Юрий Петров
Леонид Петров

Неожиданное в математике

и его связь с авариями и катастрофами

4-е издание

Санкт-Петербург
«БХВ-Петербург»
2005

УДК 681.3.06
ББК 32.973
П30

Петров Ю. П., Петров Л. Ю.

П30 Неожиданное в математике и его связь с авариями и катастрофами. — 4-е изд., перераб. и доп. — СПб.: БХВ-Петербург, 2005. — 240 с.: ил.

ISBN 5-94157-543-2

Книга посвящена открытым авторами важным явлениям, неожиданно обнаруженным в традиционных разделах математики — преобразовании и решении уравнений. Эти явления в ряде случаев изменяют корректность задач и могут привести к серьезным ошибкам при проверке устойчивости математических моделей технических устройств и стать причиной опасных аварий. Излагаются основы уточненных преобразований, позволяющие уменьшить аварийность и уточнить связь между математической моделью и физической реальностью. Описаны дополнительные проверки, позволяющие исправить ошибки, обнаружившиеся в популярных пакетах прикладных программ: MATLAB, Mathcad и многих других.

Для инженеров-проектировщиков, научных работников, преподавателей и студентов технических, математических и физических специальностей вузов

УДК 681.3.06
ББК 32.973

Группа подготовки издания:

Главный редактор	*Екатерина Кондукова*
Зам. главного редактора	*Людмила Еремеевская*
Зав. редакцией	*Григорий Добин*
Компьютерная верстка	*Натальи Смирновой*
Корректор	*Наталия Першакова*
Дизайн обложки	*Игоря Цырульникова*
Зав. производством	*Николай Тверских*

Рецензент:
доктор физико-математических наук, профессор Блехман И. И.

Лицензия ИД № 02429 от 24.07.00. Подписано в печать 26.10.04.
Формат $70\times100^{1}/_{16}$. Печать офсетная. Усл. печ. л. 19,35.
Тираж 1500 экз. Заказ №
"БХВ-Петербург", 190005, Санкт-Петербург, Измайловский пр., 29.

Гигиеническое заключение на продукцию, товар № 77.99.02.953.Д.001537.03.02
от 13.03.2002 г. выдано Департаментом ГСЭН Минздрава России.

Отпечатано с готовых диапозитивов
в ГУП "Типография "Наука"
199034, Санкт-Петербург, 9 линия, 12

ISBN 5-94157-543-2

Содержание

Предисловие

В книге представлены недавно полученные авторами неожиданные результаты, относящиеся к самому, казалось бы, традиционному разделу математики — преобразованию уравнений, изучаемому еще в средней школе.

Неожиданно оказалось, что привычные, повсеместно используемые эквивалентные (равносильные) преобразования могут в ряде случаев изменять корректность решаемых задач, а это означает, что применение привычных, традиционных преобразований может стать источником ошибок и причиной опасных аварий.

Есть основания полагать, что некоторые из знаменитых аварий последних лет имели под собой именно эту причину.

В книге излагаются основы уточненных преобразований, позволяющие уменьшить вероятность аварий и уточнить наши представления о связи между математической моделью и физической реальностью.

Неожиданно обнаружилось, что использование популярных пакетов прикладных программ — MATLAB, Mathcad, Scilab и многих других — может приводить к ошибочным результатам расчета и становиться причиной аварий и катастроф. Во избежание ошибок необходимо использовать дополнительные программы, основы которых изложены в книге.

Книга рассчитана на широкий круг читателей — инженеров, пользователей компьютеров, преподавателей математики и физики, студентов технических, математических и физических специальностей вузов.

Первое издание книги вышло в 1999 году, в четвертом издании книга дополнена новыми главами (главы 18—22).

Вопросы и пожелания читателей принимаются на E-mail:
petrov1930@mail.ru.

Работа выполнялась при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант 05-01-00317.

Введение

Мы привыкли к тому, что в математике не бывает неожиданностей, — во всяком случае, в ее элементарных разделах, которые изучаются в средней школе. Прочитав эту небольшую книгу, читатели убедятся, что это не так, что неожиданные интересные результаты могут возникать в самых, казалось бы, привычных и традиционных разделах ее — например, в разделе о преобразованиях уравнений.

Со средней школы мы знаем, что можно переносить члены из левой части уравнения в правую с изменением знака, что можно умножать и делить все члены на число, отличное от нуля, и т. п. Все привыкли к этим преобразованиям, все широко ими пользуются, но до последних лет никто не догадывался, что и в этих привычных со школы эквивалентных (равносильных) преобразованиях могут открыться неожиданные сюрпризы.

Дальнейшее изложение рассчитано на пользователей компьютеров, инженеров, студентов, учителей — на всех тех, кто знаком с простейшими дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами. Как раз при преобразованиях дифференциальных уравнений и встретились те интересные новые неожиданные явления, о которых авторы хотят рассказать читателю.

В дальнейшем подобные явления были обнаружены и в других разделах математики — в т. ч. и при решении простых алгебраических уравнений.

Следует сразу отметить, что речь пойдет не просто о математических курьезах. Рассказанное в книге имеет серьезные практические приложения, связанные с авариями и катастрофами, с предотвращением их.

Авторам хотелось бы, чтобы читатель отнесся к рассказанному в книге очень серьезно. Жертвой аварии, жертвой катастрофы может стать каждый. И если есть возможность уменьшить вероятность аварий, то этой возможностью надо воспользоваться. В книге рассказано, как это можно сделать.

Глава 1

Дифференциальные уравнения и их преобразования

Мы в дальнейшем будем вести речь только о самых простых дифференциальных уравнениях — об уравнениях с постоянными коэффициентами. Они широко встречаются в приложениях. Так, например, уравнение

$$\frac{dx}{dt} = kx \tag{1}$$

описывает изменение численности населения в стране, где рождаемость и смертность каждый год постоянны, не зависят от времени. Коэффициент k в уравнении (1) пропорционален разности между рождаемостью и смертностью. Решением уравнения (1) является функция

$$x = c_1 e^{kt}. \tag{2}$$

В этом легко убедиться, подставив функцию (2) в уравнение (1). Поскольку для функции (2) будет $\dot{x} = c_1 k e^{kt}$, то после подстановки уравнение (2) превратится в тождество, что и является свидетельством того, что функция (2) действительно будет решением.

> ***Напомним***
>
> Решением дифференциального уравнения называется функция, подстановка которой в уравнение обращает его в тождество.

В общее решение дифференциального уравнения входят произвольные постоянные c_1; c_2 ... c_n. Количество произвольных постоянных равно порядку уравнения — т. е. порядку входящих в него производных. Уравнение (1) является уравнением первого порядка, и в его решение входит одна произвольная постоянная. Для того чтобы решение стало полностью определенным, необходимо, чтобы помимо самого дифференциального уравнения были заданы начальные условия — значения функции $x(t)$ и ее производных при $t = 0$. Число необходимых начальных условий равно порядку уравнения. Для уравнения первого порядка (1) достаточно одного начального условия.

Пусть, например, мы приняли за начальный момент времени 1996 год и предположим, что в этом году население интересующей нас страны равно десяти миллионам, т. е. 10^7. Тогда из формулы (2) мы находим, что $c_1=10^7$, и население страны будет с течением времени расти по экспоненте: $x = 10^7 e^{kt}$.

Примером уравнения второго порядка может служить уравнение колебаний маятника

$$\ddot{x} + a\dot{x} + bx = 0, \tag{3}$$

где x — отклонение маятника от положения равновесия, a и b — параметры, зависящие от момента инерции маятника и от трения в точке подвеса.

Воспользовавшись обозначением Коши для оператора дифференцирования: $\frac{d}{dt} = D$, уравнение (3) можно записать в виде:

$$(D^2 + aD + b)x = 0. \tag{4}$$

В дальнейшем мы будем широко пользоваться этим обозначением для оператора дифференцирования: $D = \frac{d}{dt}$.

Общее решение уравнения (4) имеет вид

$$x = e^{-\frac{a}{2}t}\left(c_1 \sin\sqrt{b - \frac{a^2}{4}}t + c_2 \cos\sqrt{b - \frac{a^2}{4}}t\right). \tag{5}$$

В него входят две произвольные постоянные c_1 и c_2, определяемые из начальных условий: $x(0) = x_0$; $\dot{x}(0) = x_1$. Начальными условиями являются значения самой функции $x(t)$ и ее производной $\dot{x}$ при $t = 0$. Решение (5) показывает, что при $a > 0$ и $b > \frac{a^2}{4}$ законом движения маятника являются постепенно затухающие колебания с частотой $\sqrt{b-\frac{a^2}{4}}$, зависящей от параметров a и b.

Дифференциальное однородное уравнение с постоянными коэффициентами произвольного n-го порядка может быть записано в виде:

$$(a_n D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \ldots a_0)x = 0\,. \qquad (6)$$

Его решения зависят от корней так называемого характеристического полинома:

$$P(\lambda) = a_n \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_0. \qquad (7)$$

Мы убеждаемся, что для получения характеристического полинома достаточно вместо оператора дифференцирования подставить, например, букву λ, и мы получим полином n-ой степени, имеющий n корней: λ_1; λ_2; ... λ_n.

Если все эти корни вещественны и различны, то общее решение уравнения (7) запишется в виде:

$$x = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} + \ldots c_n e^{\lambda_n t}\,. \qquad (8)$$

Если среди корней полинома (7) имеются комплексные, то они могут входить только сопряженными парами:

$$\lambda_{i,i+1} = \alpha \pm j\beta, \quad j = \sqrt{-1}. \qquad (9)$$

Каждой паре комплексных сопряженных корней будет в общем решении соответствовать член вида:

$$e^{\alpha_i t}(c_i \sin\beta_i t + c_{i+1}\cos\beta_i t). \qquad (10)$$

Мы убеждаемся, что если все корни характеристического полинома имеют отрицательные вещественные части, то любое решение при любых начальных условиях будет с течением времени стремиться к нулю. Если среди корней характеристического полинома есть кратные корни, то в решении могут появиться члены вида:

$$c_i t^m e^{\lambda_i t},$$

но общий вывод останется без изменения — если все корни характеристического полинома имеют отрицательные вещественные части, то любое решение уравнения (6) обязательно стремится к нулю с течением времени.

Обратимся теперь к преобразованиям уравнений. Простейшими преобразованиями являются, например, переносы членов из левой части в правую и наоборот с соответствующим изменением знака, деление всех членов уравнения на одно и то же число, не равное нулю. Понятно, что при таких преобразованиях решения уравнений не изменяются. Вообще, при преобразованиях можно пользоваться только равносильными (или — что то же самое — эквивалентными) преобразованиями, а *эквивалентными* называются преобразования, не изменяющие решений. Все решения преобразованного уравнения должны совпадать со всеми решениями уравнения исходного (см. Математическая энциклопедия, том 4, стр. 800, издательство "Советская энциклопедия", 1984).

Помимо простейших эквивалентных преобразований (переноса членов, умножения или деления на число, не равное нулю) при исследовании дифференциальных уравнений широко применяют такое преобразование, как почленное дифференцирование. Оно тоже является эквивалентным преобразованием.

Рассмотрим, например, уравнение

$$\dot{x} + x = 0 \tag{11}$$

с начальным условием $x(0) = 0$. Общее решение уравнения (11) имеет вид

$$x = c_1 e^{-t} . \tag{12}$$

Начальному условию $x(0) = 0$ удовлетворяет единственное решение $x = 0$, из которого, в частности, следует, что $\dot{x}(0) = 0$. Если мы продифференцируем все члены уравнения (11), то придем к уравнению

$$\ddot{x} + \dot{x} = 0 . \tag{13}$$

Порядок уравнения повысился, и мы должны добавить еще одно начальное условие, условие для первой производной, для $\dot{x}(0)$. Конечно, это условие нужно выбирать не произвольно, а выбрать то условие для $\dot{x}(0)$, которое в исходном уравнении (11) выполнялось автоматически. Мы убедились, что в исходном уравнении было $\dot{x}(0) = 0$. Это равенство и следует считать вторым начальным условием для уравнения (13).

Характеристическим полиномом уравнения (13) будет полином

$$P_2(\lambda) = \lambda^2 + \lambda \tag{14}$$

с корнями $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -1$, и поэтому общее решение уравнения (13) имеет вид

$$x = c_1 + c_2 e^{-t} . \tag{15}$$

Начальным условиям $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 0$ удовлетворяет единственное решение $x = 0$ — т. е. то же, что и у уравнения (11). Мы убедились, что при правильном назначении дополнительных начальных условий почленное дифференцирование является эквивалентным преобразованием.

Точно так же эквивалентным преобразованием будет умножение правой и левой частей дифференциального уравнения на любой полином $B(D) = b_m D^m + ... b_0$ от оператора дифференцирования. Так, умножив уравнение (11) на операторный полином $D + 2$, получим уравнение $(D^2 + 3D + 2)x = 0$, характеристический полином которого имеет корни $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -2$. Общее решение уравнения имеет вид

$$x = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-2t}.$$

Начальным условиям $x(0) = 0$ и $\dot{x}(0) = 0$ удовлетворяет только решение $x = 0$ — то же, что и у уравнения (11), что еще раз подтверждает, что умножение на полином от оператора дифференцирования при правильном назначении дополнительных начальных условий является преобразованием эквивалентным.

Широко используются эквивалентные преобразования, сводящие одно уравнение к системе уравнений более низких порядков или сводящие систему уравнений к одному уравнению. Так, если в уравнении (3) обозначить $x = x_1$, а $\dot{x} = x_2$, то уравнение (3) перейдет в систему двух уравнений первого порядка:

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -bx_1 - ax_2 \end{aligned}\right\} . \tag{16}$$

Если продифференцировать первое из уравнений (16), то получим $\ddot{x}_1 = \dot{x}_2$. Подставив теперь во второе из уравнений (16) вместо x_2 и $\ddot{x}_1$

равные им величины $(x_2 = \dot{x}_1;\ \ddot{x}_1 = \dot{x}_2)$, мы вернемся относительно $x_1 = x$ к уравнению (3).

В общем случае почти любую систему нескольких дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами различных порядков можно свести к так называемой нормальной форме Коши, к форме n уравнений первого порядка, разрешенных относительно производных

$$\left.\begin{array}{l} \dot{x}_1 = a_{11}x_1 + \ldots a_{1n}x_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dot{x}_n = a_{n1}x_1 + \ldots a_{nn}x_n \end{array}\right\}. \tag{17}$$

Систему (17) часто записывают в векторно-матричной форме

$$\dot{x} = Ax, \tag{18}$$

где x — n-мерный вектор переменных $x_1;\ x_2;\ \ldots;\ x_n$, A — матрица коэффициентов a_{ji}.

Запись в форме Коши очень удобна, потому что для вычисления характеристического полинома в этом случае могут быть использованы общие формулы линейной алгебры, для вычислений по которым давно разработано хорошее программное обеспечение. Действительно, из линейной алгебры известно, что характеристический полином уравнений (17) и (18) равен определителю (детерминанту) матрицы $\lambda E - A$, где E — единичная матрица. Определитель матрицы вычисляется на ЭВМ по стандартным программам. Поэтому преобразование к нормальной форме Коши (17) или (18) является широко используемым преобразованием.

Глава 2

Устойчивость решений

Для многих практических приложений важно не только уметь вычислить решение уравнения, но и оценить его устойчивость. Вернемся к простому уравнению (1), имеющему общее решение (2). Начальному условию $x(0) = 0$ удовлетворяет решение $x = 0$. Однако начальные условия в практических задачах очень редко могут быть известны точно. Как правило, неизбежны небольшие погрешности. Если эти погрешности нарастают с течением времени, то решение не устойчиво. Так, если мы приняли, что $x(0) = 0$, а на самом деле $x(0) = 10^{-4}$, то уже при $kt = 10$ истинное значение $x(t)$ будет равно не нулю, а $x = 2{,}2$. Погрешность будет экспоненциально возрастать и быстро станет недопустимой. Поэтому исследование устойчивости очень важно.

Для линейных систем с постоянными коэффициентами существуют простые методы проверки устойчивости без нахождения самих решений. Действительно, характер решений линейного однородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами или системы таких уравнений целиком определяется характеристическим полиномом. Если у всех корней характеристического полинома вещественные части отрицательны, то любое решение $x(t)$ будет стремиться к нулю при $t \to \infty$, а, значит, и разность между решениями, отвечающими разным начальным условиям, тоже будет стремиться к нулю, и все решения будут устойчивыми (точнее — асимптотически устойчивыми).

В 1895 году немецкий математик А. Гурвиц (1859—1919) нашел условия, которым должны удовлетворять коэффициенты полинома (7) для того, чтобы все его корни имели отрицательные вещественные части. Полиномы, у которых все корни имеют отрицательные вещественные части, называют *гурвицевыми полиномами*.

Так, например, полиномы второй степени

$$a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 \tag{19}$$

будут гурвицевыми, если все их коэффициенты положительны (для определенности старший коэффициент полинома всегда приводят к положительному значению). Для полиномов третьей степени

$$a_3\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 \tag{20}$$

положительности коэффициентов уже недостаточно для того, чтобы полином (20) был гурвицевым; необходимо и достаточно, чтобы дополнительно выполнялось еще и неравенство

$$a_2 a_1 > a_3 a_0 . \tag{21}$$

Для полиномов выше третьей степени необходимые и достаточные условия гурвицевости сложнее. Их можно найти в учебниках по теории автоматического управления. Удобно пользоваться очень простым необходимым (но недостаточным!) условием:

> полином любой степени может быть гурвицевым только тогда, когда все его коэффициенты положительны, среди них нет ни одного отрицательного, или равного нулю.

Отметим теперь, что для линейных систем с постоянными коэффициентами устойчивость решений не зависит от начальных условий: либо все решения при любых начальных условиях устойчивы, либо нет. Поэтому для линейных систем часто говорят не об устойчивости решения, а об *устойчивости системы.*

> Устойчивая система — это та, у которой решения, удовлетворяющие любым начальным условиям, устойчивы.

У нелинейных систем все сложнее. Там решение, удовлетворяющее одному начальному условию, может быть устойчивым, удовлетворяющее другому начальному условию, — неустойчивым. Поэтому для нелинейных систем говорят только об устойчивости решений.

Первая неожиданность

При изучении устойчивости систем управления еще в 30-е годы прошлого века столкнулись с первой неожиданностью — хотя умножение правой и левой частей уравнения на полином от оператора дифференцирования $D = \frac{d}{dt}$ является эквивалентным преобразованием, такое преобразование может изменить устойчивость. Для примера вернемся к уравнению (11) с начальным условием $x(0) = 0$. Оно имеет решение $x = 0$, и это решение устойчиво, поскольку характеристический полином уравнения (11) имеет вид $\lambda + 1$ и является гурвицевым. Умножим теперь уравнение (11) на операторный полином $D - 1$. Получим уравнение второго порядка

$$(D^2 - 1)x = 0, \tag{22}$$

характеристический полином которого имеет корни $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = +1$ и общее решение имеет вид:

$$x = c_1 e^{-t} + c_2 e^{t}. \tag{23}$$

Начальным условиям $x(0) = 0, \dot{x}(0) = 0$ удовлетворяет единственное решение $x = 0$, получающееся из формулы (23) при $c_1 = c_2 = 0$. Это решение совпадает с решением уравнения (11), что и должно было быть, поскольку умножение на операторный полином является эквивалентным преобразованием. Однако решение $x = 0$ уравнения (22) неустойчиво. Действительно, если начальные условия отклонились от нулевых даже на малые числа δ_1 и δ_2 и вместо $x(0) = 0$ и $\dot{x}(0) = 0$ имеем $x(0) = \delta_1$; $\dot{x}(0) = \delta_2$, то на основе формулы (23) найдем, что $c_1 = 0{,}5(\delta_1 - \delta_2)$; $c_2 = 0{,}5(\delta_1 + \delta_2)$ и, следовательно,

$$x = 0{,}5(\delta_1 - \delta_2)e^{-t} + 0{,}5(\delta_1 + \delta_2)e^{t}. \tag{24}$$

Мы убеждаемся, что даже при малых δ_1 и δ_2 различие между решением (24) и решением $x = 0$ будет неограниченно возрастать с течением времени.

Уже этот простой пример показывает, что даже после эквивалентных преобразований исследование преобразованной системы может не дать правильного ответа на вопрос об устойчивости. Однако в данном случае трудности были преодолены введением простого запрета:

> при исследовании устойчивости умножение на негурвицев операторный полином недопустимо (умножение на гурвицев полином от оператора дифференцирования допустимо и не влияет на суждение об устойчивости).

С гораздо более интересными и серьезными неожиданностями пришлось столкнуться при исследовании сохранения устойчивости при неизбежных на практике вариациях (малых изменениях) параметров и коэффициентов дифференциальных уравнений. Действительно, хотя мы и говорили все время о дифференциальных уравнениях с постоянными коэффициентами, нужно учитывать, что в действительности идеально постоянных коэффициентов почти никогда нет. Коэффициенты дифференциальных уравнений зависят от параметров исследуемой системы, а в любой реальной системе параметры не могут оставаться идеально неизменными. Малые отклонения параметров, вариации их совершенно неизбежны.

Так, например, уравнение (3), решением которого служит функция (5), описывает колебания физического маятника. Коэффициент a зависит от момента инерции маятника, а следовательно, и от температуры окружающей среды: при изменении температуры вследствие теплового расширения изменяются линейные размеры маятника, а значит, и момент инерции. Коэффициент b в уравнении (3) зависит от величины трения в точке подвеса, но коэффициент трения зависит от температуры, от износа материала в точке подвеса. Следовательно, и коэффициент b тоже будет испытывать вариации, малые изменения.

Поэтому на практике обычно совершенно недостаточно, чтобы исследуемая система была просто устойчивой. Необходимо, чтобы она сохраняла устойчивость при неизбежных на практике вариациях параметров. Сохранение устойчивости при вариациях параметров называют *параметрической устойчивостью*.

При исследовании сохранения устойчивости при вариациях параметров как раз и столкнулись недавно с очень интересными математическими неожиданностями.

Глава 3

Математическая неожиданность

Рассмотрим систему двух дифференциальных уравнений

$$(D^3 + 4D^2 + 5D + 2)x_1 = (D^2 + 2D + 1)x_2; \qquad (25)$$

$$(D + 1)x_2 = (D^2 + 4D + 5)x_1. \qquad (26)$$

Систему **(25)—(26)** можно, исключив, например, переменную x_2 путем эквивалентных преобразований, свести к одному уравнению относительно x_1:

$$(D^3 + 5D^2 + 7D + 3)x_1 = 0. \qquad (27)$$

Характеристический полином системы **(25)—(26)**

$$P(\lambda) = \lambda^3 + 5\lambda^2 + 7\lambda + 3, \qquad (28)$$

имеющий корни $\lambda_1 = -3$, $\lambda_2 = \lambda_3 = -1$, является гурвицевым полиномом, и система **(25)—(26)** является устойчивой. Общее решение системы **(25)—(26)**, как нетрудно проверить, имеет вид:

$$x_1 = c_1 e^{-3t} + (c_2 t + c_3)e^{-t}. \qquad (29)$$

Это еще раз подтверждает, что все решения системы **(25)—(26)**, удовлетворяющие любым начальным условиям, являются устойчивыми.

Однако система **(25)—(26)** может терять устойчивость даже при сколь угодно малых вариациях некоторых своих коэффициентов. Так, например, если в уравнении **(25)** коэффициент при члене D^2x_2 будет равен не единице, а 0,999, а остальные коэффициенты останутся неизменными, то характеристический полином примет вид:

$$P(\lambda) = -0{,}001\lambda^4 + 0{,}996\lambda^3 + 4{,}995\lambda^2 + 7\lambda + 3 \qquad (30)$$

и уже не будет гурвицевым, поскольку знак коэффициента при λ^4 противоположен знаку остальных коэффициентов. Полином (30) имеет большой положительный корень $\lambda_4 = 1001$, и поэтому в решении уравнения появляется очень быстро возрастающий член: $x_1 = c_1 e^{-3t} + (c_2 t + c_3) e^{-t} +$ $+ c_4 e^{1001t}$. Точно так же устойчивость может потеряться и при сколь угодно малых вариациях некоторых других коэффициентов.

Важно отметить, что если коэффициент при члене $D^2 x_2$ будет не меньше, а больше единицы, если он, например, будет равен не 0,999, и 1,001 (а остальные коэффициенты системы (25)—(26) останутся неизменными), то характеристический полином системы примет вид:

$$P(\lambda) = 0{,}001\lambda^4 + 1{,}004\lambda^3 + 5{,}005\lambda^2 + 7\lambda + 3 \tag{31}$$

и будет гурвицевым — система при этом сохранит устойчивость.

> Таким образом, к потере устойчивости приводят только вариации вполне определенного знака.

Внимательный читатель может сам проверить правильность вычисления характеристических полиномов (28), (30) и (31). Действительно, для системы двух дифференциальных уравнений вида:

$$\begin{cases} P_1(D)x_1 = P_2(D)x_2; \\ P_3(D)x_2 = P_4(D)x_1, \end{cases}$$

где $P_1(D)...P_4(D)$ — полиномы от оператора дифференцирования $D = \dfrac{d}{dt}$, ее характеристический полином будет равен определителю:

$$\pm \begin{vmatrix} P_1(\lambda) & P_2(\lambda) \\ P_4(\lambda) & P_3(\lambda) \end{vmatrix},$$

т. е. будет равен $\pm\left[P_1(\lambda)P_3(\lambda) - P_2(\lambda)P_4(\lambda)\right]$ (двойной знак берется потому, что корни полинома не изменяются при изменении знака всех его членов; поэтому выбирают тот знак, при котором большинство членов положительны).

Используя эту формулу, для системы (25)—(26) получаем следующее выражение для характеристического полинома:

$$(\lambda^2 + 2\lambda + 1)(\lambda^2 + 4\lambda + 5) - (\lambda^3 + 4\lambda^2 + 4\lambda + 2)(\lambda + 1).$$

Выполнив умножение и приведя подобные члены, получим формулу (28), поскольку члены с четвертой степенью λ взаимно сокращаются.

Если в уравнении (25) коэффициент при члене D^2x_2 будет равен не единице, а 0,999, то характеристический полином будет равен:

$$(0{,}999\lambda^2 + 2\lambda + 1)(\lambda^2 + 4\lambda + 5) - (\lambda^3 + 4\lambda^2 + 5\lambda + 2)(\lambda + 1)\,.$$

Выполнив умножение, приведя подобные члены и заменив D на λ, получим формулу (30). Если же в уравнении (25) коэффициент при члене D^2x_2 равен не единице, а 1,001, то после аналогичных вычислений придем к формуле (31).

Теперь преобразуем систему (25)—(26) к форме Коши. Для этого достаточно ввести новые переменные x_3 и x_4. Определим новые переменные равенствами:

$$\left.\begin{aligned} x_3 &= \dot x_1 + 2x_1 - x_2 \\ x_4 &= \dot x_3 \end{aligned}\right\}. \tag{32}$$

Относительно новых переменных уравнение (25) перейдет в систему трех уравнений первого порядка, т. е. примет форму Коши:

$$\left.\begin{aligned} \dot x_1 &= -2x_1 + x_2 + x_3 \\ \dot x_3 &= x_4 \\ \dot x_4 &= -x_3 - 2x_4 \end{aligned}\right\}. \tag{33}$$

Правильность перехода от (25) к (33) легко проверить обратным преобразованием. Исключив из (33) переменные x_3 и x_4, получим снова уравнение (25). Тем самым еще раз подтверждается эквивалентность уравнений (25) и (33).

Теперь преобразуем уравнение (26). Преобразования будут заключаться только в разбивке членов и переносе их из одной части равенства в другую с изменением знака. Эквивалентность таких преобразований никаких сомнений не вызывает. Получим:

$$\left[(D^2 + 2D)x_1 - Dx_2\right] + \left[(2D + 4)x_1 - 2x_2\right] + x_1 + x_2 = 0\,. \tag{34}$$

Сопоставляя (34) с равенствами (32), убеждаемся, что первой квадратной скобке соответствует переменная x_4, второй квадратной скобке соответствует $2x_3$.

Окончательно уравнение (26) преобразуется к виду:

$$x_2 = -x_1 - 2x_3 - x_4 \,. \qquad (35)$$

Мы убеждаемся, что относительно новых переменных уравнение (26) переходит в дифференциальное уравнение нулевого порядка, т. е. в не содержащее производных соотношение между переменными. Уравнения (33)—(35) эквивалентны уравнениям (25)—(26). Это можно еще раз проверить, вычислив характеристический полином системы уравнений (33)—(35). Легко убедиться, что он останется тем же, что у системы (25)—(26), и по-прежнему будет иметь вид (28). Система (33)—(35) устойчива и эквивалентность ее системе (25)—(26) сомнений не вызывает.

И вот здесь нас ожидает неожиданность — если мы будем давать малые изменения любым коэффициентам системы (33)—(35) и проверять новые системы на устойчивость, то неизменно будем убеждаться в том, что все они устойчивы.

Система (33)—(35) сохраняет устойчивость при вариациях (малых изменениях) любых своих коэффициентов, хотя система (25)—(26) этим свойством не обладает.

> Подчеркнем еще раз — системы уравнений (25)—(26) и (33)—(35) эквивалентны между собой, их характеристические полиномы тождественны, множества решений одни и те же, а по свойству сохранения устойчивости при вариациях параметров они отличаются разительно. В этом и заключается неожиданность.

Обнаружение этого неожиданного результата имеет большое практическое значение. Ведь до самого последнего времени об устойчивости различных объектов и систем и о сохранении устойчивости при неизбежных малых отклонениях параметров и коэффициентов судили, разумеется, по преобразованным уравнениям. Без эквивалентных преобразований ни одно исследование обойтись не может. Но если свойство сохранения устойчивости при вариациях коэффициентов может появляться и исчезать при эквивалентных преобразованиях уравнений, то это говорит о том, что традиционные методы проверки устойчивости и ее сохранения не полны, могут давать неверные ответы, а неверный ответ в таком серьезном вопросе, как устойчивость, может быть причиной аварий, в т. ч. и с гибелью людей.

Глава 4

Объяснение неожиданности

Продемонстрированная на примерах (25)—(26) и (33)—(35) возможность изменения свойства сохранения устойчивости при вариациях параметров после эквивалентных преобразований имеет простое объяснение (впервые это объяснение было дано в книге Ю. П. Петрова "Синтез оптимальных систем управления при неполностью известных возмущающих силах", Издательство Ленинградского гос. университета, 1987 г.). Действительно, проанализируем подробнее, что означает утверждение:

> Система уравнений сохранит устойчивость своих решений при вариациях (малых отклонениях) коэффициентов от расчетных значений.

Фактически это утверждение касается не свойств самой исследуемой системы, а свойств множества других систем, коэффициенты которых отличаются (хотя и немного) от коэффициентов исходной исследуемой системы (такое множество систем называют *окрестностью исходной системы*).

Теперь вспомним, что эквивалентные преобразования обязаны не изменять решения исходной системы, но совсем не обязаны оставлять неизменными свойства ее окрестности. Об этом в определении эквивалентного преобразования ничего не говорится. Поскольку свойство сохранения устойчивости при вариациях параметров является свойством окрестности, оно может появляться и исчезать при совершенно эквивалентных преобразованиях уравнений.

Отсюда следует, что системы (25)—(26) и (33)—(35) не являются каким-то особым исключением. Подобных систем, меняющих некоторые свои свойства при эквивалентных преобразованиях, существует много, и мы покажем потом целые классы подобных систем. А отсюда следует, что традиционные, используемые во всех проектных и конструкторских организациях методы проверки сохранения устойчивости по свойствам характеристического полинома или функции Ляпунова исследуемой системы не полны, а потому не надежны и не всегда дают правильные результаты. Для гарантии надежности необходимы дополнительные исследования — нужно проверить, с помощью каких преобразований определялся характеристический полином или функция Ляпунова, не изменили ли эти преобразования свойства сохранения устойчивости при вариациях параметров.

Для того чтобы быть уверенными в сохранении устойчивости при вариациях параметров нужно ввести новое математическое понятие — понятие *эквивалентности в расширенном смысле*, поскольку мы убедились, что обычные эквивалентные преобразования — для определенности будем называть их в дальнейшем преобразованиями, эквивалентными в классическом смысле — не гарантируют сохранения свойств окрестности исследуемой системы, в том числе и свойства сохранения устойчивости при вариациях параметров.

Системами дифференциальных уравнений, эквивалентными в расширенном смысле, назовем системы, которые:

- во-первых, эквивалентны в классическом смысле (т. е. их решения совпадают);
- во-вторых, у них мало отличаются друг от друга окрестности решений (в частности, если у исследуемой системы решения устойчивы, то они устойчивы и у всех систем, находящихся в окрестности исследуемой системы).

В дальнейшем мы приведем критерии, позволяющие судить о том, являются системы эквивалентными в расширенном смысле или нет.

Отметим сразу, что подавляющее большинство систем, эквивалентных в классическом смысле, будут эквивалентными и в расширенном смысле. Именно поэтому необходимость введения нового математического понятия столь долго не осознавалась.

Действительно, если, например, в окрестности уравнения

$$2\dot{x} = -2x \tag{36}$$

лежат уравнения, у которых все решения устойчивы, то этим же свойством обладает и уравнение

$$\dot{x} + x = 0\,, \tag{37}$$

получившееся из (36) умножением на 0,5 и переносом члена $-x$ в левую часть. Уравнения (36) и (37) эквивалентны между собой и в классическом, и в расширенном смысле, и для большинства уравнений и систем уравнений дело будет обстоять именно так. Системы, эквивалентные между собой в классическом смысле, но не в расширенном, встречаются редко и поэтому были открыты совсем недавно. Однако исследовать их совершенно необходимо, поскольку каждая встреча с такой редкой системой может привести к авариям и гибели людей. В *главе 5* мы покажем это.

Глава 5

Практические приложения

Наибольшее значение проверка устойчивости имеет при исследовании систем автоматического управления, которыми в настоящее время оснащено большинство объектов промышленности и транспорта.

Самолеты бóльшую часть времени летают под управлением автоматических устройств — автопилотов. Корабли в море движутся под управлением авторулевых, постоянство характеристик технологических процессов на большинстве заводов поддерживается автоматическими регуляторами.

В системах управления переменные x_1; x_2; ... x_n, как правило, являются отклонениями характеристик процесса от желаемого значения. Если математической моделью системы автоматического управления является система дифференциальных уравнений с неустойчивыми решениями, то эти отклонения будут быстро нарастать, и нормальная работа системы станет невозможной.

Поэтому еще в ходе проектирования во всех проектно-конструкторских организациях всегда проверяют — будет проектируемая система устойчивой или нет. Только систему, которая согласно проверочному расчету является устойчивой, допускают к "воплощению в металле". Предположим, что мы ошиблись в расчете и неустойчивую систему управления при расчете признали за устойчивую. Это неприятно, но не опасно. На испытаниях неустойчивость системы сразу выявится из-за быстро возрастающих отклонений реального течения управляемого процесса от желаемого, и система будет выброшена в брак с соответствующим списанием убытков.

Гораздо опаснее ошибка в вопросе о сохранении устойчивости при вариациях параметров. Предположим, что мы исследуем систему управления, математической моделью которой являются уравнения (25)—(26). В последнее время при расчетах все чаще пользуются быстродействующей вычислительной техникой и для удобства использования стандартных программ исследуемую математическую модель приводят к стандартному виду, к форме Коши, т. е. к системе уравнений первого порядка. Приводя систему (25)—(26) к форме Коши, придем к уже знакомым нам уравнениям (33)—(35). Исследуя эти уравнения, убедимся, что при вариациях любых коэффициентов система (33)—(35) сохранит устойчивость. Однако исходная система (25)—(26), как мы уже убедились в этом в *главе 3*, при вариациях некоторых коэффициентов (и притом только при вариациях определенного знака) устойчивость теряет. Причина заключается в том, что системы (25)—(26) и (33)—(35) эквивалентны друг другу в классическом смысле, но не в расширенном. Если не вводить нового математического понятия — *эквивалентности в расширенном смысле*, если ограничиться классическим понятием эквивалентных систем, то мы после проведения расчетов по уравнениям (33)—(35) должны признать проектируемую нами систему автоматического управления устойчивой и сохраняющей устойчивость при вариациях параметров и поэтому должны дать рекомендации об ее изготовлении "в металле".

Поскольку при изготовлении малые отклонения действительных параметров любого изделия от расчетных значений неизбежны, а знак этих отклонений непредсказуем, то в готовом образце мы можем получить систему управления, математической моделью которой будут не уравнения (25)—(26), а мало отличающиеся от них уравнения:

$$(D^3 + 4D^2 + 5D + 2)x_1 = (1{,}001D^2 + 2D + 1)x_2\,; \tag{38}$$

$$(D + 1)x_2 = (D^2 + 4D + 5)x_1 \tag{39}$$

(всего один коэффициент отклонился на одну тысячную от расчетного значения). Характеристический полином системы (38)—(39), как мы уже указывали в *главе 3*, имеет вид (31) и является гурвицевым. Следовательно, реально изготовленная система является устойчивой, и испытания безусловно это подтвердят.

Поскольку изготовленная система управления успешно прошла испытания, то она может быть установлена на ответственный объект и длительное время вполне исправно работать. Однако в ходе эксплуатации вследствие износа и старения рабочих деталей неизбежен медленный малый дрейф всех параметров, а с ним и коэффициентов математической модели. Вполне возможно, что в некоторый непредвиденный момент времени коэффициент при D^2x_2 вместо первоначального значения 1,001 станет 0,999. В этот момент характеристический полином системы (как было показано в *главе 3*) станет равен полиному (30), перестанет быть гурвицевым, а это означает, что реальная система потеряет устойчивость. Потеря устойчивости в непредвиденный момент времени уже сама по себе создает аварийную ситуацию, а если не сработают меры защиты, то ситуация может перерасти в опасную аварию, в том числе и связанную с гибелью людей.

Причина аварии заключается в том, что система (33)—(35) эквивалентна системе (25)—(26) в классическом смысле, но не эквивалентна в расширенном смысле, окрестности этих систем различны. Мы убеждаемся, что при игнорировании различия между понятиями эквивалентности в классическом смысле и в расширенном каждая встреча с особой системой, для которой эти понятия не совпадают, может оказаться смертельно опасной.

Вместе с тем анализ примеров с системами (25)—(26) и (33)—(35) показывает, почему до самых последних лет необходимости в новом математическом понятии не возникало, и аварий, связанных с ошибками при расчете сохранения устойчивости, в прежние годы не происходило.

- Во-первых, опасные явления возникают только в системах достаточно высокого порядка (не ниже третьего). Кроме того, в системах 3—5 порядков они возникают в простой форме и могут быть легко замечены. Так, опытный инженер сразу заметит опасные свойства системы (25)—(26) и не допустит ее к реализации. Пример с системой (25)—(26) был приведен только для того, чтобы читатель смог проследить за всеми преобразованиями, а при желании и сам повторить их и убедиться, что никакого "подвоха", никакой ошибки здесь нет.

  Однако в современной технике приходится иметь дело с системами управления до 20—40 порядков. Здесь уже никакой опыт, никакая интуиция инженера не помогут. Для предупреждения аварий необходимо использовать более совершенные математические методы и учитывать различие между эквивалентностью в классическом смысле и в расширенном.

- Во-вторых, до поры до времени возможность потери устойчивости при вариациях параметров в достаточно простых системах управления выявляли на испытаниях простым "покачиванием" всех параметров и коэффициентов. Однако в современных системах высоких порядков этот старый метод уже не срабатывает. Главная трудность заключается в том, что потеря устойчивости может происходить при комбинациях вариаций разных параметров различного знака. Например, потеря устойчивости в какой-либо конкретной системе может произойти лишь тогда, когда первый параметр отклонится от расчетного значения в положительную сторону, второй — непременно в отрицательную, а третий — снова в положительную и т. п. Если поведение исследуемой системы зависит от N параметров, то число комбинаций положительных и отрицательных вариаций равно 2^N, и все их надо проверить. Если $N = 40$ (а для современных сложных систем это очень умеренное число), то число комбинаций, которые надо проверить, равно 2^{40}, а это больше чем 10^{12}. Понятно, что даже с использованием самой быстродействующей вычислительной техники такого числа проверок не выполнить, и нужно обязательно переходить к более совершенным методам расчета и проектирования, использующим новое математическое понятие эквивалентности в расширенном смысле. Иначе аварии будут неизбежны.

- В-третьих, до последнего времени расчет устойчивости систем управления проводился, как правило, по "реальным выходам" (о них подробнее будет сказано в *главе 7*), без перехода к форме Коши. К форме Коши стали повсеместно переходить лишь при массовом использовании для расчетов быстродействующей вычислительной техники и стандартных программ, при переходе к автоматизированному проектированию.

  Такой переход, безусловно, прогрессивен, но он должен сопровождаться ревизией и уточнением используемого математического аппарата. Игнорирование различия между эквивалентностью в классическом смысле и в расширенном смысле, не очень опасное при ручном счете, может стать смертельно опасным при автоматизированном проектировании, которое в последнее время все больше и больше входит в нашу жизнь, в практику расчетов большинства проектно-конструкторских организаций.

Глава 6

Аварии и катастрофы

Приходилось ли уже сталкиваться с авариями, причиной которых были традиционные методы проектирования, не учитывающие различия между эквивалентностью в классическом смысле и в расширенном? Мы уже указывали, что некритическое, без дополнительных проверок, использование традиционных методов может приводить к появлению опасных систем, способных при неизбежном на практике малом дрейфе параметров в непредвиденный момент времени терять устойчивость. Но приходилось ли уже реально сталкиваться с авариями, порожденными этой причиной?

Дать достоверный ответ на этот вопрос трудно, поскольку расследование причин аварий — дело тонкое и к тому же осложненное корыстными интересами проектировщиков и изготовителей, которые часто стараются скрыть истинные причины аварии любыми способами, иногда вплоть до крупных взяток членам комиссии, которая расследует аварию.

Материал предыдущих глав позволяет указать характерные черты аварий, возникающих в системах, способных терять устойчивость при вариациях параметров определенного знака:

- при дрейфе параметров системы в момент перехода параметра в опасный интервал в характеристическом полиноме системы появляется большой положительный корень (смотри полином (30)). Это означает, что отклонения регулируемых переменных от безопасных значений будут нарастать очень быстро, авария будет развиваться стремительно, как удар, как внезапный отказ;
- если опасная система при аварии не разрушилась, а была вовремя отключена — вручную или системой защиты, то при происходящей через некоторое время проверке система может оказаться вполне исправной, поскольку параметр, выход которого из безопасного диапа-

зона привел к аварии, в результате неконтролируемых малых вариаций может к моменту проверки снова прийти в безопасный диапазон значений.

С учетом этих обстоятельств особое внимание привлекает знаменитая авария аэробуса А-310, произошедшая 22 марта 1994 года над городом Междуреченском, когда погибли все пассажиры и экипаж. Так называемый "черный ящик" с записью параметров полета до и после аварии был найден. Исследование записей "черного ящика" показало, что авария произошла в то время, когда самолет шел в автоматическом режиме, под управлением автопилота. Без видимой причины неожиданно стали быстро нарастать опасные отклонения крена и тангажа самолета от их нормальных значений. Пока экипаж переходил на ручное управление, отклонения возросли настолько, что ввести их в нормальные рамки уже не было возможности. Аэробус упал и разбился.

Через несколько месяцев другой аэробус А-310 летел вблизи Бухареста на автопилоте, в автоматическом режиме. Также внезапно стали нарастать отклонения крена и тангажа самолета от нормальных значений. Однако на этот раз летчик сумел быстро отключить автопилот и успел в режиме ручного управления выровнять самолет. Когда после благополучной посадки стали проверять автопилот и систему управления, выявилось, что они в полном порядке и работают устойчиво.

Сопоставляя все эти факты, можно сделать вывод о том, что система автоматического управления на аэробусе А-310 оказалась спроектированной так, что она способна терять устойчивость при вариациях некоторых своих параметров или комбинациях вариаций, и эти вариации, или их комбинации, стали причиной двух потерь устойчивости, одна из которых 22 марта 1994 года над Междуреченском закончилась гибелью пассажиров и экипажа. Как можно догадываться, расчет автопилота и системы управления проводился на быстродействующих вычислительных машинах после преобразования математической модели системы к форме Коши и не позволил полностью выявить ее опасные свойства.

Отказ системы управления при полете вблизи Бухареста подробно не исследовался. Аварию же над Междуреченском подробно расследовала международная комиссия. Необходимость в международной комиссии возникла потому, что аэробус А-310 проектировался и изготовлялся франко-германской фирмой, но в том роковом полете над Междуреченском шел под управлением российского экипажа. По записям "черного ящика" аэробуса было установлено, что в момент аварии в кабине пилотов находились дети командира корабля, т. е. российский экипаж допустил грубое нарушение должностных инструкций — именно это нарушение было выставлено франко-германской стороной в качестве главной причины аварии. В то же время несомненно, что первопричиной аварии была потеря устойчивости автопилотом, и поэтому нужно было внимательно проанализировать — почему, по какой причине внезапно потерялась устойчивость. Отметим, что в комиссию по расследованию аварии была послана докладная о том, что причиной аварии могут быть вполне определенные, перечисленные в докладной, неточности в проектировании и расчете системы управления аэробусом, и поэтому необходимо детально исследовать эту версию. Докладная была получена комиссией, но никакой реакции от комиссии на нее не последовало. Разумеется, можно только строить догадки о том, почему международная комиссия не захотела исследовать причины аварии подробно, но несомненно одно: если бы причиной оказались погрешности проектирования, то ответственность за аварию и связанные с этой ответственностью многомиллионные (порядка 150 миллионов долларов) выплаты семьям погибших легли бы на франко-германскую фирму, которая проектировала и строила аэробус. Сделав главный упор на грубое нарушение инструкций российскими пилотами, которые пустили в пилотскую кабину детей, комиссия сумела переложить вину на российскую сторону.

Мы видим теперь, как сложно восстановить истину в таком трудном деле, как расследование аварий. Остается несомненным одно — поскольку традиционные методы расчета устойчивости и ее сохранения при вариациях параметров основаны на исследовании характеристического полинома системы или матрицы ее коэффициентов при записи в форме Коши и не учитывают различия между преобразованиями, эквивалентными в классическом смысле и в расширенном, то традиционные методы не могут всегда, для всех систем давать правильные ответы. Следовательно, если в практику расчетов устойчивости не будут введены дополнительные проверки, описанные в уже упоминавшейся книге, изданной Ленинградским университетом в 1987 году [1] (цифра, стоящая в квадратных скобках, означает номер в списке литературы в конце книги), то аварии будут возникать неизбежно. Если не сегодня, то завтра. А вот мириться с подобными авариями никак нельзя. Одно дело, когда авария происходит по неведению или из-за пока непреодолимого несовершенства сегодняшней нашей техники, и другое дело, когда причиной аварии становятся инертность, лень, нежелание прислушаться к предупреждениям ученых и провести дополнительные проверки, которые уже предложены и описаны в научной литературе.

Во избежание ошибок и аварий желательно разработать теорию преобразований, эквивалентных в расширенном смысле. До создания полной теории еще далеко. В *главе 7* мы изложим методику проверки сохранения устойчивости и теорию преобразований, эквивалентных в расширенном смысле для частного случая — для дифференциальных уравнений, описывающих линейные системы управления с обратной связью.

Глава 7

Преобразования, эквивалентные в расширенном смысле

В теории управления рассматривают отдельно объекты управления и устройства, формирующие управляющие воздействия на эти объекты. Уравнения объектов управления считают заданными, неизменными (это упрощает дальнейшее исследование) и допускают, что их можно (для линейных объектов с постоянными коэффициентами) записать в форме Коши:

$$\dot{x} = Ax + Bu\,, \tag{40}$$

где x — n-мерный вектор переменных x_1; x_2; ... x_n, при этом чаще всего x_i являются отклонениями от желаемых значений; A — квадратная размера $n \times n$ матрица коэффициентов; u — управляющее воздействие (скаляр); B — матрица-столбец коэффициентов при управляющем воздействии (мы рассматриваем случай одного управляющего воздействия; в общем случае управляющих воздействий может быть несколько, но общего случая мы рассматривать не будем); мы не будем также рассматривать влияния возмущающих воздействий.

Управляющее воздействие u формируется в функции от переменных x_1; x_2; ... x_n согласно уравнению

$$W_{n+1}(D)u = W_1(D)x_1 + W_2(D)x_2 + ...W_n(D)x_n\,, \tag{41}$$

где $W_i(D)$ — полиномы от оператора дифференцирования $D = \dfrac{d}{dt}$. Их стараются подобрать так, чтобы процессы в системе (40)—(41) протекали наиболее желательным образом.

Существует хорошо разработанная теория выбора и вычисления подобных полиномов, являющаяся разделом общей теории оптимального управления, изложенная, например, в [1]. Уравнение (41) называют *законом формирования управляющего воздействия в цепи обратной связи.*

Очень часто вместо полиномов $W_i(D)$ в уравнении (41) используют только постоянные коэффициенты усиления, и закон формирования обратной связи принимает более простой вид:

$$u = k_1 x_1 + k_2 x_2 + \dots k_n x_n \qquad (42)$$

или, в матричной форме:

$$u = Kx\,, \qquad (43)$$

где K — матрица-строка постоянных коэффициентов без нулевых элементов.

Подставив (43) в (40), мы убедимся, что изменение переменных $x_i(t)$ в системе (40)— (43) будет описываться системой уравнений:

$$\dot{x} = (A + BK)x\,. \qquad (44)$$

Поскольку выбор матрицы-строки K находится в нашем распоряжении, то мы можем выбрать ее так, чтобы процессы в системе управления протекали наиболее желательным для нас образом. Характеристический полином замкнутой системы равен определителю матрицы $\lambda E - A - BK$, где E — единичная матрица. Если этот полином гурвицев, то гарантируется устойчивость всех решений $x_1(t)$; ... $x_n(t)$ системы управления (40)— (43).

Надлежащим выбором матрицы-строки K можно обеспечить устойчивость, а также ряд других показателей качества.

На практике очень часто не все переменные x_i можно непосредственно использовать для формирования управляющего воздействия. Поэтому вводят вектор тех переменных y_1; y_2;... y_m, которые действительно можно измерить на выходе объекта управления и использовать для формирования управляющего воздействия. Размерность вектора y, как правило, меньше размерности вектора x, $m < n$. Лишь в редких случаях $m = n$. Связь между x и y определяется уравнением:

$$y = Hx, \qquad (45)$$

где H — прямоугольная матрица размера $m \times n$, где $m \le n$.

В практике расчета систем управления широко используют преобразования, связанные с изменением матрицы H. Это вызвано разными причинами. Как уже указывалось, некоторые из регулируемых переменных с трудом поддаются измерению. Так, например, в системах управления полетом самолета важную роль играет такая переменная, как угол атаки. Она входит в уравнения самолета как объекта управления (в уравнения вида (40)). В то же время пока не существует достаточно простых и удобных датчиков, которые бы измеряли эту переменную. Об ее величине судят косвенно — по измерениям других переменных (угла тангажа и его производных). Поэтому такая переменная, как угол атаки, не может быть непосредственно использована в канале обратной связи.

