10 sin(2 x)
```

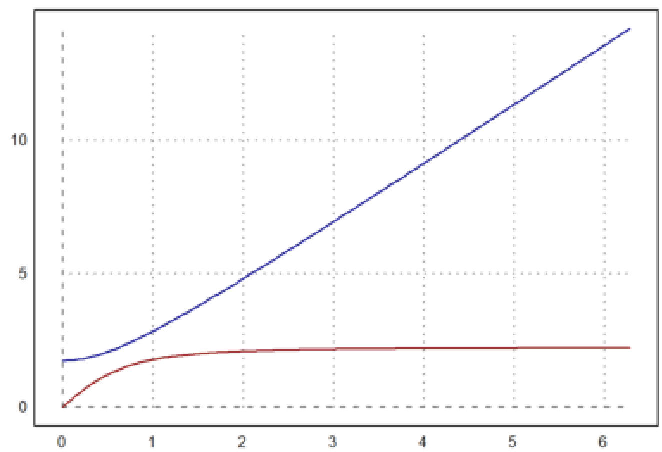
```
>plot2d(["f(x)","df(x)"],0,2*pi,color=[blue,red]):
```



```
>function f(x) &= sqrt(5*x^2+6-3); function df(x)&= diff(f(x),x)
```

```
          5 x
     --------------
                2
     sqrt(5 x  + 3)
```

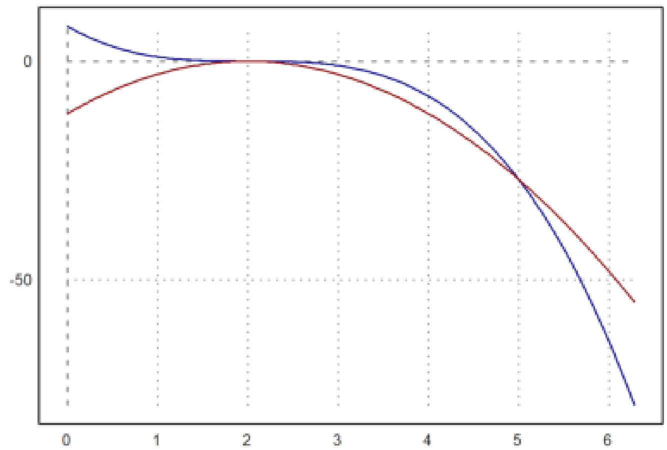
```
>plot2d(["f(x)","df(x)"],0,2*pi,color=[blue,red]):
```



```
>function f(x) &= (2-x)^3; function df(x)&= diff(f(x),x)
```

```
                      2
              - 3 (2 - x)
```

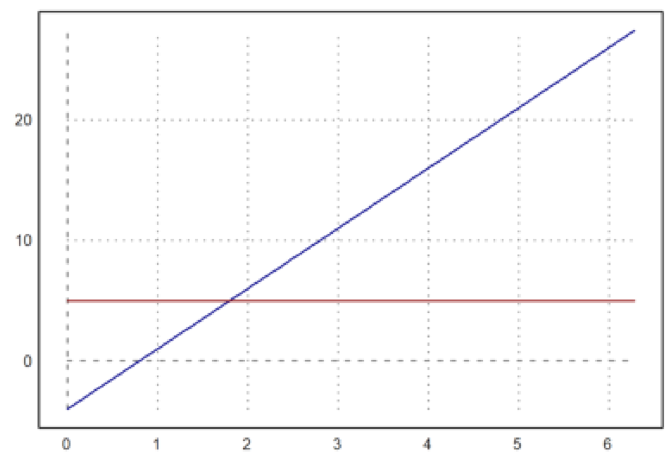
```
> plot2d(["f(x)","df(x)"],0,2*pi,color=[blue,red]):
```




```
>function f(x) &= 5*x-4; function df(x)&= diff(f(x),x)
```

5

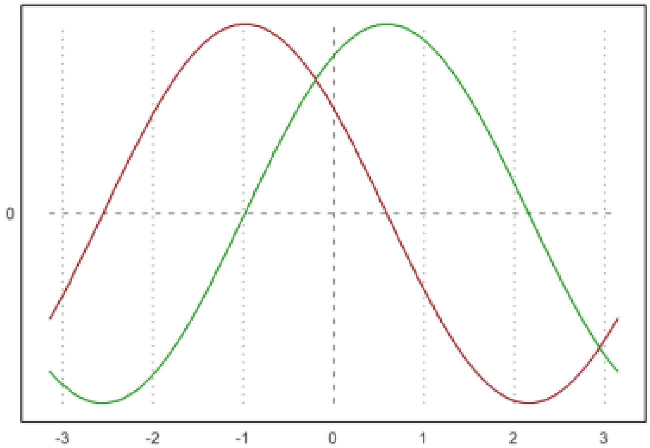
```
>plot2d(["f(x)","df(x)"],0,2*pi,color=[blue,red]):
```




```
>function f(x) &=2*sin(x)+3*cos(x); function df(x)&= diff(f(x),x)
```

2 cos(x) - 3 sin(x)

```
>plot2d(["f(x)","df(x)"],-pi,pi,color=[green,red]):
```




```
>
```

```
>
```

Integral

EMT dapat digunakan untuk menghitung integral, baik integral tak tentu maupun integral tentu. Untuk integral tak tentu (simbolik) sudah tentu EMT menggunakan Maxima, sedangkan untuk perhitungan integral tentu EMT sudah menyediakan beberapa fungsi yang mengimplementasikan algoritma kuadratur (perhitungan integral tentu menggunakan metode numerik).

Pada notebook ini akan ditunjukkan perhitungan integral tentu dengan menggunakan Teorema Dasar Kalkulus:

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a), \quad \text{dengan } F'(x) = f(x).$$

Fungsi untuk menentukan integral adalah integrate. Fungsi ini dapat digunakan untuk menentukan, baik integral tentu maupun tak tentu (jika fungsinya memiliki antiderivatif). Untuk perhitungan integral tentu fungsi integrate menggunakan metode numerik (kecuali fungsinya tidak integrabel, kita tidak akan menggunakan metode ini).

```
>$showev('integrate(x^n,x))
```

```
Answering "Is n equal to -1?" with "no"
```

$$\int x^n\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

```
>$showev('integrate(1/(1+x),x))
```

$$\int \frac{1}{x+1}\,dx = \log\left(x+1\right)$$

```
>$showev('integrate(1/(1+x^2),x))
```

$$\int \frac{1}{x^2+1}\,dx = \arctan x$$

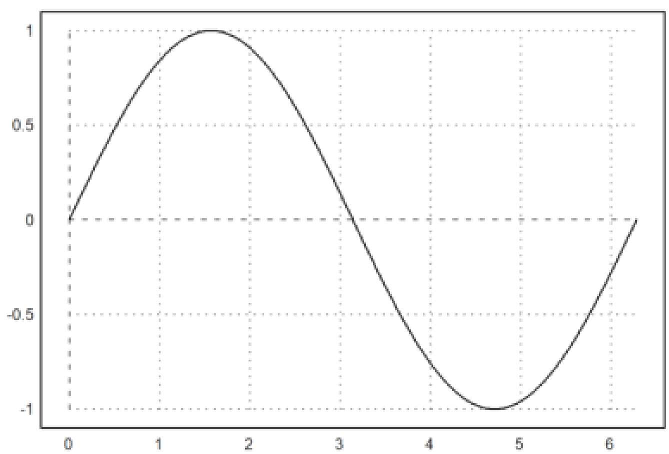
```
>$showev('integrate(1/sqrt(1-x^2),x))
```

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x$$

```
>$showev('integrate(sin(x),x,0,pi))
```

$$\int_{0}^{\pi} \sin x\,dx = 2$$

```
>plot2d("sin(x)",0,2*pi):
```




```
>$showev('integrate(sin(x),x,a,b))
```

$$\int_{a}^{b} \sin x\,dx = \cos a - \cos b$$

```
>$showev('integrate(x^n,x,a,b))
```

```
Answering "Is n positive, negative or zero?" with "positive"
```

$$\int_{a}^{b}{x^{n}\;dx}=\frac{b^{n+1}}{n+1}-\frac{a^{n+1}}{n+1}$$

```
>$showev('integrate(x^2*sqrt(2*x+1),x))
```

$$\int {x^2\,\sqrt{2\,x+1}\;dx}=\frac{\left(2\,x+1\right)^{\frac{7}{2}}}{28}-\frac{\left(2\,x+1\right)^{\frac{5}{2}}}{10}+\frac{\left(2\,x+1\right)^{\frac{3}{2}}}{12}$$

```
>$showev('integrate(x^2*sqrt(2*x+1),x,0,2))
```

$$\int_{0}^{2}{x^2\,\sqrt{2\,x+1}\;dx}=\frac{2\,5^{\frac{5}{2}}}{21}-\frac{2}{105}$$

```
>$ratsimp(%)
```

$$\int_{0}^{2}{x^2\,\sqrt{2\,x+1}\;dx}=\frac{2\,5^{\frac{7}{2}}-2}{105}$$

```
>$showev('integrate((sin(sqrt(x)+a)*E^sqrt(x))/sqrt(x),x,0,pi^2))
```

$$\int_{0}^{\pi^2}{\frac{\sin \left(\sqrt{x}+a\right)\,e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\;dx}=\left(-e^{\pi}-1\right)\,\sin a+\left(e^{\pi}+1\right)\,\cos a$$

```
>$factor(%)
```

$$\int_{0}^{\pi^2}{\frac{\sin \left(\sqrt{x}+a\right)\,e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\;dx}=\left(-e^{\pi}-1\right)\,\left(\sin a-\cos a\right)$$

```
>function map f(x) &= E^(-x^2)
```

```
                                      2
                                   - x
                                  E
```

```
>$showev('integrate(f(x),x))
```

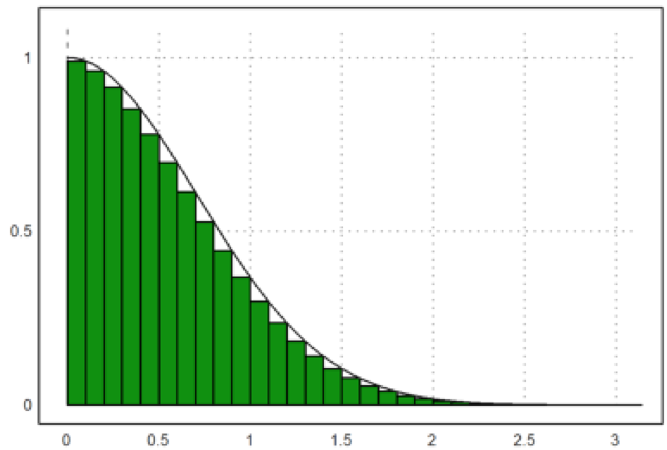
$$\int {e^ {- x^2 }\;dx}=\frac{\sqrt{\pi}\,\mathrm{erf}\left(x\right)}{2}$$

Fungsi f tidak memiliki antiturunan, integralnya masih memuat integral lain.

$$erf(x) = \int \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{\pi}}\, dx.$$

Kita tidak dapat menggunakan teorema Dasar kalkulus untuk menghitung integral tentu fungsi tersebut jika semua batasnya berhingga. Dalam hal ini dapat digunakan metode numerik (rumus kuadratur).
Misalkan kita akan menghitung:
maxima: 'integrate(f(x),x,0,pi)

```
>x=0:0.1:pi-0.1; plot2d(x,f(x+0.1),>bar); plot2d("f(x)",0,pi,>add):
```



Integral tentu
maxima: 'integrate(f(x),x,0,pi)
dapat dihampiri dengan jumlah luas persegi-persegi panjang di bawah kurva y=f(x) tersebut. Langkah-langkahnya adalah sebagai berikut.

```
>t &= makelist(a,a,0,pi-0.1,0.1); // t sebagai list untuk menyimpan nilai-nilai x
>fx &= makelist(f(t[i]+0.1),i,1,length(t)); // simpan nilai-nilai f(x)
>// jangan menggunakan x sebagai list, kecuali Anda pakar Maxima!
```

Hasilnya adalah:
maxima: 'integrate(f(x),x,0,pi) = 0.1*sum(fx[i],i,1,length(fx))
Jumlah tersebut diperoleh dari hasil kali lebar sub-subinterval (=0.1) dan jumlah nilai-nilai f(x) untuk x = 0.1, 0.2, 0.3, ..., 3.2.

```
>0.1*sum(f(x+0.1)) // cek langsung dengan perhitungan numerik EMT
```

```
0.836219610253
```

Untuk mendapatkan nilai integral tentu yang mendekati nilai sebenarnya, lebar sub-intervalnya dapat diperkecil lagi, sehingga daerah di bawah kurva tertutup semuanya, misalnya dapat digunakan lebar subinterval 0.001. (Silakan dicoba!)
Meskipun Maxima tidak dapat menghitung integral tentu fungsi tersebut untuk batas-batas yang berhingga, namun integral tersebut dapat dihitung secara eksak jika batas-batasnya tak hingga. Ini adalah salah satu keajaiban di dalam matematika, yang terbatas tidak dapat dihitung secara eksak, namun yang tak hingga malah dapat dihitung secara eksak.

```
>$showev('integrate(f(x),x,0,inf))
```

$$\int_{0}^{\infty}e^{-x^2}\,dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Tunjukkan kebenaran hasil di atas!
Berikut adalah contoh lain fungsi yang tidak memiliki antiderivatif, sehingga integral tentunya hanya dapat dihitung dengan metode numerik.

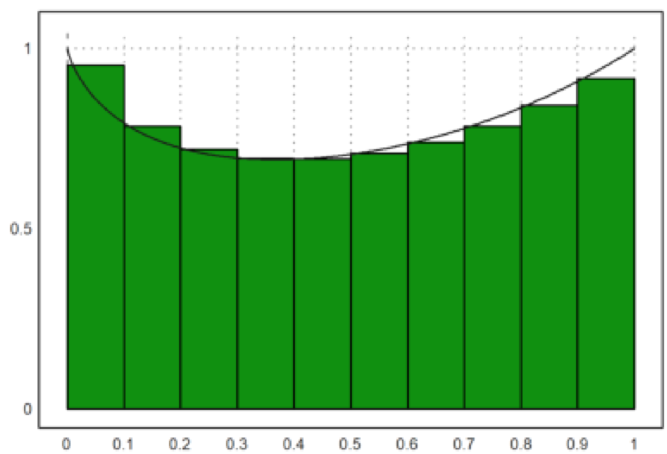
```
>function f(x) &= x^x
```

```
 x
x
```

```
>$showev('integrate(f(x),x,0,1))
```

$$\int_{0}^{1}x^{x}\,dx=\int_{0}^{1}x^{x}\,dx$$

```
>x=0:0.1:1-0.01; plot2d(x,f(x+0.01),>bar); plot2d("f(x)",0,1,>add):
```



Maxima gagal menghitung integral tentu tersebut secara langsung menggunakan perintah integrate. Berikut kita lakukan seperti contoh sebelumnya untuk mendapat hasil atau pendekatan nilai integral tentu tersebut.

```
>t &= makelist(a,a,0,1-0.01,0.01);
>fx &= makelist(f(t[i]+0.01),i,1,length(t));
```

maxima: 'integrate(f(x),x,0,1) = 0.01*sum(fx[i],i,1,length(fx))
Apakah hasil tersebut cukup baik? perhatikan gambarnya.

```
>function f(x) &= sin(3*x^5+7)^2
```

```
                          2      5
                       sin  (3 x   + 7)
```

```
>integrate(f,0,1)
```

```
0.542581176074
```

```
>$&showev('integrate(f(x),x,0,1))
```

$$\int_{0}^{1}{\sin ^2\left(3\,x^5+7\right)\;dx}=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{5}\right)\,\sin 14\,\sin \left(\frac{\pi}{10}\right)}{10\,6^{\frac{1}{5}}}-\frac{\left(\left(6^{\frac{4}{5}}\,gamma\_incomplete\left(\frac{1}{5},6\,i\right)+6^{\frac{4}{5}}\,gamma\_incomplete\left(\frac{1}{5},-6\,i\right)\right)\,\sin 14}{}$$

```
>$&float(%)
```

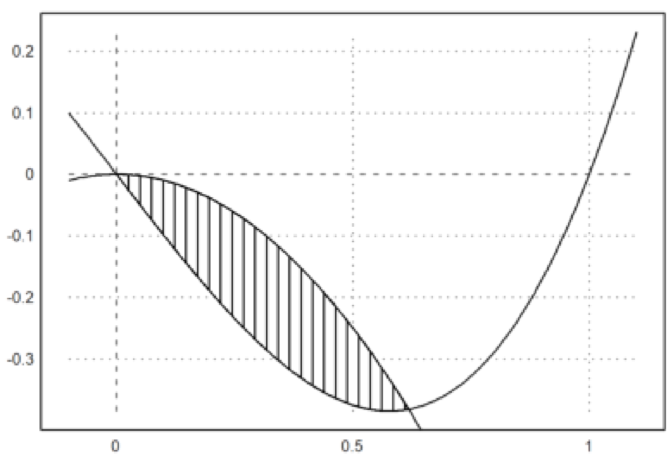
$$\int_{0.0}^{1.0}{\frac{x}{2.718281828459045^{x}}\;dx}=0.2642411176571153$$

```
>$showev('integrate(x*exp(-x),x,0,1)) // Integral tentu (eksak)
```

$$\int_{0}^{1}{x\,e^ {- x }\;dx}=1-2\,e^ {- 1 }$$

Aplikasi Integral Tentu

```
>plot2d("x^3-x",-0.1,1.1); plot2d("-x^2",>add);  ...
>b=solve("x^3-x+x^2",0.5); x=linspace(0,b,200); xi=flipx(x); ...
>plot2d(x|xi,x^3-x|-xi^2,>filled,style="|",fillcolor=1,>add): // Plot daerah antara 2 kurv
```



```
>a=solve("x^3-x+x^2",0), b=solve("x^3-x+x^2",1) // absis titik-titik potong kedua kurva
```

```
0
0.61803398875
```

```
>integrate("(-x^2)-(x^3-x)",a,b) // luas daerah yang diarsir
```

```
0.0758191713542
```

Hasil tersebut akan kita bandingkan dengan perhitungan secara analitik.

```
>a &= solve((-x^2)-(x^3-x),x); $a // menentukan absis titik potong kedua kurva secara eksa
```

$$\left[x=\frac{-\sqrt{5}-1}{2},x=\frac{\sqrt{5}-1}{2},x=0\right]$$

```
>$showev('integrate(-x^2-x^3+x,x,0,(sqrt(5)-1)/2)) // Nilai integral secara eksak
```

$$\int_{0}^{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}{-x^3-x^2+x\;dx}=\frac{13-5^{\frac{3}{2}}}{24}$$

```
>$float(%)
```

$$\int_{0.0}^{0.6180339887498949}{-1.0\,x^3-1.0\,x^2+x\;dx}=0.07581917135421037$$

Panjang Kurva

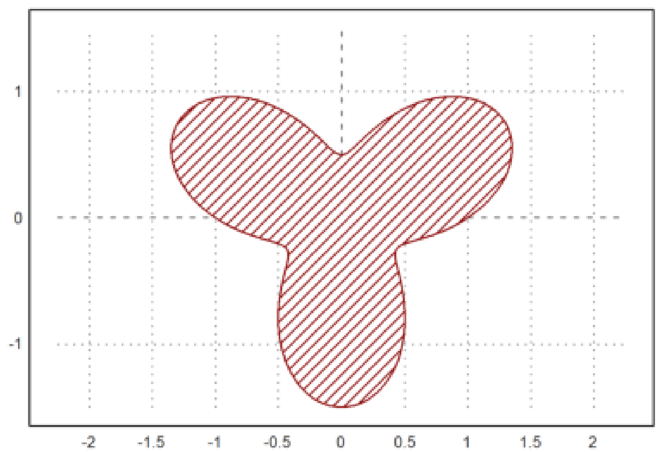
Hitunglah panjang kurva berikut ini dan luas daerah di dalam kurva tersebut.

$$\gamma(t)=(r(t)\cos(t),r(t)\sin(t))$$

dengan

$$r(t)=1+\frac{\sin(3t)}{2},\quad 0\le t\le 2\pi.$$

```
>t=linspace(0,2pi,1000); r=1+sin(3*t)/2; x=r*cos(t); y=r*sin(t); ...
>plot2d(x,y,>filled,fillcolor=red,style="/",r=1.5): // Kita gambar kurvanya terlebih dahul
```




```
>function r(t) &= 1+sin(3*t)/2; $'r(t)=r(t)
```

$r([0, 0.01, 0.02, 0.03, 0.04, 0.05, 0.06, 0.07, 0.08, 0.09, 0.1, 0.11, 0.12, 0.13, 0.14, 0.15, 0.16, 0.17, 0.18, 0.19, 0.2, 0.21, 0.2200000000$

```
>function fx(t) &= r(t)*cos(t); $'fx(t)=fx(t)
```

$fx([0, 0.01, 0.02, 0.03, 0.04, 0.05, 0.06, 0.07, 0.08, 0.09, 0.1, 0.11, 0.12, 0.13, 0.14, 0.15, 0.16, 0.17, 0.18, 0.19, 0.2, 0.21, 0.2200000000$

```
>function fy(t) &= r(t)*sin(t); $'fy(t)=fy(t)
```

$fy([0, 0.01, 0.02, 0.03, 0.04, 0.05, 0.06, 0.07, 0.08, 0.09, 0.1, 0.11, 0.12, 0.13, 0.14, 0.15, 0.16, 0.17, 0.18, 0.19, 0.2, 0.21, 0.2200000000$

```
>function ds(t) &= trigreduce(radcan(sqrt(diff(fx(t),t)^2+diff(fy(t),t)^2))); $'ds(t)=ds(t
```

```
Maxima said:
diff: second argument must be a variable; found errexp1
 -- an error. To debug this try: debugmode(true);

Error in:
... e(radcan(sqrt(diff(fx(t),t)^2+diff(fy(t),t)^2))); $'ds(t)=ds(t ...
                                                     ^
```

```
>$integrate(ds(x),x,0,2*pi) //panjang (keliling) kurva
```

$$\int_{0}^{2\,\pi}{ds\left(x\right)\;dx}$$

Maxima gagal melakukan perhitungan eksak integral tersebut.
Berikut kita hitung integralnya secara umerik dengan perintah EMT.

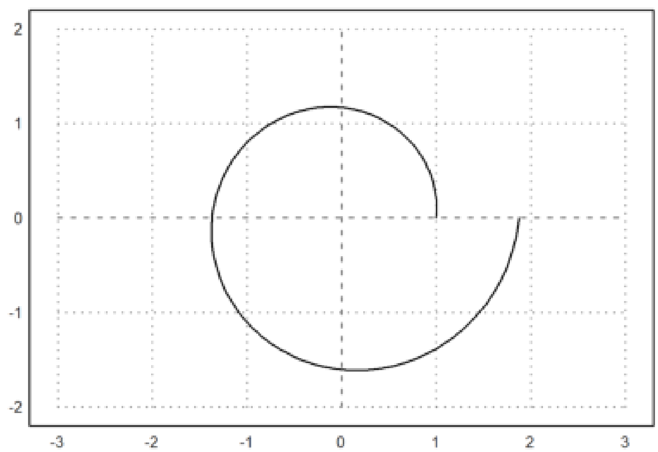
```
>integrate("ds(x)",0,2*pi)
```

```
Function ds not found.
Try list ... to find functions!
Error in expression: ds(x)
%mapexpression1:
    return expr(x,args());
Error in map.
%evalexpression:
    if maps then return %mapexpression1(x,f$;args());
gauss:
    if maps then y=%evalexpression(f$,a+h-(h*xn)',maps;args());
adaptivegauss:
    t1=gauss(f$,c,c+h;args(),=maps);
Try "trace errors" to inspect local variables after errors.
integrate:
    return adaptivegauss(f$,a,b,eps*1000;args(),=maps);
```

Spiral Logaritmik

$$x = e^{ax} \cos x, \; y = e^{ax} \sin x.$$

```
>a=0.1; plot2d("exp(a*x)*cos(x)","exp(a*x)*sin(x)",r=2,xmin=0,xmax=2*pi):
```




```
>&kill(a) // hapus expresi a
```

done

```
>function fx(t) &= exp(a*t)*cos(t); $'fx(t)=fx(t)
```

$fx\,([0, 0.01, 0.02, 0.03, 0.04, 0.05, 0.06, 0.07, 0.08, 0.09, 0.1, 0.11, 0.12, 0.13, 0.14, 0.15, 0.16, 0.17, 0.18, 0.19, 0.2, 0.21, 0.2200000000$

```
>function fy(t) &= exp(a*t)*sin(t); $'fy(t)=fy(t)
```

$fy\,([0, 0.01, 0.02, 0.03, 0.04, 0.05, 0.06, 0.07, 0.08, 0.09, 0.1, 0.11, 0.12, 0.13, 0.14, 0.15, 0.16, 0.17, 0.18, 0.19, 0.2, 0.21, 0.2200000000$

```
>function df(t) &= trigreduce(radcan(sqrt(diff(fx(t),t)^2+diff(fy(t),t)^2))); $'df(t)=df(t
```

```
Maxima said:
diff: second argument must be a variable; found errexp1
 -- an error. To debug this try: debugmode(true);

Error in:
... e(radcan(sqrt(diff(fx(t),t)^2+diff(fy(t),t)^2))); $'df(t)=df(t ...
                                                      ^
```

```
>S &=integrate(df(t),t,0,2*%pi); $S // panjang kurva (spiral)
```

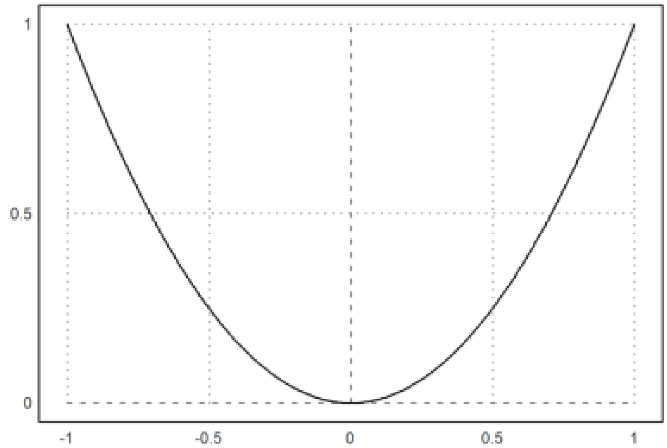
```
Maxima said:
defint: variable of integration cannot be a constant; found errexp1
 -- an error. To debug this try: debugmode(true);

Error in:
S &=integrate(df(t),t,0,2*%pi); $S // panjang kurva (spiral) ...
                               ^
```

```
>S(a=0.1) // Panjang kurva untuk a=0.1
```

```
Function S not found.
Try list ... to find functions!
Error in:
S(a=0.1) // Panjang kurva untuk a=0.1 ...
        ^
```

Soal:
Tunjukkan bahwa keliling lingkaran dengan jari-jari r adalah K=2.pi.r.
Berikut adalah contoh menghitung panjang parabola.

```
>plot2d("x^2",xmin=-1,xmax=1):
```



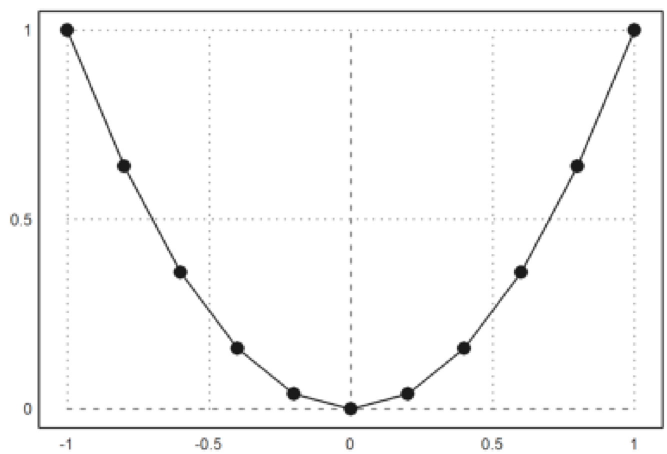
```
>$showev('integrate(sqrt(1+diff(x^2,x)^2),x,-1,1))
```

$$\int_{-1}^{1}{\sqrt{4\,x^2+1}\;dx}=\frac{\operatorname{asinh}2+2\,\sqrt{5}}{2}$$

```
>$float(%)
```

$$\int_{-1.0}^{1.0}{\sqrt{4.0\,x^2+1.0}\;dx}=2.957885715089195$$

```
>x=-1:0.2:1; y=x^2; plot2d(x,y);  ...
>  plot2d(x,y,points=1,style="o#",add=1):
```



Panjang tersebut dapat dihampiri dengan menggunakan jumlah panjang ruas-ruas garis yang menghubungkan titik-titik pada parabola tersebut.

```
>i=1:cols(x)-1; sum(sqrt((x[i+1]-x[i])^2+(y[i+1]-y[i])^2))
```

```
2.95191957027
```

Hasilnya mendekati panjang yang dihitung secara eksak. Untuk mendapatkan hampiran yang cukup akurat, jarak antar titik dapat diperkecil, misalnya 0.1, 0.05, 0.01, dan seterusnya. Cobalah Anda ulangi perhitungannya dengan nilai-nilai tersebut.

Koordinat Kartesius

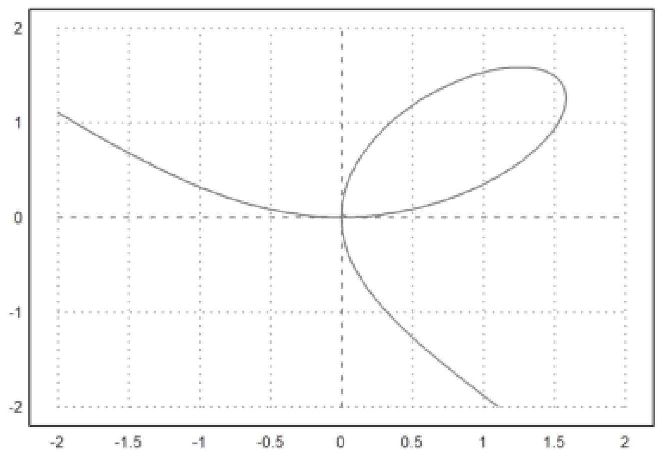
Berikut diberikan contoh perhitungan panjang kurva menggunakan koordinat Kartesius. Kita akan hitung panjang kurva dengan persamaan implisit:

$$x^3 + y^3 - 3xy = 0.$$

```
>z &= x^3+y^3-3*x*y; $z
```

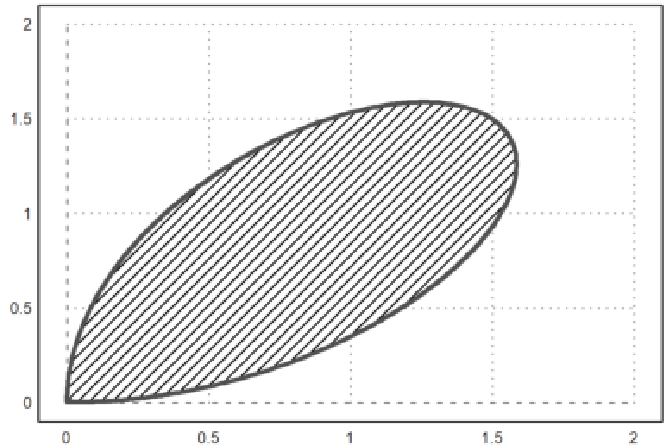
$$y^3 - 3\,x\,y + x^3$$

```
>plot2d(z,r=2,level=0,n=100):
```



Kita tertarik pada kurva di kuadran pertama.

```
>plot2d(z,a=0,b=2,c=0,d=2,level=[-10;0],n=100,contourwidth=3,style="/"):
```



Kita selesaikan persamaannya untuk x.

```
>$z with y=l*x, sol &= solve(%,x); $sol
```

$$l^3\,x^3+x^3-3\,l\,x^2$$

$$\left[x=\frac{3\,l}{l^3+1},x=0\right]$$

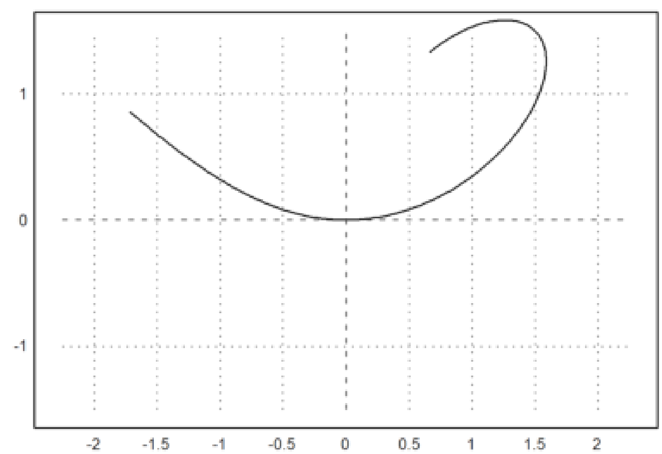
Kita gunakan solusi tersebut untuk mendefinisikan fungsi dengan Maxima.

```
>function f(l) &= rhs(sol[1]); $'f(l)=f(l)
```

$$f\left(l\right)=\frac{3\,l}{l^3+1}$$

Fungsi tersebut juga dapat digunaka untuk menggambar kurvanya. Ingat, bahwa fungsi tersebut adalah nilai x dan nilai y=l*x, yakni x=f(l) dan y=l*f(l).

```
>plot2d(&f(x),&x*f(x),xmin=-0.5,xmax=2,a=0,b=2,c=0,d=2,r=1.5):
```



Elemen panjang kurva adalah:

$$ds = \sqrt{f'(l)^2 + (lf'(l) + f(l))^2}.$$

```
>function ds(l) &= ratsimp(sqrt(diff(f(l),l)^2+diff(l*f(l),l)^2)); $'ds(l)=ds(l)
```

$$ds(l) = \frac{\sqrt{9\,l^8 + 36\,l^6 - 36\,l^5 - 36\,l^3 + 36\,l^2 + 9}}{\sqrt{l^{12} + 4\,l^9 + 6\,l^6 + 4\,l^3 + 1}}$$

```
>$integrate(ds(l),l,0,1)
```

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{9\,l^8 + 36\,l^6 - 36\,l^5 - 36\,l^3 + 36\,l^2 + 9}}{\sqrt{l^{12} + 4\,l^9 + 6\,l^6 + 4\,l^3 + 1}}\,dl$$

Integral tersebut tidak dapat dihitung secara eksak menggunakan Maxima. Kita hitung integral etrsebut secara numerik dengan Euler. Karena kurva simetris, kita hitung untuk nilai variabel integrasi dari 0 sampai 1, kemudian hasilnya dikalikan 2.

```
>2*integrate("ds(x)",0,1)
```

```
4.91748872168
```

```
>2*romberg(&ds(x),0,1)// perintah Euler lain untuk menghitung nilai hampiran integral yang
```

```
4.91748872168
```

Perhitungan di datas dapat dilakukan untuk sebarang fungsi x dan y dengan mendefinisikan fungsi EMT, misalnya kita beri nama panjangkurva. Fungsi ini selalu memanggil Maxima untuk menurunkan fungsi yang diberikan.

```
>function panjangkurva(fx,fy,a,b) ...
```

```
ds=mxm("sqrt(diff(@fx,x)^2+diff(@fy,x)^2)");
return romberg(ds,a,b);
endfunction
```

```
>panjangkurva("x","x^2",-1,1) // cek untuk menghitung panjang kurva parabola sebelumnya
```

```
2.95788571509
```

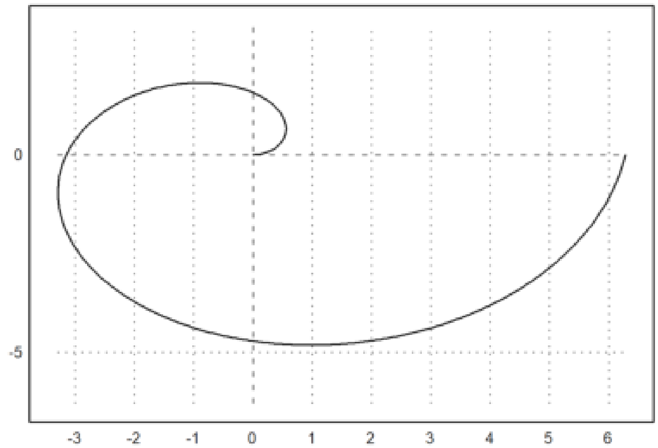
Bandingkan dengan nilai eksak di atas.

```
>2*panjangkurva(mxm("f(x)"),mxm("x*f(x)"),0,1) // cek contoh terakhir, bandingkan hasilnya
```

```
4.91748872168
```

Kita hitung panjang spiral Archimides berikut ini dengan fungsi tersebut.

```
>plot2d("x*cos(x)","x*sin(x)",xmin=0,xmax=2*pi,square=1):
```




```
>panjangkurva("x*cos(x)","x*sin(x)",0,2*pi)
```

```
21.2562941482
```

Berikut kita definisikan fungsi yang sama namun dengan Maxima, untuk perhitungan eksak.

```
>&kill(ds,x,fx,fy)
```

```
done
```

```
>function ds(fx,fy) &&= sqrt(diff(fx,x)^2+diff(fy,x)^2)
```

```
                 2                  2
sqrt(diff  (fy, x) + diff  (fx, x))
```

```
>sol &= ds(x*cos(x),x*sin(x)); $sol // Kita gunakan untuk menghitung panjang kurva terakhi
```

$$\sqrt{\left(\cos x-x\,\sin x\right)^2+\left(\sin x+x\,\cos x\right)^2}$$

```
>$sol | trigreduce | expand, $integrate(%,x,0,2*pi), %()
```

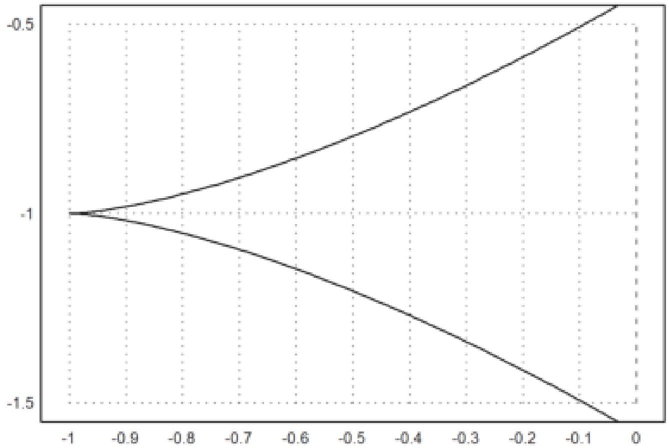
$$\sqrt{x^2+1}$$

$$\frac{\operatorname{asinh}\left(2\,\pi\right)+2\,\pi\,\sqrt{4\,\pi^2+1}}{2}$$

```
21.2562941482
```

Hasilnya sama dengan perhitungan menggunakan fungsi EMT.
Berikut adalah contoh lain penggunaan fungsi Maxima tersebut.

```
>plot2d("3*x^2-1","3*x^3-1",xmin=-1/sqrt(3),xmax=1/sqrt(3),square=1):
```




```
>sol &= radcan(ds(3*x^2-1,3*x^3-1)); $sol
```

$$3\,x\,\sqrt{9\,x^2+4}$$

```
>$showev('integrate(sol,x,0,1/sqrt(3))), $2*float(%) // panjang kurva di atas
```

$$3\,\int_{0}^{\frac{1}{\sqrt{3}}}{x\,\sqrt{9\,x^2+4}\;dx}=3\,\left(\frac{7^{\frac{3}{2}}}{27}-\frac{8}{27}\right)$$

$$6.0\,\int_{0.0}^{0.5773502691896258}{x\,\sqrt{9.0\,x^2+4.0}\;dx}=2.337835372767141$$

Sikloid

Berikut kita akan menghitung panjang kurva lintasan (sikloid) suatu titik pada lingkaran yang berputar ke kanan pada permukaan datar. Misalkan jari-jari lingkaran tersebut adalah r. Posisi titik pusat lingkaran pada saat t adalah:

$$(rt, r).$$

Misalkan posisi titik pada lingkaran tersebut mula-mula (0,0) dan posisinya pada saat t adalah:

$$(r(t-\sin(t)), r(1-\cos(t))).$$

Berikut kita plot lintasan tersebut dan beberapa posisi lingkaran ketika t=0, t=pi/2, t=r*pi.

```
>x &= r*(t-sin(t))
```

```
        [0, 1.66665833335744e-7 r, 1.33330666692022e-6 r,
  4.499797504338432e-6 r, 1.066581336583994e-5 r,
  2.083072932167196e-5 r, 3.599352055540239e-5 r,
  5.71526624672386e-5 r, 8.530603082730626e-5 r,
  1.214508019889565e-4 r, 1.665833531718508e-4 r,
  2.216991628251896e-4 r, 2.877927110806339e-4 r,
  3.658573803051457e-4 r, 4.568853557635201e-4 r,
  5.618675264007778e-4 r, 6.817933857540259e-4 r,
  8.176509330039827e-4 r, 9.704265741758145e-4 r,
  0.001141105023499428 r, 0.001330669204938795 r,
  0.001540100153900437 r, 0.001770376919130678 r,
  0.002022476464811601 r, 0.002297373572865413 r,
  0.002596040745477063 r, 0.002919448107844891 r,
  0.003268563311168871 r, 0.003644351435886262 r,
  0.004047774895164447 r, 0.004479793338660443 r, 0.004941363556565 r,
  0.005433439383882244 r, 0.005956971605131645 r,
  0.006512907859185624 r, 0.007102192544548636 r,
  0.007725766724910044 r, 0.00838456803503801 r,
  0.009079530587017326 r, 0.009811584876838586 r, 0.0105816576913495 r,
  0.01139067201557714 r, 0.01223954694042984 r, 0.01312919757078923 r,
  0.01406053493400045 r, 0.01503446588876983 r, 0.01605189303448024 r,
  0.01711371462093175 r, 0.01822082445851714 r, 0.01937411182884202 r,
  0.02057446139579705 r, 0.02182275311709253 r, 0.02311986215626333 r,
  0.02446665879515308 r, 0.02586400834688696 r, 0.02731277106934082 r,
  0.02881380207911666 r, 0.03036795126603076 r, 0.03197606320812652 r,
  0.0336389770872163 r, 0.03535752660496472 r, 0.03713253989951881 r,
  0.03896483946269502 r, 0.0408552420577305 r, 0.04280455863760801 r,
  0.04481359426396048 r, 0.04688314802656623 r, 0.04901401296344043 r,
  0.05120697598153157 r, 0.05346281777803219 r, 0.05578231276230905 r,
  0.05816622897846346 r, 0.06061532802852698 r, 0.0631303649963022 r,
  0.06571208837185505 r, 0.06836123997666599 r, 0.07107855488944881 r,
  0.07386476137264342 r, 0.07672058079958999 r, 0.07964672758239233 r,
  0.08264390910047736 r, 0.0857128256298576 r, 0.08885417027310427 r,
  0.09206862889003742 r, 0.09535688002914089 r, 0.0987195948597075 r,
  0.1021574371047232 r, 0.1056710629744951 r, 0.1092611211010309 r,
  0.1129282524731764 r, 0.1166730903725168 r, 0.1204962603100498 r,
  0.1243983799636342 r, 0.1283800591162231 r, 0.1324418995948859 r,
  0.1365844952106265 r, 0.140808431699002 r, 0.1451142866615502 r,
  0.1495026295080298 r, 0.1539740213994798 r]
```

```
>y &= r*(1-cos(t))
```

```
        [0, 4.999958333473664e-5 r, 1.999933334222437e-4 r,
  4.499662510124569e-4 r, 7.998933390220841e-4 r,
  0.001249739605033717 r, 0.00179946006479581 r,
  0.002448999746720415 r, 0.003198293697380561 r,
  0.004047266988005727 r, 0.004995834721974179 r,
  0.006043902043303184 r, 0.00719136414613375 r, 0.00843810628521191 r,
  0.009784003787362772 r, 0.01122892206395776 r, 0.01277271662437307 r,
  0.01441523309043924 r, 0.01615630721187855 r, 0.01799576488272969 r,
  0.01993342215875837 r, 0.02196908527585173 r, 0.02410255066939448 r,
  0.02633360499462523 r, 0.02866202514797045 r, 0.03108757828935527 r,
```

```
0.03361002186548678 r, 0.03622910363410947 r, 0.03894456168922911 r,
0.04175612448730281 r, 0.04466351087439402 r, 0.04766643011428662 r,
0.05076458191755917 r, 0.0539576564716131 r, 0.05724533447165381 r,
0.06062728715262111 r, 0.06410317632206519 r, 0.06767265439396564 r,
0.07133536442348987 r, 0.07509094014268702 r, 0.07893900599711501 r,
0.08287917718339499 r, 0.08691105968769186 r, 0.09103425032511492 r,
0.09524833678003664 r, 0.09955289764732322 r, 0.1039475024744748 r,
0.1084317118046711 r, 0.113005077220716 r, 0.1176671413898787 r,
0.1224174381096274 r, 0.1272554923542488 r, 0.1321808203223502 r,
0.1371929294852391 r, 0.1422913186361759 r, 0.1474754779404944 r,
0.152744888986584 r, 0.1580990248377314 r, 0.163537350084813 2 r,
0.1690593208998367 r, 0.1746643850903219 r, 0.1803519821545206 r,
0.1861215433374662 r, 0.1919724916878484 r, 0.1979042421157076 r,
0.2039162014509444 r, 0.2100077685026351 r, 0.216178334119151 r,
0.2224272812490723 r, 0.2287539850028937 r, 0.2351578127155118 r,
0.241638124009 4921 r, 0.2481942708591053 r, 0.2548255976551299 r,
0.2615314412704124 r, 0.2683111311261794 r, 0.2751639892590951 r,
0.2820893303890569 r, 0.2890864619877229 r, 0.2961546843477643 r,
0.303293290652834 9 r, 0.3105015670482534 r, 0.3177787927123868 r,
0.3251242399287333 r, 0.3325371741586922 r, 0.3400168541150183 r,
0.3475625318359485 r, 0.3551734527599992 r, 0.3628488558014202 r,
0.3705879734263036 r, 0.3783900317293359 r, 0.3862542505111889 r,
0.3941798433565377 r, 0.4021660177127022 r, 0.4102119749689023 r,
0.418316910536117 r, 0.4264800139275439 r, 0.4347004688396462 r,
0.4429774532337832 r, 0.451310139418413 r]
```

Berikut kita gambar sikloid untuk r=1.

```
>ex &= x-sin(x); ey &= 1-cos(x); aspect(1);
>plot2d(ex,ey,xmin=0,xmax=4pi,square=1); ...
>  plot2d("2+cos(x)","1+sin(x)",xmin=0,xmax=2pi,>add,color=blue); ...
>  plot2d([2,ex(2)],[1,ey(2)],color=red,>add); ...
>  plot2d(ex(2),ey(2),>points,>add,color=red); ...
>  plot2d("2pi+cos(x)","1+sin(x)",xmin=0,xmax=2pi,>add,color=blue); ...
>  plot2d([2pi,ex(2pi)],[1,ey(2pi)],color=red,>add);  ...
>  plot2d(ex(2pi),ey(2pi),>points,>add,color=red):
```

```
Error : [0,1.66665833335744e-7*r-sin(1.66665833335744e-7*r),1.33330666692022e-6*r-sin(1.

Error generated by error() command

adaptiveeval:
    error(f$|" does not produce a real or column vector");
Try "trace errors" to inspect local variables after errors.
plot2d:
    dw/n,dw/n^2,dw/n;args());
```

Berikut dihitung panjang lintasan untuk 1 putaran penuh. (Jangan salah menduga bahwa panjang lintasan 1 putaran penuh sama dengan keliling lingkaran!)

```
>ds &= radcan(sqrt(diff(ex,x)^2+diff(ey,x)^2)); $ds=trigsimp(ds) // elemen panjang kurva s
```

```
Maxima said:
diff: second argument must be a variable; found errexp1
```

```
 -- an error. To debug this try: debugmode(true);

Error in:
ds &= radcan(sqrt(diff(ex,x)^2+diff(ey,x)^2)); $ds=trigsimp(ds ...
                                               ^
```

```
>ds &= trigsimp(ds); $ds
>$showev('integrate(ds,x,0,2*pi)) // hitung panjang sikloid satu putaran penuh
```

```
Maxima said:
defint: variable of integration must be a simple or subscripted variable.
defint: found errexp1
#0: showev(f='integrate(ds,[0,1.666658333335744e-7*r,1.333306666692022e-6*r,4.499797504338
 -- an error. To debug this try: debugmode(true);

Error in:
$showev('integrate(ds,x,0,2*pi)) // hitung panjang sikloid sat ...
                                 ^
```

```
>integrate(mxm("ds"),0,2*pi) // hitung secara numerik
```

```
Illegal function result in map.
%evalexpression:
    if maps then return %mapexpression1(x,f$;args());
gauss:
    if maps then y=%evalexpression(f$,a+h-(h*xn)',maps;args());
adaptivegauss:
    t1=gauss(f$,c,c+h;args(),=maps);
Try "trace errors" to inspect local variables after errors.
integrate:
    return adaptivegauss(f$,a,b,eps*1000;args(),=maps);
```

```
>romberg(mxm("ds"),0,2*pi) // cara lain hitung secara numerik
```

```
Wrong argument!

Cannot combine a symbolic expression here.
Did you want to create a symbolic expression?
Then start with &.