Кроме того, с целью сокращения числа измерительных приборов и датчиков часто сознательно отказываются от использования ряда переменных в канале обратной связи, заменяя эти переменные на основе уравнений (40) равными им комбинациями других переменных и их производных.

Рассмотрим, для примера, систему управления ориентацией стабилизируемой платформы и ограничимся управлением в одной плоскости. Тогда уравнения объекта управления примут очень простой вид:

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= u \end{aligned}\right\}, \tag{46}$$

где x_1 — угол отклонения платформы от желаемого положения; x_2 — скорость этого отклонения; u — момент, создаваемый исполнительным двигателем и играющий роль управления.

Закон формирования управления можно выбрать в виде:

$$u = -(k_1 x_1 + k_2 x_2)\,. \tag{47}$$

Уравнение (47) называется *уравнением регулятора*.

Подставив (47) в (46) и исключив переменную x_2, получим относительно x_1 уравнение:

$$(D^2 + k_2 D + k_1)x_1 = 0\,, \tag{48}$$

решение которого имеет вид:

$$x_1 = e^{-0{,}5k_2 t}\left(C_1 \sin\sqrt{k_1 - \frac{k_2^2}{4}}t + C_2 \cos\sqrt{k_1 - \frac{k_2^2}{4}}t\right). \tag{49}$$

Мы убеждаемся, что при $k_1 > 0$ и $k_2 > 0$ система управления устойчива, а за счет изменения величины коэффициентов k_1 и k_2 можно придать процессам, протекающим в системе управления, те или другие свойства. Так, например, если $k_1 > \frac{k_2^2}{4}$, то функция $x_1(t)$ является затухающим гармоническим колебанием; при $k_1 \le \frac{k_2^2}{4}$ колебаний уже не будет.

Реализация закона управления (47) требует двух датчиков: один измеряет угол отклонения x_1, другой — скорость его изменения x_2. Можно обойтись и одним датчиком, если использовать первое из уравнений (46) и подставить в уравнение (47) вместо x_2 равную ему величину $\dot{x}_1$. Получим вместо уравнения (47) уравнение

$$u = -(k_1 + k_2 D)x_1. \tag{50}$$

Подставив (50) в (46), получаем снова уравнение (48) с тем же решением (49). Так и должно быть, поскольку подстановка в уравнение (47) вместо x_2 равной ему величины $\dot{x}_1$, безусловно, является преобразованием эквивалентным, в классическом смысле. Отметим, что в данном случае это преобразование эквивалентно и в расширенном смысле: нетрудно проверить, что как система уравнений (46)—(47), так и система (46)—(50) сохраняют устойчивость при вариациях любых своих коэффициентов. Замена переменной x_2 на равную ей переменную $\dot{x}_1$ не изменила ни решения (49), ни окрестности решения. Решения уравнений, находящихся в окрестности уравнения (48), мало отличаются от решения (49). Однако в других случаях замена переменных может привести к коренным изменениям окрестности системы.

Заменив регулятор (47) на регулятор (50), мы изменили матрицу H, входящую в уравнение (45). Если используется регулятор (47), то матрица H имеет вид:

$$H_1 = \begin{pmatrix} 1; & 0 \\ 0; & 1 \end{pmatrix}; \tag{51}$$

т. е. является единичной матрицей, а если используется регулятор (50), то она становится матрицей-строкой:

$$H_2 = (1;\ 0). \tag{52}$$

Однако характеристический полином системы уравнений (40)—(43) не зависит от матрицы H. Характеристический полином, а вместе с ним и все решения системы уравнений, зависят только от матриц A, B и K. Поэтому эквивалентные в классическом смысле преобразования, изменяющие число "реальных выходов", т. е. матрицу H, широко использовались и до сих пор используются в практике расчетов систем управления.

Теперь рассмотрим подробнее те математические неожиданности, которые подстерегают нас при этих привычных, повсеместно используемых преобразованиях.

Рассмотрим объект управления, описываемый системой трех дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + b_1u \\ \dot{x}_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + b_2u \\ \dot{x}_3 &= a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + b_3u \end{aligned}\right\} \tag{53}$$

при законе формирования управляющего воздействия (регулятора)

$$u = k_1x_1 + k_2x_2 + k_3x_3\,. \tag{54}$$

Пусть коэффициенты k_1, k_2 и k_3 выбраны так, что процессы в системе управления протекают желательным для нас образом. Пусть система управления устойчива и сохраняет устойчивость при вариациях параметров. Этого легко добиться выбором k_1, k_2 и k_3.

Предположим теперь, что мы сократили число измерительных приборов и датчиков и решили не использовать в канале обратной связи переменные x_3 и x_2, заменив их на основании уравнений (53) на переменную x_1 и ее производные.

Для этого достаточно исключить из уравнений (53) и (54) переменные x_2 и x_3 с помощью эквивалентных преобразований. Такое исключение является трудоемким делом, требующим большого терпения. Однако если терпеливо и тщательно проделать все выкладки, то придем относительно оставшихся двух переменных x_1 и u к двум уравнениям вида:

$$\left(m_1D^3 + m_2D^2 + m_3D + m_4\right)x_1 = \left(m_5D^2 + m_6D + m_7\right)u \tag{55}$$

$$\left(m_8D + m_9\right)u = \left(m_{10}D^2 + m_{11}D + m_{12}\right)x_1\,, \tag{56}$$

в которых каждый из коэффициентов m_1; m_2; ... m_{12} зависит от коэффициентов a_{11}, a_{12}; ...a_{33}; b_1, b_2, b_3, k_1; k_2; k_3 исходной системы (53)—(54). Так, например, коэффициент m_8 равен:

$$m_8 = \frac{b_3(a_{31}k_2 - a_{32}k_1)}{a_{31}(a_{12}a_{31} + a_{22}a_{32}) - a_{32}(a_{11}a_{31} + a_{22}a_{32})}, \tag{57}$$

а коэффициент m_{10} будет равен m_8/b_3.

Характеристический полином системы уравнений (55)—(56) будет в общем случае полиномом четвертой степени:

$$n_4\lambda^4 + n_3\lambda^3 + n_2\lambda^2 + n_1\lambda + n_0, \tag{58}$$

коэффициенты которого зависят от коэффициентов m_1; ... m_{12} системы (55)—(56), а, тем самым, и от коэффициентов a_{11}; ... a_{33}; b_1; b_3 исходной системы (53)—(54).

Так, например, коэффициент n_4 равен: $n_4 = m_1m_8 - m_5m_{10}$. Выражая коэффициент n_4 полинома (58) через коэффициенты исходной системы (53)—(54), нетрудно убедиться, что для многих коэффициентов исходной системы коэффициент при старшей степени полинома (58) всегда обращается в нуль, поскольку выполняется соотношение: $m_1m_8 - m_5m_{10} = 0$.

Таким образом, полином (58) оказывается в действительности полиномом третьей степени, и он полностью совпадает с характеристическим полиномом исходной системы (53)—(54), который можно получить без исключения переменных x_2 и x_3 непосредственно по формулам линейной алгебры.

Так и должно быть, поскольку выполненное без ошибок исключение переменных является эквивалентным (в классическом смысле) преобразованием, а характеристический полином при таких преобразованиях не меняется.

Однако обращение в нуль коэффициента при старшей, четвертой, степени полинома (58) происходит лишь тогда, когда все коэффициенты системы уравнений (55)—(56), а значит, и все коэффициенты исходной системы (53)—(54) в точности равны своим номинальным значениям. Если коэффициенты системы (55)—(56) или исходной системы (53)—(54) отклоняются в ходе эксплуатации от своих номинальных значений даже на сколь угодно малые величины, то равенства $n_4 = 0$ в полиноме (58) уже может не быть, он станет полиномом четвертой степени, а знак старшего коэффициента n_4 будет зависеть от непредсказуемых вариаций параметров. Если знак старшего коэффициента в полиноме (58) окажется при этом противоположен знаку остальных коэффициентов, то полином (58) уже не будет гурвицевым, и система (55)—(56) потеряет устойчивость.

Таким образом, мы пришли к важному выводу:

> исключение переменных x_2 и x_3 из уравнений (53)—(54), если оно выполнено правильно и без ошибок, является преобразованием, эквивалентным в классическом смысле, но совсем не обязательно — в расширенном.

Система уравнений (55)—(56), появившаяся в результате исключения x_2 и x_3 из системы (53)—(54), эквивалентна системе (53)—(54) в классическом смысле и может быть не эквивалентна — в расширенном. Решения этих систем совпадают, но окрестности решений могут быть различны.

Повторяя подобное исследование для объектов управления произвольного порядка вида (40) при законе формирования управляющего воздействия (43), придем к следующему результату:

- если в формировании управляющего воздействия не участвуют две или более переменных и их заменяют равными им комбинациями других переменных и их производных, то такое преобразование будет эквивалентным в классическом смысле, но не обязательно в расширенном;
- если в формировании управляющего воздействия не участвует одна из переменных x_i и ее заменяют на равную ей комбинацию других переменных и их производных, то такое преобразование будет эквивалентным и в классическом смысле, и в расширенном. Доказательство приводилось в [1].

Теперь делается понятным рассмотренный ранее пример с системами уравнений (25)—(26) и (33)—(35). Мы убедились, что такие системы не являются редким исключением. Их очень много и натолкнуться на них очень легко — достаточно в любом объекте управления вида (40) не ниже третьего порядка с регулятором (43) исключить не менее двух переменных с помощью эквивалентных в классическом смысле преобразований, и мы можем прийти к системе, которая будет эквивалентна исходной в классическом смысле, но не в расширенном. Таких систем много, а встреча с каждой такой системой может привести к аварии, если не проделать дополнительного проверочного расчета, а ограничиться традиционной проверкой характеристического полинома или матрицы коэффициентов при записи в форме Коши.

Приведем пример с объектом управления четвертого порядка, ранее уже приводившийся в [2].

Объект управления описывается системой уравнений с постоянными коэффициентами:

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -2x_1 - x_2 - 3x_3 - 2x_4 + u \\ \dot{x}_2 &= -x_1 - x_2 - x_3 - x_4 + 2u \\ \dot{x}_3 &= -x_1 - 2x_2 - x_3 - x_4 + u \\ \dot{x}_4 &= -3x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + 2u \end{aligned}\right\} \tag{59}$$

и управляющее воздействие формируется по закону:

$$u = -x_1 - 2x_2 - 3x_3 - x_4. \tag{60}$$

Характеристический полином системы уравнений (59)—(60) имеет вид:

$$\lambda^4 + 15\lambda^3 + 6\lambda^2 + 2\lambda + 36 \tag{61}$$

и является гурвицевым. Система (59)—(60) устойчива, и можно проверить, что она сохраняет устойчивость при вариациях любых своих коэффициентов.

Если же в формировании управляющего воздействия участвуют только переменные x_1 и x_2, то переменные x_3 и x_4 нужно исключить из уравнений (59)—(60), пользуясь, разумеется, только эквивалентными (в классическом смысле) преобразованиями. Выполнив эти преобразования, приведем уравнения (59)—(60) к виду

$$\begin{aligned} &(D^2 + D + 2)x_1 - (3D^2 + 7D + 2)x_2 = -(5D + 6)u; \\ &(D^2 + 2)x_1 - (2D^2 + 2)x_2 = -(3D - 1)u; \end{aligned} \tag{62}$$

$$(7D + 10)u = -(D^2 + 2)x_1 + (4D^2 + 11D)x_2. \tag{63}$$

Характеристический полином системы уравнений (62)—(63), как можно проверить, сохраняет вид (61) и остается гурвицевым. Это еще раз подтверждает, что системы уравнений (59)—(60) и (62)—(63) эквивалентны в классическом смысле. Однако если, например, в первом из уравнений (62) коэффициент при D^2x_1 вместо единицы из-за неизбежного малого дрейфа параметров объекта управления примет значение $1+\varepsilon$, то характеристический полином системы (62)—(63) станет равным:

$$-2\varepsilon\lambda^5 + (1 - 3\varepsilon)\lambda^4 + 15\lambda^3 + 6\lambda^2 + 2\lambda + 36 \tag{64}$$

и при сколь угодно малом $\varepsilon > 0$ система станет неустойчивой. Системы (59)—(60) и (62)—(63) являются примерами систем, эквивалентных в классическом смысле, но не эквивалентных в расширенном.

Теперь спросим: а как будет вести себя реальная система управления, математическими моделями которой являются эквивалентные в классическом смысле системы уравнений (59)—(60) и (62)—(63)? Здесь все зависит от того, как в действительности формируется управляющее воздействие. Если оно формируется из переменных x_1; x_2; x_3; x_4 по закону (60), то реальная система управления сохранит устойчивость при вариациях любых своих параметров. Если управляющее воздействие формируется только из переменных x_1 и x_2 и их производных по эквивалентному (в классическом смысле) с (60) закону (63), то устойчивость реальной системы может потеряться при сколь угодно малых вариациях некоторых параметров или коэффициентов. Но это опасное свойство не будет поддаваться обнаружению, если математическую модель системы приведут (как это обычно и делается) к форме Коши. Отсюда возникает возможность аварий. Примеры систем, подобных системам (59)—(60) и (62)—(63), приводились в [1] и [3].

Теперь рассмотрим наиболее общий случай, когда в объекте управления (40) управляющее воздействие формируется по закону (41), а связь между переменными x_1; x_2; ... x_n и реальными выходами объекта управления описывается уравнением (45). Здесь также можно сформулировать критерий, выполнение которого гарантирует сохранение устойчивости при вариациях параметров. Критерий этот был разработан автором совместно с М. А. Галактионовым и опубликован в конце книги [1]. Его можно назвать критерием Петрова—Галактионова или П-Г-критерием. Критерий этот опирается на материал, изложенный в [1] и касающийся оптимизации систем управления по квадратичным и средне-квадратичным критериям, поэтому в настоящей работе мы его приводить не будем. Отметим лишь, что он состоит в проверке равенства нулю ряда составных матриц, в состав которых входит и матрица H из уравнения (45).

Теперь можно сформулировать следующие критерии, позволяющие для линейных систем управления выделить преобразования, эквивалентные в расширенном смысле. Для общего случая объектов управления (40) с обратной связью (41) и определяемой уравнением (45) матрицей связи H между переменными x_1; ... x_n и реальными выходами, можно сформулировать следующее утверждение:

> Для того чтобы преобразование, эквивалентное в классическом смысле, было бы эквивалентным и в расширенном смысле:
>
> Достаточно, чтобы при преобразовании не изменялась матрица H в уравнении (45).

> Необходимо и достаточно, чтобы преобразованная система уравнений удовлетворяла критерию П-Г из книги [1].

Если обратная связь формируется по закону (43) и с помощью эквивалентных в классическом смысле преобразований исключается p переменных x_i, и они заменяются на равные им комбинации оставшихся переменных и их производных, то такое преобразование будет эквивалентным в расширенном смысле, если $p < 2$, и может не быть преобразованием, эквивалентным в расширенном смысле, если $p \geq 2$.

Отметим, что данные результаты установлены только лишь для систем линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами частного вида — для систем уравнений, описывающих системы управления. Подобные системы состоят из уравнений объекта управления (40) и уравнений регулятора (41). Для общего случая системы нескольких дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами различных порядков проблема различения преобразований эквивалентных и не эквивалентных в расширенном смысле пока еще не получила решения и является интересной и важной темой для научного исследования.

Глава 8

Предотвращение аварий и катастроф

В *главе 6* мы рассказывали об авариях, причиной которых являются недостатки традиционных методов проектирования и расчета систем управления, недоучет различий между преобразованиями, эквивалентными в классическом смысле и в расширенном. Если это различие осознано, то избежать аварий несложно.

Можно, например, вычислить характеристический полином системы управления по уравнениям, записанным относительно тех переменных, в функции от которых реально формируется управляющее воздействие (переменных y_1, y_2, ... y_n из уравнения (45)). Вычислив полином и убедившись, что он гурвицев, нужно дополнительно проверить:

1. Что ни один из корней характеристического полинома не лежит на комплексной плоскости вблизи мнимой оси. Это — обычная проверка, давно рекомендуемая в учебниках по автоматическому управлению, используемая во всех проектно-конструкторских организациях, поэтому говорить о ней более подробно нет необходимости. Зато следующие две проверки в учебной литературе обычно не упоминаются, хотя они также важны и необходимы.
2. Что степень характеристического полинома не оказалась меньше суммы порядков дифференциальных уравнений, входящих в систему.
3. Что ни один из коэффициентов характеристического полинома не оказался намного (на два-три порядка) меньше остальных.

Важность второго пункта иллюстрирует примеры систем (25)—(26) и (55)—(56). Если степень характеристического полинома меньше суммы порядков дифференциальных уравнений, входящих в систему, то это может говорить о том, что старший коэффициент оказался разностью двух одинаковых чисел и по этой причине обратился в нуль. Так, в системе уравнений (55)—(56), которая получилась в результате исключения переменных x_1 и x_2 из системы (53)—(55), старший коэффициент (коэффициент при старшей степени переменной) характеристического полинома (коэффициент при λ^4) обратился в нуль потому, что он равен $m_1m_8 - m_5m_{10}$, а в системе (55)—(56) имеет место равенство $m_1m_8 = m_5m_{10}$. Однако подобное равенство может иметь место только в том случае, если параметры реальной, воплощенной "в металле" системы управления, в точности равны параметрам математической модели. При вариациях параметров точное равенство может нарушиться, в характеристическом полиноме появится член $n_4\lambda^4$ (четвертой степени) с малым коэффициентом n_4. Если $n_4 > 0$, то система будет устойчива. Однако в ходе эксплуатации при малых вариациях коэффициентов m_1, m_8, m_5 и m_{10} разность $m_1m_8 - m_5m_{10}$ может изменить знак, и устойчивость исчезнет.

Важность третьего пункта также может быть проиллюстрирована на рассмотренном нами примере системы (25)—(26). Если вариации коэффициентов таковы, что характеристический полином остался гурвицевым полиномом четвертой степени, но с малым коэффициентом при старшем члене, то это может говорить о том, что этот коэффициент оказался малой разностью больших коэффициентов исходной системы (25)—(26) и поэтому при их вариациях он может изменить свой знак. Изменение знака будет означать потерю устойчивости у реальной системы.

Мы убеждаемся, что сохранение порядка при преобразованиях дифференциальных уравнений не обязательно гарантирует эквивалентность в расширенном смысле. Необходимо проверить еще и тот случай, когда порядок не изменяется, но некоторые из коэффициентов оказываются малыми по сравнению с остальными.

Недостаток предлагаемого подхода заключается в том, что при расчетах по реальным выходам, без приведения к форме Коши, нельзя использовать стандартное программное обеспечение.

Поэтому возможен и другой подход: математическую модель объекта управления приводят к форме Коши, выписывают матрицу H из уравнения (45), а по окончании расчета дополнительно проверяют — выполнены ли условия критерия Петрова—Галактионова (П-Г-критерия), приведенного в книге [1].

Такая проверка наиболее надежно гарантирует от аварий, происходящих от потери устойчивости, но для удобства ее применения необходима разработка программного обеспечения проверки П-Г-критерия, поскольку проверка его "вручную" в большинстве случаев не реальна.

Отметим, что если условия П-Г-критерия не выполнены, то в той же книге [1] показано, какие именно изменения следует внести в проектируемую систему управления для того, чтобы она сохраняла устойчивость при вариациях параметров.

Мы убеждаемся, что если различие между преобразованиями, эквивалентными в классическом смысле и в расширенном, осознано, если опасность аварий, происходящих от неразличения этих понятий осознана, то техногенных аварий и катастроф можно избежать, и причем избежать довольно простыми средствами.

Главная опасность заключается в том, что в большинстве проектно-конструкторских организаций до сих пор не осознали необходимость усовершенствования традиционных методов расчета и проектирования. Несмотря на то, что об этих методах неоднократно говорилось и докладывалось на авторитетных научных семинарах, несмотря на то, что теоретические основы методов дополнительной проверки, страхующей от аварий, опубликованы в известной книге [1], а предупреждения о неполноте традиционных методов расчета и проектирования несколько раз публиковались на страницах научных и технических журналов [3, 4, 5], все же усовершенствованные методы проверки еще не вошли в повседневную практику проектно-конструкторских организаций, и поэтому возможность неоправданных аварий не ликвидирована, она еще существует.

Будет досадно, если первой внедрит у себя усовершенствованные методы расчета какая-либо зарубежная фирма. Опираясь на публикации в российской технической литературе, это в принципе можно сделать. Дополнительная работа по программному обеспечению усовершенствованных методов не очень велика.

Между тем фирма, первой внедрившая у себя усовершенствованные методы расчета, получит существенные преимущества в конкурентной борьбе. Она может с полным правом утверждать, что выпускаемая ею продукция, ее системы и устройства, будут более безопасны, чем продукция фирм-конкурентов, довольствующихся традиционными методами. Это даст ей серьезные преимущества на рынках сбыта.

Глава 9

Нелинейные системы.

Гарантирует ли существование функции Ляпунова сохранение устойчивости при вариациях параметров?

Об устойчивости решений систем линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами судят по корням характеристического полинома. Для систем нелинейных уравнений одним из наиболее распространенных и сильных методов проверки устойчивости является построение и исследование функций Ляпунова. Эти функции были названы в честь великого русского математика А. М. Ляпунова (1856—1918), который в 1892 году разработал новые методы проверки устойчивости.

Изложим очень кратко самые основные свойства функции Ляпунова. Пусть задана система нелинейных автономных уравнений в форме Коши:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{dx_1}{dt} = f_1(x_1;...x_n) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{dx_1}{dt} = f_n(x_1;...x_n) \end{array}\right\}, \tag{65}$$

где $f_i(x_1;\ ...x_n)$ — в общем случае нелинейные функции переменных $x_1;\ ...x_n$, и пусть системе (65) удовлетворяет нулевое решение. Будет ли это решение $x_1 = x_2\ ...\ x_n = 0$ устойчиво? Для определенности будем в дальнейшем под устойчивостью понимать асимптотическую устойчивость, когда решения, удовлетворяющие при $t = 0$ начальным условиям, мало отличающимся от нулевых: $x_1(0) = d_1;\ ...\ x_n(0) = d_n$, с течением времени стремятся к нулю.

Введем теперь в рассмотрение функцию V переменных $x_1;\ ...x_n$, которая равна нулю только тогда, когда все переменные равны нулю, и положительна при всех других комбинациях значений переменных.

Примером такой функции может служить

$$V = x_1^2 + \dots x_n^2. \tag{66}$$

Вычислим теперь полную производную функции V по времени на решениях системы (65). Такую производную, следуя терминологии, принятой в теории устойчивости, называют *производной функции V в силу системы (65)*. Для вычисления используем известную формулу для полной производной:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x_1} \cdot \frac{dx_1}{dt} + \dots\dots \frac{\partial V}{\partial x_n} \cdot \frac{dx_n}{dt} \tag{67}$$

и подставим вместо каждой из производных $\dfrac{dx_i}{dt}$ их значения из уравнений (65). Получим для "производной в силу системы" формулу

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x_1} \cdot f_1(x_1;\dots x_n) + \dots\dots \frac{\partial V}{\partial x_n} \cdot f_n(x_1;\dots x_n). \tag{68}$$

Пусть теперь функция V такова, что производная (68) для всех $x_i \neq 0$ отрицательна. Такую функцию назовем *функцией Ляпунова*. В 1892 году А. М. Ляпунов доказал, что если такая функция существует, то нулевое решение системы (65) асимптотически устойчиво.

Доказательство А. М. Ляпунова допускает наглядную интерпретацию:

> Если на решениях системы (65) производная функции V отрицательна, то функция V с течением времени будет только убывать, стремясь к своему наименьшему значению, равному нулю, а поскольку это наименьшее значение достигается при $x_1 = x_2 \dots x_n = 0$, то и все переменные x_i будут стремиться к нулю.

В качестве простейшего примера рассмотрим систему

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1 \\ \dot{x}_2 &= -x_2 \end{aligned}\right\}, \tag{69}$$

нулевое решение которой безусловно устойчиво, поскольку все решения системы (69) имеют вид: $x_1 = c_1 e^{-t}$; $x_2 = c_2 e^{-t}$.

В качестве функции Ляпунова можно взять функцию

$$V = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2) \tag{70}$$

(квадратичную форму переменных x_1 и x_2). Ее производная $\dot{V} = \dot{x}_1 \cdot x_1 + \dot{x}_2 \cdot x_2$ в силу системы (69) приобретает вид:

$$\dot{V} = -x_1^2 - x_2^2 \tag{71}$$

и для любых значений переменных кроме $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ является отрицательной. Отсюда следует, что нулевое решение уравнений (69) устойчиво. Если бы не могли непосредственно найти общее решение уравнений (69), то мы могли бы сделать заключение об устойчивости на основании исследования функции Ляпунова (70).

Мы изложили наиболее простую часть теории Ляпунова. Существуют функции Ляпунова, производные которых "в силу системы" удовлетворяют более слабому условию, они не обязательно отрицательны, а только не положительны. Эти и другие, более тонкие, условия рассматриваются в многочисленных работах, посвященных теории устойчивости [6, 7, 8, 9, 10]. Подчеркнем главное — если найдена та или другая функция Ляпунова, то вопрос об устойчивости нулевого решения нелинейной системы решен, а устойчивость любого решения системы можно свести к исследованию устойчивости нулевого решения. Поэтому, несмотря на то, что отыскать функцию Ляпунова очень нелегко, поскольку общих методов ее нахождения не существует, поиску функций Ляпунова, разработке теории устойчивости, основанной на исследовании этих функций, посвящены сотни книг и статей многочисленных исследователей. Так, например, только в небольшой книге Е. А. Барбашина [9] даны ссылки на 190 работ 128 авторов, посвященных этим функциям.

Однако из предыдущего изложения мы убедились, что для обоснованного суждения о реальном поведении исследуемой системы необходимо иметь возможность судить не только об устойчивости решения, но и о том, сохраняется ли устойчивость при неизбежных на практике вариациях параметров. Поэтому поставим важнейший вопрос: гарантирует ли существование функции Ляпунова сохранение устойчивости нулевого решения хотя бы при сколь угодно малых вариациях параметров?

К сожалению, ответ на этот вопрос может быть только отрицательным. Действительно, для отыскания функции Ляпунова исследуемую систему уравнений приводят обычно к форме Коши (65). А мы уже показали, что в зависимости от вида исходных, непосредственно вытекающих из законов физики или теоретической механики, уравнений системы, преобразование к форме Коши может не оказаться преобразованием, эквивалентным в расширенном смысле (даже если оно вполне эквивалентно в классическом смысле).

Все это удобно пояснить на примере уже рассмотренной системы уравнений (25)—(26). После приведения ее к форме Коши она переходит в уравнения (33)—(35). Подставив (35) в (33), получим систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -3x_1 - x_3 - x_4 \\ \dot{x}_3 &= x_4 \\ \dot{x}_4 &= -x_3 - 2x_4 \end{aligned}\right\} . \tag{72}$$

Характеристический полином этой системы имеет вид (28), и ее нулевое решение заведомо устойчиво. Кроме того, относительно устойчивых линейных систем доказана общая теорема: такие системы всегда имеют функцию Ляпунова в виде квадратичной формы — в случае системы (72) это будет квадратичная форма от переменных x_1, x_3, x_4.

Но мы убедились еще в *главе 4*, что исходная система (25)—(26) может терять устойчивость даже при сколь угодно малых вариациях некоторых своих коэффициентов. Следовательно, даже для линейных систем существование функции Ляпунова не гарантирует от потери устойчивости даже при сколь угодно малых вариациях. Тем более нет возможности гарантировать сохранение устойчивости при вариациях параметров для нелинейных систем. Разница заключается только в поведении систем после потери устойчивости — для линейных систем потеря устойчивости означает неограниченное возрастание переменных с течением времени. В нелинейных системах (а, как известно, нелинейные уравнения более полно описывают поведение реальных физических объектов) неограниченного возрастания переменных с течением времени при потере устойчивости не будет. Однако и в нелинейных системах потеря устойчивости, как правило, сопровождается выходом переменных за допустимые пределы, потерявшая устойчивость система становится неработоспособной и может быть причиной тяжелой аварии.

Традиционные, используемые сегодня во всех проектно-конструкторских организациях методы проверки устойчивости, основанные, в частности, и на построении функции Ляпунова, могут дать неверный ответ на вопрос о сохранении устойчивости при неизбежных на практике вариациях параметров и поэтому могут стать причиной опасных аварий.

Для предупреждения ошибок и аварий традиционную методику исследования устойчивости следует усилить дополнительными проверками, о которых уже говорилось в предыдущих главах.

Глава 10

Определения и теоремы

В предыдущих главах мы использовали свободный стиль изложения, без разделения материала на определения и теоремы. Вопрос о стиле изложения не является вопросом принципиальным — при выборе стиля ориентируются на вкусы и пристрастия читателя, стремясь к наибольшей доступности и легкости понимания. Напомним, что такой выдающийся ученый, как академик Алексей Николаевич Крылов (1863—1945), в своих исследованиях вообще не использовал слова "теорема", и это не помешало А. Н. Крылову быть общепризнанным классиком прикладной математики. Для удобства тех читателей, которые привыкли к другому стилю, попытаемся изложить некоторые результаты предыдущих глав на языке определений и теорем.

Будем рассматривать системы линейных уравнений с постоянными коэффициентами и перенумеруем все коэффициенты, входящие в рассматриваемую систему, от m_1 до m_k. Примером такой системы может служить система уравнений (55)—(56) с двенадцатью перенумерованными коэффициентами.

Определение 1. ε-окрестностью рассматриваемой системы назовем множество систем дифференциальных уравнений той же структуры, коэффициенты которых, обозначаемые через $\overline{m}_1$, подчинены неравенствам

$$m_i(1-\varepsilon_i) \le \overline{m}_i \le m_i(1+\varepsilon_i), \tag{73}$$

где ε_i — числа, малые по сравнению с единицей, а $\varepsilon_i m_i$ — вариации коэффициентов m_i.

Теорема 1. Если рассматриваемая система устойчива и вариации ее коэффициентов удовлетворяют неравенствам (73), то для того, чтобы она сохраняла устойчивость при вариациях коэффициентов, необходимо и достаточно, чтобы в ее ε-окрестности находились одни устойчивые системы.

Доказательство. Если в ε-окрестности находится хотя бы одна неустойчивая система, то при вариациях коэффициентов рассматриваемой системы они могут совпасть с коэффициентами именно этой неустойчивой системы, а это означает, что исходная система после вариации коэффициентов потеряет устойчивость. Это доказывает необходимость условия теоремы. Достаточность условия очевидна — если в ε-окрестности нет ни одной неустойчивой системы, то при любых вариациях, удовлетворяющих неравенству (73), рассматриваемая система сохранит устойчивость.

Данная теорема придает более точную формулировку утверждению, высказанному в *главе 4*. Из этой теоремы непосредственно вытекают следствия, уже рассмотренные нами, — поскольку свойство сохранения устойчивости зависит не от самой системы, а от ее ε-окрестности, то оно может появляться и исчезать при эквивалентных (в классическом смысле) преобразованиях, не изменяющих устойчивости рассматриваемой системы. Отсюда вытекает необходимость введения нового математического понятия — эквивалентности в расширенном смысле, о котором уже говорилось в предыдущих главах.

Для нелинейных систем в определение ε-окрестности и в теорему 1 следует внести небольшое уточнение. Ограничимся рассмотрением автономных систем, т. е. систем, в которые время t явно не входит.

В автономной системе нелинейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами перенумеруем все коэффициенты. Примером может служить система

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_1 &= m_1 x_2 \\ \dot{x}_2 &= m_2 x_1 + m_3 x_2 + m_4 x_2^3 \end{aligned}\right\} . \tag{74}$$

Предположим, что рассматриваемая система имеет устойчивое нулевое решение. В дальнейшем исследуется сохранение устойчивости этого решения при вариациях коэффициентов.

Определение 2. ε-окрестностью рассматриваемой системы назовем множество систем дифференциальных уравнений той же структуры, имеющих нулевое решение; коэффициенты каждой системы, обозначаемые через $\overline{m}_i$, подчинены неравенствам (73).

Теорема 2. Для сохранения устойчивости нулевого решения при вариациях коэффициентов необходимо и достаточно, чтобы в ε-окрестности исследуемой системы находились только системы, у которых нулевое решение устойчиво.

Доказательство теоремы 2 вполне аналогично доказательству теоремы 1.

Глава 11

Проблема сохранения устойчивости

Обеспечение сохранения устойчивости при вариациях параметров тесно связано с теорией оптимального управления. Еще в 60-е годы прошлого века получили развитие теория синтеза оптимальных управляющих воздействий в каналах обратной связи, теория синтеза оптимальных регуляторов, которые обеспечивали значительное улучшение качества управления по сравнению с ранее используемыми регуляторами и системами.

Использование оптимальных регуляторов, замена ими прежних систем управления могли принести большой экономический и оборонный эффект, и поэтому теория оптимального управления интенсивно разрабатывалась как в нашей стране, так и за рубежом. Вышло несколько монографий, посвященных синтезу оптимальных регуляторов (книги [11, 12, 13, 14]. Однако при реализации оптимальных систем управления быстро стало обнаруживаться, что они в ряде случаев способны терять устойчивость даже при очень малых отклонениях параметров регулятора или объекта управления от расчетных значений. Разумеется, обнаружение подобных случаев, каждый из которых грозил серьезной аварией, сразу подрывало все доверие к теории оптимального управления, перекрывало возможности ее практического применения, тем более, что причина потери устойчивости оставалась не раскрытой. Долгое время считалось, что появление регуляторов, теряющих устойчивость при вариациях параметров, зависит от недостатков используемых методов синтеза оптимальных систем управления, и поэтому продолжались поиски таких методов синтеза, которые обеспечивали бы наилучшее возможное качество управления и в то же время гарантировали сохранение устойчивости при неизбежных на практике вариациях параметров.

Только с 1964 по 1973 год было опубликовано четыре монографии, посвященные новым методам синтеза оптимальных систем, но неизменно оказывалось, что и новые методы обладали теми же недостатками, что и старые — не гарантировали от потери устойчивости.

Перелом произошел в 1973 году. В начале года была опубликована статья П. В. Надеждина [15], в очередной раз раскрывшая, что еще один, недавно предложенный алгоритм синтеза оптимальных систем тоже не гарантирует от потери устойчивости при вариациях параметров, и это рассматривалось автором статьи как недостаток алгоритма, который можно устранить, но в том же году в монографии [16] было показано, что на самом деле алгоритмов, свободных от этого недостатка, вообще не существует, поскольку минимум критерия качества часто лежит на границе устойчивости, и никакой алгоритм этого отменить не сможет. Отсюда следовало, что нужно прекратить поиски несуществующего алгоритма, а сохранение устойчивости при вариациях параметров рассматривать как дополнительное требование, за реализацию которого нужно заплатить жертвой части критерия качества.

Поясним сказанное на примере. В работах [11, 16, 17] рассматривались односвязные системы управления, математической моделью объекта управления в которых является дифференциальное уравнение вида:

$$A(D)x = B(D)u + \varphi(t), \tag{75}$$

где:

$A(D) = a_n D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \ldots a_0$;

$B(D) = b_m D^m + b_{m-1} D^{m-1} + \ldots b_0$ — полиномы от оператора дифференцирования $D = \dfrac{d}{dt}$;

x — регулируемая переменная;

u — управляющее воздействие;

$\varphi(t)$ — возмущающее воздействие.

Как правило, возмущающее воздействие является не полностью известным нам стационарным случайным процессом, относительно которого чаще всего известны лишь его статистические характеристики и в частности — спектральная плотность мощности, которую часто коротко называют спектром процесса $\varphi(t)$. Спектр процесса является четной функцией от переменной ω — частоты. Его вычисляют на основе обработки наблюдений за возмущающими воздействиями, а затем аппроксимируют дробно-рациональной четной функцией:

$$S_\varphi = \frac{a_p \omega^{2p} + a_{p-1}\omega^{2p-2} + \dots a_0}{b_q \omega^{2q} + b_{q-1}\omega^{2q-2} + \dots b_0}. \tag{76}$$

Коэффициенты a_i и b_i в формуле (76) подбирают из условия, чтобы функция (76) возможно меньше отличалась от экспериментальных данных о спектре в интересующей нас полосе частот. Более подробные сведения о случайных процессах, их спектрах, о полосах частот, которые существенны для той или иной системы, читатель может найти в книге [1]. Там же приведены и алгоритмы синтеза оптимального регулятора, математической моделью которого является дифференциальное уравнение

$$W_1(D)u = W_2(D)x, \tag{77}$$

где $W_1(D)$ и $W_2(D)$ — полиномы от оператора дифференцирования. Этот регулятор должен обеспечивать устойчивость системы (75)—(77) и минимум среднеквадратичного критерия качества:

$$J = m^2 < x^2 > + < u^2 >, \tag{78}$$

где $<x^2>$ и $<u^2>$ являются средними квадратами переменных x и $u(t)$ (т. е. $< x^2 > = \lim\limits_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int\limits_0^T x^2 dt$ и, аналогично, $< u^2 > = \lim\limits_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int\limits_0^T u^2 dt$), а постоянное число m^2 является множителем Лагранжа. Критерий (78) отражает как требования к качеству регулирования, так и ограничения на величину управляющего воздействия. Более подробные сведения о критерии качества (78), о выборе множителя Лагранжа m^2 даны в уже упоминавшейся книге [1]. Там же приведены и достаточно сложные алгоритмы синтеза оптимального регулятора, т. е., собственно, вычисления коэффициентов операторных полиномов в уравнении (77). Для этих алгоритмов составлено хорошее программное обеспечение, которое позволяет быстро провести все необходимые вычисления и получить математическую модель регулятора, которая затем воплощается в реально работающее устройство, обеспечивающее улучшение качества управления.

Приведем простой пример.

Рассмотрим объект управления первого порядка

$$4Dx = (D+1)u + \varphi(t) \tag{79}$$

с критерием качества $J = 9 < x^2 > + < u^2 >$ и возмущающим воздействием $\varphi(t)$, спектральная плотность мощности которого хорошо аппроксимируется формулой:

$$S_\varphi = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{1+\omega^2}. \tag{80}$$

Выполнив расчет по алгоритму, приведенному в [1], убедимся, что минимум выбранного критерия качества обеспечит регулятор

$$(3D - 5)u = 12(D + 4)x. \tag{81}$$

Обеспечиваемое этим регулятором значение критерия качества равно 0,4336 и является наименьшим из всех возможных. Регулятор (81) обеспечивает устойчивость решений системы уравнений (79)—(81), но эта устойчивость нарушается, если некоторые из параметров объекта управления (т. е. некоторые коэффициенты его математической модели (79) или некоторые из коэффициентов математической модели регулятора (81)) отклоняются от расчетных значений даже на сколь угодно малые величины.

Действительно, если мы учтем возможную вариацию параметров и вместо объекта управления (79) замкнем регулятором (81) объекты управления

$$4(1 + \varepsilon)Dx = (D + 1)u + x(t),$$

то характеристический полином замкнутой системы примет вид:

$$-3\varepsilon D^2 + (20 + 5\varepsilon)D + 12.$$

Таким образом, при $\varepsilon = 0$ характеристический полином будет гурвицевым и замкнутая система будет устойчивой, но уже при сколь угодно малых $\varepsilon > 0$ устойчивость потеряется.

Разумеется, отсюда следует, что регулятор (81) для практического использования совершенно не пригоден. В то же время нетрудно проверить, что регулятор (81) действительно обеспечивает минимум избранного нами критерия качества. Никакой другой регулятор другой структуры или той же структуры, но с другими коэффициентами, равного или лучшего значения критерия качества обеспечить не может. Вся беда заключается в том, что этот минимум лежит на границе устойчивости, и никакой алгоритм расчета не может этого изменить.

Несколько позже, в монографии [17] был приведен простой критерий того, что минимум критерия качества не лежит на границе устойчивости. Критерием является выполнение неравенства

$$p \geq m + q - 1. \qquad (82)$$

Позднее это неравенство получило в технической литературе название критерия Ю. Петрова. В этом неравенстве m — это степень полинома $B(D)$ в уравнении объекта управления (75), p и q — степени числителя и знаменателя в аналитической аппроксимации спектральной плотности мощности (76).

Невыполнение критерия Ю. Петрова (82) свидетельствует о том, что минимум критерия качества (78) лежит на границе устойчивости, и поэтому регулятор, доставляющий минимум критерию качества (78), не может обеспечить сохранения устойчивости даже при сколь угодно малых вариациях параметров и фактически будет совершенно не работоспособен. Так, в рассматриваемом нами примере с объектом управления (79) и спектром возмущающих воздействий (80) имеем $m = 1$, $p = 0$, $q = 1$, критерий Ю. Петрова не выполняется, и, следовательно, минимум критерия качества (78) лежит на границе устойчивости. Поэтому не удивительно, что система уравнений (79)—(81) не сохраняет устойчивости даже при сколь угодно малых вариациях параметров. Для того чтобы устойчивость сохранялась, необходимо пожертвовать частью критерия качества. Неравенство (82) подсказывает, что для этого можно изменить аналитическую аппроксимацию спектральной плотности мощности, используемую при расчете регулятора.

Поскольку для объекта управления (79) наиболее существенна полоса низких частот, то можно аппроксимацию (80) заменить на аппроксимацию

$$S_\varphi = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1 + k^2\omega^2}{1 + \omega^2}, \qquad (83)$$

которая при умеренных значениях коэффициента k в наиболее существенной для объекта управления (81) полосе частот от $\omega = 0$ до $\omega = 0{,}3$ не слишком отличается от аппроксимации (80) (расчет критерия качества, разумеется, ведем по исходной аппроксимации (80), аппроксимация (83) используется только для расчета регулятора, но не при вычислении критерия качества).

В публикации [1] был приведен подробный расчет, показывающий, что при использовании для расчета регулятора аппроксимации (83) характеристический полином замкнутой системы описывается формулой:

$$(20k - 3\varepsilon + 11\varepsilon k)\lambda^2 + (20 + 12k + 5\varepsilon + 3\varepsilon k)\lambda + 12,$$

из которой следует, что для любой вариации ε в объекте управления можно подобрать такое значение коэффициента k в аппроксимации (83), чтобы замкнутая система была устойчива. Чем больше величина коэффициента k в формуле (83), тем шире диапазон вариаций, отклонений параметров объекта управления или регулятора от номинальных значений, не нарушающих устойчивость, но зато тем больше и жертва в критерии качества.

Конкретно для обеспечения устойчивости объекта управления (79) не только при малых, но и при больших отклонениях примеров от расчетных значений достаточно выбрать $k = 0{,}1$ (подробные расчеты приведены в книге [1] на стр. 145—147). При этом вместо регулятора (81) получаем регулятор

$$(1{,}9D - 5{,}3)u = (15{,}6D + 48)x, \qquad (84)$$

а критерий качества вместо минимально возможного значения 0,4336 становится равным 0,4374, или увеличивается на 0,88%. Такая малая жертва в критерии качества связана с тем, что при выборе новой аналитической аппроксимации спектральной плотности мощности возмущающего воздействия мы следим за тем, чтобы она отличалась от экспериментальных данных по возможности за пределами полосы частот, существенных для той или иной системы (конкретно для системы (79)—(84) существенна полоса частот $0 \le \omega \le 0{,}3$; подробности расчета — в книге [1], стр. 145–147).

Опубликование в 1973 году монографии [16] изменило весь путь развития теории оптимального управления: прекратились поиски несуществующего алгоритма, обеспечивающего одновременно и минимум критерия качества (78), и гарантию сохранения устойчивости при вариациях параметров. Вместо этого перешли к обеспечению сохранения устойчивости при вариациях параметров как дополнительного требования к системе. Однако почти нигде не указывается, что этот перелом в развитии теории оптимального управления был предложен и обоснован в работах [16] и [17], выполнявшихся в Ленинградском университете (первый метод обеспечения сохранения устойчивости при вариациях параметров был предложен в [16], более совершенный метод был описан в [17], стр. 218—226). Умолчание о работах [16] и [17], выполненных в Ленинградском университете, безусловно, наносит ущерб престижу и авторитету университета. Но дело не только в приоритете. Из-за этого умолчания наибольшее распространение в практике расчетов получил другой метод обеспечения сохранения устойчивости при вариациях параметров, основанный не на замене аналитической аппроксимации спектральной плотности мощности, а на изменении критерия качества.

Вместо критерия (78) вводят критерий

$$J = m^2 < x^2 > + < u^2 > + \lambda_1 < \dot{u}^{\,2} > + \ldots \lambda_k < \left[u^{(k)} \right]^2 >, \qquad (85)$$

в котором только первый и второй члены имеют четкий физический смысл, а остальные члены вводятся лишь для обеспечения сохранения устойчивости при вариациях параметров. Чем больше коэффициенты λ_1; ... λ_k, тем шире диапазон возможных отклонений параметров от номинальных значений, но тем больше и жертва в значении критерия качества (78). Введение критерия (85) вместо (78) фактически эквивалентно изменению аналитической аппроксимации спектра и тоже позволяет обеспечить сохранение устойчивости при вариациях параметров объекта управления или регулятора, но требуемая для этого жертва критерия качества может оказаться существенно большей. Причина заключается в том, что добавление новых членов в критерии (78), превращение его в критерий (85) эквивалентно такому изменению аналитической аппроксимации спектра, которое происходит в неизвестной для нас полосе частот. Если эта полоса оказывается существенной для данной системы, то жертва в критерии качества оказывается более тяжелой, чем при использовании методики, изложенной в книге [17]. Таким образом, замалчивание приоритета Ленинградского (ныне — Санкт-Петербургского) университета дорого обходится нашей экономике.

Но главное все же было сделано. После опубликования монографий [16] и [17] открылся путь к непосредственному использованию оптимальных регуляторов в промышленности и на транспорте. Теперь оптимальное управление уже не пугало проектантов потерей устойчивости при вариациях параметров, а экономический выигрыш от перехода на оптимальное управление достаточно велик и ощутим.

Многие данные о практическом использовании оптимальных регуляторов, о достигнутой экономии, об улучшении точности систем стабилизации и слежения при переходе на оптимальное управление опубликованы в монографии [18].

Наиболее интересные результаты были получены при исследовании проблемы сохранения устойчивости в ходе оптимизации многомерных объектов управления, математической моделью которых служат векторно-матричные уравнения

$$\dot{x} = Ax + Bu\,, \qquad (86)$$

где x — вектор регулируемых переменных; u — управление, скаляр; A и B — матрицы. Теория оптимального управления позволяет рассчитывать уравнение связи между оптимальным управлением и регулируемыми переменными, причем для очень важного частного случая квадратичного критерия качества эта связь оказывалась очень простой:

$$u = Kx, \tag{87}$$

где K — матрица-строка постоянных коэффициентов усиления. Теория оптимального управления позволяет рассчитывать оптимальные значения этих коэффициентов (подробности — в [1], стр. 206—230), однако в большинстве приложений приходится учитывать, что не все составляющие вектора x доступны для измерения и непосредственного использования в канале обратной связи. Поэтому необходимо учитывать уже упоминавшуюся прямоугольную матрицу

$$y = Hx, \tag{88}$$

которая связывает вектор всех регулируемых переменных x и вектор тех переменных y, которые могут быть измерены и непосредственно использованы в канале обратной связи. Размерность вектора y, как правило, меньше размерности x. Получив уравнение оптимального регулятора (87), его потом все равно необходимо преобразовать к переменным y, пользуясь для этого, разумеется, только эквивалентными преобразованиями.

При анализе сохранения устойчивости оптимальных систем при вариациях коэффициентов математической модели объекта управления (86) или регулятора (87) как раз и обнаружилась *математическая неожиданность*:

> Выявилось, что сохранение устойчивости при вариациях параметров зависит от того, сколько составляющих вектора x недоступно для измерения, на сколько единиц размерность вектора y меньше размерности вектора x, т. е. зависит (в конечном счете) от матрицы H.

Неожиданность и парадоксальность полученного результата заключались в том, что, во-первых, раз все преобразования были эквивалентными, то считалось, что они не могут изменить никаких свойств преобразуемой системы, во-вторых, характеристический полином системы уравнений (86)—(87), а тем самым и все ее решения — не зависят от матрицы H, а целиком определяются матрицами A, B и K (характеристический полином системы уравнений (86)—(87) является определителем матрицы $\lambda E - A - BK$, не зависящей от матрицы H).

Объяснение парадокса было дано в книге [1], стр. 230. Было указано, что поскольку сохранение устойчивости при вариациях параметров является не свойством самой системы управления, а свойством ее окрестности, то поэтому оно может изменяться даже при эквивалентных (равносильных) преобразованиях. Для того чтобы удостовериться, что спроектированная система не будет терять устойчивости при вариациях параметров, необходимо проверить выполнение критерия Петрова—Галактионова, сформулированного в книге [1], стр. 212—230. Там же, в [1], были даны и рекомендации — если критерий Петрова—Галактионова не выполняется, то какие изменения следует внести в проектируемую систему для того, чтобы она сохраняла устойчивость при вариациях параметров.

Отметим, что зависимость свойства сохранения устойчивости при вариациях параметров от матрицы H не является абсолютно неожиданной. Еще в 1961 году в известной работе американского математика Р. Калмана было показано, что от матрицы H зависит такое свойство системы, как *наблюдаемость* (более подробно о наблюдаемости рассказано, например, в [1], стр. 187—200). Однако долгое время считалось, что это относится только к наблюдаемости, а свойство сохранения устойчивости решений от матрицы H не зависит, поскольку сами решения от матрицы H действительно не зависят. Исследования, проведенные в [1], показали, что на самом деле все обстоит сложнее и неожиданнее.

Отметим, что в последние десятилетия стало заслуженно уделяться большое внимание проблеме сохранения устойчивости не только при очень малых, но и при конечных вариациях параметров, поскольку для предотвращения техногенной аварийности решение этой проблемы действительно очень важно. Начало исследованиям положила очень интересная работа В. Л. Харитонова [19], в которой рассматривалась следующая проблема.

Предположим, что некоторая система дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами имеет характеристический полином

$$a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots a_0, \tag{89}$$

но все коэффициенты этого полинома известны нам только с определенной конечной погрешностью:

$$\bar{a}_i - \varepsilon_i \le a_i \le \bar{a}_i + \varepsilon_i. \tag{90}$$

Как проверить, будет ли гурвицевым полином (89), если его коэффициенты удовлетворяют неравенствам (90)?

До 1978 года считалось, что для ответа на этот вопрос необходимо проверить знаки вещественных частей корней очень обширного семейства полиномов, поскольку устойчивость может, вообще говоря, потеряться при сложных комбинациях вариаций различных коэффициентов (например, коэффициент a_0 стал больше своего номинального значения, т. е. получил положительную вариацию, коэффициент a_1 получил вариацию отрицательную, коэффициент a_2 — положительную и т. д.) Всего оказывалось необходимым проверить 2^{n+1} полиномов, что при больших n очень громоздко. В. Л. Харитонов в своей работе [19] показал возможность обойтись гораздо меньшим количеством проверок, что существенно упрощает все расчеты. Работа В. Л. Харитонова получила заслуженную известность и была подхвачена многими исследователями как у нас в стране, так и за рубежом. Опубликованы десятки работ, посвященных этой теме. Важность проблемы проверки сохранения устойчивости при вариациях параметров сейчас хорошо осознана.

Однако остается нерешенным важный вопрос: пусть мы установили, что характеристический полином (89) при тех или иных вариациях его коэффициентов остается гурвицевым. Гарантирует ли это, что исходная система дифференциальных уравнений, для которой вычислен этот полином, будет сохранять устойчивость? К сожалению, ответ на этот вопрос может быть только отрицательным. Уже положения, опубликованные в книге [1], показывают, что любое исследование характеристического полинома может не дать нам правильного ответа на вопрос о сохранении устойчивости. Правильность ответа зависит от матрицы H, от которой сам характеристический полином не зависит.

Методика проверки сохранения знака вещественных частей корней полинома (89), основанная на работах В. Л. Харитонова, безусловно, является полезной, но для того, чтобы она гарантировала правильный ответ на вопрос о сохранении устойчивости при вариациях параметров, она должна быть дополнена. Дополнительная проверка может заключаться в проверке по критерию Петрова—Галактионова или (в общем случае) в проверке на эквивалентность в расширенном смысле тех преобразований исходной системы уравнений, которые были сделаны при вычислении ее характеристического полинома.

Высказанное в [1] утверждение о возможности возникновения и потери свойства сохранения устойчивости в ходе привычных и повсеместно используемых преобразований дифференциальных уравнений первоначально встретило недоверчивое отношение. Данное утверждение показалось слишком необычным и парадоксальным, хотя на самом деле оно непосредственно вытекает из более ранних исследований академика В. В. Румянцева, члена-корреспондента РАН В. И. Зубова, В. И. Воротникова, В. С. Ермолина и др., посвященных исследованию устойчивости по отношению к части переменных. Значимость этих исследований связана с тем, что не во всех случаях важна устойчивость сразу по всем переменным. Так, например, движение снаряда определяется шестью переменными: три из них определяют движение центра тяжести, а оставшиеся три — повороты вокруг системы осей, связанных с центром тяжести. Если одна из переменных отражает угол поворота вокруг продольной оси снаряда (относительно которой снаряд симметричен), то значение этой переменной не влияет на точность попадания в цель. Движение снаряда по отношению к этой переменной может быть и не устойчивым. Важна устойчивость по остальным переменным

Рассмотрим в качестве примера систему трех дифференциальных уравнений

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1 + x_2 - 2x_3 \\ \dot{x}_2 &= 4x_1 + x_2 \\ \dot{x}_3 &= 2x_1 + x_2 - x_3 \end{aligned}\right\}. \tag{91}$$

Характеристический полином этой системы равен

$$\lambda^3 + \lambda^2 - \lambda - 1 = (\lambda + 1)^2 (\lambda - 1) \tag{92}$$

и имеет как положительные, так и отрицательные корни, поэтому все решения системы (91) устойчивыми быть не могут. Исследуем устойчивость по переменной x_1. Введем новую переменную $\mu = x_2 - 2x_3$ и преобразуем систему (91) к новым переменным с помощью эквивалентных (в классическом смысле) преобразований. Поскольку $\dot{\mu} = \dot{x}_2 - 2\dot{x}_3$, то, с учетом второго и третьего из уравнений (91), получаем, что $\dot{\mu} = 4x_1 + x_2 - 2(2x_1 + x_2 - x_3) = -\mu$. Окончательно получаем относительно переменных x_1 и μ уравнения:

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_1 + x_1 &= \mu \\ \mu + \mu &= 0 \end{aligned}\right\}. \tag{93}$$

Система (93) имеет характеристический полином $\lambda^2 + 2\lambda + 1$ с корнями $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$. Поэтому решения $x_1(t)$ и $\mu(t)$ являются устойчивыми для любых начальных условий, в то время как решения x_2 и $x_3(t)$, как легко проверить, не устойчивы.

Когда подобный пример был впервые рассмотрен В. И. Зубовым, он встретил недоверчивое отношение. Действительно, система (91) является системой связной. Поэтому казалось очевидным, что из неустойчивости

x_2 и x_3 будет следовать и неустойчивость x_1. Однако в действительности это не так. В этом легко убедиться, непосредственно проинтегрировав систему (91) с начальными условиями $x_1(0) = x_{10}$; $x_2(0) = x_{20}$; $x_3(0) = x_{30}$.

Получим:

$$\left.\begin{aligned} &x_1 = x_{10}e^{-t} + (x_{20} - 2x_{30})te^{-t} \\ &x_2 = 2(x_{10} + x_{20} - x_{30})e^{t} + 2(2x_{30} - x_{20})te^{-t} + (2x_{30} - x_{20} - 2x_{10})e^{-t} \\ &x_3 = (x_{10} + x_{20} - x_{30})e^{t} + (2x_{30} - x_{20})te^{-t} + (2x_{30} - x_{10} - x_{20})e^{-t} \\ &\mu = x_2 - 2x_3 = (x_{20} - 2x_{30})e^{-t} \end{aligned}\right\}. \qquad (94)$$

Теперь мы непосредственно убеждаемся в том, что при любых начальных условиях решения x_1 и μ асимптотически устойчивы, а x_2 и x_3 — не устойчивы.

В то же время легко проверить, что свойство устойчивости по переменной x_1 пропадает при сколь угодно малых вариациях некоторых коэффициентов системы (91), например, коэффициента при x_2 во втором уравнении, хотя все корни характеристического полинома системы (91) лежат далеко от мнимой оси. Это явление описано в известной монографии [10], откуда и взят пример с системой (91). В монографии [10] данное явление объяснялось тем, что "свойство асимптотической устойчивости по отношению к части переменных обладает повышенной чувствительностью по отношению к вариациям коэффициентов линейной системы" ([10], стр. 79), и именно в этом видел В. И. Воротников отличие устойчивости по части переменных от устойчивости по всем переменным.

Мы видим теперь, что подобного различия на самом деле нет. Устойчивость по всем переменным в некоторых системах также может исчезать при сколь угодно малых вариациях коэффициентов. Просто подобные системы трудно обнаружить и исследовать.

Однако — и это важно подчеркнуть — результаты, полученные в проблеме сохранения устойчивости при вариациях параметров и опубликованные в [1, 2, 3, 4], являются продолжением и дальнейшим развитием предыдущих работ по этой проблеме — [6, 7, 8, 9, 10] и др. и прежде всего — исследований В. И. Зубова.

Собственно, уже в книге [1] было достаточно ясно показано, что традиционные методы проверки сохранения устойчивости при вариациях параметров, основанные на исследовании свойств характеристического полинома или матрицы коэффициентов при записи в форме Коши заведомо не могут всегда для всех систем давать правильный ответ, и поэтому для избежания аварий необходимо переходить к более совершенным методам, например, — с использованием критерия Петрова—Галактионова из книги [1]. Однако публикация книги [1] не привела к изменениям в практике расчетов устойчивости и ее сохранения в проектно-конструкторских организациях. Тогда автор книги в 1990 году разослал в адрес ряда научно-технических журналов прямые предостережения о том, что промедление в использовании более совершенных методов проверки сохранения устойчивости неизбежно приведет к авариям, которых вполне можно избежать. Одно из предостережений было опубликовано в журнале "Электромеханика" (публикация [4]). В редакциях других журналов аналогичные предостережения автора не были опубликованы из-за ряда возражений рецензентов. Анализ возражений рецензентов, а также оппонентов автора во время многочисленных обсуждений и научных дискуссий весьма поучителен.

Так, например, в одном из возражений утверждалось, что если при преобразованиях системы уравнений изменилось такое свойство системы, как сохранение устойчивости при вариациях параметров, то это говорит о неэквивалентности использованных преобразований, о том, что в них вкралась ошибка. Такое возражение свидетельствует, что даже на уровне высококвалифицированных специалистов нет полной ясности в вопросе об эквивалентности преобразований. Классическое определение эквивалентного (называемого также равносильным) преобразования заключается в указании на неизменность множества решений преобразуемой системы (Математическая энциклопедия, том 4, стр. 800, М., Советская энциклопедия, 1984). Решения при эквивалентных преобразованиях остаются неизменными, но свойство сохранения устойчивости при вариациях параметров зависит не от самих решений, а от окрестности их, и поэтому может изменяться (появляться и исчезать) при эквивалентных в классическом смысле преобразованиях уравнений.

Против примера с уравнениями (33)—(35) и (25)—(26), когда система уравнений, сохраняющая устойчивость при достаточно малых вариациях любых коэффициентов, переходит после эквивалентных преобразований в систему, способную терять устойчивость при сколь угодно малых вариациях, выдвигалось следующее возражение: поскольку при преобразованиях использовалась операция дифференцирования, то причина потери устойчивости может заключаться в том, что в ходе преобразований произошло умножение на негурвицев операторный полином. Действительно, возможность потери устойчивости при некоторых комбинациях операций дифференцирования давно известна, и мы рассматривали эту возможность в *главе 2* (пример с уравнением (11), которое после умножения на операторный полином $D - 1$ переходит в уравнение (22) с неустойчивым решением). Однако механизм потери устойчивости здесь совсем другой: потеря устойчивости не связана с вариациями коэффициентов и не зависит от них. Просто в решении появляется экспоненциально возрастающий член, показатель экспоненты которого не зависит от вариаций параметров, а определяется лишь корнем того негурвицева полинома от оператора дифференцирования, на который было умножено уравнение. Эта причина возможной потери устойчивости давно известна. В работах [1, 2, 4] раскрыта совсем другая причина, связанная с глубоким различием между преобразованиями, эквивалентными в классическом и в расширенном смысле. При потере устойчивости, происходящей по этой причине, в решениях системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами появляется экспоненциально возрастающий член, но его показатель экспоненты зависит от величины вариаций параметров.

Некоторые из возражавших автору указывали, что вариации коэффициентов в исходном и в преобразованном уравнениях трудно сравнивать между собой, поскольку при преобразованиях уравнений коэффициенты тоже меняют свою величину, и, в принципе, возможны случаи, когда малым изменениям коэффициентов в исходном уравнении будут соответствовать большие изменения в коэффициентах преобразованного уравнения. Такие случаи встречаются редко, но они возможны.

Для уточнения возникших сомнений было произведено непосредственное исследование вариаций конкретного и имеющего четкий физический смысл параметра на устойчивость. Для исследования был взят электропривод постоянного тока, работающий на исполнительный механизм типа рулевого устройства. Уравнение равновесия моментов на валу электропривода, как известно, имеет вид:

$$m\frac{d\omega}{dt} = i - k\omega - M_c, \tag{95}$$

где ω — частота вращения; m — механическая постоянная времени, зависящая от момента инерции электродвигателя, его магнитного потока и т. п.; i — ток якоря, который можно регулировать, и поэтому он играет роль управления; $k\omega$ — момент сопротивления на валу, зависящий от частоты вращения; M_c — момент сопротивления исполнительного механизма. В дальнейшем обозначим $\omega = x_1$, $i = x_2$, $M_c = -x_3$, коэффициент k примем равным двум, и тогда уравнение (95) запишется в виде:

$$m\dot{x}_1 = -2x_1 + x_2 + x_3. \tag{96}$$

Рассмотрим теперь устройство, в котором момент сопротивления x_3 связан с положением руля x_4 дифференциальными уравнениями:

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_3 &= x_4 \\ \dot{x}_4 &= -x_3 - 2x_4 \end{aligned}\right\}. \qquad (97)$$

Тогда система уравнений (96)—(97) будет математической моделью объекта управления. Пусть теперь управляющее воздействие x_2 формируется согласно уравнению:

$$x_2 = -x_1 - 2x_3 - x_4, \qquad (98)$$

которое совпадает с уже знакомым нам уравнением (35). Отметим также, что ранее рассмотренные нами уравнения (33) являются частным случаем уравнений (96)—(97) при $m = 1$. Значение $m = 1$ будем считать номинальным значением параметра m и будем исследовать влияние вариаций этого параметра на устойчивость решений. Характеристический полином уравнений (96), (97), (98), которые являются математической моделью замкнутой системы, как нетрудно вычислить, имеет вид:

$$P(\lambda) = m\lambda^3 + (3+2m)\lambda^2 + (6+m)\lambda + 3 = (m\lambda+3)(\lambda+1)^2. \qquad (99)$$

Его корни равны: $\lambda_1 = -\dfrac{3}{m}$; $\lambda_2 = \lambda_3 = -1$.

Мы убеждаемся, что характеристический полином остается гурвицевым для всех значений параметра m, лежащих в пределах $0 < m < \infty$, а это говорит о том, что все решения системы уравнений (96), (97), (98) остаются устойчивыми не только при малых, но и при больших отклонениях параметра m (механической постоянной времени электродвигателя) от его номинального значения $m = 1$. Разумеется, к этому же результату мы придем, если будем исследовать сохранение устойчивости решений системы уравнений (96), (97), (98) с помощью методики, предложенной В. Л. Харитоновым [19], а также если будем использовать методы робастного управления [20], столь популярного в последние годы.

Отметим, что формирование управляющего воздействия в виде (98) — т. е. в виде линейной функции всех координат — рекомендуется в теории управления, начиная еще с известной монографии А. М. Летова [13], и широко используется.

Предположим теперь, что управляющее воздействие x_2 можно формировать только в функции от переменной x_1 и ее проиводных. Как мы уже указывали, такое бывает часто, и, как правило, это связано и с недоступностью измерения части переменных, и с удобствами реализации, и т. п. Поэтому мы должны исключить переменные x_3 и x_4 из уравнений (96), (97), (98) при помощи эквивалентных (в классическом смысле) преобразований. Напомним, что понятие преобразований, эквивалентных в расширенном смысле, было введено автором лишь в 1992 году [2], и поэтому все традиционные методы расчета и проектирования используют, естественно, преобразования, эквивалентные в классическом смысле. О том, что эти преобразования могут изменять свойство сохранения устойчивости при вариациях параметров, было сказано в 1987 году в [1], но тогда это не привлекло внимания. Использовав эквивалентные в классическом смысле преобразования, мы от уравнений (96), (97), (98) придем, после исключения x_3 и x_4, к уравнениям:

$$\left.\begin{aligned} &\left[mD^3+(2+2m)D^2+(4+m)D+2\right]x_1=(D+1)^2x_2 \\ &(D+1)x_2=(D^2+4D+5)x_1 \end{aligned}\right\}. \tag{100}$$

Характеристический полином этой системы уравнений, как не трудно вычислить, равен

$$P(\lambda)=(1-m)\lambda^4+(4-3m)\lambda^3+(8-3m)\lambda^2+(8-m)\lambda+3\,. \tag{101}$$

При m = 1, т. е. при номинальном значении параметра m, полином (101) совпадает с полиномом (99); это еще раз подтверждает, что системы уравнений (96), (97), (98) и (100) эквивалентны между собой в классическом смысле при m = 1.

Однако полином (101), в отличие от полинома (98), перестает быть гурвицевым, если параметр m превышает номинальное значение m = 1 даже на сколько угодно малую величину.

Таким образом, исследование влияния вариаций конкретного физического параметра — механической постоянной времени электродвигателя — на сохранение устойчивости решений системы дифференциальных уравнений, описывающих замкнутую систему управления, еще раз подтверждает, что свойство сохранения устойчивости может появляться и исчезать при эквивалентных (в классическом смысле) преобразованиях уравнений. Поэтому неучет принципиальных различий между этими преобразованиями может приводить к ошибочным заключениям при расчете и проектировании, следствием которых могут быть аварии и катастрофы.

При обсуждении положений и примеров, выдвинутых в работах [1, 4], неоднократно выставлялось возражение, сводящееся к тому, что рассмотренные примеры относятся к хорошо разработанной теории сингулярно-возмущенных дифференциальных уравнений (*сингулярными* называют такие изменения коэффициентов уравнения, которые ведут к изменению его порядка). Это возражение не состоятельно и вот почему: теория сингулярно-возмущенных уравнений действительно разработана, но она относится к уравнениям, имеющим малые параметры при старших производных, уравнениям типа:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= f_y(y;z) \\ \varepsilon_z \frac{dz}{dt} &= f_z(y;z) \end{aligned}\right\}, \qquad (102)$$

где полный вектор переменных y и z размерностью n разбит на два подвектора: подвектор y размерностью m, где $m < n$, и подвектор z размеренностью $n-m$, а параметры ε_z являются малыми. В теории сингулярно-возмущенных уравнений исследуется изменение решений уравнений (102) по сравнению с теми уравнениями (102), в которых $\varepsilon = 0$. При $\varepsilon \neq 0$ порядок уравнений (102) повышается по сравнению со случаем, когда $\varepsilon = 0$. Понятно, что решения уравнений повышенного порядка могут коренным образом (в том числе и по устойчивости) отличаться от невозмущенных решений, соответствующих $\varepsilon = 0$, и это, разумеется, сомнений не вызывает. Подчеркнем, что в сингулярно-возмущенной системе (102) изначально присутствуют малые коэффициенты, а вариации этих малых коэффициентов являются малыми по абсолютной величине, но отнюдь не по отношению к $\varepsilon = 0$. Если даже $\varepsilon = 0{,}00001$, то это, условно говоря, "бесконечно много" больше, чем $\varepsilon = 0$.

В рассмотренных ранее примерах (и в примерах, приведенных ранее в [1, 2, 3, 4]) рассматривалось совсем другое явление: ни один из коэффициентов рассмотренных нами уравнений (25)—(26), (33)—(35), (96), (97), (98) и (100) не является малым, все коэффициенты достаточно большие, порядка нескольких единиц. Малые вариации (причем малые не только по абсолютной величине, но и по отношению к номинальным значениям) испытывают большие коэффициенты. Поэтому рассматриваемые нами системы уравнений не относятся к сингулярно-возмущенным. В рассмотренных нами системах обнаружено новое явление — возможность появления и исчезновения свойства сохранения устойчивости при вариациях параметров после эквивалентных (в классическом смысле) преобразований уравнений.

Это явление имеет большой практический смысл, поскольку неучет его при проектировании может быть причиной самых серьезных аварий и катастроф.

Поэтому нет ничего удивительного в том, что это явление (опубликованное в [1], затем в [4, 2, 5] и широко обсуждавшееся, начиная с 1990 года) и следовавшие из его обнаружения практические выводы не сразу получили признание научного сообщества. Только в 1994 году, после трехлетнего обсуждения и проверки выводов и рекомендаций автора, один из наиболее авторитетных научных журналов "Автоматика и телемеханика" опубликовал статью [3] с кратким изложением более совершенных методов проверки устойчивости и с прямым предостережением о том, что некритическое использование традиционных методов расчета может быть причиной серьезных аварий. После публикации в таком авторитетном журнале можно считать, что основные положения, выдвинутые автором, получили признание научного сообщества.

На семинаре Института проблем управления Российской академии наук, руководимого Е. С. Пятницким и В. Ф. Кротовым, результаты, опубликованные несколько позже в [3], были еще в 1993 году признаны "научным открытием, имеющим большое практическое значение".

Но до широкого использования усовершенствованных методов в проектно-конструкторских организациях еще далеко, и это не может не тревожить. Рассмотрим, для примера, положение на атомных электростанциях. Срок службы самих ядерных реакторов велик, и он много больше, чем срок службы различного вспомогательного оборудования станции (насосов, приводов, систем управления ими). Поэтому в ходе эксплуатации взамен отслужившего свой срок оборудования на станции устанавливается оборудование новое, часто — более совершенное и это — хорошо.

Однако если это оборудование в ходе проектирования проверялось на сохранение устойчивости расчетом на быстродействующих вычислительных машинах, но по традиционной методике, без дополнительной проверки, о необходимости которой говорилось в публикациях [1, 4, 3, 5], то это оборудование может оказаться способным в заранее непредвиденный момент времени потерять устойчивость и создать аварийную ситуацию. Разумеется, системы и агрегаты атомной электростанции резервируются, снабжаются устройствами защиты и поэтому далеко не каждая потеря устойчивости обязательно приведет к опасной аварии. Это так. Но все же каждая потеря устойчивости, каждый отказ создают опасную ситуацию, которая может перерасти в аварию, и если есть возможность заранее предотвратить подобные ситуации, то они должны быть предотвращены. Игра с "атомным огнем", легкомысленное отношение к авариям, возможные источники которых названы и опубликованы, является преступлением. Поэтому казалось очевидным, что усовершенствованные методы дополнительной проверки сохранения устойчивости должны были бы немедленно после опубликования использоваться при проектировании оборудования для атомных станций, тем более, что использование усовершенствованных методов расчета, снижающих вероятность аварий, не требует заметных материальных затрат. Требуется лишь очень скромный расход на разработку программного обеспечения. Тем не менее использования методов дополнительной проверки устойчивости не произошло. Помешал настрой большинства работников, не склонных к внедрению нового. Доходило до курьезов — во время обсуждения предложения автора на научно-техническом совете одной из организаций, связанных с разработкой оборудования для атомной энергетики, один из членов совета заявил: "для нашей отрасли снижение вероятности аварий неактуально. Это у химиков возникают действительно опасные аварии, а у нас, в нашей отрасли — нет. Вот я, например, попадал в аварии, получил 200 рентген облучения, а вот видите — сижу перед вами, жив и здоров. Так что в нашей отрасли ничего менять не надо, это пусть химики внедряют у себя новые методы предотвращения аварийности".

Казалось бы, что коль скоро существует такая организация, как Атомнадзор, обладающая всеми необходимыми правами и возможностями, то она должна обеспечить безопасность атомной энергетики. На деле оказалось, что между большими правами, предоставленными Атомнадзору, и желанием реально использовать эти права, преградить путь возможным авариям на атомных станциях, лежит пропасть. В Госатомнадзоре — и в Северо-Западном отделении в Санкт-Петербурге, и в Москве, в центральном управлении — автора вежливо принимали, знакомились с материалами, выслушивали, читали заключения авторитетных научных семинаров, рекомендовавших проектно-конструкторским организациям использовать дополнительные методы проверки устойчивости, разработанные в Санкт-Петербургском гос. университете для предотвращения аварийности, но реально Госатомназдор ничего не сделал, ни на кого не воздействовал, своих прав не использовал. После этого становятся понятными причины столь многочисленных аварий в российской промышленности и атомной энергетике, но легче от этого не делается.

Использование более совершенных методов расчета и проектирования, снижение вероятности аварий оказывается целиком зависящим от личной компетентности, личной добросовестности отдельных людей. Так, активное участие в работах по предовращению аварий в энергетике, по разработке более совершенных методов расчета, обеспечивающих сохранение устойчивости при вариациях параметров, принял академик РАН Я. Б. Данилевич. По инициативе главного инженера одной из проектных организаций К. Л. Сукнева новые дополнительные методы проверки используются в его организации. Путь к возникновению аварий, связанных с неполнотой традиционных методов расчета и проектирования, в этой организации перекрыт. В остальных организациях — не перекрыт. Над расширением использования более совершенных научных методов надо еще работать и работать.

Авторы надеются, что опубликование этой книги поможет практическому использованию усовершенствованных методов расчета сохранения устойчивости при вариациях параметров и позволит уменьшить вероятность аварий и катастроф. Контролирующим организациям (таким как Госатомнадзор и ему подобные), а также органам власти пора принять действенные меры для предотвращения таких аварий, причины которых установлены и признаны научным сообществом. Там, где речь идет о жизни людей, бездействие недопустимо.

Что касается теоретических вопросов, поднятых в книге, то они выходят за рамки проблем управления и примыкают к широкому кругу работ, посвященных обеспечению надежности вычислений. Поскольку параметры математической модели исследуемого объекта почти всегда известны лишь с неизбежной погрешностью, то результаты вычислений будут надежны только тогда, когда малым изменениям исходных данных соответствуют малые изменения решений. В противном случае рассматриваемая задача оказывается некорректно поставленной (или плохо обусловленной), и результаты ее решения обычно не надежны. Методам выделения некорректно поставленных или плохо обусловленных задач посвящено много исследований.

Однако до последнего времени не обращалось внимания на то, что хорошо обусловленная математическая модель может перейти в плохо обусловленную (и наоборот) при широко используемых эквивалентных (в классическом смысле) преобразованиях, если эти преобразования не являются эквивалентными в расширенном смысле. Это показывают примеры, приведенные в книге.

Отсюда следует, что теория преобразований, эквивалентных в расширенном смысле, важна не только в теории управления, но и в значительно более широком круге прикладных задач вычислительной математики. В связи с этим нужно подчеркнуть, что методы различения преобразований, эквивалентных в расширенном смысле, разработаны пока только для некоторых классов математических моделей, относящихся прежде всего к системам управления. (в частности, при проектировании систем управления, оптимальных по среднеквадратичному критерию качества, достаточно проверить косвенное неравенство Ю. Петрова:

$$p \geq m + q - 1). \tag{103}$$

Для обеспечения надежности вычислений нужно разработать теорию преобразований, эквивалентных в расширенном смысле, для значительно более общего круга математических моделей и вычислительных задач. Здесь открыто обширное поле для дальнейшей исследовательской работы.

Глава 12

Простые примеры изменения корректности

(учителю на заметку)

Помимо уже рассмотренных нами систем управления, с примерами изменения корректности можно встретиться в простых системах алгебраических уравнений. Эти примеры могут дать учителю хорошие темы для занятий математического кружка.

Наиболее выигрышными для таких занятий безусловно являются темы, каким-то образом связанные с проблемами современной математической науки. К сожалению, такие темы очень трудно подобрать, поскольку проблемы и задачи современной науки очень сложны и, как правило, совершенно недоступны для понимания школьника.

Одну из интересных и живых тем все же можно предложить. Это — изменение корректности задачи нахождения решений алгебраических уравнений при их эквивалентных преобразованиях.

Школьники старших классов хорошо знакомы с простыми алгебраическими уравнениями, умеют преобразовывать их (переносить члены из левой части в правую с изменением знака, делить и умножать все члены на число, не равное нулю, складывать одно уравнение с другим и т. п.). Все такие преобразования (разумеется, правильно выполненные) являются преобразованиями эквивалентными — т. е. все решения преобразованных уравнений совпадают с решениями уравнений исходных. Правила преобразования уравнений входят в школьные программы.

На занятиях математического кружка можно дать понятие и о *корректности* решения — поскольку в практических задачах все коэффициенты уравнений известны почти всегда лишь с ограниченной точностью, то решение уравнения имеет практический смысл только тогда, когда это решение корректно — т. е. когда малым изменениям коэффициентов соответствуют малые изменения решений (примеры корректных и некорректных задач нетрудно привести). Простейший способ проверки корректности — это повторение решения для немного измененных коэффициентов. Если решение сильно изменится — задача некорректна.

Далее уже нетрудно объяснить, что мы смело пользуемся эквивалентными преобразованиями только вследствие нашей уверенности в том, что эквивалентные преобразования не изменяют корректности. В подавляющем большинстве случаев это действительно так (несложно привести примеры). Если исходное уравнение корректно, то после преобразования корректность обычно сохранится. Почти всегда это так. Тем с большим интересом будут встречены недавно обнаруженные в математике своеобразные случаи, когда при эквивалентных преобразованиях корректность изменяется.

Для начала рассмотрим систему двух линейных однородных уравнений с параметром λ:

$$\begin{cases} (1-\lambda)x_1 + 3x_2 = 0; \\ x_1 + (3-\lambda)x_2 = 0. \end{cases} \tag{104}$$

Поскольку система (104) однородна, то она, естественно, среди своих решений имеет решения нулевые: $x_1 = 0$; $x_2 = 0$. Поставим теперь задачу: найти значения параметра λ, при которых система (104) имеет ненулевые решения.

Учитель может рассказать, что системы уравнений, подобных уравнениям (104), но более высокого порядка (состоящие из четырех, десяти и более уравнений) часто встречаются в приложениях. К нахождению значений параметра λ, при которых подобные системы имеют ненулевые решения, сводятся многие важные расчеты колебаний различных механических конструкций, расчеты процессов в системах управления, электродвигателях и даже некоторые проблемы астрономии и небесной механики.

Решить поставленную нами задачу можно путем исключения переменных с помощью эквивалентных преобразований. Для этого умножим все члены первого из уравнений (104) на –1, а второго — на $(1-\lambda)$. Получим:

$$\begin{cases} -(1-\lambda)x_1 + 3x_2 = 0; \\ (1-\lambda)x_1 + (3-4\lambda+\lambda^2)x_2 = 0. \end{cases} \tag{105}$$

Сложив оба уравнения, мы исключим x_1 и получим одно уравнение относительно x_2:

$$(\lambda^2 - 4\lambda)x_2 = 0.$$

Теперь сразу видно, что ненулевое решение возможно при $\lambda = 0$ и при $\lambda = 4$. Подставив эти значения в (104), получим при $\lambda = 0$:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 0; \\ x_1 + 3x_2 = 0, \end{cases} \tag{107}$$

а при $\lambda = 4$:

$$\begin{cases} -3x_1 + 3x_2 = 0; \\ x_1 - x_2 = 0. \end{cases} \tag{108}$$

Сразу видно, что уравнениям (107) и (108) помимо решения $x_1 = x_2 = 0$ удовлетворяет бесчисленное множество других значений x_1 и x_2.

Заметим, что домножая второе из уравнений (104) на выражение $(1 - \lambda)$, которое равно нулю при $\lambda = 1$, мы могли приобрести лишний корень $\lambda = 1$. Однако подставив его в (104), мы получим систему:

$$\begin{cases} 3x_2 = 0; \\ x_1 + 2x_2 = 0, \end{cases} \tag{109}$$

не имеющую других решений, кроме $x_1 = x_2 = 0$. Поэтому $\lambda = 1$ не является решением. С учетом этого уравнение (106) эквивалентно системе (104), и, исследуя его, мы легко устанавливаем, при каких значениях параметра λ система (104) имеет ненулевые решения. Путем нетрудных (хотя и громоздких) вычислений можно проверить, что если немного изменить коэффициенты системы (104), например, в первом уравнении вместо $3x_2$ поставить $3{,}01x_2$, во втором — вместо x_1 поставить $0{,}99x_1$ и т. п., то значения параметра λ лишь немного отклонятся от найденных нами значений $\lambda = 0$; $\lambda = 4$. Рассматриваемая нами задача для системы уравнений (104) является корректной. Точно так же, если немного изменить коэффициенты (единицу и четверку) в уравнении (106), мы убедимся, что ранее найденные значения $\lambda = 0$; $\lambda = 4$ изменятся мало. В данном случае при эквивалентном переходе от системы (104) к уравнению (106) корректность сохранилась. Однако корректность может и не сохраниться. Действительно, как уже говорилось, на практике приходится иметь дело с системами типа (104), но с более значительным числом уравнений. И вот уже при четырех уравнениях возникают интересные явления.

Рассмотрим систему четырех линейных однородных уравнений с параметром λ:

$$\begin{cases}(2+\lambda)x_1 - x_2 - x_4 = 0;\\ \lambda x_2 - x_3 = 0;\\ x_2 + (2+\lambda)x_3 = 0;\\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 0,\end{cases} \tag{110}$$

для которой решим ту же задачу: при каких значениях параметра λ возможны ненулевые решения? Решение будем вести путем исключения переменных. Исключив переменные x_1 и x_2 путем эквивалентных преобразований (умножений и сложений), мы придем к следующей системе двух уравнений относительно переменных x_3 и x_4:

$$\begin{cases}(\lambda^3 + 4\lambda^2 + 5\lambda + 2)x_3 = (\lambda^2 + 2\lambda + 1)x_4;\\ (\lambda^2 + 4\lambda + 5)x_3 = (\lambda + 1)x_4.\end{cases} \tag{111}$$

Если теперь исключить переменную x_3, домножив первое из уравнений (111) на $-(\lambda^2 + 4\lambda + 5)$, а второе — на $(\lambda^3 + 4\lambda^2 + 5\lambda + 2)$ и сложив их, то относительно x_4 мы придем к уравнению третьего порядка:

$$(\lambda^3 + 5\lambda^2 + 7\lambda + 3)x_4 = 0. \tag{112}$$

Нетрудно проверить, что полином, стоящий в скобке, обращается в нуль при $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$ (двойной корень) и при $\lambda_3 = -3$. Таким образом, система четырех однородных линейных уравнений (110) будет иметь ненулевые решения при $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$; $\lambda_3 = -3$. Подстановкой в уравнение (110) можно убедиться, что это действительно так. Однако уравнение относительно x_4, которое получится при исключении переменной x_3 из системы (111), будет иметь вид (112) только если коэффициенты системы (111) в точности равны расчетным. Предположим, что в первом из уравнений (111) коэффициент при λ^2 в члене $(\lambda^2 + 2\lambda + 1)x_4$ равен не единице, а $1+\varepsilon$, где ε — малое число. Тогда уравнение (112) примет вид:

$$(\varepsilon\lambda^4 + \lambda^3 + 5\lambda^2 + 7\lambda + 3)x_4 = 0. \tag{113}$$

Мы убеждаемся, что при сколь угодно малых числах ε значений λ, при которых возможны ненулевые решения, будет уже не три, а четыре. Причем при малых ε четвертое значение λ будет (по модулю) очень большим, много больше остальных трех. Для малых ε будет приближенно $\lambda_4 = -\frac{1}{\varepsilon}$.

Таким образом, мы убедились, что задача определения значений параметра λ, при которых система (111) имеет ненулевые решения, является задачей некорректной — сколь угодно малое изменение некоторых коэффициентов коренным образом меняет ее решения (меняется даже число решений). А ведь система (111) получена из системы (110) путем эквивалентных преобразований (умножений и сложений). Системы (110) и (111) эквивалентны между собой в классическом смысле: действительно, при точно известных целочисленных коэффициентах они имеют одни и те же решения: $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$; $\lambda_3 = -3$. Однако система (110) корректна, а система (111) — нет. Системы (110) и (111) неэквивалентны друг другу в расширенном смысле. Преобразование системы (110) в систему (111), является примером преобразования, эквивалентного в классическом смысле, но не в расширенном.

Теперь рассмотрим следствия. Пока коэффициенты (110) являются целыми числами, неприятностей не возникает. Однако чаще всего коэффициенты уравнений получаются из опыта и измерения, записываются с конечным числом десятичных знаков, и при вычислениях неизбежны ошибки округления. Для системы (111) любая сколь угодно малая неизбежная погрешность в коэффициентах, например — ошибка округления, ведет к коренной ошибке в результатах вычислений: вместо трех значений параметра λ мы получаем четыре, причем величина четвертого значения λ целиком зависит от величин погрешностей в коэффициентах.

А результатом таких ошибок могут стать — и становятся — аварии и катастрофы. Учитель может привести немало красочных примеров (помимо тех, что уже приводились в предыдущих главах), поднимающих интерес и заинтересованность участников кружка. Интересной творческой задачей может стать поиск новых примеров некорректных систем и таких преобразований, которые эквивалентны в классическом смысле и не эквивалентны в расширенном, поскольку изменяют корректность рассматриваемой задачи. На сегодняшний день таких преобразований известно еще очень немного. Поиск любого нового примера является интересной и увлекательной задачей.

Подчеркнем, что мы рассматриваем новое явление, не совпадающее с ранее известными. Хорошо известно, что многие преобразования, на первый взгляд кажущиеся эквивалентными (равносильными), на самом деле ведут к потере некоторых корней, или к появлению новых (это бывает, например, когда правая и левая части уравнения умножаются на выражение, обращающееся в нуль при значениях переменной, не совпадающих с корнями). Однако в этих случаях лишние корни не могут, естественно, зависеть от вариаций коэффициентов исходного уравнения. В системах (110) и (111) мы имеем дело с другим явлением — обе системы эквивалентны друг другу в классическом смысле и при отсутствии погрешностей в задании коэффициентов имеют одни и те же три значения λ, при которых возможны ненулевые решения. А четвертое значение λ, возникающее у системы (111), целиком зависит от вариаций некоторых коэффициентов уравнений (111), и его отличие от остальных значений является большим даже при сколь угодно малых вариациях коэффициентов или при сколь угодно малых погрешностях в вычислении и задании их.

Заметим еще, что в теории вычислений хорошо известны случаи, когда малая (но конечная) погрешность в каком-либо коэффициенте после того или иного преобразования увеличивается в то или иное число раз (разумеется, таких преобразований надо избегать). Однако рассматриваемое нами явление носит другой характер — мы видим, что уже сколь угодно малое изменение некоторых коэффициентов ведет к коренному изменению решения, свидетельствуя об изменении корректности рассматриваемой задачи.

Таким образом, мы действительно имеем дело с новым явлением, имеющим важное значение для практических расчетов и пока еще не до конца исследованным.

Глава 13

Общая проблема надежности вычислений и корректности математических моделей. Вычисление собственных чисел матриц и смежные задачи

В практических расчетах, когда коэффициенты и параметры математической модели почти всегда известны лишь с ограниченной точностью, изначально надежными могут быть результаты расчета только для корректно поставленных задач, когда при малых вариациях параметров и коэффициентов решения также изменяются мало.

Существует хорошо разработанная теория различения корректно и некорректно поставленных задач, корректных и некорректных математических моделей [21, 22]. (Заметим, что в последние годы решают и некорректно поставленные задачи, но это требует особых сложных методов, описанных в [21, 22]). После того как в работах [1—5] была обнаружена возможность изменения корректности при эквивалентных (в классическом смысле) преобразованиях математической модели, стало ясным, что нужно проверять на корректность не только саму математическую модель, но и проделанные с нею преобразования.

В *главах 3—7* приводились примеры эквивалентных (в классическом смысле) преобразований, изменяющих корректность, для систем линейных дифференциальных уравнений, а в *главе 12* был рассмотрен простейший подобный пример для алгебраических уравнений.

Рассмотрим теперь общую проблему решения линейных алгебраических уравнений и вычисления собственных чисел матриц.

Будем рассматривать систему n однородных линейных уравнений с n неизвестными:

$$Ax = \lambda x\,, \tag{114}$$

где x — n-мерный вектор; A — квадратная размера $n \times n$ матрица коэффициентов; λ — параметр.

Уравнение (114) может быть также записано в виде:

$$(A - \lambda E)x = 0\,, \tag{115}$$

где E — единичная матрица размера $n \times n$. Уравнения (114) и (115) имеют ненулевые решения только для тех значений λ, при которых определитель матрицы $(A - \lambda E)$ обращается в нуль, т. е.

$$\det(A - \lambda E) = 0\,. \tag{116}$$

Развертывая определитель по степеням λ, получим полином степени n:

$$\lambda^n + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + \alpha_0\,, \tag{117}$$

который называют *характеристическим полиномом* матрицы A, а его корни — *собственными значениями* или *собственными числами* матрицы A.

Проблема вычисления собственных чисел имеет большое практическое значение, поскольку необходимость вычисления их встречается во многих приложениях. Собственные числа вычисляются при решении систем дифференциальных уравнений, при вычислении собственных частот малых колебаний механических и электрических систем, в астрономии и небесной механике при решении так называемого "векового уравнения" и во многих других областях приложений.

Задачам вычисления собственных чисел и проверке корректности их вычисления посвящена обширная литература [23, 24]. Так, в библиографии книги [24] приведено 217 названий работ, посвященных этой теме.

Мы будем рассматривать не проблему собственных чисел матриц в ее классическом виде, а рассмотрим смежную с ней и более общую задачу вычисления значений параметра λ, при которых существуют ненулевые решения систем уравнений типа (114), но с дополнительными голономными (т. е. не содержащими параметра λ) соотношениями между переменными.

Примером может служить система:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 = \lambda x_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 = \lambda x_2; \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 = \lambda x_3; \\ a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 = 0, \end{cases} \tag{118}$$

в которой четвертое уравнение не содержит λ. Уравнений, не содержащих λ, может быть несколько. В матричном виде рассматриваемые нами уравнения могут быть записаны в виде:

$$(A-\lambda\overline{E})x=0, \tag{119}$$

где теперь (в отличие от уравнения (115)) $\overline{E}$ — не единичная, а квазиединичная матрица — т. е. матрица, в которой, во-первых, все элементы, стоящие вне главной диагонали, равны нулю, а во-вторых, равны нулю r элементов на главной диагонали. Так, для системы уравнений (118) матрица $\overline{E}$ имеет вид:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{120}$$

(равен нулю диагональный элемент в последней строке). Задачи, сводящиеся к исследованию уравнений вида (119), часто встречаются в приложениях. К ним сводится проблема вычисления частот малых колебаний механических систем с голономными связями, голономных автоматических систем [25], многих систем управления.

Система (119) имеет ненулевые решения только для тех значений λ, при которых обращается в нуль определитель матрицы $(A-\lambda\overline{E})$. Эти значения будут корнями полинома:

$$\det(A-\lambda\overline{E}), \tag{121}$$

степень которого в общем случае равна $n-r$. В частности, для системы (118) полином (121) имеет (в общем случае) третью степень и три корня.

Будем решать систему уравнений (118) путем последовательного исключения переменных. Домножив первое из уравнений (118) на $-a_{21}$, а второе — на $(a_{11}-\lambda)$ и сложив их, получим уравнение, не содержащее x_1. Проделав те же операции со вторым и третьим из уравнений (118), а затем — с третьим и четвертым, мы придем к системе трех уравнений относительно x_2, x_3 и x_4:

$$\begin{cases} b_{22}^{(2)}x_2+b_{23}^{(1)}x_3+b_{24}^{(1)}x_4=0; \\ b_{32}^{(1)}x_2+b_{33}^{(1)}x_3+b_{34}^{(0)}x_4=0; \\ b_{42}^{(0)}x_2+b_{43}^{(1)}x_3+b_{44}^{(0)}x_4=0, \end{cases} \tag{122}$$

где символами b_{ij}^{k} обозначены уже не числа, а полиномы, включающие разные степени параметра λ. Верхний индекс отражает степень полинома. Система уравнений (122) эквивалентна системе (118).

Проделав операцию исключения переменной x_2 в системе уравнений (122), придем к следующей системе двух уравнений относительно x_3 и x_4:

$$\begin{cases} c_{33}^{(3)} x_3 + c_{34}^{(2)} x_4 = 0; \\ c_{43}^{(2)} x_3 + c_{44}^{(1)} x_4 = 0. \end{cases} \tag{123}$$

Символами c_{ij}^{k} обозначены полиномы от λ, причем полином $c_{33}^{(3)}$ является полиномом третьей степени; полиномы $c_{34}^{(2)}$ и $c_{43}^{(2)}$ имеют вторую степень, а $c_{44}^{(1)}$ — первую, т. е.:

$$c_{33}^{(3)} = m_1\lambda^3 + m_2\lambda^2 + m_3\lambda + m_4; \tag{124}$$

$$c_{34}^{(2)} = m_5\lambda^2 + m_6\lambda + m_7; \tag{125}$$

$$c_{43}^{(2)} = m_8\lambda^2 + m_9\lambda + m_{10}; \tag{126}$$

$$c_{44}^{(1)} = m_{11}\lambda + m_{12}, \tag{127}$$

причем все коэффициенты $m_1, \ldots, m_{12}$ выражаются через коэффициенты $a_{11}, \ldots, a_{44}$ исходной системы (118). Исключив переменную x_3 из системы уравнений (123), получим уравнение:

$$(c_{34}^{(2)} c_{43}^{(2)} - c_{33}^{(3)} c_{44}^{(1)}) x_4 = 0, \tag{128}$$

из которого видно, что значения λ_i, при которых исходная система (118) имеет ненулевые решения, являются корнями полинома:

$$c_{34}^{(2)} c_{43}^{(2)} - c_{33}^{(3)} c_{44}^{(1)}. \tag{129}$$

На первый взгляд кажется, что полином (129) является полиномом четвертой степени, однако расчет показывает, что при $a_{31} = 0$ или $a_{44} = 0$ имеет место равенство:

$$m_5 m_8 - m_1 m_{11} = 0, \tag{130}$$

и коэффициент при λ^4 в этом случае тождественно равен нулю при любых значениях остальных коэффициентов a_{ij} в исходной системе уравнений (118). С учетом этого полином (129) является в данном случае полиномом третьей степени и имеет три корня, которые и являются искомыми значениями параметра λ, при которых система (118) имеет ненулевые решения.

Однако равенство (130) будет выполняться лишь тогда, когда все коэффициенты m_1, m_5, m_8, m_{11} в точности равны своим расчетным значениям. Уже сколь угодно малые вариации их (возникающие, например, из-за ошибок округления при исключении переменных x_1 и x_2) сразу приводят к грубой (даже качественной!) ошибке: вместо трех значений параметра λ их оказывается четыре, причем четвертое значение λ зависит от вариаций коэффициентов в системе (123).

Для системы уравнений (123) задача вычисления значений параметра λ, доставляющих ненулевые решения, при $a_{31} = 0$ или $a_{44} = 0$ является некорректной, а исключение переменных x_1 и x_2 из системы (118) является примером преобразования, эквивалентного в классическом смысле и неэквивалентного — в расширенном. Это преобразование изменило корректность решаемой нами задачи.

Мы убеждаемся, что изменение корректности при эквивалентных (в классическом смысле) преобразованиях может иметь место не только для дифференциальных уравнений, но и для простых алгебраических систем. Нетрудно проверить, что изменение корректности будет возникать и в системах уравнений вида (119) более высоких порядков.

Рассмотрим теперь последствия. Если мы будем решать задачу отыскания значений параметра λ, доставляющих ненулевые решения для системы (118) и ей подобных, путем последовательного исключения переменных x_1, x_2 и т. д., то уже сколь угодно малая ошибка округления приведет нас к совершенно неверному ответу. Если причина известна, то для системы (118) с данным затруднением справиться несложно: нужно сперва исключить переменную x_4. Используя последнее из уравнений (118), надо выразить x_4 через x_1, x_2, x_3 и подставить в оставшиеся три уравнения. Последующее исключение x_1 и x_2 уже не изменит корректность задачи. Для системы (118) все просто. Однако для того, чтобы выбрать правильный путь при решении систем уравнений более высоких порядков, нужно знать о возможной потере корректности и уметь правильно обходить возникающие неприятности.

В частности, не всегда безобиден очень широко используемый переход от системы n уравнений второго порядка, непосредственно вытекающих из уравнений Лагранжа второго рода, к системе $2n$ уравнений первого порядка (к гамильтоновой системе уравнений) и т. п. То, что подобное преобразование эквивалентно в классическом смысле, сомнений, конечно, не вызывает, но будет ли оно всегда (в том числе и при наличии голономных соотношений между переменными) эквивалентно в расширенном смысле — это требует проверки.

Еще более сложно обстоит дело там, где переход к другому числу переменных может изменить физический смысл математической модели. В *главе 3* мы уже сталкивались с частным случаем системы уравнений (118) применительно к исследованию систем управления (уравнения (33)—(35) и (25)—(26), характеристические полиномы (28), (30) и (31) и т. п.) и убедились, что простое исключение переменной x_4, выражение ее через x_1, x_2 и x_3 на основе последнего из уравнений (118) (ему соответствует уравнение (35)) неизбежно ведет к ошибочным выводам. Действительно, если в канале обратной связи может быть непосредственно использована только переменная x_1, то полностью физическому смыслу рассматриваемой задачи соответствуют только уравнения (25)—(26). Лишь они учитывают, что изменения параметров объекта управления и регулятора могут происходить независимо друг от друга, а система уравнений (33)—(35) этого обстоятельства не отражает, хотя обе системы уравнений эквивалентны друг другу в классическом смысле, и при неизменных значениях коэффициентов и параметров обе системы совершенно идентично описывают протекающие в системе управления процессы.

Поэтому при преобразованиях математических моделей нужно учитывать не только эквивалентность преобразований при неизменных коэффициентах и параметрах (это давно делается), но нужно учитывать и возможную утерю эквивалентности в расширенном смысле при вариациях параметров.

Отметим, что явления, рассматриваемые нами, отличаются от уже исследованных явлений потери точности результата компьютерных вычислений при различных методах решения, связанных с преобразованиями уравнений. Так, например, в [23, 24] показано, что при последовательном проведении цепочки преобразований, рекомендуемых в методиках Гаусса, Хаусхолдера, Гивенса, А. Н. Крылова, малые (но конечные!) погрешности коэффициентов и малые (но конечные!) ошибки округления могут, постепенно увеличиваясь в ходе вычислений, привести к большим ошибкам в решениях. Но при погрешности коэффициентов, стремящейся к нулю, стремится к нулю и ошибка, исследованная в [23, 24].

В отличие от этого, в преобразованиях, рассматриваемых нами, изменение корректности происходит сразу, с одного этапа, а главное — уже сколь угодно малая вариация (или погрешность) параметра или сколь угодно малая ошибка округления могут вести к коренному, качественному изменению решения.

Таким образом, мы имеем дело с новым явлением (на это уже указывалось в [1]). Отметим, что в "чистой" проблеме собственных значений матриц, рассматриваемой, например, в монографиях [23, 24 и др.], исследуются уравнения (115), а не (119), т. е. возможность голономных соотношений между переменными не учитывается. Но при исследовании уравнений (115) рассматриваемое нами явление потери корректности при сколь угодно малых вариациях коэффициентов, как будет далее доказано, в общем случае не возникает. Возможно, что именно поэтому оно было обнаружено поздно и до сих пор еще не исследовано всесторонне. Между тем это явление играет большую роль в деле обеспечения надежности решений самых различных уравнений, а тем самым и в обеспечении надежности и безаварийности всей нашей современной техники. Поэтому обнаруженное и описанное в работах [1, 3, 4] явление имеет большое практическое значение и заслуживает серьезного и всестороннего изучения.

Рассмотрим возникающую проблему в общем виде, т. е. для системы уравнений произвольного порядка следующего вида:

$$\begin{cases} (a_{11}-\lambda)x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0; \\ a_{21}x_1 + (a_{22}-\lambda)x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n-1;1}x_1 + a_{n-1;2}x_2 + \ldots + (a_{n-1;n-1}-\lambda)x_{n-1} + a_{n-1;n}x_n = 0; \\ a_{n;1}x_1 + a_{n;2}x_2 + \ldots + a_{n;n-1}x_{n-1} + a_{n;n}x_n = 0. \end{cases} \tag{131}$$

Таким образом, мы рассматриваем систему однородных линейных уравнений, причем во все первые $n-1$ уравнений входит параметр λ, а в последнее уравнение он не входит. Ставится задача — найти значения параметра λ, при которых система (131) имеет ненулевые решения.