Try "trace errors" to inspect local variables after errors.
romberg:
    if cols(y)==1 then return y*(b-a); endif;
Error in:
romberg(mxm("ds"),0,2*pi) // cara lain hitung secara numerik ...
                          ^
```

Perhatikan, seperti terlihat pada gambar, panjang sikloid lebih besar daripada keliling lingkarannya, yakni:

$$2\pi.$$

Kurvatur (Kelengkungan) Kurva

image: Osculating.png

Aslinya, kelengkungan kurva diferensiabel (yakni, kurva mulus yang tidak lancip) di titik P didefinisikan melalui lingkaran oskulasi (yaitu, lingkaran yang melalui titik P dan terbaik memperkirakan, paling banyak menyinggung kurva di sekitar P). Pusat dan radius kelengkungan kurva di P adalah pusat dan radius lingkaran oskulasi. Kelengkungan adalah kebalikan dari radius kelengkungan:

$$\kappa = \frac{1}{R}$$

dengan R adalah radius kelengkungan. (Setiap lingkaran memiliki kelengkungan ini pada setiap titiknya, dapat diartikan, setiap lingkaran berputar 2pi sejauh 2piR.)

Definisi ini sulit dimanipulasi dan dinyatakan ke dalam rumus untuk kurva umum. Oleh karena itu digunakan definisi lain yang ekivalen.

Definisi Kurvatur dengan Fungsi Parametrik Panjang Kurva

Setiap kurva diferensiabel dapat dinyatakan dengan persamaan parametrik terhadap panjang kurva s:

$$\gamma(s) = (x(s),\ y(s)),$$

dengan x dan y adalah fungsi riil yang diferensiabel, yang memenuhi:

$$\|\gamma'(s)\| = \sqrt{x'(s)^2 + y'(s)^2} = 1.$$

Ini berarti bahwa vektor singgung

$$\mathbf{T}(s) = (x'(s),\ y'(s))$$

memiliki norm 1 dan merupakan vektor singgung satuan.

Apabila kurvanya memiliki turunan kedua, artinya turunan kedua x dan y ada, maka T′(s) ada. Vektor ini merupakan normal kurva yang arahnya menuju pusat kurvatur, norm-nya merupakan nilai kurvatur (kelengkungan):

$$\begin{aligned}
\mathbf{T}(s) &= \gamma'(s), \\
\mathbf{T}^2(s) &= 1 \text{ (konstanta)} \Rightarrow \mathbf{T}'(s)\cdot\mathbf{T}(s) = 0 \\
\kappa(s) &= \|\mathbf{T}'(s)\| = \|\gamma''(s)\| = \sqrt{x''(s)^2 + y''(s)^2}.
\end{aligned}$$

Nilai

$$R(s) = \frac{1}{\kappa(s)}$$

disebut jari-jari (radius) kelengkungan kurva.

Bilangan riil

$$k(s) = \pm\kappa(s)$$

disebut nilai kelengkungan bertanda.

Contoh:

Akan ditentukan kurvatur lingkaran

$$x = r\cos t,\ y = r\sin t.$$

```
>fx &= r*cos(t); fy &=r*sin(t);
>&assume(t>0,r>0); s &=integrate(sqrt(diff(fx,t)^2+diff(fy,t)^2),t,0,t); s // elemen panja
```

```
Maxima said:
diff: second argument must be a variable; found errexp1
 -- an error. To debug this try: debugmode(true);
```

```
Error in:
... =integrate(sqrt(diff(fx,t)^2+diff(fy,t)^2),t,0,t); s // elemen ...
                                                     ^
```

```
>&kill(s); fx &= r*cos(s/r); fy &=r*sin(s/r); // definisi ulang persamaan parametrik terha
>k &= trigsimp(sqrt(diff(fx,s,2)^2+diff(fy,s,2)^2)); $k // nilai kurvatur lingkaran dengan
```

$$\frac{1}{r}$$

Untuk representasi parametrik umum, misalkan

$$x = x(t),\ y = y(t)$$

merupakan persamaan parametrik untuk kurva bidang yang terdiferensialkan dua kali. Kurvatur untuk kurva tersebut didefinisikan sebagai

$$\begin{aligned}\kappa &= \frac{d\phi}{ds} = \frac{\frac{d\phi}{dt}}{\frac{ds}{dt}} \quad (\phi \text{ adalah sudut kemiringan garis singgung dan } s \text{ adalah panjang kurva}) \\ &= \frac{\frac{d\phi}{dt}}{\sqrt{(\frac{dx}{dt})^2 + (\frac{dy}{dt})^2}} = \frac{\frac{d\phi}{dt}}{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}}.\end{aligned}$$

Selanjutnya, pembilang pada persamaan di atas dapat dicari sebagai berikut.

$$\sec^2\phi \frac{d\phi}{dt} = \frac{d}{dt}(\tan\phi) = \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{dy/dt}{dx/dt}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{y'(t)}{x'(t)}\right) = \frac{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}{x'(t)^2}.$$

$$\begin{aligned}\frac{d\phi}{dt} &= \frac{1}{\sec^2\phi}\frac{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}{x'(t)^2} \\ &= \frac{1}{1+\tan^2\phi}\frac{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}{x'(t)^2} \\ &= \frac{1}{1+\left(\frac{y'(t)}{x'(t)}\right)^2}\frac{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}{x'(t)^2} \\ &= \frac{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}{x'(t)^2 + y'(t)^2}.\end{aligned}$$

Jadi, rumus kurvatur untuk kurva parametrik

$$x = x(t),\ y = y(t)$$

adalah

$$\kappa(t) = \frac{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}{(x'(t)^2 + y'(t)^2)^{3/2}}.$$

Jika kurvanya dinyatakan dengan persamaan parametrik pada koordinat kutub

$$x = r(\theta)\cos\theta,\ y = r(\theta)\sin\theta,$$

maka rumus kurvaturnya adalah

$$\kappa(\theta) = \frac{r(\theta)^2 + 2r'(\theta)^2 - r(\theta)r''(\theta)}{(r'(\theta)^2 + r'(\theta)^2)^{3/2}}.$$

(Silakan Anda turunkan rumus tersebut!)
Contoh:
Lingkaran dengan pusat (0,0) dan jari-jari r dapat dinyatakan dengan persamaan parametrik

$$x = r\cos t,\ y = r\sin t.$$

Nilai kelengkungan lingkaran tersebut adalah

$$\kappa(t) = \frac{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}{(x'(t)^2 + y'(t)^2)^{3/2}} = \frac{r^2}{r^3} = \frac{1}{r}.$$

Hasil cocok dengan definisi kurvatur suatu kelengkungan.
Kurva

$$y = f(x)$$

dapat dinyatakan ke dalam persamaan parametrik

$$x = t,\ y = f(t),\ \text{ dengan } x'(t) = 1,\ x''(t) = 0,$$

sehingga kurvaturnya adalah

$$\kappa(t) = \frac{y''(t)}{(1 + y'(t)^2)^{3/2}}.$$

Contoh:
Akan ditentukan kurvatur parabola

$$y = ax^2 + bx + c.$$

```
>function f(x) &= a*x^2+b*x+c; $y=f(x)
```

```
>function k(x) &= (diff(f(x),x,2))/(1+diff(f(x),x)^2)^(3/2); $'k(x)=k(x) // kelengkungan p
```

```
Maxima said:
diff: second argument must be a variable; found errexp1
 -- an error. To debug this try: debugmode(true);

Error in:
... (x) &= (diff(f(x),x,2))/(1+diff(f(x),x)^2)^(3/2); $'k(x)=k(x)  ...
                                                     ^
```

```
>function f(x) &= x^2+x+1; $y=f(x) // akan kita plot kelengkungan parabola untuk a=b=c=1
```

```
>function k(x) &= (diff(f(x),x,2))/(1+diff(f(x),x)^2)^(3/2); $'k(x)=k(x) // kelengkungan p
```

```
Maxima said:
diff: second argument must be a variable; found errexp1
 -- an error. To debug this try: debugmode(true);

Error in:
... (x) &= (diff(f(x),x,2))/(1+diff(f(x),x)^2)^(3/2); $'k(x)=k(x)  ...
                                                     ^
```

Berikut kita gambar parabola tersebut beserta kurva kelengkungan, kurva jari-jari kelengkungan dan salah satu lingkaran oskulasi di titik puncak parabola. Perhatikan, puncak parabola dan jari-jari lingkaran oskulasi di puncak parabola adalah

$$(-1/2, 3/4),\ 1/k(2) = 1/2,$$

sehingga pusat lingkaran oskulasi adalah (-1/2, 5/4).

```
>plot2d(["f(x)", "k(x)"],-2,1, color=[blue,red]); plot2d("1/k(x)",-1.5,1,color=green,>add)
>plot2d("-1/2+1/k(-1/2)*cos(x)","5/4+1/k(-1/2)*sin(x)",xmin=0,xmax=2pi,>add,color=blue):
```

```
Error : f(x) does not produce a real or column vector

Error generated by error() command

%ploteval:
    error(f$|" does not produce a real or column vector");
adaptiveevalone:
    s=%ploteval(g$,t;args());
Try "trace errors" to inspect local variables after errors.
plot2d:
    dw/n,dw/n^2,dw/n,auto;args());
```

Untuk kurva yang dinyatakan dengan fungsi implisit

$$F(x, y) = 0$$

dengan turunan-turunan parsial

$$F_x = \frac{\partial F}{\partial x},\ F_y = \frac{\partial F}{\partial y},\ F_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right),\ F_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right),\ F_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right),$$

berlaku

$$F_x dx + F_y dy = 0 \text{ atau } \frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y},$$

sehingga kurvaturnya adalah

$$\kappa = \frac{F_y^2 F_{xx} - 2F_x F_y F_{xy} + F_x^2 F_{yy}}{\left(F_x^2 + F_y^2\right)^{3/2}}.$$

(Silakan Anda turunkan sendiri!)
Contoh 1:
Parabola

$$y = ax^2 + bx + c$$

dapat dinyatakan ke dalam persamaan implisit

$$ax^2 + bx + c - y = 0.$$

```
>function F(x,y) &=a*x^2+b*x+c-y; $F(x,y)
```

```
>Fx &= diff(F(x,y),x), Fxx &=diff(F(x,y),x,2), Fy &=diff(F(x,y),y), Fxy &=diff(diff(F(x,y)
```

```
Maxima said:
diff: second argument must be a variable; found errexp1
 -- an error. To debug this try: debugmode(true);

Error in:
Fx &= diff(F(x,y),x), Fxx &=diff(F(x,y),x,2), Fy &=diff(F(x,y) ...
                    ^
```

```
>function k(x) &= (Fy^2*Fxx-2*Fx*Fy*Fxy+Fx^2*Fyy)/(Fx^2+Fy^2)^(3/2); $'k(x)=k(x) // kurvat
```

$k\left(\left[0, 1.666658333335744 \times 10^{-7}\,r, 1.333306666692022 \times 10^{-6}\,r, 4.499797504338432 \times 10^{-6}\,r, 1.066581336583994 \times 10^{-5}\,r, 2.083\right.\right.$

Hasilnya sama dengan sebelumnya yang menggunakan persamaan parabola biasa.

Latihan

- Bukalah buku Kalkulus.
- Cari dan pilih beberapa (paling sedikit 5 fungsi berbeda tipe/bentuk/jenis) fungsi dari buku tersebut, kemudian definisikan di EMT pada baris-baris perintah berikut (jika perlu tambahkan lagi).
- Untuk setiap fungsi, tentukan anti turunannya (jika ada), hitunglah integral tentu dengan batas-batas yang menarik (Anda tentukan sendiri), seperti contoh-contoh tersebut.
- Lakukan hal yang sama untuk fungsi-fungsi yang tidak dapat diintegralkan (cari sedikitnya 3 fungsi).
- Gambar grafik fungsi dan daerah integrasinya pada sumbu koordinat yang sama.
- Gunakan integral tentu untuk mencari luas daerah yang dibatasi oleh dua kurva yang berpotongan di dua titik. (Cari dan gambar kedua kurva dan arsir (warnai) daerah yang dibatasi oleh keduanya.)
- Gunakan integral tentu untuk menghitung volume benda putar kurva y= f(x) yang diputar mengelilingi sumbu x dari x=a sampai x=b, yakni

$$V = \int_a^b \pi (f(x)^2\, dx.$$

(Pilih fungsinya dan gambar kurva dan benda putar yang dihasilkan. Anda dapat mencari contoh-contoh bagaimana cara menggambar benda hasil perputaran suatu kurva.)
- Gunakan integral tentu untuk menghitung panjang kurva y=f(x) dari x=a sampai x=b dengan menggunakan rumus:

$$S = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx.$$

(Pilih fungsi dan gambar kurvanya.)
- Apabila fungsi dinyatakan dalam koordinat kutub x=f(r,t), y=g(r,t), r=h(t), x=a bersesuaian dengan t=t0 dan x=b bersesuian dengan t=t1, maka rumus di atas akan menjadi:

$$S = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, dt.$$

- Pilih beberapa kurva menarik (selain lingkaran dan parabola) dari buku kalkulus. Nyatakan setiap kurva tersebut dalam bentuk:

```
a. koordinat Kartesius (persamaan y=f(x))
b. koordinat kutub ( r=r(theta))
c. persamaan parametrik x=x(t), y=y(t)
d. persamaan implit F(x,y)=0
```

- Tentukan kurvatur masing-masing kurva dengan menggunakan keempat representasi tersebut (hasilnya harus sama).
- Gambarlah kurva asli, kurva kurvatur, kurva jari-jari lingkaran oskulasi, dan salah satu lingkaran oskulasinya.

```
>
```

Barisan dan Deret

(Catatan: bagian ini belum lengkap. Anda dapat membaca contoh-contoh pengguanaan EMT dan Maxima untuk menghitung limit barisan, rumus jumlah parsial suatu deret, jumlah tak hingga suatu deret konvergen, dan sebagainya. Anda dapat mengeksplor contoh-contoh di EMT atau perbagai panduan penggunaan Maxima di software Maxima atau dari Internet.)

Barisan dapat didefinisikan dengan beberapa cara di dalam EMT, di antaranya:
- dengan cara yang sama seperti mendefinisikan vektor dengan elemen-elemen beraturan (menggunakan titik dua ":");
- menggunakan perintah "sequence" dan rumus barisan (suku ke -n);
- menggunakan perintah "iterate" atau "niterate";
- menggunakan fungsi Maxima "create_list" atau "makelist" untuk menghasilkan barisan simbolik;
- menggunakan fungsi biasa yang inputnya vektor atau barisan;
- menggunakan fungsi rekursif.

EMT menyediakan beberapa perintah (fungsi) terkait barisan, yakni:
- sum: menghitung jumlah semua elemen suatu barisan
- cumsum: jumlah kumulatif suatu barisan
- differences: selisih antar elemen-elemen berturutan

EMT juga dapat digunakan untuk menghitung jumlah deret berhingga maupun deret tak hingga, dengan menggunakan perintah (fungsi) "sum". Perhitungan dapat dilakukan secara numerik maupun simbolik dan eksak.

Berikut adalah beberapa contoh perhitungan barisan dan deret menggunakan EMT.

```
>1:10 // barisan sederhana
```

```
[1,  2,  3,  4,  5,  6,  7,  8,  9,  10]
```

```
>1:2:30
```

```
[1,  3,  5,  7,  9,  11,  13,  15,  17,  19,  21,  23,  25,  27,  29]
```

Iterasi dan Barisan

EMT menyediakan fungsi iterate("g(x)", x0, n) untuk melakukan iterasi

$$x_{k+1} = g(x_k),\ x_0 = x_0, k = 1, 2, 3, ..., n.$$

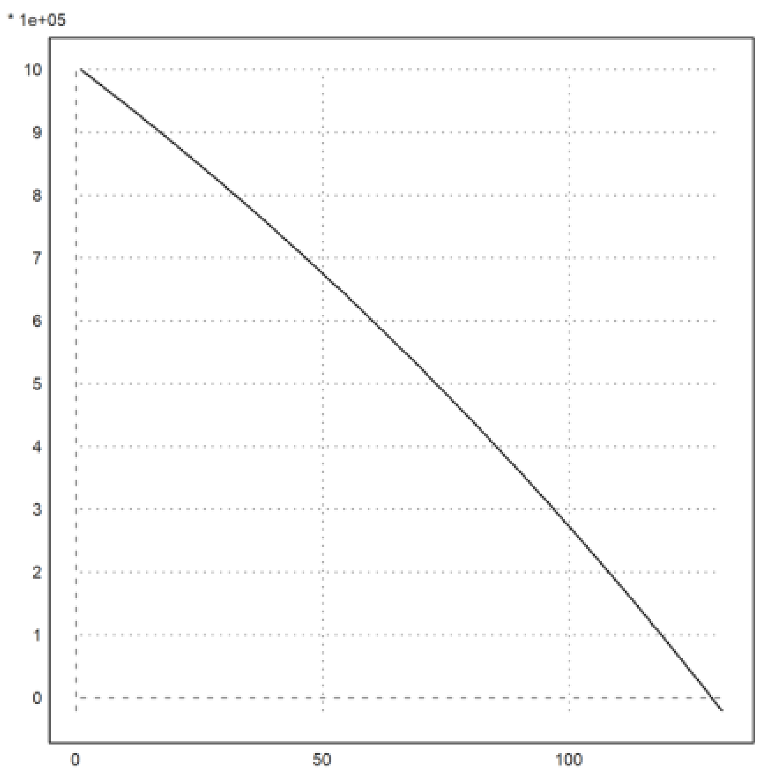
Berikut ini disajikan contoh-contoh penggunaan iterasi dan rekursi dengan EMT. Contoh pertama menunjukkan pertumbuhan dari nilai awal 1000 dengan laju pertambahan 5%, selama 10 periode.

```
>q=1.05; iterate("x*q",1000,n=10)'
```

```
     1000
     1050
   1102.5
  1157.63
  1215.51
  1276.28
   1340.1
   1407.1
  1477.46
  1551.33
  1628.89
```

Contoh berikutnya memperlihatkan bahaya menabung di bank pada masa sekarang! Dengan bunga tabungan sebesar 6% per tahun atau 0.5% per bulan dipotong pajak 20%, dan biaya administrasi 10000 per bulan, tabungan sebesar 1 juta tanpa diambil selama sekitar 10 tahunan akan habis diambil oleh bank!

```
>r=0.005; plot2d(iterate("(1+0.8*r)*x-10000",1000000,n=130)):
```



Silakan Anda coba-coba, dengan tabungan minimal berapa agar tidak akan habis diambil oleh bank dengan ketentuan bunga dan biaya administrasi seperti di atas.
Berikut adalah perhitungan minimal tabungan agar aman di bank dengan bunga sebesar r dan biaya administrasi a, pajak bunga 20%.

```
>$solve(0.8*r*A-a,A), $% with [r=0.005, a=10]
```

$$\left[A=\frac{5\,a}{4\,r}\right]$$

$$[A=2500.0]$$

Berikut didefinisikan fungsi untuk menghitung saldo tabungan, kemudian dilakukan iterasi.

```
>function saldo(x,r,a) := round((1+0.8*r)*x-a,2);
>iterate({{"saldo",0.005,10}},1000,n=6)
```

```
[1000,  994,  987.98,  981.93,  975.86,  969.76,  963.64]
```

```
>iterate({{"saldo",0.005,10}},2000,n=6)
```

```
[2000,  1998,  1995.99,  1993.97,  1991.95,  1989.92,  1987.88]
```

```
>iterate({{"saldo",0.005,10}},2500,n=6)
```

```
[2500,  2500,  2500,  2500,  2500,  2500,  2500]
```

Tabungan senilai 2,5 juta akan aman dan tidak akan berubah nilai (jika tidak ada penarikan), sedangkan jika tabungan awal kurang dari 2,5 juta, lama kelamaan akan berkurang meskipun tidak pernah dilakukan penarikan uang tabungan.

```
>iterate({{"saldo",0.005,10}},3000,n=6)
```

```
[3000,  3002,  3004.01,  3006.03,  3008.05,  3010.08,  3012.12]
```

Tabungan yang lebih dari 2,5 juta baru akan bertambah jika tidak ada penarikan.
Untuk barisan yang lebih kompleks dapat digunakan fungsi "sequence()". Fungsi ini menghitung nilai-nilai x[n] dari semua nilai sebelumnya, x[1],...,x[n-1] yang diketahui.
Berikut adalah contoh barisan Fibonacci.

$$x_n = x_{n-1} + x_{n-2}, \quad x_1 = 1, \quad x_2 = 1$$

```
>sequence("x[n-1]+x[n-2]",[1,1],15)
```

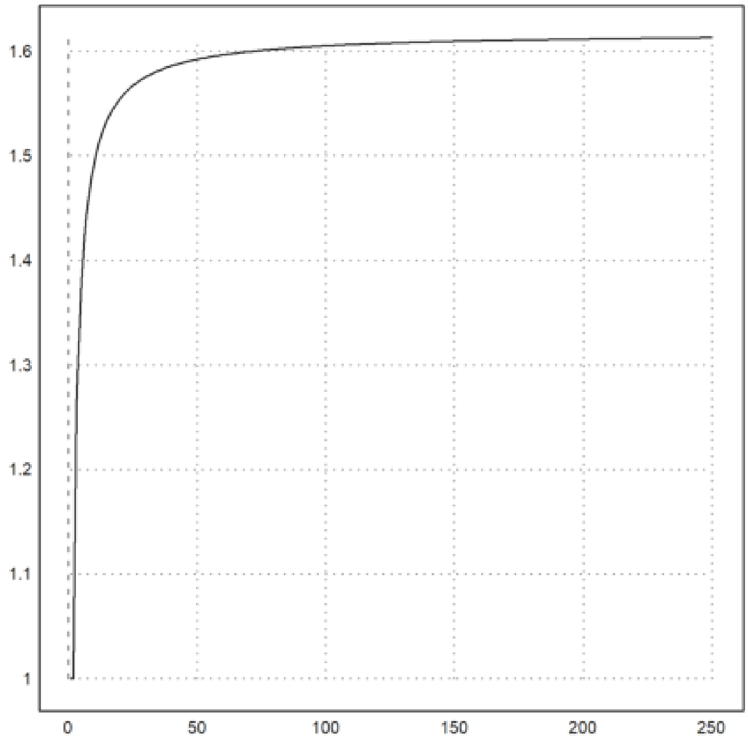
```
[1,  1,  2,  3,  5,  8,  13,  21,  34,  55,  89,  144,  233,  377,  610]
```

Barisan Fibonacci memiliki banyak sifat menarik, salah satunya adalah akar pangkat ke-n suku ke-n akan konvergen ke pecahan emas:

```
>$'(1+sqrt(5))/2=float((1+sqrt(5))/2)
```

$$\frac{\sqrt{5}+1}{2} = 1.618033988749895$$

```
>plot2d(sequence("x[n-1]+x[n-2]",[1,1],250)^(1/(1:250))):
```



Barisan yang sama juga dapat dihasilkan dengan menggunakan loop.

```
>x=ones(500); for k=3 to 500; x[k]=x[k-1]+x[k-2]; end;
```

Rekursi dapat dilakukan dengan menggunakan rumus yang tergantung pada semua elemen sebelumnya. Pada contoh berikut, elemen ke-n merupakan jumlah (n-1) elemen sebelumnya, dimulai dengan 1 (elemen ke-1). Jelas, nilai elemen ke-n adalah 2^(n-2), untuk n=2, 4, 5, ...

```
>sequence("sum(x)",1,10)
```

```
 [1,   1,   2,   4,   8,   16,   32,   64,   128,   256]
```

Selain menggunakan ekspresi dalam x dan n, kita juga dapat menggunakan fungsi.
Pada contoh berikut, digunakan iterasi

$$x_n = A \cdot x_{n-1},$$

dengan A suatu matriks 2x2, dan setiap x[n] merupakan matriks/vektor 2x1.

```
>A=[1,1;1,2]; function suku(x,n) := A.x[,n-1]
>sequence("suku",[1;1],6)
```

```
 Real 2 x 6 matrix

             1             2             5            13     ...
             1             3             8            21     ...
```

Hasil yang sama juga dapat diperoleh dengan menggunakan fungsi perpangkatan matriks "matrixpower()". Cara ini lebih cepat, karena hanya menggunakan perkalian matriks sebanyak log_2(n).

$$x_n = A.x_{n-1} = A^2.x_{n-2} = A^3.x_{n-3} = ... = A^{n-1}.x_1.$$

```
>sequence("matrixpower(A,n).[1;1]",1,6)
```

```
  Real 2 x 6 matrix

              1             5            13            34      ...
              1             8            21            55      ...
```

Spiral Theodorus

image: Spiral_of_Theodorus.png
Spiral Theodorus (spiral segitiga siku-siku) dapat digambar secara rekursif. Rumus rekursifnya adalah:

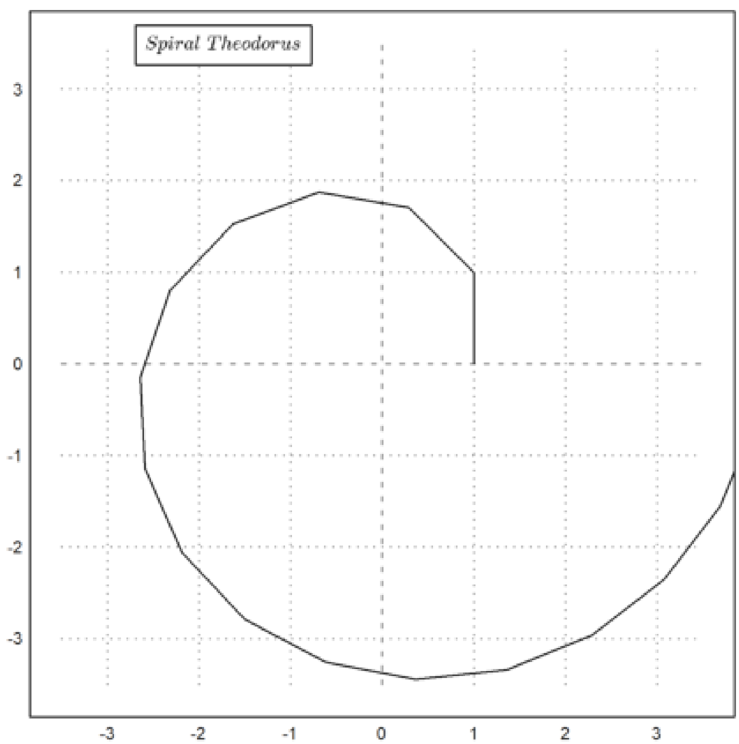
$$x_n = \left(1 + \frac{i}{\sqrt{n-1}}\right) x_{n-1}, \quad x_1 = 1,$$

yang menghasilkan barisan bilangan kompleks.

```
>function g(n) := 1+I/sqrt(n)
```

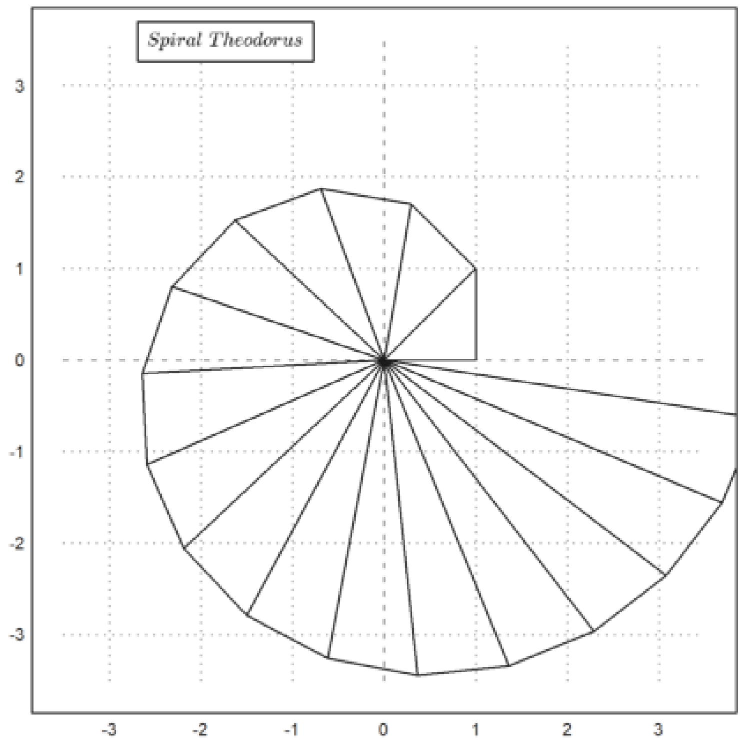
Rekursinya dapat dijalankan sebanyak 17 untuk menghasilkan barisan 17 bilangan kompleks, kemudian digambar bilangan-bilangan kompleksnya.

```
>x=sequence("g(n-1)*x[n-1]",1,17); plot2d(x,r=3.5); textbox(latex("Spiral\ Theodorus"),0.4
```



Selanjutnya dihubungan titik 0 dengan titik-titik kompleks tersebut menggunakan loop.

```
>for i=1:cols(x); plot2d([0,x[i]],>add); end:
```




```
>
```

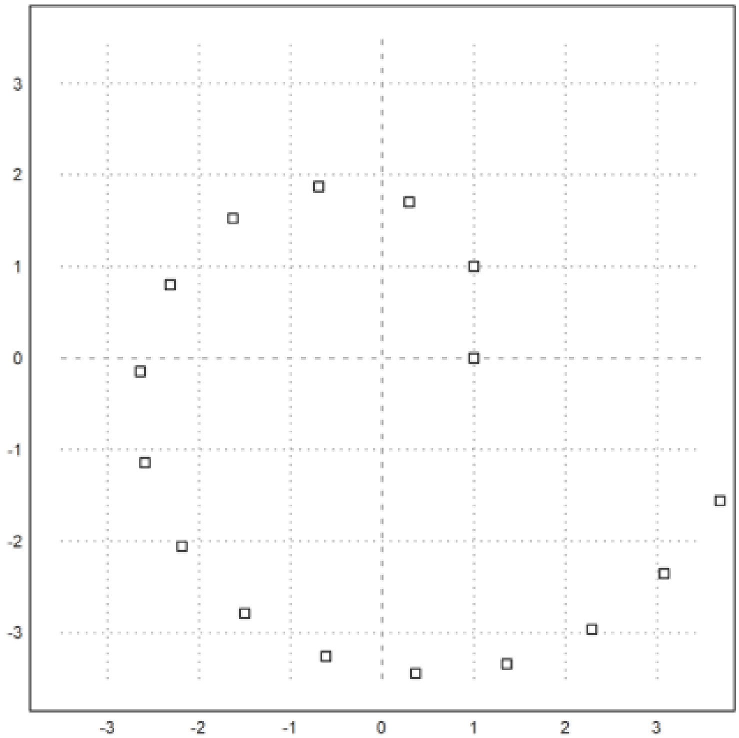
Spiral tersebut juga dapat didefinisikan menggunakan fungsi rekursif, yang tidak memmerlukan indeks dan bilangan kompleks. Dalam hal ini diigunakan vektor kolom pada bidang.

```
>function gstep (v) ...
```

```
  w=[-v[2];v[1]];
  return v+w/norm(w);
  endfunction
```

Jika dilakukan iterasi 16 kali dimulai dari [1;0] akan didapatkan matriks yang memuat vektor-vektor dari setiap iterasi.

```
>x=iterate("gstep",[1;0],16); plot2d(x[1],x[2],r=3.5,>points):
```



Kekonvergenan

Terkadang kita ingin melakukan iterasi sampai konvergen. Apabila iterasinya tidak konvergen setelah ditunggu lama, Anda dapat menghentikannya dengan menekan tombol [ESC].

```
>iterate("cos(x)",1) // iterasi x(n+1)=cos(x(n)), dengan x(0)=1.
```

```
0.739085133216
```

Iterasi tersebut konvergen ke penyelesaian persamaan

$$x = \cos(x).$$

Iterasi ini juga dapat dilakukan pada interval, hasilnya adalah barisan interval yang memuat akar tersebut.

```
>hasil := iterate("cos(x)",~1,2~) //iterasi x(n+1)=cos(x(n)), dengan interval awal (1, 2)
```

```
~0.739085133211,0.7390851332133~
```

Jika interval hasil tersebut sedikit diperlebar, akan terlihat bahwa interval tersebut memuat akar persamaan x=cos(x).

```
>h=expand(hasil,100), cos(h) << h
```

```
~0.73908513309,0.73908513333~
1
```

Iterasi juga dapat digunakan pada fungsi yang didefinisikan.

```
>function f(x) := (x+2/x)/2
```

Iterasi x(n+1)=f(x(n)) akan konvergen ke akar kuadrat 2.

```
>iterate("f",2), sqrt(2)
```

```
1.41421356237
1.41421356237
```

Jika pada perintah iterate diberikan tambahan parameter n, maka hasil iterasinya akan ditampilkan mulai dari iterasi pertama sampai ke-n.

```
>iterate("f",2,5)
```

```
[2,  1.5,  1.41667,  1.41422,  1.41421,  1.41421]
```

Untuk iterasi ini tidak dapat dilakukan terhadap interval.

```
>niterate("f",~1,2~,5)
```

```
[ ~1,2~,  ~1,2~,  ~1,2~,  ~1,2~,  ~1,2~,  ~1,2~ ]
```

Perhatikan, hasil iterasinya sama dengan interval awal. Alasannya adalah perhitungan dengan interval bersifat terlalu longgar. Untuk meingkatkan perhitungan pada ekspresi dapat digunakan pembagian intervalnya, menggunakan fungsi ieval().

```
>function s(x) := ieval("(x+2/x)/2",x,10)
```

Selanjutnya dapat dilakukan iterasi hingga diperoleh hasil optimal, dan intervalnya tidak semakin mengecil. Hasilnya berupa interval yang memuat akar persamaan:

$$x = \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right).$$

Satu-satunya solusi adalah

$$x = \sqrt{2}.$$

```
>iterate("s",~1,2~)
```

```
~1.41421356236,1.41421356239~
```

Fungsi "iterate()" juga dapat bekerja pada vektor. Berikut adalah contoh fungsi vektor, yang menghasilkan rata-rata aritmetika dan rata-rata geometri.

$$(a_{n+1}, b_{n+1}) = \left(\frac{a_n + b_n}{2}, \sqrt{a_n b_n}\right)$$

Iterasi ke-n disimpan pada vektor kolom x[n].

```
>function g(x) := [(x[1]+x[2])/2;sqrt(x[1]*x[2])]
```

Iterasi dengan menggunakan fungsi tersebut akan konvergen ke rata-rata aritmetika dan geometri dari nilai-nilai awal.

```
>iterate("g",[1;5])
```

```
        2.60401
        2.60401
```

Hasil tersebut konvergen agak cepat, seperti kita cek sebagai berikut.

```
>iterate("g",[1;5],4)
```

```
              1             3       2.61803       2.60403       2.60401
              5       2.23607       2.59002       2.60399       2.60401
```

Iterasi pada interval dapat dilakukan dan stabil, namun tidak menunjukkan bahwa limitnya pada batas-batas yang dihitung.

```
>iterate("g",[~1~;~5~],4)
```

```
Interval 2 x 5 matrix

~0.999999999999999778,1.00000000000000022~     ...
~4.99999999999999911,5.00000000000000089~     ...
```

Iterasi berikut konvergen sangat lambat.

$$x_{n+1} = \sqrt{x_n}.$$

```
>iterate("sqrt(x)",2,10)
```

```
[2,  1.41421,  1.18921,  1.09051,  1.04427,  1.0219,  1.01089,
1.00543,  1.00271,  1.00135,  1.00068]
```

Kekonvergenan iterasi tersebut dapat dipercepatdengan percepatan Steffenson:

```
>steffenson("sqrt(x)",2,10)
```

```
[1.04888,  1.00028,  1,  1]
```

Iterasi menggunakan Loop yang ditulis Langsung

Berikut adalah beberapa contoh penggunaan loop untuk melakukan iterasi yang ditulis langsung pada baris perintah.

```
>x=2; repeat x=(x+2/x)/2; until x^2~=2; end; x,
```

```
1.41421356237
```

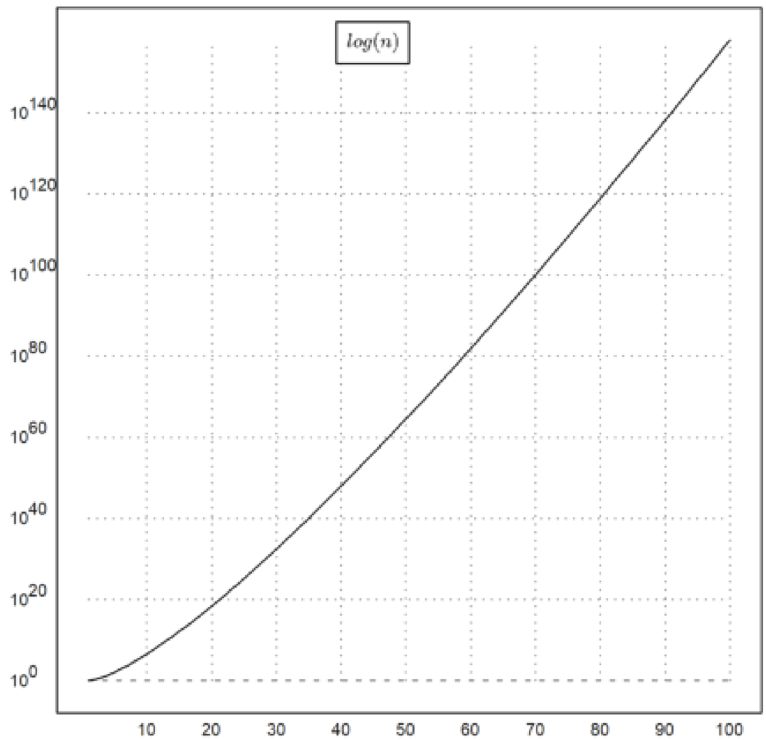
Penggabungan matriks menggunakan tanda "|" dapat digunakan untuk menyimpan semua hasil iterasi.

```
>v=[1]; for i=2 to 8; v=v|(v[i-1]*i); end; v,
```

```
 [1,  2,  6,  24,  120,  720,  5040,  40320]
```

hasil iterasi juga dapat disimpan pada vektor yang sudah ada.

```
>v=ones(1,100); for i=2 to cols(v); v[i]=v[i-1]*i; end; ...
>plot2d(v,logplot=1); textbox(latex(&log(n)),x=0.5):
```




```
>A =[0.5,0.2;0.7,0.1]; b=[2;2]; ...
>x=[1;1]; repeat xnew=A.x-b; until all(xnew~=x); x=xnew; end; ...
>x,
```

```
      -7.09677
      -7.74194
```

Iterasi di dalam Fungsi

Fungsi atau program juga dapat menggunakan iterasi dan dapat digunakan untuk melakukan iterasi. Berikut adalah beberapa contoh iterasi di dalam fungsi.

Contoh berikut adalah suatu fungsi untuk menghitung berapa lama suatu iterasi konvergen. Nilai fungsi tersebut adalah hasil akhir iterasi dan banyak iterasi sampai konvergen.

```
>function map hiter(f$,x0) ...
```

```
x=x0;
maxiter=0;
repeat
  xnew=f$(x);
  maxiter=maxiter+1;
  until xnew~=x;
  x=xnew;
end;
return maxiter;
endfunction
```

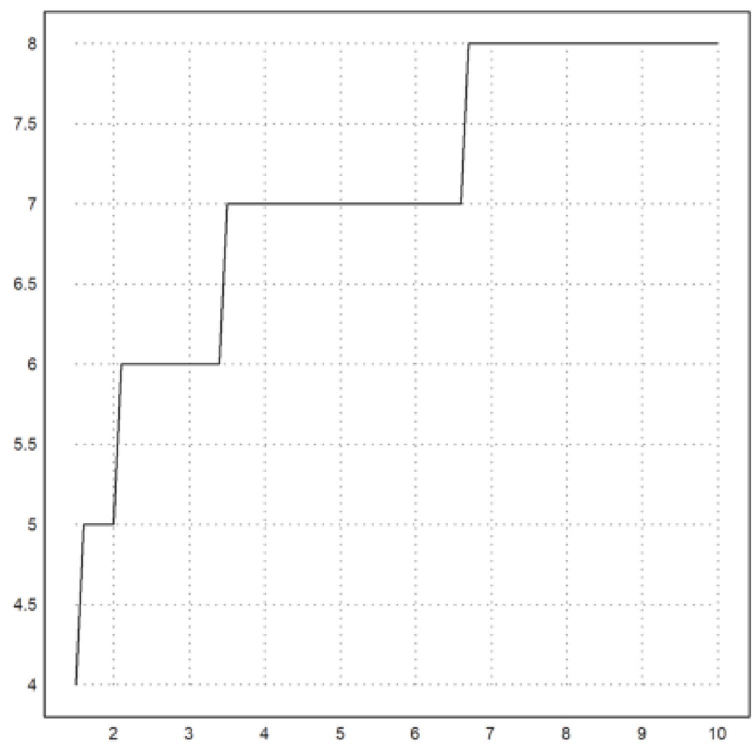
Misalnya, berikut adalah iterasi untuk mendapatkan hampiran akar kuadrat 2, cukup cepat, konvergen pada iterasi ke-5, jika dimulai dari hampiran awal 2.

```
>hiter("(x+2/x)/2",2)
```

```
5
```

Karena fungsinya didefinisikan menggunakan "map". maka nilai awalnya dapat berupa vektor.

```
>x=1.5:0.1:10; hasil=hiter("(x+2/x)/2",x); ...
>  plot2d(x,hasil):
```



Dari gambar di atas terlihat bahwa kekonvergenan iterasinya semakin lambat, untuk nilai awal semakin besar, namun penambahnnya tidak kontinu. Kita dapat menemukan kapan maksimum iterasinya bertambah.

```
>hasil[1:10]
```

```
[4,  5,  5,  5,  5,  5,  6,  6,  6,  6]
```

```
>x[nonzeros(differences(hasil))]
```

```
[1.5,  2,  3.4,  6.6]
```

maksimum iterasi sampai konvergen meningkat pada saat nilai awalnya 1.5, 2, 3.4, dan 6.6.
Contoh berikutnya adalah metode Newton pada polinomial kompleks berderajat 3.

```
>p &= x^3-1; newton &= x-p/diff(p,x); $newton
```

```
Maxima said:
diff: second argument must be a variable; found errexp1
 -- an error. To debug this try: debugmode(true);

Error in:
p &= x^3-1; newton &= x-p/diff(p,x); $newton ...
                                   ^
```

Selanjutnya didefinisikan fungsi untuk melakukan iterasi (aslinya 10 kali).

```
>function iterasi(f$,x,n=10) ...
```

```
loop 1 to n; x=f$(x); end;
return x;
endfunction
```

Kita mulai dengan menentukan titik-titik grid pada bidang kompleksnya.

```
>r=1.5; x=linspace(-r,r,501); Z=x+I*x'; W=iterasi(newton,Z);
```

```
Function newton needs at least 3 arguments!
Use: newton (f$: call, df$: call, x: scalar complex {, y: number, eps: none})
Error in:
...  x=linspace(-r,r,501); Z=x+I*x'; W=iterasi(newton,Z); ...
                                                 ^
```

Berikut adalah akar-akar polinomial di atas.

```
>z=&solve(p)()
```

```
Maxima said:
solve: more equations than unknowns.
Unknowns given :
[r]
```

```
Equations given:
errexp1
 -- an error. To debug this try: debugmode(true);

Error in:
z=&solve(p)() ...
           ^
```

Untuk menggambar hasil iterasinya, dihitung jarak dari hasil iterasi ke-10 ke masing-masing akar, kemudian digunakan untuk menghitung warna yang akan digambar, yang menunjukkan limit untuk masing-masing nilai awal.

Fungsi plotrgb() menggunakan jendela gambar terkini untuk menggambar warna RGB sebagai matriks.

```
>C=rgb(max(abs(W-z[1]),1),max(abs(W-z[2]),1),max(abs(W-z[3]),1)); ...
>  plot2d(none,-r,r,-r,r); plotrgb(C):
```

```
Variable W not found!
Error in:
C=rgb(max(abs(W-z[1]),1),max(abs(W-z[2]),1),max(abs(W-z[3]),1) ...
                    ^
```

Iterasi Simbolik

Seperti sudah dibahas sebelumnya, untuk menghasilkan barisan ekspresi simbolik dengan Maxima dapat digunakan fungsi makelist().

```
>&powerdisp:true // untuk menampilkan deret pangkat mulai dari suku berpangkat terkecil
```

```
                                  true
```

```
>deret &= makelist(taylor(exp(x),x,0,k),k,1,3); $deret // barisan deret Taylor untuk e^x
```

```
Maxima said:
taylor: 0.1539740213994798*r cannot be a variable.
 -- an error. To debug this try: debugmode(true);

Error in:
deret &= makelist(taylor(exp(x),x,0,k),k,1,3); $deret // baris ...
                                                ^
```

Untuk mengubah barisan deret tersebut menjadi vektor string di EMT digunakan fungsi mxm2str(). Selanjutnya, vektor string/ekspresi hasilnya dapat digambar seperti menggambar vektor eskpresi pada EMT.

```
>plot2d("exp(x)",0,3); // plot fungsi aslinya, e^x
>plot2d(mxm2str("deret"),>add,color=4:6): // plot ketiga deret taylor hampiran fungsi ters
```

```
Maxima said:
length: argument cannot be a symbol; found deret
 -- an error. To debug this try: debugmode(true);
```

```
mxmeval:
    return evaluate(mxm(s));
Try "trace errors" to inspect local variables after errors.
mxm2str:
    n=mxmeval("length(VVV)");
```

Selain cara di atas dapat juga dengan cara menggunakan indeks pada vektor/list yang dihasilkan.

```
>$deret[3]
```

$$deret_3$$

```
>plot2d(["exp(x)",&deret[1],&deret[2],&deret[3]],0,3,color=1:4):
```

```
deret is not a variable!
Error in expression: deret[1]
%ploteval:
    y0=f$(x[1],args());
Try "trace errors" to inspect local variables after errors.
plot2d:
    u=u_(%ploteval(xx[#],t;args()));
```

```
>$sum(sin(k*x)/k,k,1,5)
```

4333077512 r) / 5, [0, sin(0.1495626293330798 r) 10^{-7} r), sin(0.2990052399316659 r) / 2, sin(0.4485078852408997 r) / 3, sin(0.5980105180321194 r) / 4, ...

Berikut adalah cara menggambar kurva

$$y = \sin(x) + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \ldots .$$

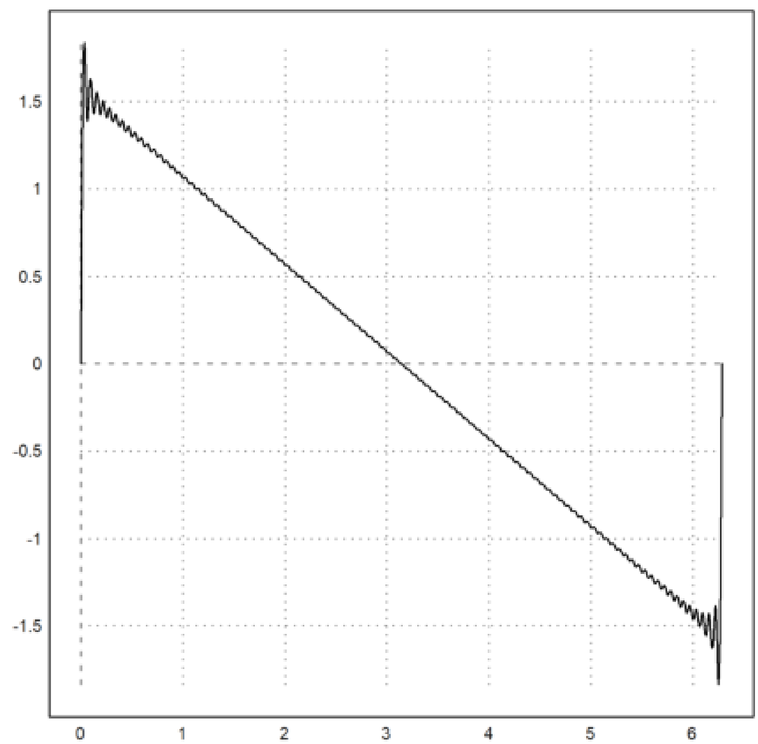
```
>plot2d(&sum(sin((2*k+1)*x)/(2*k+1),k,0,20),0,2pi):
```

```
Maxima output too long!
Error in:
plot2d(&sum(sin((2*k+1)*x)/(2*k+1),k,0,20),0,2pi): ...
                                                  ^
```

Hal serupa juga dapat dilakukan dengan menggunakan matriks, misalkan kita akan menggambar kurva

$$y = \sum_{k=1}^{100} \frac{\sin(kx)}{k}, \quad 0 \le x \le 2\pi.$$

```
>x=linspace(0,2pi,1000); k=1:100; y=sum(sin(k*x')/k)'; plot2d(x,y):
```



Tabel Fungsi

Terdapat cara menarik untuk menghasilkan barisan dengan ekspresi Maxima. Perintah mxmtable() berguna untuk menampilkan dan menggambar barisan dan menghasilkan barisan sebagai vektor kolom.
Sebagai contoh berikut adalah barisan turunan ke-n x^x di x=1.

```
>mxmtable("diffat(x^x,x=1,n)","n",1,8,frac=1);
```

```
Maxima said:
diff: second argument must be a variable; found errexp1
#0: diffat(expr=[0,1.66665833335744e-7*r,1.33330666692022e-6*r,4.499797504338432e-6*r,1.
 -- an error. To debug this try: debugmode(true);

%mxmevtable:
    return mxm("@expr,@var=@value")();
Try "trace errors" to inspect local variables after errors.
mxmtable:
    y[#,1]=%mxmevtable(expr,var,x[#]);
```

```
>$'sum(k, k, 1, n) = factor(ev(sum(k, k, 1, n),simpsum=true)) // simpsum:menghitung deret
```

$$\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n\,\left(1+n\right)}{2}$$

```
>$'sum(1/(3^k+k), k, 0, inf) = factor(ev(sum(1/(3^k+k), k, 0, inf),simpsum=true))
```

$$\sum_{k=0}^{\infty}{\frac{1}{k+3^{k}}}=\sum_{k=0}^{\infty}{\frac{1}{k+3^{k}}}$$

Di sini masih gagal, hasilnya tidak dihitung.

```
>$'sum(1/x^2, x, 1, inf)= ev(sum(1/x^2, x, 1, inf),simpsum=true) // ev: menghitung nilai e
```

$$\sum_{x=1}^{\infty}{\frac{1}{x^2}}=\frac{\pi^2}{6}$$

```
>$'sum((-1)^(k-1)/k, k, 1, inf) = factor(ev(sum((-1)^(x-1)/x, x, 1, inf),simpsum=true))
```

$$\sum_{k=1}^{\infty}{\frac{\left(-1\right)^{-1+k}}{k}}=-\sum_{x=1}^{\infty}{\frac{\left(-1\right)^{x}}{x}}$$

Di sini masih gagal, hasilnya tidak dihitung.

```
>$'sum((-1)^k/(2*k-1), k, 1, inf) = factor(ev(sum((-1)^k/(2*k-1), k, 1, inf),simpsum=true)
```

$$\sum_{k=1}^{\infty}{\frac{\left(-1\right)^{k}}{-1+2\,k}}=\sum_{k=1}^{\infty}{\frac{\left(-1\right)^{k}}{-1+2\,k}}$$

```
>$ev(sum(1/n!, n, 0, inf),simpsum=true)
```

$$\sum_{n=0}^{\infty}{\frac{1}{n!}}$$

Di sini masih gagal, hasilnya tidak dihitung, harusnya hasilnya e.

```
>&assume(abs(x)<1); $'sum(a*x^k, k, 0, inf)=ev(sum(a*x^k, k, 0, inf),simpsum=true), &forge
```

```
Answering "Is -94914474571+15819*r positive, negative or zero?" with "positive"
Maxima said:
sum: sum is divergent.
 -- an error. To debug this try: debugmode(true);

Error in:
... k, 0, inf)=ev(sum(a*x^k, k, 0, inf),simpsum=true), &forget(abs ...
                                                     ^
```

Deret geometri tak hingga, dengan asumsi rasional antara -1 dan 1.