Предположим, что мы решаем эту задачу путем последовательного исключения переменных, начиная с x_1, и рассмотрим положение, которое складывается перед последним шагом исключения, когда у нас остается два уравнения с двумя переменными x_{n-1} и x_n. На основании известных правил решения систем линейных алгебраических уравнений и используя формулы Крамера, нетрудно установить, что эти два уравнения будут иметь вид:

$$\begin{cases} A_1 x_{n-1} + A_2 x_n = 0; \\ A_3 x_{n-1} + A_4 x_n = 0, \end{cases} \tag{132}$$

причем A_1, A_2, A_3 и A_4 будут полиномами от переменной λ и будут равны следующим определителям $n-1$ порядка:

$$A_1 = \begin{vmatrix} (a_{1;1}-\lambda) & a_{1;2} & \dots & a_{1;n-1} \\ a_{2;1} & (a_{2;2}-\lambda) & \dots & a_{2;n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1;1} & a_{n-1;2} & \dots & (a_{n-1;n-1}-\lambda) \end{vmatrix}; \tag{133}$$

$$A_2 = \begin{vmatrix} (a_{1;1}-\lambda) & a_{1;2} & \dots & a_{1;n} \\ a_{2;1} & (a_{2;2}-\lambda) & \dots & a_{2;n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1;1} & a_{n-1;2} & \dots & a_{n-1;n} \end{vmatrix}. \tag{134}$$

Таким образом, определитель (133) составлен из коэффициентов, стоящих в первых $n-1$ уравнениях из системы (131) при первых ее $n-1$ переменных — от x_1 до x_{n-1}. А определитель (134) будет равен тому же определителю (133), но в котором последний столбец заменен на столбец коэффициентов, стоящих в системе (131) перед переменной x_n. Для полиномов A_3 и A_4 имеем аналогичные соотношения:

$$A_3 = \begin{vmatrix} a_{2;1} & (a_{2;2}-\lambda) & \dots & a_{2;n-1} \\ a_{3;1} & a_{3;2} & \dots & a_{3;n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n;1} & a_{n;2} & \dots & a_{n;n-1} \end{vmatrix}, \tag{135}$$

т. е. определитель (135) составлен из коэффициентов, стоящих в уравнениях (131), начиная со второй строки и до последней перед переменными с индексами от x_1 и до x_{n-1}, а полином A_4 определяется равенством:

$$A_4 = \begin{vmatrix} a_{2;1} & (a_{2;2} - \lambda) & \dots & a_{2;n} \\ a_{3;1} & a_{3;2} & \dots & a_{3;n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n;1} & a_{n;2} & \dots & a_{n;n} \end{vmatrix}, \tag{136}$$

т. е. определитель (136) отличается от определителя (135) тем, что последний столбец в нем заменен на столбец коэффициентов при переменной x_n.

Разлагая определители по минорам соответствующих строк, нетрудно выписать члены со старшими степенями параметра λ. Имеем:

$$\begin{aligned} A_1 &= (-1)^{n-1}\lambda^{n-1} + \dots \\ A_2 &= (-1)^{n-2} a_{n-1;n}\lambda^{n-2} + \dots \\ A_3 &= (-1)^{n-2} a_{n;1}\lambda^{n-2} + \dots \\ A_4 &= (-1)^{n-3}(a_{n-1;n}a_{n;1} - a_{n-1;1}a_{n;n})\lambda^{n-3} + \dots, \end{aligned} \tag{137}$$

где точками обозначены члены с более низкими степенями параметра λ. Исключая из системы (132) переменную x_{n-1}, придем к уравнению:

$$(A_2 A_3 - A_1 A_4)x_n = 0. \tag{138}$$

Система (132), а, значит, и исходная система (131) могут иметь ненулевые решения для тех значений λ, при которых выражение, стоящее в круглых скобках в формуле (138), равно нулю. Выписывая из равенств (137) только старшие члены, имеем:

$$A_2 A_3 - A_1 A_4 = a_{n-1;1}a_{n;n}\lambda^{2n-4} + (a_{n-1;n}a_{n;1} - a_{n-1;n}a_{n;1})\lambda^{2n-4} + \dots, \tag{139}$$

где точками обозначены члены степени λ^{2n-5} и более низких степеней. Теперь рассмотрим случай, когда $a_{n-1;1}a_{n;n} = 0$ (это означает, что либо $a_{n-1;1} = 0$, либо $a_{n;n} = 0$). В этом случае оказывается, что степень полинома (139), а, значит, и число собственных значений параметра λ, как и в ранее рассмотренном нами частном случае $n = 4$, зависит от сколь угодно малых вариаций коэффициентов полиномов A_2, A_3 и A_4, и это означает, что задача вычисления собственных значений параметра λ (т. е.

значений, при которых возможны ненулевые решения) оказывается некорректной.

Отметим следующую тонкость: вариации исходных коэффициентов a_{ij} системы (131) на число собственных значений не влияют. Действительно, пусть коэффициент $a_{n-1;n}$ немного изменился и стал равным $a_{n-1;n}(1+\varepsilon)$, а коэффициент $a_{n;1}$ стал равным $a_{n;1}(1+\delta)$; в этом случае при любых ε и δ разность:

$$a_{n-1;n}(1+\varepsilon)a_{n;1}(1+\delta)-a_{n-1;n}(1+\varepsilon)a_{n;1}(1+\delta)$$

все равно остается равной нулю, и на степень полинома (139) вариации коэффициентов исходной системы вроде бы влиять не должны. Это и послужило основанием для утверждений о том, что задача определения собственных значений путем последовательного исключения переменных для системы (131) корректна. Однако на самом деле при внимательном анализе становится ясным, что первый из коэффициентов $a_{n-1;n}a_{n;1}$ в равенстве (139) пришел в него из полиномов A_2 и A_3, а второй — из полинома A_4. Вариации этих коэффициентов (происходящие, например, из-за погрешности округления при их вычислении) могут не зависеть друг от друга, а это означает, что их разность, стоящая в круглых скобках в формуле (139), может и не быть равной нулю. А как только она не будет равной нулю (даже если она и останется сколь угодно малой), то степень полинома (139) повысится, и у него появится дополнительный корень. Это и означает, что задача определения собственных значений для системы (132) является некорректной.

Если же произведение $a_{n-1;1}a_{n;n} \neq 0$, то в этом случае, как показывает формула (139), вариации коэффициентов полиномов A_1, A_2, A_3 и A_4 не приводят к изменению степени полинома (139), и задача определения собственных значений параметра λ является корректной.

Рассмотрим теперь классическую задачу определения собственных значений матрицы A, которая, как известно, сводится к поиску значений параметра λ, при которых система (115) имеет ненулевые решения. В классической проблеме собственных значений параметр λ входит во все уравнения, и поэтому последнее из уравнений (131) будет иметь вид:

$$a_{n;1}x_1+\ldots+a_{n;n-1}x_{n-1}+(a_{n;n}-\lambda)x_n=0\,. \qquad (140)$$

Полиномы A_1, A_2, A_3 при замене последнего из уравнений (131) на уравнение (140) сохранят свой вид, а полином A_4 будет теперь равен:

$$\overline{A}_4 = (-1)^{n-1} a_{n-1;1} \lambda^{n-1} + \ldots, \tag{141}$$

где точками обозначены члены более низких степеней. В этом случае определитель системы (132) примет вид:

$$A_2 A_3 - A_1 \overline{A}_4 = a_{n-1;1} \lambda^{2n-2} + \ldots, \tag{142}$$

и потери корректности, в общем случае, не произойдет. Теперь понятно, почему явление изменения корректности решаемой задачи при эквивалентных преобразованиях было замечено лишь недавно — в классической и хорошо изученной задаче вычисления собственных значений матриц, рассмотренной, например, в публикациях [23, 24], оно не встречалось.

Заметим, что формально потери корректности легко можно избежать, если, например, в системе (131) выразить переменную x_n через остальные переменные, пользуясь последним из уравнений системы, а затем подставить это выражение в остальные уравнения. После приведения подобных членов мы придем к классической задаче о вычислении собственных значений для матрицы размера $(n-1)\times(n-1)$, и с изменением корректности в ходе решения встречаться не придется.

Однако в ряде приложений (и прежде всего — для систем управления) такое исключение последней переменной не соответствует физическому смыслу задачи и искажает картину истинных изменений параметров системы при ее эксплуатации, поскольку параметры объекта управления и параметры регулятора (цепи обратной связи) могут, как известно, изменяться независимо друг от друга. В этих случаях возможную потерю корректности (а значит, и возможное изменение свойства сохранения устойчивости замкнутой системы управления при вариациях ее параметров) надо обязательно учитывать, как об этом уже говорилось в предыдущих главах.

Еще раз подчеркнем:

> Если возможность изменения корректности решаемой задачи при эквивалентных в классическом смысле преобразованиях уравнений осознана и учитывается, то возможность ошибки, возникшей от изменения корректности, сравнительно легко устранить. Опасна лишь неожиданная встреча с изменением корректности, опасна бездумная, не подлежащая критике, слепая вера в то, что если преобразование эквивалентно, то ничего изме-

> ниться не может. Сами решения при эквивалентных в классическом смысле преобразованиях действительно не изменяются, но корректность решаемой задачи может измениться. Это нужно помнить и это нужно учитывать.

Что касается методов проверки возможности изменения корректности, то наиболее универсальным методом была бы проверка использованных при решении преобразований на их эквивалентность в расширенном смысле.

Однако такая проверка трудна. Мы убедимся далее, в *главе 16*, что самые, казалось бы, "невинные", простейшие преобразования могут изменить корректность решаемой задачи. Поэтому сосредоточим внимание на методах проверки возможности (или невозможности) изменения корректности при эквивалентных (в классическом смысле) преобразованиях для различных классов математических задач.

1. Методика, основанная на построении матриц степеней

Рассмотрим методику, позволяющую легко и быстро находить необходимые условия изменения корректности при нахождении собственных значений параметра λ для систем уравнений вида (119) путем последовательного исключения переменных.

Введем понятие *матрицы степеней* — т. е. матрицы, элементами которой являются степени полиномов переменной λ, стоящие в соответствующих клетках матрицы $(A-\lambda\bar{E})$.

Так, для системы (118) матрица степеней имеет вид:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{143}$$

Для системы уравнений (122) матрица степеней имеет вид:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{144}$$

для системы (123) она имеет вид:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}. \tag{145}$$

Теперь рассмотрим, как будет изменяться матрица степеней в процессе исключения переменных. Пусть мы хотим исключить переменную x_1 из первого и второго уравнений системы (131). Соответствующие строки матрицы степеней для этой системы имеют вид:

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 0 & \dots & 0; \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0. \end{array} \tag{146}$$

Для исключения x_1 вторую строчку домножаем на $(a_{11} - \lambda)$, а первую — на a_{21}. После домножения строки матрицы степеней (146) примут вид:

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 0 & \dots & 0; \\ 1 & 2 & 1 & \dots & 1, \end{array} \tag{147}$$

т. е. первая строка матрицы степеней осталась без изменения, а у второй строки все элементы увеличились на единицу. Далее, для исключения x_1 вычитают вторую строку из первой, при этом появляется новая строка, в которой коэффициент при x_1 равен нулю. В матрице степеней это будет соответствовать тому, что вместо двух строк (147) появится одна новая строка, на единицу короче прежней (первый элемент пропадет), а все числа этой новой строки будут соответствовать наибольшим из чисел первой и второй строк. Таким образом, исходные строки (146) перейдут в строку:

$$2 \quad 1 \quad 1 \quad \dots \quad 1. \tag{148}$$

Пользуясь этим простым правилом образования новой строки из каждой пары строк исходной матрицы, несложно установить, что, например, при исключении переменной x_1 из системы уравнений (118) вместо первой и второй строк исходной матрицы степеней появится строка (2, 1, 1), вместо второй и третьей строк появится строка (1, 1, 0), вместо третьей и четвертой строк появится строка (0, 1, 0).

В целом, после исключения переменной x_1 произойдет переход:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

т. е. произойдет переход от матрицы (143) к матрице (144). Ранее мы уже установили это прямым вычислением при исключении x_1. После исключения переменной x_2 по тому же правилу произойдет переход:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

По оставшейся матрице размера 2×2 очень легко установить, может ли произойти потеря корректности после исключения двух переменных. Потеря корректности может произойти, если в матрице степеней размера 2×2 суммы по диагоналям равны. В матрице (145) они как раз равны. Это и говорит о том, что возможны сокращение старших степеней и потеря корректности. Прямое вычисление, проведенное нами ранее для системы уравнений (118), подтверждает это.

Подчеркнем — исследование матрицы степеней говорит только о возможности (или невозможности для общего случая) изменения корректности, дает только необходимые, но недостаточные условия изменения корректности (что подтверждает ранее рассмотренный пример исследования системы (118) — потеря корректности возникает лишь при $a_{31}a_{44} = 0$). Однако именно необходимые условия на практике наиболее важны.

Для примера исследуем — возможна ли потеря корректности в классической задаче определения собственных чисел для матрицы размера 4×4, что соответствует задаче поиска значений параметра λ, при которых возможны ненулевые решения системы уравнений:

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda)x_1 + \ldots + a_{14}x_4 = 0; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{41}x_1 + \ldots + (a_{44} - \lambda)x_4 = 0, \end{cases} \qquad (149)$$

матрица степеней для которой имеет вид:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{150}$$

Преобразуя эту матрицу по уже изложенным простым правилам, устанавливаем:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}. \tag{151}$$

В последней матрице размера 2×2 диагональные суммы не равны. Это говорит о том, что в классической задаче о поиске собственных значений для матрицы размера 4×4 потери корректности при исключении двух переменных в общем случае нет. Это соответствует ранее доказанному нами утверждению о том, что в классической задаче о вычислении собственных чисел матриц любого размера потери корректности в общем случае не возникает.

Теперь рассмотрим случай системы пяти однородных уравнений, в первые три из которых входит параметр λ, а в два последние он не входит, и система имеет вид:

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda)x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{15}x_5 = 0; \\ a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda)x_2 + \ldots + a_{25}x_5 = 0; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + \ldots + a_{45}x_5 = 0; \\ a_{51}x_1 + a_{52}x_2 + \ldots + a_{55}x_5 = 0. \end{cases} \tag{152}$$

Матрица степеней для системы (152) имеет вид:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{153}$$

Преобразуя ее по изложенным ранее правилам, получим:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}. \qquad (154)$$

В последней матрице суммы по диагоналям равны, а это означает, что когда мы исключим из системы (152) три переменных, то задача вычисления собственных значении параметра λ из оставшейся системы двух уравнений с двумя переменными x_4 и x_5 может оказаться некорректной.

Методика матриц степеней позволяет несложно решать самые разнообразные задачи на проверку возможности изменения корректности для самых разных систем линейных однородных уравнений с параметром λ.

Метод матриц степеней позволяет легко ответить и на вопрос о возможной некорректности решения и для того случая, когда после исключения нескольких переменных у нас осталось три уравнения с тремя переменными.

Пусть после исключения нескольких переменных мы пришли к матрице степеней размера 3×3:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \qquad (155)$$

определитель которой, как известно, равен:

$$\Delta = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{12}a_{21}a_{33}. \qquad (156)$$

Для матрицы степеней каждое из шести тройных произведений будет равняться некоторому числу (показателю степени соответствующего полинома от переменной λ), и задача вычисления собственных значений λ корректна в том случае, если среди этих шести чисел есть только одно наибольшее. Тогда при вариациях параметров степень полинома в общем случае заведомо не изменится, а, значит, не изменится и число собственных значений. Если же среди шести чисел, входящих в определитель (156), есть два или более одинаковых наибольших, то при вариациях параметров возможно изменение степени полинома, и задача вычисления собственных значений может быть некорректной.

Для примера рассмотрим классическую задачу вычисления собственных значений для матрицы размера 4×4, что соответствует задаче поиска значений λ, для которых существуют ненулевые решения уже рассмотренной нами системы уравнений (149). После исключения одной переменной придем к матрице степеней:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \tag{157}$$

для которой определитель (156) будет равен:

$$\Delta = 4; \quad 1; \quad 3; \quad 2; \quad 3; \quad 3 \tag{158}$$

(выписываем только показатели степеней). Среди получившихся шести чисел наибольшее только одно, а это говорит о том, что в классической задаче о собственных значениях после исключения одной переменной потери корректности не происходит.

Если же рассмотреть систему уравнений (152), когда параметр λ входит в три первые уравнения и не входит в два последние, то после исключения двух переменных приходим (как показывают соотношения (154)) к матрице степеней:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{159}$$

для которой определитель (156) будет равен:

$$\Delta = 4; \quad 4; \quad 4; \quad 4; \quad 4; \quad 4,$$

а это говорит о том, что уже после исключения двух переменных мы можем прийти к некорректной задаче.

Исследование матриц степеней показывает, что простейшие случаи изменения корректности решаемой задачи возможны уже в системах, состоящих из трех уравнений. Возьмем в качестве примера совсем простую систему:

$$\begin{cases} \lambda x_1 - x_3 = 0; \\ x_1 - 2\lambda x_2 + x_3 = 0;, \\ x_1 - x_2 = 0, \end{cases} \tag{160}$$

для которой рассмотрим ту же задачу о нахождении значений параметра λ, при которых возможны ненулевые решения. Домножим второе уравнение на λ (это законно, поскольку $\lambda = 0$, как легко проверить, не является решением) и сложим с первым. Переменная x_1 исключится, и мы получим:

$$2\lambda^2 x_2 - (\lambda + 1)x_3 = 0. \tag{161}$$

Вычтя из второго уравнения третье, получим:

$$(1 - 2\lambda)x_2 + x_3 = 0. \tag{162}$$

Исключив x_2 из уравнений (161) и (162), получим:

$$(1 - \lambda)x_3 = 0, \tag{163}$$

откуда находим единственное собственное значение $\lambda = 1$.

Однако задача исключения x_2 из системы уравнений (161) и (162) некорректна. Если в уравнении (162) коэффициент перед переменной x_3 равен не единице, а $(1 + \varepsilon)$, то после исключения x_2 вместо уравнения (163) получим:

$$(2\varepsilon\lambda^2 - \lambda + 1)x_3 = 0, \tag{164}$$

из которого найдем два собственных значения λ_1 и λ_2, причем λ_2 не стремится к единице при $\varepsilon \to 0$.

В то же время, если начать с третьего из уравнений (160) и подставить полученное из него значение $x_1 = x_2$ в первые два, то придем к системе:

$$\begin{cases} \lambda x_2 - x_3 = 0; \\ (1 - 2\lambda)x_2 + x_3 = 0, \end{cases} \tag{165}$$

для которой задача вычисления собственного значения λ является корректной.

Таким образом, корректность или некорректность решаемой задачи может зависеть от метода решения.

Другой пример — система:

$$\begin{cases} (1 - \lambda)x_1 + x_2 + 2x_3 = 0; \\ x_1 + (1 - \lambda)x_2 + 3x_3 = 0;. \\ x_1 + x_2 = 0. \end{cases} \tag{166}$$

Для нее единственным значением параметра λ, при котором возможны ненулевые решения, является $\lambda = 0$, и задача его определения — корректна, если решение вести, начиная с последнего уравнения. Если же исключать переменные в порядке их индексов, что естественно при переходе на машинные вычисления, то после исключения x_1 путем домножения второго из уравнений (166) на $(1-\lambda)$ (с учетом того, что $\lambda = 1$ решением не является) и вычитания получившейся строки из первого уравнения получим:

$$(\lambda^2 - 2\lambda)x_2 + (1 - 3\lambda)x_3 = 0. \tag{167}$$

Вычитая из второго из уравнений (166) третье, получим:

$$\lambda x_2 - 3x_3 = 0. \tag{168}$$

Исключив x_3 из уравнений (167) и (168), получим:

$$5\lambda x_2 = 0, \tag{169}$$

откуда сразу получаем, что единственным собственным значением является $\lambda = 0$. Таким образом, по отношению к задаче определения собственных значений параметра λ система уравнений (167) и (168) эквивалентна (в классическом смысле) системе (166). Однако для системы (167)—(168) задача вычисления собственных значений параметра λ некорректна — если, например, в уравнении (168) коэффициент перед x_3 равен не трем, а равен $3(1+\varepsilon)$, то, после исключения x_3 из уравнений (167) и (168), получим вместо уравнения (169) уравнение:

$$(3\varepsilon\lambda^2 - 6\varepsilon\lambda - 5\lambda)x_2 = 0, \tag{170}$$

из которого находим два собственных значения: $\lambda_1 = 0$; $\lambda_2 = 2 + \dfrac{5}{3\varepsilon}$.

Этот пример особенно наглядно показывает, что сколь угодно малая вариация параметров, сколь угодно малая ошибка округления при вычислениях могут привести к грубой ошибке, и что второе (ложное) собственное значение λ при $\varepsilon \to 0$ отнюдь не стремится к λ_1 и исчезает лишь при точном равенстве $\varepsilon = 0$. Даже при очень малом ε второе собственное значение велико.

Примеры систем трех уравнений (160) и (166) являются наиболее простыми.

Для систем управления (в уравнениях которых одной из переменных является управление) потеря корректности существенна для систем четвертого порядка, как это и было показано в предыдущих главах. Для систем управления изменение корректности выливается в потерю устойчивости при вариациях параметров и может быть, как уже говорилось, причиной опасных аварий и катастроф. Специфические проблемы, возникающие в системах управления, системах стабилизации и т. д. освещены в дополнительных главах, включенных во второе, дополненное, издание монографии [29], выпущенной издательством Санкт-Петербургского технического университета (бывшего Политехнического института) в 1997 году.

Не рассмотренным в [29] остался интересный вопрос о соотношении описания систем управления на языке структурных схем и на языке дифференциальных уравнений. Обычно эти языки описания считаются одинаково полными, и на практике, как правило, сначала составляют структурную схему проектируемой системы, отражающую взаимосвязь ее отдельных элементов, а затем на ее основе пишут систему дифференциальных уравнений, решение которой затем возлагают на вычислительную технику, и полученными решениями руководствуются. Однако в действительности язык структурных схем более полно отражает явления и процессы, происходящие в реальный системе, чем язык дифференциальных уравнений, особенно при учете неизбежного на практике малого дрейфа параметров.

Вернемся к рассмотренному ранее объекту управления (33), управляющее воздействие на который — переменная x_2 — формируется согласно уравнению (35). На языке структурных схем система (33)—(35) будет выглядеть так, как это показано на рис. 13.1. Структурная схема, приведенная на рис. 13.1, отражает тот факт, что управляющее воздействие x_2 в канале обратной связи формируется из переменных x_1, x_3 и x_4 с коэффициентами усиления –1; –2; –1.

Если переменные x_3 и x_4 для непосредственного измерения и использования в канале обратной связи недоступны, а мы хотим обеспечить те же самые переходные процессы, которые протекали в системе (33)—(35), то можно, пользуясь уравнениями (33), выразить переменные x_3 и x_4 через доступные нам переменные x_1 и x_2 и их производные. Сделав такую замену переменных, мы вместо обратной связи (регулятора), описываемого уравнением (35), получим эквивалентный ему регулятор (обратную связь), описываемый уравнением (26).

На языке структурных схем объект управления (33) с обратной связью (26) будет выглядеть так, как это показано на рис. 13.2. Подчеркнем, что при неизменных, соответствующих расчетным, значениях параметров объекта управления и регулятора структурные схемы, показанные на рис. 13.1 и 13.2, равнозначны, и им одинаково соответствуют переходные процессы, описываемые формулой (29).

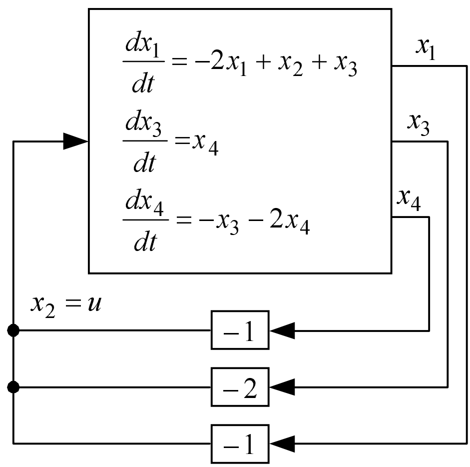

Рис. 13.1

Однако если мы в структурной схеме, показанной на рис. 13.1, изменим на малые величины коэффициенты регулятора (35) — т. е. изменим на малые величины коэффициенты (–1); (–2) и (–1) в канале обратной связи, то переходный процесс изменится мало и устойчивость замкнутой системы сохранится. Если же мы даже сколь угодно мало изменим некоторые из коэффициентов в канале обратной связи для структурной схемы, показанной на рис. 13.2, то переходные процессы могут измениться коренным образом, и замкнутая система может стать неустойчивой. На языке структурных схем все эти явления описываются проще и нагляднее, чем на языке дифференциальных уравнений, поскольку в структурной схеме особенно ясно видно, что вариации параметров цепи обратной связи могут быть независимы от вариаций параметров объекта управления. Кроме того, особенно наглядно видно, что хотя структурные схемы, показанные на рис. 13.1 и 13.2, при неизменных параметрах и коэффициентах описывают одни и те же переходные процессы в реальной системе, но они все же не тождественны друг другу и поэтому при вариациях параметров ведут себя по-разному. Это позволяет лучше понять, почему уравнения (25)—(26) и (33)—(35) полностью эквивалентны друг другу в классическом смысле и в то же время неэквивалентны в расширенном смысле.

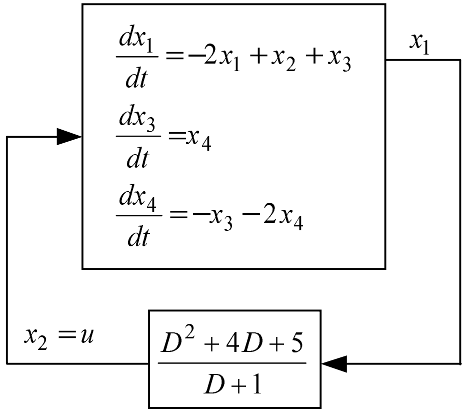

Рис. 13.2

2. Поведение решений дифференциальных уравнений на фазовой плоскости

Как известно, качественную картину поведения решений дифференциальных уравнений удобно изучать на *фазовой плоскости* — т. е. такой плоскости, где по оси абсцисс отложена одна из переменных, а по оси ординат — другая (или производная первой переменной).

Рассмотрим для примера систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = x_2; \\ \dfrac{dx_2}{dt} = -\omega_0^2 x_1. \end{cases} \tag{171}$$

Эта система легко интегрируется, и мы находим решения:

$$\begin{aligned} x_1 &= c_1 \sin(\omega_0 t + c_2); \\ x_2 &= c_1 \omega_0 \cos(\omega_0 t + c_2), \end{aligned} \tag{172}$$

где c_1 и c_2 — постоянные интегрирования, зависящие от начальных условий.

Исключая переменную t (время), найдем уравнения траекторий движения на фазовой плоскости:

$$\frac{x_1^2}{c_1^2} + \frac{x_2^2}{c_1^2\omega_0^2} = 1. \tag{173}$$

Непосредственно очевидно, что уравнение (173) является уравнением семейства подобных, вложенных друг в друга эллипсов, причем через каждую точку фазовой плоскости проходит только один эллипс, соответствующий определенному начальному условию. Из уравнения (173) вытекает периодичность решений, их ограниченность и т. п. При этом — что особенно важно — эти свойства решений можно получить и изучать без непосредственного интегрирования исходных уравнений (171). Действительно, поделим второе из уравнений (171) на первое. Получим уравнение:

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\omega_0^2 \frac{x_1}{x_2}, \tag{174}$$

дифференциальное уравнение первого порядка, интегрировать которое много легче, чем систему (171). Интегрируя уравнение (174) методом разделения переменных, получим уравнение (173), пользуясь которым мы можем установить качественную картину решений (ограниченность, периодичность и т. п.) без интегрирования самих уравнений (171).

Тот же метод может быть использован (и широко используется) для исследования поведения решений нелинейных уравнений, которые не могут быть проинтегрированы в элементарных функциях.

Поэтому метод фазовой плоскости, метод составления фазового портрета широко применяется при исследовании самых различных объектов, математической моделью которых являются системы линейных и нелинейных дифференциальных уравнений. Количество книг и статей, посвященных различным аспектам методики фазовой плоскости и ее приложений, поистине необъятно велико.

Одним из важнейших условий правильного применения методики фазовой плоскости является выявление условий, при которых качественная картина фазового портрета, качественная картина поведения траекторий на фазовой плоскости, не менялась бы коренным образом при малых изменениях коэффициентов в дифференциальных уравнениях или малых изменениях их правых частей, которые в реальных условиях совершенно неизбежны.

Еще в классической монографии [30] совершенно правильно указывалось, что "ни один из учитываемых нами факторов не может оставаться абсолютно неизменным", что "параметры в реальной физической системе нельзя считать абсолютно постоянными, а лишь приблизительно постоянными", и что "поэтому мы можем сразу отказаться от рассмотрения таких качественных сторон движения, которые исчезают при небольших изменениях вида дифференциальных уравнений, описывающих систему".

Рассмотрим поэтому внимательнее возможность качественного изменения фазового портрета, качественной картины поведения траекторий на фазовой плоскости при решении систем уравнений, в ходе выполняемых при решении преобразований.

Рассмотрим систему уравнений:

$$\dot{x}_1 = x_1 + x_2 + 2x_3\,; \tag{175}$$

$$\dot{x}_2 = x_1 + x_2 + 3x_3\,; \tag{176}$$

$$x_1 + x_2 = 0\,. \tag{177}$$

Эта система совершенно элементарно решается, если уравнение (177) подставить в (175) и (176), а после подстановки вычесть их одно из другого. Получим:

$$x_3 = 0\,;\; x_2 = c_1\,;\; x_1 = -c_1\,. \tag{178}$$

Теперь посмотрим, что получится, если мы используем традиционный метод решения путем последовательного исключения переменных. начиная с x_1. Домножив уравнение (176) на операторный полином $D-1$ (и проверив потом, что функция $x_1 = c_0 e^t$, соответствующая $D-1=0$, решением не является), мы можем вычесть его из уравнения (175). Получим уравнение, не содержащее x_1:

$$(D^2 - 2D)x_2 + (1-3D)x_3 = 0\,. \tag{179}$$

Вычтя сумму $x_1 + x_2$, равную нулю, из уравнения (176), получим второе уравнение с переменными x_2 и x_3:

$$Dx_2 = 3x_3\,. \tag{180}$$

Исключив из системы уравнений (179)—(180) переменную x_3, получим:

$$5Dx_2 = 0\,, \tag{181}$$

откуда, как и следовало ожидать, находим, что $x_2 = c_1$; $x_3 = 0$; $x_1 = -c_1$, т. е. находим те же решения, что и ранее. Это лишний раз говорит о том, что система уравнений (179), (180), (177) эквивалентна системе (175), (176), (177), поскольку мы пользовались только эквивалентными преобразованиями. Однако система (179), (180), (177) эквивалентна системе (175), (176), (177) только в классическом смысле, но не в расширенном. При вариациях коэффициентов системы ведут себя по-разному. Задача нахождения решений $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$ для системы уравнений (179), (180), (177) — некорректна.

Действительно, пусть в уравнении (180) коэффициент при x_3 не тройка, а $3(1+\varepsilon)$, где ε — число, малое по сравнению с единицей. Тогда после исключения x_3 придем к уравнению:

$$[3\varepsilon D^2 - (5 + 6\varepsilon)D]x_2 = 0, \tag{182}$$

откуда, решив его, получаем:

$$x_2 = c_1 + c_2 e^{\left(2+\frac{5}{3\varepsilon}\right)t}, \tag{183}$$

$$x_3 = \left(\frac{6\varepsilon + 5}{9\varepsilon + 9\varepsilon^2}\right) c_2 e^{\left(2+\frac{5}{3\varepsilon}\right)t}. \tag{184}$$

Теперь мы убеждаемся, что уже при сколь угодно малых вариациях коэффициентов уравнений (179) или (180) или же при сколь угодно малых ошибках округления в ходе последовательного исключения переменных из исходной системы (175)—(177) и решения уравнений весь характер фазового портрета, все поведение траекторий на фазовой плоскости, меняются коренным образом.

Рассмотрим траектории решений уравнений (175)—(177) на фазовой плоскости, где по оси ординат отложены значения переменной x_2, а по оси абсцисс — значения переменной x_3. Учитывая формулы (178) устанавливаем, что фазовый портрет решений уравнений (175)—(177) имеет вид, показанный на рис. 13.3 — т. е. состоит из набора точек $x_2 = c_1$, заполняющих всю ось ординат (на рис. 13.3 символически показаны отдельные точки).

Тот же самый фазовый портрет будет и у решений уравнений (179), (180), (177), которые эквивалентны (в классическом смысле, но не в расширенном) уравнениям (175)—(177). Однако если в уравнении (180) коэффициент при x_3 равен не тройке, а $3(1+\varepsilon)$ и $\varepsilon \neq 0$, то характер фазовых траекторий и весь фазовый портрет меняются коренным образом: формулы (183)—(184) показывают, что теперь:

$$x_2 = c_1 + \frac{9\varepsilon + 9\varepsilon^2}{6\varepsilon + 5} x_3 . \tag{185}$$

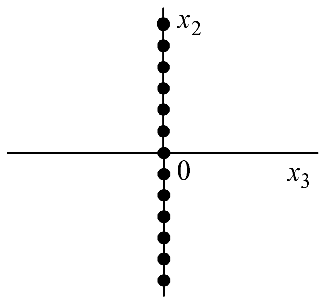

Рис. 13.3

Рассмотрим сперва случай $\left(2 + \frac{5}{3\varepsilon}\right) > 0$. В этом случае показатели экспонент в формулах (183)—(184) положительны, и с ростом переменной t (времени) решения x_2 и x_3 будут возрастать неограниченно. Фазовые траектории будут прямыми линиями, идущими вверх и вправо. Наклон этих линий зависит от ε. На рис. 13.4 показан фазовый портрет для одного из значений ε.

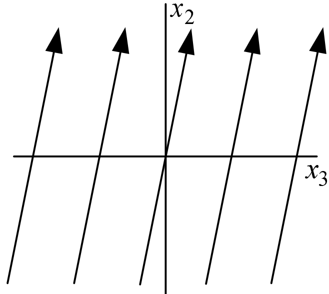

Рис. 13.4

Теперь перейдем к случаю, когда $\left(2+\frac{5}{3\varepsilon}\right)<0$, и поэтому показатели экспонент в формулах (183) и (184) отрицательны. В этом случае с ростом времени будут $x_3 \to 0$, $x_2 \to c_1$, и с учетом формулы (185) фазовые траектории принимают другой вид — оставаясь прямыми линиями, заполняющими всю фазовую плоскость, они теперь стремятся к оси ординат и слева, и справа и заканчиваются на ней, как показано на рис. 13.5.

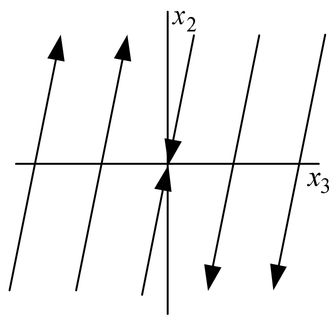

Рис. 13.5

Мы убеждаемся, что при преобразованиях уравнений, если эти преобразования эквивалентны в классическом смысле, но не в расширенном, реальные фазовые портреты решений с учетом неизбежных вариаций и сам характер фазовых траекторий могут измениться коренным образом.

Поэтому при исследованиях различных объектов и систем на фазовой плоскости нужно с особой тщательностью следить за используемыми преобразованиями системы и различать преобразования, эквивалентные и в классическом, и в расширенном смысле, от преобразований, эквивалентных в классическом смысле, но не в расширенном. Желательно при исследовании устойчивости характера фазового портрета по отношению к малым изменениям коэффициентов, параметров и т. п. проводить исследования для всех используемых форм записи дифференциальных уравнений.

По существу, еще в *главе 3*, при анализе системы уравнений (25)—(26) мы убедились, что при вариациях некоторых коэффициентов этой системы характер фазового портрета резко изменится — при расчетных значениях параметров все фазовые траектории стремятся с течением времени к началу координат, а уже при сколь угодно малых вариациях некоторых коэффициентов переменные $x_1(t)$ и $x_2(t)$ могут неограниченно возрастать при $t \to \infty$. Этого важного свойства фазового портрета мы не увидим, если перепишем уравнения (25)—(26) (как это очень часто делается) к нормальной форме Коши (33)—(35), хотя уравнения (25)—(26) и (33)—(35) эквивалентны (в классическом смысле) и при расчетных значениях коэффициентов имеют одни и те же решения $x_1(t)$ и $x_2(t)$.

Таким образом, неучет различия между преобразованиями, эквивалентными в расширенном смысле, и преобразованиями, эквивалентными в классическом смысле, но не в расширенном, может вести к ошибочным результатам в различных областях, в частности, и при исследовании фазовых портретов. Наиболее опасными ошибками, естественно, являются рассмотренные в *главах 3—11* ошибки в оценке запасов устойчивости, поскольку они могут стать причиной опасных аварий.

Кроме того, как уже показано, использование подобных преобразований может стать дополнительной причиной ошибок в самых различных расчетах. В данной главе это проиллюстрировано на примере обобщенной задачи вычисления собственных значений. Однако в ходе дальнейших исследований было обнаружено, что ошибки, возникающие от смешения преобразований, эквивалентных в классическом и в расширенном смысле, постепенно выявлялись все в новых и новых областях приложений — при численном решении систем дифференциальных уравнений *(см. главу 15)*, в интегральных уравнениях (см. исследования В. С. Сизикова, опубликованные в [47]), в линейном программировании [46], в интегральных преобразованиях [47]. Следует ожидать, что подобные ошибки будут в последующем обнаружены и в других расчетах и вычислениях. Здесь открыто большое поле для дальнейшей научной работы.

3. Сопоставление различных методов исключения переменных

В предыдущем изложении мы рассматривали простейший метод исключения переменных из системы линейных однородных уравнений (119) — метод последовательного исключения путем домножений и сложений. Исследуя этим методом системы, состоящие из четырех уравнений с четырьмя переменными, мы обнаружили, что после исключения двух переменных при $a_{31} = 0$ или $a_{44} = 0$ происходит потеря корректности решаемой задачи о нахождении собственных значений параметра λ, а при $a_{31}a_{44} \neq 0$ потери корректности не происходит.

Ранее мы исследовали в основном системы, в которых $a_{31}a_{44} = 0$, сейчас перенесем внимание на случай $a_{31}a_{44} \neq 0$.

Вернемся к системам управления и рассмотрим систему, состоящую из объекта управления:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + x_3 + u; \\ \dot{x}_2 = x_1 + x_3 + u; \\ \dot{x}_3 = x_1 + x_2 + 2u \end{cases} \tag{186}$$

и регулятора:

$$u = -x_1 - x_2 - x_3 . \tag{187}$$

Подставив (187) в (186), получим уравнения замкнутой системы:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1; \\ \dot{x}_2 = -x_2; \\ \dot{x}_3 = -x_1 - x_2 - 2x_3. \end{cases} . \tag{188}$$

Характеристический полином замкнутой системы равен определителю:

$$\begin{vmatrix} \lambda + 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda + 1 & 0 \\ 1 & 1 & \lambda + 2 \end{vmatrix} = \lambda^3 + 4\lambda^2 + 5\lambda + 2 = (\lambda + 1)^2 (\lambda + 2) \tag{189}$$

и имеет корни $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = \lambda_3 = -1$, лежащие в левой полуплоскости далеко от мнимой оси.

Замкнутая система устойчива.

Теперь предположим, что непосредственно можно измерить и использовать в канале обратной связи только переменную x_3. Преобразуем, как и ранее, уравнения объекта управления и регулятора к переменным x_3 и u, исключив переменные x_1 и x_2 путем домножений и сложений. Используя ранее полученные формулы (133)—(136), нетрудно вычислить:

$$A_1 = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 3\lambda + 2 ,$$

$$A_2 = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2\lambda^2 + 2\lambda,$$

$$A_3 = \begin{vmatrix} 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \lambda^2 + 2\lambda + 1,$$

$$A_4 = \begin{vmatrix} 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -(\lambda + 1).$$

Уравнения объекта управления (186) и регулятора (187) в переменных x_3 и u принимают вид:

$$\begin{aligned} (D^3 - 3D - 2)x_3 &= 2(D^2 + D)u; \\ (D^2 + 2D + 1)x_3 &= (D + 1)u. \end{aligned} \tag{190}$$

Характеристический полином замкнутой системы равен определителю:

$$\begin{vmatrix} -\lambda^3 + 3\lambda + 2 & 2(\lambda^2 + \lambda) \\ \lambda^2 + 2\lambda + 1 & -(\lambda + 1) \end{vmatrix} = \lambda^4 + 5\lambda^3 + 6\lambda^2 + 7\lambda + 2 = (\lambda + 1)^3(\lambda + 2).$$

Мы убеждаемся, что по сравнению с характеристическим полиномом (189) появился еще один корень $\lambda_4 = -1$, не порожденный вариациями параметров и от них не зависящий. Это говорит о том, что система (190) не полностью эквивалентна (в классическом смысле) системе (186)—(187).

В процессе домножения и сложения мы ввели лишний корень. В данном частном случае этот корень нетрудно устранить: второе из уравнений (190) можно сократить на операторный полином $(D + 1)$, и мы придем к следующим уравнениям для объекта управления и регулятора:

$$(D^3 - 3D - 2)x_3 = 2(D^2 + D)u; \tag{192}$$

$$(D + 1)x_3 = u. \tag{193}$$

Система (192)—(193) имеет тот же порядок, что и исходная система (186)—(187) и тот же характеристический полином (189).

Нетрудно убедиться, что и система (190), и система (192)—(193) сохраняют устойчивость при вариациях любых своих коэффициентов (так же, как и система (186)—(187)). Система (192)—(193) имеет тот же характеристический полином, что и система (186)—(187), и обе системы эквивалентны между собой как в классическом смысле, так и в расширенном. Потери корректности при использованных нами преобразованиях не произошло.

Однако присутствие в правой и левой частях уравнения регулятора одинакового операторного множителя, сокращение на который возможно, является редким частным случаем. В общем же случае, когда мы исключаем по описанной ранее простейшей методике переменные x_1 и x_2 из уравнений объекта управления и регулятора типа (186)—(187), но с другими коэффициентами, то при $a_{31}a_{44} \neq 0$ мы приходим к системе, у которой характеристический полином имеет лишний четвертый корень по сравнению с исходной системой (и этот корень не зависит, естественно, от вариаций параметров и коэффициентов системы). Поэтому преобразованная система не полностью эквивалентна исходной в классическом смысле, и переходные процессы в исходной и преобразованной системах не будут тождественны. Поэтому были предложены другие методы исключения переменных, не нарушающие эквивалентности в классическом ее смысле.

Еще в [15] был рассмотрен подобный метод для объектов управления третьего порядка:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + b_1u; \\ \dot{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + b_2u; \\ \dot{x}_3 = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + b_3u \end{cases} \tag{194}$$

с регулятором вида:

$$u = k_1x_1 + k_2x_2 + k_3x_3 \,. \tag{195}$$

Характеристический полином замкнутой системы (194)—(195) будет полиномом третьей степени.

Если непосредственно измерима только переменная x_3, то из уравнений (194) переменные x_1 и x_2 исключаются уже описанным нами способом, и в результате получается хорошо знакомое уравнение:

$$A_1(D)x_3 = A_2(D)u \,, \tag{196}$$

где:

$$A_1 = \begin{vmatrix} a_{11}-D & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-D & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-D \end{vmatrix} \qquad (197)$$

и, соответственно,

$$A_2 = \begin{vmatrix} a_{11}-D & a_{12} & -b_1 \\ a_{21} & a_{22}-D & -b_2 \\ a_{31} & a_{32} & -b_3 \end{vmatrix}. \qquad (198)$$

Для исключения переменных x_1 и x_2 из уравнения (195) предлагалось домножить правую и левую части первого из уравнений (194) на $(r_1 + r_2 D)$, второго — на $(s_1 + s_2 D)$, третьего — на $(t_1 + t_2 D)$ (где все r, s и t — подлежащие определению коэффициенты), после чего все три уравнения складываются, и к сумме прибавляется уравнение (195). В результате получалась зависимость между управлением u и переменными x_1, x_2, x_3 и их производными; в этой зависимости неизвестные пока коэффициенты $r_1;\ldots;t_2$ выбирались так, чтобы обращались в нуль коэффициенты перед x_1 и $\dot{x}_1$, x_2 и $\dot{x}_2$. Условие обращения в нуль этих коэффициентов давало систему уравнений, необходимых для определения $r_1;\ldots;t_2$. Окончательно получается уравнение регулятора в виде:

$$W_1(D)x_3 = W_2(D)u\,, \qquad (199)$$

где $W_1(D)$ — полином второй степени, а $W_2(D)$ — полином первой степени. Характеристический полином замкнутой системы будет равен:

$$W_1 A_2 - W_2 A_1\,, \qquad (200)$$

и при этом способе исключения переменных он всегда будет полиномом третьей степени, как у исходной системы (194)—(195) (при $a_{31}a_{44} = 0$ оба способа исключения совпадают), лишних корней не будет, члены четвертой степени в полиноме (200) взаимно сократятся, переходные процессы будут те же, что и в исходной системе. Но сокращение членов с четвертой степенью переменной D будет, естественно, происходить лишь в том случае, если все коэффициенты и параметры объекта управления (196) и регулятора (199) в точности равны своим расчетным значениям. Уже при сколь угодно малых вариациях их параметров сокращения может и не произойти, а тем самым, как уже ранее было показано, может потеряться и устойчивость замкнутой системы. Уравнения (196)—(199) эквивалентны уравнениям (194)—(195) в классическом смысле и не эквивалентны — в расширенном.

Данный способ исключения переменных громоздок, и М. А. Галактионов предложил способ исключения, пригодный для любого числа переменных и для любой прямоугольной матрицы H, связывающей вектор y реально измеряемых и реально используемых в цепи обратной связи переменных с полным вектором x переменных в объекте управления. Способ М.А. Галактионова опубликован в [1], в §§ 3—4 главы 5, поэтому ограничимся кратким его изложением.

Метод применим к линейным объектам управления произвольного порядка:

$$\dot{x} = Ax + Bu\,, \tag{201}$$

где A — матрица размера $n \times n$ постоянных коэффициентов, а B — вектор-столбец коэффициентов при управляющем воздействии. Объект управления (201) замкнут регулятором:

$$u = Kx\,, \tag{202}$$

где K — матрица-строка.

Пусть непосредственно измеримыми и непосредственно используемыми в канале обратной связи могут быть только переменные y, связанные с переменными x прямоугольной матрицей:

$$y = Hx \tag{203}$$

(в частном случае матрица H может быть и матрицей-строкой — так, в примере с системой (194)—(195), было $H = (0;0;1)$). Далее рассмотрим случай $n = 3$ и $H = (0;0;1)$. Поскольку вопрос об устойчивости системы (201)—(202) и о сохранении устойчивости при вариациях параметров сводится, как известно, к вопросу о собственных значениях параметра λ, который ставится на место оператора дифференцирования, то произведем эту замену и запишем уравнение (201) в виде:

$$\lambda x = Ax + Bu\,. \tag{204}$$

Теперь умножим правую и левую части уравнения (203) на λ и подставим вместо λx его значение из (204). Получим:

$$\lambda y = HAx + HBu\,. \tag{205}$$

Умножим правую и левую части этого равенства еще раз на λ и, снова подставив вместо произведения λx его значение из (204), получим:

$$\lambda^2 y = HA^2 x + HB\lambda u + HABu\,. \tag{206}$$

Уравнения (203), (205) и (206) можно рассматривать как одно векторно-матричное уравнение, связывающее y, x и u:

$$\begin{pmatrix} y \\ \lambda y - HBu \\ \lambda^2 y - HB\lambda u - HABu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H \\ HA \\ HA^2 \end{pmatrix} x\,. \tag{207}$$

Из уравнения (207) следует, что:

$$x = \begin{pmatrix} H \\ HA \\ HA^2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} y \\ \lambda y - HBu \\ \lambda^2 y - HB\lambda u - HABu \end{pmatrix}, \tag{208}$$

где символом:

$$\begin{pmatrix} H \\ HA \\ HA^2 \end{pmatrix}^{-1} \tag{209}$$

обозначена матрица, обратная к матрице:

$$\begin{pmatrix} H \\ HA \\ HA^2 \end{pmatrix}. \tag{210}$$

Из уравнения (208) следует, что:

$$x = L_1 y + L_2(\lambda y - HBu) + L_3(\lambda^2 y - HB\lambda u - HABu)\,, \tag{211}$$

где L_1, L_2, L_3 — векторы-столбцы, и, следовательно,

$$u = Kx = KL_1 y + KL_2(\lambda y - HBu) + KL_3(\lambda^2 y - HB\lambda u - HABu)\,. \tag{212}$$

Поскольку в рассматриваемом нами случае матрица $H = (0;0;1)$, а произведение матрицы-строки на вектор-столбец является числом, то из формулы (212) следует, что если $y = x_3$, то после исключения переменных x_1 и x_2 регулятор (202) приобретает вид:

$$(n_1 D^2 + n_2 D + n_3) x_3 = (n_4 D + n_5) u \,, \tag{213}$$

где $n_1;\ldots;n_5$ — числа, которые можно вычислить на основе формулы (212). Анализ таких чисел показывает, что в общем случае при $b_3 \neq 0$ замкнутая система может терять устойчивость при сколь угодно малых вариациях параметров объекта управления или регулятора (213). После исключения переменных x_1 и x_2 произошла потеря корректности рассматриваемой нами задачи об устойчивости замкнутой системы.

Разумеется, описанный метод расчета регулятора, использующего только реальный вектор переменных на выходе, может применяться к объектам управления более высокого порядка и к любым матрицам (203). Примеры приведены в [1].

Мы убеждаемся, что потеря корректности при преобразованиях уравнений является тонким и сложным явлением. Она может зависеть от вида используемых преобразований, и даже от порядка их. В то же время неожиданная встреча с изменением корректности может вести к ошибкам при анализе сохранения устойчивости самых различных систем и устройств и стать причиной связанных с этими ошибками аварий и катастроф. Потеря корректности может также быть еще одной дополнительной причиной ошибок в расчетах при самых малых погрешностях округления при вычислениях.

Явление потери корректности требует дальнейшего углубленного исследования и изучения.

Автор благодарит Д. Б. Фроленкова за помощь в работе над материалом *главы 13*.

Глава 14

О третьем классе задач математики, физики и техники — задачах, промежуточных между корректными и некорректными

Рассмотренные нами примеры показывают, что помимо класса корректных и класса некорректных задач математики, физики и техники существует еще один, третий класс — класс задач, меняющих свою корректность при эквивалентных преобразованиях — в том числе и при преобразованиях, используемых в ходе их решения.

Корректные задачи решались в математике с давних времен. Начало исследованию некорректных задач положили работы выдающегося французского математика Ж. Адамара (1865—1963), первая из которых датируется 1902 годом [22]. Во второй половине XX века обнаружилась важность класса некорректных задач, и были предложены методы их регуляризации и подхода к решению. Это было сделано прежде всего трудами академика А. Н. Тихонова и его школы [21, 22] и др., которые явились важным вкладом в мировую науку и получили заслуженное признание.

В работах [1—5, 28, 29] обрисовались контуры еще одного, третьего класса задач математики, физики и техники — класса, объединяющего задачи, способные изменять корректность при эквивалентных преобразованиях. Выделение задач, изменяющих корректность, в особый класс введено и обосновано в работе [32]. История вопроса изложена в [31] и в [70].

Этот новый, третий класс задач еще только начинает исследоваться. Важность его заключается в том, что неожиданное изменение корректности может стать источником ошибок в расчетах.

Наиболее опасно, когда первичная, исходная, непосредственно вытекающая из законов механики и физики математическая модель исследуемого объекта или явления в отношении рассматриваемой нами задачи некорректна.