```
>$'sum(x^k/k!,k,0,inf)=ev(sum(x^k/k!,k,0,inf),simpsum=true)
```

$$\left[0,\sum_{k=0}^{\infty}{\frac{\left(1.666658333335744\times10^{-7}\right)^{k}\,r^{k}}{k!}},\sum_{k=0}^{\infty}{\frac{\left(1.333306666692022\times10^{-6}\right)^{k}\,r^{k}}{k!}},\sum_{k=0}^{\infty}{\frac{\left(4.499797504338432\times10^{-6}\right)^{k}\,r^{k}}{k!}},\sum_{k=0}^{\infty}{\frac{(1.06}{}}\right.$$

```
>$limit(sum(x^k/k!,k,0,n),n,inf)
```

$$\left[0, \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{\left(1.666658333335744 \times 10^{-7}\right)^k r^k}{k!}, \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{\left(1.333330666692022 \times 10^{-6}\right)^k r^k}{k!}, \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{\left(4.499797504338432 \times 10^{-\cdots}\right.}{k!}\right.$$

```
>function d(n) &= sum(1/(k^2-k),k,2,n); $'d(n)=d(n)
```

$$d(n) = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{-k+k^2}$$

```
>$d(10)=ev(d(10),simpsum=true)
```

$$\sum_{k=2}^{10} \frac{1}{-k+k^2} = \frac{9}{10}$$

```
>$d(100)=ev(d(100),simpsum=true)
```

$$\sum_{k=2}^{100} \frac{1}{-k+k^2} = \frac{99}{100}$$

```
>
```

Deret Taylor

Deret Taylor suatu fungsi f yang diferensiabel sampai tak hingga di sekitar x=a adalah:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x-a)^k f^{(k)}(a)}{k!}.$$

```
>$'e^x =taylor(exp(x),x,0,10) // deret Taylor e^x di sekitar x=0, sampai suku ke-11
```

```
Maxima said:
taylor: 0.1539740213994798*r cannot be a variable.
 -- an error. To debug this try: debugmode(true);

Error in:
$'e^x =taylor(exp(x),x,0,10) // deret Taylor e^x di sekitar x= ...
                               ^
```

```
>$'log(x)=taylor(log(x),x,1,10)// deret log(x) di sekitar x=1
```

```
Maxima said:
log: encountered log(0).
 -- an error. To debug this try: debugmode(true);

Error in:
$'log(x)=taylor(log(x),x,1,10)// deret log(x) di sekitar x=1 ...
                              ^
```

BAB 6

KB PEKAN 11-12: MENGGUNAKAN EMT UNTUK GEOMETRI

[a4paper,10pt]article eumat

Visualisasi dan Perhitungan Geometri dengan EMT

Nama : Umi Nurkhasanah
NIM : 22305141032
Kelas: Matematika E 2022

Euler menyediakan beberapa fungsi untuk melakukan visualisasi dan perhitungan geometri, baik secara numerik maupun analitik (seperti biasanya tentunya, menggunakan Maxima). Fungsi-fungsi untuk visualisasi dan perhitungan geometeri tersebut disimpan di dalam file program "geometry.e", sehingga file tersebut harus dipanggil sebelum menggunakan fungsi-fungsi atau perintah-perintah untuk geometri.

```
>load geometry
```

```
Numerical and symbolic geometry.
```

Fungsi-fungsi Geometri

Fungsi-fungsi untuk Menggambar Objek Geometri:

```
defaultd:=textheight()*1.5: nilai asli untuk parameter d
setPlotrange(x1,x2,y1,y2): menentukan rentang x dan y pada bidang
```

koordinat

```
setPlotRange(r): pusat bidang koordinat (0,0) dan batas-batas
```

sumbu-x dan y adalah -r sd r

```
plotPoint (P, "P"): menggambar titik P dan diberi label "P"
plotSegment (A,B, "AB", d): menggambar ruas garis AB, diberi label
```

"AB" sejauh d

```
plotLine (g, "g", d): menggambar garis g diberi label "g" sejauh d
plotCircle (c,"c",v,d): Menggambar lingkaran c dan diberi label "c"
plotLabel (label, P, V, d): menuliskan label pada posisi P
```

Fungsi-fungsi Geometri Analitik (numerik maupun simbolik):

```
turn(v, phi): memutar vektor v sejauh phi
turnLeft(v):   memutar vektor v ke kiri
turnRight(v):  memutar vektor v ke kanan
normalize(v): normal vektor v
crossProduct(v, w): hasil kali silang vektorv dan w.
lineThrough(A, B): garis melalui A dan B, hasilnya [a,b,c] sdh.
```

ax+by=c.

```
lineWithDirection(A,v): garis melalui A searah vektor v
getLineDirection(g): vektor arah (gradien) garis g
getNormal(g): vektor normal (tegak lurus) garis g
getPointOnLine(g):  titik pada garis g
perpendicular(A, g):  garis melalui A tegak lurus garis g
parallel (A, g):  garis melalui A sejajar garis g
lineIntersection(g, h):  titik potong garis g dan h
projectToLine(A, g):   proyeksi titik A pada garis g
distance(A, B):  jarak titik A dan B
distanceSquared(A, B):  kuadrat jarak A dan B
quadrance(A, B): kuadrat jarak A dan B
areaTriangle(A, B, C):  luas segitiga ABC
computeAngle(A, B, C):   besar sudut <ABC
angleBisector(A, B, C): garis bagi sudut <ABC
circleWithCenter (A, r): lingkaran dengan pusat A dan jari-jari r
getCircleCenter(c):  pusat lingkaran c
getCircleRadius(c):  jari-jari lingkaran c
circleThrough(A,B,C):  lingkaran melalui A, B, C
middlePerpendicular(A, B): titik tengah AB
lineCircleIntersections(g, c): titik potong garis g dan lingkran c
circleCircleIntersections (c1, c2):  titik potong lingkaran c1 dan
```

c2

```
planeThrough(A, B, C):  bidang melalui titik A, B, C
```

Fungsi-fungsi Khusus Untuk Geometri Simbolik:

```
getLineEquation (g,x,y): persamaan garis g dinyatakan dalam x dan y
getHesseForm (g,x,y,A): bentuk Hesse garis g dinyatakan dalam x dan
```

y dengan titik A pada sisi positif (kanan/atas) garis

```
quad(A,B): kuadrat jarak AB
spread(a,b,c): Spread segitiga dengan panjang sisi-sisi a,b,c, yakni
```

sin(alpha)^2 dengan alpha sudut yang menghadap sisi a.

```
crosslaw(a,b,c,sa): persamaan 3 quads dan 1 spread pada segitiga
```

dengan panjang sisi a, b, c.

```
triplespread(sa,sb,sc): persamaan 3 spread sa,sb,sc yang memebntuk
```

suatu segitiga

```
doublespread(sa): Spread sudut rangkap Spread 2*phi, dengan
```

sa=sin(phi)^2 spread a.

Contoh 1: Luas, Lingkaran Luar, Lingkaran Dalam Segitiga

Untuk menggambar objek-objek geometri, langkah pertama adalah menentukan rentang sumbu-sumbu koordinat. Semua objek geometri akan digambar pada satu bidang koordinat, sampai didefinisikan bidang koordinat yang baru.

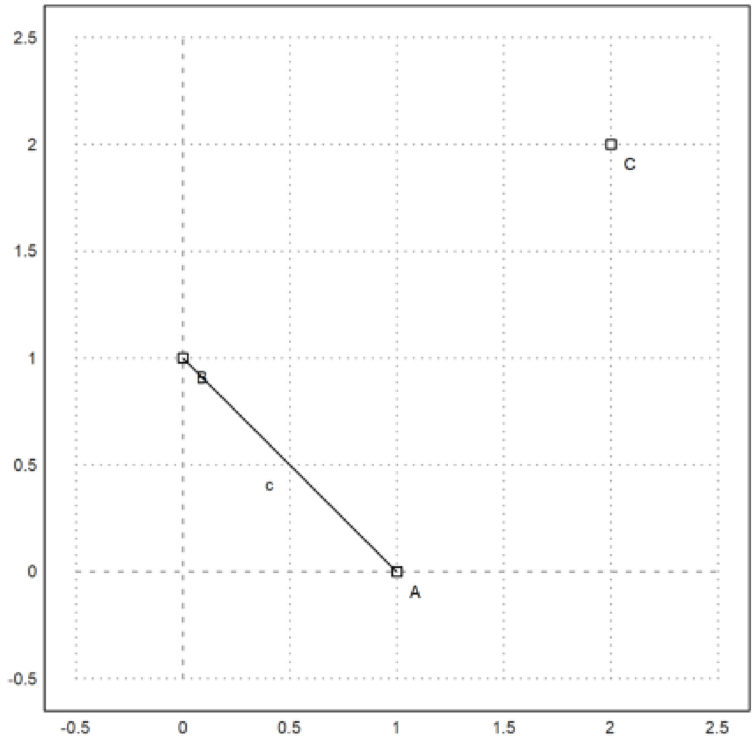
```
>setPlotRange(-0.5,2.5,-0.5,2.5); // mendefinisikan bidang koordinat baru
```

Sekarang atur tiga poin dan plot.

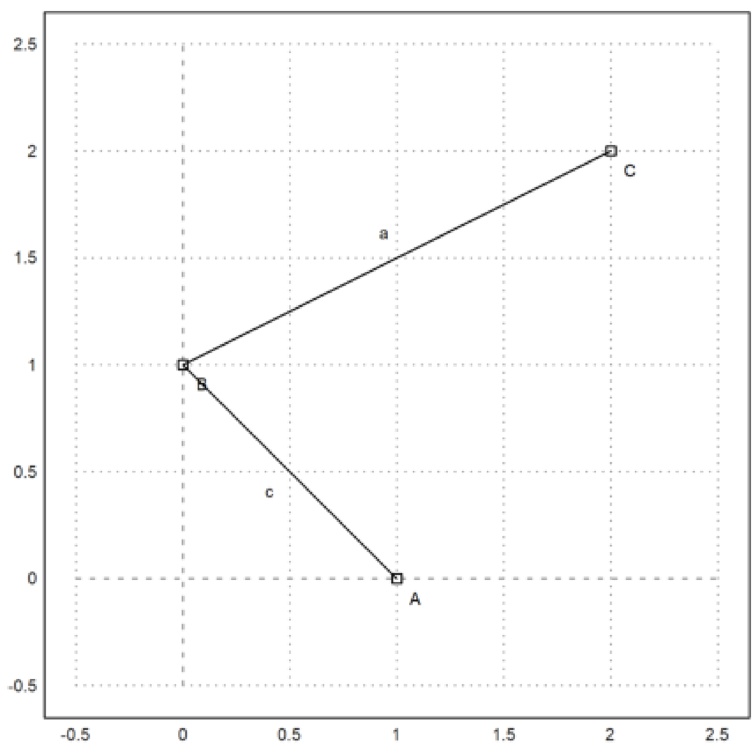
```
>A=[1,0]; plotPoint(A,"A"); // definisi dan gambar tiga titik
>B=[0,1]; plotPoint(B,"B");
>C=[2,2]; plotPoint(C,"C");
```

Lalu tiga segmen.

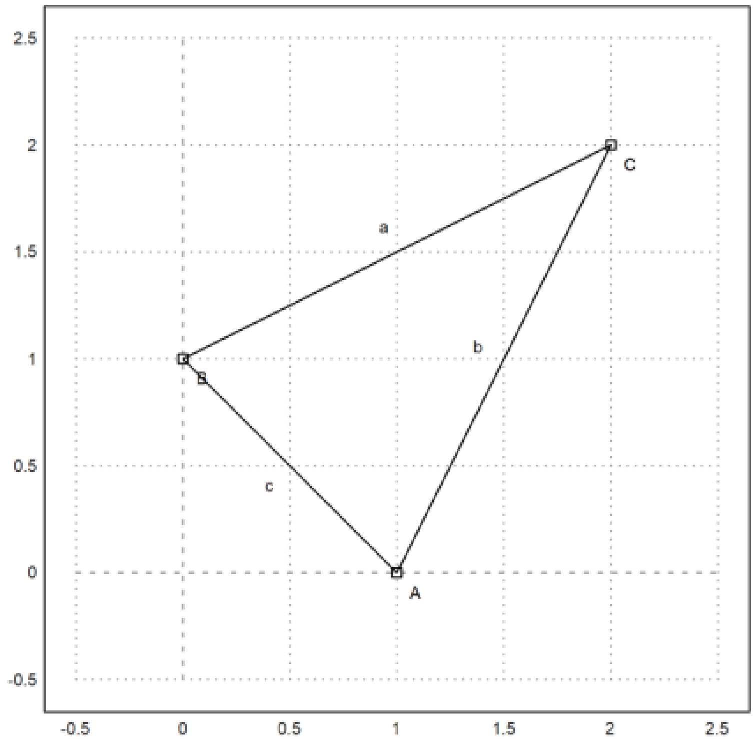
```
>plotSegment(A,B,"c"): // c=AB
```




```
>plotSegment(B,C,"a"): // a=BC
```



```
>plotSegment(A,C,"b"): // b=AC
```



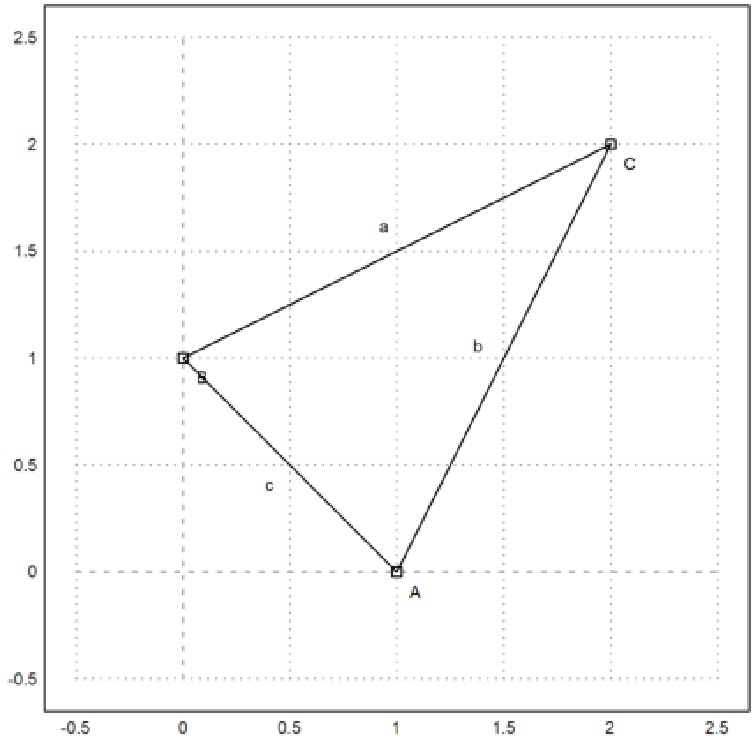
Fungsi geometri meliputi fungsi untuk membuat garis dan lingkaran. Format untuk garis adalah [a, b, c], yang merepresentasikan garis dengan persamaan ax + by = c.

```
>lineThrough(B,C) // garis yang melalui B dan C
```

```
[-1,  2,  2]
```

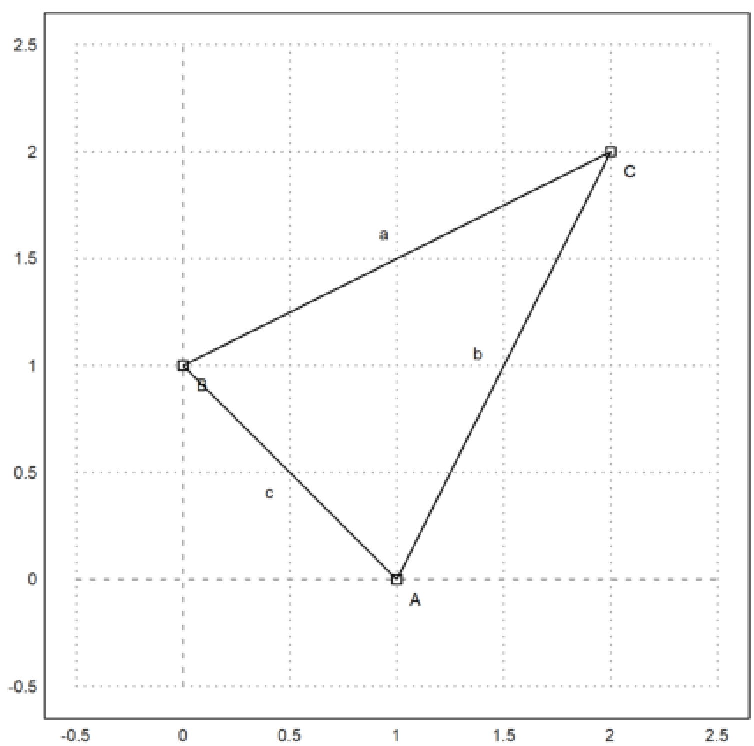
Hitung garis tegak lurus melalui A pada BC.

```
>h=perpendicular(A,lineThrough(B,C)): // garis h tegak lurus BC melalui A
```



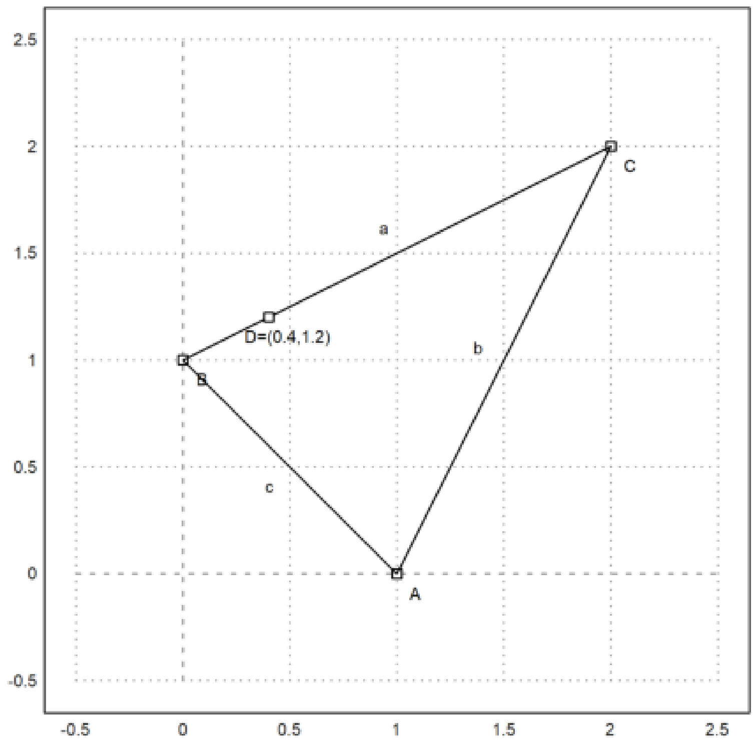
Dan perpotongannya dengan BC.

```
>D=lineIntersection(h,lineThrough(B,C)): // D adalah titik potong h dan BC
```

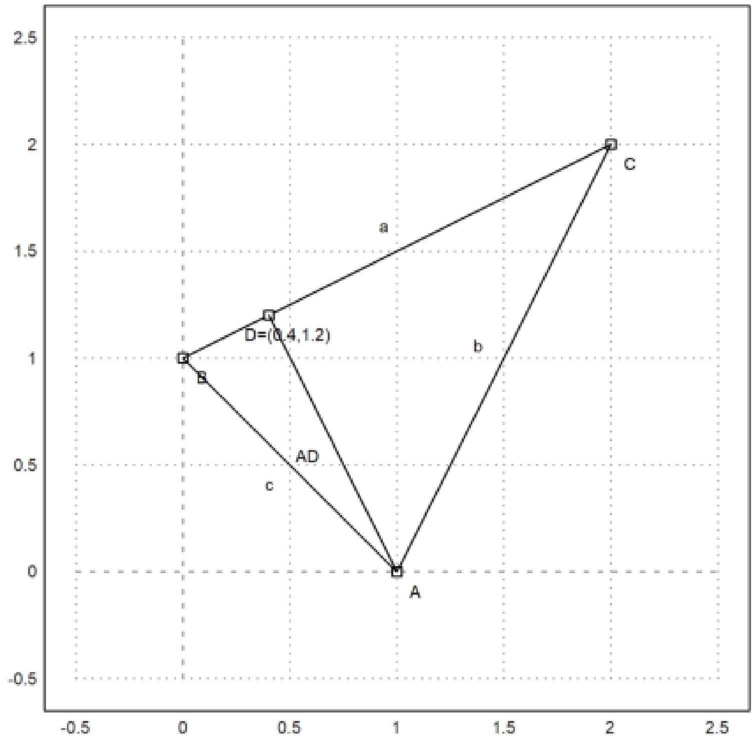


Plot itu.

```
>plotPoint(D,value=1): // koordinat D ditampilkan
```




```
>aspect(1); plotSegment(A,D): // tampilkan semua gambar hasil plot...()
```



Hitung luas ABC:

$$L_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AD.BC.$$

```
>norm(A-D)*norm(B-C)/2 // AD=norm(A-D), BC=norm(B-C)
```

```
1.5
```

Cara lain menghitung rumus determinan.

```
>areaTriangle(A,B,C) // hitung luas segitiga langusng dengan fungsi
```

```
1.5
```

Cara lain menghitung luas segitigas ABC:

```
>distance(A,D)*distance(B,C)/2
```

```
1.5
```

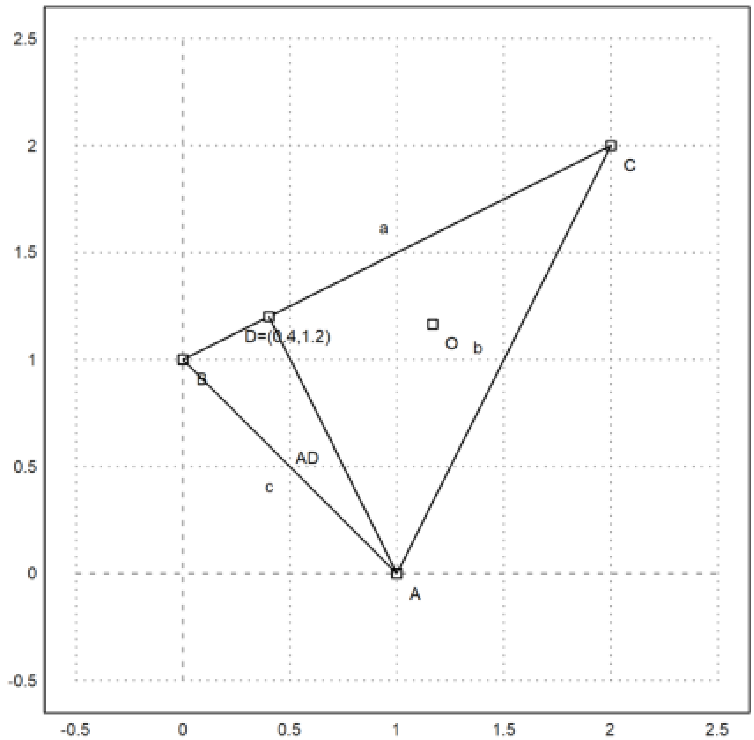
Sudut di C

```
>degprint(computeAngle(B,C,A))
```

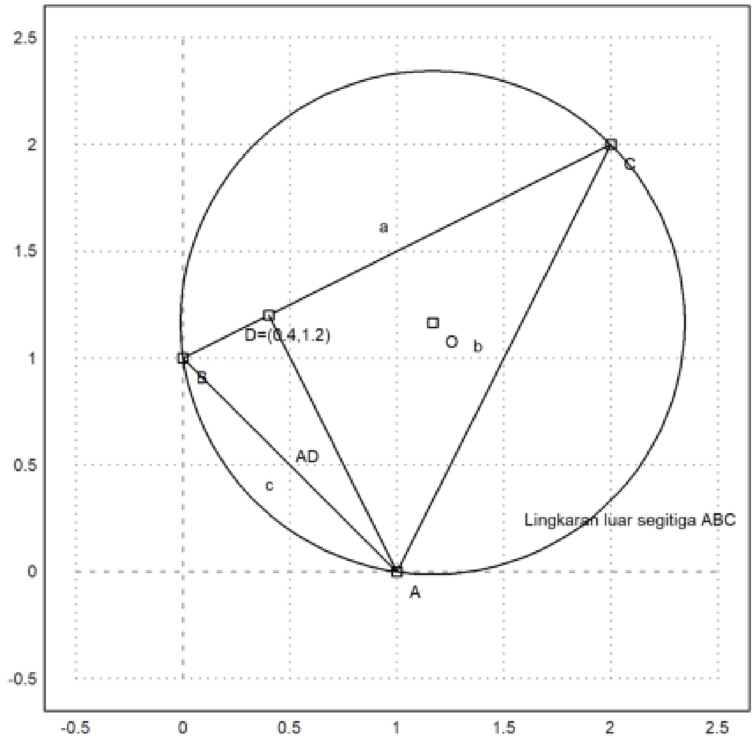
```
36°52'11.63''
```

Sekarang lingkaran sirkit segitiga.

```
>c=circleThrough(A,B,C); // lingkaran luar segitiga ABC
>R=getCircleRadius(c); // jari2 lingkaran luar
>O=getCircleCenter(c); // titik pusat lingkaran c
>plotPoint(O,"O"): // gambar titik "O"
```




```
>plotCircle(c,"Lingkaran luar segitiga ABC"):
```



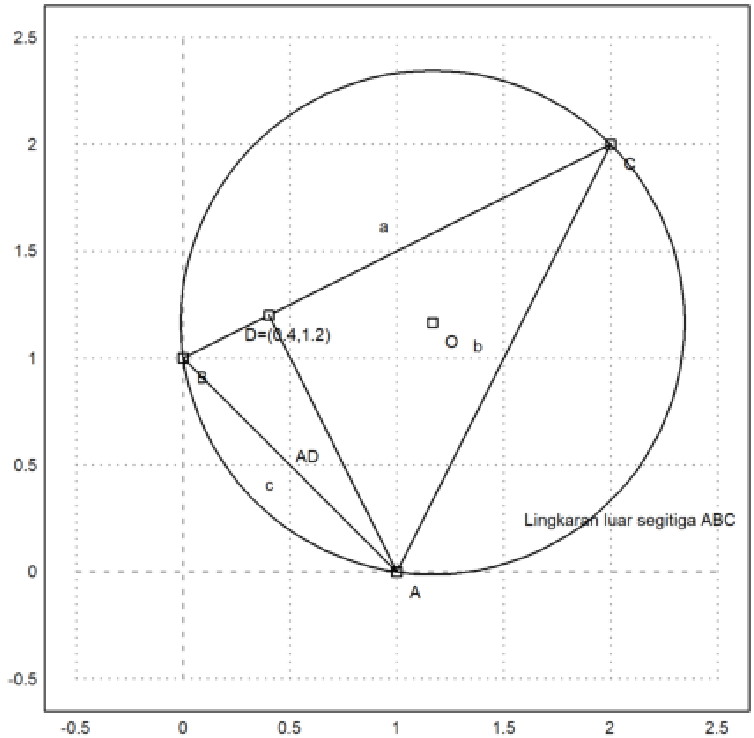
Tampilkan koordinat titik pusat dan jari-jari lingkaran luar.

```
>O, R
```

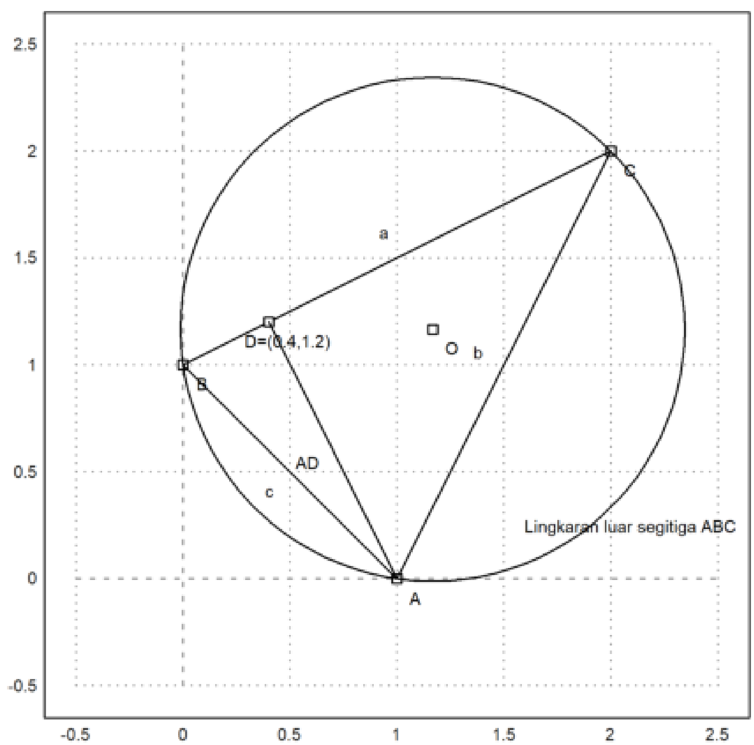
```
[1.16667,  1.16667]
1.17851130198
```

Sekarang akan digambar lingkaran dalam segitiga ABC. Titik pusat lingkaran dalam adalah titik potong garis-garis bagi sudut.

```
>l=angleBisector(A,C,B): // garis bagi <ACB
```




```
>g=angleBisector(C,A,B): // garis bagi <CAB
```



```
>P=lineIntersection(l,g) // titik potong kedua garis bagi sudut
```

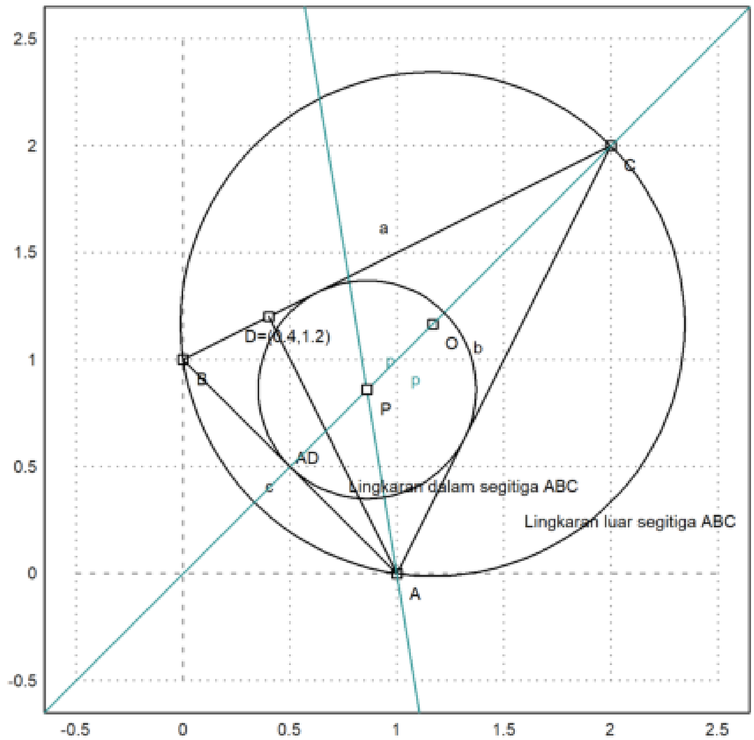
```
[0.86038,  0.86038]
```

Tambahkan semua ke plot.

```
>color(5); plotLine(l); plotLine(g); color(1); // gambar kedua garis bagi sudut
>plotPoint(P,"P"); // gambar titik potongnya
>r=norm(P-projectToLine(P,lineThrough(A,B))) // jari-jari lingkaran dalam
```

```
0.509653732104
```

```
>plotCircle(circleWithCenter(P,r),"Lingkaran dalam segitiga ABC"): // gambar lingkaran dal
```



Latihan

1. Tentukan ketiga titik singgung lingkaran dalam dengan sisi-sisi segitiga ABC.
2. Gambar segitiga dengan titik-titik sudut ketiga titik singgung tersebut.
3. Tunjukkan bahwa garis bagi sudut yang ke tiga juga melalui titik pusat lingkaran dalam.
4. Gambar jari-jari lingkaran dalam.

Jawab:
1. Tentukan ketiga titik singgung lingkaran dalam dengan sisi-sisi segitiga ABC.
Titik singgung garis BC dengan lingkaran dalam.

```
>s=lineThrough(B,C)
```

```
[-1,  2,  2]
```

```
>m=circleWithCenter(P,r)
```

```
[0.86038,  0.86038,  0.509654]
```

```
>S=lineCircleIntersections(s,m)
```

```
[0.632456,  1.31623]
```

Titik singgung garis AC dengan lingkaran dalam.

```
>p=lineThrough(A,C)
```

```
[-2,  1,  -2]
```

```
>Q=lineCircleIntersections(p,m)
```

```
[1.31623,  0.632456]
```

Titik singgung garis AB dengan lingkaran dalam.

```
> q=lineThrough(A,B)
```

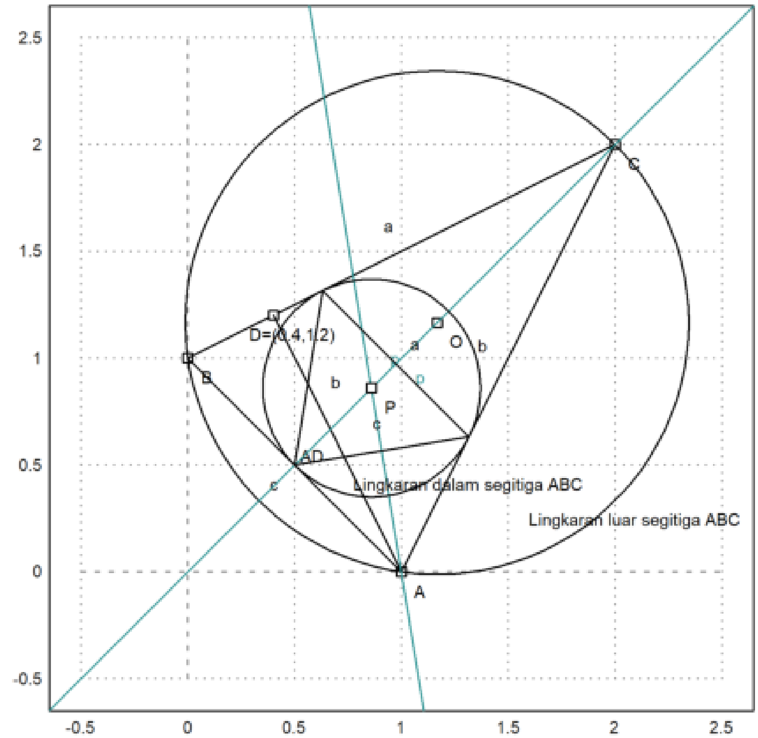
```
[-1,  -1,  -1]
```

```
>L=lineCircleIntersections(q,m)
```

```
[0.5,  0.5]
```

Jadi titik singgung lingkaran dalam dengan sisi-sisi segitiga adalah (0.632456, 1.31623), (1.31632, 0.632456), (0.5, 0.5).
2. Gambar segitiga dengan titik-titik sudut ketiga titik singgung tersebut.

```
>plotSegment(S,Q,"a");
>plotSegment(S,L,"b");
>plotSegment(L,Q,"c"):
```



3. Tunjukkan bahwa garis bagi sudut yang ke tiga juga melalui titik pusat lingkaran dalam.

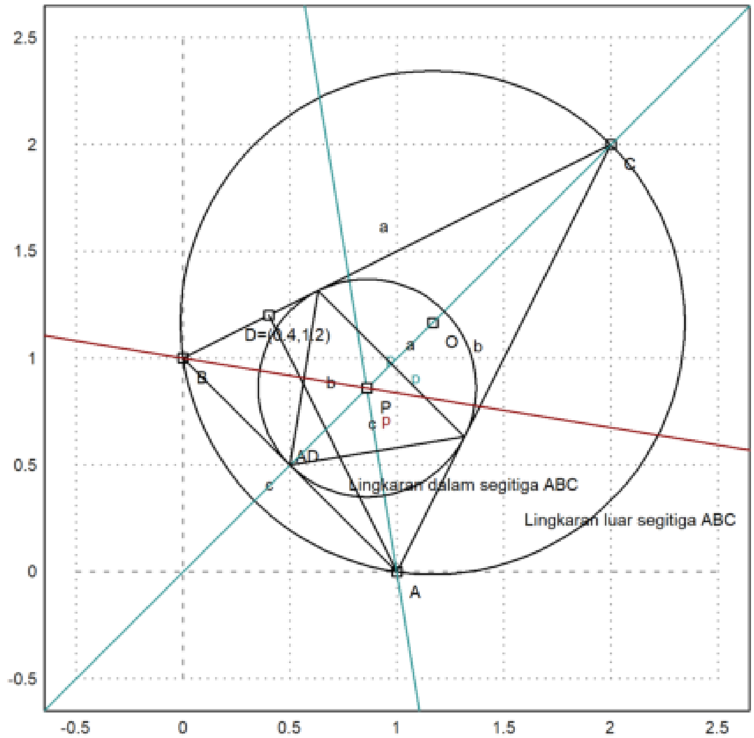
```
> P, r
```

```
[0.86038,  0.86038]
0.509653732104
```

```
>k=angleBisector(A,B,C)
```

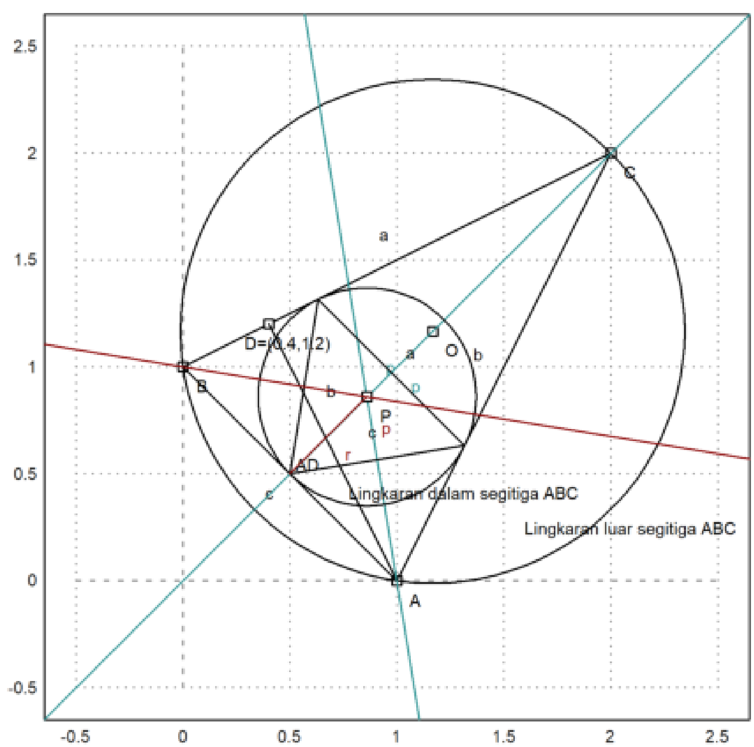
```
[-0.264911,  -1.63246,  -1.63246]
```

```
>color(2); plotLine(k):
```



4. Gambar jari-jari lingkaran dalam.

```
>plotSegment(P,L,"r"):
```



Contoh 2: Geometri Smbolik

Kita dapat menghitung geometri tepat dan simbolis menggunakan Maxima.
Geometri file.e menyediakan fungsi yang sama (dan lebih banyak lagi) di Maxima. Namun, sekarang kita dapat menggunakan perhitungan simbolik.

```
>A &= [1,0]; B &= [0,1]; C &= [2,2]; // menentukan tiga titik A, B, C
```

Fungsi garis dan lingkaran bekerja seperti fungsi Euler, tetapi menyediakan penghitungan simbolik.

```
>c &= lineThrough(B,C) // c=BC
```

```
[- 1, 2, 2]
```

Kita bisa mendapatkan persamaan untuk sebuah garis dengan mudah.

```
>$getLineEquation(c,x,y), $solve(%,y) | expand // persamaan garis c
```

$$2\,y-x=2$$

$$\left[y=\frac{x}{2}+1\right]$$

```
>$getLineEquation(lineThrough(A,[x1,y1]),x,y) // persamaan garis melalui A dan (x1, y1)
```

$$\left(x_1-1\right)\,y-x\,y_1=-y_1$$

```
>h &= perpendicular(A,lineThrough(B,C)) // h melalui A tegak lurus BC
```

```
[2, 1, 2]
```

```
>Q &= lineIntersection(c,h) // Q titik potong garis c=BC dan h
```

```
 2   6
[-,  -]
 5   5
```

```
>$projectToLine(A,lineThrough(B,C)) // proyeksi A pada BC
```

$$\left[\frac{2}{5},\frac{6}{5}\right]$$

```
>$distance(A,Q) // jarak AQ
```

$$\frac{3}{\sqrt{5}}$$

```
>cc &= circleThrough(A,B,C); $cc // (titik pusat dan jari-jari) lingkaran melalui A, B, C
```

$$\left[\frac{7}{6}, \frac{7}{6}, \frac{5}{3\sqrt{2}}\right]$$

```
>r&=getCircleRadius(cc); $r , $float(r) // tampilkan nilai jari-jari
```

$$\frac{5}{3\sqrt{2}}$$

$$1.178511301977579$$

```
>$computeAngle(A,C,B) // nilai <ACB
```

$$\arccos\left(\frac{4}{5}\right)$$

```
>$solve(getLineEquation(angleBisector(A,C,B),x,y),y)[1] // persamaan garis bagi <ACB
```

$$y = x$$

```
>P &= lineIntersection(angleBisector(A,C,B),angleBisector(C,B,A)); $P // titik potong 2 ga
```

$$\left[\frac{\sqrt{2}\sqrt{5}+2}{6}, \frac{\sqrt{2}\sqrt{5}+2}{6}\right]$$

```
>P() // hasilnya sama dengan perhitungan sebelumnya
```

```
[0.86038,  0.86038]
```

Garis dan Lingkaran yang Berpotongan

Tentu saja, kita juga bisa memotong garis dengan lingkaran, dan lingkaran dengan lingkaran.

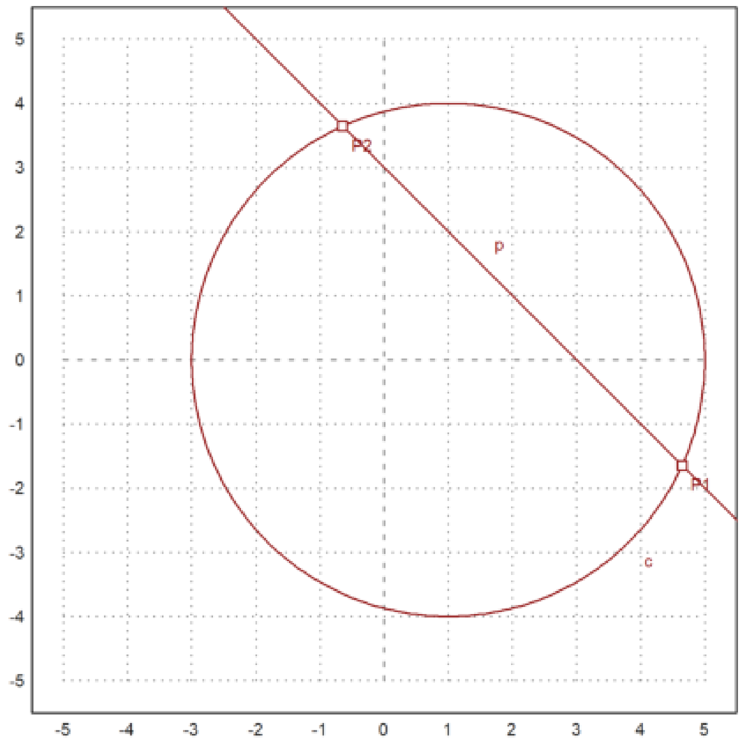
```
>A &:= [1,0]; c=circleWithCenter(A,4);
>B &:= [1,2]; C &:= [2,1]; l=lineThrough(B,C);
>setPlotRange(5); plotCircle(c); plotLine(l);
```

Perpotongan garis dengan lingkaran mengembalikan dua titik dan jumlah titik perpotongan.

```
>{P1,P2,f}=lineCircleIntersections(l,c);
>P1, P2,
```

```
[4.64575,  -1.64575]
[-0.645751,  3.64575]
```

```
>plotPoint(P1); plotPoint(P2):
```



Hal yang sama di Maxima.

```
>c &= circleWithCenter(A,4) // lingkaran dengan pusat A jari-jari 4
```

```
[1, 0, 4]
```

```
>l &= lineThrough(B,C) // garis l melalui B dan C
```

```
[1, 1, 3]
```

```
>$lineCircleIntersections(l,c) | radcan, // titik potong lingkaran c dan garis l
```

$$\left[\left[\sqrt{7}+2,1-\sqrt{7}\right],\left[2-\sqrt{7},\sqrt{7}+1\right]\right]$$

Akan ditunjukkan bahwa sudut-sudut yang menghadap bsuusr yang sama adalah sama besar.

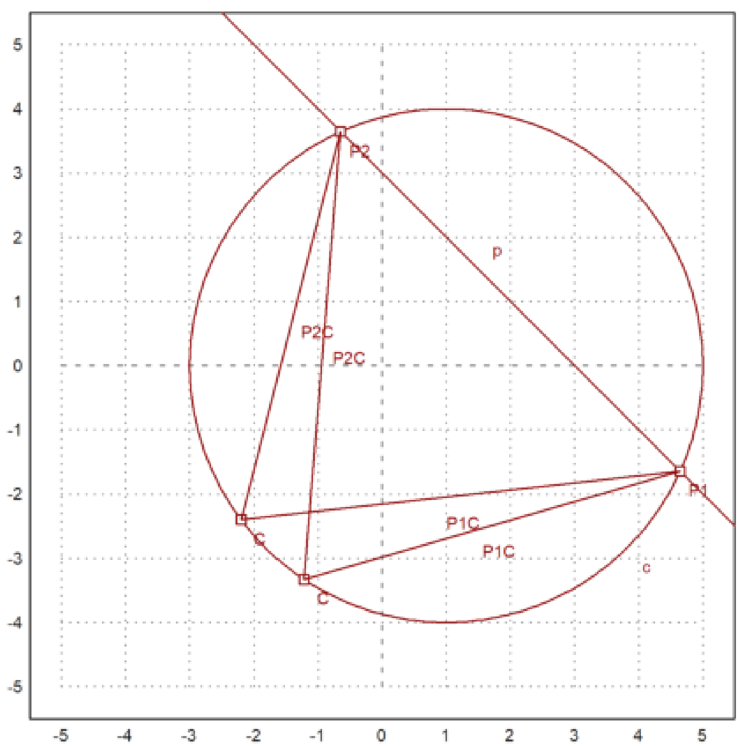
```
>C=A+normalize([-2,-3])*4; plotPoint(C); plotSegment(P1,C); plotSegment(P2,C);
>degprint(computeAngle(P1,C,P2))
```

```
69°17'42.68''
```

```
>C=A+normalize([-4,-3])*4; plotPoint(C); plotSegment(P1,C); plotSegment(P2,C);
>degprint(computeAngle(P1,C,P2))
```

```
69°17'42.68''
```

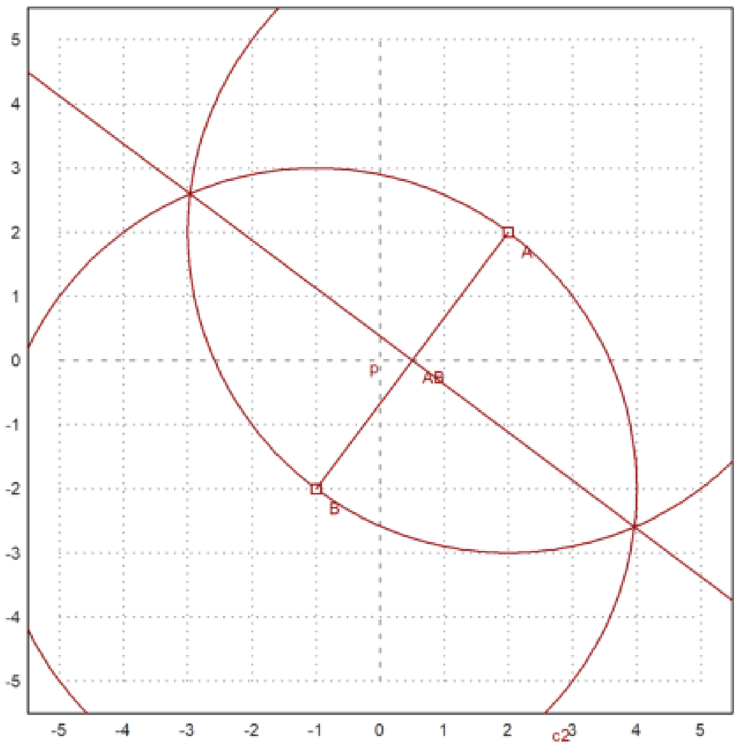
```
>insimg;
```



Garis Sumbu

Berikut adalah langkah-langkah menggambar garis sumbu ruas garis AB:
1. Gambar lingkaran dengan pusat A melalui B.
2. Gambar lingkaran dengan pusat B melalui A.
3. Tarik garis melallui kedua titik potong kedua lingkaran tersebut. Garis ini merupakan garis sumbu (melalui titik tengah dan tegak lurus) AB.

```
>A=[2,2]; B=[-1,-2];
>c1=circleWithCenter(A,distance(A,B));
>c2=circleWithCenter(B,distance(A,B));
>{P1,P2,f}=circleCircleIntersections(c1,c2);
>l=lineThrough(P1,P2);
>setPlotRange(5); plotCircle(c1); plotCircle(c2);
>plotPoint(A); plotPoint(B); plotSegment(A,B); plotLine(l):
```



Selanjutnya, kita melakukan hal yang sama di Maxima dengan koordinat umum.

```
>A &= [a1,a2]; B &= [b1,b2];
>c1 &= circleWithCenter(A,distance(A,B));
>c2 &= circleWithCenter(B,distance(A,B));
>P &= circleCircleIntersections(c1,c2); P1 &= P[1]; P2 &= P[2];
```

Persamaan untuk persimpangan cukup terlibat. Tapi kita bisa menyederhanakan, jika kita menyelesaikan y.

```
>g &= getLineEquation(lineThrough(P1,P2),x,y);
>$solve(g,y)
```

$$\left[y = \frac{-\left(2\,b_1 - 2\,a_1\right)\,x + {b_2}^2 + {b_1}^2 - {a_2}^2 - {a_1}^2}{2\,b_2 - 2\,a_2}\right]$$

Ini memang sama dengan tengah tegak lurus, yang dihitung dengan cara yang sama sekali berbeda.

```
>$solve(getLineEquation(middlePerpendicular(A,B),x,y),y)
```

$$\left[y=\frac{-\left(2\,b_1-2\,a_1\right)\,x+{b_2}^2+{b_1}^2-{a_2}^2-{a_1}^2}{2\,b_2-2\,a_2}\right]$$

```
>h &=getLineEquation(lineThrough(A,B),x,y);
>$solve(h,y)
```

$$\left[y=\frac{\left(b_2-a_2\right)\,x-a_1\,b_2+a_2\,b_1}{b_1-a_1}\right]$$

Perhatikan hasil kali gradien garis g dan h adalah:

$$\frac{-(b_1-a_1)}{(b_2-a_2)}\times\frac{(b_2-a_2)}{(b_1-a_1)}=-1.$$

Artinya kedua garis tegak lurus.