Поскольку исходные модели часто неудобны для исследования, их обычно преобразуют, приводя, как правило, к "стандартной" форме, для исследования которой можно применить хорошо разработанную теорию и программное обеспечение. Для приведения математической модели к удобной форме используют, разумеется, только эквивалентные преобразования, и поэтому решения исходной и преобразованной модели совпадают.

Что касается корректности, то ее проверяют обычно один раз, по удобной преобразованной системе, молчаливо предполагая, что раз использованные преобразования были эквивалентными (в классическом смысле!) и решения не изменились, то не должна измениться и корректность решаемой задачи. На самом деле, как мы уже убедились, это не так, и при эквивалентных преобразованиях корректность может измениться. Если проверенная нами преобразованная математическая модель в отношении рассматриваемой задачи корректна, то это еще почти ничего не говорит о корректности исходной модели, и главное — об истинной корректности рассматриваемой нами задачи. А ошибка в проверке корректности может стать причиной аварий и катастроф — об этом уже говорилось.

Рассмотрим некоторые примеры.

Первым примером может служить известная в 70-х годах прошлого века проблема синтеза оптимального авторулевого, обеспечивающего минимальную потерю скорости судна при его движении в условиях нерегулярного морского волнения. Математической моделью движения водоизмещающего судна по курсу, как известно, может служить уравнение:

$$(T_1^2 D^2 + T_2 D)\theta = u + \varphi(t)\,, \tag{214}$$

в котором θ — это угол отклонения судна от курса в градусах; T_1 и T_2 — постоянные времени, в секундах; $D = \dfrac{d}{dt}$ — оператор дифференцирования; u — угол отклонения руля от диаметрали в градусах (он играет роль управления) ; $\varphi(t)$ — возмущающее воздействие, момент сил от ветра и морского волнения, сбивающий судно с курса и измеряемый в градусах отклонения руля, создающего момент той же величины. Более подробно вывод уравнения (214) и его анализ приведены в монографии [16].

Уравнение (214) — математическая модель движения судна по курсу — непосредственно вытекает из уравнений теоретической механики, из уравнений равновесия моментов относительно вертикальной оси, проходящей через центр масс судна. Правая часть равенства (214) равна сумме моментов относительно этой оси, левая отражает момент инерции корпуса и демпфирующее влияние воды.

Хорошо известно, что момент $\varphi(t)$ является стационарным случайным процессом, и его спектральная плотность мощности может быть аппроксимирована аналитическим выражением:

$$S_\varphi = D_\varphi \frac{1}{(\omega^2 - \alpha^2 - \beta^2)^2 + 4\alpha^2\omega^2} \tag{215}$$

(спектром Рахманина—Фирсова), где D_φ — дисперсия; α и β — коэффициенты, зависящие от характера волнения. Момент $\varphi(t)$ может быть также представлен как процесс на выходе линейного звена второго порядка:

$$[D^2 + 2\alpha D + \alpha^2 + \beta^2]\varphi = \eta(t), \tag{216}$$

на входе которого присутствует функция $\eta(t)$, являющаяся возмущающим воздействием типа "белого шума".

Уравнение (216) можно привести к виду двух уравнений первого порядка, если ввести новые переменные $x_1 = \varphi$ и $x_2 = \dot{\varphi}$. Получим:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2; \\ \dot{x}_2 = -(\alpha^2 + \beta^2)x_1 - 2\alpha x_2 + \eta(t). \end{cases} \tag{217}$$

Потеря скорости возникает от дополнительного сопротивления движению корпуса судна при $\theta \neq 0$ и дополнительного сопротивления, создаваемого рулем при отклонении руля от диаметрали.

В целом, как показано, например, в [16], потеря скорости Δv пропорциональна интегралу:

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T (m^2\theta^2 + u^2)dt, \tag{218}$$

где m^2 — весовой коэффициент, зависящий от формы корпуса судна.

В традиционно используемых авторулевых используется закон управления:

$$u = -\left(k_1 D + k_0 + \frac{k_u}{D} \right) \theta , \qquad (219)$$

где k_1, k_2 и k_u — постоянные коэффициенты, причем третий коэффициент много меньше первых двух, на динамику судна он существенного влияния не оказывает и предназначен для компенсации очень медленно изменяющихся составляющих в возмущающих воздействиях.

Закон управления (219) в общем случае не обеспечивает, как легко проверить, минимума потери скорости, пропорциональной интегралу (218), и поэтому еще в конце 1960-х годов были предложены другие законы управления, способные уменьшить потерю скорости при движении судна в условиях волнения на море и принести тем самым крупный экономический эффект.

Найти эти законы нетрудно: достаточно ввести новые переменные $x_3 = \theta$ и $x_4 = \dot{\theta}$. Тогда уравнения (214) и (216) запишутся в нормальной форме Коши:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2; \\ \dot{x}_2 = -(\alpha^2 + \beta^2) x_1 - 2\alpha x_2 + \eta(t); \\ \dot{x}_3 = x_4; \\ \dot{x}_4 = \dfrac{T_2}{T_1^2} x_3 + \dfrac{1}{T_1^2} x_1 + \dfrac{1}{T_1^2} u. \end{cases} \qquad (220)$$

Далее можно воспользоваться уже готовым аппаратом теории синтеза оптимальных систем управления [13], согласно которой минимум интеграла (218) при возмущающих воздействиях $\eta(t)$ типа "белого шума" и уравнениях связи (220) будет достигаться при законе управления:

$$u = -k_1 x_1 - k_2 x_2 - k_3 x_3 - k_4 x_4 , \qquad (221)$$

где постоянные коэффициенты $k_1, \ldots, k_4$ зависят от коэффициентов системы (220) и весового коэффициента в интеграле (218). Для вычисления числовых значений коэффициентов $k_1, \ldots, k_4$ можно воспользоваться хорошо разработанным программным обеспечением теории синтеза оптимальных регуляторов — разработанным, естественно, для "стандартной" формы уравнений связи — нормальной формы Коши. Вычислив коэффициенты k_1, k_2, k_3, k_4 и подставив управление (221) в уравнения (220), нетрудно убедиться, что замкнутая система устойчива и, в общем случае, сохраняет устойчивость при вариациях любых параметров судна или закона управления. Рассматриваемая задача о синтезе закона управления (221) — корректна (за вычетом некоторых особых частных случаев).

Однако непосредственно измерить и ввести в канал обратной связи момент возмущающих сил $\varphi(t)$ и его производную практически невозможно. Поэтому из уравнения (221) нужно исключить лишние переменные путем эквивалентных преобразований. Сделать это нетрудно, и после исключения придем к закону управления, связывающему легко измеряемую переменную θ и управление u. Поскольку использованные преобразования были эквивалентными, то преобразованный закон управления должен был обеспечивать устойчивость замкнутой системы и то же самое значение потери скорости (218), что и закон (221). Но на ходовых испытаниях реальных судов замкнутая система показала свою неустойчивость, что сразу и на много лет подорвало доверие к теории оптимального управления и осложнило возможность использования ее результатов.

Причина парадокса была разъяснена в [16]. Там было показано, что, например, для судов-танкеров типа "Казбек", для которых уравнение (214) принимает вид:

$$(690D^2 + 17{,}2D)\theta = u + \varphi(t)\,, \tag{222}$$

а весовой коэффициент m^2 в интеграле (218) равен 6,25, закон управления, обеспечивающий минимум потери скорости и приведенный к переменным θ и u, может быть приведен к виду:

$$u = -\left(\frac{690D^2 + 61{,}2D + 2{,}5}{0{,}973 - 0{,}06D} - 690D^2 - 17{,}2D\right)\theta\,. \tag{223}$$

Характеристический полином замкнутой системы имеет вид:

$$690\lambda^2 + 61{,}2\lambda + 2{,}5 \tag{224}$$

и является гурвицевым. Замкнутая система устойчива.

Однако если параметры судна хотя бы на сколь угодно малые величины отличаются от расчетных значений (от $T_1^2 = 690$ сек² и $T_2 = 17{,}2$ сек), и математическая модель судна принимает вид:

$$(690D^2 \pm \varepsilon_2 D^2 + 17{,}2D \pm \varepsilon_1 D)\theta = u + \varphi(t)\,, \tag{225}$$

то характеристический полином замкнутой системы принимает вид:

$$(\pm\varepsilon_2\lambda^2 \pm \varepsilon_1\lambda)(0{,}973 - 0{,}06\lambda) + 690\lambda^2 + 61{,}2\lambda + 2{,}5 \qquad \textbf{(226)}$$

и уже при сколь угодно малых вариациях параметров характеристический полином перестает быть гурвицевым, и замкнутая система теряет устойчивость.

Таким образом, все выводы теории оптимального управления были верны, распространившееся тогда недоверие к ним не было оправданным, замкнутая система **(222)—(223)** была устойчивой, но с практической точки зрения система, теряющая устойчивость при сколь угодно малых вариациях параметров, равнозначна системе неустойчивой. В этом и заключался парадокс.

То же самое явление (изменение свойства сохранения устойчивости при сколь угодно малых вариациях параметров) имеет место и для других судов, а также для очень многих объектов энергетики, автоматизированного электропривода, химической промышленности и т. п. — для всех объектов, математическая модель которых, приведенная к функции от одной переменной x_1, может быть приведена к виду:

$$A(D)x_1 = u + \varphi(t), \qquad \textbf{(227)}$$

где $A(D)$ — некоторый полином степени n от оператора дифференцирования $D = \frac{d}{dt}$, а возмущающее воздействие $\varphi(t)$ является стационарным случайным процессом со спектральной плотностью мощности вида **(215)**.

В этом случае, как было показано в [16], управление, доставляющее минимум среднеквадратичным функционалам, типа функционала:

$$J = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T (m^2 x_1^2 + u^2)dt \qquad \textbf{(228)}$$

имеет вид:

$$u = -\left[\frac{G(D)}{a + bD} - A(D)\right]x_1, \qquad \textbf{(229)}$$

где $G(D)$ — гурвицев полином степени n, коэффициенты которого, а также коэффициенты a и b в знаменателе вычисляются по методике, приведенной в [16]. Характеристический полином замкнутой системы **(227)—(229)** равен гурвицевому полиному $G(D)$. Замкнутая система устойчива.

Однако если параметры объекта управления даже сколь угодно мало отличаются от расчетных, и его математическая модель имеет вид:

$$A_1(D)x_1 = u + \varphi(t), \tag{230}$$

где $A_1(D) = A(D) \pm \varepsilon_n D^n \pm \ldots \pm \varepsilon_0$, а числа $\varepsilon_n, \ldots, \varepsilon_0$ могут быть сколь угодно малы, то характеристический полином принимает вид:

$$(a + b\lambda)(\varepsilon_n \lambda^n + \ldots + \varepsilon_0) + G(\lambda) \tag{231}$$

и может быть не гурвицевым при сколь угодно малом ε_n. Таким образом, рассматриваемая нами задача о минимуме функционалов вида (228) некорректна. Уже при сколь угодно малом ε_n эти функционалы могут вообще не иметь конечного значения.

В то же время, если мы проведем эквивалентные (в классическом смысле) преобразования, если дифференциальное уравнение n-го порядка (227) приведем к нормальной форме Коши, а возмущающее воздействие со спектральной плотностью мощности (215) представим в виде решения системы дифференциальных уравнений вида (217), то та же задача о минимуме функционалов (228) будет выглядеть корректной — исследуя влияние вариаций любых коэффициентов расширенной системы дифференциальных уравнений в нормальной форме Коши на минимум функционалов (223), мы убедимся, что этот минимум претерпит только малые изменения.

Таким образом, обнаруженное первоначально при исследовании оптимальных систем явление изменения корректности при эквивалентных преобразованиях математических моделей может встречаться у очень многих объектов промышленности, энергетики и транспорта.

Для всех этих объектов однократная проверка корректности недостаточна. Необходимо либо проверять корректность по первичным, наиболее близким к физической реальности уравнениям, либо следить за тем, чтобы используемые преобразования математической модели были эквивалентны не только в классическом смысле, но и в расширенном. Пренебрежение этими рекомендациями может стать причиной аварий и катастроф.

Вот конкретный пример из области расчета электроприводов постоянного тока. Как известно, основным уравнением электропривода является уравнение равновесия моментов на валу:

$$T_M \frac{d\omega}{dt} = M_в - M_c, \tag{232}$$

где T_M — механическая постоянная времени; ω — частота вращения; $M_в$ — момент двигателя, пропорциональный току якоря; M_c — момент сопротивления. Если момент сопротивления испытывает колебания, то колеблется и скорость вращения. Для уменьшения колебаний воздействуют на ток якоря. На основе уравнения (232) легко написать уравнение в отклонениях:

$$T_M \frac{dx_3}{dt} = u + \varphi(t), \tag{233}$$

где x_3 — отклонение частоты вращения от равновесного значения; u — управляющее воздействие, отклонение тока якоря от равновесного значения; $\varphi(t)$ — отклонение момента сопротивления от его среднего значения, стационарный случайный процесс со средним значением, равным нулю. В дальнейшем будем предполагать, как и ранее, что его можно представить в виде решения $x_1(t) = \varphi(t)$ системы уравнений (217), и поставим задачу о синтезе закона управления электроприводом, обеспечивающего минимум функционалу (228). Для простоты и удобства проверки всех дальнейших расчетов примем $T_M = 1$, $m^2 = 1$, $\beta = 0$, $\alpha = 1$, и тогда система уравнений (233)—(217) примет вид:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2; \\ \dot{x}_2 = -x_1 - 2x_2 + \eta(t); \\ \dot{x}_3 = x_1 + u. \end{cases} \tag{234}$$

Методами теории аналитического конструирования регуляторов [13] нетрудно установить, что минимум интересующего нас функционала будет доставлять регулятор:

$$u = -\frac{3}{4}x_1 - \frac{1}{4}x_2 - x_3. \tag{235}$$

Нетрудно проверить, что замкнутая система, состоящая из объекта управления (234) и регулятора (235), устойчива и сохраняет устойчивость при вариациях любых своих параметров. Однако этот вывод не соответствует физической реальности. Поскольку колебания момента сопротивления x_1 и его производная x_2 не могут быть непосредственно введены в канал обратной связи, то уравнения (234) и (235) нужно привести к переменным x_3 и u, пользуясь, разумеется, только эквивалентными преобразованиями. Уравнение (235) после этих преобразований примет вид:

$$(D^2 + 3D + 4)x_3 = (D - 1)u. \tag{236}$$

Система (234)—(236) эквивалентна (в классическом смысле) системе (234)—(235), но, в отличие от нее, как легко проверить, теряет устойчивость при сколь угодно малых вариациях некоторых своих коэффициентов (причем при вариациях только определенного знака). Именно так будет вести себя и реальная система — она способна терять устойчивость в те непредвиденные моменты времени, когда неизбежный в процессе эксплуатации дрейф параметров приведет к изменению знака вариаций. Разумеется, такая система регулирования скорости электропривода неработоспособна и опасна. Но всего этого мы не увидим, если будем использовать традиционные методы проверки устойчивости и ее сохранения при вариациях параметров.

Этот пример уже приводился в [18] на стр. 157—158 и там же было сделано предупреждение о том, что проверка сохранения устойчивости традиционными методами "пространства состояний" может привести к ошибочным результатам и авариям. К сожалению, это предупреждение не было услышано. Будем надеяться, что теперь его услышат.

Глава 15

О непрерывной зависимости решений дифференциальных уравнений от параметров

Изложенный нами в предыдущих разделах материал позволяет установить еще один важный факт — для многих систем обыкновенных дифференциальных уравнений несправедлива известная теорема о непрерывной зависимости решений от параметров. А ведь именно эта теорема лежит в основе всех практических приложений теории дифференциальных уравнений, лежит в основе большинства технических расчетов, а также и в основе приложений математики к экономике, биологии, медицине и т. п.

Действительно, мы уже рассказывали, что почти всегда коэффициенты и параметры математических моделей реальных объектов не могут в точности соответствовать расчетным значениям и почти всегда не остаются идеально постоянными в ходе эксплуатации. Вариации параметров, их малые изменения неизбежны, а если нет непрерывной зависимости решений от параметров, то сколь угодно малые вариации их могут привести к большим изменениям решений, и результаты расчета в этом случае окажутся совершенно не достоверны.

Вот почему теорема о непрерывной зависимости решений от параметров приводится и доказывается в большинстве учебников по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Но — обратите внимание — эта теорема доказывается либо для одного дифференциального уравнения, либо для системы уравнений, записанных в нормальной форме Коши. Доказывается, что если правые части системы уравнений, записанной в нормальной форме, удовлетворяют условиям Липшица — на практике эти условия почти всегда выполняются, — то решения системы на интервале времени $0 \le t \le T$ зависят от параметров непрерывно (смотри, например, книгу Матвеев Н. М. "Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений", М., Высшая школа, 1967, стр. 259—267). Для систем уравнений, не записанных в нормальной форме Коши, доказательства теоремы о непрерывной зависимости решений от параметров не приводится. Но поскольку известно, что почти любую систему дифференциальных уравнений можно путем эквивалентных преобразований привести к нормальной форме, то до последнего времени как-то молчаливо предполагали, что такая же непрерывная зависимость от параметров выполняется для любых систем — во всяком случае для всех систем, которые можно привести к нормальной форме Коши путем эквивалентных (в классическом смысле) преобразований.

На самом деле это не так. Рассмотрим уже встречавшуюся нам систему (100) — систему двух простых линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами относительно двух искомых функций x_1 и x_2 с параметром m. Легко убедиться, что для этой системы в точке $m = 1$ зависимость решений от параметра m терпит разрыв. Действительно, характеристический полином этой системы имеет вид (101), и если, например, $m = 1 + \varepsilon$, где ε — сколь угодно малое положительное число, то полином (101) приобретает положительный большой корень, а это означает, что в решении системы (100) появляется очень быстро растущий экспоненциальный член — растущий как $e^{t/\varepsilon}$. Даже для умеренных значений времени t решения системы (100) при $m > 1$ и близком к единице коренным образом отличаются от ее решений для $m \le 1$. В точке $m = 1$ зависимость решения от параметра m терпит разрыв, точка $m = 1$ является особой.

В то же время, если систему (100) при $m = 1$ привести к нормальной форме Коши путем эквивалентных (в классическом смысле) преобразований, то особая роль точки $m = 1$ уже не будет видна. После всего изложенного ранее это уже не должно удивлять нас — мы уже убедились, что преобразования, эквивалентные в классическом смысле, но не в расширенном, могут (не изменяя самих решений) изменить, например, такое их свойство, как сохранение устойчивости при вариациях параметров.

Поскольку устойчивость отражает свойства решений при $t \to \infty$, то в настоящем разделе мы сделали следующий шаг — показали, что преобразования, эквивалентные в классическом смысле, но не в расширенном, могут изменять некоторые свойства решений не только для $t \to \infty$, но и на конечном интервале времени для $0 \le t \le T$.

Рассмотрим теперь практические следствия. Предположим, что при проектировании некоторой технической системы или устройства у нас возникла необходимость найти решение системы (100) для $m = 1$ и для m, близких к единице. Найти решение не трудно, но результат расчета будет недостоверным, поскольку даже при очень малых, неизбежных на практике отклонениях действительных значений параметра m от расчетных, поведение системы может измениться коренным образом. А при анализе математической модели, приведенной путем эквивалентных преобразований к нормальной форме Коши, мы можем ничего этого не заметить.

Таким образом, мы установили, что без анализа различия между преобразованиями, эквивалентными в классическом смысле, но не в расширенном, и преобразованиями, эквивалентными в расширенном смысле, не только расчеты устойчивости, но и результаты любых расчетов, использующих дифференциальные уравнения, — недостоверны. Для обеспечения достоверности необходимы дополнительные вычисления, необходима проверка использованных преобразований на эквивалентность в расширенном смысле.

Теперь рассмотрим вопрос о выделении уравнений, особо опасных в смысле нарушения непрерывной зависимости решений от параметра. Исследуем для начала систему из двух линейных уравнений с постоянными коэффициентами для переменных x_1 и x_2.

Такая система имеет вид:

$$\left.\begin{aligned} A_1(D)x_1 &= A_2(D)x_2 \\ A_3(D)x_2 &= A_4(D)x_1 \end{aligned}\right\}, \tag{237}$$

где $A_1(D)$, … , $A_4(D)$ — полиномы от оператора дифференцирования $D = \dfrac{d}{dt}$ степеней, соответственно, n_1, n_2, n_3, n_4. Характеристический полином этой системы равен определителю:

$$\begin{vmatrix} A_1(D) & -A_2(D) \\ A_3(D) & -A_4(D) \end{vmatrix} = A_2(D)A_3(D) - A_1(D)A_4(D) \tag{238}$$

и сразу видно, что при выполнении равенства $n_2 + n_3 = n_1 + n_4$ возможно сокращение старших членов в характеристическом полиноме. Это сокращение может исчезнуть при сколь угодно малых вариациях коэффициентов и параметров, а раз сокращения не будет, то решение системы изменится коренным образом (поскольку изменится порядок), но это значит, что непрерывной зависимости решений от параметра при $n_2 + n_3 = n_1 + n_4$ вполне может не быть.

Для почти всех уравнений и систем уравнений, встречающихся в современных учебниках и задачниках, соблюдаются неравенства $n_1 > n_2$; $n_3 > n_4$, т. е. в первом уравнении порядок производной переменной x_1 больше порядка производной переменной x_2, во втором уравнении порядок производной переменной x_2 больше порядка производной переменной x_1. Такие уравнения называют *каноническими.* Уравнения, для которых подобные неравенства не соблюдаются, называют *неканоническими.* В системе (100) первое уравнение — каноническое, второе — неканоническое. Неканоническим будет уравнение (63) из системы (62)—(63), если рассматривать управление u как третью переменную x_3.

В учебной литературе на русском языке неканонические уравнения последний раз рассматривались, по-видимому, в 1927 году в учебнике В. А. Стеклова "Основы теории интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений", М.; Л.: ГИЗ, 1927. В дальнейшем стали рассматривать только системы канонических уравнений, поскольку такие системы проще исследовать, и в то же время любую систему, включающую в себя неканонические уравнения, можно путем эквивалентных преобразований привести к системе канонических уравнений. Простейший способ — привести систему к нормальной форме Коши. Нормальная форма заведомо состоит из канонических уравнений, поскольку у нее в левых частях стоят производные первого порядка ($\dot{x}_1, \dot{x}_2, \ldots, \dot{x}_n$), а в правых частях — производные нулевого порядка — переменные $x_1, x_2, \ldots, x_n$. В правых частях производных нет.

Поскольку путем эквивалентных преобразований можно свести систему, включающую в себя неканонические уравнения, к более простой системе, состоящей из одних канонических уравнений, то неканонические уравнения после 1927 года постепенно исчезли из поля внимания математиков. Между тем именно в неканонических системах часто нарушается теорема о непрерывной зависимости решений от параметров. Действительно, если в системе вида (237) будет $n_1 > n_2$, но $n_3 < n_4$, то вполне возможно равенство $n_2 + n_3 = n_1 + n_4$ (это как раз имеет место в системе (100)), и теорема о непрерывной зависимости решений от параметров может не выполняться.

Приведем особенно простой пример. Рассмотрим систему двух дифференциальных уравнений с параметром m:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 &= -\dot{x}_2 - x_2; \\ \dot{x}_2 &= -m\ddot{x}_1 + e^{-t} \end{aligned} \tag{239}$$

и нулевыми начальными условиями: $x_1(0) = \dot{x}_1(0) = x_2(0) = \dot{x}_2(0) = 0$.

Исключив из системы (239) переменную x_1 путем эквивалентных преобразований (в данном примере это совсем несложно сделать), получим для переменной x_2 уравнение:

$$(1-m)\dot{x}_2 - mx_2 = e^{-t}, \tag{240}$$

для которого с учетом начального условия $x_2(0)=0$ получаем решение:

$$x_2 = e^{\frac{m}{1-m}t} - e^{-t}. \tag{241}$$

Из формулы (241) сразу видно, что в точке $m = 1$ происходит разрыв в зависимости решения от параметра m для любого $0 \le t < \infty$. Вблизи $m = 1$ расхождение между решениями, соответствующими, например, $m =$ $= 0{,}9999$ и $m = 1{,}001$, стремительно нарастает даже для малых t. Так, уже для $t = 0{,}01$ при $m = 0{,}999$ будет $x_2(0{,}01) = e^{9{,}99} - e^{-0{,}01} = 21814$, а при $m = 1{,}001$ для того же $t = 0{,}01$ будет $x_2 = e^{-10{,}01} - e^{-0{,}01} = -0{,}99$.

Систему (239) введением новой переменной $x_3 = \dot{x}_1$ можно привести к нормальной форме Коши:

$$\begin{aligned} &\dot{x}_1 = x_3; \\ &\dot{x}_2 = \frac{m}{1-m}x_2 + \frac{1}{1-m}e^{-t}; \quad . \\ &\dot{x}_3 = -\frac{1}{1-m}x_2 - \frac{1}{1-m}e^{-t}. \end{aligned} \tag{242}$$

Формулы (242) позволяют раскрыть смысл парадокса — в системе (242), согласно общей теореме, решения должны зависеть от параметров непрерывно, а в эквивалентной ей системе (239) непрерывной зависимости нет. Если мы обозначим:

$$\frac{1}{1-m} = n, \tag{243}$$

то система (242) примет вид:

$$\begin{aligned} &\dot{x}_1 = x_3; \\ &\dot{x}_2 = \frac{n-1}{n}x_2 + ne^{-t}; \\ &\dot{x}_3 = -nx_2 - ne^{-t}, \end{aligned} \tag{244}$$

и ее решения, разумеется, будут зависеть от параметра n непрерывно. Однако сам параметр n при $m = 1$, как свидетельствует формула (243), испытывает разрыв.

Таким образом, мы убедились, что для систем дифференциальных уравнений, включающих в себя неканонические уравнения, важнейшая теорема о непрерывной зависимости решений от параметров теряет силу. Остается ответить на главный вопрос: а в первичных, еще непреобразованных, и поэтому в наибольшей мере отражающих физический смысл математических моделях реальных технических систем и устройств, возможно появление неканонических уравнений или нет? Частично мы уже ответили на этот вопрос в *главе 13*, когда показали, что система (25)—(26), включающая в себя неканоническое уравнение (26), лучше отражает физическую сущность процессов, протекающих в реальном электроприводе, чем система (33)—(34) (напомним, что системе (25)—(26) соответствует структурная схема, показанная на рис. 13.2, а эквивалентной ей системе (33)—(34) соответствует структурная схема, показанная на рис. 13.1, и не отражающая физического смысла формирования обратной связи).

Приведем дополнительные примеры. Рассмотрим электродвигатели и генераторы электрической энергии, установленные на движущихся объектах — на кораблях и самолетах. И для электродвигателей, и для генераторов важнейшее уравнение в математической модели — уравнение равновесия моментов на валу — имеет вид:

$$J\frac{d\omega}{dt} = M_{дв} - M_c, \tag{245}$$

где J — момент инерции вращающихся масс; ω — частота вращения вала; $M_{дв}$ — движущий момент; M_c — момент сопротивления. На корабле момент сопротивления зависит от качки, т. е., в конечном счете, от углового ускорения корпуса, от второй производной угла крена.

Если обозначить через Θ переменный угол крена корабля, то момент сопротивления будет зависеть от второй производной переменной Θ, от величины $\ddot{\Theta}$, и важнейшее уравнение (245) для кораблей (и, как нетрудно проверить, для самолетов тоже) будет уравнением неканоническим.

Таким образом, мы окончательно убеждаемся в том, что математические модели, в которых нарушается непрерывная зависимость решений от параметров, встречаются в технике достаточно часто, а для всех подобных математических моделей результаты любого расчета, использующего дифференциальные уравнения, недостоверны — недостоверны без дополнительных вычислений, рассмотренных в *главе 13*. Недостоверность результатов расчета может стать, как уже было показано, причиной серьезных аварий и даже катастроф.

В то же время уже рассмотренные нами дополнительные проверки, гарантирующие сохранение устойчивости при вариациях параметров, гарантируют одновременно и сохранение непрерывной зависимости решений от параметров — во всяком случае для наиболее часто встречающихся на практике линейных уравнений с постоянными коэффициентами. В отношении нелинейных уравнений необходимо провести отдельное дополнительное исследование.

Рассмотренные нами неожиданные примеры изменения свойства непрерывной зависимости решений дифференциальных уравнений от параметров при эквивалентных преобразованиях (и в частности — при преобразованиях систем уравнений различных порядков к нормальной форме Коши) касаются и будут касаться очень широкого круга специалистов — значительно более широкого, чем рассмотренные в предыдущих главах вопросы устойчивости.

Расчеты, использующие решение различных дифференциальных уравнений, распространены очень широко, повсеместно. В последние десятилетия в связи с массовым применением вычислительной техники почти все расчеты включают в себя предварительное приведение исследуемой системы уравнений к нормальной форме — это связано с тем, что стандартное программное обеспечение составлено, разумеется, для нормальной формы — поскольку составлять отдельные программы для многочисленных возможных систем уравнений с производными различных порядков очень громоздко. В то же время приведение почти любой системы уравнений к нормальной форме путем эквивалентных (в классическом смысле) преобразований особых затруднений не представляет, именно поэтому оно так широко используется.

Теперь всему этому, очень широкому, кругу инженеров и программистов, ведущих расчеты, аспирантов, готовящих диссертации, предстоит, к сожалению, дополнительная, но неизбежная работа — работа по проверке корректности задачи решения исходной, первичной системы уравнений. До последних лет эту проверку не проводили, поскольку для нормальной формы Коши корректность нахождения решения гарантировалась общей теоремой о непрерывной зависимости решений от параметров, а систему из нескольких уравнений различных порядков приводили к нормальной форме путем несложных эквивалентных (в классическом смысле) преобразований. Все пребывали в счастливой уверенности, что эквивалентные (в классическом смысле) преобразования корректности решаемой задачи не меняют, и поэтому проверки на корректность решения исходной системы можно не проводить.

Теперь эта счастливая уверенность рассеяна примерами системы (25)—(26) из *главы 3*, систем (131)—(132), систем (152), (220)—(221), систем (233)—(236) и (234)—(235), а также примерами, приведенными в [33]. Более того, Академия наук Российской Федерации после проходившего в 1998—1999 годах очень внимательного рассмотрения вопроса о различении преобразований, эквивалентных в классическом смысле и в расширенном, публикацией [34] в наиболее авторитетном из научных журналов России подтвердила необходимость такого различения.

Теперь аспирант при защите диссертации уже не может ссылаться при обосновании верности своих результатов на общую теорему из теории дифференциальных уравнений. Верность результата должна, например, быть подтверждена анализом использованных преобразований. Если они были эквивалентны в расширенном смысле — тогда все хорошо. Возможны и другие методы и способы проверок. Заметим, что ссылка на совпадение результатов расчета с экспериментом сама по себе еще ничего не доказывает: экспериментов всегда можно провести лишь ограниченное количество для ограниченного ряда значений параметра. А если непрерывной зависимости решений от параметров нет, то совсем рядом с экспериментально проверенными значениями могут лежать значения параметра, для которых исследуемый процесс ведет себя совсем по-другому.

Примером может служить система (100), в которой при $m = 1$ зависимость решения от параметра терпит разрыв. Если даже проверили совпадение между расчетом и экспериментом для $m = 0{,}999$, то это ничего не говорит о том, будет ли подобное совпадение при $m = 1{,}001$. Реально совпадения в системе (100) как раз не будет.

Аналогичный пример доставляет и система (239). Мы уже вычисляли, что при $m = 1{,}001$ будет $x_2(t = 0{,}01) = -0{,}99$, а при $m = 0{,}999$ будет $x_2(t = 0{,}01) = 21\,814$. Отличие разительное.

А ведь мы заранее не знаем, какие значения параметра окажутся критическими, вблизи которых такие огромные расхождения вполне возможны. Для того чтобы эксперимент доказывал верность результатов исследования, нужно предварительно доказать (как необходимое условие) хотя бы непрерывную зависимость решений выбранной математической модели от ее параметров. Если непрерывной зависимости нет, то эксперимент бесполезен.

То же самое относится и к результатам почти любого инженерного расчета. И здесь для обеспечения достоверности необходимо проверять использованные преобразования на эквивалентность в расширенном смысле. Ранее, в *главах 6*, *7*, *8*, *9*, мы показали это на примере расчетов устойчивости и запасов устойчивости. Теперь мы убеждаемся, что такая же проверка необходима в значительно более широком круге расчетов — во всех расчетах, включающих в себя решение систем дифференциальных уравнений, а также при решении обобщенной задачи вычисления собственных значений, при решении проблемы устойчивости по части переменных. В дальнейшем, безусловно, будут обнаружены и другие примеры расчетов, результаты которых недостоверны без проверки на эквивалентность в расширенном смысле (примеры, относящиеся, в частности, к решению интегральных уравнений и к интегральным преобразованиям, приведены в публикации [47]).

Подобных примеров будет очень много уже потому, что эквивалентные преобразования применяются в математике, в инженерных расчетах, в компьютерных вычислениях и т. д. чрезвычайно широко. И поскольку у эквивалентных преобразований неожиданно открылись новые свойства (способность изменять корректность решений задачи, изменять непрерывную зависимость решений от параметров и т. д.), то следствия этого открытия будут очень многочисленны. На сегодняшний день открыты еще далеко не все следствия и поэтому открытия, безусловно, будут продолжаться.

Глава 16

Необходимость исследования "триады"

Рассмотрим теперь более подробно пути подхода к проверке эквивалентности в расширенном смысле. Ранее рассмотренные примеры доказывают, что самые простые, самые, казалось бы, "невинные" преобразования, использованные при решении, могут изменить корректность решаемой задачи. Вернемся к уже рассмотренному ранее преобразованию уравнения (26) в уравнение (35). Это преобразование сложено из совершенно элементарных и "невинных" операций, состоящих всего лишь из переносов членов левой части уравнения в правую с изменением знака или разбивке одного члена на два — типа преобразования $5x_2 = 4x_2 + x_2$. И мы убедились, что даже эти, совершенно элементарные и, безусловно, эквивалентные в классическом смысле преобразования изменили корректность задачи проверки устойчивости системы (25)—(26), которая после преобразований перешла в систему (33)—(35). Заметим, что сам по себе ответ в задаче проверки асимптотической устойчивости системы (25)—(26) использованное нами преобразование не изменило: исходная система (25)—(26) и преобразованная система (33)—(35) — обе одинаково асимптотически устойчивы (и обе устойчивы по Ляпунову), но система (25)—(26) теряет устойчивость при сколь угодно малых вариациях коэффициентов, а система (33)—(35) — нет.

Уже этот простой пример показывает, что нам вряд ли удастся найти среди эквивалентных в классическом смысле преобразований такие преобразования, которые всегда, во всех случаях, были бы эквивалентны в расширенном смысле.

Для достижения определенности полезно отказаться от исследования преобразований самих по себе и перейти к исследованию *триады*:

- исследуемая математическая модель;
- решаемая задача;
- выбранный метод решения.

Примеры

А. Рассмотрим триаду:

- математическая модель — система уравнений (25)—(26);
- решаемая задача — проверка асимптотической устойчивости системы;
- метод решения — приведение системы к нормальной форме Коши с последующим вычислением характеристического полинома и его корней по стандартной программе.

Для этой триады преобразование к нормальной форме (которая после исключения переменной x_2 на основе уравнения (35) принимает окончательно вид (72), т. е. переходит в систему трех нормальных уравнений первого порядка) не изменяет асимптотической устойчивости.

Для проверки асимптотической устойчивости преобразование системы (25)—(26) к нормальной форме Коши оправданно и допустимо.

Б. Рассмотрим другую триаду:

- математическая модель — та же система уравнений (25)—(26);
- решаемая задача — проверка параметрической устойчивости системы;
- метод решения — приведение системы к нормальной форме Коши с последующим анализом ее устойчивости при вариациях коэффициентов нормальной формы или при вариациях параметров исходной математической модели (25)—(26).

Триада Б отличается от триады А только вторым элементом. Как показывает исследование, проведенное ранее на стр. 15—18 и на стр. 48, в составе этой триады преобразование к нормальной форме (т. е. то же преобразование, что и в триаде А) изменяет параметрическую устойчивость — т. е. коренным образом изменяет результат решения поставленной задачи.

В. Рассмотрим третью триаду:

- математическая модель — система (116), т. е. система линейных однородных уравнений с параметром λ;
- решаемая задача — нахождение собственных значений параметра λ;
- метод решения — разложение по минорам последней строки.

Проверка показывает, что при выбранном методе решения рассматриваемая задача вычисления собственных значений для системы (166) — корректна.

Г. Рассмотрим четвертую триаду:

- первые два элемента — те же, что у третьей триады;
- метод решения — последовательное исключение переменных в порядке их индексов путем домножений и сложений — т. е. последовательное преобразование системы (166) в систему с меньшим числом уравнений и переменных.

Для этой триады уже преобразование системы (166) в систему из двух уравнений, которое (по отношению к рассматриваемой задаче) является преобразованием, эквивалентным в классическом смысле, не эквивалентно в расширенном смысле. Сколь угодно малые ошибки округления могут привести к появлению второго, фальшивого, собственного значения, резко отличающегося от первого, истинного.

Сама задача нахождения собственных значений в данной триаде является примером задачи третьего класса, примером задачи, меняющей свою корректность в ходе преобразований, используемых при ее решении.

Д. Рассмотрим пятую триаду:

- математическая модель — система трех дифференциальных уравнений (91);
- решаемая задача — проверка устойчивости по переменной x_1, т. е. проверка устойчивости решения $x_1(t)$ без интегрирования самой системы;
- метод решения — известное и широко применяемое в теории устойчивости по части переменных (см., например, [10]) так называемое "μ-преобразование" — т. е. эквивалентное в классическом смысле преобразование системы (91) в систему, состоящую из переменных x_1 и μ, устойчивую по обоим переменным.

Для системы (91) μ-преобразование преобразует систему (91) в систему (93), устойчивую по переменным x_1 и μ и сохраняющую устойчивость при вариациях всех своих коэффициентов. Однако из этого факта нельзя делать заключения о том, что решение $x_1(t)$ параметрически устойчиво, поскольку в данной триаде μ-преобразование оказывается преобразованием, эквивалентным в классическом смысле, но не в расширенном, задача проверки устойчивости для системы (91) оказывается задачей третьего класса, меняющей корректность в ходе преобразований, используемых при ее решении.

Для исходной системы (91) решаемая задача некорректна, поэтому найденное путем μ-преобразования решение задачи проверки устойчивости по переменной $x_1(t)$ практического смысла не имеет (хотя в классическом смысле μ-преобразование, разумеется, эквивалентно; и система (93), и система (91) имеют одно и то же решение $x_1(t)$ — а именно:

$$x_1(t) = c_1e^{-t} + c_2te^{-t}).$$

К сожалению, то же самое относится и к большинству μ-преобразований. Популярный одно время метод μ-преобразований после проверки оказался чаще всего практически непригодным из-за неэквивалентности в расширенном смысле — поскольку в этих случаях устойчивость по части переменных исчезает при неизбежных на практике сколь угодно малых вариациях параметров.

Рассмотрим еще одно затруднение, которое часто возникает у изучающих теорию преобразований, эквивалентных в классическом или в расширенном смысле.

При изучении математических моделей технических устройств или природных процессов нас интересует зависимость поведения модели от параметров — т. е. от различных элементов того или иного устройства или процесса. Изучая, например, электрический привод, мы исследуем влияние малых колебаний температуры на размеры всех деталей, а значит — и на моменты инерции вращающихся масс, на коэффициенты трения и т. п., которые, в свою очередь, изменяют коэффициенты уравнений математической модели исследуемого объекта. Изменяются параметры — изменяются и коэффициенты уравнений.

Изучая влияние вариаций коэффициентов уравнений на поведение решений, мы изучаем тем самым и влияние вариаций параметров.

Теперь рассмотрим изменения коэффициентов и параметров при эквивалентных (в классическом смысле) преобразованиях уравнений. При преобразованиях может изменяться и число коэффициентов, и их вид. Так, если из уравнений системы управления второго порядка в нормальной форме:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + b_1u;\\ \dot{x}_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + b_2u,\end{aligned} \tag{246}$$

имеющих шесть коэффициентов, исключить переменную x_2, то мы придем к уравнению:

$$\left[D^2 - (a_{11} + a_{22})D + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1\right] = \left[b_1D + (b_2a_{12} - b_1a_{22})\right]u \tag{247}$$

с новыми, уже не с шестью, а с четырьмя коэффициентами.

Иногда у исследователей возникает сомнение — равнозначно ли исследование влияния на свойства решений вариаций старых коэффициентов и вариаций новых коэффициентов? Это сомнение не обоснованно, поскольку в любом случае новые коэффициенты остаются некоторыми функциями от старых, т. е.

$$a_{iн} = f_i(a_{1cm}; a_{2cm}; ...a_{ncm}), \tag{248}$$

где $a_{iн}$ — какой-либо новый коэффициент; a_{icc} ; a_{2cm};...a_{ncm} — старые коэффициенты.

Продифференцировав любое из равенств (248), получим равенство для первых дифференциалов:

$$da_{iн} = \sum_{j=1}^{n} \frac{df}{da_{jcm}} da_{icm} . \tag{249}$$

Возможны два варианта:

- все функции (248) непрерывны по всем переменным;
- некоторые из них разрывны.

Если функции (248) непрерывны по всем переменным, то из формулы (249) следует, что сколь угодно малым изменениям новых коэффициентов будут соответствовать сколь угодно малые вариации старых — и наоборот.

Хороший пример — преобразование системы (96)—(97) в систему (100). Мы убеждаемся, что малые отклонения параметра m (механической постоянной электропривода) от его номинального значения $m = 1$ приводят к малым (или же равным нулю) вариациям и коэффициентов исходной системы (96)—(97), и коэффициентов преобразованной системы (100).

Второй вариант — когда некоторые из функций разрывны — иллюстрирует пример преобразований системы (239) в систему (242). При значении $m = 1$ происходит разрыв непрерывности. Вблизи $m = 1$ малым изменениям коэффициентов исходной системы (239) соответствуют большие изменения коэффициентов системы (242). Поэтому это преобразование, естественно, не будет эквивалентным в расширенном смысле, но здесь все очевидно, ошибок и недоразумений при втором варианте возникнуть не может.

Гораздо опаснее и "коварнее" первый вариант, когда малым вариациям коэффициентов исходной системы соответствуют столь же малые вариации в преобразованной системе.

В этом случае нет явных предупреждений об опасности, однако вполне может оказаться, что преобразование, эквивалентное в классическом смысле, не будет эквивалентно в расширенном (пример с системами (96)—(97) и (100) как раз иллюстрирует эту возможность) и тогда вполне возможны ошибки в расчетах, аварии и катастрофы. Первый шаг к предотвращению ошибок — это понимание причин. Автор старался, чтобы причины возможных ошибок были как можно лучше поняты.

Глава 17

Некорректные и плохо обусловленные задачи физики и техники. Различия между ними

В предыдущем изложении мы ограничивались первичным и интуитивным представлением о некорректных и плохо обусловленных задачах — как о задачах, где малым изменениям параметров, коэффициентов и т. п. соответствуют существенные изменения решений. Теперь мы уточним определения.

> *Некорректными* назовем те задачи, в которых сколь угодно малым изменениям коэффициентов, параметров, начальных условий, граничных условий и т. п. соответствуют конечные или даже коренные изменения решений (под коренными изменениями подразумеваются, например, случаи, когда при номинальных значениях коэффициентов решение отсутствует, а при сколь угодно малых вариациях — появляется, и т. п.).

Поведение решений некорректных систем при вариациях коэффициентов и параметров может быть самым причудливым. Примеры мы приведем.

Простейший пример некорректной задачи — это решение системы уравнений с определителем, равным нулю.

Рассмотрим простую систему:

$$x + y = 1{,}1\,; \tag{250}$$

$$x + y = 1\,, \tag{251}$$

определитель которой $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0\,.$

Сразу видно, что при номинальных значениях параметров система решений не имеет (действительно, уравнения (250) и (251) — это уравнения прямых, прямые параллельны; решений — т. е. точек пересечения прямых — заведомо нет). Если же мы учтем вариацию ε в первом коэффициенте уравнения (250) — т. е. перейдем вместо него к уравнению:

$$(1+\varepsilon)x + y = 1{,}1\,, \tag{252}$$

то система уравнений (251)—(252) для любого $\varepsilon \neq 0$ получит решение:

$$x = \frac{0{,}1}{\varepsilon};\;\; y = 1 - \frac{0{,}1}{\varepsilon}\,. \tag{253}$$

Решение исчезает лишь при точном равенстве $\varepsilon = 0$, но оно целиком зависит от неизвестной нам вариации ε и практического смысла, разумеется, не имеет.

Если мы рассмотрим систему двух тождественных уравнений:

$$x + y = 1\,; \tag{254}$$

$$x + y = 1\,, \tag{255}$$

то при номинальных значениях параметров система имеет бесчисленное множество решений — любое x и соответствующее ему $y = 1 - x$ является решением. Если учесть возможную вариацию ε_1 в первом коэффициенте уравнения (254) и заменить его на уравнение $(1 + \varepsilon_1)\, x + y = 1$, то решение станет единственным: $x = 0; y = 1$. Если прибавить вариацию ε_2 ко второму коэффициенту, то получим решение: $x = 1; y = 0$.

Действительно, система:

$$(1+\varepsilon_1)x + y = 1;$$
$$x + y = 1$$

имеет решение $\varepsilon_1 x = 0$, откуда $x = 0$, если только нет точного равенства $\varepsilon_1 = 0$ аналогично, система:

$$x + (1+\varepsilon_2)y = 1;$$
$$x + y = 1$$

имеет при $\varepsilon_2 \neq 0$ решение $x = 1; y = 0$.

> *Плохо обусловленными* назовем задачи, в которых малым, но конечным изменениям коэффициентов, параметров и т. п. соответствуют большие изменения решений.

Простейший пример — это система линейных уравнений, у которой при номинальных значениях коэффициентов определитель не равен точно нулю, но равен малой величине.

Так, например, система:

$$\begin{aligned} &1{,}1x + y = 1{,}1; \\ &x + y = 1 \end{aligned} \tag{256}$$

имеет определитель:

$$\begin{vmatrix} 1{,}1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0{,}1 .$$

При номинальных значениях параметров система (256) имеет решение: $x = 1$; $y = 0$. С учетом вариации одного из коэффициентов система (256) принимает вид:

$$\begin{aligned} &1{,}1x + y = 1{,}1; \\ &(1+\varepsilon)x + y = 1 \end{aligned} \tag{257}$$

и имеет решение: $x = \dfrac{1}{1-10\varepsilon}$; $y = \dfrac{-11\varepsilon}{1-10\varepsilon}$.

Если, например, $|\varepsilon| \le 0{,}001$, то $0{,}99 \le x \le 1{,}01$; $-0{,}011 \le y \le 0{,}011$.

Если $|\varepsilon| \le 0{,}01$, то $0{,}909 \le x \le 1{,}11$; $-0{,}122 \le y \le 0{,}1$.

Если, наконец, $|\varepsilon| \le 0{,}1$, то $0{,}5 \le x < \infty$; $-\infty < y \le 0{,}55$,

т. е. уже при $|\varepsilon| = 0{,}1$ вариация решения может быть сколь угодно велика.

Мы убеждаемся, что для системы (257) вариации решений существенно больше вариаций коэффициентов, что и дает основание для отнесения системы (257) к плохо обусловленным.

Анализируя определение плохо обусловленных систем, нетрудно убедиться, что оно лишено точности и определенности. Действительно, что такое "малое" изменение коэффициента? Одна сотая единицы — это малая величина или нет? Для одних задач — это величина малая и даже пренебрежимо малая, для других задач погрешность величиной в одну сотую может быть недопустимо большой величиной — все зависит от конкретной задачи.

Далее, из того же определения видно, что задачи некорректные являются предельным случаем задач плохо обусловленных (когда малое, но конечное изменение коэффициентов, параметров и т. п. переходит в сколь угодно малое изменение). В то же время некорректные задачи (в отличие от плохо обусловленных) имеют совершенно точное определение и поэтому для них (опять в отличие от задач плохо обусловленных) может быть построена точная научная теория.

Из этих фактов следует тактика научного исследования — задачи плохо обусловленные встречаются на практике не менее часто, чем задачи некорректные, однако исследовать их трудно. Удобно начинать исследование с частного, предельного и более легкого случая, когда малое изменение коэффициентов переходит в сколь угодно малое (или, как ранее говорили, в "бесконечно малое"), и задача, плохо обусловленная, переходит в задачу некорректную. Исследовав эту некорректную задачу, мы получим значительную предварительную информацию для решения близких к исследованной и более сложных плохо обусловленных задач.

Этой тактики мы придерживались в этой книге, начиная везде именно с рассмотрения некорректных задач.

Вернемся к рассмотренной в *главе 3* системе уравнений (25)—(26). Эта система устойчива, но задача проверки устойчивости для нее — некорректна: уже при сколь угодно малых вариациях некоторых коэффициентов ответ на вопрос об устойчивости изменится коренным образом, система может стать неустойчивой. Система (25)—(26) имеет тот же самый характеристический полином, что и система (33)—(35) или система (72), которые сохраняют устойчивость при малых вариациях любых своих коэффициентов. Система (25)—(26) имеет одинаковую с системами (33)—(35) и (72) функцию Ляпунова, но системы (33)—(35) и (72) параметрически устойчивы, а система (25)—(26) — нет.

Уже один этот пример (даже если бы не было еще множества подобных примеров) свидетельствует о том, что никакое исследование характеристического полинома, а также и матрицы коэффициентов самих по себе не гарантирует, как это было ранее опубликовано в [3], правильного ответа на вопрос о сохранении устойчивости при сколь угодно малых, неизбежных на практике вариациях параметров системы. Не гарантирует этого и существование функции Ляпунова.

Отсюда следует, что традиционные методы проверки устойчивости, традиционные методы расчета и проектирования систем управления, основанные на исследовании характеристического полинома, матрицы коэффициентов при записи системы в нормальной форме Коши или на исследовании функции Ляпунова — заведомо не полны, не страхуют от ошибок и связанных с ними аварий и должны быть пополнены дополнительными проверками, дополнительными расчетами, о которых рассказано в этой книге.

Заметим, что характеристический полином системы (25)—(26) имеет меньший порядок, чем характеристический полином такой же по структуре системы, но с другими значениями коэффициентов. Аналогичное положение имеет место и для других систем, в которых задача проверки устойчивости является некорректной. Поэтому некоторыми исследователями выдвигалось предложение: нельзя ли заменить дополнительные расчеты простой проверкой степени характеристического полинома и не свидетельствует ли его вырождение (понижение степени) о некорректности задачи?

Такое упрощенное решение проблемы не может быть рекомендовано, поскольку кроме некорректных задач в практике управления не менее часто встречаются и задачи, плохо обусловленные. Рассмотрим систему:

$$\begin{aligned} &(D^3+4D^2+5D+2)x_1=(1{,}001D^2+2D+1)x_2; \\ &(D+1)x_2=(D^2+4D+5)x_1 \end{aligned} \tag{258}$$

с характеристическим полиномом:

$$\Delta=0{,}001\lambda^4+1{,}004\lambda^3+5{,}005\lambda^2+7\lambda+3 \tag{259}$$

(мы уже частично рассматривали ее в *главе 3*).

Система (258) не вырождена, степень ее характеристического полинома равна четырем, как это и должно быть для системы четвертого порядка. Система (258) устойчива и сохраняет устойчивость по крайней мере при очень малых вариациях любых своих коэффициентов. Задача проверки устойчивости для этой системы не является некорректной.

Однако с практической точки зрения система (258) — не устойчива. Действительно, при изменении коэффициента при D^2x_2 в первом из уравнений (258) всего на две тысячных (что на практике почти неизбежно) система теряет устойчивость, а ее характеристический полином (259) переходит в уже рассмотренный в *главе 3* полином (30), при одном взгляде на который сразу видно, что нарушается необходимое условие устойчивости.

Задача проверки устойчивости для системы (258) не является некорректной, но она плохо обусловлена. Устойчивость системы (258) не теряется при сколь угодно малых вариациях коэффициентов, но она теряется при конечных вариациях, причем при вариациях настолько малых, что на практике избежать их чаще всего невозможно.

В то же время в этой плохо обусловленной задаче степень характеристического полинома остается равной четырем, полином не вырождается, не уменьшает свою степень и тем самым не подает никакого предостерегающего сигнала для исследователя. Поэтому плохо обусловленную задачу часто труднее решать, чем задачу некорректную.

Иногда утверждают, что уже сама малость старшего члена в характеристическом полиноме (так, например, в полиноме (259) коэффициент при старшем члене на три порядка меньше остальных коэффициентов) говорит о плохой обусловленности и малом запасе устойчивости, но подобные утверждения несостоятельны — уравнения, в которых коэффициент при старшем члене много меньше остальных коэффициентов в приложениях встречаются довольно часто (они рассматривались еще в [30], стр. 76—85), и сама по себе малость коэффициента при старшем члене еще ничего не говорит о плохой обусловленности задачи проверки устойчивости.

Конечно, в простой системе (258) все достаточно ясно: коэффициент при старшем члене полинома (259) является малой разностью больших чисел. Понятно, что при малых вариациях этих больших чисел устойчивость системы (258) может измениться. Однако в реальных системах более высокого порядка, чем система (258), ясность исчезает. В одном из учебных пособий приведен пример системы седьмого порядка $\dot{x} = Ax$, где матрица A имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3.99 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2575 & -127,4 & 2710 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -300 & 4200 & 520,8 & -520,8 & -692,7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 15,8 & -15,8 & -21 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -21,3 \\ 0 & 10 & 0 & 0 & 0 & -500 & 0 \\ 24 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -200 \end{pmatrix}.$$

Характеристический полином матрицы равен:

$$\Delta = \lambda^7 + 1,127 \cdot 10^3 \lambda^6 + 4,427\lambda^5 + 9,389 \cdot 10^7 \lambda^4 + 1,181 \cdot 10^{10} \lambda^3 + \\ + 7,838 \cdot 10^{11} \lambda^2 + 1,326 \cdot 10^{13} \lambda + 1,84 \cdot 10^{14}.$$

В этом характеристическом полиноме сразу два члена — с λ^7 и λ^5 — на три и более порядков меньше остальных, но это ничего не говорит о том, является ли задача проверки устойчивости рассматриваемой системы плохо обусловленной или нет.

В целом, задачи, плохо обусловленные, труднее распознаются и труднее решаются, чем задачи некорректные, которые являются их частным предельным случаем. Решение, найденное в этом частном случае, даст в руки путеводную нить для исследования более сложных плохо обусловленных систем.

Примечание

Мы используем определение некорректных (или — некорректно поставленных) задач, несколько отличающееся от определения, приведенного в наиболее известной книге, посвященной некорректным задачам — книге [22]. В [22] к некорректным относят все те задачи, которые не удовлетворяют хотя бы одному из трех требований:

- решение существует;
- решение единственно;
- от вариаций параметров, начальных и граничных условий и т. п. решение зависит непрерывно — т. е. сколь угодно малым вариациям соответствуют сколь угодно малые изменения решений.

Поскольку в [22] рассматриваются некорректные задачи в основном для весьма сложных математических моделей, описываемых дифференциальными уравнениями в частных производных и интегральными уравнениями, то подобное, состоящее из трех условий, определение может быть и приемлемо для круга задач, рассматриваемых в [22], но в целом оно неудобно. Действительно, существует огромный круг задач, не имеющих решения в той или другой числовой области, но не имеющих никакого отношения к проблеме некорректности. Так, уже уравнение $2x = 3$ не имеет решения в области целых чисел. Уравнение $x^2 + 1 = 0$ не имеет решения в области вещественных чисел. Ни ту, ни другую задачу к некорректным никак не отнести.

Точно так же и требование единственности, входящее в определение, предложенное в [22], растворяет действительно некорректные задачи в бездонном море задач, чье решение не единственно. Уже двучленное уравнение $x^n - 1 = 0$ имеет n решений. Уравнение $\sin x = 0$ имеет бесконечное множество решений, но задача нахождения всех его решений к некорректным никак не относится.

Поэтому мы ввели более точное определение некорректных задач, основанное на третьем условии. Наше определение несколько отличается от определения, используемого в [22], немного уточняет его, но это не должно смущать читателя.

Глава 18

Проблема обеспечения надежности компьютерных вычислений

Изложенный материал показывает, что проблема надежности компьютерных вычислений с учетом неизбежной конечной, ограниченной, точности исходных данных, лежащих в основе любого расчета, является более сложной и трудной, чем это представлялось ранее.

До 1998 года во всем мире считали и верили, что все задачи математики, физики и техники делятся на два класса — класс корректных и класс некорректных задач. Поэтому считалось достаточным перед началом решения проверить — корректна решаемая задача или некорректна. Если задача корректна, то это означало, что выполнено, по крайней мере, необходимое условие надежности вычислений: при малых погрешностях исходных данных погрешности решений будут малыми. Разумеется, степень "допустимой малости" погрешности решений для разных задач различна, и поэтому корректность задачи еще не гарантирует полностью надежности любых вычислений (корректность не является достаточным условием надежности), но в корректных задачах для нее выполнялось по крайней мере необходимое условие. Если же задача оказывалась некорректной, то необходимо было использовать совершенно другой подход (например, регуляризацию задачи, как это предлагалось, в частности, в [22]. Если некорректную задачу, не заметив ее некорректности, начинали решать обычными методами, как корректную, то решение, разумеется, получалось ошибочным. Однако подобные ошибки возникали редко, поскольку необходимость проверки корректности подозрительных задач была хорошо известна, а для многих важных классов математических моделей корректность считалась установленной, доказанной и не требующей проверки. Так, считалась корректной очень часто встречавшаяся в приложениях известная задача Коши (т. е. задача вычисления решения при заданных начальных условиях) для систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

В 1998 году, после появления публикации [32], неожиданно обнаружилось, что на самом деле, к сожалению, все сложней. Оказалось, что существуют задачи третьего класса, промежуточного между ранее известными классами корректных и некорректных задач, а это означало, что обычная проверка корректности перед решением недостаточна. Задача по своей исходной постановке могла быть вполне корректной, но если при ее решении использовались преобразования, эквивалентные в классическом смысле, но не в расширенном, то корректность изменялась, и решение становилось ошибочным. Задач третьего класса не так много, но каждая непредвиденная встреча с такой задачей могла привести к ошибкам в расчетах и стать причиной аварий и даже катастроф, о которых уже говорилось в *главах 6* и *14*.

Поскольку изменение корректности возникало при использовании преобразования, эквивалентного в классическом смысле, но не в расширенном, то после обнаружения таких преобразований были сделаны настойчивые попытки найти критерии, выделяющие их. Если бы такие критерии были найдены, то для обеспечения надежности вычислений было бы достаточно использовать исключительно преобразования, эквивалентные и в классическом, и в расширенном смысле. Надежда на отыскание подобных критериев, выделяющих преобразования, эквивалентные в расширенном смысле, высказывалась, в частности, в первом русском издании этой книги, вышедшем в 1999 году. Однако после внимательного исследования выяснилось, что эти надежны скорее всего иллюзорны. Выяснилось, что очень многое зависит от конкретной решаемой задачи, и что самые, казалось бы, "невинные" простейшие эквивалентные преобразования могут при определенных условиях быть эквивалентными только в классическом смысле, но не в расширенном.

Действительно, вернемся еще раз к преобразованию уравнения (26) сначала в уравнение (34), а затем в уравнение (35). Все преобразования заключались, фактически, лишь в разбивке одного члена на два: $4Dx_1 \to 2Dx_1 + 2Dx_1$ и в переносах членов из левой части в правую и наоборот — с соответствующим изменением знака. И, тем не менее, эти простейшие эквивалентные преобразования изменили корректность решаемой задачи, оказались эквивалентными в классическом смысле, но не в расширенном. Поэтому выявилась необходимость исследования "триад" (математическая модель — решаемая задача — метод решения), о которых было подробно рассказано в *главе 16*.

Из изложенных результатов исследования вытекает, что для обеспечения надежности и достоверности компьютерных расчетов необходимо прежде всего выделить "опасные" группы задач и опасные "триады", в которых изменения корректности происходят систематически. Так, например, изменения корректности систематически происходят при решении ряда систем дифференциальных уравнений.

Поэтому, продолжая исследование, рассмотрим сначала наиболее важную первую триаду:

- математическая модель — система обыкновенных дифференциальных уравнений, состоящая из уравнений различных порядков;
- решаемая задача — численное, на интервале $t_0 \le t \le t_1$, интегрирование системы при заданных для $t = t_0$ начальных условиях (т. е. решение задачи Коши);
- метод решения — приведение системы к нормальной форме (к форме n уравнений первого порядка) с последующим применением стандартных компьютерных программ численного решения, разработанных, естественно, для начальной формы.

Исследуем проблему возможных изменений корректности для этой триады. После приведения системы к нормальной форме задача отыскания численного решения является корректной. Это утверждение основывается на известной из теории дифференциальных уравнений теореме о непрерывной зависимости решений системы в нормальной форме от коэффициентов и параметров (для уточнения заметим, что эта важнейшая теорема справедлива, как известно, в том случае, если правые части системы уравнений удовлетворяют известным условиям Липшица (Lipschitz), однако условия Липшица не обременительны и в практических задачах почти всегда выполняются). В то же время, как было показано в *главе 15*, существуют особые (в частности, неканонические) системы дифференциальных уравнений, не имеющие непрерывной зависимости решений от коэффициентов и параметров. Для таких систем задача численного решения при заданных начальных условиях (задача Коши) является некорректной задачей. Ее решение может существенно (и даже коренным образом) измениться при сколь угодно малых, неизбежных на практике отклонениях коэффициентов и параметров от расчетных значений. Преобразование таких систем в нормальную форму является преобразованием, эквивалентным в классическом смысле, но не в расширенном, и поэтому численное интегрирование таких систем неизбежно приводит к ошибкам в расчете, а точнее — к возможности полного несоответствия между результатом расчета и реальным поведением исследуемого объекта или процесса. Согласно расчету, это поведение не должно существенно изменяться, по крайней мере, при очень малых вариациях коэффициентов и параметров, а на самом деле при этих малых, неизбежных на практике, вариациях возможны большие и даже коренные изменения решений.

Особенно важно отметить еще раз, что эти изменения могут возникать лишь при определенных сочетаниях положительных и отрицательных вариаций различных коэффициентов и параметров, и поэтому совпадение между результатами расчета какого-либо объекта и его реальным поведением на испытаниях или в ходе эксплуатации еще ни о чем не говорит и ничего не гарантирует. Поскольку при изготовлении любого технического устройства знак неизбежных малых отклонений реальных параметров от расчетных значений непредсказуем, то в изготовленном объекте комбинация знаков вариаций параметров вполне может оказаться безопасной, и исследуемый объект может успешно пройти все испытания и неопределенно долго работать в полном соответствии с расчетом. Однако при неизбежном в ходе эксплуатации малом "дрейфе" параметров в любой момент может произойти полное расхождение между реальным поведением объекта или процесса и результатом расчета. Мы уже говорили о возможности (и крайней опасности) таких расхождений в *главах 5—8* на примере расчетов устойчивости. Однако те же опасности аварий и катастроф существуют — как было показано в *главе 15* — и в более широкой и очень часто встречающейся на практике задаче численного интегрирования систем дифференциальных уравнений.

Для обеспечения надежности компьютерных расчетов систем дифференциальных уравнений необходимо уметь отсеивать особые системы, для которых преобразование в нормальную форму является преобразованием, эквивалентным в классическом смысле, а не в расширенном. О методике "отсеивания" опасных систем будет рассказано далее.

Общий вывод для рассматриваемой триады: для нее компьютерные вычисления могут давать ошибочные результаты, если решаемая система дифференциальных уравнений является особой.

Вторая триада:

- математическая модель — система обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающая какой-либо технический объект (в частности, систему управления) или природный процесс;
- решаемая задача — анализ устойчивости объекта или процесса, т. е. анализ его поведения на интервале $t_0 \le t < \infty$;
- метод решения — приведение системы к нормальной форме с последующим использованием традиционных методов проверки устойчивости — составлением матрицы Гурвица (Hurwitz) и вычислением ее определителей для линейных систем и построением функции Ляпунова для нелинейных систем.

Встреча со второй триадой также опасна, как и с первой, и может — по тем же причинам — приводить к ошибкам в компьютерных расчетах.

Действительно, если ошибочен расчет на интервале $t_0 \le t \le t_1$, то он тем более ошибочен для интервала $t_0 \le t < \infty$. Методы обеспечения надежности расчетов были подробно рассмотрены в *главах 8* и *11*.

Третья триада:

- математическая модель — система дифференциальных уравнений, не обладающая свойством устойчивости по всем переменным;
- решаемая задача — анализ устойчивости какой-либо одной выделенной переменной или группы переменных;
- метод решения — так называемое "μ-преобразование", т. е. исследуемая система с помощью преобразований, эквивалентных в классическом смысле, преобразовывалась к другим переменным, включающим в себя интересующую нас часть старых переменных и новые переменные. Если преобразованная система оказалась устойчива по всем переменным (а это сравнительно несложно проверяется традиционными методами, например, составлением матрицы Гурвица), то это означает, что исходная система устойчива по интересующим нас переменным.

Пример — система (91) из *главы 11*, которая с помощью μ-преобразования $x_2 - 2x_3 = \mu$ преобразуется в систему (93), устойчивую по всем переменным, в том числе и по переменной x_1. Это означало, что по переменной x_1 исходная система (91) была устойчива, что подтверждалось и непосредственным интегрированием.

Третья триада тоже опасна: μ-преобразования, при детальном исследовании, очень часто оказываются эквивалентными в классическом, но не в расширенном смысле. (Примером является как раз преобразование системы (91) в систему (93)), и поэтому расчет устойчивости преобразованной системы с помощью, например, вычисления определителей матрицы Гурвица чаще всего оказывается совершенно ненадежным: система устойчивая, например, по переменной x_1 при номинальных значениях коэффициентов и параметров, но теряющая эту устойчивость при сколь угодно малых, неизбежных на практике отклонениях реальных величин параметров от расчетных значений, с практической точки зрения ничуть не лучше системы неустойчивой.

Поэтому известную методику расчета устойчивости по части переменных на основе μ-преобразований, описанную в монографии [10] и ряде других публикаций, при учете результатов исследований, проведенных в Санкт-Петербургском государственном университете, также нельзя считать надежной.

Четвертая триада:

- математическая модель — система однородных линейных алгебраических уравнений с входящим в них параметром λ; некоторые из уравнений параметра λ не содержат;
- решаемая задача — вычисление собственных значений параметра λ — т. е. таких значений, при которых исследуемая система имеет ненулевые решения (так называемая *обобщенная задача о собственных значениях*);
- метод решения — последовательное, по единой компьютерной программе, исключение переменных x_i путем домножений и сложений, начиная с x_1 и кончая x_{n-1}.

  Для последней переменной получаем уравнение:

  $$M(\lambda)\, x_n = 0, \tag{260}$$

  где $M(\lambda)$ — полином, среди корней которого находятся искомые собственные значения.

Эта триада и приводящие к ней практические задачи были подробно исследованы в *главе 13*. Было выяснено, что эта триада тоже опасна, поскольку в процессе исключения переменных корректность задачи может измениться, и поэтому результат расчета может оказаться ошибочным.

Напомним, что здесь (в отличие от первой и второй триады) источником ошибки являются погрешности округления — при потере корректности после очередного эквивалентного преобразования, оказавшегося неэквивалентным в расширенном смысле, даже малая погрешность округления приводит к грубой ошибке, появлению фальшивого собственного значения.

В данном случае надежность расчета можно восстановить путем изменения третьего члена триады, путем замены одной компьютерной программы на две: сначала, пользуясь уравнениями, не содержащими λ, сокращают число переменных и число уравнений, связывающих их. В результате от обобщенной задачи о собственных значениях приходят к классической задаче для меньшего числа переменных (теперь уже все уравнения будут содержать параметр λ), а в классической задаче при исключении переменных, как было показано в *главе 13*, изменений корректности не происходит, и компьютерные вычисления надежны.

Заметим, что для третьей триады, для задачи проверки устойчивости по части переменных, надежных методов расчета пока не разработано.

Поскольку изменение корректности решаемой задачи связано с совсем недавно (в 1987—1994 годах — см. публикации [1] и [3]) открытым в СПбГУ новым свойством эквивалентных преобразований, свойством возможного изменения корректности, о котором до 1987 года (до публикации [1]) и не подозревали, а эквивалентные преобразования пронизывают всю математику, пронизывают ее сверху донизу, то задач, относящихся к недавно открытому третьему классу, изменяющих корректность при решении и требующих особых методов для обеспечения надежности компьютерных вычислений, будет со временем открываться все больше и больше.

В этой книге рассказано лишь об открытых ранее других задачах третьего класса, о задачах, относящихся к областям численного интегрирования дифференциальных уравнений, расчета устойчивости систем управления, вычисления собственных значений систем однородных линейных уравнений. Уже после первых публикаций по этой проблеме аналогичные задачи, изменяющие корректность в ходе решения, были обнаружены профессором Ф. П. Васильевым в линейном программировании [46], профессором В. С. Сизиковым — при решении интегральных уравнений, в частности — при преобразовании уравнений Вольтерра (Volterra), в уравнения Фредгольма (Fredholm) первого рода ([47], стр. 146—152). Для этих задач будут, несомненно, разработаны методы, позволяющие восстановить надежность компьютерных вычислений, но лучше всего это сделают проф. Васильев и проф. Сизиков, первыми открывшие особые свойства этих задач, промежуточных между корректными и некорректными.

Таким образом, наиболее опасные "триады" нами выделены.

В *главе 19* мы покажем, какие ошибки возникают при решении задач, относящихся к этим триадам, с помощью получивших заслуженную популярность пакетов прикладных программ (пакеты MATLAB, Mathcad и др.), и какими дополнительными программами можно дополнить эти пакеты для обеспечения надежности компьютерных вычислений.

Глава 19

Ошибки и неточности, обнаружившиеся в пакетах MATLAB, Mathcad, Scilab и других пакетах прикладных программ. Методы избежания ошибок

В последние десятилетия были разработаны и пользуются заслуженной популярностью пакеты прикладных программ, предназначенные для решения различных практических задач — пакеты MATLAB, Mathcad, Scilab и многие другие ([48—56] и др.).

Не подвергая сомнению заслуженную популярность этих пакетов и большой труд, вложенный в них разработчиками, нельзя не отметить ошибок, обнаружившихся в этих пакетах после публикации результатов исследований, проведенных в Санкт-Петербургском государственном университете — исследований по изменению корректности при эквивалентных преобразованиях.

Отметим сразу: поскольку результаты исследований СПбГУ были опубликованы уже после разработки упомянутых пакетов прикладных программ, то никакой вины разработчиков пакетов в обнаружившихся ошибках, разумеется, нет и не может быть. Имеет место обычный прогресс науки — в том, что еще недавно казалось совершенным и законченным, со временем чаще всего обнаруживаются пробелы и неточности, требующие доработки и совершенствования.

Поэтому часто рекомендуют говорить не об "ошибках" в популярных пакетах прикладных программ, а об их "неточностях", "неполноте", "необходимости дополнительной доработки". Однако "неточности" в популярных пакетах прикладных программ могут стать — через ошибки в расчетах — причиной аварий и гибели людей. Поэтому будем говорить резко и откровенно: в популярных пакетах прикладных программ обнаружились ошибки, которые совершенно необходимо исправить. Ничьей вины в этих ошибках нет, но исправить их — и исправить как можно скорей — необходимо, и сделать это — как будет далее показано — совсем не трудно. Рассмотрим обнаружившиеся ошибки и неточности последовательно.

Численное интегрирование систем обыкновенных дифференциальных уравнений

В рассматриваемых пакетах прикладных программ численное интегрирование систем обыкновенных дифференциальных уравнений при заданных начальных условиях разбивается на два этапа:

- система эквивалентными преобразованиями приводится к нормальной форме, к системе n уравнений первого порядка;
- система в нормальной форме интегрируется численно по единой программе.

Преобразование к нормальной форме в некоторых пакетах выполняется автоматически, с помощью отдельной программы, в других пакетах преобразование выполняет пользователь компьютера.

Преобразование исходной системы уравнений в нормальную форму совершенно оправдано. Если этого не делать, то пришлось бы составлять очень большое количество отдельных программ для решения различных систем. Отдельная программа потребовалась бы, например, для решения системы, состоящей из одного уравнения третьего порядка и одного — первого, и отдельная — для системы, состоящей из двух уравнений второго порядка, — и т. д. Так что в целом приведение исходных систем к нормальной форме, используемое в популярных пакетах прикладных программ, является, безусловно, правильным и целесообразным.

Однако при этом допускается ошибка — не оговаривается, что существуют особые системы дифференциальных уравнений, рассмотренные в *главе 15*, решения которых не обладают непрерывной зависимостью решений от параметров. Задача численного интегрирования таких систем при заданных начальных условиях является задачей некорректной. Поэтому полученное решение может совершенно не соответствовать реальному поведению исследуемого объекта или процесса, а ошибка в расчете — как и всякая ошибка — может стать причиной аварий и катастроф; об этом уже говорилось в предыдущих главах.

Но в популярных пакетах прикладных программ об опасностях, возникающих при преобразованиях к нормальной форме особых систем, ничего не говорится. Поэтому пользователь компьютера, столкнувшийся с особой системой, не обладающей свойством непрерывной зависимости решений от параметров, может сделать совершенно ошибочный вывод о поведении исследуемого объекта или процесса.

Отсутствие предупреждения о свойствах особых систем, отсутствие предупреждения об опасности встречи с ними, о необходимости дополнительных операций при встрече с особыми системами является той ошибкой, присутствующей в популярных пакетах, которую совершенно необходимо исправить. Это исправление совсем не сложно сделать.

Одной из основных и наиболее часто встречающихся причин отсутствия непрерывной зависимости решений системы дифференциальных уравнений от параметров и коэффициентов является "обнуление" старших членов в характеристическом полиноме.

Рассмотрим систему двух линейных уравнений с постоянными коэффициентами вида:

$$(a_n D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \ldots) x_1 + (b_m D^m + b_{m-1} D^{m-1} + \ldots) x_2 = 0; \tag{261}$$

$$(C_k D^k + C_{k-1} D^{k-1} + \ldots) x_1 + (d_p D^p + d_{p-1} D^{p-1} + \ldots) x_2 = 0, \tag{262}$$

где точками обозначены члены с более низкими степенями оператора дифференцирования $D = \dfrac{d}{dt}$. Характеристический полином системы (261)—(262) равен определителю:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots b_m\lambda^m + b_{m-1}\lambda^{m-1} + \ldots \\ c_k\lambda^k + c_{k-1}\lambda^{k-1} + \ldots d_p\lambda^p + d_{p-1}\lambda^{p-1} + \ldots \end{vmatrix} = (a_n d_p \lambda^{n+p} - b_m c_k \lambda^{m+k}) + \ldots$$

(выписываем лишь результат перемножения и вычитания старших членов элементов определителя).

Теперь понятно, что старший член характеристического полинома станет равным нулю (т. е. произойдет его "обнуление") при выполнении двух условий:

$$n + p = m + k; \tag{263}$$

$$a_n d_p - b_m c_k = 0. \tag{264}$$

Понятно также, что при сколь угодно малых вариациях коэффициентов a_n; d_p; b_m; c_k, или входящих в эти коэффициенты параметров, равенство (264) перестанет выполняться, степень характеристического полинома повысится, а это ведет, как правило, к коренному изменению решений.

Поэтому для всех тех систем дифференциальных уравнений, в которых выполняются равенства (263) и (264), задача численного интегрирования при заданных начальных условиях является некорректной.

После приведения некорректной системы дифференциальных уравнений к нормальной форме задача численного интегрирования системы формально делается корректной. Это обстоятельство вводило в заблуждение (да и теперь вводит) большинство пользователей компьютеров. На самом деле формальная корректность не спасает положения (поскольку корректность появилась лишь из-за того, что преобразование исходной системы в нормальную форму было преобразованием, эквивалентным в классическом смысле, но не в расширенном). Результат численного интегрирования систем, в которых выполнены равенства (263) и (264), может на самом деле не иметь ничего общего с реальным поведением исследуемого объекта.

Иногда утверждают, что одновременное выполнение двух равенств (263) и (264) имеет исчезающе малую вероятность, и поэтому реальная встреча с некорректными задачами численного интегрирования систем дифференциальных уравнений может происходить лишь очень редко. На самом деле это не так. Как показывает материал, изложенный в *главе 7*, к некорректным системам дифференциальных уравнений, к системам, в которых выполнены равенства (263) и (264), приводят многие практические задачи (в том числе известная задача аналитического конструирования оптимальных регуляторов при неизмеримости части выходных переменных). Поэтому на практике встречи с некорректными задачами могут происходить достаточно часто, и отсутствие рекомендаций по обращению с некорректными системами в популярных пакетах прикладных программ является ошибкой.

Эту ошибку, как уже говорилось, легко исправить — программы пакетов нужно дополнить программами проверок равенств (263) и (264). Если они выполнены, программа должна предупреждать пользователя компьютера: "Вы встретились с особой системой и некорректной задачей. Либо воздержитесь от расчета, либо готовьтесь к тому, что Ваш расчет может коренным образом разойтись с реальным поведением исследуемого Вами объекта или процесса".

Отметим еще, что опасным является не только точное выполнение равенства (264), но и приближенное — опасно, если разность $a_n d_p - b_m c_k$ окажется много меньше (на два порядка и более), чем сами произведения $a_n d_p$ и

$b_m c_k$ в отдельности. В этом случае задача интегрирования системы дифференциальных уравнений не является некорректной, но она плохо обусловлена: коренное изменение поведения исследуемого объекта или процесса в этом случае также может произойти, но уже не при сколь угодно малых изменениях коэффициентов и параметров системы, а при конечных малых их изменениях.

Примером систем с такого рода поведением может служить уже рассмотренная нами ранее система уравнений (38)—(39), у которой поведение решений менялось коренным образом при изменении некоторых коэффициентов всего на две тысячных от первоначального значения.

Для предупреждения опасных ошибок пакеты программ численного интегрирования систем дифференциальных уравнений должны быть дополнены программой, вычисляющей левую часть формулы (264). Если она окажется хотя бы на два порядка меньше, чем произведение $a_n d_p$, то программа должна предупредить пользователя компьютера: "Вы встретились с плохо обусловленной задачей. Имейте в виду, что при малых отклонениях параметров системы от расчетных значений реальное поведение исследуемого объекта или процесса может коренным образом отличаться от результатов расчета".

С некорректностью задачи интегрирования можно встретиться и в системах, состоящих из трех и более уравнений для трех и более переменных. В этом случае условия возможного "обнуления" старшего члена характеристического полинома существенно сложнее. Рассмотрим, для примера, систему из трех линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами:

$$\begin{aligned} &A_{11}(D)x_1 + A_{12}(D)x_2 + A_{13}(D)x_3 = 0; \\ &A_{21}(D)x_1 + A_{22}(D)x_2 + A_{23}(D)x_3 = 0; \\ &A_{31}(D)x_1 + A_{32}(D)x_2 + A_{33}(D)x_3 = 0, \end{aligned} \tag{265}$$

где $A_{11}(D);\ldots A_{33}(D)$ — полиномы различных степеней от оператора дифференцирования $D = \dfrac{d}{dt}$. Характеристический полином системы (265) равен определителю:

$$\Delta = \begin{vmatrix} A_{11}(\lambda) & A_{12}(\lambda) & A_{13}(\lambda) \\ A_{21}(\lambda) & A_{22}(\lambda) & A_{23}(\lambda) \\ A_{31}(\lambda) & A_{32}(\lambda) & A_{33}(\lambda) \end{vmatrix}. \tag{266}$$

Рассмотрим, при каких условиях старший член определителя (266) может обратиться в нуль. Пусть степень полинома $A_{11}(\lambda)$ равна числу a_{11}, степень полинома $A_{12}(\lambda)$ — числу a_{12} и т. д.

После вычисления определителя (266) и разложения его по степеням оператора λ на роль старшего члена могут претендовать члены, имеющие степени, равные, соответственно, следующим числам:

$$a_{11} + a_{22} + a_{33}; \tag{267}$$

$$a_{12} + a_{23} + a_{31}; \tag{268}$$

$$a_{13} + a_{21} + a_{32}; \tag{269}$$

$$a_{31} + a_{22} + a_{13}; \tag{270}$$

$$a_{32} + a_{23} + a_{11}; \tag{271}$$

$$a_{12} + a_{21} + a_{33}. \tag{272}$$

Предположим, что среди шести чисел (267)—(272) есть только одно наибольшее. Тогда при вариациях любых коэффициентов системы (265) изменения степени характеристического полинома произойти не может, и задача интегрирования системы (265) при заданных начальных условиях будет корректной. Необходимым условием некорректности, как можно проверить, является наличие среди шести чисел (267)—(272) нескольких наибольших. Пусть наибольшими (и равными числу k) являются числа (267) и (268). Тогда старший член характеристического полинома будет иметь вид: $(a_1 + a_2)D^k$, где a_1 и a_2 — коэффициенты при членах характеристического полинома, имеющих степень $k = a_{11} + a_{23} + a_{33} = a_{12} + a_{23} + a_{31}$.

Вторым необходимым и одновременно достаточным условием некорректности является выполнение равенства:

$$a_1 + a_2 = 0. \tag{273}$$

При выполнении этого условия старший член характеристического полинома при номинальных значениях параметров исследуемого объекта или процесса обратится в нуль, но уже при сколь угодно малых отклонениях реальных параметров от номинальных значений, степень характеристического полинома может возрасти, что и сделает задачу интегрирования системы (265) некорректной.

Если сумма $a_1 + a_2$ не равна точному нулю (или машинному нулю), но на 2—3 порядка меньше, чем величины коэффициентов a_1 и a_2, то задача интегрирования системы (265) плохо обусловлена.

Для предупреждения ошибок в расчетах популярные пакеты прикладных программ следует дополнить небольшой программой, проверяющей необходимые и достаточные условия некорректности или плохой обусловленности задачи интегрирования системы и предупреждающей об этом пользователя компьютера.

Если оказалось, что три и более наибольших чисел (267)—(272) оказались равными, то второе необходимое условие корректности принимает вид:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = 0, \tag{274}$$

где m — количество равных друг другу наибольших из чисел (267)—(272). Для систем из четырех уравнений с четырьмя переменными и систем из большего числа переменных методы проверки некорректности или плохой обусловленности аналогичны.

Во избежание ошибок популярные пакеты прикладных программ необходимо дополнить дополнительными программами, которые во всех перечисленных случаях производили бы проверку равенств (263), (264), (267)—(272), (273) и им подобных для систем из большего числа уравнений и предупредили бы пользователя компьютера о том, что он встретился с некорректной задачей.

Заметим, что обращение в нуль старшего члена характеристического полинома является наиболее распространенной, но не единственной причиной некорректности задачи интегрирования систем дифференциальных уравнений. Однако "обнуление" старшего члена характеристического полинома проверяется наиболее просто, и эта простая проверка сразу уменьшает вероятность ошибок в расчетах.

1. Расчеты устойчивости

Присутствующие в популярных пакетах прикладных программ (пакеты MATLAB, Mathcad и др.) программы расчета устойчивости различных объектов и, прежде всего, — систем управления также могут быть источником ошибок для пользователей компьютеров. Причина ошибок в расчетах заключается в отсутствии учета возможного изменения корректности задачи расчета устойчивости при эквивалентных преобразованиях, используемых для унификации программного обеспечения.

Так, например, устойчивость систем управления, математической моделью которых являются системы дифференциальных уравнений, состоящие из уравнений различных порядков, проверяется в упомянутых пакетах прикладных программ после приведения систем к нормальной форме (или, пользуясь терминологией теории управления, — к "пространству состояний"). Такой подход, разумеется, очень удобен, поскольку позволяет использовать одну программу вместо очень большого числа программ для различных систем, которые потребовались бы в том случае, если бы приведение системы к нормальной форме не использовалось. Об этом уже говорилось при рассмотрении программ численного интегрирования систем дифференциальных уравнений. Однако приведение системы к нормальной форме может оказаться — как уже говорилось — преобразованием, эквивалентным в классическом смысле, но не в расширенном, и в этом случае расчет устойчивости окажется ошибочным.

Поскольку ошибки в традиционных методах расчета устойчивости уже были весьма подробно рассмотрены в предыдущих главах, то мы ограничимся теперь лишь рекомендациями по дополнению популярных пакетов прикладных программ небольшими дополнительными программами, которые восстановят достоверность расчетов устойчивости.

Необходима дополнительная программа, которая вычисляла бы характеристический полином системы управления непременно "по реальным выходам", т. е. учитывала бы, какие из регулируемых переменных действительно могут использоваться в канале обратной связи, и какая именно система дифференциальных уравнений, состоящая из уравнений различных порядков, в которые входят эти переменные, будет в этом случае описывать объект управления. А когда характеристический полином получен, то необходимо не только вычислить его корни, но и проверить:

- не понизился ли его порядок, не оказался ли он ниже суммы порядков дифференциальных уравнений исследуемой системы. Понижение порядка говорит об "обнулении" старшего члена, что сразу свидетельствует о некорректности задачи расчета устойчивости;
- не оказались ли какие-либо из коэффициентов характеристического полинома малыми разностями больших коэффициентов исходной системы. В этом случае задача расчета устойчивости является плохо обусловленной, и малые, неизбежные на практике, отклонения реальных параметров от расчетных значений могут сделать результаты расчета устойчивости совершенно ошибочными с соответствующими тяжелыми последствиями — вплоть до аварий и катастроф.

Пример 1

Система двух уравнений (25)—(26) с двумя переменными x_1 и x_2 описывает, как уже говорилось, процессы в системе управления частотой вращения электродвигателя постоянного тока. Переменная x_1 является реальным выходом системы, поступающим в канал обратной связи, в котором — по закону, описываемому уравнением (26), — формируется управляющее воздействие — переменная x_2.

Характеристический полином системы (25)—(26) равен полиному (27), имеющему корни $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = \lambda_3 = -1$, лежащие в левой полуплоскости, далеко от мнимой оси. Согласно традиционным программам расчета устойчивости, система (25)—(26) будет признана устойчивой и обладающей приличным запасом устойчивости, будет признана не теряющей устойчивости по крайней мере при малых отклонениях параметров системы управления от расчетных значений.

Дополнительная небольшая программа, контролирующая степень характеристического полинома и ее связь с порядками дифференциальных уравнений, входящих в исследуемую систему, исправила бы неправильный ответ традиционной программы об устойчивости системы (25)—(26). Дополнительная небольшая программа, добавленная в традиционный пакет, заметила бы, что поскольку система (25)—(26) состоит из уравнения третьего порядка относительно переменной x_1 и уравнения первого порядка относительно переменной x_2, то степень характеристического полинома должна быть равна четырем. А поскольку она оказалась на единицу меньше, то это говорит о том, что произошло "обнуление" коэффициента при старшем члене. Дополнительная программа должна высветить на экране сообщение для пользователя компьютера: "Несмотря на хорошие корни характеристического полинома, Вы имеете дело с системой, находящейся на границе устойчивости. Запас устойчивости вследствие «обнуления» коэффициента при старшем члене является нулевым". А пользователь компьютера должен знать, что системы управления, лежащие на границе устойчивости по какому-либо из своих параметров, очень опасны, они гораздо хуже, чем просто неустойчивые. Как уже говорилось в *главах 5* и *6*, подобные системы могут успешно пройти испытания, некоторое время исправно работать, а потом в заранее неизвестный момент времени "пойти в разнос", стать причиной аварий и даже катастроф.

Мы убеждаемся, что небольшая дополнительная программа, добавленная в широко используемый пакет, восстановит достоверность и надежность компьютерного расчета.

Пример 2

Система дифференциальных уравнений (258), описывающая ту же систему управления частотой вращения двигателя постоянного тока, что и система (25)—(26), но с немного другими значениями параметров, имеет характеристический полином (259) четвертой степени с корнями (с точностью до первого знака) $\lambda_1 = -3$, $\lambda_2 = \lambda_3 = -1$, $\lambda_4 = -1000$.

Снова традиционная программа расчета устойчивости даст неверный ответ об устойчивости системы и о хорошем запасе устойчивости. Дополнительная небольшая программа, добавленная в традиционный пакет, выявит, что при вычислении характеристического полинома системы (258), равного определителю:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \lambda^3 + 4\lambda^2 + 5\lambda + 2 & -(1{,}001\lambda^2 + 2\lambda + 1) \\ \lambda^2 + 4\lambda + 5 & -(\lambda + 1) \end{vmatrix} = \\ = 0{,}001\lambda^4 + 1{,}004\lambda^3 + 5{,}005\lambda^2 + 7\lambda + 3, \tag{275}$$

коэффициент при старшем члене характеристического полинома (259) оказался малой разностью чисел, которые больше его на три порядка.

Дополнительная программа поэтому выведет на экран сообщение для пользователя компьютера: "Вы имеете дело с плохо обусловленной системой. При вариациях коэффициентов исследуемой системы порядка тысячной доли их номинальных величин система может потерять устойчивость". Такая дополнительная программа восстановит достоверность и надежность компьютерных расчетов.

Отметим, что "обнуление" старшего члена является наиболее распространенной причиной потери параметрической устойчивости при эквивалентных преобразованиях, но не единственной причиной. Характерным примером другой причины является эквивалентное (в классическом смысле) относительно переменной $x_1(t)$ преобразование системы (91) в систему (93).

Решения $x_1(t)$ у системы (91) и у системы (93) одинаковы. Однако у системы (93) это решение сохраняет устойчивость при вариациях любых ее параметров, а у системы (91) устойчивость решения x_1 теряется при сколь угодно малых вариациях параметров. Преобразование системы (91) в систему (93) является преобразованием, эквивалентным в классическом смысле, но не в расширенном. Оно изменило свойство сохранения устойчивости по переменной x_1. В то же время "обнуления" старших членов в системах (91)—(93) не видно. Это говорит о том, что все пути возможного изменения корректности при эквивалентных преобразованиях пока еще не выявлены, и исследование данного вопроса нельзя считать законченным. В то же время рекомендованные в этой главе небольшие дополнительные программы, дополняющие популярные пакеты прикладных программ, могут существенно уменьшить вероятность ошибок в компьютерных расчетах, хотя и не стоит надеяться, что они устранят все известные и все пока еще неизвестные причины ошибок. Исследования нужно продолжать.

2. Алгоритмы и программы синтеза оптимальных систем управления

Пакет MATLAB и некоторые другие пакеты прикладных программ включают в себя программы синтеза систем управления, доставляющих минимум квадратичным или среднеквадратичным критериям качества работы системы (см., например, [48], стр. 45—49). При этом не делается оговорок об особых случаях, когда общие алгоритмы синтеза приводят к опасным системам, способным терять устойчивость при малых отклонениях реальных параметров объекта управления или регулятора от их расчетных значений, и тем самым эти алгоритмы становятся причиной аварий и даже катастроф.

Любопытно отметить, что именно в задачах синтеза систем управления, доставляющих минимум квадратичным критериям качества, впервые на практике столкнулись с явлением изменения корректности задачи при эквивалентных преобразованиях — причем столкнулись, не понимая еще сущности явления.

Как известно, метод синтеза регуляторов, обеспечивающих для линейных систем минимум квадратичных критериев качества, был предложен А. М. Летовым и изложен им сначала в серии статей, опубликованных в журнале "Автоматика и телемеханика" в 1960 году, а затем — в монографии [13]. Метод синтеза, предложенный А. М. Летовым, был назван им методом "аналитического конструирования" регуляторов. Благодаря своей простоте и существенному улучшению качества работы систем управления, которые обеспечивали "аналитически сконструированные" регуляторы, они еще в 60-е годы XX века стали широко применяться на практике. В те же годы произошла целая серия аварий, причиной которых стала потеря устойчивости при неизбежном на практике малом "дрейфе" параметров в ходе эксплуатации системы управления.

Разумеется, перед изготовлением системы управления и ее установкой на реальный объект "аналитически сконструированные" регуляторы тщательно проверяли на устойчивость и на сохранение устойчивости при "дрейфе" параметров. Однако эта проверка проводилась для систем управления, в которых в канале обратной связи используются все переменные состояния, а на практике чаще всего часть из них недоступна. В этих случаях систему управления преобразовывали к доступным переменным, пользуясь при этом только эквивалентными (в классическом смысле) преобразованиями, сохранявшими неизменными хорошие переходные процессы в системах. В те годы еще никто не догадывался, что эквивалентные преобразования могут изменить корректность и параметрическую устойчивость систем управления. Поэтому происходившие с "аналитически сконструированными" системами управления аварии были неожиданными и полного объяснения долго не получали. Эмпирические методы предотвращения аварий были, правда, предложены и быстро реализованы — и в России, и в США (см., например, [16], [17]). Но поскольку полного понимания и объяснения причин аварий не было, то, избавившись от аварий в одних ситуациях, сталкивались с ними в других.

Полное объяснение причин аварий на основе введения представлений об эквивалентных преобразованиях, изменяющих параметрическую устойчивость, и тем самым эквивалентных в классическом смысле, но не в расширенном, было дано в 1987 году в [1]. С 1987 года прошло немало времени, и была полная возможность ввести в пакет MATLAB и другие популярные пакеты прикладных программ упоминание о существовании особых систем управления, для которых традиционные методы расчета и синтеза приводят к ошибочным результатам.

Однако в области синтеза оптимальных систем управления этот недостаток популярных пакетов прикладных программ может быть легко исправлен — в учебном пособии [1] на стр. 212—230 подробно рассмотрены алгоритмы, которые уже для всех систем управления, в том числе и особых, обеспечивают сохранение устойчивости при отклонениях реальных параметров объекта управления или регулятора от расчетных значений — при любом числе переменных состояний и реальных выходов системы управления.

Предельный и наиболее опасный в части обеспечения параметрической устойчивости случай, когда в канале обратной связи может быть использована не более, чем одна переменная состояния, был рассмотрен в *главе 11*. В этом случае нет даже необходимости вводить в используемые пакеты прикладных программ дополнительные программы проверки на возможную встречу с особыми системами. Достаточно проверить выполнение критерия Ю. Петрова — т. е. выполнение простого неравенства (82).

Для общего случая, для многомерных систем управления с большим числом регулируемых величин и управляющих воздействий популярные пакеты прикладных программ (пакет MATLAB и др.) следует дополнить небольшими программами, которые на основе алгоритмов, опубликованных в [1] на стр. 212—230, производили бы проверки "номера шага алгоритма предварительных преобразований", выявляли бы опасные системы, а после их выявления производили бы коррекцию алгоритма синтеза для обеспечения сохранения устойчивости системы управления при вариациях параметров. Алгоритмы коррекции изложены в [1] на стр. 228—229, и поэтому не возникнет затруднений в составлении дополнительной программы, дополняющей популярные пакеты прикладных программ и восстанавливающей надежность и достоверность компьютерных вычислений.

3. Алгоритмы, использующие цепочки эквивалентных преобразований

Многие алгоритмы компьютерных вычислений, закодированные в популярных пакетах прикладных программ (MATLAB, Mathcad и др.), включают в себя цепочки эквивалентных преобразований.

Так, например, используя метод Гаусса решения систем алгебраических уравнений:

$$\begin{gathered} a_{11}x_1 + \ldots a_{n1}x_n = b_1; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ an_1x_1 + \ldots a_{nn}x_n = b_n, \end{gathered} \qquad (276)$$

мы постепенно преобразуем путем эквивалентных преобразований, умножений и сложений матрицу коэффициентов системы (276)

$$\begin{pmatrix} a_{11}...a_{n1} \\ ... \\ a_{n1}...a_{nn} \end{pmatrix} \qquad (277)$$

в треугольную форму, после чего искомые решения легко находятся одно за другим.

Точно так же один из наиболее удобных методов вычисления определителей заключается в последовательном понижении их порядка путем эквивалентных преобразований, умножений и сложений. Если, например, нужно вычислить определитель десятого порядка, то программа сперва преобразует его в определитель девятого порядка, потом — восьмого, пока не доходит до определителя, который легко вычисляется непосредственно.

Одним из источников неточностей и ошибок в компьютерных вычислениях являются, как это хорошо известно, погрешности округления. Хотя компьютеры работают с большим количеством значащих цифр, и поэтому погрешность, вносимая каждым отдельным округлением, мала, но при огромном объеме математических операций, выполняемых современными быстродействующими вычислительными машинами, погрешности округления начинают очень серьезно влиять на точность и надежность компьютерных вычислений.

Одним из наиболее простых и эффектных методов борьбы с погрешностями округления является перепрограммирование компьютера на вычисление с удвоенным количеством десятичных знаков, хотя удвоение и снижает скорость вычислительного процесса. Все это хорошо известно, однако недавно в результате исследований, проведенных в Санкт-Петербургском государственном университете, обнаружился еще один новый источник ошибок компьютерных вычислений. Хотя бы одно из цепочки эквивалентных преобразований может оказаться не эквивалентным в расширенном смысле. Этого уже достаточно для того, чтобы решаемая задача стала некорректной, а раз так, то уже сколь угодно малая погрешность одного единичного округления может теперь привести к серьезной ошибке.

По сравнению со старыми, хорошо известными источниками ошибок в компьютерных вычислениях от погрешностей округления, с которыми давно научились бороться, новый источник ошибок обладает следующими характерными чертами:

- ошибка не нарастает медленно, она не пропорциональна количеству вычислений, округлений и эквивалентных преобразований. Ошибка может возникнуть, если хотя бы одно из использованных преобразований оказалось эквивалентным в классическом, но не в расширенном смысле;
- повышение точности вычислений, удвоение числа десятичных знаков, с которыми работает компьютер, не помогает избежать ошибки.

Теоретические основы возможных ошибок из-за погрешностей округления и изменения корректности при исключении переменных в обобщенной задаче о собственных значениях систем линейных однородных уравнений с параметром были рассмотрены в *главе 13*. Приведем теперь конкретный пример вычисления собственных значений для следующей системы линейных однородных уравнений, рассмотренной ранее в [57]:

$$\begin{aligned}
&\left(\sqrt{2}-\lambda\right)x_1+\sqrt{2,5}x_2+\sqrt{3}x_3+\sqrt{3,5}x_4+\sqrt{4,5}x_5=0;\\
&\sqrt{5}x_1+\left(\sqrt{5,5}-\lambda\right)x_2+\sqrt{6}x_3+\sqrt{6,5}x_4+\sqrt{7}x_5=0;\\
&\sqrt{7,5}x_1+\sqrt{8}x_2+\left(\sqrt{8,5}-\lambda\right)x_3+\sqrt{9,5}x_4+\sqrt{10}x_5=0;\\
&\sqrt{10,5}x_2+\sqrt{11}x_3+\left(\sqrt{11,5}-\lambda\right)x_4+\sqrt{12}x_5=0;\\
&\sqrt{12,5}x_1+\sqrt{13}x_2+\sqrt{13,5}x_3+\sqrt{14}x_4+\sqrt{14,5}x_5=0
\end{aligned}\tag{278}$$

(пятое уравнение параметра λ не содержит).

Расчет собственных значений производился дважды, причем каждый раз компьютер программировался на вычисления с различной точностью, с различным числом значащих десятичных цифр и в задании коэффициентов системы уравнений (278), и в промежуточных вычислениях. Производилось последовательное исключение переменных x_1; x_2; x_3; x_4 до тех пор, пока не получалось уравнение с одним переменным:

$$M(\lambda)x_5 = 0, \tag{279}$$

где $M(\lambda)$ — полином, среди корней которого находятся собственные значения параметра λ системы (278).

При вычислении на четыре значащие десятичные цифры полином $M(\lambda)$ имел вид:

$$\begin{aligned} M_4 = -\,0{,}4\lambda^7 - 3379\lambda^6 - 2843\lambda^5 + 2312\lambda^4 + 320{,}7\lambda^3 - 2{,}627\lambda^2 - \\ -\,0{,}3388\lambda - 0{,}00363. \end{aligned} \tag{280}$$

При вычислении на восемь значащих десятичных цифр получился полином:

$$\begin{aligned} M_8 = -\,0{,}0002\lambda^7 - 3378\lambda^6 - 2857{,}264\lambda^5 + 2307{,}0127\lambda^4 + \\ +\,322{,}77559\lambda^3 - 2{,}353532\lambda^2 - 0{,}33105373\lambda - 0{,}003563899. \end{aligned} \tag{281}$$

Внимательное рассмотрение полиномов (280) и (281) сразу указывает на два разных источника ошибок при вычислении собственных значений методом последовательного исключения переменных — поскольку система (278) может иметь только четыре собственных значения, то среди семи корней полиномов (279) и (280) находятся три корня, не являющиеся собственными значениями системы (278).

Причина появления двух из них достаточно очевидна — поскольку при исключении переменных приходится производить домножение не только на числа, но и на двучлены вида $(a_i - \lambda)$, то используемые преобразования не являются полностью эквивалентными и вводят лишние два корня в полином (279). Эти два корня — как показывает сравнение полиномов (280) и (281) — мало зависят от погрешностей округления. В отличие от них, третий лишний корень полинома (279) целиком зависит от погрешностей округления. С увеличением точности вычислений этот корень меняет свою величину, но не исчезает.

Исследованный источник появления лишних, фальшивых решений для задачи о вычислении собственных значений особой опасности не представляет: хорошо известно, что все полученные собственные значения нужно проверять подстановкой в исходную систему уравнений — в нашем случае в систему (278) — и после подстановки фальшивые собственные значения будут отсеяны — в том числе и те, которые появились из-за изменения корректности при преобразованиях.

Рассмотренный пример показывает, что для задачи о вычислении собственных значений использование преобразований, эквивалентных в классическом смысле, но не в расширенном, не является опасным источником ошибок и не требует дополнительных программ для выявления ошибочных решений.

Однако в дальнейшем почти наверное будут обнаружены другие задачи, при решении которых используются цепочки преобразований с гораздо более сложно обнаруживаемыми ошибками. В этом можно быть уверенным потому, что исследование третьего класса задач математики, физики и техники еще только начинается, и на каждом новом шагу исследования обнаруживаются все новые и новые интересные результаты.