```
>
```

Contoh 3: Rumus Heron

Rumus Heron menyatakan bahwa luas segitiga dengan panjang sisi-sisi a, b dan c adalah:

$$L=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}\quad \text{dengan } s=(a+b+c)/2,$$

atau bisa ditulis dalam bentuk lain:

$$L=\frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)}$$

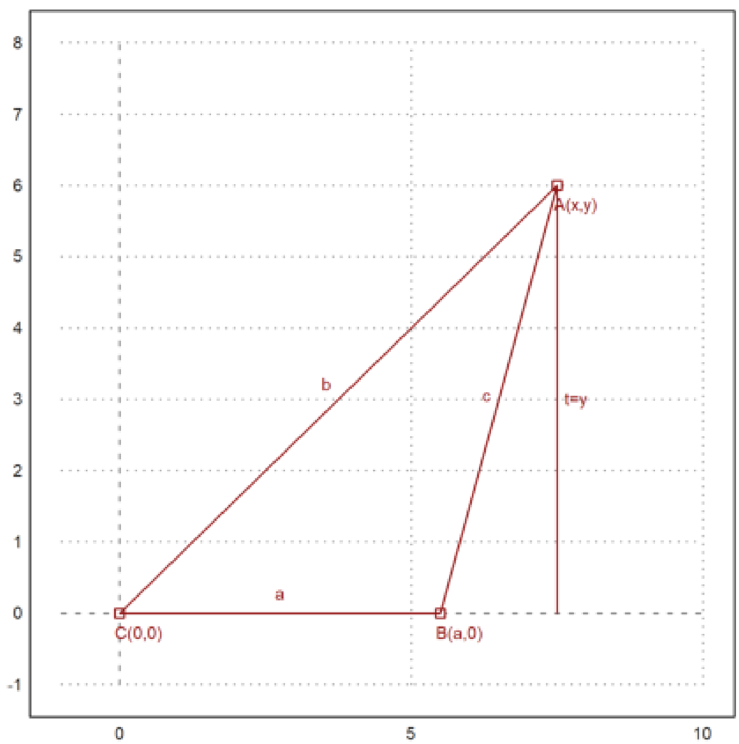
Untuk membuktikan hal ini kita misalkan C(0,0), B(a,0) dan A(x,y), b=AC, c=AB. Luas segitiga ABC adalah

$$L_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}a\times y.$$

Nilai y didapat dengan menyelesaikan sistem persamaan:

$$x^2+y^2=b^2,\quad (x-a)^2+y^2=c^2.$$

```
>setPlotRange(-1,10,-1,8); plotPoint([0,0], "C(0,0)"); plotPoint([5.5,0], "B(a,0)");  ...
>plotPoint([7.5,6], "A(x,y)");
>plotSegment([0,0],[5.5,0], "a",25); plotSegment([5.5,0],[7.5,6],"c",15);  ...
>plotSegment([0,0],[7.5,6],"b",25);
>plotSegment([7.5,6],[7.5,0],"t=y",25):
```




```
>&assume(a>0); sol &= solve([x^2+y^2=b^2,(x-a)^2+y^2=c^2],[x,y])
```

[]

```
>
```

Ekstrak solusi y

```
>ysol &= y with sol[2][2]; $'y=sqrt(factor(ysol^2))
```

```
Maxima said:
part: invalid index of list or matrix.
 -- an error. To debug this try: debugmode(true);

Error in:
ysol &= y with sol[2][2]; $'y=sqrt(factor(ysol^2)) ...
                        ^
```

Kita mendapatkan formula Heron.

```
>function H(a,b,c) &= sqrt(factor((ysol*a/2)^2)); $'H(a,b,c)=H(a,b,c)
```

$$H\left(a , b , \left[1 , 0 , 4 \right] \right)=\frac{a\,\left| ysol\right| }{2}$$

Tentu saja, setiap segitiga persegi panjang adalah kasus yang terkenal.

```
>H(3,4,5) //luas segitiga siku-siku dengan panjang sisi 3, 4, 5
```

```
Variable or function ysol not found.
Try "trace errors" to inspect local variables after errors.
H:
    useglobal; return a*abs(ysol)/2
Error in:
H(3,4,5) //luas segitiga siku-siku dengan panjang sisi 3, 4, 5 ...
        ^
```

Dan jelas juga, bahwa ini adalah segitiga dengan luas maksimal dan kedua sisinya 3 dan 4.

```
>aspect (1.5); plot2d(&H(3,4,x),1,7): // Kurva luas segitiga sengan panjang sisi 3, 4, x (
```

```
Variable or function ysol not found.
Error in expression: 3*abs(ysol)/2
%ploteval:
    y0=f$(x[1],args());
adaptiveevalone:
    s=%ploteval(g$,t;args());
Try "trace errors" to inspect local variables after errors.
plot2d:
    dw/n,dw/n^2,dw/n,auto;args());
```

Kasus umum juga berfungsi.

```
>$solve(diff(H(a,b,c)^2,c)=0,c)
```

```
Maxima said:
diff: second argument must be a variable; found [1,0,4]
 -- an error. To debug this try: debugmode(true);

Error in:
$solve(diff(H(a,b,c)^2,c)=0,c) ...
                              ^
```

Sekarang mari kita cari himpunan semua titik di mana b + c = d untuk beberapa konstanta d. Diketahui bahwa ini adalah elips.

```
>s1 &= subst(d-c,b,sol[2]); $s1
```

```
Maxima said:
part: invalid index of list or matrix.
 -- an error. To debug this try: debugmode(true);

Error in:
s1 &= subst(d-c,b,sol[2]); $s1 ...
                         ^
```

Dan membuat persamaan seperti ini

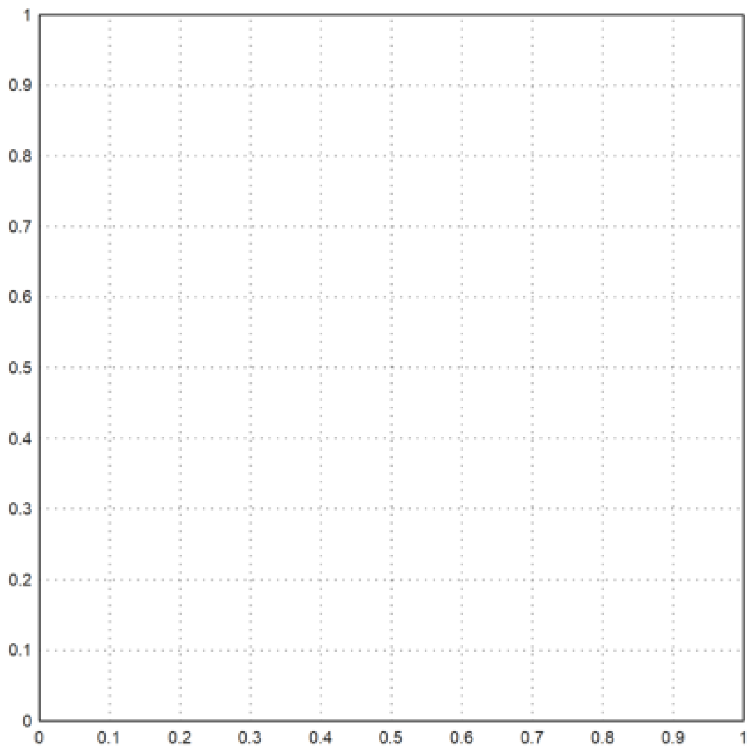
```
>function fx(a,c,d) &= rhs(s1[1]); $fx(a,c,d), function fy(a,c,d) &= rhs(s1[2]); $fy(a,c,d
```

$$0$$

$$0$$

Sekarang kita bisa menggambar setnya. Sisi b bervariasi dari 1 hingga 4. Diketahui bahwa kita mendapatkan elips.

```
>aspect(1); plot2d(&fx(3,x,5),&fy(3,x,5),xmin=1,xmax=4,square=1):
```



Kita dapat memeriksa persamaan umum elips ini, yaitu.

$$\frac{(x-x_m)^2}{u^2}+\frac{(y-y_m)}{v^2}=1,$$

di mana (xm,ym) adalah pusat, dan u dan v adalah setengah sumbu.

```
>$ratsimp((fx(a,c,d)-a/2)^2/u^2+fy(a,c,d)^2/v^2 with [u=d/2,v=sqrt(d^2-a^2)/2])
```

$$\frac{a^2}{d^2}$$

Kita melihat bahwa tinggi dan luas segitiga adalah maksimal untuk x = 0. Jadi luas segitiga dengan a + b + c = d adalah maksimal, jika sama sisi. Kami ingin mendapatkan ini secara analitis.

```
>eqns &= [diff(H(a,b,d-(a+b))^2,a)=0,diff(H(a,b,d-(a+b))^2,b)=0]; $eqns
```

$$\left[\frac{a\,ysol^2}{2}=0, 0=0\right]$$

Kami mendapatkan beberapa minima, yang termasuk dalam segitiga dengan satu sisi 0, dan solusi a=b=c=d/3.

```
>$solve(eqns,[a,b])
```

$$[[a=0, b=\%r_1]]$$

Ada juga metode Lagrange, memaksimalkan H(a,b,c)^2 terhadap a+b+d=d.

```
>&solve([diff(H(a,b,c)^2,a)=la,diff(H(a,b,c)^2,b)=la, ...
>   diff(H(a,b,c)^2,c)=la,a+b+c=d],[a,b,c,la])
```

```
Maxima said:
diff: second argument must be a variable; found [1,0,4]
 -- an error. To debug this try: debugmode(true);

Error in:
... la,    diff(H(a,b,c)^2,c)=la,a+b+c=d],[a,b,c,la]) ...
                                                     ^
```

Kita bisa membuat plot situasinya.
Pertama, atur poin di Maxima

```
>A &= at([x,y],sol[2]); $A
```

```
Maxima said:
part: invalid index of list or matrix.
 -- an error. To debug this try: debugmode(true);

Error in:
A &= at([x,y],sol[2]); $A ...
                     ^
```

```
>B &= [0,0]; $B, C &= [a,0]; $C
```

$$[0,0]$$

$$[a,0]$$

Kemudian atur rentang plot, dan plot poinnya.

```
>setPlotRange(0,5,-2,3); ...
>a=4; b=3; c=2; ...
>plotPoint(mxmeval("B"),"B"); plotPoint(mxmeval("C"),"C"); ...
>plotPoint(mxmeval("A"),"A"):
```

```
Variable a1 not found!
Use global variables or parameters for string evaluation.
Error in Evaluate, superfluous characters found.
Try "trace errors" to inspect local variables after errors.
mxmeval:
    return evaluate(mxm(s));
Error in:
... otPoint(mxmeval("C"),"C"); plotPoint(mxmeval("A"),"A"): ...
                                                      ^
```

Plot segmennya.

```
>plotSegment(mxmeval("A"),mxmeval("C")); ...
>plotSegment(mxmeval("B"),mxmeval("C")); ...
>plotSegment(mxmeval("B"),mxmeval("A")):
```

```
Variable a1 not found!
Use global variables or parameters for string evaluation.
Error in Evaluate, superfluous characters found.
Try "trace errors" to inspect local variables after errors.
mxmeval:
    return evaluate(mxm(s));
Error in:
plotSegment(mxmeval("A"),mxmeval("C")); plotSegment(mxmeval("B ...
                              ^
```

Hitung tengah tegak lurus di Maxima.

```
>h &= middlePerpendicular(A,B); g &= middlePerpendicular(B,C);
```

Dan bagian tengah dari keliling.

```
>U &= lineIntersection(h,g);
```

Kita mendapatkan rumus untuk jari-jari lingkaran.

```
>&assume(a>0,b>0,c>0); $distance(U,B) | radcan
```

$$\frac{\sqrt{a_2^2 + a_1^2}\,\sqrt{a_2^2 + a_1^2 - 2\,a\,a_1 + a^2}}{2\,|a_2|}$$

Mari kita tambahkan ini ke plot.

```
>plotPoint(U()); ...
>plotCircle(circleWithCenter(mxmeval("U"),mxmeval("distance(U,C)"))):
```

```
Variable a2 not found!
Use global variables or parameters for string evaluation.
Error in ^
Error in expression: [a/2,(a2^2+a1^2-a*a1)/(2*a2)]
Error in:
plotPoint(U()); plotCircle(circleWithCenter(mxmeval("U"),mxmev ...
                ^
```

Menggunakan geometri, kita mendapatkan rumus sederhana

$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = 2r$$

untuk radius. Kita dapat memeriksa, apakah ini benar dengan Maxima. Maxima akan menfaktorkannya hanya jika kita mengkuadratkannya.

```
>$c^2/sin(computeAngle(A,B,C))^2 | factor
```

$$\left[\frac{{a_2}^2+{a_1}^2}{{a_2}^2}, 0, \frac{16\,\left({a_2}^2+{a_1}^2\right)}{{a_2}^2}\right]$$

Contoh 4: Garis Euler dan Parabola

Garis euler adalah garis yang ditentukan dari segitiga yang tidak sama sisi. Ini adalah garis tengah segitiga, dan melewati beberapa titik penting yang ditentukan dari segitiga, termasuk pusat ortosentrum, sirkumenter, pusat massa, titik Exeter, dan pusat lingkaran sembilan titik segitiga.

Untuk demonstrasi, kami menghitung dan memplot garis Euler dalam segitiga.

Pertama, kami menentukan sudut segitiga di Euler. Kami menggunakan definisi, yang terlihat dalam ekspresi simbolik.

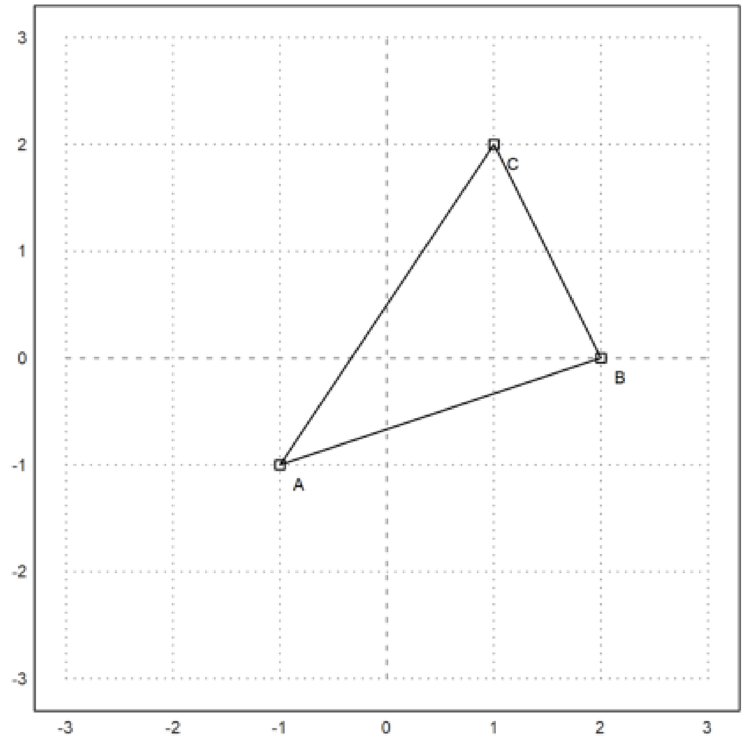
```
>A::=[-1,-1]; B::=[2,0]; C::=[1,2];
```

Untuk memplot objek geometris, kami menyiapkan area plot, dan menambahkan poin ke dalamnya. Semua plot objek geometris ditambahkan ke plot saat ini.

```
>setPlotRange(3); plotPoint(A,"A"); plotPoint(B,"B"); plotPoint(C,"C");
```

Kita juga bisa menambahkan sisi segitiga.

```
>plotSegment(A,B,""); plotSegment(B,C,""); plotSegment(C,A,""):
```



Berikut adalah luas segitiga menggunakan rumus determinan. Tentu saja kita harus mengambil nilai absolut dari hasil ini.

```
>$areaTriangle(A,B,C)
```

$$-\frac{7}{2}$$

Kita dapat menghitung koefisien dari sisi c.

```
>c &= lineThrough(A,B)
```

```
[- 1, 3, - 2]
```

Dan juga dapatkan rumus untuk baris ini.

```
>$getLineEquation(c,x,y)
```

$$3\,y-x=-2$$

Untuk bentuk Hesse, kita perlu menentukan titik, sehingga titik tersebut berada di sisi positif dari bentuk Hesse. Memasukkan titik menghasilkan jarak positif ke garis.

```
>$getHesseForm(c,x,y,C), $at(%,[x=C[1],y=C[2]])
```

$$\frac{3y - x + 2}{\sqrt{10}}$$

$$\frac{7}{\sqrt{10}}$$

Sekarang kita menghitung sirkit ABC.

```
>LL &= circleThrough(A,B,C); $getCircleEquation(LL,x,y)
```

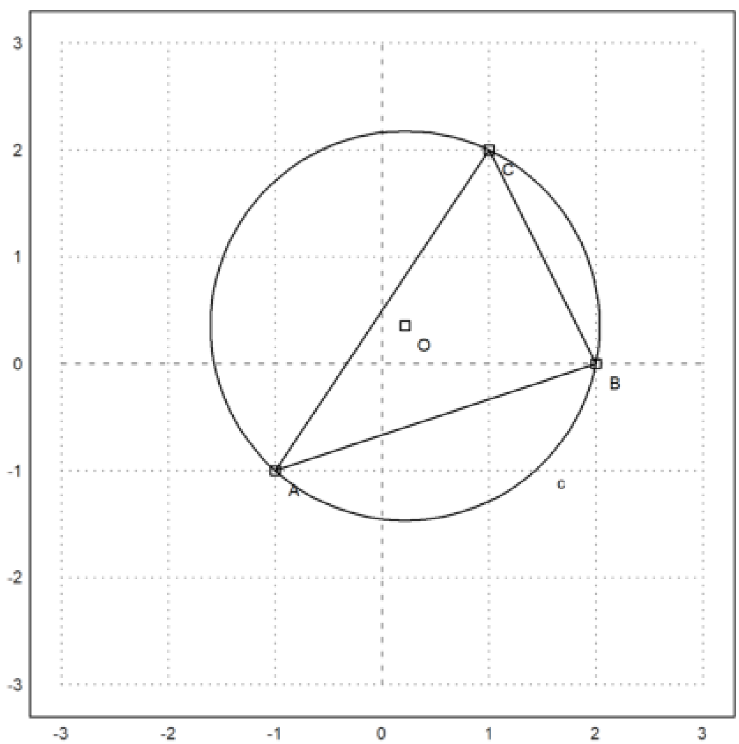
$$\left(y - \frac{5}{14}\right)^2 + \left(x - \frac{3}{14}\right)^2 = \frac{325}{98}$$

```
>O &= getCircleCenter(LL); $O
```

$$\left[\frac{3}{14}, \frac{5}{14}\right]$$

Plot lingkaran dan pusatnya. Cu dan U adalah simbolik. Kami mengevaluasi ekspresi ini untuk Euler.

```
>plotCircle(LL()); plotPoint(O(),"O"):
```



Kita dapat menghitung perpotongan ketinggian di ABC (orthocenter) secara numerik dengan perintah berikut.

```
>H &= lineIntersection(perpendicular(A,lineThrough(C,B)),...
>  perpendicular(B,lineThrough(A,C))); $H
```

$$\left[\frac{11}{7},\frac{2}{7}\right]$$

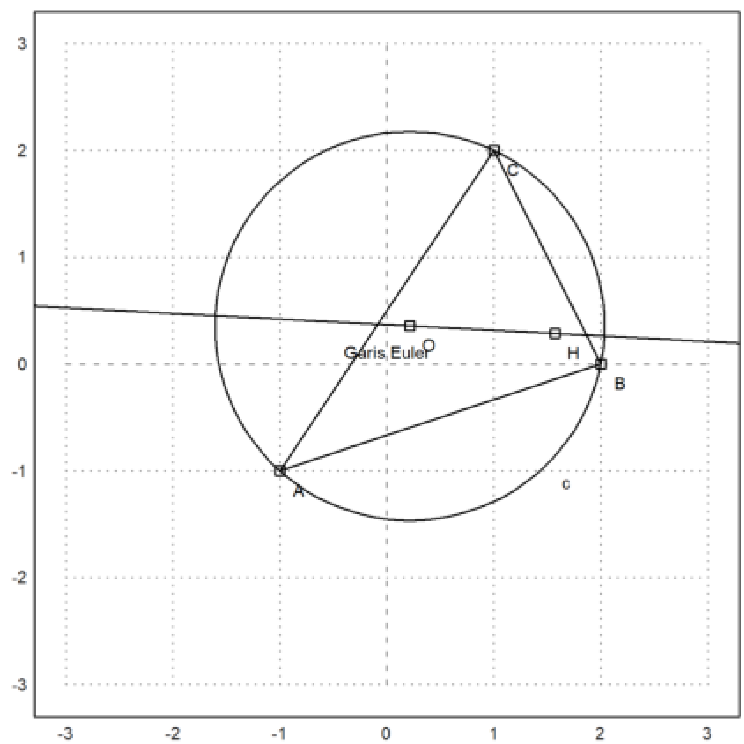
Sekarang kita dapat menghitung garis Euler dari segitiga tersebut.

```
>el &= lineThrough(H,O); $getLineEquation(el,x,y)
```

$$-\frac{19\,y}{14}-\frac{x}{14}=-\frac{1}{2}$$

Tambahkan ke plot kita.

```
>plotPoint(H(),"H"); plotLine(el(),"Garis Euler"):
```

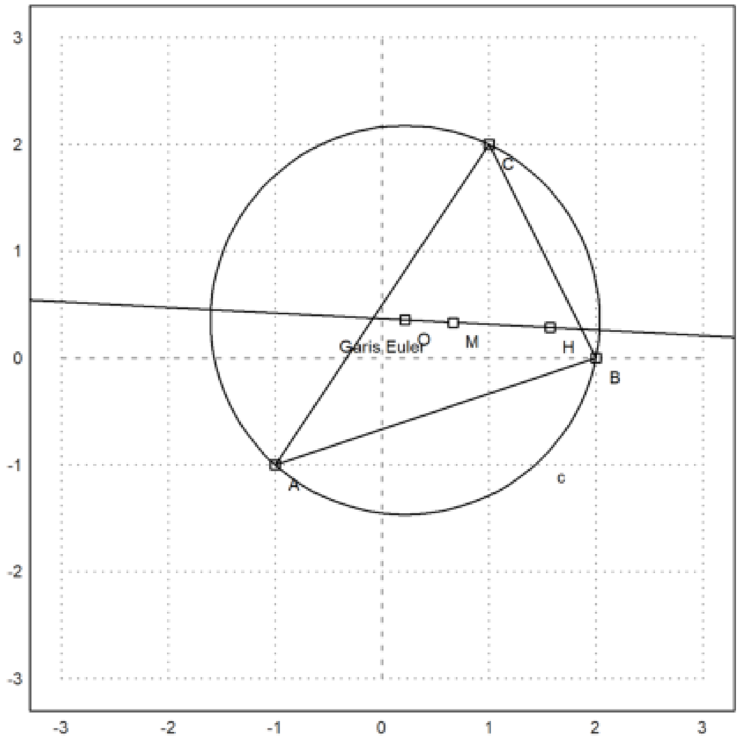


Pusat gravitasi harus berada di garis ini.

```
>M &= (A+B+C)/3; $getLineEquation(el,x,y) with [x=M[1],y=M[2]]
```

$$-\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}$$

```
>plotPoint(M(),"M"): // titik berat
```



Teorinya mengatakan bahwa MH=2*MO. Kita perlu menyederhanakan dengan radcan untuk mencapai ini.

```
>$distance(M,H)/distance(M,O)|radcan
```

$$2$$

Fungsinya termasuk fungsi untuk sudut juga.

```
>$computeAngle(A,C,B), degprint(%())
```

$$\arccos\left(\frac{4}{\sqrt{5}\,\sqrt{13}}\right)$$

```
60°15'18.43''
```

Persamaan untuk pusat lingkaran tidak terlalu bagus.

```
>Q &= lineIntersection(angleBisector(A,C,B),angleBisector(C,B,A))|radcan; $Q
```

$$\left[\frac{\left(2^{\frac{3}{2}}+1\right)\,\sqrt{5}\,\sqrt{13}-15\,\sqrt{2}+3}{14},\frac{\left(\sqrt{2}-3\right)\,\sqrt{5}\,\sqrt{13}+5\,2^{\frac{3}{2}}+5}{14}\right]$$

Mari kita hitung juga ekspresi jari-jari lingkaran yang tertulis.

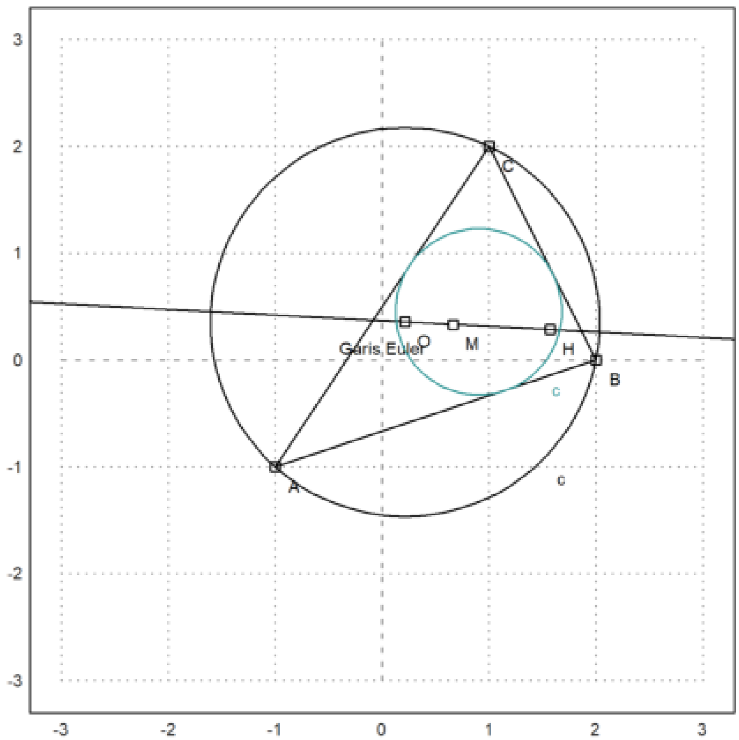
```
>r &= distance(Q,projectToLine(Q,lineThrough(A,B)))|ratsimp; $r
```

$$\frac{\sqrt{\left(-41\,\sqrt{2}-31\right)\,\sqrt{5}\,\sqrt{13}+115\,\sqrt{2}+614}}{7\,\sqrt{2}}$$

```
>LD &=  circleWithCenter(Q,r); // Lingkaran dalam
```

Mari kita tambahkan ini ke plot.

```
>color(5); plotCircle(LD()):
```



Parabola

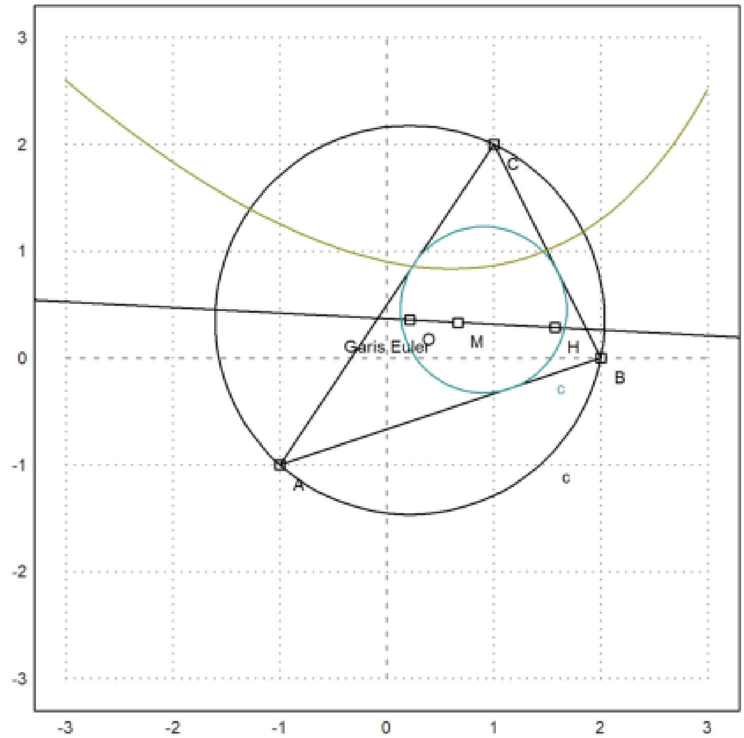
Selanjutnya akan dicari persamaan tempat kedudukan titik-titik yang berjarak sama ke titik C dan ke garis AB.

```
>p &= getHesseForm(lineThrough(A,B),x,y,C)-distance([x,y],C); $p='0
```

$$\frac{3\,y-x+2}{\sqrt{10}}-\sqrt{\left(2-y\right)^2+\left(1-x\right)^2}=0$$

Persamaan tersebut dapat digambar menjadi satu dengan gambar sebelumnya.

```
>plot2d(p,level=0,add=1,contourcolor=6):
```



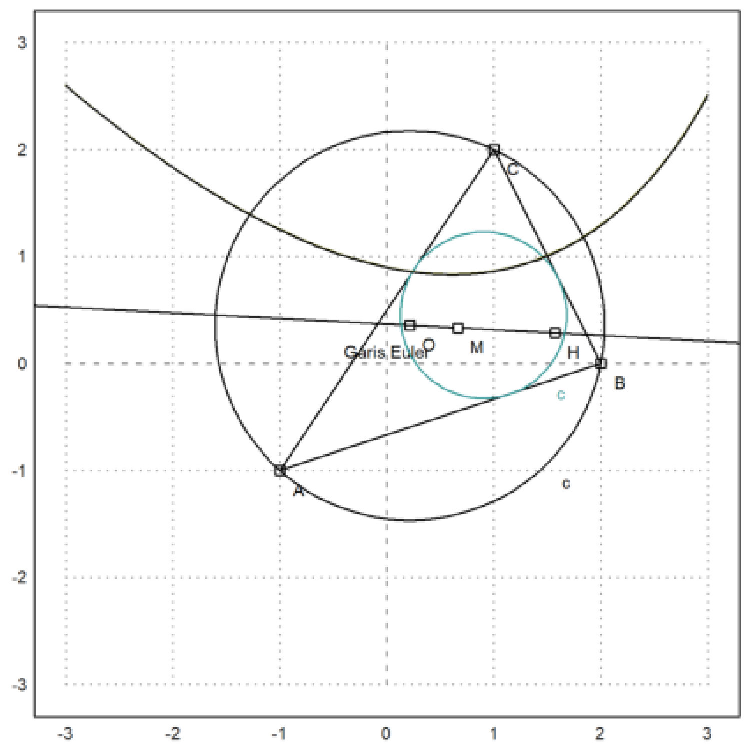
Ini seharusnya menjadi beberapa fungsi, tetapi pemecah default Maxima dapat menemukan solusi hanya, jika persamaan kita kuadratkan. Akibatnya, kami mendapatkan solusi palsu.

```
>akar &= solve(getHesseForm(lineThrough(A,B),x,y,C)^2-distance([x,y],C)^2,y)
```

```
[y = - 3 x - sqrt(70) sqrt(9 - 2 x) + 26,
                        y = - 3 x + sqrt(70) sqrt(9 - 2 x) + 26]
```

Solusi pertama adalah
maxima: akar[1]
Menambahkan solusi pertama ke pertunjukkan plot, bahwa itu memang jalan yang kita cari. Teori mengatakan kepada kita bajwa itu adalah parabola yang diputar.

```
>plot2d(&rhs(akar[1]),add=1):
```




```
>function g(x) &= rhs(akar[1]); $'g(x)= g(x)// fungsi yang mendefinisikan kurva di atas
```

$$g(x) = -3\,x - \sqrt{70}\,\sqrt{9 - 2\,x} + 26$$

```
>T &=[-1, g(-1)]; // ambil sebarang titik pada kurva tersebut
>dTC &= distance(T,C); $fullratsimp(dTC), $float(%) // jarak T ke C
```

$$\sqrt{1503 - 54\,\sqrt{11}\,\sqrt{70}}$$

$$2.135605779339061$$

```
>U &= projectToLine(T,lineThrough(A,B)); $U // proyeksi T pada garis AB
```

$$\left[\frac{80 - 3\,\sqrt{11}\,\sqrt{70}}{10}, \frac{20 - \sqrt{11}\,\sqrt{70}}{10}\right]$$

```
>dU2AB &= distance(T,U); $fullratsimp(dU2AB), $float(%) // jatak T ke AB
```

$$\sqrt{1503 - 54\,\sqrt{11}\,\sqrt{70}}$$

$$2.135605779339061$$

Ternyata jarak T ke C sama dengan jarak T ke AB. Coba Anda pilih titik T yang lain dan ulangi perhitungan-perhitungan di atas untuk menunjukkan bahwa hasilnya juga sama.

Contoh 5: Trigonometri Rasional

Ini terinspirasi oleh ceramah N.J.Wildberger. Dalam bukunya "Proporsi Agung", Wildberger mengusulkan untuk menggantikan pengertian klasik tentang jarak dan sudut dengan kuadransi dan penyebaran. Dengan menggunakan ini, memang mungkin untuk menghindari fungsi trigonometri dalam banyak contoh, dan tetap "rasional".

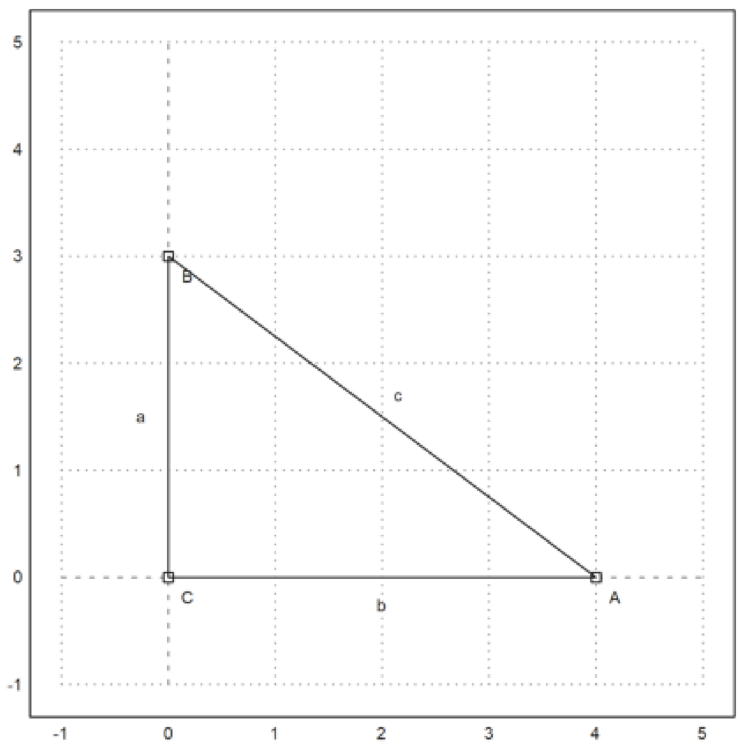
Berikut ini, saya memperkenalkan konsep, dan memecahkan beberapa masalah. Saya menggunakan perhitungan simbolik Maxima di sini, yang menyembunyikan keuntungan utama dari trigonometri rasional bahwa perhitungan dapat dilakukan dengan kertas dan pensil saja. Anda diundang untuk memeriksa hasil tanpa komputer.

Intinya adalah bahwa perhitungan rasional simbolis sering kali menghasilkan hasil yang sederhana. Sebaliknya, trigonometri klasik menghasilkan hasil trigonometri yang rumit, yang mengevaluasi ke pendekatan numerik saja.

```
>load geometry;
```

Untuk pendahuluan pertama, kami menggunakan segitiga persegi panjang dengan proporsi Mesir terkenal 3, 4 dan 5. Perintah berikut adalah perintah Euler untuk memplot geometri bidang yang terdapat dalam file Euler "geometry.e".

```
>C&:=[0,0]; A&:=[4,0]; B&:=[0,3]; ...
>setPlotRange(-1,5,-1,5); ...
>plotPoint(A,"A"); plotPoint(B,"B"); plotPoint(C,"C"); ...
>plotSegment(B,A,"c"); plotSegment(A,C,"b"); plotSegment(C,B,"a"); ...
>insimg(30);
```



Tentu saja,

$$\sin(w_a) = \frac{a}{c},$$

di mana wa adalah sudut di A. Cara biasa untuk menghitung sudut ini, adalah dengan melakukan invers dari fungsi sinus. Hasilnya adalah sudut yang tidak dapat dicerna, yang hanya dapat dicetak secara perkiraan.

```
>wa := arcsin(3/5); degprint(wa)
```

```
36°52'11.63''
```

Trigonometri rasional mencoba menghindari hal ini.
Pengertian pertama dari trigonometri rasional adalah kuadran, yang menggantikan jarak. Faktanya, itu hanyalah kuadrat jarak. Berikut ini, a, b, dan c menunjukkan kuadran sisi-sisinya.
Teorema Pythogoras menjadi a+b=c lalu.

```
>a &= 3^2; b &= 4^2; c &= 5^2; &a+b=c
```

```
25 = 25
```

Gagasan kedua dari trigonometri rasional adalah penyebarannya. Spread mengukur bukaan antar baris. Ini adalah 0, jika garis sejajar, dan 1, jika garis persegi panjang. Ini adalah kuadrat dari sinus sudut antara dua garis.
Penyebaran garis AB dan AC pada gambar di atas didefinisikan sebagai

$$s_a = \sin(\alpha)^2 = \frac{a}{c},$$

di mana a dan c adalah kuadrat dari segitiga persegi panjang mana pun dengan satu sudut di A.

```
>sa &= a/c; $sa
```

$$\frac{9}{25}$$

Ini lebih mudah dihitung daripada sudut, tentu saja. Tetapi Anda kehilangan properti yang sudut dapat ditambahkan dengan mudah.
Tentu saja, kita dapat mengubah nilai perkiraan sudut wa menjadi sprad, dan mencetaknya sebagai pecahan.

```
>fracprint(sin(wa)^2)
```

```
9/25
```

Hukum cosinus dari trgonometri klasik diterjemahkan menjadi "hukum silang" berikut.

$$(c + b - a)^2 = 4bc\,(1 - s_a)$$

Di sini a, b, dan c adalah kuadran dari sisi-sisi segitiga, dan sa adalah sebaran di sudut A. Sisi a, seperti biasa, berlawanan dengan sudut A.
Hukum ini diimplementasikan dalam file geometry.e yang kami muat ke Euler.

```
>$crosslaw(aa,bb,cc,saa)
```

$$\left[\left(bb-aa+\frac{7}{6}\right)^{2},\left(bb-aa+\frac{7}{6}\right)^{2},\left(bb-aa+\frac{5}{3\,\sqrt{2}}\right)^{2}\right]=\left[\frac{14\,bb\,\left(1-saa\right)}{3},\frac{14\,bb\,\left(1-saa\right)}{3},\frac{5\,2^{\frac{3}{2}}\,bb\,\left(1-saa\right)}{3}\right]$$

Dalam kasus kami, kita mendapatkan

```
>$crosslaw(a,b,c,sa)
```

$$1024=1024$$

Mari kita gunakan crosslaw ini untuk mencari sebaran di A. Untuk melakukan ini, kita menghasilkan crosslaw untuk kuadran a, b, dan c, dan menyelesaikannya untuk sebaran yang tidak diketahui sa.
Anda dapat melakukan ini dengan tangan dengan mudah, tetapi saya menggunakan Maxima. Tentu saja, kami mendapatkan hasilnya, kami sudah mendapatkannya.

```
>$crosslaw(a,b,c,x), $solve(%,x)
```

$$1024=1600\,\left(1-x\right)$$

$$\left[x=\frac{9}{25}\right]$$

Kami sudah tahu ini. Definisi penyebaran adalah kasus khusus dari hukum lintas hukum.
Kita juga bisa menyelesaikan ini untuk umum a, b, c. Hasilnya adalah rumus yang menghitung sebaran sudut segitiga berdasarkan kuadran ketiga sisinya.

```
>$solve(crosslaw(aa,bb,cc,x),x)
```

$$\left[\left[\frac{168\,bb\,x+36\,bb^{2}+\left(-72\,aa-84\right)\,bb+36\,aa^{2}-84\,aa+49}{36},\frac{168\,bb\,x+36\,bb^{2}+\left(-72\,aa-84\right)\,bb+36\,aa^{2}-84\,aa+49}{36},\right.\right.$$

Kita bisa membuat fungsi dari hasilnya. Fungsi seperti itu sudah ditentukan dalam file geometry.e Euler.

```
>$spread(a,b,c)
```

$$\frac{9}{25}$$

Sebagai contoh, kita bisa menggunakannya untuk menghitung sudut segitiga bersisi

$$a,\quad a,\quad \frac{4a}{7}$$

Hasilnya rasional, yang tidak mudah didapat jika kita menggunakan trigonometri klasik.

```
>$spread(a,a,4*a/7)
```

$$\frac{6}{7}$$

Ini adalah sudut dalam derajat.

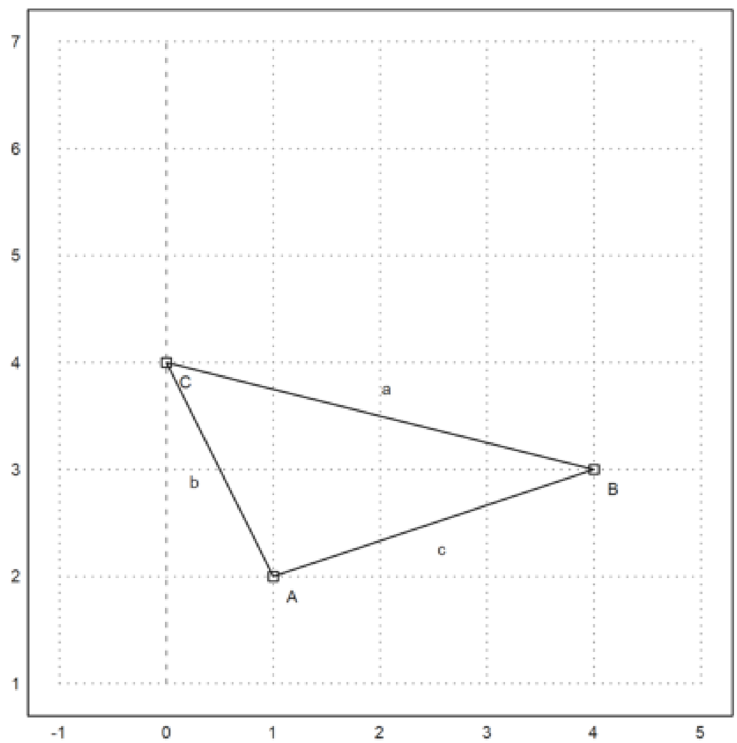
```
>degprint(arcsin(sqrt(6/7)))
```

```
67°47'32.44''
```

Contoh lain

Sekarang, mari kita coba contoh yang lebih canggih.
Kami mengatur tiga sudut segitiga sebagai berikut.

```
>A&:=[1,2]; B&:=[4,3]; C&:=[0,4]; ...
>setPlotRange(-1,5,1,7); ...
>plotPoint(A,"A"); plotPoint(B,"B"); plotPoint(C,"C"); ...
>plotSegment(B,A,"c"); plotSegment(A,C,"b"); plotSegment(C,B,"a"); ...
>insimg;
```



Menggunakan Pythogoras, mudah untuk menghitung jarak antara dua titik. Saya pertama kali menggunakan jarak fungsi file Euler untuk geometri. Jarak fungsi menggunakan geometri klasik.

```
>$distance(A,B)
```

$$\sqrt{10}$$

Euler juga memiliki fungsi kuadrans antara dua titik.
Dalam contoh berikut, karena c + b bukan a, segitiga tidak persegi panjang.

```
>c &= quad(A,B); $c, b &= quad(A,C); $b, a &= quad(B,C); $a,
```

$$10$$

$$5$$

$$17$$

Pertama, mari kita hitung sudut tradisional. Fungsi computeAngle menggunakan metode biasa berdasarkan perkalian titik dari dua vektor. Hasilnya adalah beberapa pendekatan floating point.

```
>wb &= computeAngle(A,B,C); $wb, $(wb/pi*180)()
```

$$\arccos\left(\frac{11}{\sqrt{10}\,\sqrt{17}}\right)$$

```
32.4711922908
```

Menggunakan pensil dan kertas, kita bisa melakukan hal yang sama dengan hukum silang. Kami memasukkan kuadran a, b, dan c ke dalam hukum silang dan menyelesaikan untuk x.

```
>$crosslaw(a,b,c,x), $solve(%,x),
```

$$4 = 200\,(1 - x)$$

$$\left[x = \frac{49}{50}\right]$$

Artinya, fungsi penyebaran yang didefinisikan dalam "geometry.e".

```
>sb &= spread(b,a,c); $sb
```

$$\frac{49}{170}$$

Maxima mendapatkan hasil yang sama dengan menggunakan trigonometri biasa, jika kita memaksakannya. Itu menyelesaikan istilah sin (arccos (...)) menjadi hasil pecahan. Kebanyakan siswa tidak dapat melakukan ini.

```
>$sin(computeAngle(A,B,C))^2
```

$$\frac{49}{170}$$

Setelah kita mendapatkan sebaran di B, kita bisa menghitung tinggi ha di sisi a. Ingat bahwa

$$s_b = \frac{h_a}{c}$$

Menurut definisi.

```
>ha &= c*sb; $ha
```

$$\frac{49}{17}$$

Gambar berikut telah diproduksi dengan program geometri C.a.R., yang dapat menggambar kuadran dan menyebar.
gambar : (20) Rational_Geometry_CaR.png
Menurut definisi, panjang ha adalah akar kuadrat dari kuadrannya.

```
>$sqrt(ha)
```

$$\frac{7}{\sqrt{17}}$$

Sekarang kita bisa menghitung luas segitiga. Jangan lupa, bahwa kita berurusan dengan kuadran!

```
>$sqrt(ha)*sqrt(a)/2
```

$$\frac{7}{2}$$

Rumus determinan yang biasa menghasilkan hasil yang sama.

```
>$areaTriangle(B,A,C)
```

$$\frac{7}{2}$$

Formula Heron

Sekarang, mari kita selesaikan masalah ini secara umum!

```
>&remvalue(a,b,c,sb,ha);
```

Pertama-tama kita menghitung spread di B untuk segitiga dengan sisi a, b, dan c. Kemudian kami menghitung luas area yang dikuadratkan ("kuadrea"?), Memfaktorkannya dengan Maxima, dan kami mendapatkan rumus Heron yang terkenal.
Memang, ini sulit dilakukan dengan pensil dan kertas.

```
>$spread(b^2,c^2,a^2), $factor(%*c^2*a^2/4)
```

$$\frac{-c^4-\left(-2\,b^2-2\,a^2\right)\,c^2-b^4+2\,a^2\,b^2-a^4}{4\,a^2\,c^2}$$

$$\frac{\left(-c+b+a\right)\,\left(c-b+a\right)\,\left(c+b-a\right)\,\left(c+b+a\right)}{16}$$

Aturan Triple Spread

Kerugian dari spread adalah bahwa mereka tidak lagi hanya menambahkan sudut serupa.
Namun, tiga sebaran segitiga memenuhi aturan "penyebaran rangkap tiga" berikut.

```
>&remvalue(sa,sb,sc); $triplespread(sa,sb,sc)
```

$$\left(sc+sb+sa\right)^2=2\,\left(sc^2+sb^2+sa^2\right)+4\,sa\,sb\,sc$$

Aturan ini berlaku untuk tiga sudut yang bertambah menjadi 180°.

$$\alpha+\beta+\gamma=\pi$$

Sejak penyebaran

$$\alpha,\pi-\alpha$$

sama, aturan penyebaran tiga kali lipat juga benar, jika

$$\alpha+\beta=\gamma$$

Karena penyebaran sudut negatif adalah sama, aturan penyebaran tiga kali lipat juga berlaku, jika

$$\alpha+\beta+\gamma=0$$

Misalnya, kita dapat menghitung sebaran sudut 60°. Ini 3/4. Persamaan memiliki solusi kedua, di mana semua spread adalah 0.

```
>$solve(triplespread(x,x,x),x)
```

$$\left[x=\frac{3}{4} , x=0 \right]$$

Sebaran 90° jelaslah 1. Jika dua sudut dijumlahkan menjadi 90°, penyebarannya menyelesaikan persamaan penyebaran rangkap tiga dengan a, b, 1. Dengan perhitungan berikut kita mendapatkan a+b=1.

```
>$triplespread(x,y,1), $solve(%,x)
```

$$\left(y+x+1\right)^2=2\,\left(y^2+x^2+1\right)+4\,x\,y$$

$$\left[x=1-y \right]$$

Karena penyebaran 180°-t sama dengan penyebaran t, rumus penyebaran rangkap tiga juga berlaku, jika satu sudut adalah jumlah atau perbedaan dari dua sudut lainnya.
Jadi kita bisa menemukan sebaran sudut berlipat ganda. Perhatikan bahwa ada dua solusi lagi. Kami menjadikan ini sebuah fungsi.

```
>$solve(triplespread(a,a,x),x), function doublespread(a) &= factor(rhs(%[1]))
```

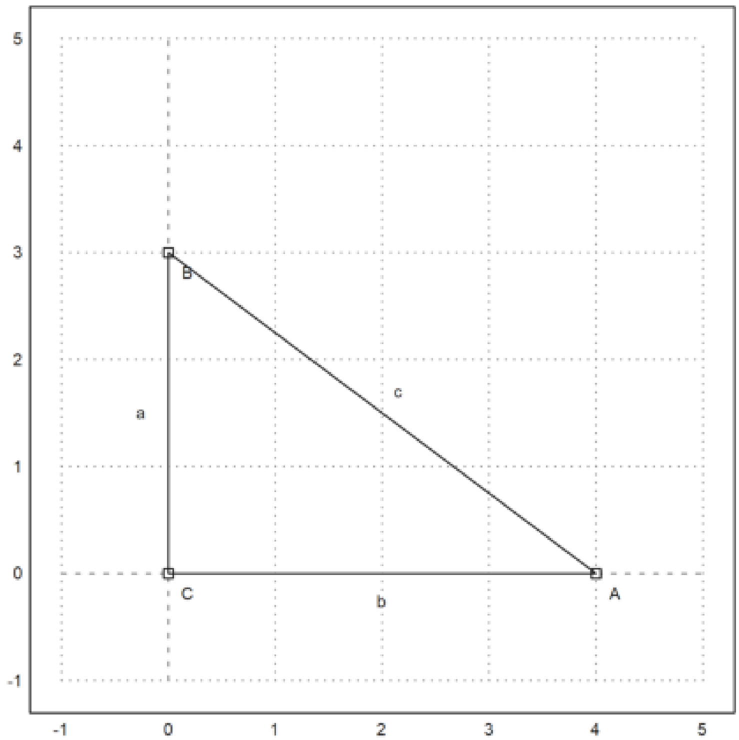
$$\left[x=4\,a-4\,a^2 , x=0 \right]$$

```
                    - 4 (a - 1) a
```

Pembagi Sudut

Ini situasinya, kita sudah tahu.

```
>C&:=[0,0]; A&:=[4,0]; B&:=[0,3]; ...
>setPlotRange(-1,5,-1,5); ...
>plotPoint(A,"A"); plotPoint(B,"B"); plotPoint(C,"C"); ...
>plotSegment(B,A,"c"); plotSegment(A,C,"b"); plotSegment(C,B,"a"); ...
>insimg;
```



Mari kita hitung panjang bisektor sudut pada A. Tapi kita ingin menyelesaikannya untuk umum a, b, c.

```
>&remvalue(a,b,c);
```

Jadi pertama-tama kita menghitung sebaran sudut terbagi di A, menggunakan rumus sebaran rangkap tiga. Masalah dengan rumus ini muncul lagi. Ini memiliki dua solusi. Kami harus memilih yang benar. Solusi lainnya mengacu pada sudut terbagi 180°-wa.

```
>$triplespread(x,x,a/(a+b)), $solve(%,x), sa2 &= rhs(%[1]); $sa2
```

$$\left(2\,x+\frac{a}{b+a}\right)^2=2\,\left(2\,x^2+\frac{a^2}{\left(b+a\right)^2}\right)+\frac{4\,a\,x^2}{b+a}$$

$$\left[x=\frac{-\sqrt{b}\,\sqrt{b+a}+b+a}{2\,b+2\,a},x=\frac{\sqrt{b}\,\sqrt{b+a}+b+a}{2\,b+2\,a}\right]$$

$$\frac{-\sqrt{b}\,\sqrt{b+a}+b+a}{2\,b+2\,a}$$

Mari kita periksa persegi panjang Mesir.

```
>$sa2 with [a=3^2,b=4^2]
```

$$\frac{1}{10}$$

Kami dapat mencetak sudut di Euler, setelah mentransfer penyebaran ke radian.