4. Задачи линейного программирования и решения интегральных уравнений

Новые интересные результаты недавно обнаружились, в частности, когда исследование используемых преобразований на эквивалентность в расширенном смысле авторы публикаций [46] и [47] стали проводить в задачах линейного программирования и при решении интегральных уравнений. Обнаружилось, что и в этих задачах использование популярных пакетов прикладных программ, не учитывающих возможное изменение корректности решаемых задач в ходе эквивалентных преобразований, используемых при их решении, может приводить к серьезным ошибкам. Для предотвращения ошибок, для восстановления надежности и достоверности компьютерных вычислений достаточно пополнить популярные пакеты небольшими дополнительными программами. Лучше всего это сделают, разумеется, авторы публикаций [46] и [47], являющиеся большими специалистами в этих областях.

Глава 20

Объяснение трудностей и парадоксов

В этой главе мы рассмотрим более подробно те сложности и трудности, которые стали причиной столь позднего открытия и преобразований, эквивалентных в классическом смысле, но не в расширенном, и третьего класса задач математики, физики и техники — промежуточного между ранее известными классами корректных и некорректных задач.

Эти же трудности сегодня мешают широкому применению недавно открытых новых свойств эквивалентных преобразований для повышения достоверности и надежности инженерных расчетов и любых компьютерных вычислений. Несмотря на то, что первые публикации об эквивалентных преобразованиях, изменяющих такое важное свойство преобразуемой системы, как сохранение устойчивости при вариациях параметров, относятся еще к 1987—1991 годам ([1] и [4]), до настоящего времени дополнительные проверки на эквивалентность в расширенном смысле все еще применяются редко. А ведь только дополнительные проверки, дополнительные расчеты, основанные на рекомендациях, изложенных в этой книге и предшествующих ей публикациях, смогут обеспечить надежность и достоверность компьютерных расчетов, смогут предотвратить те аварии и катастрофы, причиной которых являлась неполнота традиционных методов инженерных расчетов и компьютерных вычислений.

Применению новых, усовершенствованных методов расчета прежде всего препятствовало недоверие. Очень многим было трудно признать, что в таких сравнительно элементарных разделах математики, как эквивалентные преобразования, изучаемые еще в средней школе, возможно открытие новых явлений, ранее никем не замечаемых. Было трудно признать, что некоторые традиционные, привычные представления на самом деле не верны. Все привыкли считать математику строгой наукой, основные положения которой (формулируемые обычно в виде теорем) строго доказаны, и поэтому почти всегда непреложны. Случаи, когда доказательство какой-либо известной теоремы оказывается неверным, в истории математики бывали (интересные примеры приведены в [31], стр. 107, 146, 149, 170), но это очень редкие, исключительные явления, и поэтому любые известия об опровержении давно известной теоремы встречаются со вполне законным и обоснованным недоверием. Это так. Но при внимательном изучении математика оказывается совсем не такой строгой наукой, как это представляется подавляющему большинству. Наряду с доказанными теоремами в ней — как это ни странно — до сих пор существуют и предрассудки, причем предрассудки далеко не безобидные.

Материал, изложенный в этой книге — как будет далее подробно показано — не опровергает каких-либо ранее доказанных теорем. Он опровергает лишь не основанные на доказательствах распространенные предрассудки, порождающие потом ошибки в расчетах. От этих предрассудков — о которых далее будет рассказано — необходимо избавляться как можно скорее.

1. Предрассудки в математике

Одним из наиболее интересных предрассудков является почти всеобщее убеждение в существовании доказанной теоремы о непрерывной зависимости решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений от коэффициентов и параметров. Эта теорема — как уже ранее говорилось — очень важна, на ней (а точнее — на уверенности в ее справедливости) основана вся практика компьютерных вычислений. И, тем не менее, доказательства этой очень важной теоремы не существует!

При внимательном изучении наиболее полных и подробных руководств по теории дифференциальных уравнений можно обнаружить, что важнейший вопрос о непрерывной зависимости решений от параметров в них, естественно, рассмотрен (в курсе [58] он рассмотрен на стр. 298—307, в [59] — на стр. 259—267, в [60] — на стр. 186—203, в [61] — на стр. 313—316), но доказаны в этих курсах совсем другие теоремы. Доказано, что для систем, состоящих из n уравнений первого порядка:

$$\begin{aligned} &\frac{dx_1}{dt} = f_1(x_1;...x_n;t;\lambda); \\ &.............................. \\ &\frac{dx_n}{at_1} f_n(x_1;...x_n;t;\lambda), \end{aligned} \qquad (282)$$

где λ — параметр (т. е. для "систем, записанных в нормальной форме"), и для одного дифференциального уравнения произвольного порядка (при выполнении условий Липшица для правых частей) решения системы (282) и одного дифференциального уравнения n-го порядка, действительно, зависят от параметров непрерывно. Это так. Но для систем, состоящих из нескольких уравнений различных порядков, нет доказательств теоремы о том, что решения этих систем обязательно зависят от параметров непрерывно.

Вместо доказательства существует лишь всеобщая уверенность в справедливости такой теоремы. По сути дела такая уверенность является просто предрассудком. А основывается этот предрассудок на другой (и тоже ложной) уверенности в том, что "эквивалентные преобразования ничего не меняют". "Поскольку почти любую систему, состоящую из дифференциальных уравнений различных порядков, можно с помощью эквивалентных преобразований привести к нормальной форме, т. е. к системе вида (282), а для таких систем теорема о непрерывной зависимости решений от параметров строго доказана, то она должна быть справедлива и для исходной системы, поскольку эквивалентные преобразования ничего не меняют" — вот та цепочка рассуждений, которая — как это показали беседы со многими квалифицированными математиками — лежит в основе убежденности в справедливости теоремы о непрерывной зависимости решений от параметров для всех систем.

Таким образом, и в области дифференциальных уравнений, и в гораздо более широкой области эквивалентных преобразований математических моделей, применяемых в самых различных разделах прикладной математики, обнаружились два ложных убеждения, два предрассудка, которые до настоящего времени являются источником ошибок в компьютерных вычислениях.

Настоящей причиной того, что эти предрассудки оказались столь живучи и дожили до наших дней, является только сравнительная редкость систем уравнений, не имеющих непрерывной зависимости решений от параметров, и относительно редкая встречаемость преобразований, эквивалентных в классическом смысле, но не в расширенном.

Большинство тех систем уравнений, с которыми встречается на практике инженер или пользователь компьютера, обладают свойством непрерывной зависимости решений от параметров. Особые системы, не обладающие свойством непрерывной зависимости решений от коэффициентов и параметров, встречаются сравнительно редко. Большинство эквивалентных преобразований, используемых на практике, эквивалентны и в классическом смысле, и в расширенном. Исключения редки. Поэтому ошибки, возникающие у вычислителей при встречах с особыми системами последнего времени, были редки и не привлекали поэтому пристального внимания исследователей.

Однако в наше время, когда количество вычислительных машин и их пользователей возросло неимоверно, уже нельзя мириться с ошибками, возникающими при неожиданной встрече с особыми системами. Нельзя потому, что каждая ошибка в расчете может стать причиной аварий и катастроф — об этом уже говорилось в *главе 6*.

А сомневающимся нужно напомнить, что материал, приведенный в этой книге, не опровергает каких-либо ранее доказанных теорем. Он лишь высвечивает то, что в математике до сегодняшних дней — как это ни странно — сохранились предрассудки, от которых надо избавляться.

> В книге опровергаются не доказанные теоремы, а предрассудки — это нужно особенно подчеркнуть.

Это касается не только "теоремы" о якобы непрерывной зависимости решений любых систем дифференциальных уравнений от коэффициентов и параметров.

Аналогично обстоит дело и с часто используемой рекомендацией по оценке наличия запасов устойчивости у систем управления. Обычно оценки запасов устойчивости основываются на следующей цепочке рассуждений:

1. Существует доказанная и безусловно верная теорема о непрерывной зависимости положения корней полинома на комплексной плоскости от его коэффициентов, поэтому при малых изменениях коэффициентов полинома положения его корней на комплексной плоскости изменятся мало.
2. Из этой теоремы делается вывод: если все корни характеристического полинома системы управления имеют отрицательные вещественные части и лежат в левой полуплоскости комплексного переменного далеко от мнимой оси, то система управления устойчива и обладает запасом устойчивости, поскольку малые изменения коэффициентов характеристического полинома не могут перевести его корни, лежащие глубоко в левой полуплоскости комплексного переменного, в правую полуплоскость и сделать систему неустойчивой.

Эта встречающаяся во многих учебниках популярная рекомендация для оценки запасов устойчивости систем управления и других объектов никогда строго не доказывалась и легко опровергается очень простым контрпримером — пусть математической моделью системы управления является система двух дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned}(D + 1)x_1 + (D + 2)x_2 &= 0;\\ (D + 2)x_1 + (D + 5)x_2 &= 0.\end{aligned} \tag{283}$$

Характеристический полином этой системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \lambda+1 & \lambda+2 \\ \lambda+2 & \lambda+5 \end{vmatrix} = \lambda^2 + 6\lambda + 5 - (\lambda^2 + 4\lambda + 4) = 2\lambda + 1 \tag{284}$$

имеет один корень $\lambda_1 = -0{,}5$, не лежащий вблизи мнимой оси.

Однако если хотя бы один из коэффициентов системы (283) изменится, и она примет вид:

$$\begin{aligned}(D + 1)x_1 + [(1 + \varepsilon)D + 2]x_2 &= 0;\\ (D + 2)x_1 + (D + 5)x_2 &= 0,\end{aligned} \tag{285}$$

то характеристический полином системы (285):

$$\Delta = \begin{vmatrix} \lambda+1 & (1+\varepsilon)\lambda+2 \\ \lambda+2 & \lambda+5 \end{vmatrix} = -\varepsilon\lambda^2 + (2 - 2\varepsilon)\lambda + 1$$

даже при сколь угодно малых по абсолютной величине положительных ε будет иметь большой положительный корень, и поэтому система (285) будет неустойчивой.

Этот простой пример сразу показывает, что рассмотренная популярная рекомендация для оценки наличия запасов устойчивости у систем управления по расположению корней их характеристических полиномов на комплексной плоскости никогда по-настоящему не доказывалась. Она опиралась лишь на расплывчатые рассуждения, не учитывающие того, что в реальных системах управления коэффициенты характеристического полинома могут оказаться разностью близких или даже равных друг другу коэффициентов исходной системы, при малых вариациях которых и расположение корней характеристического полинома на комплексной плоскости, и даже число корней может стать совсем другим. Если хотя бы один из коэффициентов характеристического полинома оказался разностью двух равных чисел и "обнулился", то задача проверки устойчивости по характеристическому полиному некорректна. Даже сколь угодно малое отклонение действительной величины коэффициентов системы от расчетных значений может привести к тому, что система с хорошими корнями характеристического полинома станет неустойчивой. Если хотя бы один из коэффициентов характеристического полинома оказался малой разностью близких по величине коэффициентов исходной системы, то задача проверки устойчивости этой системы плохо обусловлена. В этом случае конечные малые вариации коэффициентов исходной системы могут изменить ее устойчивость. Расчеты устойчивости такой системы не надежны.

Поэтому рассмотренные в *главе 3* примеры, показывающие неверность популярного правила оценки запасов устойчивости систем управления по расположению корней из характеристических полиномов на комплексной плоскости, не опровергают какой-либо доказанной ранее теоремы, а лишь показывают ошибочность рекомендаций, основанных не на доказательствах, а на расплывчатых рассуждениях.

Немного по-иному обстоит дело с проверкой устойчивости линейных и нелинейных систем, основанной на построении функции Ляпунова. Построение этой функции входит составной частью в знаменитый "второй метод Ляпунова", называемый еще "методом функций Ляпунова", который часто применяется для расчета устойчивости нелинейных систем.

В *главе 9* было показано, что существование у исследуемой системы функции Ляпунова свидетельствует об устойчивости системы, но совсем не гарантирует от потери устойчивости при сколь угодно малых, неизбежных на практике, отклонениях действительных параметров системы от расчетных значений. Поэтому знаменитый "второй метод Ляпунова" и построение функции Ляпунова не могут быть надежными методами проверки устойчивости без дополнительных расчетов, без проверки преобразований, использованных для приведения исходной системы к нормальной форме, на эквивалентность в расширенном смысле.

Однако все это ни в коей мере не опровергает теорем Ляпунова и их доказательств, изложенных, например, в [6] и [9].

Великий русский математик Александр Михайлович Ляпунов (1856—1918) занимался устойчивостью как таковой. Сохранение устойчивости при отклонениях параметров системы от расчетных значений им не рассматривалось. Время для такого рассмотрения в годы жизни Ляпунова еще не пришло.

Это время пришло много позже. Так, например, в работе [62], вышедшей в свет ровно через сто лет после публикации основного труда А. М. Ляпунова ("Общая задача об устойчивости движения", Харьков, 1892) уже подробно и основательно исследовано сохранение устойчивости линейных систем при вариациях их коэффициентов (в т. ч. и при вариациях, изменяющихся с течением времени). Но все эти важные исследования в работе [62] проводятся только для систем в нормальной форме, для систем, состоящих из n уравнений первого порядка. О том, что для систем, состоящих из уравнений различных порядков, условия сохранения устойчивости при вариациях параметров могут быть совсем другими, чем для систем в нормальной форме, и что эквивалентные (в классическом смысле) преобразования систем уравнений к нормальной форме могут многое изменить — обо всем этом даже в 1992 году (как показывает публикация [62]) еще не догадывались.

2. Сложности в недавно открытых новых свойствах эквивалентных преобразований

Еще одной причиной позднего открытия эквивалентных преобразований, изменяющих корректность, и нового, третьего класса задач, промежуточного между ранее известными классами корректных и некорректных задач, была сложность и запутанность тех закономерностей, которым подчинялись эти недавно открытые объекты и явления.

Вернемся еще раз к материалу, изложенному в *главе 13*. Там было показано, что для одних и тех же объектов управления различные методы исключения не измеряемых непосредственно регулируемых переменных могут приводить к различным результатам в отношении корректности задачи проверки устойчивости. В то же время существуют системы управления, для которых различные методы исключения переменных приводят к одним и тем же результатам не только в отношении переходных процессов (что сомнений, естественно, не вызывало), но и в отношении корректности задачи проверки устойчивости. В частности, в *главе 13* было показано, что для объектов управления, описываемых системой линейных дифференциальных уравнений третьего порядка с постоянными коэффициентами — типа системы (194) с регулятором вида (195) — для общего случая, когда $a_{31} \neq 0$ и $a_{44} \neq 0$ при одном методе исключения неизмеряемых переменных (методе последовательного исключения путем умножений и сложений) параметрическая устойчивость сохраняется, а при другом методе (методе векторно-матричных преобразований) параметрическая устойчивость не сохраняется. В то же время для тех объектов управления, в которых выполняется равенство $a_{31}a_{44} = 0$, оба метода исключения переменных приводят к одному и тому же результату.

Разумеется, эти обстоятельства сильно затрудняли правильное понимание сложных явлений изменения корректности при эквивалентных преобразованиях и отодвинули это понимание на последнее десятилетие XX века. В более ранних исследованиях не раз получалось так, что один исследователь производил исключение переменных одним методом и получал вывод о некорректности преобразованной системы, а другой исследователь исключал те же переменные другим методом и приходил ко вполне корректной задаче проверки устойчивости. Все сразу запутывалось. Причина, из-за которой получались такие сложные и противоречивые результаты, приводившие к бесплодным спорам между исследователями, очень долго не поддавалась пониманию. Только введение понятия о триадах, описанных в *главе 16*, позволило прояснить ситуацию и достичь понимания этих сложных явлений.

Свойства преобразований, эквивалентных сразу и в классическом смысле, и в расширенном, точно так же, как и свойства преобразований, эквивалентных в классическом смысле, но не в расширенном, действительно, оказались очень сложными — во много раз сложнее, чем свойства преобразований, эквивалентных в классическом смысле (и только в классическом!) — тех преобразований, которые изучаются еще в средней школе.

Точно так же достаточно сложны и свойства третьего класса математических задач — промежуточного между единственными, ранее известными, двумя классами — классом корректных и классом некорректных задач. Фактически любую задачу математики, физики, техники (а также биологии, медицины, экономики, в которых в последние десятилетия стали интенсивно применяться математические методы) можно достаточно обоснованно отнести либо к классу корректных, либо к классу некорректных, или к классу промежуточных задач, только рассмотрев их в составе триад, о которых было рассказано в *главе 16*.

Без рассмотрения триад не обойтись, поскольку одна и та же задача при одном методе решения сохраняет свою корректность, а при другом методе решения ее корректность в ходе решения может измениться. Все это достаточно сложно, и поэтому было открыто и исследовано только недавно.

3. Необходимость учета физических соображений при анализе преобразований математических моделей

Еще одной трудностью на пути понимания теории эквивалентных преобразований математических моделей технических объектов и природных процессов является необходимость использования при их изучении физических и технических знаний. Хотя теория эквивалентных преобразований математических моделей относится, безусловно, к математике (точнее — к прикладной математике), но ее правильное понимание требует одновременно и математических, и технических знаний.

Если ориентироваться только на чисто математический подход, то правильное решение поставленной проблемы очень трудно получить.

Характерным примером является вопрос о правильном анализе устойчивости после исключения неизмеряемых переменных x_3 и x_4 из рассмотренных в *главе 11* уравнений (96) —(98). Эти уравнения описывают переходные процессы в конкретной системе управления частотой вращения электропривода, причем уравнения (96) и (97) описывают объект управления (электродвигатель), а уравнение (98) — это уравнение регулятора, поддерживающего постоянство частоты вращения электродвигателя. Уравнения (96) —(98) позволяют исследовать в общем виде, в аналитической форме, а не просто на числовых примерах, влияние такого важнейшего параметра электропривода, как его механическая постоянная времени, и на устойчивость системы управления, и на переходные процессы в ней. Напомним, что в уравнениях (96) и (97) за единицу времени взято номинальное значение механической постоянной времени, поэтому в этих уравнениях в номинальном режиме будет $m = 1$, но можно — и теперь уже аналитически — исследовать на основе этих уравнений влияние отклонений параметра m от номинального значения (т. е. от $m = 1$) на устойчивость замкнутой системы управления. Если переменные x_1, x_2, x_3, x_4 измеримы и доступны для непосредственного использования в регуляторе, то характеристический полином системы (96) —(98) равен определителю:

$$\Delta = \begin{vmatrix} m\lambda+2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \lambda+2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = m\lambda^3 + (3+2m)\lambda^2 + (6+m)\lambda + 3 = \tag{286}$$

$$= (m\lambda+3)(\lambda+1)^2.$$

Это же значение характеристического полинома было вычислено еще в первом издании настоящей книги, вышедшем в 1999 году (формула (99)), и ни у кого сомнений не вызвало. Полином (99) из первого издания, ни у кого не вызывавший сомнений, показывал, что при измеримости переменных x_1, x_2, x_3, x_4 замкнутая система устойчива и сохраняет устойчивость для всех значений $0 < m < \infty$, т. е. не только при малых, но и при больших отклонениях параметра от номинального значения.

Однако переменные x_3 и x_4 чаще всего не измеримы. Их надо исключать с помощью эквивалентных преобразований, после чего можно исследовать влияние отклонений параметра m от номинального значения $m = 1$ для математической модели электропривода, приведенной к переменным x_1 и x_2.

Если это исключение проводить формально, по правилам алгебры, то мы придем к системе уравнений:

$$[mD^3 + (2 + 2m)D^2 + (4 + m)D + 2]x_1 = (D + 1)^2 x_2; \tag{287}$$

$$[mD^2 + (2 + 2m)D + 5]x_1 = (D + 1)x_2, \tag{288}$$

характеристический полином, которой равен определителю:

$$\Delta = \begin{vmatrix} m\lambda^3 + (2+2m)\lambda^2 + (4+m)\lambda + 2 & -(\lambda+1)^2 \\ m\lambda^2 + (2+2m)\lambda + 5 & -(\lambda+1) \end{vmatrix} = (m\lambda+3)(\lambda+1)^2 \tag{289}$$

и совпадает с характеристическим полиномом (286).

Отсюда, казалось бы, следует вывод, что и после исключения переменных x_3 и x_4 путем эквивалентных (в классическом смысле) преобразований система управления сохранит неизменными и переходные процессы, и свойство сохранения устойчивости при отклонениях (и даже при больших отклонениях) параметра m от номинального значения $m = 1$. Однако этот вывод будет совершенно ошибочным, в чем легко убедиться непосредственным экспериментом над реальным электроприводом, математической моделью которого является система уравнений (287)—(289). Реальный электропривод будет терять устойчивость, если действительное значение механической постоянной времени m окажется даже на очень малую величину больше его расчетного значения $m = 1$. Это легко проверить, и поэтому вывод о сохранении устойчивости при отклонениях параметра m от номинального значения $m = 1$ будет ошибочным.

Ошибка заключается в том, что исключение переменных x_3 и x_4 из уравнений (96)—(98) по правилам алгебры не учитывает того, что объект управления (электродвигатель), математической моделью которого служат уравнения (96)—(97), а после исключения переменных x_3 и x_4 — уравнение (287), и регулятор, математической моделью которого служит уравнение (98), — это отдельные устройства, и поэтому вариации их параметров могут быть независимы друг от друга. В частности, вариации параметров регулятора могут совсем не зависеть от изменений параметра m. Для правильной оценки влияния изменений параметра m на устойчивость замкнутой системы можно рассмотреть, например, вполне возможный простейший случай: параметры регулятора остались неизменными и равными их значениям в номинальном режиме, когда было $m = 1$, а в электродвигателе механическая постоянная времени m немного изменилась. В этом случае математической моделью регулятора после исключения переменных x_3 и x_4 будет уравнение (288) при $m = 1$, т. е. уравнение:

$$(D_2 + 4D + 5)x_1 = (D + 1)x_2. \tag{290}$$

Если уже для этого простейшего, но вполне возможного сочетания вариаций параметров объекта управления и регулятора замкнутая система при $m \neq 1$ оказалась неустойчивой, то других, более сложных сочетаний вариаций параметров объекта управления и регулятора можно уже не рассматривать, поскольку система, теряющая устойчивость хотя бы при одном возможном сочетании вариаций своих параметров, не может быть признана параметрически устойчивой.

Для правильного суждения об устойчивости замкнутой системы управления с исключенными переменными x_3 и x_4 при вариациях параметра m необходимо в этом случае вычислить характеристический полином системы уравнений, состоящей из уравнения (287) и уравнения (290). Характеристический полином будет равен определителю:

$$\begin{aligned}\Delta &= \begin{vmatrix} m\lambda^3 + (2+2m)\lambda^2 + (4+m)\lambda + 2 & -(\lambda+1)^2 \\ \lambda^2 + 4\lambda + 5 & -(\lambda+1) \end{vmatrix} = \\ &= (1-m)\lambda^4 + (4-3m)\lambda^3 + (8-3m)\lambda^2 + (8-m)\lambda + 3 = \\ &= \left[(1-m)\lambda^2 + (2-m)\lambda + 3\right](\lambda+1)^2.\end{aligned} \tag{291}$$

Этот полином был получен еще в первом издании книги, вышедшем в 1999 году (формула (101)), и из этой формулы был сделан правильный вывод — замкнутая система управления частотой вращения электропривода, использующая только переменные x_1 и x_2, может терять устойчивость при сколь угодно малых, неизбежных на практике, вариациях параметров. Исключение переменных x_3 и x_4 из уравнений (96)—(98) при правильном учете реальной связи между вариациями параметров в технической системе является преобразованием, эквивалентным в классическом смысле, но не в расширенном.

Этот вывод, опубликованный в 1999 году в первом издании данной книги, вызвал возражения со стороны ряда математиков. Они утверждали, что исследование свойств эквивалентных преобразований является математическим вопросом, и ответ на него должен быть дан только математическими средствами, без апелляции к реальным свойствам технических объектов или физических процессов. Учитывая эти возражения, мы в данной главе еще раз и более подробно вернулись к вопросу, ранее рассмотренному в *главе 11*. Позиция тех, кто считает, что в исследовании свойств эквивалентных преобразований следует пользоваться только математическими аргументами, заслуживает полного уважения. Такой позиции придерживался еще Больцано (Bolzano, 1781—1848), впервые отказавшийся использовать в вопросах анализа геометрические соображения (см. [31], стр. 106—107). В вопросах чистой математики позиция Больцано была прогрессивной и получила поддержку многих последующих математиков. Однако безоговорочное следование этой позиции, особенно в прикладных вопросах, вряд ли является правильной линией поведения (см., в частности, высказывания академика В. И. Арнольда по этому вопросу в [31], стр. 326—328). Если мы хотим, чтобы наши расчеты и вычисления правильно предсказывали поведение реальных сооружений, систем и устройств, которые будут построены по нашим расчетам, то следует обязательно учитывать физическую сущность рассчитываемых процессов и явлений. Иначе аварий и катастроф не избежать. К сожалению, людей, соединяющих в себе знание и математики, и техники, всегда было немного, и это обстоятельство, возможно, является еще одной существенной причиной столь позднего открытия преобразований, эквивалентных в классическом смысле, но не в расширенном, и позднего открытия третьего класса задач математики, физики и техники, меняющих корректность в ходе эквивалентных преобразований, использованных при их решении. В то же время учет физических соображений не отменяет требований математической строгости исследования, которая должна основываться прежде всего на точности и непротиворечивости используемых определений. Здесь тоже далеко не все в порядке — в противовес распространенному убеждению в том, что математика является полностью точной и строгой наукой. Точность определений часто тоже оставляет желать лучшего.

4. Необходимость уточнения определений

Многие трудности в понимании новых результатов математических исследований возникают из-за неточности традиционных определений. Исследователь, излагающий новые, недавно полученные результаты, оказывается, образно говоря, "между молотом и наковальней". С одной стороны, он должен пользоваться общепринятыми определениями — иначе его не будут понимать, и обсуждение новых научных результатов превратится в бесконечный и бесплодный спор об определениях; с другой стороны, неточности в общепринятых определениях во многом препятствуют пониманию нового. Наиболее разумно занять осторожную позицию — т. е. использовать общепринятые определения, не отказываясь в то же время от уточнения их. Но это уточнение лучше всего располагать (что мы и делаем) в конце текста, когда основные результаты уже изложены и надо лишь лучше понять и усвоить их. Произведем теперь необходимые уточнения.

Начнем с центрального и наиболее часто встречающегося в тексте книги понятия эквивалентного (называемого также равносильным) преобразования. Традиционные определения ([63], том 4, стр. 800, [64], стр. 511) считают преобразование эквивалентным (равносильным), если все решения исходной и преобразованной математической модели совпадают. Однако в практике вычислений и преобразований приходится встречаться с явлениями, немного выходящими за рамки этого определения.

Рассмотрим, например, известное μ-преобразование и его частный пример — преобразование системы (91) в систему (93). Решение $x_1(t)$ при этом преобразовании не изменилось, решения x_2 и x_3 исчезли, появилось решение $\mu(t)$. Каким считать это преобразование — эквивалентным или не эквивалентным? Заметим, кстати, что преобразование системы (91) в систему (93) выполнено с помощью всего лишь простой замены переменной: $x_1 - 2x_3 = \mu$. Такая замена всегда считалась эквивалентным преобразованием. Поэтому преобразование системы (91) в систему (93) является по сути дела эквивалентным преобразованием, но в рамки общепринятого определения оно не укладывается. Поэтому полезно вести уточнение в общеизвестное определение эквивалентных преобразований:

> Будем называть *эквивалентными по отношению к интересующим нас решениям* те преобразования, которые сохраняют неизменными именно эти, интересующие нас решения.

При таком уточнении определения преобразование системы (91) в систему (93) и многочисленные подобные преобразования, которые давно и успешно применяются в компьютерных вычислениях, можно уже на полном законном основании считать эквивалентными преобразованиями. Конкретно преобразование системы (91) в систему (93) является эквивалентным по отношению к интересующему нас решению $x_1(t)$. Преобразования, удовлетворяющие уточненному определению, могут быть эквивалентными в расширенном смысле, но могут также быть эквивалентными в классическом смысле, но не в расширенном. Примером такого преобразования как раз и является преобразование системы (91) в систему (93).

Для системы (93) задача проверки устойчивости решения $x_1(t)$ корректна, а для исходной системы (91) та же задача не корректна.

Рассмотрим теперь систему из n линейных однородных уравнений с параметром λ — т. е. систему (115). Система (115) имеет, как известно, n собственных значений параметра λ — т. е. значений, при которых система имеет ненулевые решения. Систему (115) путем последовательного исключения переменных, начиная с x_1 и кончая x_{n-1}, с помощью умножений и сложений можно свести к одному уравнению для последнего переменного x_n:

$$M(\lambda)x_n = 0, \tag{292}$$

где $M(\lambda)$ — полином, среди корней которого находятся собственные значения параметра λ. Анализируя приведенный в *главе 13* процесс последовательного исключения переменных на основе матриц степеней, легко убедиться, что при $n > 3$ степень полинома $M(\lambda)$ больше n. Поэтому среди корней полинома $M(\lambda)$ для всех $n > 3$ содержатся корни, не являющиеся собственными значениями системы (115). Отсюда следует, что преобразование системы (115) в уравнение (292) в задаче поиска собственных значений не может считаться эквивалентным преобразованием в смысле общепринятого определения, и использование уравнения (292) для поиска собственных значений, вообще говоря, формально незаконно.

Однако на практике вычисление собственных значений через преобразование системы линейных однородных уравнений с параметром к виду (292) неоднократно и успешно применяется. Дело в том, что такое преобразование не изменяет величину истинных собственных значений системы вида (115). Просто одна часть корней полинома $M(\lambda)$ является истинными собственными значениями, а другая часть — не является. Но все возможные "кандидаты" в собственные значения потом все равно проверяются подстановкой в исходную систему (115). Если после подстановки какого-либо корня полинома $M(\lambda)$ в систему (115) она приобрела ненулевые решения, то это означает, что данный корень является собственным значением (как это было показано ранее на примере подстановки корней $\lambda_1 = 0$ и $\lambda_2 = 4$ в систему уравнений (104)). После подстановок система (104) превратилась в систему (107) при $\lambda = 0$ и в систему (108) при $\lambda = 4$; обе системы имеют ненулевые решения x_1 и x_2. Если после подстановки в систему (115) какого-либо корня λ_i полинома $M(\lambda)$ система не приобретает ненулевых решений, то данный корень не является собственным значением и отбрасывается.

Поскольку проверка истинности решений подстановкой в исходные уравнения является общим правилом прикладной математики и должна всегда применяться при расчетах, то преобразования, вводящие лишние решения, но не изменяющие истинных решений, широко используются в практике вычислений. Предлагалось для таких преобразований ввести особое название и назвать преобразованную систему "следствием" исходной. Этот термин использовался, например, в известном пробном учебнике для средней школы [65], но широкого распространения не получил. В авторитетных справочных изданиях [63, 64] термина "следствие" нет.

Мы предлагаем (и используем в тексте книги) ввести для подобных преобразований название *не полностью эквивалентные преобразования*, определив их следующим образом:

> *Не полностью эквивалентные преобразования* — это те, которые становятся эквивалентными (в классическом смысле) после исключения в преобразованной системе лишних решений, не являющихся решениями исходной системы.

Не полностью эквивалентные преобразования являются таким же законным орудием математического исследования, как и обычные эквивалентные. Они точно так же, как и обычные эквивалентные преобразования могут быть эквивалентными в классическом смысле, но не в расширенном, и поэтому могут изменять корректность решаемой задачи.

Отметим, что недостаток понимания полной равноправности обычных эквивалентных и не полностью эквивалентных преобразований явился еще одной причиной того, что открытие преобразований, эквивалентных в классическом смысле, но не в расширенном, совершилось так поздно, и даже будучи открытым, вызвало столь длительные споры. Дело в том, что первоначально на новые необычные свойства преобразований натолкнулись в задачах аналитического конструирования, где управление формировалось как линейная функция всех переменных состояния:

$$u = \sum_{i=1}^{n} k_i x_i .$$

Но в этом случае, как легко проверить на основе материала, изложенного в *главе 13*, для всех объектов управления выше третьего порядка при исключении $n - 2$ переменных в характеристическом полиноме замкнутой системы появлялись лишние корни, и исключение переменных становилось не полностью эквивалентным преобразованием. Поскольку равноправия подобных преобразований с обычными эквивалентными многие математики не признавали, то изменение корректности, происходившее при исключении переменных, внимания исследователей не привлекало: "Раз использованное преобразование было не эквивалентным, то оно, естественно, могло все изменить, предмета для изучения и внимательного исследования тут нет". Единственный пример с объектом третьего порядка, когда полностью эквивалентное в классическом смысле преобразование изменило параметрическую устойчивость преобразованной системы, уже был в руках у исследователей еще в 1973 году [15], но он не был понят и не стал тогда поводом для открытия эквивалентных преобразований, изменяющих корректность решаемой задачи. А не был он понят потому, что объекты третьего порядка сочли тогда просто странным, особым, исключительным случаем, не имеющим аналогов в системах других порядков, а для всех объектов управления выше третьего порядка приходилось иметь дело уже с не полностью эквивалентными преобразованиями, не удовлетворяющими общепризнанному определению. На их "неэквивалентность" все и списывали.

На самом деле преобразования, эквивалентные в классическом смысле, и преобразования, не полностью эквивалентные и удовлетворяющие предложенному нами уточненному определению, во-первых, одинаково являются полноценными и законными орудиями математического исследования, а, во-вторых, одинаково могут изменять (хотя и не всегда) корректность решаемой задачи. Что же касается важнейшего вопроса: в каких случаях, для каких систем эти преобразования изменяют корректность решаемой задачи, и в каких случаях корректности не изменяют, то ответ на этот вопрос дает исследование "триад", рассмотренных в *главе 16*.

Еще одним примером того, как неточность в определениях затрудняла и затрудняет понимание тонких вопросов теории эквивалентных преобразований, является вопрос об эквивалентности или не эквивалентности такого преобразования, как почленное дифференцирование всех членов уравнения. Применялось это преобразование еще во времена Л. Эйлера (L. Euler, 1707—1783), о нем было подробно рассказано в *главе 1*, и, тем не менее, оно вызвало — как это ни странно — вопросы и недоумения у читателей первого издания этой книги, вышедшего в 1999 году.

Возражения относительно эквивалентности операции почленного дифференцирования применительно к рассмотренному в *главе 1* дифференциальному уравнению:

$$\dot{x} + x = 0 \tag{293}$$

заключались в следующем: уравнение (293) имеет общее решение:

$$x = c_1 e^{-t}, \tag{294}$$

а после почленного дифференцирования оно преобразуется в уравнение:

$$\ddot{x} + \dot{x} = 0, \tag{295}$$

имеющее общее решение:

$$x = c_1 e^{-t} + c_2, \tag{296}$$

которое не совпадает с (294).

Отсюда делался ошибочный вывод — поскольку решения (294) и (296) не тождественны, то почленное дифференцирование в этом случае не является эквивалентным (в классическом смысле) преобразованием.

Это недоразумение основано на недостаточной четкости сложившегося еще в XVIII веке и с тех пор традиционно используемого термина "общее решение" дифференциального уравнения. Фактически "общие решения" (294) и (296), как и общие решения других дифференциальных уравнений, включающие постоянные интегрирования c_1; $c_2 \ldots c_n$, следует называть более правильно: *семействами решений*. Семейство решений (294) зависит от одного параметра — постоянной интегрирования c_1, а семейство решений (296) зависит от двух параметров, от двух постоянных интегрирования c_1 и c_2. Начиная с О. Коши (Cauchy, 1789—1857), под решением дифференциального уравнения понимают конкретную функцию $x(t)$, определяемую как самим уравнением, так и начальными (или граничными) условиями. Решением уравнения (293), удовлетворяющим начальному условию $x(0) = 0$, является функция $x = 0$, входящая, естественно, в семейство (294). Из решения $x = 0$ следует, в частности, что:

$$\dot{x}(0) = 0. \tag{297}$$

Если уравнение (293) преобразовано путем почленного дифференцирования в уравнение (295), в уравнение второго порядка, то для того, чтобы его решение стало определенным, надо добавить к нему второе начальное условие — условие для $\dot{x}(0)$, но добавить, разумеется, не произвольно, а так, чтобы дополнительное начальное условие вытекало из решения уравнения (293). Из решения уравнения (293) вытекает для $\dot{x}(0)$ условие (297). Именно его следует считать вторым начальным условием для уравнения (295). Решением этого уравнения, удовлетворяющим двум начальным условиям $x(0) = 0$ и $\dot{x}(0) = 0$, является функция $x = 0$ — та же самая, что является решением исходного уравнения (293). В этом легко убедиться, определив постоянные c_1 и c_2 в семействе решений (296) из начальных условий $x = 0$, $\dot{x}(0) = 0$. Получим значения: $c_1 = c_2 = 0$, откуда следует $x(t) = 0$. Таким образом, при почленном дифференцировании изменяются семейства решений, но сами решения при правильном назначении дополнительных начальных условий остаются неизменными. Поэтому почленное дифференцирование — как и умножение на любой операторный полином $A(D) = a_n D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \ldots a_0$ — является преобразованием, эквивалентным в классическом смысле. Ранее, в *главе 2*, было показано, что оно далеко не всегда является преобразованием, эквивалентным в расширенном смысле.

Заметим еще, что не всем понятиям можно дать точное и завершенное определение. Так, в *главе 17* было введено важное и часто встречающееся в различных областях приложений понятие "плохо обусловленные задачи" — т. е. задачи, в которых малым, но конечным изменениям коэффициентов, параметров, начальных условий, граничных условий и т. п. соответствуют большие изменения решений. Это — не полное определение. Для придания ему полноты и определенности необходимо для каждой конкретной задачи оговаривать — какие именно изменения коэффициентов, параметров и т. п. считать "малыми" и какие именно изменения решения считать "большими". Однако и такие "не полные" определения достаточно широко используются в прикладной математике, в теории и в практике вычислений. Нужно просто всегда отличать не полные определения от полных и стремиться всегда опереться на полные и точные определения, что и было сделано в *главе 17*, где в основу было положено изучение некорректных задач, для которых имеется точное определение, и уже на этой твердой основе велось рассмотрение плохо обусловленных задач.

Дополнительные трудности вносит накапливающаяся с течением времени неоднозначность в понимании одних и тех же терминов различными исследователями. Так, например, термин "аналитическое конструирование", введенный А. М. Летовым в 1960 году, первоначально определялся им как метод аналитического (а не через частотные характеристики, как это делалось ранее) определения коэффициентов регуляторов вида $u = \sum_{i=1}^{n} k_i x_i$, доставляющих минимум квадратичному критерию качества и обеспечивающих хорошие переходные процессы для линейных систем управления с постоянными коэффициентами. Впоследствии, уже много лет спустя, некоторые исследователи стали понимать под "аналитическим конструированием" аналитические методы проектирования регуляторов, обеспечивающих наилучшее значение критерия качества — но уже не обязательно квадратичного — и не обязательно для линейных систем. Разумеется, это второе определение совершенно меняло смысл термина. В этой книге мы пользуемся первоначальным определением термина "аналитическое конструирование" — тем определением, которое предложил и использовал А. Летов. Недоразумения и недоумения, возникшие у некоторых читателей первого издания данной книги, вышедшего в 1999 году, были связаны с тем, что они пользовались другим определением термина "аналитическое конструирование", отличным от того, который использовался в книге.

Во избежание недоразумений нужно всегда тщательно следить за точным смыслом используемых определений.

От точности определений многое зависит, и нужно тщательно следить — что именно следует из того или иного введенного автором определения. Так, например, введя в *главе 10* определение "ε-окрестности" и определение вариаций коэффициентов системы уравнений через неравенства (73), мы, тем самым, сразу ограничили себя исследованием относительных изменений коэффициентов и параметров, а не абсолютных. Из неравенств (73) следует, что если коэффициент m_i равен нулю, то и его вариация εm_i тоже равна нулю, т. е. "нуль не варьируется". Таким образом, исключаются из рассмотрения и исследования те случаи (и соответствующие технические объекты), когда какой-либо коэффициент первоначально был равен нулю, а после своего изменения стал некоторым числом, пусть и малым, но не равным нулю. Такое ограничение в круге рассматриваемых объектов и задач необходимо, иначе предметом исследования стал бы совсем другой круг задач и другой круг объектов физики и техники с совсем другими закономерностями.

Отказ от рассмотрения "вариаций нуля" сразу выводит из рассмотрения так называемые "сингулярно-возмущенные" системы дифференциальных уравнений, т. е. системы уравнений или отдельные уравнения с малыми коэффициентами при старших производных. Только при допущении "вариаций нуля" дифференциальное уравнение:

$$a_1\dot{x} + a_o x = 0\,, \tag{298}$$

которое можно, разумеется, понимать как уравнение:

$$o\ddot{x} + a_1\dot{x} + a_o x = 0 \tag{299}$$

с коэффициентом при старшей производной, равным нулю, может после вариации нулевого коэффициента при $\ddot{x}$ превратиться в сингулярно-возмущенное уравнение:

$$\varepsilon\ddot{x} + a_1\dot{x} + a_o = 0 \tag{300}$$

с малым коэффициентом при старшей производной.

Определение вариаций через неравенства (73), введенное в *главе 10*, выводит подобные системы из рассмотрения. Изучение сингулярно-возмущенных систем является важной и интересной задачей, но находящейся за пределами круга задач, рассматриваемых в нашей книге. Об этом уже говорилось в *главе 11*, но будет полезным повторить это еще раз.

Дело в том, что некоторые из особых систем, рассмотренных в книге, после вариации ненулевых коэффициентов превращаются в системы, внешне, казалось бы, похожие на сингулярно-возмущенные (например, система (100)), что создает почву для недоразумений. На самом же деле в настоящей книге рассматриваются совсем другие явления, а сингулярно-возмущенные системы уравнений исключены из рассмотрения уже по самому определению вариаций коэффициентов и параметров, используемому в книге. За используемыми определениями надо следить и обращать на них самое серьезное внимание.

Точность и полнота определений очень важны — особенно при формулировке новых научных результатов.

Так, например, неточность в использованных определениях сыграла в 1973 году роковую роль при первой попытке анализа аварий, происходящих с системами управления, спроектированными на основе методики "аналитического конструирования регуляторов", предложенной А. М. Летовым в серии статей, опубликованных в журнале "Автоматика и телемеханика" в 1960 году и обобщенных потом в монографии [13]. К 1973 году подобные регуляторы уже широко применялись и было замечено, что когда в "аналитически сконструированных" системах часть выходных переменных была недоступна для непосредственного использования в канале обратной связи, и их исключали из математической модели, пользуясь эквивалентными преобразованиями, то системы управления, "воплощенные в металле" на основе преобразованной математической модели, часто теряли устойчивость при вариациях параметров и приводили к авариям. Такие системы в то время обычно называли "негрубыми", и в 1973 году П. В. Надеждин в статье [15] поднял вопрос о потере "грубости" при "элементарных" преобразованиях (эквивалентные преобразования П. В. Надеждин не очень удачно назвал "элементарными").

Он не заметил, что понятия "грубость", "грубые системы" были введены в 1937 году А. А. Андроновым, А. Л. Виттом и С. Э. Хайкиным и опубликованы в первом издании их классической монографии [30] на стр. 33, но определялись они по-другому. В монографии [30] "грубыми" назывались системы, описываемые дифференциальными уравнениями, и не меняющие существенно своего поведения при малых изменениях этих уравнений, но была сделана важная оговорка: "При условии, что эти малые изменения не меняют порядка дифференциального уравнения или системы уравнений". Эта небольшая оговорка очень существенна. Если ее пропустить, то вообще вряд ли можно будет найти хотя бы одну "грубую" систему, удовлетворяющую определению без оговорки. Действительно, при повышении порядка дифференциального уравнения или системы уравнений свойства их возможных решений, а, тем самым, и поведение системы изменяются непременно и весьма существенно. Потом эта важнейшая оговорка, как ни странно, очень многими была постепенно забыта. Забыл о ней и П. В. Надеждин, но ему напомнили о ней его оппоненты в дискуссии, возникшей после опубликования его статьи [15]. В этой статье П. В. Надеждин рассматривал объект управления третьего порядка — типа объекта (53) — замкнутый регулятором, который обеспечивал минимум квадратичному критерию качества и был рассчитан по методике, незадолго до того предложенной украинскими математиками В. Б. Лариным, К. И. Науменко, В. Н. Сунцевым. Эта методика была потом изложена более подробно в их книге [14].

Она являлась усовершенствованным вариантом методики "аналитического конструирования" А. М. Летова и приводила для объектов управления третьего порядка к регуляторам вида (54), использующим все три регулируемые переменные. При этом замкнутая система была устойчивой и сохраняла устойчивость при вариациях коэффициентов объекта управления или регулятора. П. В. Надеждин показал, что если переменные x_1 и x_2 недоступны для измерения и непосредственного использования в канале обратной связи (что весьма часто встречается на практике), и эти переменные исключают из математических моделей объекта управления и регулятора с помощью эквивалентных преобразований (неудачно, как уже было отмечено, названных П. В. Надеждиным "элементарными преобразованиями"), то происходят следующие странные явления:

- преобразованная система сохраняет устойчивость и имеет те же самые переходные процессы и то же значение критерия качества управления, что и исходная система, что лишний раз подчеркивает эквивалентность выполненных преобразований;
- преобразованная система теряет устойчивость при сколь угодно малых, неизбежных на практике, отклонениях параметров объекта управления или регулятора от их расчетных значений.

Преобразованную систему П. В. Надеждин считал "негрубой" и сделал в своей статье два вывода:

1. Алгоритм синтеза оптимальных регуляторов, обеспечивающих минимум квадратичного критерия качества управления, предложенный украинскими математиками В. Б. Лариным, К. И. Науменко, В. Н. Сунцевым,

неудачен, поскольку приводит к синтезу "негрубых" систем, непригодных для практического использования.

2. "Элементарные" (а фактически — эквивалентные) преобразования систем управления могут привести к потере "грубости" этих систем.

Недовольные первым выводом статьи П. В. Надеждина, украинские математики (В. Б. Ларин, К. И. Науменко, В. Н. Сунцев) без труда доказали, что автор статьи [15] не прав, поскольку преобразованная система при вариациях параметров изменяет порядок, и поэтому на самом деле не может быть отнесена к "негрубым" с учетом важной оговорки, сделанной в монографии [30] на стр. 33.

Да, формально П. В. Надеждин был не прав, а его оппоненты правы — в системах, рассматривавшихся ими, потери "грубости" при эквивалентных преобразованиях не происходило. Это так. Но формальная правота украинских математиков только подчеркивала их действительную неправоту. Ведь запас устойчивости системы управления после преобразования становился совсем другим, обращался в нуль, что и приводило к авариям. Для того чтобы окончательно предотвратить их, нужно было разобраться — что же именно может происходить с математическими моделями систем управления и другими математическими моделями при эквивалентных преобразованиях. Сейчас мы знаем, что при эквивалентных преобразованиях может происходить изменение корректности решаемой задачи (и в частности — задачи проверки устойчивости системы управления).

Этот важнейший вывод, сразу указывающий путь к предотвращению аварий, вполне мог быть сделан еще в 1973 году, и очень жаль, что неточность в использовании определений в статье [15] этому помешала. Но помешала не только эта причина. Не менее важной причиной была острая нелюбовь тогдашних руководящих кругов науки Советского Союза к публичным дискуссиям и особенно — к дискуссиям, связанным с аварийностью, с обсуждением причин аварий. Ведь если даже П. В. Надеждин ошибся, и настоящая причина происходивший аварий заключалась не в "потере грубости", а совсем в другом, то истинная причина аварий вполне могла быть выяснена в ходе дискуссии, которая все же началась после публикации статьи П. В. Надеждина [15], но была быстро закрыта. Тогдашнее руководство Советского Союза предпочитало не обсуждать и не анализировать причины аварий, а засекречивать их. Все данные об авариях были тогда включены в перечень сведений, содержащих государственную тайну, и могли быть опубликованы лишь по особому разрешению высшего руководства страны, которое давалось очень редко. Перечитайте технические журналы СССР за 1965—1985 годы. Вы почти не найдете там публикаций об авариях и, тем более, — анализа их причин, а ведь аварий было много — в том числе и происходящих по причине неполноты методов расчета. Даже после того, как использование "критерия Ю. Петрова" — неравенства (83) — позволило прекратить аварии в оптимальных системах, они продолжались в других областях, поскольку не исследованное до конца изменение корректности при эквивалентных преобразованиях происходило, естественно, не только при синтезе оптимальных систем управления, но и при расчете других технических объектов.

Отметим, что инженеры и исследователи США избавлялись от аварий при синтезе оптимальных систем управления другим путем — при проектировании оптимальной системы (и только при проектировании!) они вводили в математическую модель системы фиктивные "белые шумы", которые позволяли уменьшить чувствительность системы к будущим вариациям параметров и создавать тем самым вполне надежные и хорошо работающие системы управления (но это достигалось, что нелишне отметить, за счет более существенной жертвы в критерии качества систем управления, чем при использовании методики, разработанной в СССР и изложенной в монографии [17] во втором ее издании). Однако истинная причина неприятностей, иногда возникающих после эквивалентных преобразований математических моделей, не была раскрыта и в США, поэтому некоторую часть из тех очень многих аварий, произошедших в США, причины которых не были установлены, следует отнести за счет изменения корректности при эквивалентных преобразованиях, использованных при расчете и проектировании. А какая именно часть аварий имела причиной описанное в этой книге изменение корректности, является эта часть аварий очень маленькой или весьма существенной — для ответа на этот вопрос необходимы дополнительные исследования.

Что касается аварий, происходивших в СССР, то их причины замалчивались и скрывались особенно тщательно — в том числе и те, которые были связаны с применением для расчета систем управления теории аналитического конструирования оптимальных регуляторов (кратко — ТАКОР) и изменениями корректности, возникавшими при применении ТАКОР. После 1973 года только один раз, в 1987 году, Л. Н. Волгину в статье [66] удалось все же поднять наболевший вопрос о давно обнаружившихся недостатках ТАКОР и авариях, с нею связанных. Л. Н. Волгин в статье [66] писал прямо и откровенно: "Библиография работ, посвященных ТАКОР, насчитывает тысячи книг и статей. А между тем практические применения теории остаются скромными. Причины такого состояния более серьезны и основательны, чем предполагалось вначале. Дело в том, что теория аналитического конструирования в ее классическом виде приводит к неработоспособным регуляторам. При определенных условиях системы, синтезированные на основе этой теории, не обладают свойством грубости и теряют устойчивость при малых отклонениях параметров от расчетных значений". "Этот факт был установлен впервые еще в 1973 году в статье П. В. Надеждина [15] и в книге Ю. П. Петрова [16]", — продолжал Л. Н. Волгин и настоятельно предлагал обязательно обсудить пути совершенствования ТАКОР. Но и этот призыв не был услышан. Вместо дискуссии и обсуждения только через три года в том же журнале (Известия АН СССР, Техническая кибернетика) был помещен ответ В. Б. Ларина на статью [66], в котором категорически отвергались предложения Л. Н. Волгина, а главное — вслед за ответом В. Б. Ларина было помещено обширное "Заключение" [67] редакционной коллегии журнала, где, в частности, утверждалось: "Аналитическое конструирование оптимальных регуляторов — это высокоэффективный математический аппарат, получивший широкое практическое применение. Для линейно-квадратичных задач он составляет в значительной степени завершенную корректную теорию, не имеющую трудностей, о которых говорит Л. Н. Волгин". Разумеется, после такого "Заключения" авторитетной редколлегии ведущего журнала Академии наук СССР дискуссия, по-настоящему так и не начавшись, окончательно сошла на нет. Ну, а аварии? Аварии, разумеется, продолжались.