```
>wa2 := arcsin(sqrt(1/10)); degprint(wa2)
```

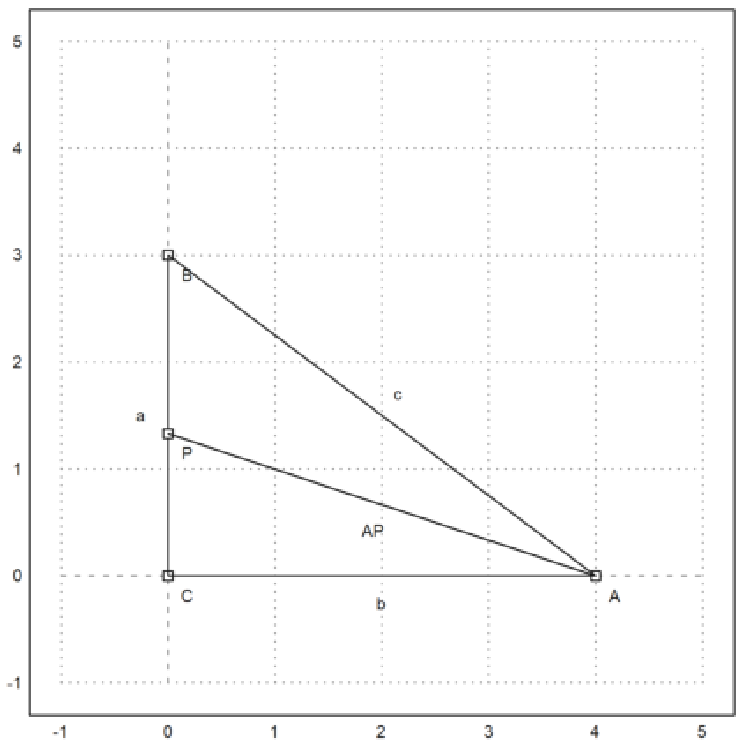
```
18°26'5.82''
```

Titik P adalah perpotongan dari garis bagi sudut dengan sumbu y.

```
>P := [0,tan(wa2)*4]
```

```
[0,  1.33333]
```

```
>plotPoint(P,"P"); plotSegment(A,P):
```



Mari kita periksa sudut dalam contoh spesifik kita.

```
>computeAngle(C,A,P), computeAngle(P,A,B)
```

```
0.321750554397
0.321750554397
```

Sekarang kita menghitung panjang bisektor AP.
Kita menggunakan teorema sinus di segitiga APC. Teorema ini menyatakan bahwa

$$\frac{BC}{\sin(w_a)} = \frac{AC}{\sin(w_b)} = \frac{AB}{\sin(w_c)}$$

memegang di segitiga apa pun. Persegi itu, itu diterjemahkan ke dalam apa yang disebut "hukum penyebaran"

$$\frac{a}{s_a} = \frac{b}{s_b} = \frac{c}{s_b}$$

dimana a, b, c menunjukkan qudrance.
Karena BPA sebaran adalah 1-sa2, kita dapatkan darinya bisa / 1 = b / (1-sa2) dan dapat menghitung bisa (kuadran garis-garis).

```
>&factor(ratsimp(b/(1-sa2))); bisa &= %; $bisa
```

$$\frac{2\,b\,\left(b+a\right)}{\sqrt{b}\,\sqrt{b+a}+b+a}$$

Mari kita periksa rumus ini untuk nilai Mesir kita.

```
>sqrt(mxmeval("at(bisa,[a=3^2,b=4^2])")), distance(A,P)
```

```
4.21637021356
4.21637021356
```

Kami juga dapat menghitung P menggunakan rumus spread.

```
>py&=factor(ratsimp(sa2*bisa)); $py
```

$$-\frac{b\,\left(\sqrt{b}\,\sqrt{b+a}-b-a\right)}{\sqrt{b}\,\sqrt{b+a}+b+a}$$

Nilainya sama dengan yang kita dapatkan dengan rumus trigonometri.

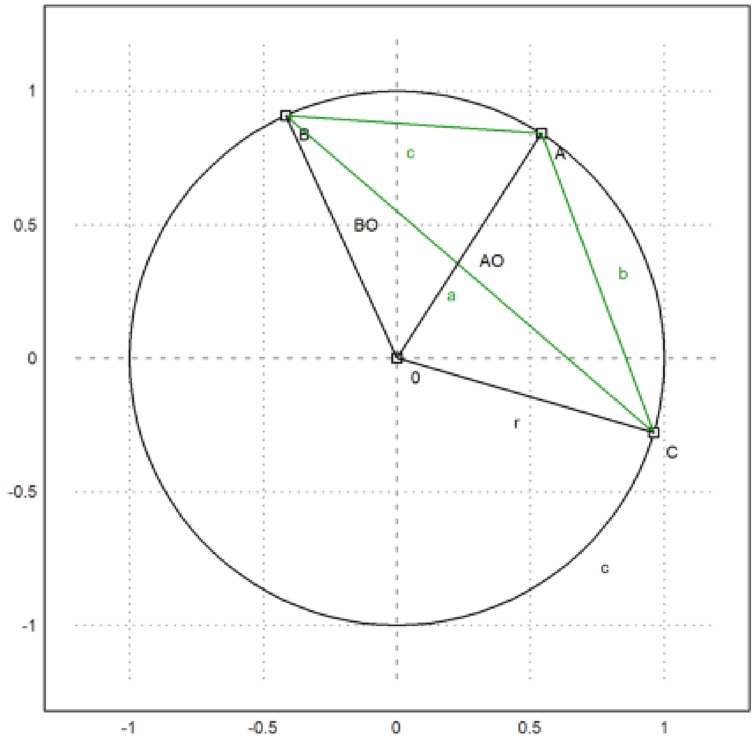
```
>sqrt(mxmeval("at(py,[a=3^2,b=4^2])"))
```

```
1.33333333333
```

Sudut Akord

Perhatikan situasi berikut.

```
>setPlotRange(1.2); ...
>color(1); plotCircle(circleWithCenter([0,0],1)); ...
>A:=[cos(1),sin(1)]; B:=[cos(2),sin(2)]; C:=[cos(6),sin(6)]; ...
>plotPoint(A,"A"); plotPoint(B,"B"); plotPoint(C,"C"); ...
>color(3); plotSegment(A,B,"c"); plotSegment(A,C,"b"); plotSegment(C,B,"a"); ...
>color(1); O:=[0,0];  plotPoint(O,"0"); ...
>plotSegment(A,O); plotSegment(B,O); plotSegment(C,O,"r"); ...
>insimg;
```



Kita bisa menggunakan Maxima untuk menyelesaikan rumus sebaran rangkap tiga untuk sudut di pusat O untuk r. Jadi kita mendapatkan rumus untuk jari-jari kuadrat dari keliling dalam hal kuadrat sisi.
Kali ini, Maxima menghasilkan beberapa angka nol yang kompleks, yang kita abaikan.

```
>&remvalue(a,b,c,r); // hapus nilai-nilai sebelumnya untuk perhitungan baru
>rabc &= rhs(solve(triplespread(spread(b,r,r),spread(a,r,r),spread(c,r,r)),r)[4]); $rabc
```

$$-\frac{a\,b\,c}{c^2-2\,b\,c+a\,\left(-2\,c-2\,b\right)+b^2+a^2}$$

Kita bisa menjadikannya sebagai fungsi Euler.

```
>function periradius(a,b,c) &= rabc;
```

Mari kita periksa hasilnya untuk poin A, B, C kita.

```
>a:=quadrance(B,C); b:=quadrance(A,C); c:=quadrance(A,B);
```

Radiusnya memang 1.

```
>periradius(a,b,c)
```

    1

Faktanya, penyebaran CBA hanya bergantung pada b dan c. Ini adalah teorema sudut akord.

```
>$spread(b,a,c)*rabc | ratsimp
```

$$\frac{b}{4}$$

Sebenarnya sebarannya adalah b/(4r), dan kita melihat bahwa sudut akor b adalah setengah dari sudut tengah.

```
>$doublespread(b/(4*r))-spread(b,r,r) | ratsimp
```

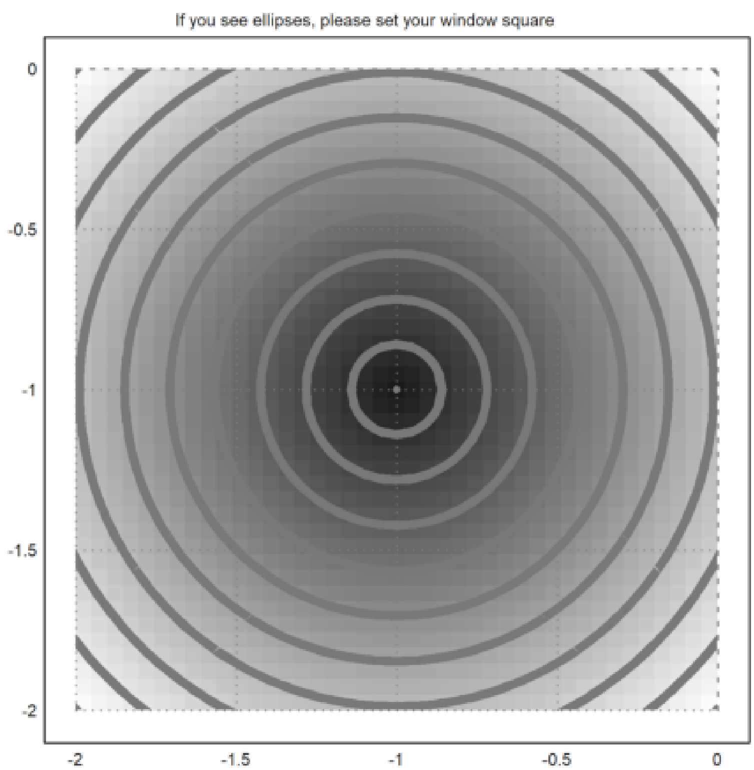
$$0$$

Contoh 6: Jarak Minimal pada Bidang

Catatan awal

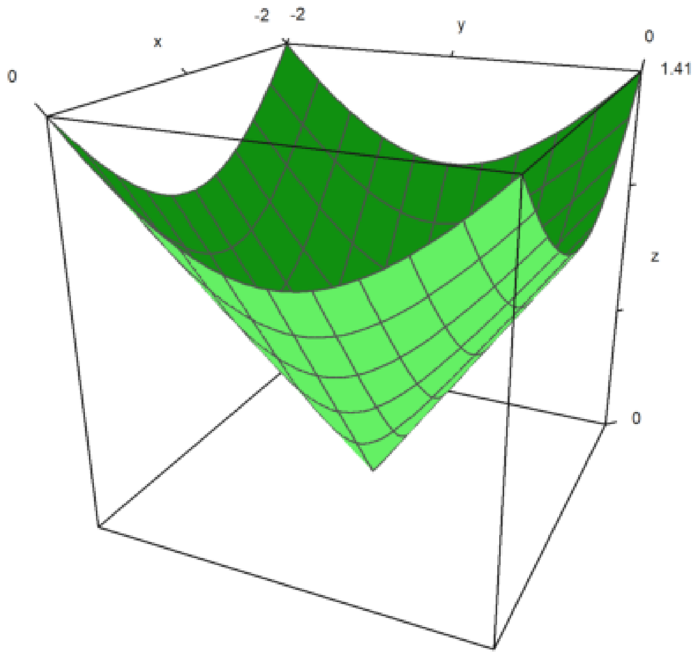
Fungsi yang, ke titik M di bidang, menetapkan jarak AM antara titik tetap A dan M, memiliki garis level yang agak sederhana: lingkaran berpusat di A.

```
>&remvalue();
>A=[-1,-1];
>function d1(x,y):=sqrt((x-A[1])^2+(y-A[2])^2)
>fcontour("d1",xmin=-2,xmax=0,ymin=-2,ymax=0,hue=1, ...
>title="If you see ellipses, please set your window square"):
```



dan grafiknya juga agak sederhana: bagian atas kerucut:

```
>plot3d("d1",xmin=-2,xmax=0,ymin=-2,ymax=0):
```

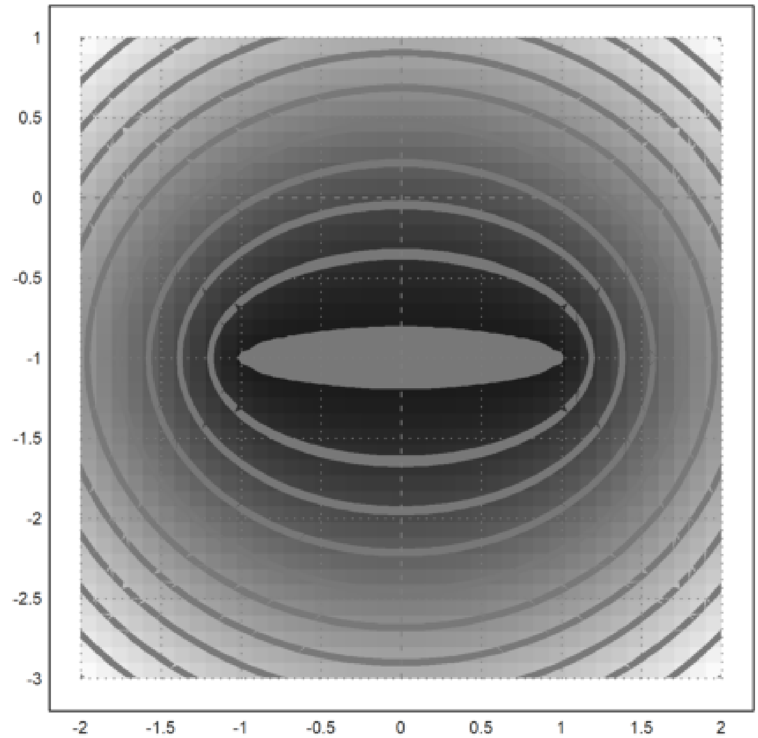


Tentu saja minimal 0 dicapai di A.

Dua titik

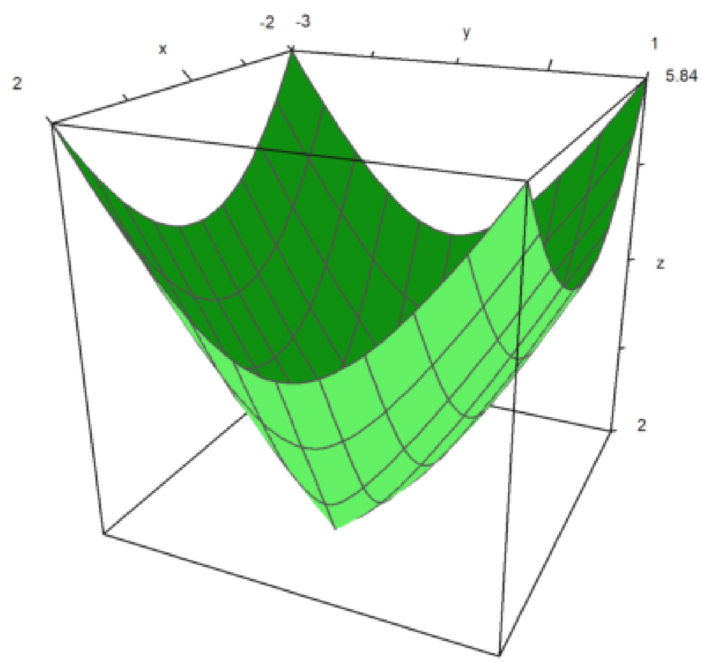
Sekarang kita melihat fungsi MA + MB dimana A dan B adalah dua titik (tetap). Ini adalah "fakta yang terkenal" bahwa kurva level adalah elips, titik fokusnya adalah A dan B; kecuali untuk minimum AB yang konstan pada segmen [AB]:

```
>B=[1,-1];
>function d2(x,y):=d1(x,y)+sqrt((x-B[1])^2+(y-B[2])^2)
>fcontour("d2",xmin=-2,xmax=2,ymin=-3,ymax=1,hue=1):
```



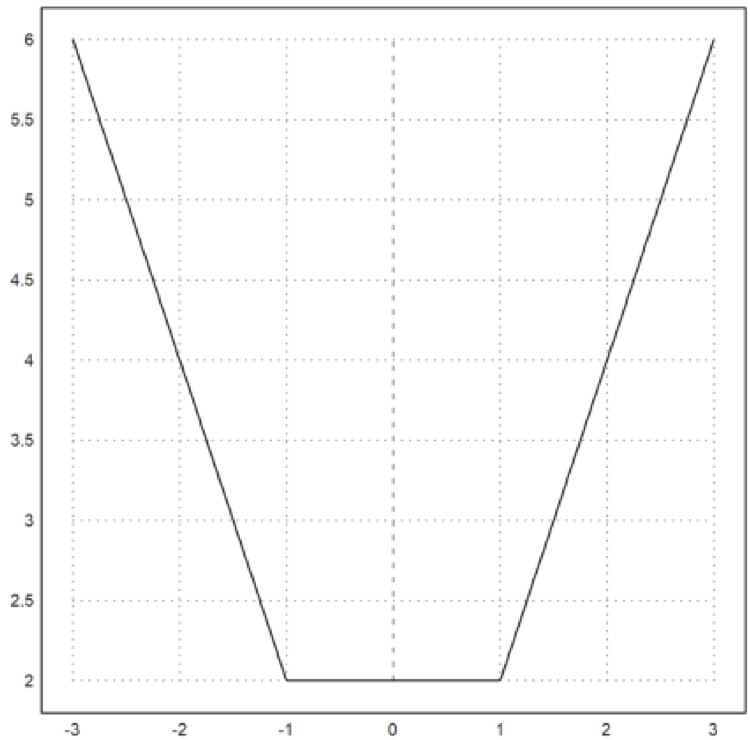
Grafiknya lebih menarik:

```
>plot3d("d2",xmin=-2,xmax=2,ymin=-3,ymax=1):
```



Batasan ke baris (AB) lebih terkenal:

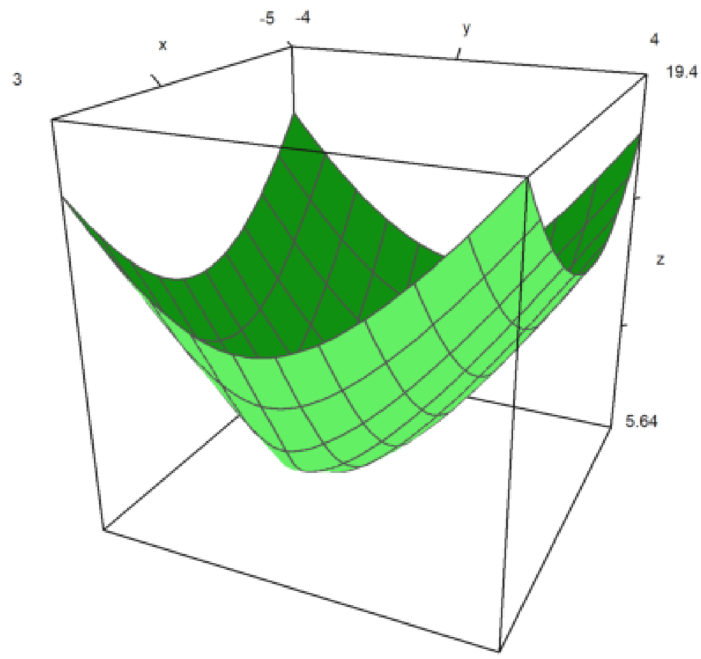
```
>plot2d("abs(x+1)+abs(x-1)",xmin=-3,xmax=3):
```



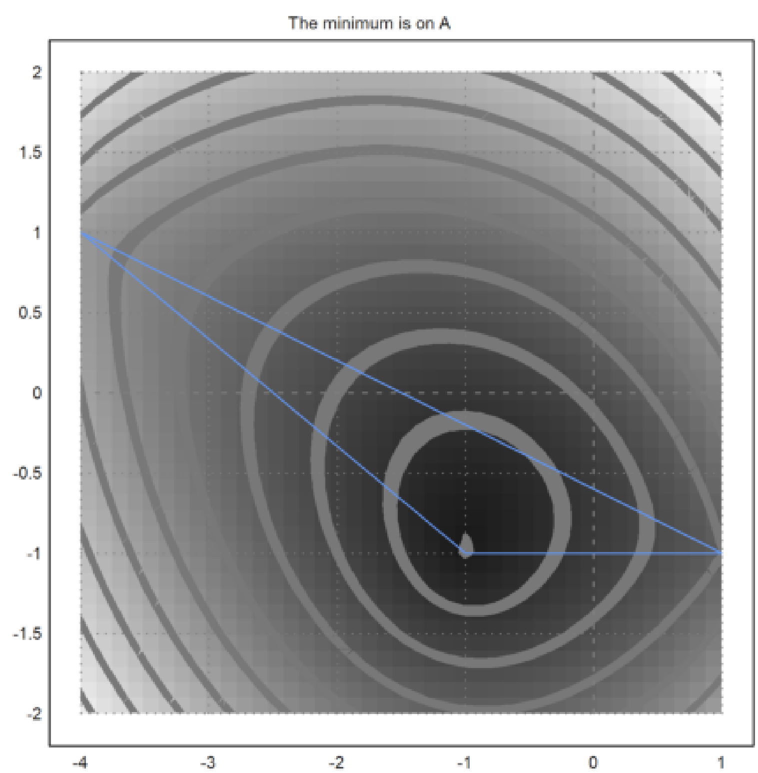
Tiga titik

Sekarang hal-hal menjadi kurang sederhana: Sedikit kurang diketahui bahwa MA+MB+MC mencapai minimumnya pada satu titik bidang tetapi untuk menentukannya kurang sederhana:
1) Jika salah satu sudut segitiga ABC lebih dari 120° (katakanlah dalam A), maka minimum tercapai pada titik ini (katakanlah AB+AC).
Contoh:

```
>C=[-4,1];
>function d3(x,y):=d2(x,y)+sqrt((x-C[1])^2+(y-C[2])^2)
>plot3d("d3",xmin=-5,xmax=3,ymin=-4,ymax=4);
>insimg;
```

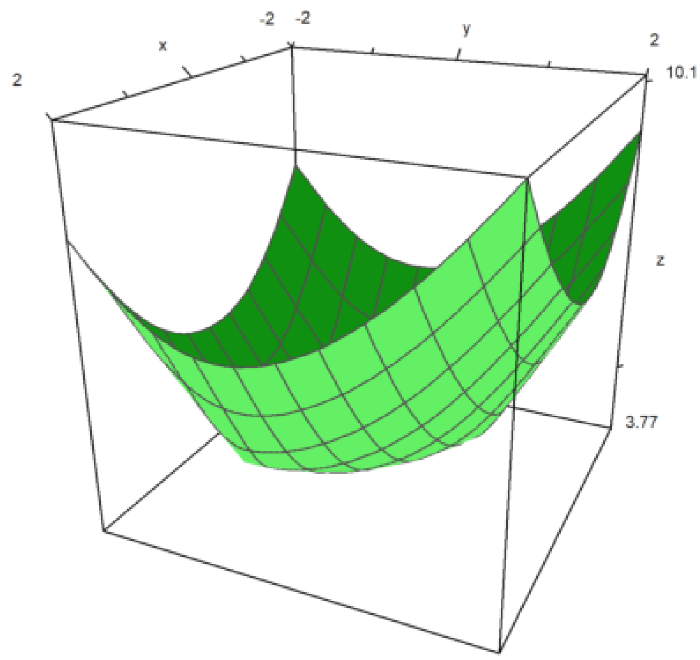



```
>fcontour("d3",xmin=-4,xmax=1,ymin=-2,ymax=2,hue=1,title="The minimum is on A");
>P=(A_B_C_A)'; plot2d(P[1],P[2],add=1,color=12);
>insimg;
```

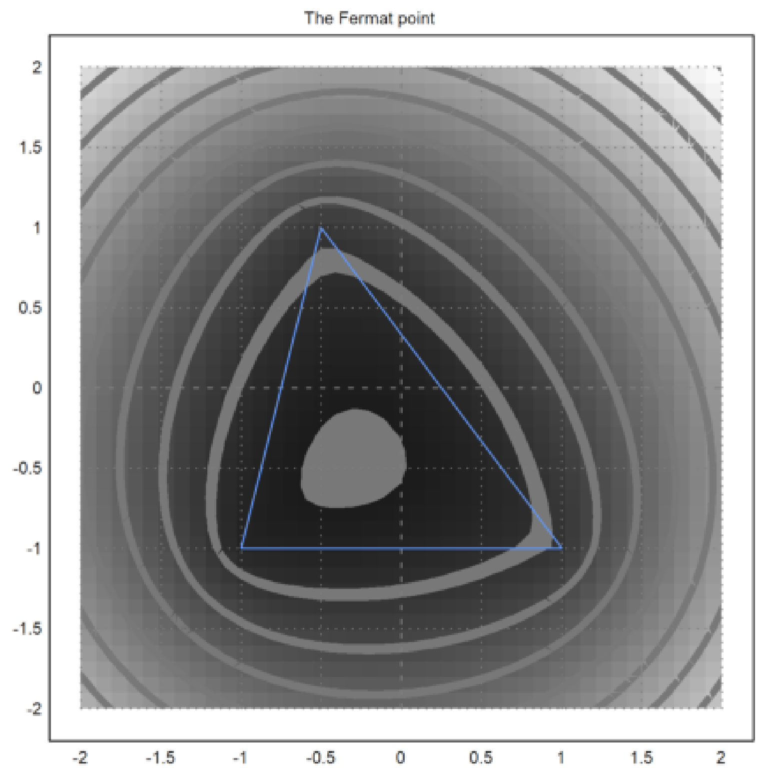


2) Tetapi jika semua sudut segitiga ABC kurang dari 120°, minimum berada pada titik F di bagian dalam segitiga, yang merupakan satu-satunya titik yang melihat sisi ABC dengan sudut yang sama (lalu masing-masing 120°) :

```
>C=[-0.5,1];
>plot3d("d3",xmin=-2,xmax=2,ymin=-2,ymax=2):
```




```
>fcontour("d3",xmin=-2,xmax=2,ymin=-2,ymax=2,hue=1,title="The Fermat point");
>P=(A_B_C_A)'; plot2d(P[1],P[2],add=1,color=12);
>insimg;
```

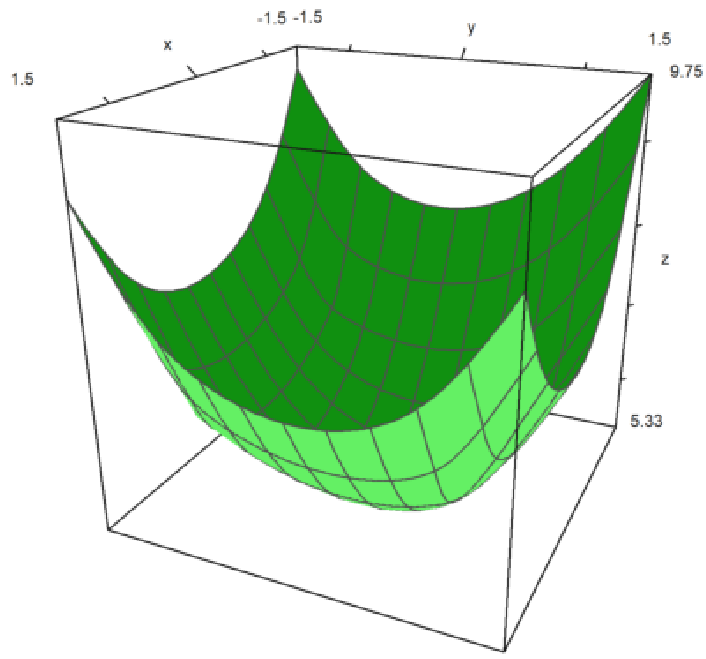


Merupakan kegiatan yang menarik untuk mewujudkan gambar di atas dengan perangkat lunak geometri; sebagai contoh, saya tahu soft tertulis di Java yang memiliki instruksi "garis kontur" ...
Semua ini di atas telah ditemukan oleh seorang hakim Prancis bernama Pierre de Fermat; dia menulis surat kepada para penggila lainnya seperti pendeta Marin Mersenne dan Blaise Pascal yang bekerja di bagian pajak penghasilan. Jadi titik unik F sehingga FA + FB + FC minimal disebut titik Fermat segitiga. Tetapi tampaknya beberapa tahun sebelumnya, Torriccelli Italia telah menemukan titik ini sebelum Fermat melakukannya! Pokoknya tradisinya adalah mencatat poin ini ...

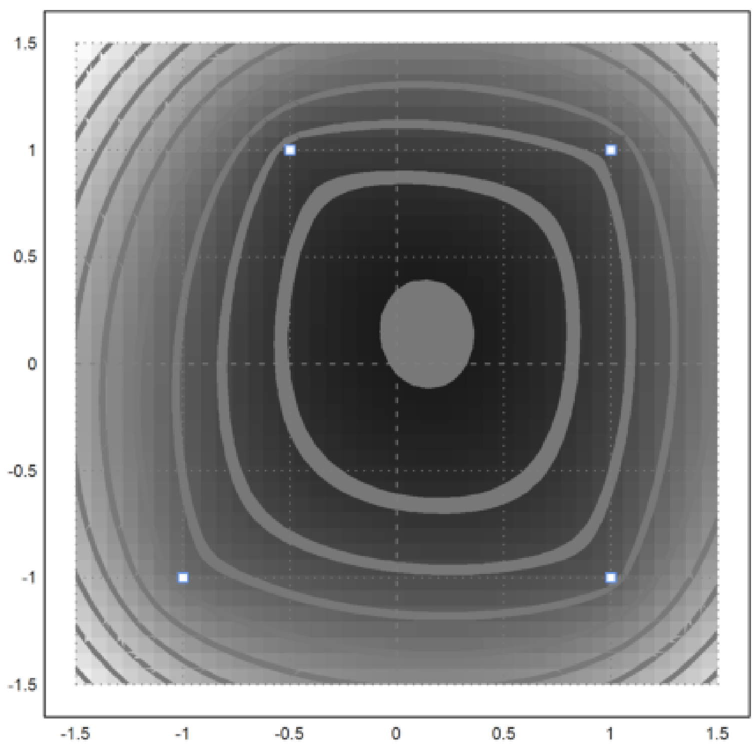
Empat titik

Langkah selanjutnya adalah menambahkan titik D ke-4 dan mencoba meminimalkan MA + MB + MC + MD; katakanlah bahwa Anda adalah operator TV kabel dan ingin mencari di bidang mana Anda harus meletakkan antena sehingga Anda dapat memberi makan empat desa dan menggunakan kabel sesedikit mungkin!

```
>D=[1,1];
>function d4(x,y):=d3(x,y)+sqrt((x-D[1])^2+(y-D[2])^2)
>plot3d("d4",xmin=-1.5,xmax=1.5,ymin=-1.5,ymax=1.5):
```




```
>fcontour("d4",xmin=-1.5,xmax=1.5,ymin=-1.5,ymax=1.5,hue=1);
>P=(A_B_C_D)'; plot2d(P[1],P[2],points=1,add=1,color=12);
>insimg;
```



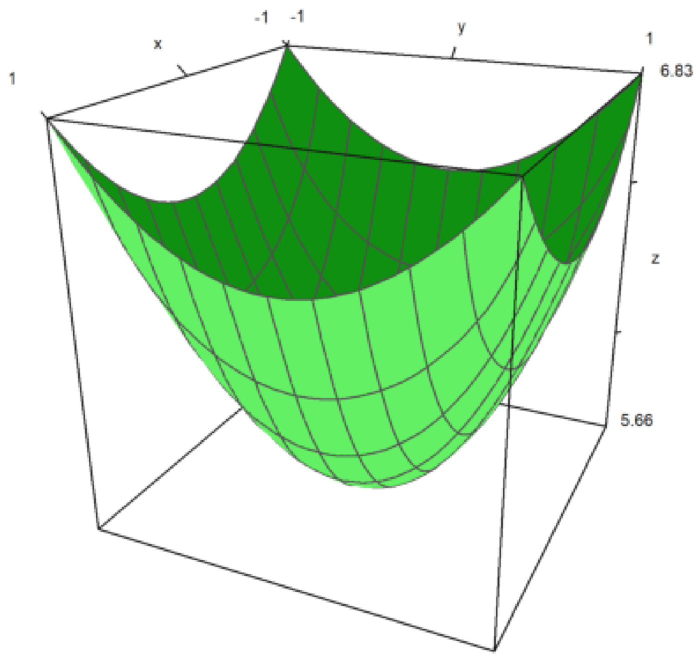
Masih ada minimum dan tidak ada yang dicapai pada simpul A, B, C atau D:

```
>function f(x):=d4(x[1],x[2])
>neldermin("f",[0.2,0.2])
```

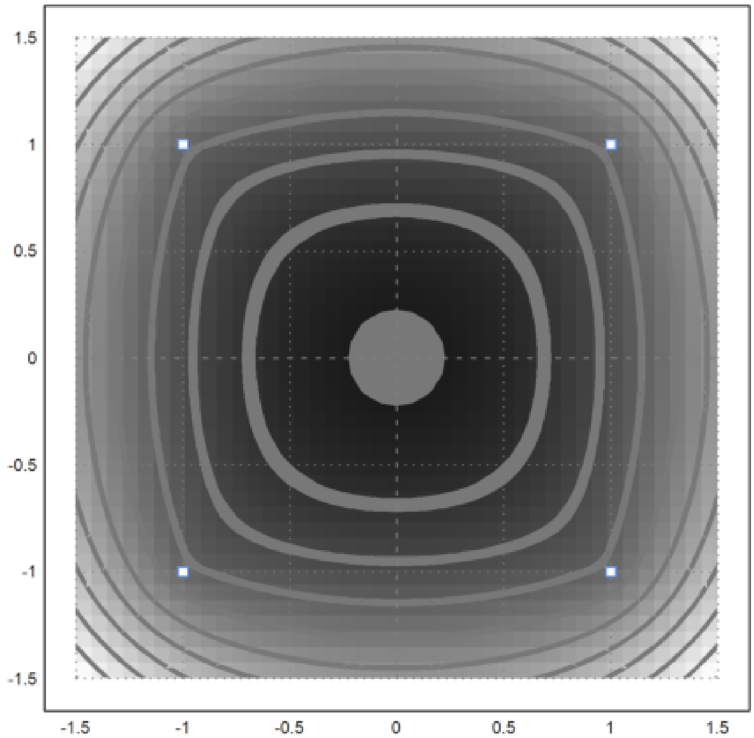
```
[0.142858,  0.142857]
```

Tampaknya dalam kasus ini, koordinat titik optimal rasional atau mendekati rasional ...
Sekarang ABCD adalah bujur sangkar, kami berharap bahwa titik optimal adalah pusat ABCD:

```
>C=[-1,1];
>plot3d("d4",xmin=-1,xmax=1,ymin=-1,ymax=1):
```




```
>fcontour("d4",xmin=-1.5,xmax=1.5,ymin=-1.5,ymax=1.5,hue=1);
>P=(A_B_C_D)'; plot2d(P[1],P[2],add=1,color=12,points=1);
>insimg;
```



Contoh 7: Bola Dandelin dengan Povray

Anda dapat menjalankan demonstrasi ini, jika Anda memiliki Povray diinstal, dan pvengine.exe di jalur program.
Pertama kami menghitung jari-jari bola.
Jika Anda melihat gambar di bawah, Anda melihat bahwa kita membutuhkan dua lingkaran yang menyentuh dua garis yang membentuk kerucut, dan satu garis yang membentuk bidang yang memotong kerucut.
Kami menggunakan file geometry.e dari Euler untuk ini.

```
>load geometry;
```

Pertama, dua garis yang membentuk kerucut.

```
>g1 &= lineThrough([0,0],[1,a])
```

$$[-a, 1, 0]$$

```
>g2 &= lineThrough([0,0],[-1,a])
```

$$[-a, -1, 0]$$

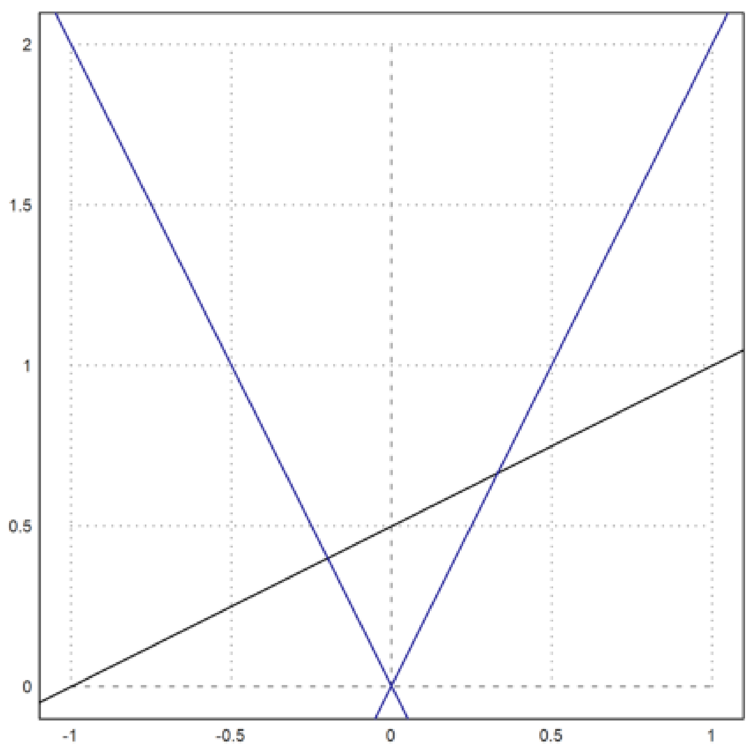
Lalu baris ketiga.

```
>g &= lineThrough([-1,0],[1,1])
```

```
[- 1, 2, 1]
```

Kita merencanakan semuanya sejauh ini.

```
>setPlotRange(-1,1,0,2);
>color(black); plotLine(g(),"")
>a:=2; color(blue); plotLine(g1(),""), plotLine(g2(),""):
```



Sekarang kita ambil titik umum pada sumbu y.

```
>P &= [0,u]
```

```
[0, u]
```

Hitung jarak ke g1.

```
>d1 &= distance(P,projectToLine(P,g1)); $d1
```

$$\sqrt{\left(\frac{a^2\,u}{a^2+1}-u\right)^2+\frac{a^2\,u^2}{\left(a^2+1\right)^2}}$$

Hitung jarak ke g.

```
>d &= distance(P,projectToLine(P,g)); $d
```

$$\sqrt{\left(\frac{u+2}{5}-u\right)^2+\frac{\left(2\,u-1\right)^2}{25}}$$

Dan temukan pusat kedua lingkaran, di mana jaraknya sama.

```
>sol &= solve(d1^2=d^2,u); $sol
```

$$\left[u=\frac{-\sqrt{5}\,\sqrt{a^2+1}+2\,a^2+2}{4\,a^2-1} , u=\frac{\sqrt{5}\,\sqrt{a^2+1}+2\,a^2+2}{4\,a^2-1} \right]$$

Ada dua solusi.
Kami mengevaluasi solusi simbolis, dan menemukan kedua pusat, dan kedua jarak.

```
>u := sol()
```

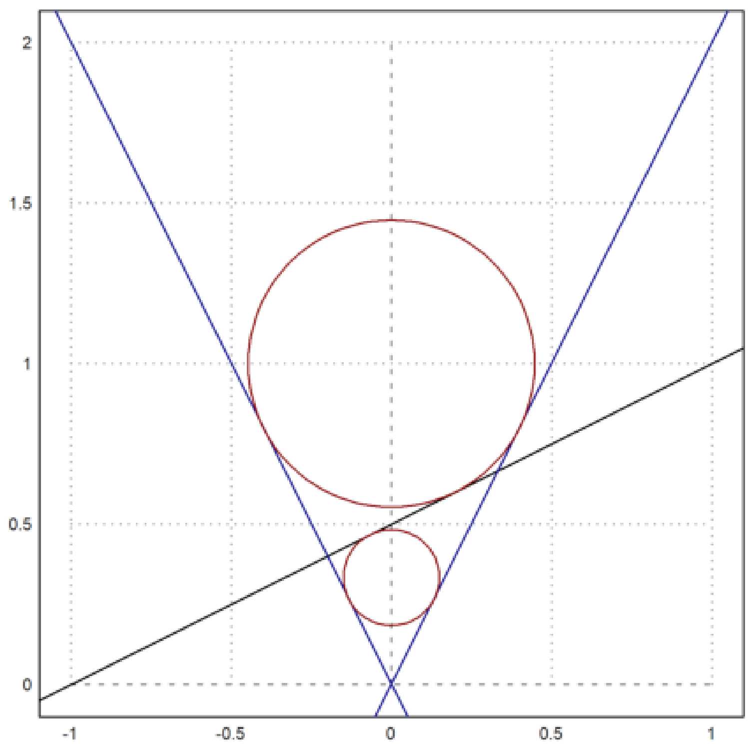
```
[0.333333,  1]
```

```
>dd := d()
```

```
[0.149071,  0.447214]
```

Plot lingkaran ke dalam gambar.

```
>color(red);
>plotCircle(circleWithCenter([0,u[1]],dd[1]),"");
>plotCircle(circleWithCenter([0,u[2]],dd[2]),"");
>insimg;
```



Plot dengan Povray

Selanjutnya kami merencanakan semuanya dengan Povray. Perhatikan bahwa Anda mengubah perintah apa pun dalam urutan perintah Povray berikut, dan menjalankan kembali semua perintah dengan Shift-Return. Pertama kita memuat fungsi povray.

```
>load povray;
>defaultpovray="C:\Program Files\POV-Ray\v3.7\bin\pvengine.exe"
```

```
C:\Program Files\POV-Ray\v3.7\bin\pvengine.exe
```

Kita mengatur adegan dengan tepat.

```
>povstart(zoom=11,center=[0,0,0.5],height=10°,angle=140°);
```

Selanjutnya kita menulis dua bidang ke file Povray.

```
>writeln(povsphere([0,0,u[1]],dd[1],povlook(red)));
>writeln(povsphere([0,0,u[2]],dd[2],povlook(red)));
```

Dan kerucutnya, transparan.

```
>writeln(povcone([0,0,0],0,[0,0,a],1,povlook(lightgray,1)));
```

Kami menghasilkan pesawat terbatas pada kerucut.

```
>gp=g();
>pc=povcone([0,0,0],0,[0,0,a],1,"");
>vp=[gp[1],0,gp[2]]; dp=gp[3];
>writeln(povplane(vp,dp,povlook(blue,0.5),pc));
```

Sekarang kami menghasilkan dua titik pada lingkaran, di mana bola menyentuh kerucut.

```
>function turnz(v) := return [-v[2],v[1],v[3]]
>P1=projectToLine([0,u[1]],g1()); P1=turnz([P1[1],0,P1[2]]);
>writeln(povpoint(P1,povlook(yellow)));
>P2=projectToLine([0,u[2]],g1()); P2=turnz([P2[1],0,P2[2]]);
>writeln(povpoint(P2,povlook(yellow)));
```

Kemudian kami menghasilkan dua titik di mana bola menyentuh bidang. Ini adalah fokus elips.

```
>P3=projectToLine([0,u[1]],g()); P3=[P3[1],0,P3[2]];
>writeln(povpoint(P3,povlook(yellow)));
>P4=projectToLine([0,u[2]],g()); P4=[P4[1],0,P4[2]];
>writeln(povpoint(P4,povlook(yellow)));
```

Selanjutnya kita menghitung perpotongan P1P2 dengan bidang.

```
>t1=scalp(vp,P1)-dp; t2=scalp(vp,P2)-dp; P5=P1+t1/(t1-t2)*(P2-P1);
>writeln(povpoint(P5,povlook(yellow)));
```

Kami menghubungkan titik dengan segmen garis.

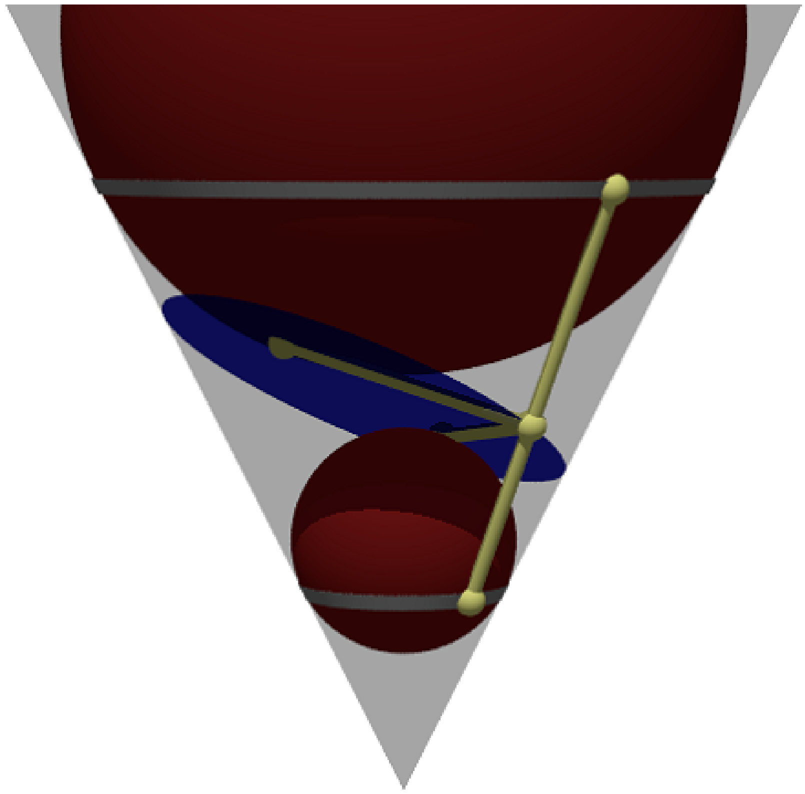
```
>writeln(povsegment(P1,P2,povlook(yellow)));
>writeln(povsegment(P5,P3,povlook(yellow)));
>writeln(povsegment(P5,P4,povlook(yellow)));
```

Sekarang kami membuat pita abu-abu, di mana bola menyentuh kerucut.

```
>pcw=povcone([0,0,0],0,[0,0,a],1.01);
>pc1=povcylinder([0,0,P1[3]-defaultpointsize/2],[0,0,P1[3]+defaultpointsize/2],1);
>writeln(povintersection([pcw,pc1],povlook(gray)));
>pc2=povcylinder([0,0,P2[3]-defaultpointsize/2],[0,0,P2[3]+defaultpointsize/2],1);
>writeln(povintersection([pcw,pc2],povlook(gray)));
```

Mulai program Povray.

```
>povend();
```



Untuk mendapatkan Anaglyph ini, kita perlu memasukkan semuanya ke dalam fungsi scene. Fungsi ini akan digunakan dua kali nanti.

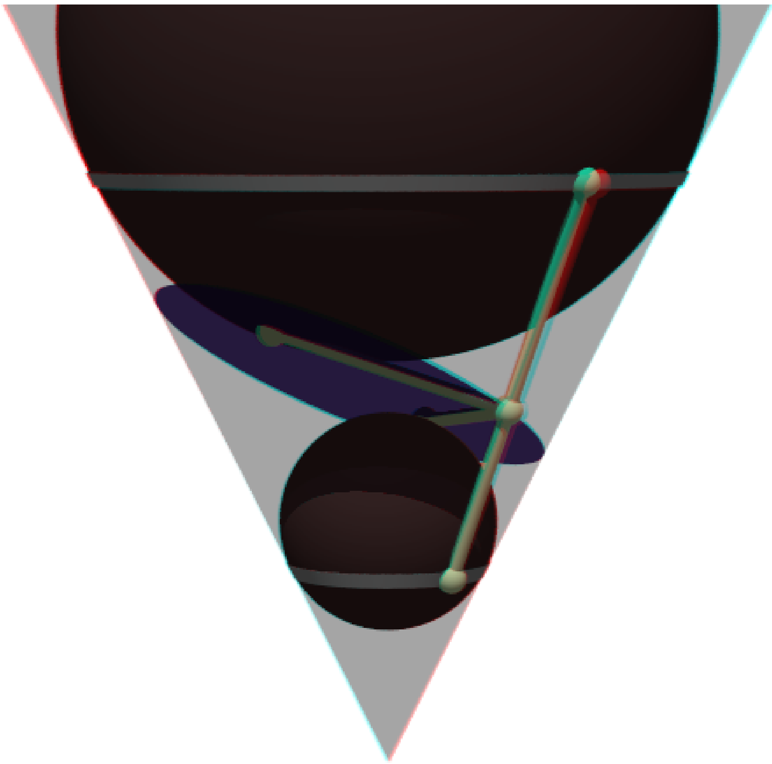
```
>function scene () ...
```

```
global a,u,dd,g,g1,defaultpointsize;
writeln(povsphere([0,0,u[1]],dd[1],povlook(red)));
writeln(povsphere([0,0,u[2]],dd[2],povlook(red)));
writeln(povcone([0,0,0],0,[0,0,a],1,povlook(lightgray,1)));
gp=g();
pc=povcone([0,0,0],0,[0,0,a],1,"");
vp=[gp[1],0,gp[2]]; dp=gp[3];
writeln(povplane(vp,dp,povlook(blue,0.5),pc));
P1=projectToLine([0,u[1]],g1()); P1=turnz([P1[1],0,P1[2]]);
writeln(povpoint(P1,povlook(yellow)));
P2=projectToLine([0,u[2]],g1()); P2=turnz([P2[1],0,P2[2]]);
writeln(povpoint(P2,povlook(yellow)));
P3=projectToLine([0,u[1]],g()); P3=[P3[1],0,P3[2]];
writeln(povpoint(P3,povlook(yellow)));
P4=projectToLine([0,u[2]],g()); P4=[P4[1],0,P4[2]];
writeln(povpoint(P4,povlook(yellow)));
t1=scalp(vp,P1)-dp; t2=scalp(vp,P2)-dp; P5=P1+t1/(t1-t2)*(P2-P1);
writeln(povpoint(P5,povlook(yellow)));
writeln(povsegment(P1,P2,povlook(yellow)));
writeln(povsegment(P5,P3,povlook(yellow)));
writeln(povsegment(P5,P4,povlook(yellow)));
pcw=povcone([0,0,0],0,[0,0,a],1.01);
pc1=povcylinder([0,0,P1[3]-defaultpointsize/2],[0,0,P1[3]+defaultpointsize/2],1);
writeln(povintersection([pcw,pc1],povlook(gray)));
pc2=povcylinder([0,0,P2[3]-defaultpointsize/2],[0,0,P2[3]+defaultpointsize/2],1);
```

```
writeln(povintersection([pcw,pc2],povlook(gray)));
endfunction
```

Anda membutuhkan kacamata merah / cyan untuk mengapresiasi efek berikut.

```
>povanaglyph("scene",zoom=11,center=[0,0,0.5],height=10°,angle=140°);
```



Contoh 8: Geometri Bumi

Di notebook ini, kami ingin melakukan beberapa komputasi bola. Fungsi-fungsi tersebut terdapat dalam file "spherical.e" di folder contoh. Kita perlu memuat file itu dulu.

```
>load spherical.e
```

```
Spherical functions for Euler.
```

Untuk memasukkan posisi geografis, kami menggunakan vektor dengan dua koordinat dalam radian (utara dan timur, nilai negatif untuk selatan dan barat). Berikut koordinat Kampus FMIPA UNY.

```
>FMIPA=[rad(-7,-46.467),rad(110,23.05)]
```

```
[-0.13569,  1.92657]
```

Anda dapat mencetak posisi ini dengan sposprint (cetak posisi bola).

```
>sposprint(FMIPA) // posisi garis lintang dan garis bujur FMIPA UNY
```

```
S 7°46.467' E 110°23.050'
```

Mari kita tambahkan dua kota lagi, Solo dan Semarang.

```
>Solo=[rad(-7,-34.333),rad(110,49.683)]; Semarang=[rad(-6,-59.05),rad(110,24.533)];
>sposprint(Solo), sposprint(Semarang),
```

```
S 7°34.333' E 110°49.683'
S 6°59.050' E 110°24.533'
```

Pertama kita menghitung vektor dari satu bola ke bola lainnya pada bola ideal. Vektor ini adalah [heading, distance] dalam radian. Untuk menghitung jarak di bumi, kita mengalikan dengan jari-jari bumi pada garis lintang 7°.

```
>br=svector(FMIPA,Solo); degprint(br[1]), br[2]*rearth(7°)->km // perkiraan jarak FMIPA-So
```

```
65°20'26.60''
53.8945384608
```

Ini adalah perkiraan yang bagus. Rutinitas berikut menggunakan perkiraan yang lebih baik. Pada jarak yang begitu dekat hasilnya hampir sama.

```
>esdist(FMIPA,Semarang)->" km", // perkiraan jarak FMIPA-Semarang
```

```
88.0114026318 km
```

Ada fungsi untuk heading, dengan mempertimbangkan bentuk bumi yang elips. Sekali lagi, kami mencetak dengan cara yang canggih.

```
>sdegprint(esdir(FMIPA,Solo))
```

```
     65.34°
```

Sudut segitiga melebihi 180° pada bola.

```
>asum=sangle(Solo,FMIPA,Semarang)+sangle(FMIPA,Solo,Semarang)+sangle(FMIPA,Semarang,Solo);
```

```
180°0'10.77''
```

Ini dapat digunakan untuk menghitung luas segitiga. Catatan: Untuk segitiga kecil, ini tidak akurat karena kesalahan pengurangan dalam asum-pi.

```
>(asum-pi)*rearth(48°)^2->" km^2", //perkiraan luas segitiga FMIPA-Solo-Semarang
```

```
2116.02948749 km^2
```

Ada fungsi untuk ini, yang menggunakan garis lintang rata-rata segitiga untuk menghitung jari-jari bumi, dan menangani kesalahan pembulatan untuk segitiga yang sangat kecil.

```
>esarea(Solo,FMIPA,Semarang)->" km^2", //perkiraan yang sama dengan fungsi esarea()
```

```
2123.64310526 km^2
```

Kami juga dapat menambahkan vektor ke posisi. Vektor berisi heading dan jarak, keduanya dalam radian. Untuk mendapatkan vektor, kami menggunakan svector. Untuk menambahkan vektor ke posisi, kami menggunakan saddvector.

```
>v=svector(FMIPA,Solo); sposprint(saddvector(FMIPA,v)), sposprint(Solo),
```

```
S 7°34.333' E 110°49.683'
S 7°34.333' E 110°49.683'
```

Fungsi-fungsi ini mengasumsikan bola yang ideal. Hal yang sama di bumi.

```
>sposprint(esadd(FMIPA,esdir(FMIPA,Solo),esdist(FMIPA,Solo))), sposprint(Solo),
```

```
S 7°34.333' E 110°49.683'
S 7°34.333' E 110°49.683'
```

Mari kita beralih ke contoh yang lebih besar, Tugu Jogja dan Monas Jakarta (menggunakan Google Earth untuk mencari koordinatnya).

```
>Tugu=[-7.7833°,110.3661°]; Monas=[-6.175°,106.811944°];
>sposprint(Tugu), sposprint(Monas)
```

```
S 7°46.998' E 110°21.966'
S 6°10.500' E 106°48.717'
```

Menurut Google Earth, jaraknya 429,66 km. Kami mendapatkan perkiraan yang bagus.

```
>esdist(Tugu,Monas)->" km", // perkiraan jarak Tugu Jogja - Monas Jakarta
```

```
431.565659488 km
```

Judulnya sama dengan yang dihitung di Google Earth.

```
>degprint(esdir(Tugu,Monas))
```

```
294°17'2.85''
```

Namun, kita tidak lagi mendapatkan posisi target yang tepat, jika kita menambahkan heading dan jarak ke posisi semula. Hal ini terjadi, karena kita tidak menghitung fungsi invers secara tepat, tetapi mengambil perkiraan jari-jari bumi di sepanjang jalan.

```
>sposprint(esadd(Tugu,esdir(Tugu,Monas),esdist(Tugu,Monas)))
```

```
S 6°10.500' E 106°48.717'
```

Namun, kesalahannya tidak besar.

```
>sposprint(Monas),
```

```
S 6°10.500' E 106°48.717'
```

Tentunya kita tidak bisa berlayar dengan tujuan yang sama dari satu tujuan ke tujuan lainnya, jika kita ingin mengambil jalur terpendek. Bayangkan, Anda terbang NE mulai dari titik mana pun di bumi. Kemudian Anda akan berputar ke kutub utara. Lingkaran besar tidak mengikuti arah yang konstan!
Perhitungan berikut menunjukkan bahwa kami jauh dari tujuan yang benar, jika kami menggunakan tajuk yang sama selama perjalanan kami.

```
>dist=esdist(Tugu,Monas); hd=esdir(Tugu,Monas);
```

Sekarang kita tambahkan 10 kali sepersepuluh jaraknya, menggunakan heading ke Monas, kita sampai di Tugu.

```
>p=Tugu; loop 1 to 10; p=esadd(p,hd,dist/10); end;
```

Hasilnya masih jauh.

```
>sposprint(p), skmprint(esdist(p,Monas))
```

```
 S 6°11.250' E 106°48.372'
      1.529km
```

Sebagai contoh lain, mari kita ambil dua titik di bumi pada ketinggian yang sama.

```
> P1=[30°,10°]; P2=[30°,50°];
```

Jalur terpendek dari P1 ke P2 bukanlah lingkaran dengan garis lintang 30°, tetapi jalur yang lebih pendek mulai 10° lebih jauh ke utara di P1.

```
>sdegprint(esdir(P1,P2))
```

```
      79.69°
```

Tapi, jika kita mengikuti pembacaan kompas ini, kita akan berputar ke kutub utara! Jadi kita harus menyesuaikan arah tujuan kita di sepanjang jalan. Untuk tujuan kasar, kami menyesuaikannya pada 1/10 dari jarak total.

```
>p=P1;  dist=esdist(P1,P2); ...
>  loop 1 to 10; dir=esdir(p,P2); sdegprint(dir), p=esadd(p,dir,dist/10); end;
```

```
      79.69°
      81.67°
      83.71°
      85.78°
      87.89°
      90.00°
      92.12°
      94.22°
      96.29°
      98.33°
```

Jaraknya tidak tepat, karena kita akan menambahkan sedikit kesalahan, jika kita mengikuti tajuk yang sama terlalu lama.

```
>skmprint(esdist(p,P2))
```

```
0.203km
```

Kami mendapatkan perkiraan yang baik, jika kami menyesuaikan heading setelah setiap 1/100 dari total jarak dari Tugu ke Monas.

```
>p=Tugu; dist=esdist(Tugu,Monas); ...
>  loop 1 to 100; p=esadd(p,esdir(p,Monas),dist/100); end;
>skmprint(esdist(p,Monas))
```

```
0.000km
```

Untuk keperluan navigasi, kita bisa mendapatkan urutan posisi GPS di sepanjang lingkaran besar menuju Monas dengan fungsi navigasi.

```
>load spherical; v=navigate(Tugu,Monas,10); ...
>  loop 1 to rows(v); sposprint(v[#]), end;
```

```
S 7°46.998' E 110°21.966'
S 7°37.422' E 110°0.573'
S 7°27.829' E 109°39.196'
S 7°18.219' E 109°17.834'
S 7°8.592' E 108°56.488'
S 6°58.948' E 108°35.157'
S 6°49.289' E 108°13.841'
S 6°39.614' E 107°52.539'
S 6°29.924' E 107°31.251'
S 6°20.219' E 107°9.977'
S 6°10.500' E 106°48.717'
```

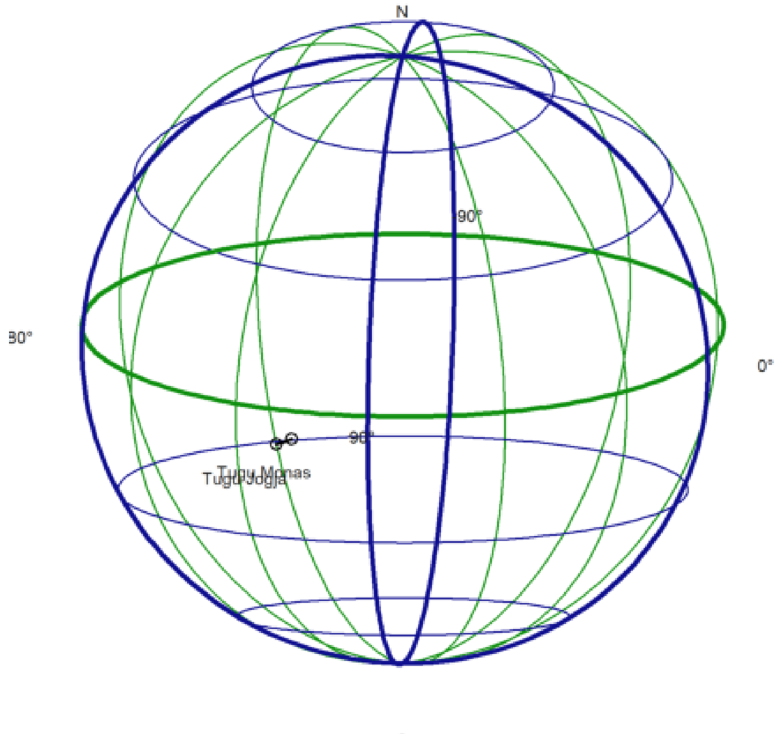
Kami menulis sebuah fungsi, yang menggambarkan bumi, dua posisi, dan posisi di antaranya.

```
>function testplot ...
```

```
useglobal;
plotearth;
plotpos(Tugu,"Tugu Jogja"); plotpos(Monas,"Tugu Monas");
plotposline(v);
endfunction
```

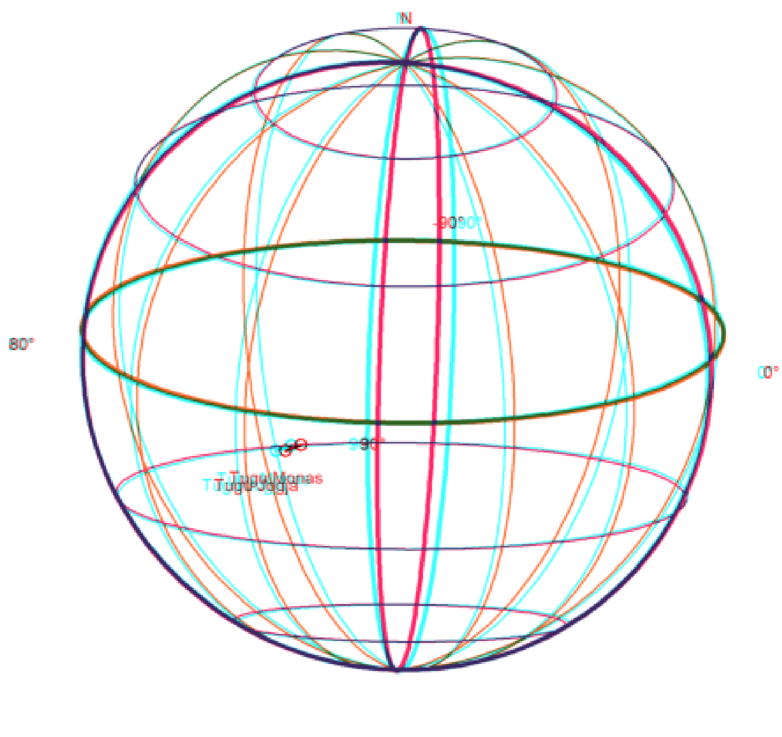
Sekarang plot semuanya.

```
>plot3d("testplot",angle=25, height=6,>own,>user,zoom=4):
```



Atau gunakan plot3d untuk mendapatkan tampilan anaglyphnya. Ini terlihat sangat bagus dengan kacamata merah / cyan.

```
>plot3d("testplot",angle=25,height=6,distance=5,own=1,anaglyph=1,zoom=4):
```



Latihan

1. Gambarlah segi-n beraturan jika diketahui titik pusat O, n, dan jarak titik pusat ke titik-titik sudut segi-n tersebut (jari-jari lingkaran luar segi-n), r.
Petunjuk:
- Besar sudut pusat yang menghadap masing-masing sisi segi-n adalah (360/n).
- Titik-titik sudut segi-n merupakan perpotongan lingkaran luar segi-n dan garis-garis yang melalui pusat dan saling membentuk sudut sebesar kelipatan (360/n).
- Untuk n ganjil, pilih salah satu titik sudut adalah di atas.
- Untuk n genap, pilih 2 titik di kanan dan kiri lurus dengan titik pusat.
- Anda dapat menggambar segi-3, 4, 5, 6, 7, dst beraturan.
2. Gambarlah suatu parabola yang melalui 3 titik yang diketahui.
Petunjuk:
- Misalkan persamaan parabolanya y= ax^2+bx+c.
- Substitusikan koordinat titik-titik yang diketahui ke persamaan tersebut.
- Selesaikan SPL yang terbentuk untuk mendapatkan nilai-nilai a, b, c.
3. Gambarlah suatu segi-4 yang diketahui keempat titik sudutnya, misalnya A, B, C, D.

```
   - Tentukan apakah segi-4 tersebut merupakan segi-4 garis singgung
```

(sisinya-sisintya merupakan garis singgung lingkaran yang sama yakni lingkaran dalam segi-4 tersebut).

```
   - Suatu segi-4 merupakan segi-4 garis singgung apabila keempat
```

garis bagi sudutnya bertemu di satu titik.

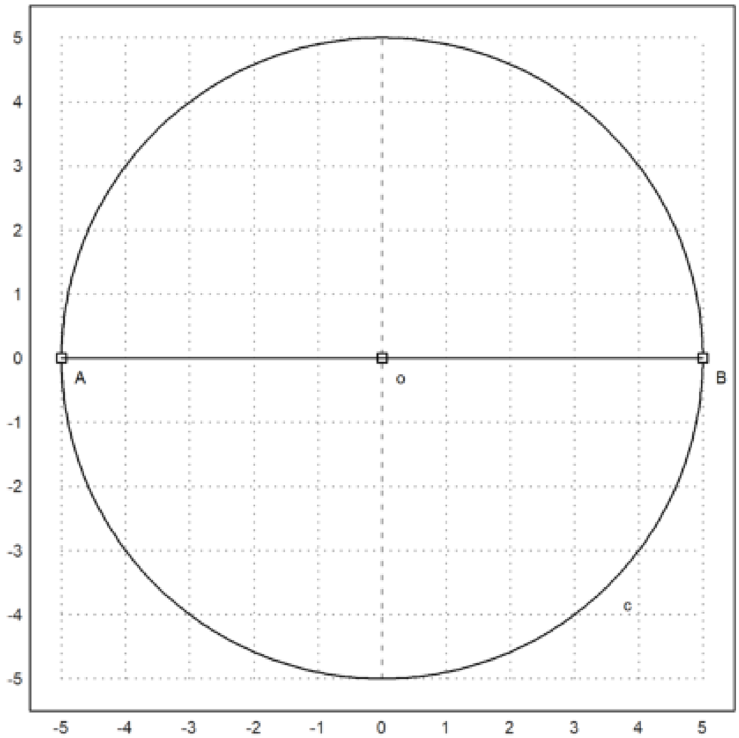
```
   - Jika segi-4 tersebut merupakan segi-4 garis singgung, gambar
```

lingkaran dalamnya.

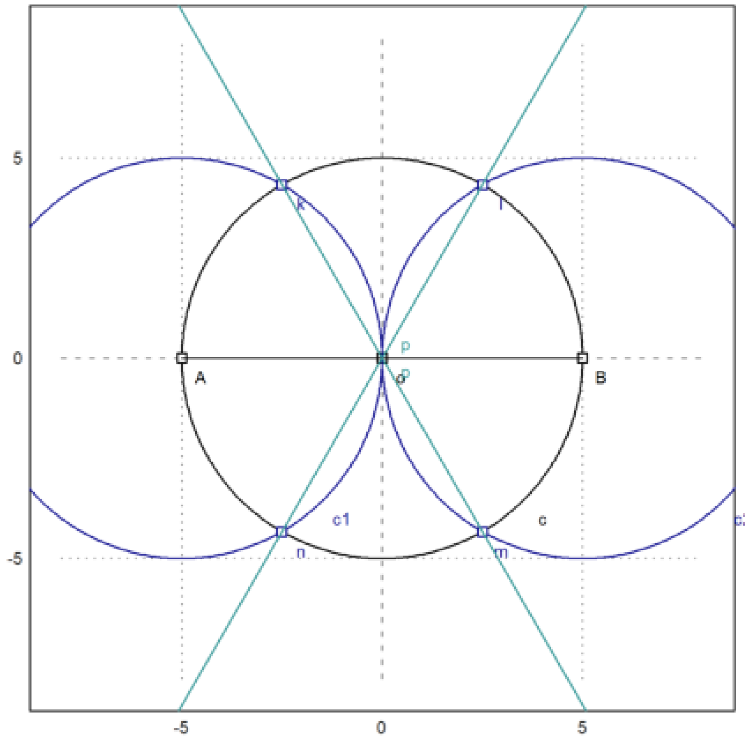
```
   - Tunjukkan bahwa syarat suatu segi-4 merupakan segi-4 garis
```

singgung apabila hasil kali panjang sisi-sisi yang berhadapan sama.
4. Gambarlah suatu ellips jika diketahui kedua titik fokusnya, misalnya P dan Q. Ingat ellips dengan fokus P dan Q adalah tempat kedudukan titik-titik yang jumlah jarak ke P dan ke Q selalu sama (konstan).
5. Gambarlah suatu hiperbola jika diketahui kedua titik fokusnya, misalnya P dan Q. Ingat ellips dengan fokus P dan Q adalah tempat kedudukan titik-titik yang selisih jarak ke P dan ke Q selalu sama (konstan).
Jawab:
1.

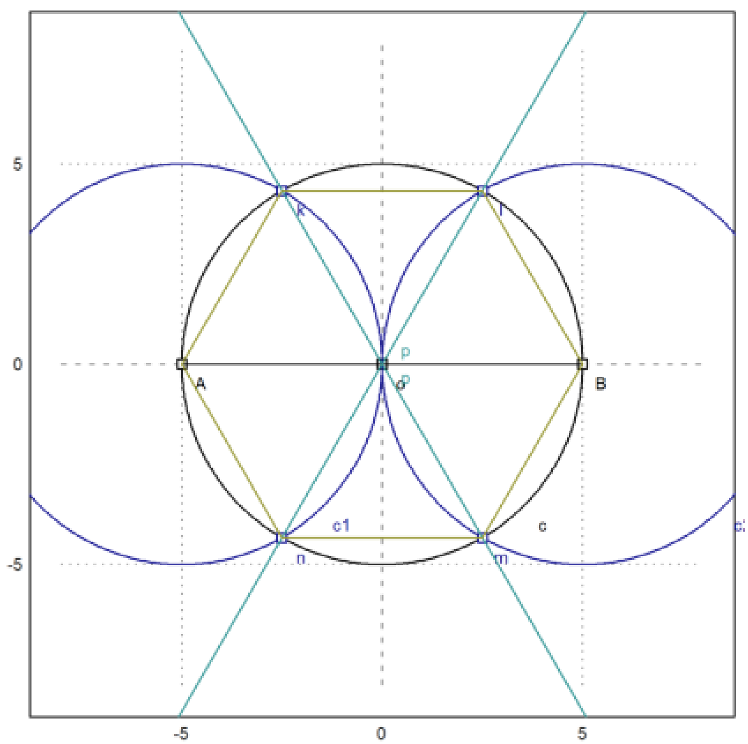
```
>o &:= [0,0]; c=circleWithCenter(o,5);
>color(1); setPlotRange(5); plotPoint(o); plotCircle(c);
>A=[-5,0]; plotPoint(A,"A");
>B=[5,0]; plotPoint(B,"B");
>plotSegment(A,B,""):
```




```
>c1=circleWithCenter(A,distance(A,o));
>c2=circleWithCenter(B,distance(B,o));
>k=circleCircleIntersections(c1,c);
>l=circleCircleIntersections(c,c2);
>m=circleCircleIntersections(c2,c);
>n=circleCircleIntersections(c,c1);
>r=lineThrough(k,m); s=lineThrough(l,n);
>setPlotRange(8); plotPoint(o); plotCircle(c); plotPoint(A,"A"); plotPoint(B,"B"); plotSeg
>color(4); plotCircle(c1); plotCircle(c2); plotPoint(k); plotPoint(l); plotPoint(m); plotP
>color(5); plotLine(r); plotLine(s):
```

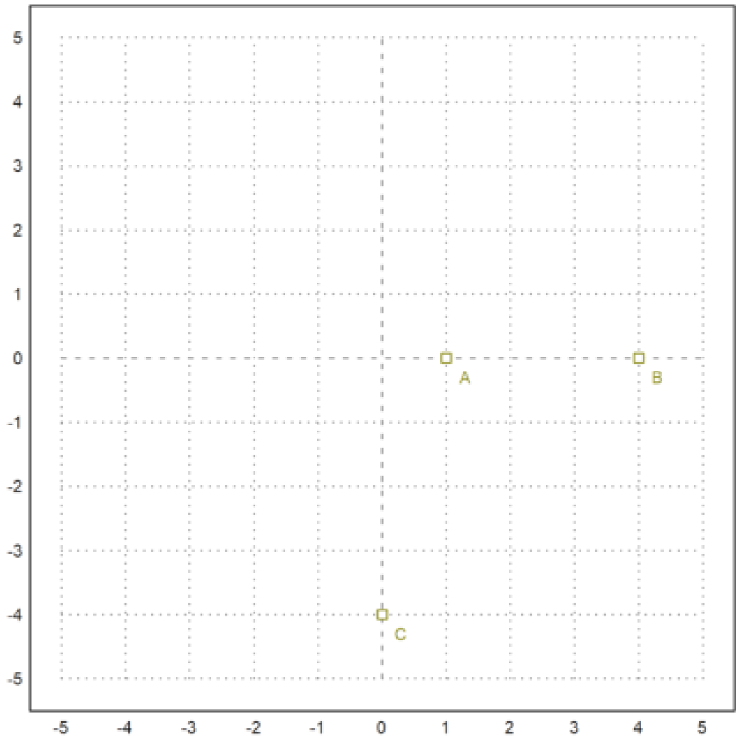



```
>color(6); plotSegment(A,k,""); plotSegment(A,n,""); plotSegment(k,l,""); ...
> plotSegment(l,B,""); plotSegment(B,m,""); plotSegment(m,n,""):
```



2.

```
>setPlotRange(5); A=[1,0]; B=[4,0]; C=[0,-4];
>plotPoint(A,"A"); plotPoint(B,"B"); plotPoint(C,"C"):
```



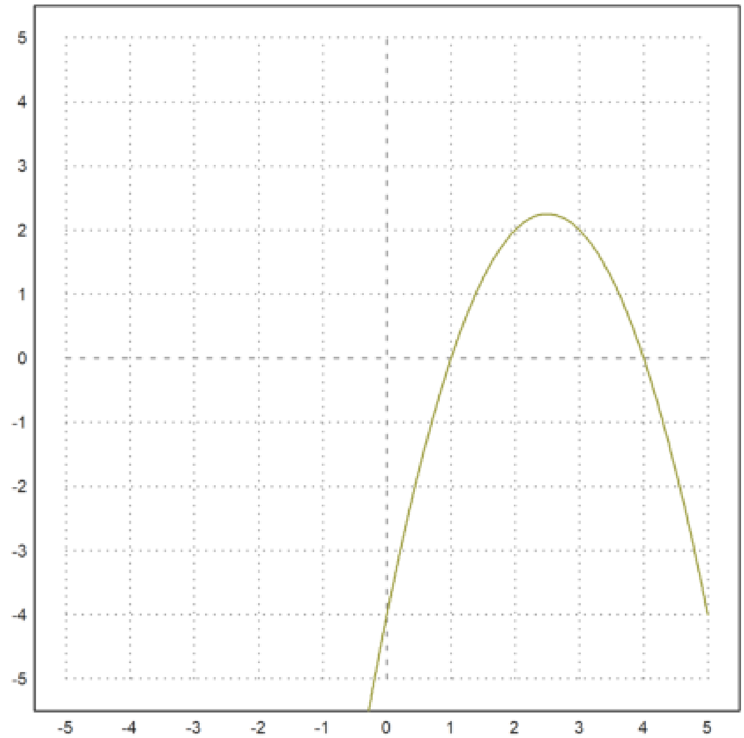

```
>sol &= solve([a+b=-c,16*a+4*b=-c,c=-4],[a,b,c])
```

```
[[a = - 1, b = 5, c = - 4]]
```

```
>function y&=-x^2+5*x-4
```

```
     2
- x   + 5 x - 4
```

```
>plot2d("-x^2+5*x-4",-5,5,-5,5):
```

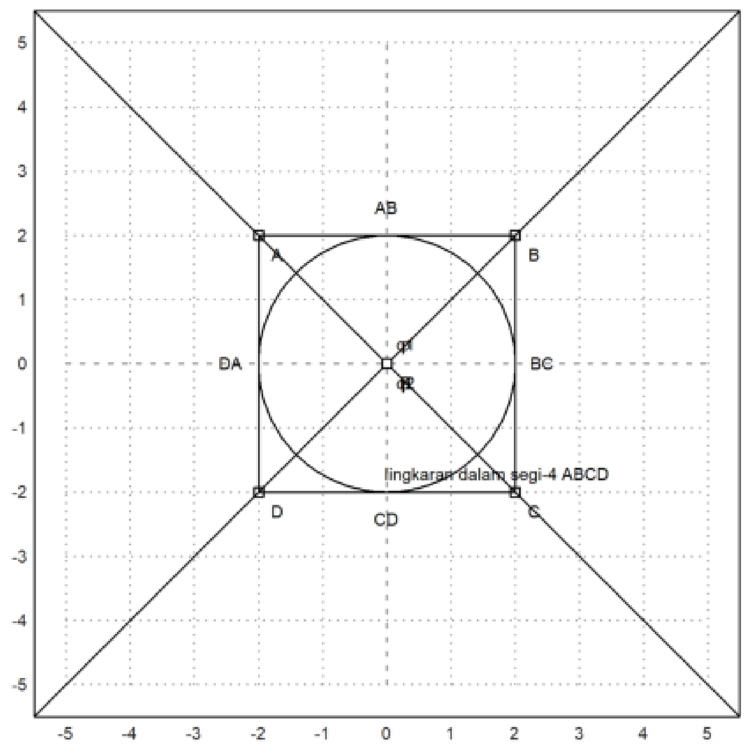


3.

```
>setPlotRange(-5,5,-5,5);
>A=[-2,2]; plotPoint(A,"A");
>B=[2,2]; plotPoint(B,"B");
>C=[2,-2]; plotPoint(C,"C");
>D=[-2,-2]; plotPoint(D,"D");
>plotSegment(A,B);
>plotSegment(B,C);
>plotSegment(C,D);
>plotSegment(D,A);
>plotSegment(A,C,"q1");
>plotSegment(B,D,"q2");
>q1=lineThrough(A,C);
>q2=lineThrough(B,D);
>p=lineIntersection(q1,q2);
>plotLine(q1); plotLine(q2);
>plotPoint(p, "P");
>r=norm(p-projectToLine(p,lineThrough(A,B)))
```

2

```
>plotCircle(circleWithCenter(p,r),"lingkaran dalam segi-4 ABCD"):
```




```
>AB=norm(A-B) // panjang sisi AB
```

    4

```
>CD=norm(C-D) // panjang sisi CD
```

    4

```
>AD=norm(A-D) // panjang sisi AD
```

    4

```
>BC=norm(B-C) // panjang sisi BC
```

    4

```
>AB.CD
```

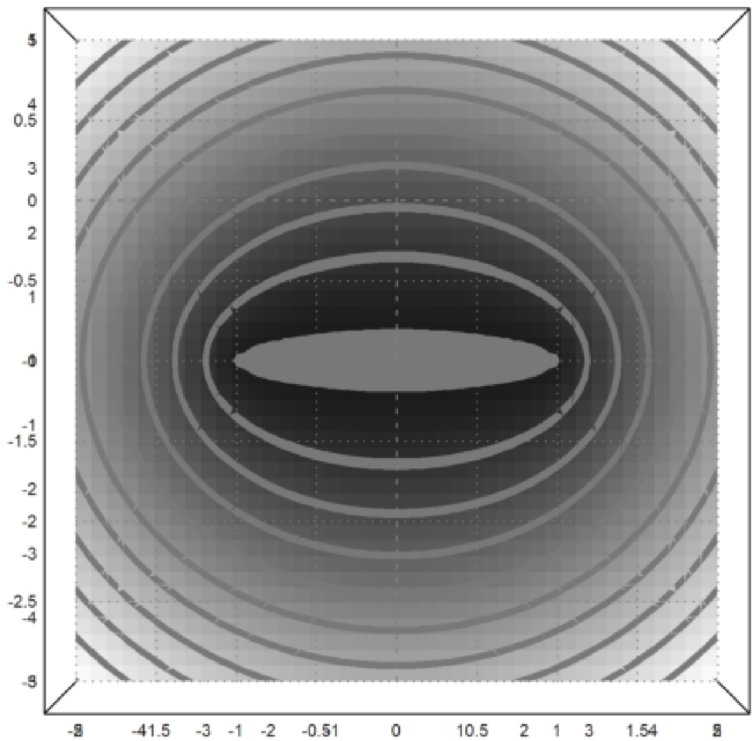
    16

```
>AD.BC
```

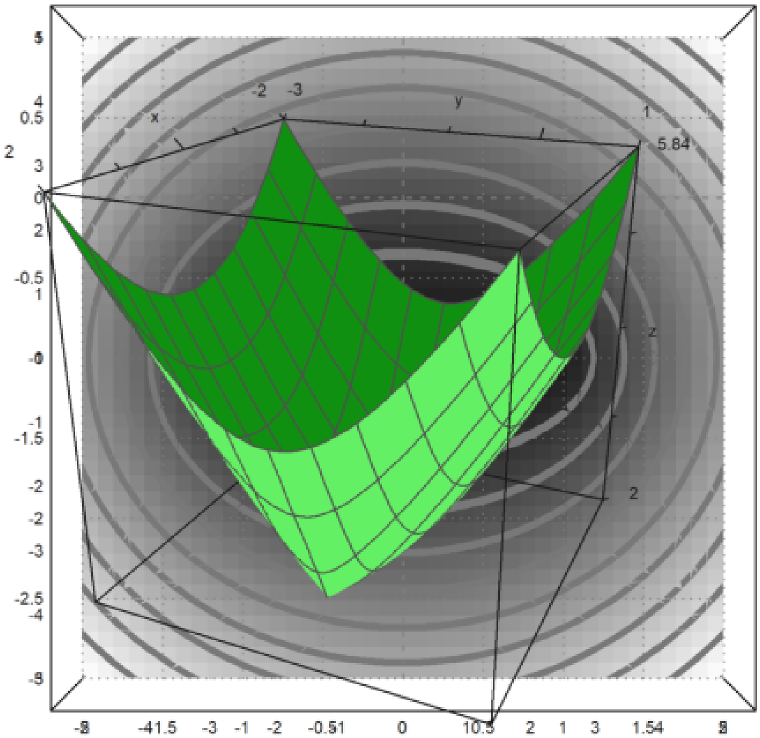
    16

4.

```
>P=[-1,-1]; Q=[1,-1];
>function d1(x,y):=sqrt((x-P[1])^2+(y-P[2])^2)
>Q=[1,-1]; function d2(x,y):=sqrt((x-P[1])^2+(y-P[2])^2)+sqrt((x-Q[1])^2+(y-Q[2])^2)
>fcontour("d2",xmin=-2,xmax=2,ymin=-3,ymax=1,hue=1):
```

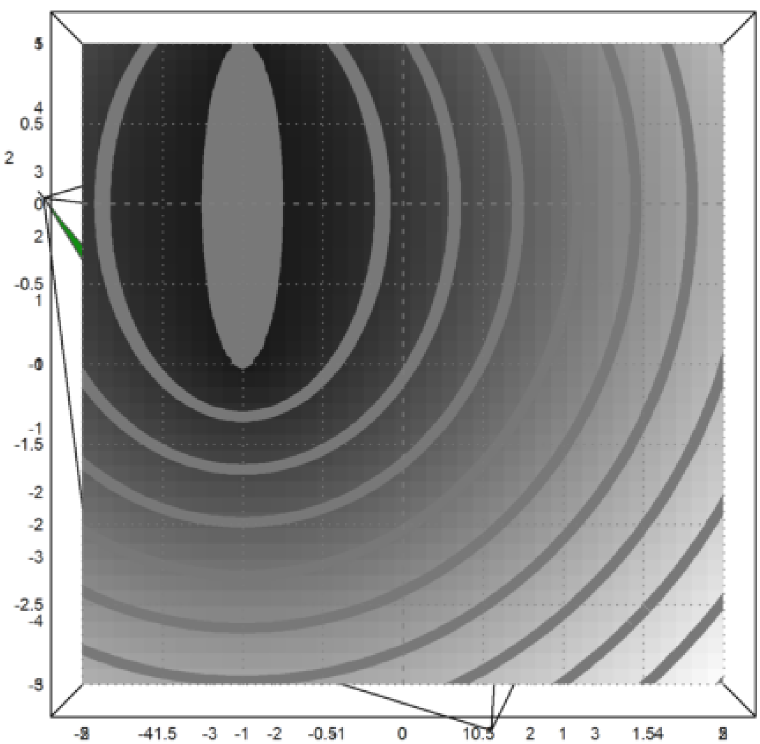


```
>plot3d("d2",xmin=-2,xmax=2,ymin=-3,ymax=1):
```

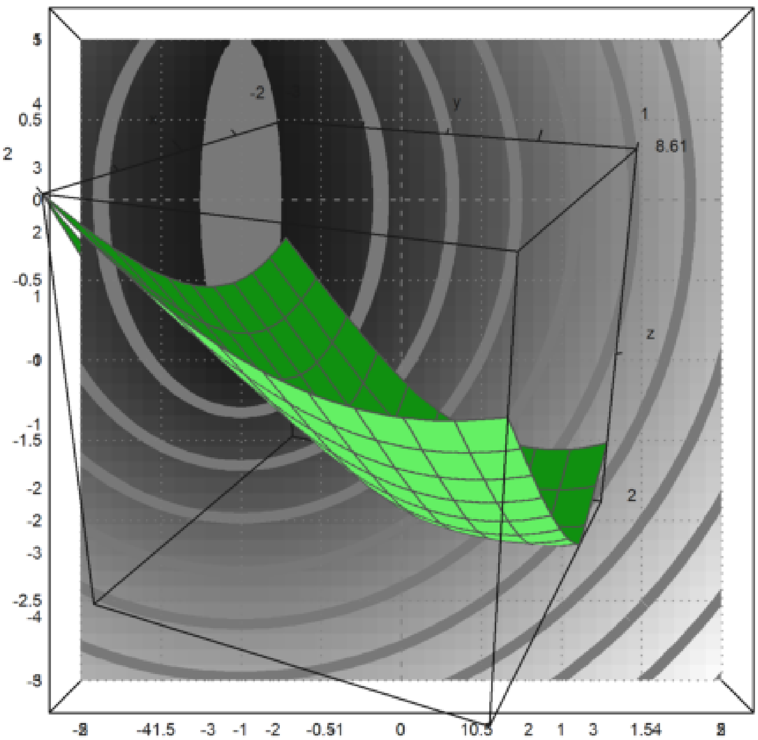


5.

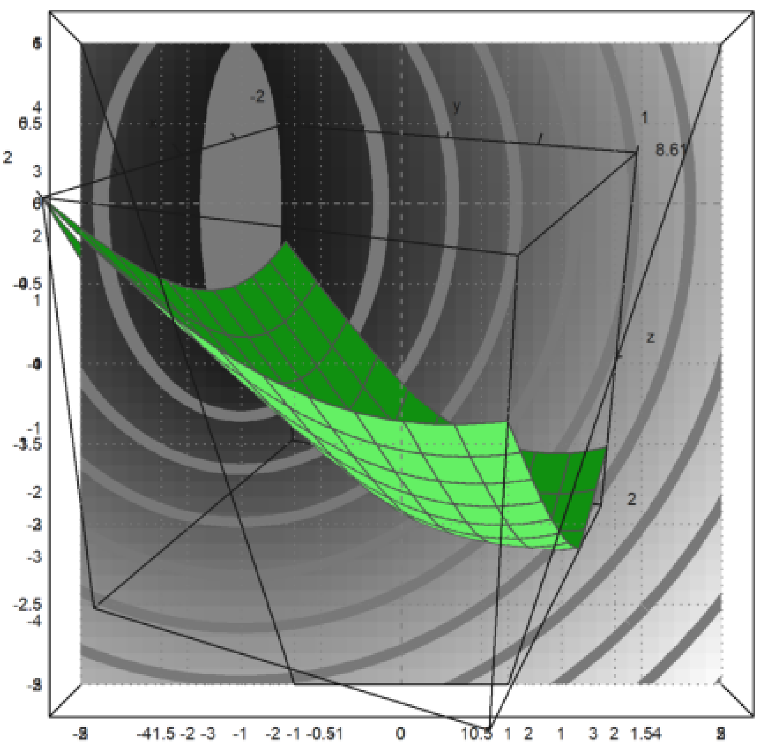
```
>P=[-1,-1]; Q=[1,-1];
>function d1(x,y):=sqrt((x-p[1])^2+(y-p[2])^2)
>Q=[1,-1]; function d2(x,y):=sqrt((x-P[1])^2+(y-P[2])^2)+sqrt((x+Q[1])^2+(y+Q[2])^2)
>fcontour("d2",xmin=-2,xmax=2,ymin=-3,ymax=1,hue=1):
```



```
>plot3d("d2",xmin=-2,xmax=2,ymin=-3,ymax=1):
```



```
>plot2d("abs(x+1)+abs(x-1)",xmin=-3,xmax=3):
```



BAB 7

KB PEKAN 13-14; MENGGUNAKAN EMT UNTUK STATISTIKA

[a4paper,10pt]article eumat

EMT untuk Statistika

Dalam buku catatan ini, kami mendemonstrasikan plot statistik utama, tes dan distribusi dalam Euler.

Mari kita mulai dengan beberapa statistik deskriptif. Ini bukanlah sebuah pengantar statistik. Jadi, Anda mungkin memerlukan beberapa latar belakang untuk memahami detailnya.

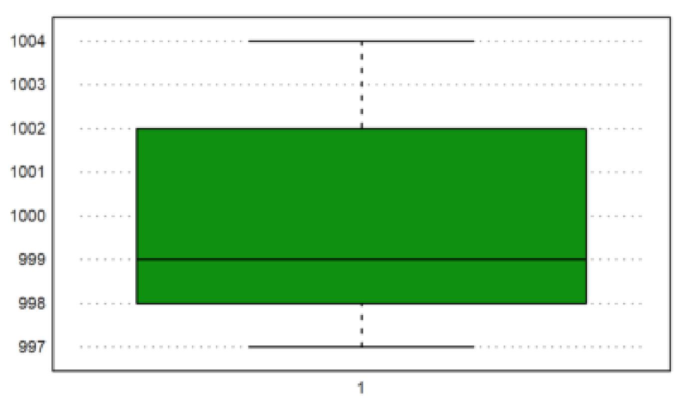
Asumsikan pengukuran berikut ini. Kita ingin menghitung nilai rata-rata dan deviasi standar yang diukur.

```
>M=[1000,1004,998,997,1002,1001,998,1004,998,997]; ...
>median(M), mean(M), dev(M),
```

```
999
999.9
2.72641400622
```

Kita dapat memplot plot kotak dan kumis untuk data tersebut. Dalam kasus kami, tidak ada pencilan Kita dapat memplot plot kotak dan kumis untuk data. Dalam kasus kami, tidak ada pencilan.

```
>aspect(1.75); boxplot(M):
```



Kami menghitung probabilitas bahwa suatu nilai lebih besar dari 1005, dengan mengasumsikan nilai yang diukur dari distribusi normal.
Semua fungsi untuk distribusi dalam Euler diakhiri dengan ...dis dan menghitung distribusi probabilitas kumulatif (CPF).

$$\text{normaldis(x,m,d)} = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{d\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{t-m}{d})^2} \, dt.$$

Kami mencetak hasilnya dalam % dengan akurasi 2 digit menggunakan fungsi cetak.

```
>print((1-normaldis(1005,mean(M),dev(M)))*100,2,unit=" %")
```

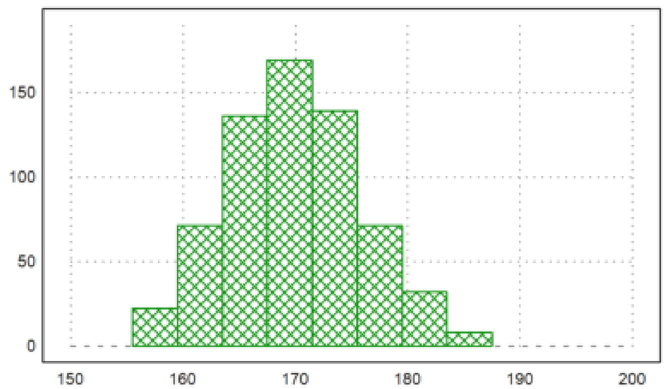
```
3.07 %
```

Untuk contoh berikutnya, kami mengasumsikan jumlah pria berikut ini dalam rentang ukuran tertentu.

```
>r=155.5:4:187.5; v=[22,71,136,169,139,71,32,8];
```

Berikut ini adalah plot distribusinya.

```
>plot2d(r,v,a=150,b=200,c=0,d=190,bar=1,style="\/"):
```



Kita dapat memasukkan data mentah tersebut ke dalam tabel.
Tabel adalah sebuah metode untuk menyimpan data statistik. Tabel kita harus berisi tiga kolom: Awal rentang, akhir rentang, jumlah orang dalam rentang.
Tabel dapat dicetak dengan header. Kami menggunakan vektor string untuk mengatur header.

```
>T:=r[1:8]' | r[2:9]' | v'; writetable(T,labc=["BB","BA","Frek"])
```

```
   BB         BA       Frek
155.5      159.5         22
159.5      163.5         71
163.5      167.5        136
167.5      171.5        169
171.5      175.5        139
175.5      179.5         71
179.5      183.5         32
183.5      187.5          8
```

Jika kita membutuhkan nilai rata-rata dan statistik lain dari ukuran, kita perlu menghitung titik tengah rentang. Kita dapat menggunakan dua kolom pertama dari tabel kita untuk hal ini.
Sumbol "|" digunakan untuk memisahkan kolom, fungsi "writetable" digunakan untuk menulis tabel, dengan opsi "labc" untuk menentukan judul kolom.

```
>(T[,1]+T[,2])/2 // the midpoint of each interval
```

```
          157.5
          161.5
          165.5
          169.5
          173.5
          177.5
          181.5
          185.5
```

Tetapi akan lebih mudah, untuk melipat rentang dengan vektor [1/2,1/2].

```
>M=fold(r,[0.5,0.5])
```

```
  [157.5,  161.5,  165.5,  169.5,  173.5,  177.5,  181.5,  185.5]
```

Sekarang kita dapat menghitung rata-rata dan deviasi sampel dengan frekuensi yang diberikan.

```
>{m,d}=meandev(M,v); m, d,
```

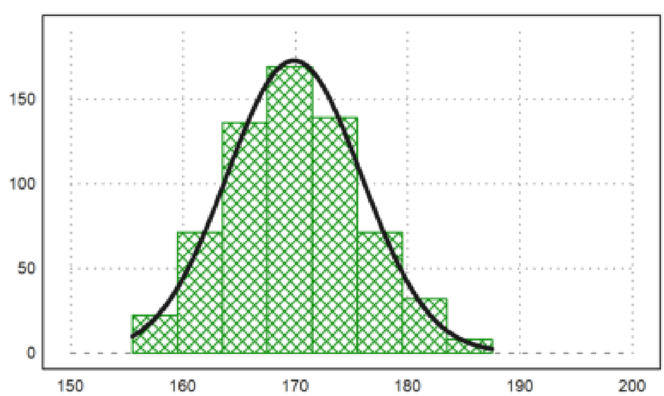
```
  169.901234568
  5.98912964449
```

Mari kita tambahkan distribusi normal dari nilai-nilai tersebut ke dalam diagram batang di atas. Rumus untuk distribusi normal dengan rata-rata m dan deviasi standar d adalah:

$$y = \frac{1}{d\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(x-m)^2}{2d^2}}.$$

Karena nilainya antara 0 dan 1, untuk memplotnya pada diagram batang, nilai tersebut harus dikalikan dengan 4 kali jumlah data.

```
>plot2d("qnormal(x,m,d)*sum(v)*4", ...
>  xmin=min(r),xmax=max(r),thickness=3,add=1):
```



Tabel

Dalam direktori buku catatan ini, Anda dapat menemukan file dengan tabel. Data tersebut mewakili hasil survei. Berikut adalah empat baris pertama dari file tersebut. Data berasal dari buku online berbahasa Jerman "Einführung in die Statistik mit R" oleh A. Handl.

```
>printfile("table.dat",4);
```

```
Person Sex Age Titanic Evaluation Tip Problem
1 m 30 n . 1.80 n
2 f 23 y g 1.80 n
3 f 26 y g 1.80 y
```

Tabel berisi 7 kolom angka atau token (string). Kita ingin membaca tabel tersebut dari file. Pertama, kita menggunakan terjemahan kita sendiri untuk token-token tersebut.
Untuk itu, kita mendefinisikan set token. Fungsi strtokens() mendapatkan vektor string token dari string yang diberikan.

```
>mf:=["m","f"]; yn:=["y","n"]; ev:=strtokens("g vg m b vb");
```

Sekarang kita membaca tabel dengan terjemahan ini.
Argumen tok2, tok4, dan lain-lain adalah terjemahan dari kolom-kolom tabel. Argumen-argumen ini tidak ada dalam daftar parameter readtable(), jadi Anda harus menyediakannya dengan ":=".

```
>{MT,hd}=readtable("table.dat",tok2:=mf,tok4:=yn,tok5:=ev,tok7:=yn);
>load over statistics;
```

Untuk mencetak, kita perlu menentukan set token yang sama. Kami mencetak empat baris pertama saja.

```
>writetable(MT[1:10],labc=hd,wc=5,tok2:=mf,tok4:=yn,tok5:=ev,tok7:=yn);
```

```
 Person   Sex   Age Titanic Evaluation   Tip Problem
      1     m    30       n          .   1.8       n
      2     f    23       y          g   1.8       n
      3     f    26       y          g   1.8       y
      4     m    33       n          .   2.8       n
      5     m    37       n          .   1.8       n
      6     m    28       y          g   2.8       y
      7     f    31       y         vg   2.8       n
      8     m    23       n          .   0.8       n
      9     f    24       y         vg   1.8       y
     10     m    26       n          .   1.8       n
```

Tanda titik "." mewakili nilai yang tidak tersedia.
Jika kita tidak ingin menentukan token untuk terjemahan sebelumnya, kita hanya perlu menentukan kolom mana yang berisi token dan bukan angka.

```
>ctok=[2,4,5,7]; {MT,hd,tok}=readtable("table.dat",ctok=ctok);
```

Fungsi readtable() sekarang mengembalikan satu set token.

```
>tok
```

```
m
n
f
y
g
vg
```

Tabel berisi entri dari file dengan token yang diterjemahkan menjadi angka.
String khusus NA="." ditafsirkan sebagai "Tidak Tersedia", dan mendapatkan NAN (bukan angka) dalam tabel. Terjemahan ini dapat diubah dengan parameter NA, dan NAval.

```
>MT[1]
```

```
[1,  1,  30,  2,  NAN,  1.8,  2]
```

Berikut ini adalah isi tabel dengan angka yang tidak diterjemahkan.

```
>writetable(MT,wc=5)
```

```
    1    1   30    2    .  1.8    2
    2    3   23    4    5  1.8    2
    3    3   26    4    5  1.8    4
    4    1   33    2    .  2.8    2
    5    1   37    2    .  1.8    2
    6    1   28    4    5  2.8    4
    7    3   31    4    6  2.8    2
    8    1   23    2    .  0.8    2
    9    3   24    4    6  1.8    4
   10    1   26    2    .  1.8    2
   11    3   23    4    6  1.8    4
   12    1   32    4    5  1.8    2
   13    1   29    4    6  1.8    4
   14    3   25    4    5  1.8    4
   15    3   31    4    5  0.8    2
   16    1   26    4    5  2.8    2
   17    1   37    2    .  3.8    2
   18    1   38    4    5    .    2
   19    3   29    2    .  3.8    2
   20    3   28    4    6  1.8    2
   21    3   28    4    1  2.8    4
   22    3   28    4    6  1.8    4
   23    3   38    4    5  2.8    2
   24    3   27    4    1  1.8    4
   25    1   27    2    .  2.8    4
```

Untuk kenyamanan, Anda dapat menaruh output dari readtable() ke dalam sebuah daftar.

```
>Table={{readtable("table.dat",ctok=ctok)}};
```

Dengan menggunakan kolom token yang sama dan token yang dibaca dari file, kita dapat mencetak tabel. Kita dapat menentukan ctok, tok, dll. atau menggunakan daftar Tabel.

```
>writetable(Table,ctok=ctok,wc=5);
```

```
  Person  Sex  Age Titanic Evaluation  Tip Problem
       1    m   30       n          .  1.8       n
       2    f   23       y          g  1.8       n
       3    f   26       y          g  1.8       y
       4    m   33       n          .  2.8       n
       5    m   37       n          .  1.8       n
       6    m   28       y          g  2.8       y
       7    f   31       y         vg  2.8       n
       8    m   23       n          .  0.8       n
       9    f   24       y         vg  1.8       y
      10    m   26       n          .  1.8       n
      11    f   23       y         vg  1.8       y
      12    m   32       y          g  1.8       n
      13    m   29       y         vg  1.8       y
      14    f   25       y          g  1.8       y
      15    f   31       y          g  0.8       n
      16    m   26       y          g  2.8       n
      17    m   37       n          .  3.8       n
      18    m   38       y          g    .       n
      19    f   29       n          .  3.8       n
      20    f   28       y         vg  1.8       n
      21    f   28       y          m  2.8       y
      22    f   28       y         vg  1.8       y
      23    f   38       y          g  2.8       n
      24    f   27       y          m  1.8       y
      25    m   27       n          .  2.8       y
```

Fungsi tablecol() mengembalikan nilai kolom dari tabel, melewatkan setiap baris dengan nilai NAN ("." dalam file), dan indeks kolom, yang berisi nilai-nilai ini.

```
>{c,i}=tablecol(MT,[5,6]);
```

Kita dapat menggunakan ini untuk mengekstrak kolom dari tabel untuk tabel baru.

```
>j=[1,5,6]; writetable(MT[i,j],labc=hd[j],ctok=[2],tok=tok)
```

```
     Person Evaluation       Tip
          2          g       1.8
          3          g       1.8
          6          g       2.8
          7         vg       2.8
          9         vg       1.8
         11         vg       1.8
         12          g       1.8
         13         vg       1.8
         14          g       1.8
         15          g       0.8
         16          g       2.8
```

```
20          vg        1.8
21           m        2.8
22          vg        1.8
23           g        2.8
24           m        1.8
```

Tentu saja, kita perlu mengekstrak tabel itu sendiri dari daftar Tabel dalam kasus ini.

```
>MT=Table[1];
```

Tentu saja, kita juga dapat menggunakannya untuk menentukan nilai rata-rata kolom atau nilai statistik lainnya.

```
>mean(tablecol(MT,6))
```

```
 2.175
```

Fungsi getstatistics() mengembalikan elemen-elemen dalam sebuah vektor, dan jumlahnya. Kita menerapkannya pada nilai "m" dan "f" pada kolom kedua tabel kita.

```
>{xu,count}=getstatistics(tablecol(MT,2)); xu, count,
```

```
 [1,  3]
 [12,  13]
```

Kita bisa mencetak hasilnya dalam tabel baru.

```
>writetable(count',labr=tok[xu])
```

```
          m        12
          f        13
```

Fungsi selecttable() mengembalikan sebuah tabel baru dengan nilai dalam satu kolom yang dipilih dari vektor indeks. Pertama, kita mencari indeks dari dua nilai kita dalam tabel token.

```
>v:=indexof(tok,["g","vg"])
```

```
 [5,  6]
```

Sekarang kita dapat memilih baris-baris dari tabel, yang memiliki salah satu nilai dalam v di baris ke-5.

```
>MT1:=MT[selectrows(MT,5,v)]; i:=sortedrows(MT1,5);
```

Sekarang kita dapat mencetak tabel, dengan nilai yang diekstrak dan diurutkan di kolom ke-5.

```
>writetable(MT1[i],labc=hd,ctok=ctok,tok=tok,wc=7);
```

```
   Person     Sex     Age  Titanic  Evaluation     Tip  Problem
        2       f      23        y           g     1.8        n
        3       f      26        y           g     1.8        y
        6       m      28        y           g     2.8        y
       18       m      38        y           g       .        n
       16       m      26        y           g     2.8        n
       15       f      31        y           g     0.8        n
       12       m      32        y           g     1.8        n
       23       f      38        y           g     2.8        n
       14       f      25        y           g     1.8        y
        9       f      24        y          vg     1.8        y
        7       f      31        y          vg     2.8        n
       20       f      28        y          vg     1.8        n
       22       f      28        y          vg     1.8        y
       13       m      29        y          vg     1.8        y
       11       f      23        y          vg     1.8        y
```

Untuk statistik berikutnya, kita ingin menghubungkan dua kolom tabel. Jadi kita mengekstrak kolom 2 dan 4 dan mengurutkan tabel.

```
>i=sortedrows(MT,[2,4]);  ...
>  writetable(tablecol(MT[i],[2,4])',ctok=[1,2],tok=tok)
```

```
         m         n
         m         n
         m         n
         m         n
         m         n
         m         n
         m         n
         m         y
         m         y
         m         y
         m         y
         m         y
         f         n
         f         y
         f         y
         f         y
         f         y
         f         y
         f         y
         f         y
         f         y
         f         y
         f         y
         f         y
         f         y
```

Dengan getstatistics(), kita juga dapat menghubungkan hitungan dalam dua kolom tabel satu sama lain.

```
>MT24=tablecol(MT,[2,4]); ...
>{xu1,xu2,count}=getstatistics(MT24[1],MT24[2]); ...
>writetable(count,labr=tok[xu1],labc=tok[xu2])
```

```
                 n           y
      m          7           5
      f          1          12
```

Tabel dapat ditulis ke sebuah file.

```
>filename="test.dat"; ...
>writetable(count,labr=tok[xu1],labc=tok[xu2],file=filename);
```

Kemudian kita dapat membaca tabel dari file tersebut.

```
>{MT2,hd,tok2,hdr}=readtable(filename,>clabs,>rlabs); ...
>writetable(MT2,labr=hdr,labc=hd)
```

```
                 n           y
      m          7           5
      f          1          12
```

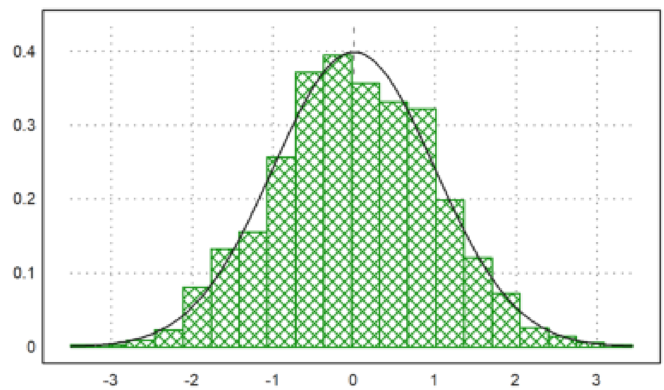
Dan hapus file tersebut.

```
>fileremove(filename);
```

Distribusi

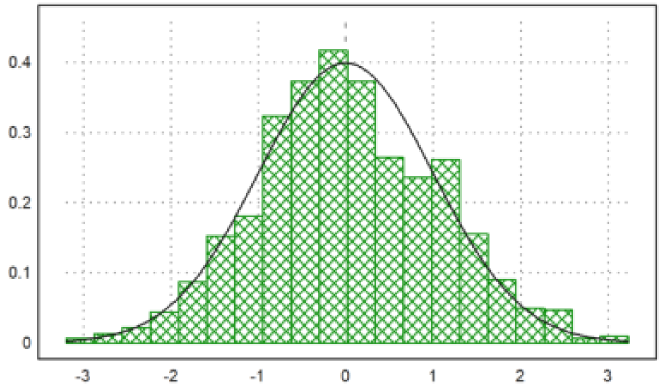
Dengan plot2d, ada metode yang sangat mudah untuk memplot distribusi data eksperimen.

```
>p=normal(1,1000); //1000 random normal-distributed sample p
>plot2d(p,distribution=20,style="\/"); // plot the random sample p
>plot2d("qnormal(x,0,1)",add=1): // add the standard normal distribution plot
```



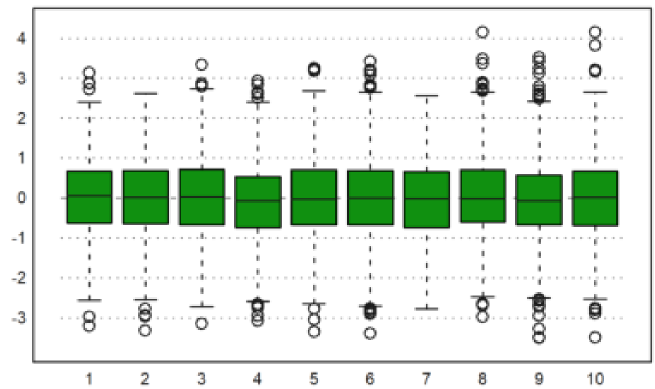
Perhatikan perbedaan antara plot batang (sampel) dan kurva normal (distribusi sesungguhnya). Masukkan kembali ketiga perintah tersebut untuk melihat hasil pengambilan sampel yang lain.

```
>p=normal(1,1000); //1000 random normal-distributed sample p
>plot2d(p,distribution=20,style="\/");
>plot2d("qnormal(x,0,1)",add=1):
```



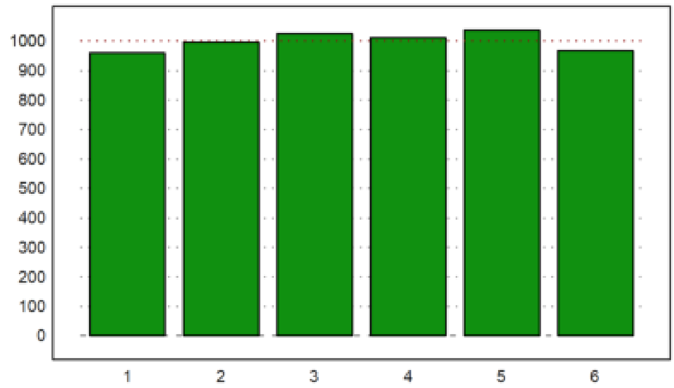
Berikut ini adalah perbandingan 10 simulasi dari 1000 nilai terdistribusi normal dengan menggunakan apa yang disebut plot kotak. Plot ini menunjukkan median, kuartil 25% dan 75%, nilai minimal dan maksimal, serta pencilan.

```
>p=normal(10,1000); boxplot(p):
```



Untuk menghasilkan bilangan bulat acak, Euler memiliki intrandom. Mari kita simulasikan pelemparan dadu dan memplot distribusinya.
Kita menggunakan fungsi getmultiplicities(v,x), yang menghitung seberapa sering elemen-elemen dari v muncul di dalam x. Kemudian kita memplot hasilnya menggunakan columnsplot().

```
>k=intrandom(1,6000,6);  ...
>columnsplot(getmultiplicities(1:6,k));  ...
>ygrid(1000,color=red):
```



Meskipun intrandom(n,m,k) menghasilkan bilangan bulat yang terdistribusi secara seragam dari 1 sampai k, adalah mungkin untuk menggunakan distribusi bilangan bulat yang lain dengan randpint().
Pada contoh berikut, probabilitas untuk 1,2,3 adalah 0.4, 0.1, 0.5 secara berurutan.

```
>randpint(1,1000,[0.4,0.1,0.5]); getmultiplicities(1:3,%)
```

```
[394,  107,  499]
```

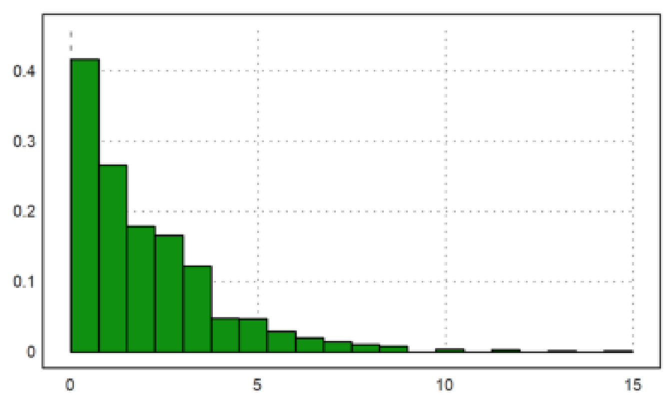
Euler dapat menghasilkan nilai acak dari lebih banyak distribusi. Lihatlah ke dalam referensi.
Misalnya, kita mencoba distribusi eksponensial. Sebuah variabel acak kontinu X dikatakan memiliki distribusi eksponensial, jika PDF-nya diberikan oleh

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad x > 0, \quad \lambda > 0,$$

engan parameter

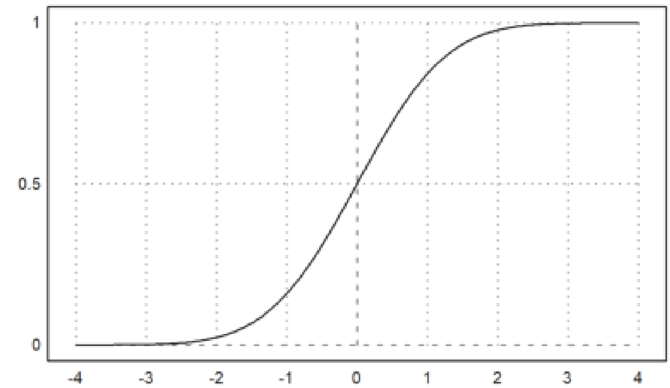
$$\lambda = \frac{1}{\mu}, \quad \mu \text{ is the mean, and denoted by } X \sim \text{Exponential}(\lambda).$$

```
>plot2d(randexponential(1,1000,2),>distribution):
```



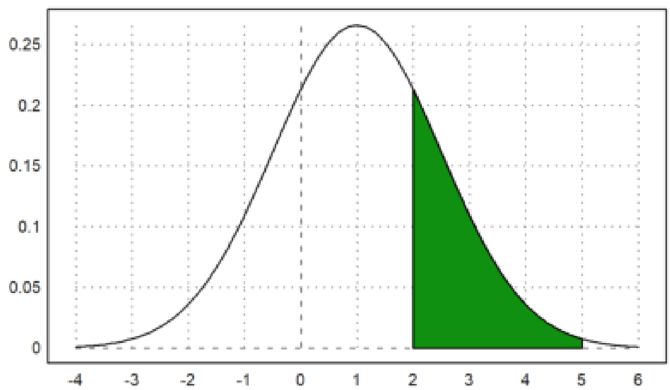
Untuk banyak distribusi, Euler dapat menghitung fungsi distribusi dan kebalikannya.

```
>plot2d("normaldis",-4,4):
```



Berikut ini adalah salah satu cara untuk memplot kuantil.

```
>plot2d("qnormal(x,1,1.5)",-4,6);  ...
>plot2d("qnormal(x,1,1.5)",a=2,b=5,>add,>filled):
```



$$\text{normaldis(x,m,d)} = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{d\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{t-m}{d})^2}\ dt.$$

Probabilitas untuk berada di area hijau adalah sebagai berikut.

```
>normaldis(5,1,1.5)-normaldis(2,1,1.5)
```

```
0.248662156979
```

Hal ini dapat dihitung secara numerik dengan integral berikut ini.

$$\int_{2}^{5} \frac{1}{1.5\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-1}{1.5})^2}\ dx.$$

```
>gauss("qnormal(x,1,1.5)",2,5)
```

```
0.248662156979
```

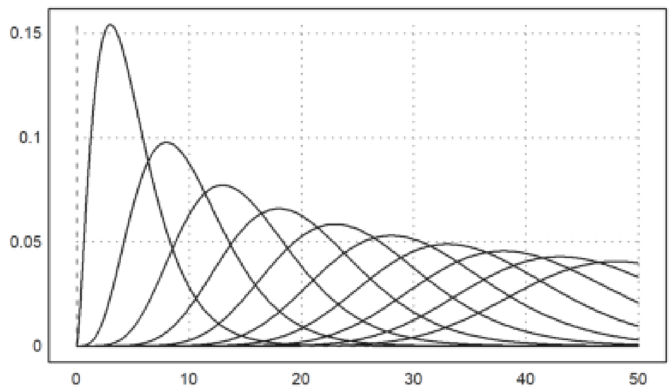
Mari kita bandingkan distribusi binomial dengan distribusi normal dengan rata-rata dan deviasi yang sama. Fungsi invbindis() menyelesaikan interpolasi linier antara nilai bilangan bulat.

```
>invbindis(0.95,1000,0.5), invnormaldis(0.95,500,0.5*sqrt(1000))
```

```
525.516721219
526.007419394
```

Fungsi qdis() adalah densitas dari distribusi chi-square. Seperti biasa, Euler memetakan vektor ke fungsi ini. Dengan demikian kita mendapatkan plot semua distribusi chi-kuadrat dengan derajat 5 hingga 30 dengan mudah dengan cara berikut.

```
>plot2d("qchidis(x,(5:5:50)')",0,50):
```



Euler memiliki fungsi-fungsi yang akurat untuk mengevaluasi distribusi-distribusi. Mari kita periksa chidis() dengan sebuah integral.

Penamaannya diusahakan untuk konsisten. Sebagai contoh,
- distribusi chi-kuadrat adalah chidis(),
- fungsi kebalikannya adalah invchidis(),
- densitasnya adalah qchidis().

Pelengkap dari distribusi (ekor atas) adalah chicdis().

```
>chidis(1.5,2), integrate("qchidis(x,2)",0,1.5)
```

```
0.527633447259
0.527633447259
```

Distribusi Diskrit

Untuk menentukan distribusi diskrit Anda sendiri, Anda dapat menggunakan metode berikut.
Pertama, kita tetapkan fungsi distribusinya.

```
>wd = 0|((1:6)+[-0.01,0.01,0,0,0,0])/6
```

```
[0,  0.165,  0.335,  0.5,  0.666667,  0.833333,  1]
```

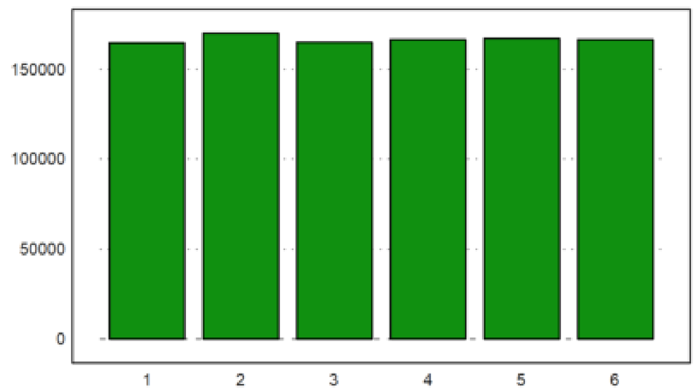
Artinya, dengan probabilitas wd[i+1]-wd[i] kita menghasilkan nilai acak i.

Ini hampir merupakan distribusi yang seragam. Mari kita definisikan sebuah generator bilangan acak untuk ini. Fungsi find(v,x) menemukan nilai x dalam vektor v. Fungsi ini juga dapat digunakan untuk vektor x.

```
>function wrongdice (n,m) := find(wd,random(n,m))
```

Kesalahan ini sangat halus sehingga kita hanya bisa melihatnya setelah melakukan iterasi yang sangat banyak.

```
>columnsplot(getmultiplicities(1:6,wrongdice(1,1000000))):
```



Berikut ini adalah fungsi sederhana untuk memeriksa distribusi seragam dari nilai 1... K dalam v. Kami menerima hasilnya, jika untuk semua frekuensi

$$\left| f_i - \frac{1}{K} \right| < \frac{\delta}{\sqrt{n}}.$$

```
>function checkrandom (v, delta=1) ...
```

```
  K=max(v); n=cols(v);
  fr=getfrequencies(v,1:K);
  return max(fr/n-1/K)<delta/sqrt(n);
  endfunction
```

Memang fungsi ini menolak distribusi seragam.

```
>checkrandom(wrongdice(1,1000000))
```

```
0
```

Dan ini menerima generator acak bawaan.

```
>checkrandom(intrandom(1,1000000,6))
```

```
1
```

Kita dapat menghitung distribusi binomial. Pertama, ada binomialsum(), yang mengembalikan probabilitas i atau kurang dari n percobaan.

```
>bindis(410,1000,0.4)
```

```
0.751401349654
```

Fungsi Beta invers digunakan untuk menghitung interval kepercayaan Clopper-Pearson untuk parameter p. Tingkat defaultnya adalah alpha.
Arti dari interval ini adalah jika p berada di luar interval, hasil yang diamati sebesar 410 dalam 1000 jarang terjadi.

```
>clopperpearson(410,1000)
```

```
[0.37932,  0.441212]
```

Perintah berikut ini adalah cara langsung untuk mendapatkan hasil di atas. Tetapi untuk n yang besar, penjumlahan langsung tidak akurat dan lambat.

```
>p=0.4; i=0:410; n=1000; sum(bin(n,i)*p^i*(1-p)^(n-i))
```

```
0.751401349655
```

Omong-omong, invbinsum() menghitung kebalikan dari binomialsum().

```
>invbindis(0.75,1000,0.4)
```

```
409.932733047
```

Dalam Bridge, kita mengasumsikan 5 kartu yang terbuka (dari 52 kartu) di dua tangan (26 kartu). Mari kita hitung probabilitas distribusi yang lebih buruk dari 3:2 (misalnya 0:5, 1:4, 4:1, atau 5:0).

```
>2*hypergeomsum(1,5,13,26)
```

```
0.321739130435
```

Ada juga simulasi distribusi multinomial.

```
>randmultinomial(10,1000,[0.4,0.1,0.5])
```

```
            394            82           524
            418            92           490
            445            90           465
            403           114           483
            405            95           500
            384           107           509
```

```
414              93              493
419              90              491
394             101              505
382             103              515
```

Memplot Data

Untuk memplot data, kami mencoba hasil pemilihan umum Jerman sejak tahun 1990, yang diukur dalam kursi.

```
> BW := [ ...
>1990,662,319,239,79,8,17; ...
>1994,672,294,252,47,49,30; ...
>1998,669,245,298,43,47,36; ...
>2002,603,248,251,47,55,2; ...
>2005,614,226,222,61,51,54; ...
>2009,622,239,146,93,68,76; ...
>2013,631,311,193,0,63,64];
```

Untuk pesta, kami menggunakan serangkaian nama.

```
>P:=["CDU/CSU","SPD","FDP","Gr","Li"];
```

Mari kita cetak persentasenya dengan baik.
Pertama kita ekstrak kolom-kolom yang diperlukan. Kolom 3 sampai 7 adalah kursi masing-masing partai, dan kolom 2 adalah jumlah total kursi. kolom adalah tahun pemilihan.

```
>BT:=BW[,3:7]; BT:=BT/sum(BT); YT:=BW[,1]';
```

Kemudian kita mencetak statistik dalam bentuk tabel. Kita menggunakan nama sebagai judul kolom, dan tahun sebagai judul baris. Lebar default untuk kolom adalah wc = 10, tetapi kami lebih suka output yang lebih padat. Kolom-kolom akan diperluas untuk label-label kolom, jika perlu.

```
>writetable(BT*100,wc=6,dc=0,>fixed,labc=P,labr=YT)
```

```
        CDU/CSU   SPD   FDP    Gr    Li
  1990       48    36    12     1     3
  1994       44    38     7     7     4
  1998       37    45     6     7     5
  2002       41    42     8     9     0
  2005       37    36    10     8     9
  2009       38    23    15    11    12
  2013       49    31     0    10    10
```

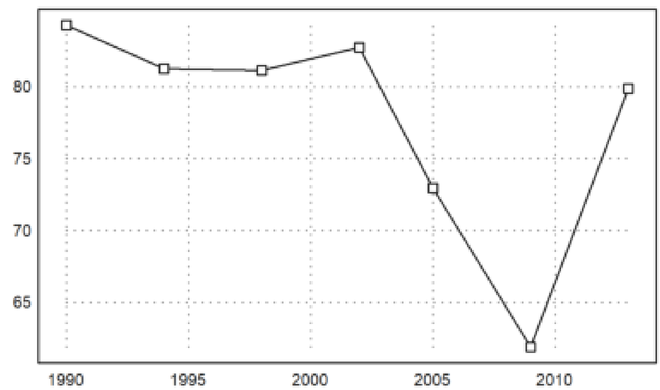
Perkalian matriks berikut ini mengekstrak jumlah persentase dua partai besar yang menunjukkan bahwa partai-partai kecil telah memperoleh suara di parlemen hingga tahun 2009.

```
>BT1:=(BT.[1;1;0;0;0])'*100
```

```
[84.29,  81.25,  81.1659,  82.7529,  72.9642,  61.8971,  79.8732]
```

Ada juga plot statistik sederhana. Kita menggunakannya untuk menampilkan garis dan titik secara bersama-an. Alternatif lainnya adalah memanggil plot2d dua kali dengan >add.

```
>statplot(YT,BT1,"b"):
```

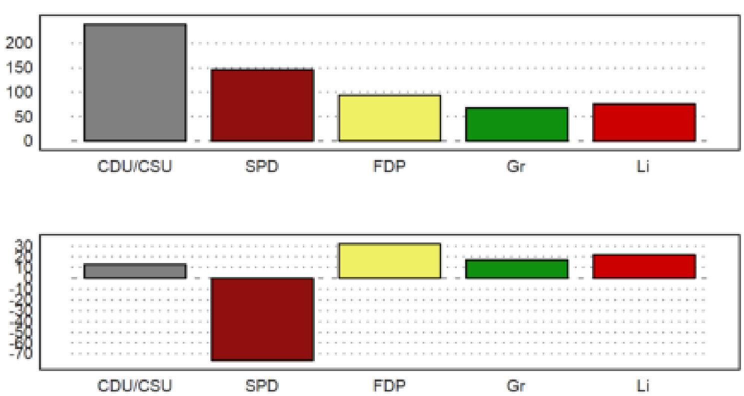


Tentukan beberapa warna untuk masing-masing pihak.

```
>CP:=[rgb(0.5,0.5,0.5),red,yellow,green,rgb(0.8,0,0)];
```

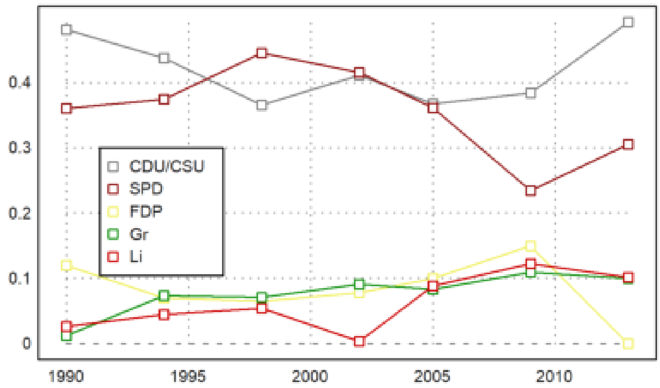
Sekarang kita dapat memplot hasil pemilu 2009 dan perubahannya ke dalam satu plot menggunakan figure. Kita dapat menambahkan vektor kolom pada setiap plot.

```
>figure(2,1);  ...
>figure(1); columnsplot(BW[6,3:7],P,color=CP); ...
>figure(2); columnsplot(BW[6,3:7]-BW[5,3:7],P,color=CP);  ...
>figure(0):
```



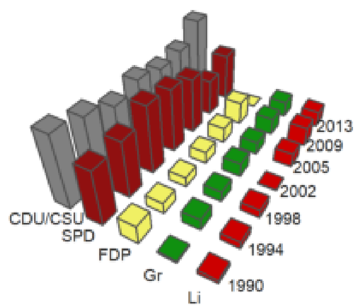
Plot data menggabungkan baris data statistik dalam satu plot.

```
>J:=BW[,1]'; DP:=BW[,3:7]'; ...
>dataplot(YT,BT',color=CP);  ...
>labelbox(P,colors=CP,styles="[]",>points,w=0.2,x=0.3,y=0.4):
```



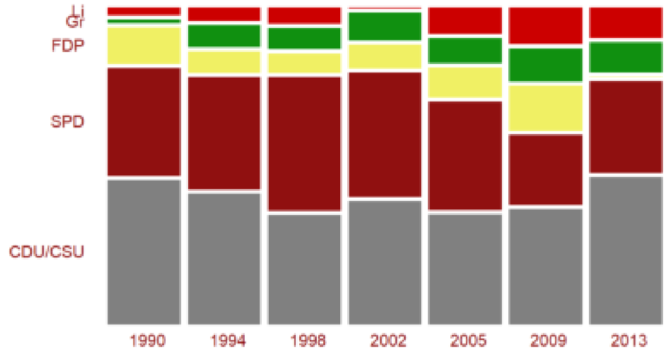
Plot kolom 3D menunjukkan deretan data statistik dalam bentuk kolom. Kami menyediakan label untuk baris dan kolom. angle adalah sudut pandang.

```
>columnsplot3d(BT,scols=P,srows=YT, ...
>  angle=30°,ccols=CP):
```



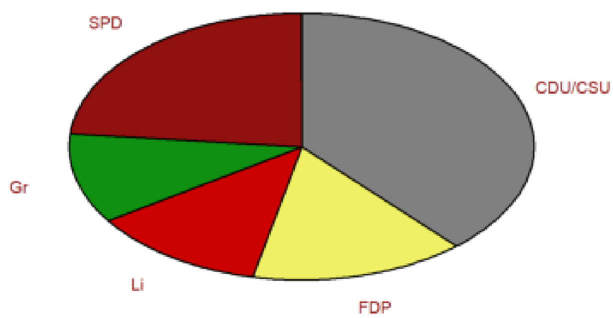
Representasi lainnya adalah plot mosaik. Perhatikan bahwa kolom-kolom pada plot mewakili kolom-kolom pada matriks di sini. Karena panjangnya label CDU/CSU, kita mengambil jendela yang lebih kecil dari biasanya.

```
>shrinkwindow(>smaller);  ...
>mosaicplot(BT',srows=YT,scols=P,color=CP,style="#"); ...
>shrinkwindow():
```



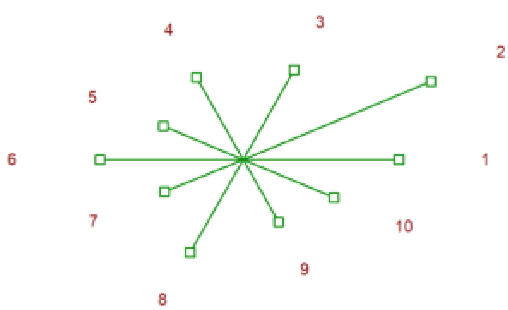
Kita juga bisa membuat diagram lingkaran. Karena warna hitam dan kuning membentuk koalisi, kita menyusun ulang elemen-elemennya.

```
>i=[1,3,5,4,2]; piechart(BW[6,3:7][i],color=CP[i],lab=P[i]):
```



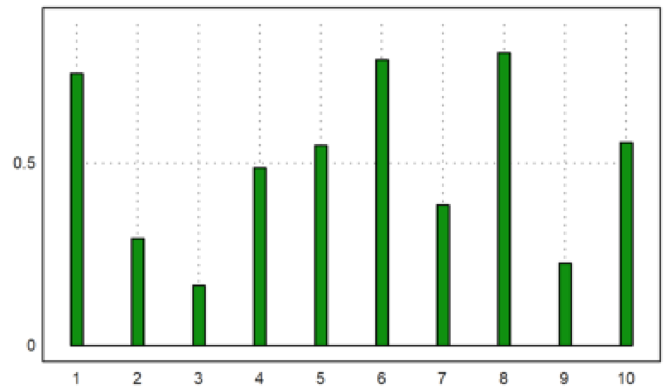
Berikut ini jenis plot yang lain.

```
>starplot(normal(1,10)+4,lab=1:10,>rays):
```



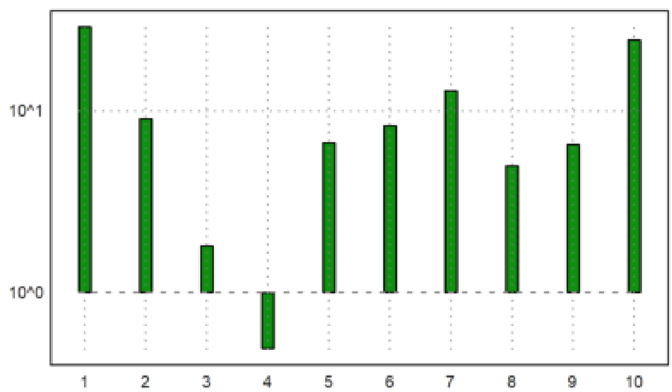
Beberapa plot di plot2d bagus untuk statika. Berikut ini adalah plot impuls dari data acak, yang terdistribusi secara seragam dalam [0,1].

```
>plot2d(makeimpulse(1:10,random(1,10)),>bar):
```



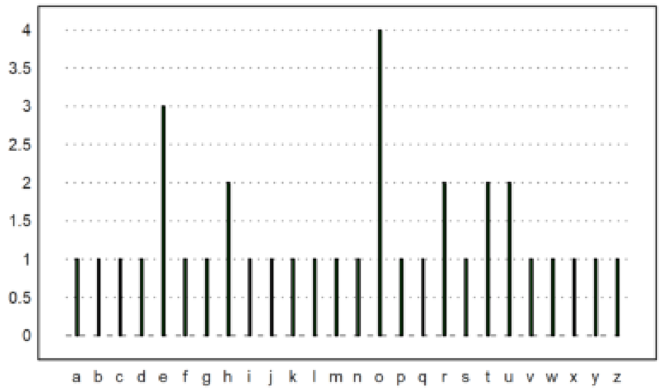
Tetapi untuk data yang terdistribusi secara eksponensial, kita mungkin memerlukan plot logaritmik.

```
>logimpulseplot(1:10,-log(random(1,10))*10):
```



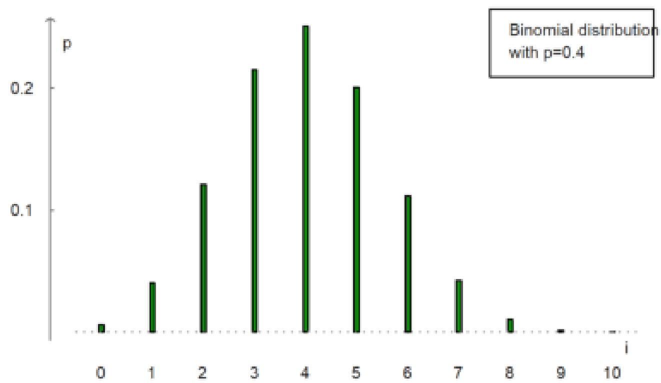
Fungsi columnsplot() lebih mudah digunakan, karena hanya membutuhkan sebuah vektor nilai. Selain itu, fungsi ini dapat mengatur labelnya menjadi apa pun yang kita inginkan, kita telah mendemonstrasikan hal ini dalam tutorial ini.
Berikut ini adalah aplikasi lain, di mana kita menghitung karakter dalam sebuah kalimat dan memplot statistik.

```
>v=strtochar("the quick brown fox jumps over the lazy dog"); ...
>w=ascii("a"):ascii("z"); x=getmultiplicities(w,v); ...
>cw=[]; for k=w; cw=cw|char(k); end; ...
>columnsplot(x,lab=cw,width=0.05):
```



Anda juga dapat menetapkan sumbu secara manual.

```
>n=10; p=0.4; i=0:n; x=bin(n,i)*p^i*(1-p)^(n-i); ...
>columnsplot(x,lab=i,width=0.05,<frame,<grid); ...
>yaxis(0,0:0.1:1,style="->",>left); xaxis(0,style="."); ...
>label("p",0,0.25), label("i",11,0); ...
>textbox(["Binomial distribution","with p=0.4"]):
```



Berikut ini adalah cara untuk memplot frekuensi angka dalam vektor.
Kami membuat vektor angka acak bilangan bulat 1 hingga 6.

```
>v:=intrandom(1,10,10)
```

```
[5,  1,  8,  6,  6,  10,  9,  6,  8,  3]
```

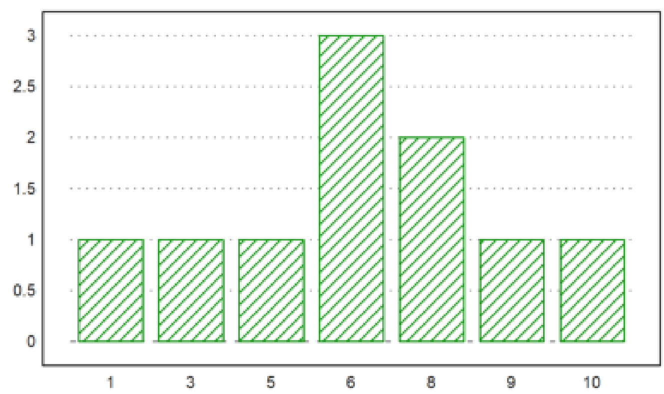
Kemudian ekstrak nomor unik dalam v.

```
>vu:=unique(v)
```

```
[1,  3,  5,  6,  8,  9,  10]
```

Dan memplot frekuensi dalam plot kolom.

```
>columnsplot(getmultiplicities(vu,v),lab=vu,style="/"):
```



Kami ingin mendemonstrasikan fungsi untuk distribusi nilai empiris.

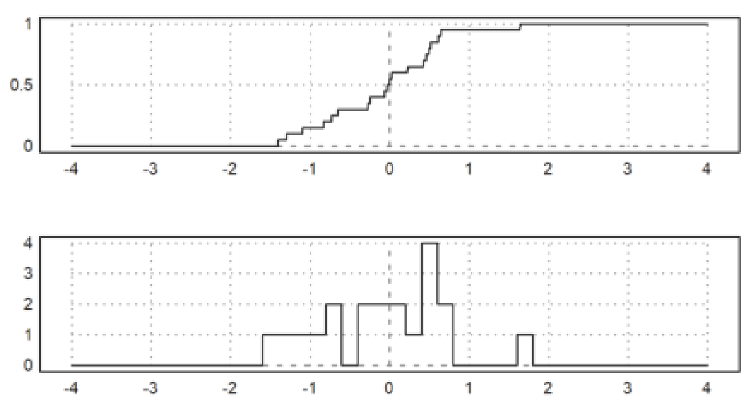
```
>x=normal(1,20);
```

Fungsi empdist(x,vs) membutuhkan larik nilai yang telah diurutkan. Jadi kita harus mengurutkan x sebelum dapat menggunakannya.

```
>xs=sort(x);
```

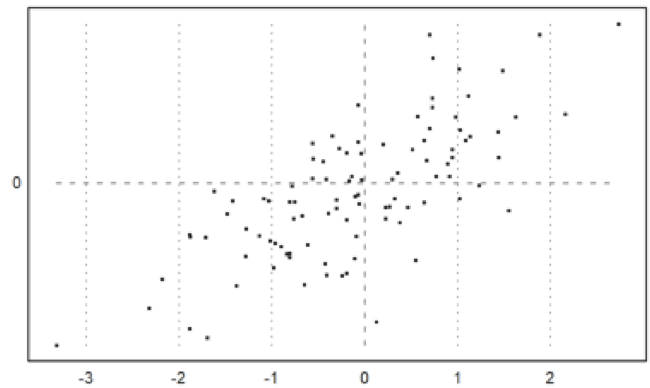
Kemudian kita memplot distribusi empiris dan beberapa batang kepadatan ke dalam satu plot. Alih-alih plot batang untuk distribusi, kali ini kami menggunakan plot gigi gergaji.

```
>figure(2,1); ...
>figure(1); plot2d("empdist",-4,4;xs); ...
>figure(2); plot2d(histo(x,v=-4:0.2:4,<bar));  ...
>figure(0):
```



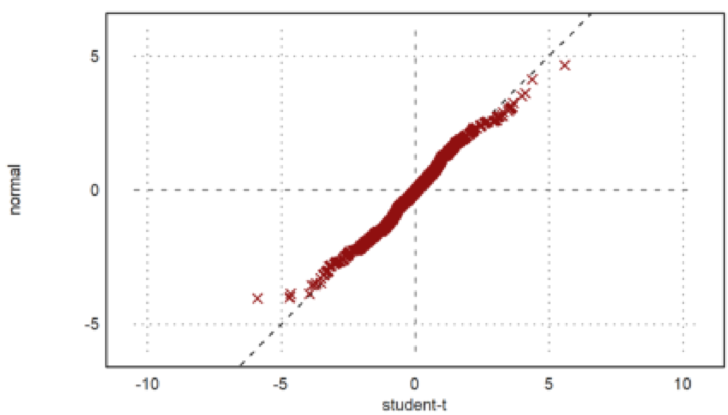
Plot sebaran mudah dilakukan di Euler dengan plot titik biasa. Grafik berikut ini menunjukkan bahwa X dan X+Y berkorelasi positif secara jelas.

```
>x=normal(1,100); plot2d(x,x+rotright(x),>points,style=".."):
```



Sering kali, kita ingin membandingkan dua sampel dari distribusi yang berbeda. Hal ini dapat dilakukan dengan plot kuantil-kuantil.
Untuk pengujian, kami mencoba distribusi student-t dan distribusi eksponensial.

```
>x=randt(1,1000,5); y=randnormal(1,1000,mean(x),dev(x)); ...
>plot2d("x",r=6,style="--",yl="normal",xl="student-t",>vertical); ...
>plot2d(sort(x),sort(y),>points,color=red,style="x",>add):
```

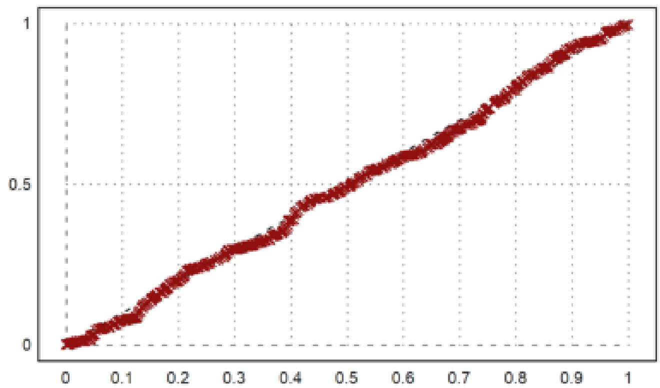


Plot ini dengan jelas menunjukkan bahwa nilai yang terdistribusi normal cenderung lebih kecil pada ujung yang ekstrim.
Jika kita memiliki dua distribusi dengan ukuran yang berbeda, kita dapat memperluas distribusi yang lebih kecil atau memperkecil distribusi yang lebih besar. Fungsi berikut ini bagus untuk keduanya. Fungsi ini mengambil nilai median dengan persentase antara 0 dan 1.

```
>function medianexpand (x,n) := median(x,p=linspace(0,1,n-1));
```

Mari kita bandingkan dua distribusi yang sama.

```
>x=random(1000); y=random(400); ...
>plot2d("x",0,1,style="--"); ...
>plot2d(sort(medianexpand(x,400)),sort(y),>points,color=red,style="x",>add):
```



Regresi dan Korelasi

Regresi linier dapat dilakukan dengan fungsi polyfit() atau berbagai fungsi kecocokan.
Sebagai permulaan, kita mencari garis regresi untuk data univariat dengan polyfit(x,y,1).

```
>x=1:10; y=[2,3,1,5,6,3,7,8,9,8]; writetable(x'|y',labc=["x","y"])
```

```
         x         y
         1         2
         2         3
         3         1
         4         5
         5         6
         6         3
         7         7
         8         8
         9         9
        10         8
```

Kami ingin membandingkan kecocokan tanpa bobot dan dengan bobot. Pertama, koefisien dari kecocokan linier.

```
>p=polyfit(x,y,1)
```

```
[0.733333,  0.812121]
```

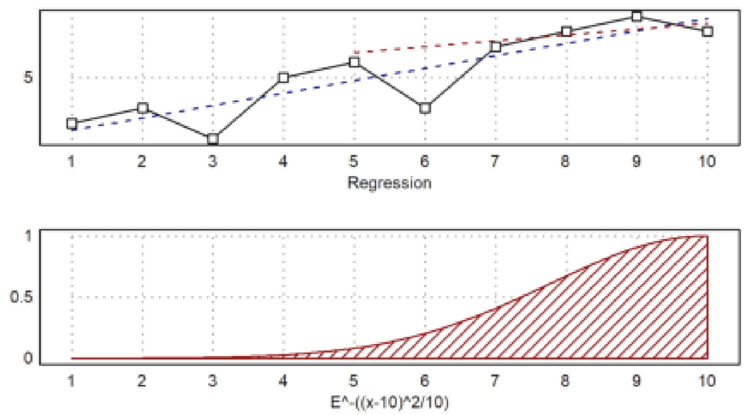
Sekarang, koefisien dengan bobot yang menekankan nilai terakhir.

```
>w &= "exp(-(x-10)^2/10)"; pw=polyfit(x,y,1,w=w(x))
```

```
[4.71566,  0.38319]
```

Kami menempatkan semuanya ke dalam satu plot untuk titik-titik dan garis regresi, dan untuk bobot yang digunakan.

```
>figure(2,1);  ...
>figure(1); statplot(x,y,"b",xl="Regression"); ...
>  plot2d("evalpoly(x,p)",>add,color=blue,style="--"); ...
>  plot2d("evalpoly(x,pw)",5,10,>add,color=red,style="--"); ...
>figure(2); plot2d(w,1,10,>filled,style="/",fillcolor=red,xl=w); ...
>figure(0):
```



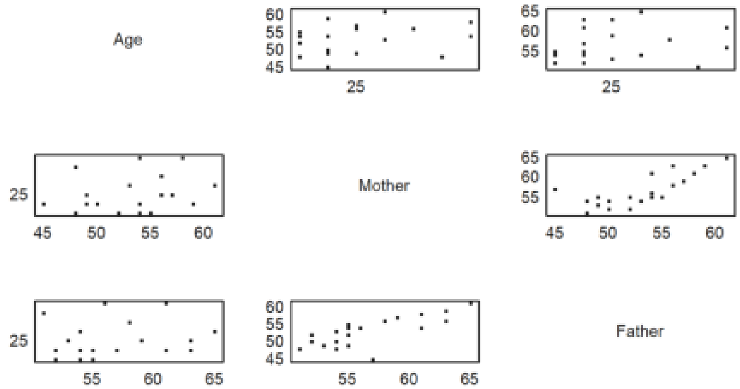
Untuk contoh lain, kita membaca survei tentang siswa, usia mereka, usia orang tua mereka, dan jumlah saudara kandung dari sebuah file.
Tabel ini berisi "m" dan "f" pada kolom kedua. Kita menggunakan variabel tok2 untuk mengatur terjemahan yang tepat dan bukannya membiarkan readtable() mengumpulkan terjemahan.

```
>{MS,hd}:=readtable("table1.dat",tok2:=["m","f"]);  ...
>writetable(MS,labc=hd,tok2:=["m","f"]);
```

Person	Sex	Age	Mother	Father	Siblings
1	m	29	58	61	1
2	f	26	53	54	2
3	m	24	49	55	1
4	f	25	56	63	3
5	f	25	49	53	0
6	f	23	55	55	2
7	m	23	48	54	2
8	m	27	56	58	1
9	m	25	57	59	1
10	m	24	50	54	1
11	f	26	61	65	1
12	m	24	50	52	1
13	m	29	54	56	1
14	m	28	48	51	2
15	f	23	52	52	1
16	m	24	45	57	1
17	f	24	59	63	0
18	f	23	52	55	1
19	m	24	54	61	2
20	f	23	54	55	1

Bagaimana usia saling bergantung satu sama lain? Kesan pertama datang dari scatterplot berpasangan.

```
>scatterplots(tablecol(MS,3:5),hd[3:5]):
```



Jelas bahwa usia ayah dan ibu saling bergantung satu sama lain. Mari kita tentukan dan plot garis regresinya.

```
>cs:=MS[,4:5]'; ps:=polyfit(cs[1],cs[2],1)
```

```
[17.3789,  0.740964]
```

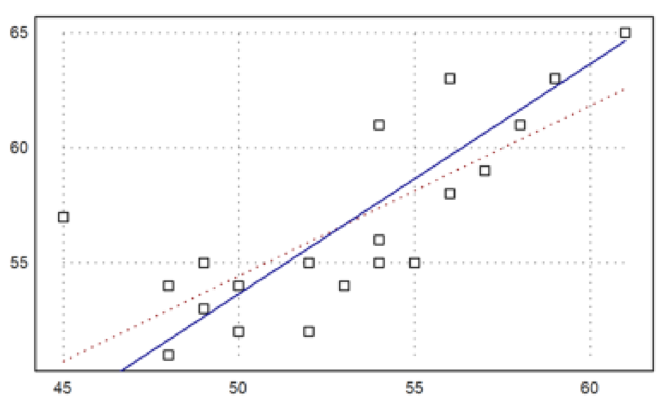
Ini jelas merupakan model yang salah. Garis regresinya adalah s = 17 + 0,74t, di mana t adalah usia ibu dan s adalah usia ayah. Perbedaan usia mungkin sedikit bergantung pada usia, tetapi tidak terlalu banyak. Sebaliknya, kami menduga fungsi seperti s = a + t. Kemudian a adalah rata-rata dari s-t. Ini adalah perbedaan usia rata-rata antara ayah dan ibu.

```
>da:=mean(cs[2]-cs[1])
```

```
3.65
```

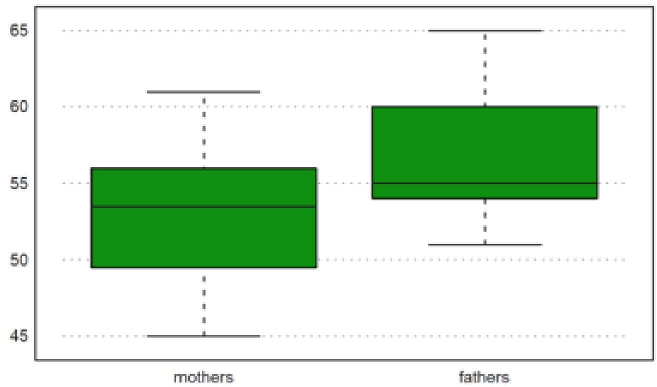
Mari kita plotkan ini ke dalam satu scatter plot.

```
>plot2d(cs[1],cs[2],>points);  ...
>plot2d("evalpoly(x,ps)",color=red,style=".",>add);  ...
>plot2d("x+da",color=blue,>add):
```



Berikut ini adalah plot kotak dari kedua usia tersebut. Ini hanya menunjukkan, bahwa usia keduanya berbeda.

```
>boxplot(cs,["mothers","fathers"]):
```



Sangat menarik bahwa perbedaan dalam median tidak sebesar perbedaan dalam mean.

```
>median(cs[2])-median(cs[1])
```

```
1.5
```

Koefisien korelasi menunjukkan korelasi positif.

```
>correl(cs[1],cs[2])
```

```
0.7588307236
```

Korelasi peringkat adalah ukuran untuk urutan yang sama dalam kedua vektor. Korelasi ini juga cukup positif.

```
>rankcorrel(cs[1],cs[2])
```

```
0.758925292358
```

Membuat Fungsi baru

Tentu saja, bahasa EMT dapat digunakan untuk memprogram fungsi baru. Sebagai contoh, kita mendefinisikan fungsi kemiringan.

$$\text{sk}(x) = \frac{\sqrt{n}\sum_i (x_i - m)^3}{\left(\sum_i (x_i - m)^2\right)^{3/2}}$$

di mana m adalah rata-rata dari x.

```
>function skew (x:vector) ...
```

```
m=mean(x);
return sqrt(cols(x))*sum((x-m)^3)/(sum((x-m)^2))^(3/2);
endfunction
```

Seperti yang Anda lihat, kita dapat dengan mudah menggunakan bahasa matriks untuk mendapatkan implementasi yang sangat singkat dan efisien. Mari kita coba fungsi ini.

```
>data=normal(20); skew(normal(10))
```

```
0.521806329961
```

Berikut ini adalah fungsi lain, yang disebut koefisien kemencengan Pearson.

```
>function skew1 (x) := 3*(mean(x)-median(x))/dev(x)
>skew1(data)
```

```
0.573102925949
```

Simulasi Monte Carlo

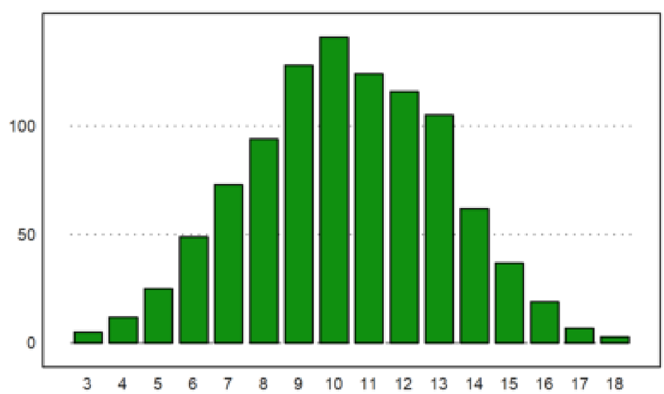
Euler dapat digunakan untuk mensimulasikan kejadian acak. Kita telah melihat contoh sederhana di atas. Berikut ini adalah contoh lainnya, yang mensimulasikan 1000 kali pelemparan 3 dadu, dan menanyakan distribusi dari jumlah tersebut.

```
>ds:=sum(intrandom(1000,3,6))'; fs=getmultiplicities(3:18,ds)
```

```
[5, 12, 25, 49, 73, 94, 128, 141, 124, 116, 105, 62, 37,
19, 7, 3]
```

Kita bisa merencanakan ini sekarang.

```
>columnsplot(fs,lab=3:18):
```



Untuk menentukan distribusi yang diharapkan tidaklah mudah. Kami menggunakan rekursi tingkat lanjut untuk hal ini.

Fungsi berikut ini menghitung jumlah cara angka k dapat direpresentasikan sebagai jumlah n angka dalam rentang 1 hingga m. Fungsi ini bekerja secara rekursif dengan cara yang jelas.

```
>function map countways (k; n, m) ...
```

```
    if n==1 then return k>=1 && k<=m
    else
      sum=0;
      loop 1 to m; sum=sum+countways(k-#,n-1,m); end;
      return sum;
    end;
  endfunction
```

Berikut ini adalah hasil dari tiga lemparan dadu.

```
>countways(5:25,5,5)
```

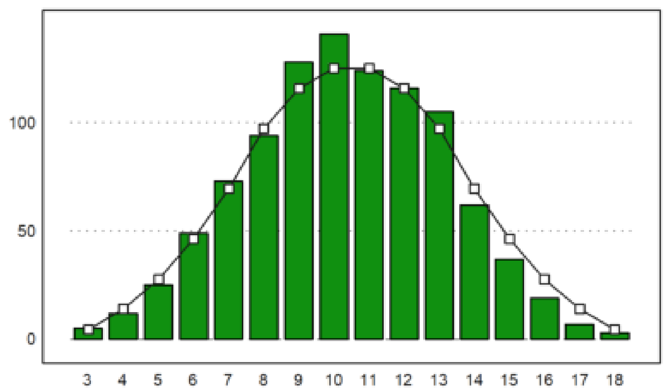
```
[1,   5,   15,   35,   70,   121,   185,   255,   320,   365,   381,   365,   320,
255,   185,   121,   70,   35,   15,   5,   1]
```

```
>cw=countways(3:18,3,6)
```

```
[1,   3,   6,   10,   15,   21,   25,   27,   27,   25,   21,   15,   10,   6,   3,
1]
```

Kami menambahkan nilai yang diharapkan ke plot.

```
>plot2d(cw/6^3*1000,>add); plot2d(cw/6^3*1000,>points,>add):
```



Untuk simulasi lainnya, deviasi nilai rata-rata dari n variabel acak berdistribusi normal 0-1 adalah 1/sqrt(n).

```
>longformat; 1/sqrt(10)
```

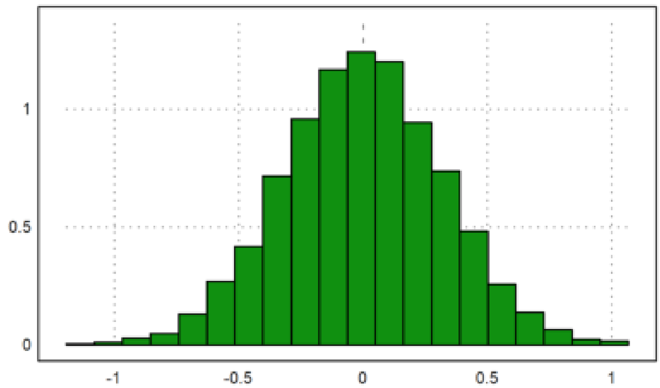
```
0.316227766017
```

Mari kita periksa dengan sebuah simulasi. Kami menghasilkan 10.000 kali 10 vektor acak.

```
>M=normal(10000,10); dev(mean(M)')
```

```
0.318861419326
```

```
>plot2d(mean(M)',>distribution):
```



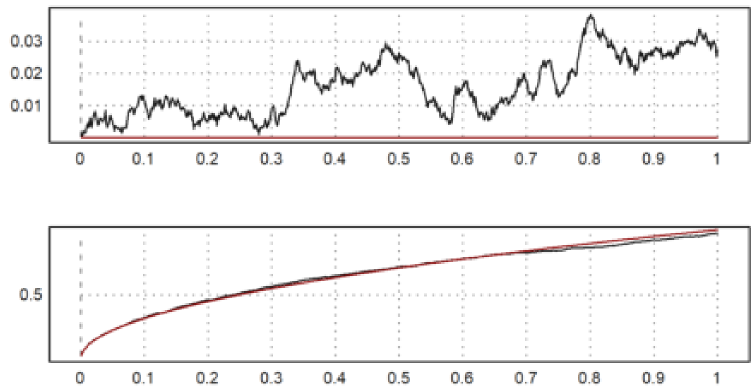
Median dari 10 bilangan acak berdistribusi normal 0-1 memiliki deviasi yang lebih besar.

```
>dev(median(M)')
```

```
0.376651504162
```

Karena kita dapat dengan mudah menghasilkan jalan acak, kita dapat mensimulasikan proses Wiener. Kami mengambil 1000 langkah dari 1000 proses. Kami kemudian memplot deviasi standar dan rata-rata dari langkah ke-n dari proses-proses ini bersama dengan nilai yang diharapkan dalam warna merah.

```
>n=1000; m=1000; M=cumsum(normal(n,m)/sqrt(m)); ...
>t=(1:n)/n; figure(2,1); ...
>figure(1); plot2d(t,mean(M')'); plot2d(t,0,color=red,>add); ...
>figure(2); plot2d(t,dev(M')'); plot2d(t,sqrt(t),color=red,>add); ...
>figure(0):
```



Tes

Tes adalah alat yang penting dalam statistik. Dalam Euler, banyak tes yang diterapkan. Semua tes ini mengembalikan kesalahan yang kita terima jika kita menolak hipotesis nol.
Sebagai contoh, kita menguji lemparan dadu untuk distribusi yang seragam. Pada 600 lemparan, kita mendapatkan nilai berikut, yang kita masukkan ke dalam uji chi-kuadrat.

```
>chitest([90,103,114,101,103,89],dup(100,6)')
```

```
0.498830517952
```

Uji chi-square juga memiliki mode, yang menggunakan simulasi Monte Carlo untuk menguji statistik. Hasilnya seharusnya hampir sama. Parameter >p menginterpretasikan vektor y sebagai vektor probabilitas.

```
>chitest([90,103,114,101,103,89],dup(1/6,6)',>p,>montecarlo)
```

```
0.517
```

Kesalahan ini terlalu besar. Jadi kita tidak bisa menolak distribusi seragam. Ini tidak membuktikan bahwa dadu kita adil. Tetapi kita tidak bisa menolak hipotesis kita.
Selanjutnya kita buat 1000 lemparan dadu dengan menggunakan generator bilangan acak, dan lakukan pengujian yang sama.

```
>n=1000; t=random([1,n*6]); chitest(count(t*6,6),dup(n,6)')
```

```
0.159910723681
```

Mari kita uji nilai rata-rata 100 dengan uji-t.

```
>s=200+normal([1,100])*10; ...
>ttest(mean(s),dev(s),100,200)
```

```
0.353414299977
```

Fungsi ttest() membutuhkan nilai rata-rata, deviasi, jumlah data, dan nilai rata-rata untuk diuji.
Sekarang mari kita periksa dua pengukuran untuk mean yang sama. Kita tolak hipotesis bahwa kedua pengukuran tersebut memiliki nilai rata-rata yang sama, jika hasilnya < 0,05.

```
>tcomparedata(normal(1,10),normal(1,10))
```

```
0.268166832384
```

Jika kita menambahkan bias pada satu distribusi, kita akan mendapatkan lebih banyak penolakan. Ulangi simulasi ini beberapa kali untuk melihat efeknya.

```
>tcomparedata(normal(1,10),normal(1,10)+2)
```

```
2.17064628392e-05
```

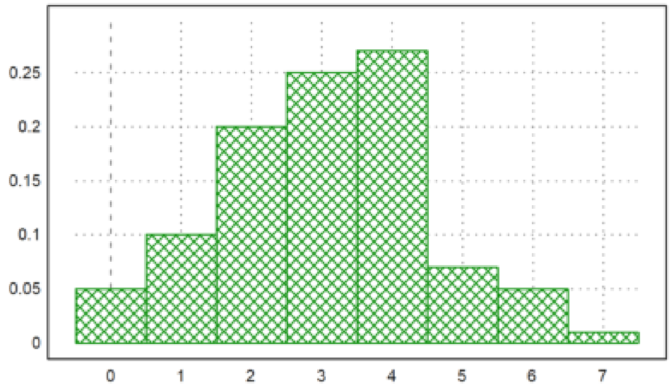
Pada contoh berikut, kita membuat 20 lemparan dadu secara acak sebanyak 100 kali dan menghitung jumlah dadu yang muncul. Rata-rata harus ada 20/6 = 3,3 mata dadu.

```
>R=random(100,20); R=sum(R*6<=1)'; mean(R)
```

```
3.05
```

Sekarang kita bandingkan jumlah satu dengan distribusi binomial. Pertama, kita memplot distribusi angka satu.

```
>plot2d(R,distribution=max(R)+1,even=1,style="\/"):
```




```
>t=count(R,21);
```

Kemudian kami menghitung nilai yang diharapkan.

```
>n=0:20; b=bin(20,n)*(1/6)^n*(5/6)^(20-n)*100;
```

Kami harus mengumpulkan beberapa angka untuk mendapatkan kategori yang cukup besar.

```
>t1=sum(t[1:2])|t[3:7]|sum(t[8:21]); ...
>b1=sum(b[1:2])|b[3:7]|sum(b[8:21]);
```

Uji chi-square menolak hipotesis bahwa distribusi kita adalah distribusi binomial, jika hasilnya <0,05.

```
>chitest(t1,b1)
```

```
0.262911182138
```

Contoh berikut ini berisi hasil dari dua kelompok orang (laki-laki dan perempuan, katakanlah) yang memberikan suara untuk satu dari enam partai.

```
>A=[23,37,43,52,64,74;27,39,41,49,63,76];  ...
>  writetable(A,wc=6,labr=["m","f"],labc=1:6)
```

```
            1     2     3     4     5     6
      m    23    37    43    52    64    74
      f    27    39    41    49    63    76
```

Kami ingin menguji independensi suara dari jenis kelamin. Uji tabel chi^2 melakukan hal ini. Hasilnya terlalu besar untuk menolak independensi. Jadi kita tidak dapat mengatakan, jika pemungutan suara tergantung pada jenis kelamin dari data ini.

```
>tabletest(A)
```

```
0.990701632326
```

Berikut ini adalah tabel yang diharapkan, jika kita mengasumsikan frekuensi pemungutan suara yang diamati.

```
>writetable(expectedtable(A),wc=6,dc=1,labr=["m","f"],labc=1:6)
```

```
          1     2     3     4     5     6
   m   24.9  37.9  41.9  50.3  63.3  74.7
   f   25.1  38.1  42.1  50.7  63.7  75.3
```

Kita dapat menghitung koefisien kontingensi yang telah dikoreksi. Karena koefisien ini sangat dekat dengan 0, kami menyimpulkan bahwa pemungutan suara tidak bergantung pada jenis kelamin.

```
>contingency(A)
```

```
0.0427225484717
```

Beberapa Tes Lainnya

Selanjutnya kita menggunakan analisis varians (uji F) untuk menguji tiga sampel data yang terdistribusi secara normal dengan nilai rata-rata yang sama. Metode ini disebut ANOVA (analisis varians). Dalam Euler, fungsi varanalysis() digunakan.

```
>x1=[109,111,98,119,91,118,109,99,115,109,94]; mean(x1),
```

```
106.545454545
```

```
>x2=[120,124,115,139,114,110,113,120,117]; mean(x2),
```

```
119.111111111
```

```
>x3=[120,112,115,110,105,134,105,130,121,111]; mean(x3)
```

```
116.3
```

```
>varanalysis(x1,x2,x3)
```

```
0.0138048221371
```

Ini berarti, kami menolak hipotesis nilai rata-rata yang sama. Kami melakukan ini dengan probabilitas kesalahan sebesar 1,3%.
Ada juga uji median, yang menolak sampel data dengan distribusi rata-rata yang berbeda dengan menguji median dari sampel gabungan.

```
>a=[56,66,68,49,61,53,45,58,54];
>b=[72,81,51,73,69,78,59,67,65,71,68,71];
>mediantest(a,b)
```

```
0.0241724220052
```

Uji lain tentang kesetaraan adalah uji peringkat. Uji ini jauh lebih tajam daripada uji median.

```
>ranktest(a,b)
```

```
0.00199969612469
```

Dalam contoh berikut ini, kedua distribusi memiliki rata-rata yang sama.

```
>ranktest(random(1,100),random(1,50)*3-1)
```

```
0.119780211001
```

Sekarang mari kita coba mensimulasikan dua perawatan a dan b yang diterapkan pada orang yang berbeda.

```
>a=[8.0,7.4,5.9,9.4,8.6,8.2,7.6,8.1,6.2,8.9];
>b=[6.8,7.1,6.8,8.3,7.9,7.2,7.4,6.8,6.8,8.1];
```

Uji signum memutuskan, apakah a lebih baik daripada b.

```
>signtest(a,b)
```

```
0.0546875
```

Ini adalah kesalahan yang terlalu besar. Kita tidak dapat menolak bahwa a sama baiknya dengan b.
Uji Wilcoxon lebih tajam daripada uji ini, tetapi bergantung pada nilai kuantitatif dari perbedaan.

```
>wilcoxon(a,b)
```

```
0.0296680599405
```

Mari kita coba dua pengujian lagi dengan menggunakan rangkaian yang dihasilkan.

```
>wilcoxon(normal(1,20),normal(1,20)-1)
```

```
0.0309763942686
```

```
>wilcoxon(normal(1,20),normal(1,20))
```

```
0.588619799108
```

Bilangan Acak

Berikut ini adalah tes untuk generator bilangan acak. Euler menggunakan generator yang sangat bagus, jadi kita tidak perlu mengharapkan adanya masalah.
Pertama, kita akan membangkitkan sepuluh juta bilangan acak dalam [0,1].

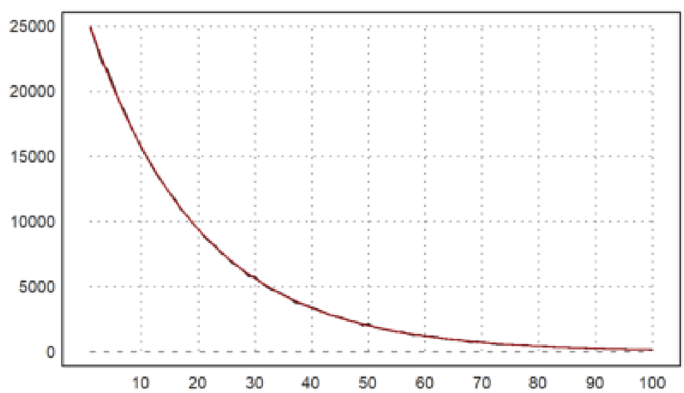
```
>n:=10000000; r:=random(1,n);
```

Selanjutnya, kami menghitung jarak antara dua angka yang kurang dari 0,05.

```
>a:=0.05; d:=differences(nonzeros(r<a));
```

Terakhir, kami memplot berapa kali, setiap jarak yang terjadi, dan membandingkannya dengan nilai yang diharapkan.

```
>m=getmultiplicities(1:100,d); plot2d(m); ...
>  plot2d("n*(1-a)^(x-1)*a^2",color=red,>add):
```



Hapus data.

```
>remvalue n;
```

Pengantar untuk Pengguna Proyek R

Jelas, EMT tidak bersaing dengan R sebagai sebuah paket statistik. Namun, ada banyak prosedur dan fungsi statistik yang tersedia di EMT juga. Jadi EMT dapat memenuhi kebutuhan dasar. Bagaimanapun, EMT hadir dengan paket numerik dan sistem aljabar komputer.
Buku ini diperuntukkan bagi Anda yang sudah terbiasa dengan R, tetapi perlu mengetahui perbedaan sintaks EMT dan R. Kami mencoba memberikan gambaran umum mengenai hal-hal yang jelas dan kurang jelas yang perlu Anda ketahui.
Selain itu, kami juga membahas cara-cara untuk bertukar data di antara kedua sistem tersebut.

Perhatikan bahwa ini adalah pekerjaan yang sedang berlangsung. **Sintaks Dasar**

Hal pertama yang Anda pelajari dalam R adalah membuat sebuah vektor. Dalam EMT, perbedaan utamanya adalah operator : dapat mengambil ukuran langkah. Selain itu, operator ini memiliki daya ikat yang rendah.

```
>n=10; 0:n/20:n-1
```

```
[0,  0.5,  1,  1.5,  2,  2.5,  3,  3.5,  4,  4.5,  5,  5.5,  6,  6.5,
7,  7.5,  8,  8.5,  9]
```

Fungsi c() tidak ada. Anda dapat menggunakan vektor untuk menggabungkan beberapa hal.
Contoh berikut ini, seperti banyak contoh lainnya, berasal dari "Interoduksi ke R" yang disertakan dengan proyek R. Jika Anda membaca PDF ini, Anda akan menemukan bahwa saya mengikuti alurnya dalam tutorial ini.

```
>x=[10.4, 5.6, 3.1, 6.4, 21.7]; [x,0,x]
```

```
[10.4,  5.6,  3.1,  6.4,  21.7,  0,  10.4,  5.6,  3.1,  6.4,  21.7]
```

Operator titik dua dengan ukuran langkah EMT digantikan oleh fungsi seq() dalam R. Kita dapat menulis fungsi ini dalam EMT.

```
>function seq(a,b,c) := a:b:c; ...
>seq(0,-0.1,-1)
```

```
[0,  -0.1,  -0.2,  -0.3,  -0.4,  -0.5,  -0.6,  -0.7,  -0.8,  -0.9,  -1]
```

Fungsi rep() dari R tidak ada dalam EMT. Untuk input vektor, dapat dituliskan sebagai berikut.

```
>function rep(x:vector,n:index) := flatten(dup(x,n)); ...
>rep(x,2)
```

```
[10.4,  5.6,  3.1,  6.4,  21.7,  10.4,  5.6,  3.1,  6.4,  21.7]
```

Perhatikan bahwa "=" atau ":=" digunakan untuk penugasan. Operator "->" digunakan untuk unit dalam EMT.

```
>125km -> " miles"
```

```
77.6713990297 miles
```

Operator "<-" untuk penugasan menyesatkan, dan bukan ide yang baik untuk R. Berikut ini akan membandingkan a dan -4 dalam EMT.

```
>a=2; a<-4
```

```
0
```

Dalam R, "a<-4<3" bisa digunakan, tetapi "a<-4<-3" tidak. Saya juga mengalami ambiguitas yang sama di EMT, tetapi saya mencoba untuk menghilangkannya.
EMT dan R memiliki vektor dengan tipe boolean. Tetapi dalam EMT, angka 0 dan 1 digunakan untuk merepresentasikan salah dan benar. Dalam R, nilai benar dan salah tetap dapat digunakan dalam aritmatika biasa seperti dalam EMT.

```
>x<5, %*x
```

```
[0,   0,   1,   0,   0]
[0,   0,   3.1,   0,   0]
```

EMT melempar kesalahan atau menghasilkan NAN tergantung pada flag "kesalahan".

```
>errors off; 0/0, isNAN(sqrt(-1)), errors on;
```

```
NAN
1
```

String sama saja dalam R dan EMT. Keduanya berada di lokal saat ini, bukan di Unicode.
Dalam R ada paket-paket untuk Unicode. Dalam EMT, sebuah string dapat berupa string Unicode. Sebuah string Unicode dapat diterjemahkan ke pengkodean lokal dan sebaliknya. Selain itu, u"..." dapat berisi entitas HTML.

```
>u"&#169; Ren&eacut; Grothmann"
```

```
© René Grothmann
```

Berikut ini mungkin atau mungkin tidak ditampilkan dengan benar pada sistem Anda sebagai A dengan titik dan tanda hubung di atasnya. Hal ini tergantung pada jenis huruf yang Anda gunakan.

```
>chartoutf([480])
```

Penggabungan string dilakukan dengan "+" atau "|". Ini dapat menyertakan angka, yang akan dicetak dalam format saat ini.

```
>"pi = "+pi
```

```
pi = 3.14159265359
```

Pengindeksan

Sebagian besar waktu, ini akan bekerja seperti pada R.
Tetapi EMT akan menginterpretasikan indeks negatif dari bagian belakang vektor, sementara R menginterpretasikan x[n] sebagai x tanpa elemen ke-n.

```
>x, x[1:3], x[-2]
```

```
[10.4,   5.6,   3.1,   6.4,   21.7]
[10.4,   5.6,   3.1]
6.4
```

Perilaku R dapat dicapai dalam EMT dengan drop().

```
>drop(x,2)
```

```
[10.4,  3.1,  6.4,  21.7]
```

Vektor logika tidak diperlakukan secara berbeda dengan indeks di EMT, berbeda dengan R. Anda harus mengekstrak elemen-elemen yang bukan nol terlebih dahulu di EMT.

```
>x, x>5, x[nonzeros(x>5)]
```

```
[10.4,  5.6,  3.1,  6.4,  21.7]
[1,  1,  0,  1,  1]
[10.4,  5.6,  6.4,  21.7]
```

Sama seperti di R, vektor indeks dapat berisi pengulangan.

```
>x[[1,2,2,1]]
```

```
[10.4,  5.6,  5.6,  10.4]
```

Namun pemberian nama untuk indeks tidak dimungkinkan dalam EMT. Untuk paket statistik, hal ini mungkin sering diperlukan untuk memudahkan akses ke elemen-elemen vektor.
Untuk meniru perilaku ini, kita dapat mendefinisikan sebuah fungsi sebagai berikut.

```
>function sel (v,i,s) := v[indexof(s,i)]; ...
>s=["first","second","third","fourth"]; sel(x,["first","third"],s)
```

```
Trying to overwrite protected function sel!
Error in:
function sel (v,i,s) := v[indexof(s,i)]; ... ...
             ^

Trying to overwrite protected function sel!
Error in:
function sel (v,i,s) := v[indexof(s,i)]; ... ...
             ^
[10.4,  3.1]
```

Tipe Data

EMT memiliki lebih banyak tipe data yang tetap dibandingkan R. Jelas, dalam R terdapat vektor yang berkembang. Anda bisa mengatur sebuah vektor numerik kosong v dan memberikan sebuah nilai pada elemen v[17]. Hal ini tidak mungkin dilakukan dalam EMT.
Hal berikut ini sedikit tidak efisien.

```
>v=[]; for i=1 to 10000; v=v|i; end;
```

EMT sekarang akan membuat vektor dengan v dan i yang ditambahkan pada tumpukan dan menyalin vektor tersebut kembali ke variabel global v.
Semakin efisien mendefinisikan vektor.

```
>v=zeros(10000); for i=1 to 10000; v[i]=i; end;
```

Untuk mengubah jenis tanggal di EMT, Anda dapat menggunakan fungsi seperti complex().

```
>complex(1:4)
```

```
[ 1+0i ,  2+0i ,  3+0i ,  4+0i  ]
```

Konversi ke string hanya dapat dilakukan untuk tipe data dasar. Format saat ini digunakan untuk penggabungan string sederhana. Tetapi ada fungsi-fungsi seperti print() atau frac().
Untuk vektor, Anda dapat dengan mudah menulis fungsi Anda sendiri.

```
>function tostr (v) ...
```

```
s="[";
loop 1 to length(v);
   s=s+print(v[#],2,0);
   if #<length(v) then s=s+","; endif;
end;
return s+"]";
endfunction
```

```
>tostr(linspace(0,1,10))
```

```
[0.00,0.10,0.20,0.30,0.40,0.50,0.60,0.70,0.80,0.90,1.00]
```

Untuk komunikasi dengan Maxima, ada sebuah fungsi convertmxm(), yang juga dapat digunakan untuk memformat vektor untuk output.

```
>convertmxm(1:10)
```

```
[1,2,3,4,5,6,7,8,9,10]
```

Untuk Latex, perintah tex dapat digunakan untuk mendapatkan perintah Latex.

```
>tex(&[1,2,3])
```

```
\left[ 1 , 2 , 3 \right]
```

Faktor dan Tabel

Pada pengantar R terdapat sebuah contoh dengan apa yang disebut faktor.
Berikut ini adalah daftar wilayah dari 30 negara bagian.

```
>austates = ["tas", "sa", "qld", "nsw", "nsw", "nt", "wa", "wa", ...
>"qld", "vic", "nsw", "vic", "qld", "qld", "sa", "tas", ...
>"sa", "nt", "wa", "vic", "qld", "nsw", "nsw", "wa", ...
>"sa", "act", "nsw", "vic", "vic", "act"];
```

Asumsikan, kita memiliki pendapatan yang sesuai di setiap negara bagian.

```
>incomes = [60, 49, 40, 61, 64, 60, 59, 54, 62, 69, 70, 42, 56, ...
>61, 61, 61, 58, 51, 48, 65, 49, 49, 41, 48, 52, 46, ...
>59, 46, 58, 43];
```

Sekarang, kita ingin menghitung rata-rata pendapatan di wilayah tersebut. Sebagai sebuah program statistik, R memiliki fungsi factor() dan tappy() untuk hal ini.
EMT dapat melakukan hal ini dengan mencari indeks dari wilayah-wilayah di dalam daftar unik dari wilayah-wilayah tersebut.

```
>auterr=sort(unique(austates)); f=indexofsorted(auterr,austates)
```

```
[6,  5,  4,  2,  2,  3,  8,  8,  4,  7,  2,  7,  4,  4,  5,  6,  5,  3,
8,  7,  4,  2,  2,  8,  5,  1,  2,  7,  7,  1]
```

Pada titik ini, kita dapat menulis fungsi perulangan kita sendiri untuk melakukan berbagai hal untuk satu faktor saja.
Atau kita dapat meniru fungsi tapply() dengan cara berikut.

```
>function map tappl (i; f$:call, cat, x) ...
```

```
u=sort(unique(cat));
f=indexof(u,cat);
return f$(x[nonzeros(f==indexof(u,i))]);
endfunction
```

Ini sedikit tidak efisien, karena menghitung wilayah unik untuk setiap i, tetapi berfungsi.

```
>tappl(auterr,"mean",austates,incomes)
```

```
[44.5,  57.3333333333,  55.5,  53.6,  55,  60.5,  56,  52.25]
```

Perhatikan bahwa ini bekerja untuk setiap vektor wilayah.

```
>tappl(["act","nsw"],"mean",austates,incomes)
```

```
[44.5,  57.3333333333]
```

Sekarang, paket statistik EMT mendefinisikan tabel seperti halnya di R. Fungsi readtable() dan writetable() dapat digunakan untuk input dan output.
Jadi kita dapat mencetak rata-rata pendapatan negara di wilayah dengan cara yang ramah.

```
>writetable(tappl(auterr,"mean",austates,incomes),labc=auterr,wc=7)
```

```
      act     nsw      nt     qld      sa     tas     vic      wa
     44.5   57.33    55.5    53.6      55    60.5      56   52.25
```

Kita juga dapat mencoba meniru perilaku R sepenuhnya.
Faktor-faktor tersebut harus disimpan dengan jelas dalam sebuah koleksi dengan jenis dan kategorinya (negara bagian dan wilayah dalam contoh kita). Untuk EMT, kita menambahkan indeks yang telah dihitung sebelumnya.

```
>function makef (t) ...
```

```
  ## Factor data
  ## Returns a collection with data t, unique data, indices.
  ## See: tapply
  u=sort(unique(t));
  return {{t,u,indexofsorted(u,t)}};
  endfunction
```

```
>statef=makef(austates);
```

Sekarang elemen ketiga dari koleksi ini akan berisi indeks.

```
>statef[3]
```

```
  [6,  5,  4,  2,  2,  3,  8,  8,  4,  7,  2,  7,  4,  4,  5,  6,  5,  3,
  8,  7,  4,  2,  2,  8,  5,  1,  2,  7,  7,  1]
```

Sekarang kita dapat meniru tapply() dengan cara berikut. Ini akan mengembalikan sebuah tabel sebagai kumpulan data tabel dan judul kolom.

```
>function tapply (t:vector,tf,f$:call) ...
```

```
  ## Makes a table of data and factors
  ## tf : output of makef()
  ## See: makef
  uf=tf[2]; f=tf[3]; x=zeros(length(uf));
  for i=1 to length(uf);
     ind=nonzeros(f==i);
     if length(ind)==0 then x[i]=NAN;
     else x[i]=f$(t[ind]);
     endif;
  end;
  return {{x,uf}};
  endfunction
```

Kami tidak menambahkan banyak pemeriksaan tipe di sini. Satu-satunya tindakan pencegahan adalah kategori (faktor) yang tidak memiliki data. Tetapi kita harus memeriksa panjang t yang benar dan kebenaran koleksi tf.

Tabel ini bisa dicetak sebagai sebuah tabel dengan writetable().

```
>writetable(tapply(incomes,statef,"mean"),wc=7)
```

```
    act    nsw     nt    qld     sa    tas    vic     wa
   44.5  57.33   55.5   53.6     55   60.5     56  52.25
```

Larik

EMT hanya memiliki dua dimensi untuk array. Tipe data ini disebut matriks. Akan lebih mudah untuk menulis fungsi untuk dimensi yang lebih tinggi atau sebuah pustaka C untuk ini.

R memiliki lebih dari dua dimensi. Dalam R, larik adalah sebuah vektor dengan sebuah bidang dimensi.

Dalam EMT, sebuah vektor adalah sebuah matriks dengan satu baris. Ini bisa dibuat menjadi sebuah matriks dengan redim().

```
>shortformat; X=redim(1:20,4,5)
```

```
          1           2           3           4           5
          6           7           8           9          10
         11          12          13          14          15
         16          17          18          19          20
```

Ekstraksi baris dan kolom, atau sub-matriks, sama seperti di R.

```
>X[,2:3]
```

```
          2           3
          7           8
         12          13
         17          18
```

Namun, dalam R dimungkinkan untuk mengatur daftar indeks tertentu dari vektor ke suatu nilai. Hal yang sama juga dapat dilakukan dalam EMT hanya dengan sebuah perulangan.

```
>function setmatrixvalue (M, i, j, v) ...
```

```
  loop 1 to max(length(i),length(j),length(v))
     M[i{#},j{#}] = v{#};
  end;
  endfunction
```

Kami mendemonstrasikan hal ini untuk menunjukkan bahwa matriks diteruskan dengan referensi dalam EMT. Jika Anda tidak ingin mengubah matriks asli M, Anda perlu menyalinnya dalam fungsi.

```
>setmatrixvalue(X,1:3,3:-1:1,0); X,
```

```
          1           2           0           4           5
          6           0           8           9          10
          0          12          13          14          15
         16          17          18          19          20
```

Hasil kali luar dalam EMT hanya dapat dilakukan di antara vektor. Hal ini otomatis karena bahasa matriks. Satu vektor harus berupa vektor kolom dan vektor baris.

```
>(1:5)*(1:5)'
```

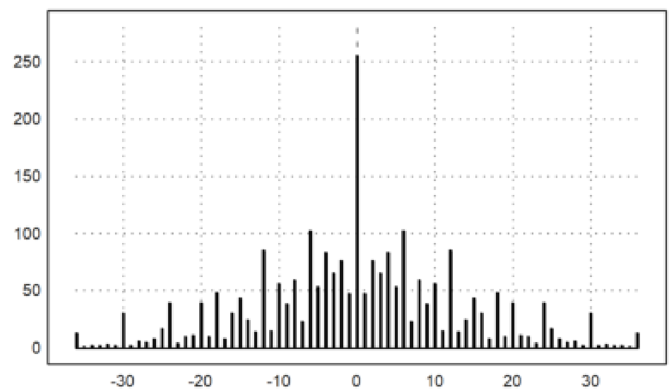
1	2	3	4	5
2	4	6	8	10
3	6	9	12	15
4	8	12	16	20
5	10	15	20	25

Dalam pengantar PDF untuk R ada sebuah contoh, yang menghitung distribusi ab-cd untuk a, b, c, d yang dipilih dari 0 sampai n secara acak. Solusinya dalam R adalah membentuk sebuah matriks 4 dimensi dan menjalankan table() di atasnya.

Tentu saja, ini bisa dicapai dengan sebuah perulangan. Tetapi perulangan tidak efektif dalam EMT atau R. Dalam EMT, kita bisa menulis perulangan dalam C dan itu adalah solusi tercepat.

Tetapi kita ingin meniru perilaku R. Untuk ini, kita perlu meratakan perkalian ab dan membuat sebuah matriks ab-cd.

```
>a=0:6; b=a'; p=flatten(a*b); q=flatten(p-p'); ...
>u=sort(unique(q)); f=getmultiplicities(u,q); ...
>statplot(u,f,"h"):
```



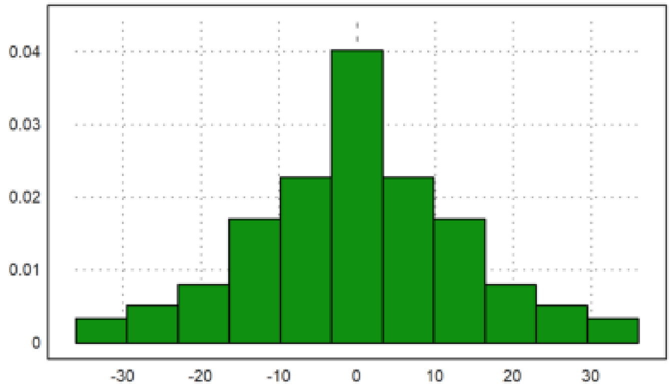
Selain kelipatan yang tepat, EMT dapat menghitung frekuensi dalam vektor.

```
>getfrequencies(q,-50:10:50)
```

```
[0,  23,  132,  316,  602,  801,  333,  141,  53,  0]
```

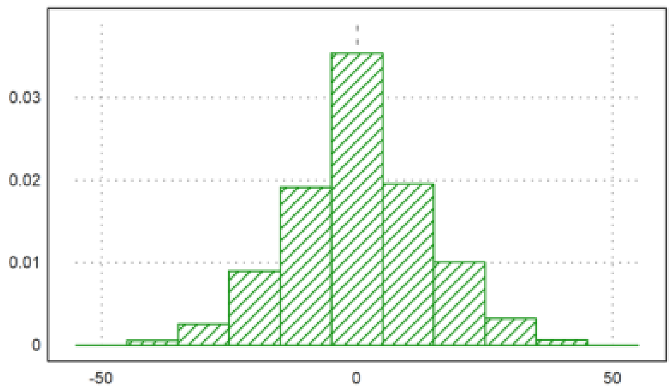
Cara yang paling mudah untuk memplot ini sebagai distribusi adalah sebagai berikut.

```
>plot2d(q,distribution=11):
```



Tetapi juga memungkinkan untuk menghitung jumlah dalam interval yang dipilih sebelumnya. Tentu saja, berikut ini menggunakan getfrequencies() secara internal.
Karena fungsi histo() mengembalikan frekuensi, kita perlu menskalakannya sehingga integral di bawah grafik batang adalah 1.

```
>{x,y}=histo(q,v=-55:10:55); y=y/sum(y)/differences(x); ...
>plot2d(x,y,>bar,style="/"):
```



Daftar

EMT memiliki dua jenis daftar. Yang pertama adalah daftar global yang dapat diubah, dan yang kedua adalah jenis daftar yang tidak dapat diubah. Kita tidak peduli dengan daftar global di sini.
Tipe daftar yang tidak dapat diubah disebut koleksi dalam EMT. Ia berperilaku seperti struktur dalam C, tetapi elemen-elemennya hanya diberi nomor dan tidak diberi nama.

```
>L={{"Fred","Flintstone",40,[1990,1992]}}
```

```
Fred
Flintstone
40
[1990,  1992]
```

Saat ini elemen-elemen tersebut tidak memiliki nama, meskipun nama dapat ditetapkan untuk tujuan khusus. Elemen-elemen tersebut diakses dengan angka.

```
>(L[4])[2]
```

```
1992
```

Input dan Output File (Membaca dan Menulis Data)

Anda mungkin sering ingin mengimpor matriks data dari sumber lain ke EMT. Tutorial ini akan menjelaskan kepada Anda tentang berbagai cara untuk melakukan hal tersebut. Fungsi yang sederhana adalah writematrix() dan readmatrix().
Mari kita tunjukkan bagaimana cara membaca dan menulis sebuah vektor real ke sebuah file.

```
>a=random(1,100); mean(a), dev(a),
```

```
0.49569
0.2916
```

Untuk menulis data ke sebuah berkas, kita menggunakan fungsi writematrix().
Karena pengenalan ini kemungkinan besar berada dalam sebuah direktori, dimana pengguna tidak memiliki akses tulis, kita menulis data ke direktori home pengguna. Untuk notebook sendiri, hal ini tidak diperlukan, karena file data akan ditulis ke dalam direktori yang sama.

```
>filename="test.dat";
```

Sekarang kita tuliskan vektor kolom a' ke dalam file. Hal ini akan menghasilkan satu angka pada setiap baris file.

```
>writematrix(a',filename);
```

Untuk membaca data, kita menggunakan readmatrix().

```
>a=readmatrix(filename)';
```

Dan hapus file tersebut.

```
>fileremove(filename);
>mean(a), dev(a),
```

```
0.49569
0.2916
```

Fungsi writematrix() atau writetable() dapat dikonfigurasi untuk bahasa lain.
Sebagai contoh, jika Anda memiliki sistem bahasa Indonesia (titik desimal dengan koma), Excel Anda membutuhkan nilai dengan koma desimal yang dipisahkan oleh titik koma dalam file csv (defaultnya adalah nilai yang dipisahkan dengan koma). File "test.csv" berikut ini akan muncul di folder cuurent Anda.

```
>filename="test.csv"; ...
>writematrix(random(5,3),file=filename,separator=",");
```

Anda sekarang dapat membuka file ini dengan Excel Indonesia secara langsung.

```
>fileremove(filename);
```

Terkadang kita memiliki string dengan token seperti berikut ini.

```
>s1:="f m m f m m m f f f m m f";  ...
>s2:="f f f m m f f";
```

Untuk menandai ini, kita mendefinisikan vektor token.

```
>tok:=["f","m"]
```

```
f
m
```

Kemudian kita dapat menghitung berapa kali setiap token muncul dalam string, dan memasukkan hasilnya ke dalam tabel.

```
>M:=getmultiplicities(tok,strtokens(s1))_ ...
>  getmultiplicities(tok,strtokens(s2));
```

Tulis tabel dengan tajuk token.

```
>writetable(M,labc=tok,labr=1:2,wc=8)
```

```
                f       m
       1        6       7
       2        5       2
```

Untuk statika, EMT dapat membaca dan menulis tabel.

```
>file="test.dat"; open(file,"w"); ...
>writeln("A,B,C"); writematrix(random(3,3)); ...
>close();
```

File terlihat seperti ini.

```
>printfile(file)
```

```
A,B,C
0.2325146620924334,0.5175800868283525,0.8399218481003107
0.336655122980329,0.6942166504489329,0.7277428530427359
0.06026396393889418,0.8443897421346642,0.7763524944847273
```

Fungsi readtable() dalam bentuknya yang paling sederhana dapat membaca ini dan mengembalikan sebuah koleksi nilai dan baris judul.

```
>L=readtable(file,>list);
```

Koleksi ini dapat dicetak dengan writetable() ke buku catatan, atau ke sebuah file.

```
>writetable(L,wc=10,dc=5)
```

```
         A         B         C
   0.23251   0.51758   0.83992
   0.33666   0.69422   0.72774
   0.06026   0.84439   0.77635
```

Matriks nilai adalah elemen pertama dari L. Perhatikan bahwa mean() dalam EMT menghitung nilai rata-rata dari baris-baris matriks.

```
>mean(L[1])
```

```
0.53001
 0.5862
0.56034
```

File CSV

Pertama, mari kita tulis sebuah matriks ke dalam sebuah file. Untuk keluarannya, kami membuat file di direktori kerja saat ini.

```
>file="test.csv"; ...
>M=random(3,3); writematrix(M,file);
```

Berikut ini adalah isi file ini.

```
>printfile(file)
```

```
0.3197946130216783,0.5787845944039014,0.2737923526542028
0.3671130231603081,0.5275695458256693,0.6525304249790899
0.7917330834536404,0.8603155045429328,0.527472095021572
```

CVS ini dapat dibuka di sistem bahasa Inggris ke Excel dengan klik dua kali. Jika Anda mendapatkan file seperti itu pada sistem Jerman, Anda perlu mengimpor data ke Excel dengan memperhatikan titik desimal.
Namun, titik desimal juga merupakan format default untuk EMT. Anda dapat membaca sebuah matriks dari sebuah file dengan readmatrix().

```
>readmatrix(file)
```

```
0.31979   0.57878   0.27379
0.36711   0.52757   0.65253
0.79173   0.86032   0.52747
```

Dimungkinkan untuk menulis beberapa matriks ke dalam satu file. Perintah open() dapat membuka file untuk menulis dengan parameter "w". Standarnya adalah "r" untuk membaca.

```
>open(file,"w"); writematrix(M); writematrix(M'); close();
```

Matriks-matriks tersebut dipisahkan oleh sebuah baris kosong. Untuk membaca matriks, buka file dan panggil readmatrix() beberapa kali.

```
>open(file); A=readmatrix(); B=readmatrix(); A==B, close();
```

```
          1           0           0
          0           1           0
          0           0           1
```

Di Excel atau spreadsheet serupa, Anda dapat mengekspor matriks sebagai CSV (nilai yang dipisahkan dengan koma). Pada Excel 2007, gunakan "save as" dan "format lain", lalu pilih "CSV". Pastikan, tabel saat ini hanya berisi data yang ingin Anda ekspor.
Berikut ini adalah contohnya.

```
>printfile("excel-data.csv")
```

```
0;1000;1000
1;1051,271096;1072,508181
2;1105,170918;1150,273799
3;1161,834243;1233,67806
4;1221,402758;1323,129812
5;1284,025417;1419,067549
6;1349,858808;1521,961556
7;1419,067549;1632,31622
8;1491,824698;1750,6725
9;1568,312185;1877,610579
10;1648,721271;2013,752707
```

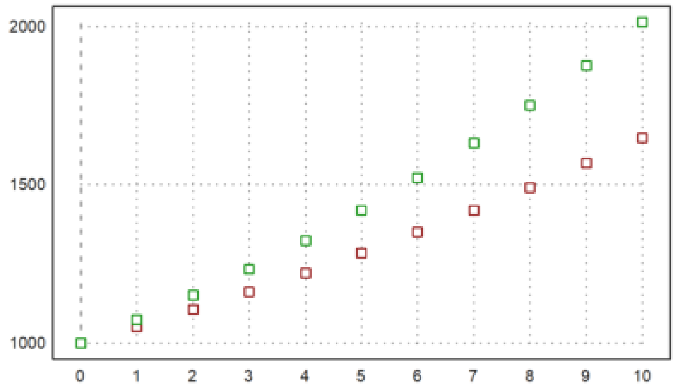
Seperti yang Anda lihat, sistem Jerman saya menggunakan titik koma sebagai pemisah dan koma desimal. Anda dapat mengubahnya di pengaturan sistem atau di Excel, tetapi tidak perlu untuk membaca matriks ke dalam EMT.
Cara termudah untuk membaca ini ke dalam Euler adalah readmatrix(). Semua koma digantikan oleh titik dengan parameter >comma. Untuk CSV bahasa Inggris, hilangkan saja parameter ini.

```
>M=readmatrix("excel-data.csv",>comma)
```

```
          0        1000        1000
          1      1051.3      1072.5
          2      1105.2      1150.3
          3      1161.8      1233.7
          4      1221.4      1323.1
          5        1284      1419.1
          6      1349.9        1522
          7      1419.1      1632.3
          8      1491.8      1750.7
          9      1568.3      1877.6
         10      1648.7      2013.8
```

Mari kita rencanakan ini.

```
>plot2d(M'[1],M'[2:3],>points,color=[red,green]'):
```



Ada beberapa cara yang lebih mendasar untuk membaca data dari file. Anda dapat membuka file dan membaca angka baris demi baris. Fungsi getvectorline() akan membaca angka dari sebuah baris data. Secara default, fungsi ini mengharapkan sebuah titik desimal. Tetapi fungsi ini juga dapat menggunakan koma desimal, jika Anda memanggil setdecimaldot(",") sebelum menggunakan fungsi ini.
Fungsi berikut ini adalah contohnya. Fungsi ini akan berhenti pada akhir file atau baris kosong.

```
>function myload (file) ...
```

```
open(file);
M=[];
repeat
   until eof();
   v=getvectorline(3);
   if length(v)>0 then M=M_v; else break; endif;
end;
return M;
close(file);
endfunction
```

```
>myload(file)
```

```
    0.31979    0.57878    0.27379
    0.36711    0.52757    0.65253
    0.79173    0.86032    0.52747
```

Anda juga dapat membaca semua angka dalam file tersebut dengan getvector().

```
>open(file); v=getvector(10000); close(); redim(v[1:9],3,3)
```

```
    0.31979    0.57878    0.27379
    0.36711    0.52757    0.65253
    0.79173    0.86032    0.52747
```

Dengan demikian, sangat mudah untuk menyimpan vektor nilai, satu nilai di setiap baris dan membaca kembali vektor ini.

```
>v=random(1000); mean(v)
```

```
0.49624
```

```
>writematrix(v',file); mean(readmatrix(file)')
```

```
0.49624
```

Menggunakan Tabel

Tabel dapat digunakan untuk membaca atau menulis data numerik. Sebagai contoh, kita menulis tabel dengan judul baris dan kolom ke file.

```
>file="test.tab"; M=random(3,3);  ...
>open(file,"w");  ...
>writetable(M,separator=",",labc=["one","two","three"]);  ...
>close(); ...
>printfile(file)
```

```
one,two,three
      0.59,      0.87,      0.14
      0.21,      0.22,      0.31
      0.79,      0.75,      0.79
```

File ini dapat diimpor ke Excel.
Untuk membaca file di EMT, kita menggunakan readtable().

```
>{M,headings}=readtable(file,>clabs); ...
>writetable(M,labc=headings)
```

```
         one       two     three
        0.59      0.87      0.14
        0.21      0.22      0.31
        0.79      0.75      0.79
```

Menganalisis Garis

Anda bahkan dapat mengevaluasi setiap baris dengan tangan. Misalkan, kita memiliki baris dengan format berikut.

```
>line="2020-11-03,Tue,1'114.05"
```

```
2020-11-03,Tue,1'114.05
```

Pertama, kita dapat memberi tanda pada garis tersebut.

```
>vt=strtokens(line)
```

```
2020-11-03
Tue
1'114.05
```

Kemudian, kita dapat mengevaluasi setiap elemen garis dengan menggunakan evaluasi yang sesuai.

```
>day(vt[1]),  ...
>indexof(["mon","tue","wed","thu","fri","sat","sun"],tolower(vt[2])),  ...
>strrepl(vt[3],"'","")()
```

```
7.3816e+05
2
1114
```

Dengan menggunakan ekspresi reguler, Anda dapat mengekstrak hampir semua informasi dari sebuah baris data.

Anggaplah kita memiliki baris dokumen HTML berikut ini.

```
>line="<tr><td>1145.45</td><td>5.6</td><td>-4.5</td><tr>"
```

```
<tr><td>1145.45</td><td>5.6</td><td>-4.5</td><tr>
```

Untuk mengekstrak ini, kita menggunakan ekspresi reguler, yang mencari

```
- tanda kurung tutup >,
- setiap string yang tidak mengandung tanda kurung dengan
```

sub-pencocokan "(...)",

```
- kurung pembuka dan kurung penutup menggunakan solusi terpendek,
- sekali lagi, semua string yang tidak mengandung tanda kurung,
- dan sebuah kurung pembuka <.
```

Ekspresi reguler agak sulit untuk dipelajari tetapi sangat kuat.

```
>{pos,s,vt}=strxfind(line,">([^<>]+)<.+?>([^<>]+)<");
```

Hasilnya adalah posisi kecocokan, string yang cocok, dan vektor string untuk sub-cocokan.

```
>for k=1:length(vt); vt[k](), end;
```

```
1145.5
5.6
```

Berikut ini adalah fungsi yang membaca semua item numerik antara <td> dan </td>.

```
>function readtd (line) ...
```

```
  v=[]; cp=0;
  repeat
     {pos,s,vt}=strxfind(line,"<td.*?>(.+?)</td>",cp);
     until pos==0;
     if length(vt)>0 then v=v|vt[1]; endif;
     cp=pos+strlen(s);
  end;
  return v;
  endfunction
```

```
>readtd(line+"<td>non-numerical</td>")
```

```
  1145.45
  5.6
  -4.5
  non-numerical
```

Membaca dari Web

Situs web atau file dengan URL dapat dibuka di EMT dan dapat dibaca baris demi baris.
Dalam contoh, kita membaca versi saat ini dari situs EMT. Kami menggunakan ekspresi reguler untuk memindai "Versi ..." dalam judul.

```
>function readversion () ...
```

```
  urlopen("http://www.euler-math-toolbox.de/Programs/Changes.html");
  repeat
    until urleof();
    s=urlgetline();
    k=strfind(s,"Version ",1);
    if k>0 then substring(s,k,strfind(s,"<",k)-1), break; endif;
  end;
  urlclose();
  endfunction
```

```
>readversion
```

```
  Version 2022-05-18
```

Masukan dan Keluaran Variabel

Anda dapat menulis variabel dalam bentuk definisi Euler ke file atau ke baris perintah.

```
>writevar(pi,"mypi");
```

```
  mypi = 3.141592653589793;
```

Untuk pengujian, kami membuat file Euler di direktori kerja EMT.

```
>file="test.e"; ...
>writevar(random(2,2),"M",file); ...
>printfile(file,3)
```

```
M = [ ..
0.5455905000563676, 0.0001549655632917177;
0.009845834149464919, 0.265649291025563];
```

Sekarang kita dapat memuat file tersebut. Ini akan mendefinisikan matriks M.

```
>load(file); show M,
```

```
M =
  0.54559 0.00015497
0.0098458   0.26565
```

Sebagai catatan, jika writevar() digunakan pada sebuah variabel, maka ia akan mencetak definisi variabel dengan nama variabel tersebut.

```
>writevar(M); writevar(inch$)
```

```
M = [ ..
0.5455905000563676, 0.0001549655632917177;
0.009845834149464919, 0.265649291025563];
inch$ = 0.0254;
```

Kita juga dapat membuka file baru atau menambahkan ke file yang sudah ada. Dalam contoh ini, kami menambahkan ke file yang telah dibuat sebelumnya.

```
>open(file,"a"); ...
>writevar(random(2,2),"M1"); ...
>writevar(random(3,1),"M2"); ...
>close();
>load(file); show M1; show M2;
```

```
M1 =
   0.2939   0.34742
  0.67823   0.87836
M2 =
  0.49666
  0.56157
  0.10198
```

Untuk menghapus file, gunakan fileremove().

```
>fileremove(file);
```

Sebuah vektor baris dalam sebuah file tidak membutuhkan koma, jika setiap angka berada dalam baris baru. Mari kita buat file seperti itu, menulis setiap baris satu per satu dengan writeln().

```
>open(file,"w"); writeln("M = ["); ...
>for i=1 to 5; writeln(""+random()); end; ...
>writeln("];"); close(); ...
>printfile(file)
```

```
M = [
0.900666916536
0.673346959629
0.916700922381
0.472855378963
0.346512533936
];
```

```
>load(file); M
```

```
[0.90067,  0.67335,  0.9167,  0.47286,  0.34651]
```

Contoh Soal

image: data1
Seorang siswa dinyatakan lulus jika nilainya lebih tinggi sama dengan nilai rata-rata kelas ditambah 1. Dari data di atas, banyak siswa yang lulus adalah...
JAWAB:
Akan dicari rata-rata terlebih dahulu
Misalkan N adalah data nilai para siswa, maka dapat dituliskan:

```
> N=[3,3,3,4,4,4,4,4,5,5,5,5,5,5,5,5,5,5,5,5,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6, ...
>7,7,7,7,7,7,7,7,7,7,7,7,7,8,8,8,8,8,8,9,9,9]; ...
>mean(N),
```

```
6.0508
```

Bulatkan menjadi 6, sehingga:
Batas kelulusan = rata-rata + 1
Akan diperoleh

```
>6+1
```

```
7
```

Jadi banyak siswa yang lulus yaitu:

```
>13+6+3
```

```
22
```