Употребление термина "свойство грубости" в статье [66], анализирующей свойство систем после преобразований, используемых в ТАКОР, которые на самом деле изменяют не "грубость", а параметрическую устойчивость, говорит о том, что важная оговорка — о неповышении порядка системы, внесенная А. А. Андроновым в 1937 году в определении понятий "грубость", "грубые системы", в 1987 году большинством исследователей была прочно забыта. Это, разумеется, не способствовало пониманию новых свойств эквивалентных преобразований, которые — вследствие всех только что перечисленных причин — были открыты так поздно. Более подробно история данного вопроса и дискуссий, возникавших вокруг него, освещены в работе [70].

Заметим еще, что в последние десятилетия не только в технической литературе на английском языке, но и в статьях и книгах, издающихся в России, вместо терминов "грубость", "грубые системы" все чаще используются английские термины "robust", "робастные системы". По своему смыслу и употреблению понятия "грубые системы" и "робастные системы" по сути дела тождественны. Однако в определении понятия "робастные системы" отсутствует важная оговорка о неповышении порядка системы дифференциальных уравнений, сделанная А. А. Андроновым в [30] на стр. 33. Отсутствие этой важной оговорки в определении "робастных систем" будет еще не раз причиной различных недоразумений.

К определениям используемых понятий следует подходить внимательно и вдумчиво.

Подчеркнем еще раз, что тематика нашей книги только поверхностно схожа с исследованием "грубых" или "не грубых", "робастных" или "не робастных" физических и технических систем и их математических моделей, но, на самом деле имеет с подобными исследованиями очень мало общего. Большинство преобразований, эквивалентных в классическом смысле, но не в расширенном, изменяет совсем не "грубость" системы, а корректность решаемой задачи. Это — разные вещи, схожие только внешне.

Существуют ли, все же, эквивалентные преобразования, изменяющие именно "грубость" системы? Да, существуют, хотя и редко. К таким преобразованиям можно отнести рассмотренное в *главе 11* преобразование системы (91) в систему (93). Система (91) устойчива по переменной x_1, однако свойство устойчивости решения $x_1(t)$ у системы (91) не является "грубым". Оно исчезает при сколь угодно малых изменениях некоторых коэффициентов системы (91), причем исчезает без повышения порядка системы дифференциальных уравнений (91) — в точном соответствии с определением понятий "грубости", "грубые системы". В то же время в системе (93) свойство устойчивости решения $x_1(t)$ является "грубым" и не исчезает не только при малых, но даже и при довольно больших изменениях любых коэффициентов системы (93).

Таким образом, изменение "грубости" при эквивалентных преобразованиях возможно. Однако значительно чаще изменения корректности и прочие неприятности, возникающие при эквивалентных преобразованиях, имеют другие причины, например, — изменение порядка преобразованной системы после вариаций ее коэффициентов.

Материал данной главы показывает, что позднее открытие новых свойств эквивалентных преобразований и позднее открытие третьего класса задач математики, физики и техники — промежуточного между ранее известными классами корректных и некорректных задач — не было случайностью, и было обусловлено целым рядом серьезных причин.

Столь же серьезные причины обусловили медленное распространение усовершенствованных методов расчета, которые используют недавно открытые новые закономерности эквивалентных преобразований и позволяют предотвратить аварии, причиной которых является неполнота традиционных расчетных методов.

Отметим прежде всего, что открытие возможности изменения корректности при эквивалентных преобразованиях не относится к числу открытий "приятных", облегчающих жизнь инженерам и исследователям, снижающих трудоемкость необходимых расчетов. Наоборот, новое открытие требует дополнительной работы, дополнительных расчетов. Выигрывают от нового открытия не инженеры и не лица, выполняющие расчеты. Выигрывают рядовые граждане, чья безопасность возрастает из-за уменьшения вероятности аварий, а вероятность аварий уменьшается потому, что новые дополнительные расчеты, проводимые по методике, изложенной в этой книге и других публикациях (наиболее подробно они изложены в недавно вышедшей книге [68]), позволяют восполнить обнаружившуюся неполноту традиционных методов.

Понятно, что большинство инженеров и вычислителей не торопятся взвалить на свои плечи дополнительную работу, дополнительные вычисления, да еще по новым методикам, которые надо осваивать. Только самые добросовестные делают это быстро и добровольно. Исторический пример — когда в 1821 году молодой Коши доложил на заседании Академии наук о новых, более точных методах проверки сходимости рядов, то великий Лаплас (Laplace, 1749—1827), которому тогда было уже 72 года, поспешил домой, уединился и оставался дома взаперти несколько недель — до тех пор, пока не проверил сходимость всех без исключения рядов, использованных им во всех пяти больших томах его "Небесной механики". На его радость, все использованные им ряды оказались удовлетворяющими новым, более строгим условиям сходимости ([69], стр. 204).

Разумеется, далеко не все ученые и инженеры столь же добросовестны, как великий Лаплас, и поэтому государства давно выработали средства принуждения к обязательному использованию новых, более совершенных методов расчета, проектирования, изготовления и эксплуатации ответственных объектов — судов, зданий, летающих аппаратов, объектов атомной энергетики. Если новые методы расчета и проектирования восполняют недостатки и неполноту старых методов и тем самым повышают надежность вводимого в строй оборудования, уменьшают вероятность аварий, то государственные органы — такие как Госатомнадзор, Госавианадзор и им подобные, следят за тем, чтобы новые методы обязательно применялись. Это общая государственная практика всех стран, уменьшающая риск аварий.

К сожалению, открытие новых свойств эквивалентных преобразований и создание на их основе более совершенных методов компьютерных вычислений, уменьшающих вероятность аварий и катастроф, пришлись на очень неудачные для России годы — с 1992 по 1999. Эти годы характерны тем, что в ходе перестройки и реформирования всех основ жизни страны произошло очень резкое ослабление всех регулирующих и контрольных функций государства. В результате — как уже об этом говорилось в *главе 11* — ни Госавианадзор, ни Госатомнадзор, хотя и понимали необходимость потребовать от проектно-конструкторских организаций оберегать жизни людей путем использования более совершенных методов расчета и проектирования, но реально ничего не сделали. Подробности уже были изложены в *главе 11*, которая без изменения перешла из первого издания данной книги, вышедшего в 1999 году. Не смогла почти ничего сделать и Академия наук России, хотя в ней — особенно после публикации [34] в "Докладах" академии — хорошо понимали необходимость совершенствования методов компьютерных расчетов после открытия новых свойств эквивалентных преобразований. В Институте проблем управления Российской Академии наук еще в 1993 году на семинаре, руководимом Е. С. Пятницким и В. Ф. Кротовым, доложенные результаты исследований по параметрической устойчивости и эквивалентным преобразованиям (опубликованные затем в [3]) были признаны "научным открытием, имеющим большое практическое значение". Но в те годы Академия наук России переживала очень трудные для себя времена и мало что могла реально сделать.

В последнее время положение в России изменилось. Функции государственных органов и их авторитет существенно укрепились. Поэтому появилась уверенность в том, что государственные органы контроля и надзора начнут обеспечивать безопасность граждан России — в том числе и за счет обязательного использования при расчете и проектировании усовершенствованных методов, поскольку неполнота традиционных методов уже много лет как известна и неоднократно отмечена в публикациях. Возможно, впрочем, что эти усовершенствованные методы, разработанные в Санкт-Петербургском государственном университете, ранее, чем в России, будут в наибольшей мере применены за ее пределами. Интерес к не так давно открытым новым свойствам эквивалентных преобразований начинают проявлять многие страны. И это не удивительно, поскольку понятие эквивалентного преобразования является одним из наиболее фундаментальных и часто используемых понятий математики. Если в нем неожиданно обнаружились новые свойства, то это не может не оказать самого существенного влияния на очень многие области прикладной математики и компьютерных вычислений. К сегодняшнему дню, к 2004 году, открыто еще далеко не все, и на основе углубленного исследования свойств эквивалентных преобразований нас ждут новые, гораздо более существенные, открытия в прикладной математике, в теории компьютерных вычислений. Это начинают понимать во многих странах.

Так, например, книга [47] сразу по выходе заинтересовала издательство "WPS", еще в 2003 году начала переводиться на английский язык и скоро выйдет в свет. Хотя круг вопросов, рассмотренных в публикации [47], существенно отличается от тех, которые исследовались в даннлй книге, но третий класс задач математики, физики и техники, класс задач, промежуточных между корректными и некорректными, класс задач, меняющих свою корректность при эквивалентных преобразованиях, использованных в ходе решения — этот третий класс в публикации [47] рассмотрен довольно подробно. А самое главное — в монографии [47] рассмотрены открытые профессором В. С. Сизиковым недостатки в традиционных методах решения интегральных уравнений, связанные с тем, что применяемые при решении эквивалентные преобразования интегральных уравнений в ряде случаев изменяют корректность решаемой задачи и тем самым приводят к ошибкам.

В монографии [47] описаны найденные В. С. Сизиковым усовершенствованные методы решения интегральных уравнений, позволяющие восстановить достоверность компьютерных вычислений в данной области. Изложено также применение этих методов к правильной реконструкции смазанных и дефокусированных изображений, в том числе изображений медицинских объектов, полученных методами рентгеновской томографии.

Таким образом, в монографии [47] открыта еще одна область приложения найденного ранее явления изменения корректности при эквивалентных преобразованиях. Если ранее в публикациях [1—5], [32—43] исследование изменений корректности помогло разобраться в сложных вопросах теории устойчивости, теории дифференциальных уравнений, то в монографии [47] оно оказало помощь в области интегральных уравнений, интегральных преобразований. Можно ожидать, что в дальнейшем продолжение исследований изменения корректности при эквивалентных преобразованиях позволит уменьшить вероятность ошибок и в других областях прикладной математики и компьютерных вычислений.

Важным примером может стать совершенствование проектирования строительных конструкций.

Как известно, в феврале 2004 года Москву потрясла авария в аквапарке "Трансвааль", когда неожиданно обрушилась сложная конструкция купола и погибли 28 человек. Авторитетная комиссия, возглавляемая Александром Косованом, пришла к выводу, что причиной аварии могли стать "серьезные ошибки при проектировании". Но ведь проектирование вела авторитетная и давно известная фирма, возглавляемая Нодаром Вахтанговичем Канчели. Вряд ли такая фирма могла допустить элементарную ошибку — выбрать, например, не тот коэффициент и т. п. Это крайне мало вероятно.

Совсем другое дело, если новая и ранее не используемая конструкция купола аквапарка, предложенная Н. Канчели, оказалась примером "особой системы", для которой традиционные методы расчета, не учитывающие возможности изменения корректности при эквивалентных преобразованиях, могут привести к ошибочным оценкам запасов устойчивости.

Вернемся к совсем простой системе дифференциальных уравнений (25)—(26), описывающей переходные процессы в системе регулирования частоты вращения электропривода. Если ее запас устойчивости рассчитывать традиционными и до 1994 года (до появления публикации [3]) общепринятыми методами, основанными на приведении системы к нормальной форме Коши и вычислении корней характеристического полинома, то эти методы неизбежно приводили к ошибочным оценкам запасов устойчивости, поскольку система (25—(26) является — как об этом уже говорилось — системой особой, для которой традиционные методы — без дополнительных проверок, о которых мы рассказывали — неизбежно ведут к ошибкам.

Почти наверное такие же особые системы будут встречаться и среди строительных конструкций, хотя там, разумеется, все будет гораздо сложнее, чем в тех, сравнительно простых системах, которые были рассмотрены в этой книге. Поэтому исследования, начатые публикациями [1—5], необходимо продолжать. Эти исследования несомненно принесут много неожиданных и важных для практики результатов и уменьшат число аварий.

Отметим, что наиболее целесообразным будет, если эти исследования проведут люди, повседневно использующие тот или иной раздел прикладной математики и поэтому хорошо его знающие.

Это важно подчеркнуть потому, что часто приходится встречаться с возражениями такого рода: "Да, мы все пользуемся эквивалентными преобразованиями (а кто же ими не пользуется!), и раз открыты новые свойства эквивалентных преобразований, то очень возможно, что новые открытия повлияют на те вычисления и преобразования, которые производим мы. Но — покажите нам, где, в каком месте содержатся ошибки в наших преобразованиях и вычислениях?"

К сожалению, на этот вопрос почти невозможно ответить. Ошибки в чужих преобразованиях очень трудно найти — так же, как трудно найти ошибку в чужой программе. Кроме того, каждый исследователь хорошо знает и пользуется сравнительно небольшими разделами математики.

Поэтому не следует надеяться на то, что кто-то посторонний найдет ваши ошибки. Самый правильный путь — это когда исследователь сам изучает те преобразования, которыми он пользуется, и проверяет — нет ли среди них тех, которые эквивалентны в классическом смысле, но не в расширенном.

Конечно, такой путь труден. Поэтому нужно особенно отметить тех ученых, которые проделали этот путь и обнаружили источники ошибок в таких областях, как линейное программирование (Васильев Ф. П., публикация [46]), интегральные управления (Сизиков В. С., [47]), алгоритмы, использующие цепочки эквивалентных преобразований (Чертков К. Г., [57]).

Глава 21

Итоги

Основным результатом исследований, описанных в этой книге, является открытие новых свойств очень широко используемых в математике эквивалентных преобразований.

Поскольку эквивалентные преобразования математических моделей самых различных объектов и процессов пронизывают собой всю математику, то открытие их новых свойств и, в частности, возможности изменения корректности при эквивалентных преобразованиях — безусловно повлечет за собой многочисленные следствия в прикладной математике и в практике компьютерных вычислений. К настоящему времени исследована только небольшая часть этих следствий. Исследования будут продолжаться и принесут, несомненно, много новых неожиданных результатов.

В настоящее время можно подвести предварительные итоги лишь по некоторым, более других исследованным направлениям. К таким направлениям относятся:

- расчеты устойчивости и запасов устойчивости для различных объектов и систем управления, описываемых системами обыкновенных дифференциальных уравнений различных порядков;
- численное решение дифференциальных уравнений и систем дифференциальных уравнений;
- обобщенная задача о собственных значениях — т. е. вычисление собственных значений системы линейных однородных уравнений с параметром для тех случаев, когда часть уравнений параметра не содержит.

По этим направлениям можно подвести следующие предварительные итоги:

1. Обнаружено — вопреки распространенному мнению, — что никакое исследование характеристического полинома системы управления, или системы дифференциальных уравнений, или исследование матри-

цы коэффициентов системы, записанной в нормальной форме Коши, не гарантирует правильного ответа на вопрос о параметрической устойчивости и о запасах устойчивости системы, а неверный ответ может стать причиной аварий и даже катастроф объекта, спроектированного и построенного на основе недостаточно обоснованного расчета. Данный вывод следует непосредственно из приведенных примеров систем, имеющих один и тот же характеристический полином, одну и ту же матрицу коэффициентов при записи в нормальной форме Коши, но в то же время коренным образом отличающихся по параметрической устойчивости, по величине запасов устойчивости при вариациях параметров.

2. Существование у системы функции Ляпунова не гарантирует от потери устойчивости даже при сколь угодно малых вариациях параметров. Существуют системы, обладающие функцией Ляпунова, и в то же время теряющие устойчивость при сколь угодно малых вариациях.

3. Обнаружено существование третьего класса задач математики, физики, техники. Помимо двух ранее известных классов — класса корректных и класса некорректных задач — был обнаружен третий класс, к которому относятся "задачи-перевертыши", способные изменять корректность при эквивалентных (в классическом смысле) преобразованиях, использующихся при их решении. Для задач третьего класса обычная однократная проверка корректности недостаточна, поэтому неожиданная, непредвиденная встреча с задачей третьего класса может стать причиной ошибок в расчетах и порожденных этими ошибками аварий и катастроф.

4. Для предотвращения ошибок было предложено ввести понятие преобразований, эквивалентных в расширенном смысле, которые:

   - во-первых — эквивалентны в классическом смысле;
   - во-вторых — не изменяют корректности решаемой задачи.

   Существуют преобразования, эквивалентные в классическом смысле, но не в расширенном. При решении желательно использовать лишь преобразования, эквивалентные в расширенном смысле.

5. Проверка эквивалентности в расширенном смысле требует исследования "триады", состоящей из трех элементов:

   - исследуемая математическая модель;
   - решаемая задача;
   - выбранный метод решения.

6. Известная теорема о непрерывной зависимости решений обыкновенных дифференциальных уравнений от параметра, лежащая в основе всех практических приложений теории дифференциальных уравнений и доказанная для одного уравнения n-го порядка и для системы n дифференциальных уравнений первого порядка, в нормальной форме не имеет расширительного толкования, которое обычно делают, и согласно которому теорему считают (как бы "по умолчанию") справедливой для любых систем. На самом деле существуют системы, разрешенные относительно старших производных, но не имеющие непрерывной зависимости решений от коэффициентов и параметров. Для математических моделей, включающих в себя подобные системы, результаты расчета вблизи точек разрыва непрерывности заведомо недостоверны. Проверять корректность задачи нахождения решения системы дифференциальных уравнений следует по исходным уравнениям, еще не приведенным к форме Коши.

7. Простейшим методом, направленным на повышение достоверности расчетов, является метод "матриц степеней", изложенный в *главах 13* и *15*.

8. Работа по отысканию удобных методов дополнительных проверок, страхующих от ошибок в расчетах, еще далека от завершения. Здесь открыто широкое поле для интересной и плодотворной научной работы. Точно так же далеко от завершения исследование интереснейшего третьего класса задач математики, физики и техники — промежуточных между корректными и некорректными. Задачи, относящиеся к третьему классу, обнаружены пока лишь при исследовании параметрической устойчивости систем управления, при решении систем дифференциальных уравнений (и особенно — неканонических систем), при решении обобщенной проблемы собственных значений матриц, при решении интегральных уравнений [47], при использовании интегральных преобразований Лапласа и Фурье (там же), а также в известной проблеме устойчивости по части переменных. На самом деле задач третьего класса гораздо больше и остается открытой важная проблема их обнаружения и изучения — с тем, чтобы в дальнейшем неожиданных встреч с подобными задачами и возникающих при этих встречах ошибок больше уже не происходило. Здесь тоже открыто поле для интереснейшей научной работы.

Глава 22

Рекомендации по совершенствованию учебного процесса

Изложенные в предыдущих главах результаты научных исследований необходимо, не откладывая, ввести в учебный процесс высших учебных заведений. Понятно, что образование должно быть немного консервативным, и обычно проходит немало времени между открытием нового объекта или явления и упоминанием о нем в учебном процессе. Но в данном случае ждать не стоит. Не стоит потому, что изложенный в предыдущих главах материал раскрывает причины неизбежных серьезных ошибок в компьютерных вычислениях, и если выпускники вузов не будут знать о причинах этих ошибок, то ошибки будут повторяться, множиться и могут стать — как уже не раз становились — причиной многих аварий и даже катастроф.

Этих ошибок очень легко не допустить, если выпускник высшего учебного заведения получит в ходе учебного процесса хотя бы элементарные знания об их причинах. И раз существует легкая возможность предупредить студента о возможных ошибках, то этой возможностью следует немедленно воспользоваться, введя совсем небольшие поправки и дополнения в учебный процесс.

Действительно, рассмотрим, например, такую вычислительную операцию, как численное решение системы дифференциальных уравнений при заданных начальных условиях (задача Коши). Это — очень распространенная операция, которая часто встречается в ходе самых разнообразных технических, физических, экономических компьютерных расчетов. В зависимости от результата численного решения той или иной системы уравнений могут приниматься самые ответственные решения — в том числе и связанные с жизнью и смертью людей. Выпускник современного естественнонаучного или технического вуза умеет решать подобные системы (во всяком случае — умеет пользоваться стандартным программным обеспечением решения, которое приведено во многих популярных пакетах прикладных программ — таких как MATLAB, Scilab и др.). Прочным фундаментом надежности всех практических приложений издавна считалась и считается известная, приводимая в большинстве учебников, теорема о непрерывной зависимости решений от параметров.

И, тем не менее, при каждой встрече с "особыми" системами, о которых говорилось ранее, результат расчета может быть неверен, может совершенно расходиться с реальным поведением проектируемого объекта и стать причиной аварии. А ведь "особые" системы встречаются хотя и не очень часто, но все же не редко, а ошибки в расчетах могут быть очень опасны. И такие же опасные ошибки могут встретиться при расчетах запасов устойчивости самых различных объектов (и линейных, и нелинейных), при использовании широко применяемых алгоритмов с цепочками эквивалентных преобразований, при решении интегральных уравнений и задач линейного программирования — обо всем этом уже говорилось в предыдущих главах.

Поблагодарит ли выпускник высшего учебного заведения за то, что ему ничего не сказали об этих важных вещах, хотя после публикаций [1; 3; 32—34; 44; 47; 68] вузы имели для этого полную возможность? Нет, не поблагодарит. А при современном "рыночном" подходе к образованию выпускник может даже "вчинить иск" учебному заведению, которое не дало ему столь необходимых знаний (особенно если он будет знать, что другое учебное заведение эти важные знания студентам дает). Поэтому введение в учебный процесс некоторых элементов изложенного в предыдущих главах материала совершенно необходимо.

Иногда опасаются — не войдет ли новый материал в противоречие со старыми, проверенными временем учебниками? Эти опасения не состоятельны. Рассмотрим, например, важнейшую теорему о непрерывной зависимости решений дифференциальных уравнений от параметров. Ни в одном из известных авторам учебников нет теоремы: "решения *всех* систем дифференциальных уравнений, правые части которых удовлетворяют условиям Липшица, зависят от параметров непрерывно".

Есть и доказывается совсем другая теорема: "решения систем дифференциальных уравнений в нормальной форме (т. е. систем, состоящих из n уравнений первого порядка) зависят от параметров непрерывно". Кроме того, в учебниках говорится, что почти любую систему эквивалентными преобразованиями, не изменяющими решений, можно привести к нормальной форме. Тем самым студент (а также и тот, кто самостоятельно изучает учебник) подталкивается к заключению: "значит, у всех систем, которые можно привести к нормальной форме, решения зависят от параметров непрерывно".

Почему авторы учебников избрали такой, весьма своеобразный, метод изложения? Об этом, разумеется, можно только строить догадки, но одна догадка достаточно ясна и очевидна: авторы учебников хотели, разумеется, привести в своих книгах такую теорему о непрерывной зависимости решений от параметров, которая была бы верна для *всех* систем дифференциальных уравнений — привести, конечно, с полным доказательством. Но доказательство у них не получалось. Теперь, на основании материала, изложенного в предыдущих главах, мы знаем, что доказательство и не могло получиться. Оно не могло получиться потому, что существуют системы, для которых теорема о непрерывности не справедлива. До 2000 года (до появления монографии [33]) этого не знали, и вопрос оставался открытым. Поэтому авторы учебников избрали "немного лукавый" стиль изложения, с опорой на "домысливание" со стороны читателя и студента: если все же будет найдено доказательство теоремы о непрерывности, справедливое для *всех* систем, то "домысливание" будет правильным, студенты и читатели учебника будут рады. Если же в дальнейшем выяснится, что теорема о непрерывности в общем случае не верна (что в 2000 году и произошло), то автор учебника вполне мог сказать, что он не виноват и математической строгости изложений не нарушил: он дал верную формулировку теоремы о непрерывности для частного случая (для систем в нормальной форме), ну, а "домысливание" верности теоремы для общего случая, для *всех* систем, остается на совести читателя учебника или студента. Автор учебника чист.

Указанное обстоятельство облегчает совершенствование учебного процесса — можно не менять опубликованные учебники по дифференциальным уравнениям, в которых приведена верная и безупречная теорема о непрерывной зависимости решений от параметров для систем в нормальной форме. Следует лишь добавить (устно, на лекциях или при переиздании учебников), что хотя почти любую систему дифференциальных уравнений можно эквивалентными преобразованиями привести к нормальной форме, это не означает, что у всех этих систем решения будут зависеть от параметров непрерывно: для большинства систем это так, но существуют "особые" системы, не имеющие непрерывной зависимости решений от параметров (предварительно лектору нужно, разумеется, кратко рассказать о том, что эквивалентные преобразования могут изменять некоторые важные свойства решений — в том числе и непрерывную зависимость решений от параметров и коэффициентов). Неожиданная встреча с "особыми" системами (а также и встреча с техническими объектами, математическими моделями которых служат "особые" системы уравнений), всегда очень опасна и может стать причиной аварий и катастроф. Поэтому "особые" системы надо тщательно выделять. О методах их выделения было рассказано в *главах 18—20*. Материал этих глав — в том или другом сокращении — будет очень полезно включить в учебный процесс.

Теперь рассмотрим другой вопрос — о проверке устойчивости и запасов устойчивости в учебниках для университетов и технических университетов. Здесь тоже многое можно улучшить и усовершенствовать. В учебниках рекомендуется судить об устойчивости по корням характеристического полинома для линейных систем и по существованию (или не существованию) функции Ляпунова для нелинейных систем. Если все корни характеристического полинома системы имеют отрицательные части; или если у системы существует функция Ляпунова, то такую систему учебники рекомендуют считать устойчивой. Уделяют слишком мало внимания тому, что параметры любой реальной системы почти никогда не могут быть известны идеально точно и почти никогда не могут быть идеально постоянными. Поэтому система, формально устойчивая при номинальных значениях параметров, но способная терять устойчивость при малых, неизбежных на практике отклонениях параметров от номинальных значений, ничуть не лучше (и даже хуже) системы неустойчивой. Пригодной для практического использования может быть лишь система, имеющая ненулевой запас устойчивости, сохраняющая устойчивость при неизбежных вариациях параметров. Во многих учебниках о запасах устойчивости рекомендуют судить по расположению корней характеристического полинома на комплексной плоскости. "Если все корни характеристического полинома лежат в левой полуплоскости комплексного переменного, далеко от мнимой оси, то система обладает конечным запасом устойчивости и пригодна для практического применения" — такая рекомендация встречается во многих учебниках. На самом деле подобная рекомендация не верна и опасна. Примеры, приведенные в предыдущих главах, доказывают, что никакое исследование расположения корней характеристического полинома (так же, как и исследование матрицы коэффициентов системы, записанной в нормальной форме Коши или существование функции Ляпунова) сами по себе ничего не говорят о запасах устойчивости. Для того чтобы быть уверенными в том, что проектируемая система имеет запас устойчивости и пригодна для практического применения, нужно обязательно провести дополнительные проверки, о которых было рассказано в предыдущих главах. О необходимости таких проверок, о ненадежности преобразований, эквивалентных в классическом смысле, но не в расширенном — надо обязательно (хотя бы коротко) рассказать в ходе учебного процесса. Полный, подробный рассказ, разумеется, не обязателен, поскольку время учебного процесса, число учебных часов, ограничены, и далеко не каждый выпускник вуза будет потом заниматься расчетами устойчивости или использовать стандартные программы численного решения дифференциальных уравнений. Но *каждый* выпускник вуза должен знать — обеспечение реальной устойчивости (как и обеспечение соответствия между расчетом и реальным поведением исследуемого или проектируемого объекта) является трудным и сложным делом, для выполнения которого нужно иметь глубокие знания, знать то, что не всегда приводится даже в сравнительно недавно вышедших учебниках и учебных пособиях. Одной проверкой корней характеристического полинома (или использованием популярных пакетов прикладных программ) здесь не обойдешься. Если выпускнику вуза выпадет судьба участвовать в расчете и проектировании ответственных объектов, участвовать в компьютерных расчетах, то он должен перед началом работы ознакомиться с современной литературой по этим вопросам (в частности — и с этой книгой). А про необходимость такого знакомства ему должны — хотя бы коротко — рассказать на лекциях.

Для того чтобы не дискредитировать ранее вышедшие учебники, можно лишний раз подчеркнуть на лекциях, что вычисление и исследование характеристического полинома совсем не является лишним делом: если у характеристического полинома исследуемой системы есть хотя бы один корень с положительной, нулевой или очень малой по абсолютной величине отрицательной вещественной частью, то такая система достаточным запасом устойчивости заведомо не обладает и может быть сразу отвергнута, без дальнейших громоздких расчетов. А вот если все корни характеристического полинома лежат в левой полуплоскости комплексного переменного далеко от мнимой оси, то такая система может иметь хорошие запасы устойчивости, но может и не иметь. Для того чтобы удостовериться — имеет все же система хорошие запасы устойчивости или не имеет — необходимо дополнительное исследование, о котором уже рассказывалось в предыдущих главах книги и которое дополняет — но не отменяет — материал традиционных учебников и учебных пособий, рассматривающих устойчивость и методы ее проверки.

Мы убеждаемся, что усовершенствования и добавления, которые необходимо ввести в учебный процесс, совсем невелики и легко выполнимы.

Опыт введения в учебный процесс дополнительных сведений, основанных на материале предыдущих глав данной книги, был накоплен за последние годы на факультете прикладной математики — процессов управления Санкт-Петербургского государственного университета. Материал этот вводился в форме небольших спецкурсов (возможны, разумеется, и другие варианты). Опыт преподавания показал, что студенты усваивают новый материал легко, без затруднений и с удовольствием.

Глава 23

Еще о практических приложениях

Ранее мы уже частично рассказывали о практических приложениях результатов исследований авторов — тех приложениях, которые успели появиться к 1998 году, к моменту написания первого издания этой книги. Мы уже упоминали, что приложений было немного. Лишь очень немногие проектно-конструкторские организации использовали у себя дополнительные проверки — несмотря на то, что уже в 1994 году, в статье [3], было показано, что существующие методы проверки параметрической устойчивости, запасов устойчивости и т. п. заведомо неполны, не гарантируют правильного ответа. В то же время неверный ответ на вопрос о запасах устойчивости может стать причиной аварий и даже катастроф, и поэтому фирмы, использующие у себя дополнительные проверки запасов устойчивости выпускаемых ими изделий и оповестившие об этом круг возможных потребителей, получают серьезные преимущества в конкурентной борьбе.

За прошедшие между первым и четвертым изданием годы существенных изменений не произошло. Сфера применения дополнительных проверок, обеспечивающих повышение надежности расчетов и предложенных в работах [3, 5, 26, 33, 34], остается пока еще очень небольшой, а главное — интереснейшая научная проблематика, поднятая в публикациях [3, 4, 5, 32], остается пока еще почти никем не подхваченной.

Во многом это связано с теми трудностями, которые переживает в последние годы российская наука, снижением численности научных работников, катастрофическим падением тиражей научных журналов и книг.

Так, например, тираж журнала "Автоматика и телемеханика" в 1959 году составлял 8 тыс. экземпляров, в 1977 г. — 7 тыс., в 1994 году — 523 экземпляра, в 2000 — 400.

Тираж журнала "Электричество": 1990 год — 5048 экз., 1997 год — 1000 экз. Тираж журнала "Известия вузов", серия "Электромеханика": 1977 год — 3000 экз., 1996 г. — 273 экз. Затем тиражи упали еще ниже.

После 1997 года большинство научных журналов просто перестали указывать свои уже слишком смехотворно упавшие тиражи. Причиной стало, прежде всего, резкое ухудшение материального положения научных работников России, которым подписка на научные журналы стала просто не по карману.

А ведь для того, чтобы научный результат был подхвачен, он должен быть прочитан исследователем, который в год публикации результатов исследования не поглощен полностью, до предела, своей собственной тематикой, является частично свободным и готовым переключиться на новую перспективную проблематику. Таких исследователей немного. При прежнем тираже научных журналов в 3—7 тысяч экземпляров такие исследователи среди их читателей обязательно находились и научные результаты подхватывались, а при тиражах 200—500 экземпляров наиболее вероятно, что "свободных" исследователей, прочитавших новый научный результат и готовых подхватить его, не найдется ни одного, что чаще всего и происходит. Вспомним, что когда в 1960 году были опубликованы первые статьи А. М. Летова об аналитическом конструировании регуляторов, то уже через несколько лет предложенные им методы широко использовались. Аналогично, после публикации в 1961 году русских переводов статей американского математика Р. Калмана по управляемости и наблюдаемости уже через 3—4 года большинство русских исследователей учли его результаты. Чуть ли не большинство публикаций по управлению в те годы начинались со слов: "в настоящей статье рассматриваются системы управления, управляемые (или, реже, — не управляемые) "по Калману". Теперь все не так. И это очень плохо.

Впрочем, нельзя сказать, что результаты, опубликованные в [3, 4, 5, 32], а более подробно — в первом издании этой книги — совсем не использовались. Просто это было такое использование, что не ясно — радоваться этому или огорчаться.

Так, например, шведы использовали научные результаты, полученные в Санкт-Петербургском государственном университете, для того, чтобы погубить кандидатуру Санкт-Петербурга на проведение Олимпийских игр 2004 года. А началось все с того, что в 1993—97 годах проводилось обновление многочисленного вспомогательного оборудования расположенной всего в 90 километрах от Санкт-Петербурга Ленинградской атомной электростанции (ЛАЭС). Обновлялись насосы, электроприводы, шкафы управления, срок службы которых короче, чем у реакторов. Обновляемое оборудование рассчитывалось, разумеется, уже по-новому: не по "реальным выходам", как раньше, а на вычислительных машинах, с предварительным преобразованием уравнений к нормальной форме. При этом на станцию могли проникать многочисленные опасные в эксплуатации системы с малыми запасами устойчивости. Санкт-Петербургский государственный университет предложил произвести дополнительные расчеты, позволяющие выявить опасные системы, не допустить их установки на станцию. Для этого требовалась тогда сумма, эквивалентная 20 тыс. долларов, — на оплату труда программистов. Методики расчета и научное обеспечение университет был готов предоставить бесплатно.

Тем не менее на предложения университета и дирекция ЛАЭС, и администрация губернатора Санкт-Петербурга ответили отказом. Отказ получил огласку — в том числе и в газетах; активность проявили организации "зеленых", обеспокоенные откровенным пренебрежением администрации губернатора к безопасности жителей многомиллионного города (тем более, что различные отказы оборудования ЛАЭС, не катастрофичные, но сопровождающиеся выбросами радиации в атмосферу, происходили и происходят по несколько раз в год).

Между тем в 1996 году встал вопрос о месте проведения Олимпиады-2004, и сразу несколько городов — в их числе Санкт-Петербург и столица Швеции Стокгольм — пожелали, чтобы выгодная и почетная обязанность быть городом-хозяином Олимпиады была возложена на них. Развернулась конкурентная борьба между странами-кандидатами.

В этой борьбе шведы (которым хорошо известна небезразличная для них обстановка на ЛАЭС) умело использовали отказ администрации губернатора Санкт-Петербурга реагировать на серьезные предупреждения университета и ее отказ выполнить очень простые мероприятия, повышающие безопасность ЛАЭС. Шведы информировали Олимпийский комитет и с полным основанием указали, что город Санкт-Петербург, администрация губернатора которого способна не реагировать на обоснованное предупреждение своего собственного университета (и, кстати, одного из самых авторитетных учебных заведений России), является городом опасным. В таком городе может случиться все, что угодно, и поэтому Олимпиаду в нем лучше не проводить. Администрацию губернатора еще в ноябре 1996 года поставили в известность об этом демарше, но она ничего не сделала (между тем даже начало работы по предотвращению аварий согласно предложениям университета сразу повысило бы шансы Санкт-Петербурга). Однако ничего не было сделано, и поэтому в марте 1997 года произошло то, что и должно было произойти — на заседании Международного Олимпийского комитета в Лозанне кандидатура Санкт-Петербурга была отвергнута уже в первом туре голосования — по мотиву "небезопасности" города. А Стокгольм успешно прошел первый тур и уступил лишь во втором туре.

Когда позже подсчитали расходы Санкт-Петербурга на выдвижение своей кандидатуры, то оказалось, что расходы достигли 21 млн долларов по тогдашнему курсу. Администрация губернатора пожалела 20 тыс. долларов на реализацию предложений университета — и этим сильно "помогла" тому, что 21 млн долларов из городской казны оказался истраченным заведомо бесплодно (не считая той прибыли, которую мог получить город от проведения Олимпийских игр). Такова цена неуважения к науке.

Еще одно "применение" открытия, сделанного в Санкт-Петербургском университете, обнаружилось при защите диссертаций. Недоброжелатель диссертанта (или — что чаще — недоброжелатель его научного руководителя) задает на защите коварный вопрос: "Скажите, а Вы проверяли использованные Вами преобразования на эквивалентность в расширенном смысле?" Поскольку вряд ли можно найти диссертацию по естественным, техническим или экономическим наукам, в которой не использовались бы эквивалентные преобразования, а на необходимость проверки эквивалентности в расширенном смысле указывалось в известном общероссийском научном журнале еще в 1994 году (и еще раз — в публикации [34]), то подобный вопрос может быть задан практически на любой защите (реально он задавался на нескольких защитах в Москве в 2000 году). Если диссертант знаком с публикациями по этой проблеме, то ответить на заданный вопрос (и заблаговременно провести нужные проверки) совсем нетрудно. Но фактически на защитах в Москве выяснилось, что диссертанты не были знакомы с литературой по данному вопросу, ответить ничего не смогли, и недоброжелателям не составило труда доказать, что вследствие этого выводы диссертантов недостоверны; они могут быть либо верными, либо неверными (эксперимент может подтвердить лишь ограниченный круг результатов), но без проверки использованных преобразований результаты недостоверны. А поскольку требование достоверности входит в число обязательных требований Высшей аттестационной комиссии к диссертациям, то по диссертациям, на защите которых всплыли вопросы об эквивалентных в расширенном смысле преобразованиях, не было тогда принято положительных решений.

Разумеется, это совсем не те "применения", которым можно радоваться. Было бы гораздо лучше, если бы изложенные в этой книге и в более ранних публикациях новые научные результаты шире использовались — как и было задумано — для уточнения научных и инженерных расчетов, избежания ошибок в расчетах, уменьшения вероятности аварий и катастроф.

Научные результаты должны повышать благосостояние людей, повышать их безопасность. Наука может содействовать и благосостоянию, и безопасности. Для этого надо смелее и шире использовать ее достижения. Будем надеяться, что время широкого использования достижений науки настанет, наконец, и для нашей страны.

Приложение

В качестве приложения к книге с согласия К. Г. Черткова помещается его статья "Что было открыто в СПбГУ 1987—2003 гг.?", в которой наиболее коротко изложена суть явлений, недавно обнаруженных в прикладной математике.

Что было открыто в СПбГУ в 1987—2003 годах?

Открытие первое

Первое открытие относится к широко известным и повсеместно используемым при расчетах эквивалентным преобразованиям — т. е. преобразованиям, не изменяющим решений преобразуемой системы (примеры таких преобразований — умножение всех членов уравнения на число, не равное нулю, перенос членов из левой части в правую с изменением знака и т. п.).

До 1987 года считалось, что эквивалентные преобразования "ничего не меняют", однако еще древние разделяли эквивалентные и тождественные преобразования и, как мы убедимся, не зря. В работе [1][1] было показано, что эквивалентные преобразования, не меняя решений как таковых, могут в то же время изменять важные свойства решений — такие как параметрическая устойчивость, непрерывная зависимость решений от параметров и т. п.

Позже, в работах [2—5], было продемонстрировано, что эквивалентные преобразования могут изменять корректность решаемой задачи, и было предложено ввести новое понятие: "преобразования, эквивалентные в расширенном смысле", которые:

- во-первых, эквивалентны в классическом смысле;
- во-вторых, не изменяют корректности решаемой задачи.

[1] Список литературы, ссылки на которую встречаются в статье, приведен в конце данного приложения.

Были приведены примеры преобразований, эквивалентных в классическом смысле, но не в расширенном, и было показано, что только использование преобразований, эквивалентных в расширенном смысле, обеспечивает достоверность результатов любых расчетов. Эти положения были поддержаны в публикации [9].

Мне пришлось наблюдать споры вокруг преобразований, эквивалентных в расширенном смысле. В результате этих споров я убедился в правильности формулировок, предлагаемых Ю. Петровым. Нужно сказать, что понимание всей важности вопроса пришло ко мне не сразу, а через несколько месяцев оживленной дискуссии.

Использование преобразований, эквивалентных в классическом смысле, но не в расширенном, часто ведет к ошибкам в расчетах, которые неоднократно были и будут причинами аварий и катастроф, но до последнего времени причины этих аварий и катастроф искали в другом, и поэтому аварии повторялись снова и снова. Чем сложнее объект, тем опасней его авария. Чем сложнее объект, тем больше приходится проводить расчетов. Чем больше проводится расчетов, тем выше вероятность ошибки.

Открытие второе

В 1998 году в работе [6] было открыто, что помимо известных до этого двух классов математических и технических задач (класса корректных и класса некорректных задач) существует третий класс — класс задач, изменяющих свою корректность в ходе эквивалентных преобразований, использованных при их решении. По данному вопросу было много споров, сводящихся, в конечном счете, к терминологии, но сути проблемы они так и не коснулись. Методы решения, пригодные для задач корректных, непригодны для некорректных задач, поэтому неожиданная для производящего расчеты встреча с задачей третьего класса почти всегда ведет к опасным ошибкам в расчетах

Подробно задачи третьего класса с примерами и приложениями рассмотрены в монографии [7].

Открытие третье

Была открыта неполнота важнейшей теоремы, лежащей в основе всех расчетов, использующих дифференциальные уравнения, — теоремы о непрерывной зависимости решений системы обыкновенных дифференциальных уравнений от параметров. Это одно из важнейших открытий конца двадцатого века, *возможно, даже самое важное*!

Хотя даже в наиболее полных руководствах по дифференциальным уравнениям теорема о непрерывной зависимости решений от параметров была доказана лишь для частных случаев — для систем в нормальной форме и для одного дифференциального уравнения произвольного порядка, но существовала всеобщая уверенность (не основанная на доказательстве) в том, что все системы уравнений с правыми частями, удовлетворяющими условию Липшица, которые можно привести к нормальной форме с помощью эквивалентных (в классическом смысле) преобразований, также обладают непрерывной зависимостью решений от параметров. На этом основывалась и вся практика вычислений.

В работе [5], во втором и третьем ее издании, а более подробно в монографии [8], было показано, что эта всеобщая уверенность не обоснована, поскольку существуют особые системы, не имеющие непрерывной зависимости решений от параметров.

Каждая неожиданная встреча с физическим или техническим объектом, математической моделью которого является особая система, ведет к ошибкам в расчетах, ведет к тому, что реальное поведение объекта может не иметь ничего общего с результатом расчета. Такие ошибочные расчеты могут стать (и уже не раз становились) причиной аварий и катастроф.

Там же, в [8], было показано, что популярные пакеты прикладных программ — такие как MATLAB, Mathcad и другие — без введения в них дополнительных проверочных программ не обеспечивают достоверности результатов расчета.

Открытие четвертое

Несколько ранее, в работах [2—5] было открыто, что существуют технические объекты, для которых традиционные методы проверки сохранения устойчивости при неизбежных на практике малых отклонениях их параметров от расчетных значений дают ошибочные результаты и тем самым рекомендуют к реализации опасные системы, которые затем становятся источником аварий и катастроф, описанных и проанализированных в [5].

Открытие пятое

При исследовании широко распространенных вычислительных алгоритмов, использующих цепочки эквивалентных преобразований, было открыто и опубликовано в работах [5] и [8], что если хотя бы одно из использованных преобразований эквивалентно в классическом смысле, но не в расширенном, то даже малая единичная погрешность округления может сразу привести к грубым ошибкам в результатах расчета. В работе [10] было показано, что открытая проф. Петровым возможность действительно реализуется. Приведен пример алгоритма расчета собственных значений линейной системы, приводящий к ошибке даже при единичной погрешности округления.

Теоретический интерес сделанных открытий заключается в том, что они относятся к фундаментальным понятиям прикладной математики, которые веками казались законченными и незыблемыми. Эквивалентными преобразованиями пользовались с XVII века, в XX веке они преподавались в средней школе, но за все это время никто не догадывался, что в привычных и повсеместно используемых эквивалентных преобразованиях скрываются новые очень важные свойства — такие как возможность изменения корректности решаемой задачи, изменения непрерывной зависимости решений от параметров, изменения запасов устойчивости и т. п. Точно так же важнейшая теорема о непрерывной зависимости решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений от параметров была высказана еще в XIX веке, в XX веке она неизменно включалась во все достаточно полные учебники по дифференциальным уравнениям, лежала в основе инженерных расчетов и компьютерных вычислений, но никто не замечал, что эта теорема фактически не доказана, а для ряда систем не верна.

Практическая значимость сделанных открытий заключается в том, что они раскрывают причины ошибок в инженерных расчетах и компьютерных вычислениях, дают рекомендации по избежанию ошибок и тем самым снижают вероятность аварий и катастроф, порождаемых ошибками в расчетах.

Список литературы, использованной в Приложении

1. Петров Ю. П. Синтез оптимальных систем управления при не полностью известных возмущающих силах. Изд-во ЛГУ, 1987. С. 289.
2. Петров Ю. П. О скрытых опасностях, содержащихся в традиционных методах проверки устойчивости // Известия ВУЗ, Электромеханика, 1991, № 11. С. 106—108.
3. Петров Ю. П. Устойчивость линейных систем при вариациях параметров // Автоматика и телемеханика, 1994, № 11. С. 186—189.
4. Петров Ю. П. Предотвращение аварийности в системах управления // Известия ВУЗ, Электромеханика, 1994, № 1—2. С. 37—40.

5. Петров Ю. П., Петров Л. Ю. Неожиданное в математике и его связь с авариями и катастрофами последних лет. СПб.: ООП СПбГУ. 1-е изд., 1999. С. 108; 2-е изд., 2000. С. 115; 3-е изд., 2002. С. 141.
6. Петров Ю. П. Третий класс задач физики и техники — промежуточных между корректными и некорректными. СПб.: ООП СПбГУ, 1998. С. 30.
7. Петров Ю. П., Сизиков В. С. Корректные, некорректные и промежуточные задачи с приложениями. СПб.: Политехника, 2003. С. 201.
8. Петров Ю. П. Новые главы теории управления и компьютерных вычислений. СПб.: БХВ-Петербург, 2004. С. 192.
9. Академик Данилевич Я. Б., Петров Ю. П. О необходимости расширения понятия эквивалентности математических моделей // Доклады Академии наук, 2000. Т. 371, № 4. С. 473—475.
10. Чертков К. Г. Исследование чувствительности к погрешностям округления собственных значений линейных систем. Тула: Известия Тульского государственного университета, 2002. С. 138—140.

Литература

1. Петров Ю. П. Синтез оптимальных систем управления при не полностью известных возмущающих силах. Л.: Изд-во ЛГУ, 1987 С. 289.
2. Петров Ю. П. Расчет систем управления, сохраняющих устойчивость при вариациях параметров. Л.: 1992. С. 35.
3. Петров Ю. П. Устойчивость линейных систем при вариациях параметров // Автоматика и телемеханика, 1994, № 11. С. 186—189.
4. Петров Ю. П. О скрытых опасностях, содержащихся в традиционных методах проверки устойчивости // Известия ВУЗ, Электромеханика, 1991, № 11. С. 106—108.
5. Петров Ю. П. Предотвращение аварийности в системах управления // Известия ВУЗ, Электромеханика, 1994, № 1—2. С. 37—40.
6. Зубов В. И. Методы А. М. Ляпунова и их применение. Л.: Изд-во ЛГУ, 1957. С. 241.
7. Зубов В. И. Математические методы исследования систем автоматического регулирования. Л.: Машиностроение, 1974. С. 335.
8. Зубов В. И. Лекции по теории управления, М.: Наука, 1975. С. 495.
9. Барбашин Е. А. Функции Ляпунова. М.: Наука. 1970. С. 240.
10. Воротников В. И. Устойчивость динамических систем по отношению к части переменных. М.: Наука, 1991. С. 284.
11. Чанг Ш. Синтез оптимальных систем автоматического управления. М.: Машиностроение, 1964. С. 440.
12. Мэррием К. Теория оптимизации и расчет систем управления с обратной связью. М.: Мир, 1967. С. 549.
13. Летов А. М. Динамика полета и управление. М.: Наука, 1969. С. 360.
14. Ларин В. Б., Науменко К. И., Сунцев В. Н. Синтез оптимальных линейных систем с обратной связью. Киев, Наукова думка, 1973. С. 150.
15. Надеждин П. В. О потере грубости при элементарных преобразованиях дифференциальных уравнений управляемых систем // Автоматика и телемеханика, 1973, № 1. С. 185—187.

16. Петров Ю. П. Оптимизация управляемых систем, испытывающих воздействие ветра и морского волнения. Л.: Судостроение, 1973. С. 216.

17. Петров Ю. П. Вариационные методы теории оптимального управления. (издание второе). Л.: Энергия, 1977. С. 280.

18. Абдуллаев Н. Д., Петров Ю. П. Теория и методы проектирования оптимальных регуляторов. Л.: Энергоатомиздат, 1985. С. 240.

19. Харитонов В. Л. Об асимптотической устойчивости положения равновесия семейства линейных дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения, 1978, № 11.

20. Поляк Б. Т., Цыпкин Я. З. Частотные критерии робастной устойчивости и апериодичности линейных систем // Автоматика и телемеханика, 1990, № 9.

21. Иванов В. К., Васин В. В., Танана В. П. Теория линейных некорректных задач и ее приложения. М.: 1978.

22. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. М., 1979. С. 285.

23. Уилкинсон Дж. Х. Алгебраическая проблема собственных значений. М.: Наука, 1970. С. 564.

24. Икрамов Х. Д. Несимметричная проблема собственных значений. М.: Наука, 1991. С. 240.

25. Игнатьев М. Б. Голономные автоматические системы. Изд-во АН СССР, 1963. С. 204.

26. Гайдук А. Р. К исследованию устойчивости линейных систем // Автоматика и телемеханика, 1997, № 3. С. 153—160.

27. Гайдук А. Р. Синтез систем управления при слабо обусловленной полноте объектов // Автоматика и телемеханика, 1997, № 4. С. 133—144.

28. Петров Ю. П. Математическая модель и физическая реальность. СПб., 1997. С. 58.

29. Петров Ю. П., Червяков В. В. Системы стабилизации буровых судов (издание второе, дополненное). СПб.: Изд-во СПбГТУ, 1997. С. 261.

30. Андронов А. А., Витт А. Л.: Хайкин С. Э. Теория колебаний. М.: Наука, 1981. С. 568.

31. Петров Ю. П. Лекции по истории прикладной математики. СПб.: Изд-во СПбГУ, 2001, 337 с.

32. Петров Ю. П. Третий класс задач физики и техники — промежуточных между корректными и некорректными. СПб.: Изд-во СПбГУ, 1998. С. 30.
33. Петров Ю. П. Новые главы теории управления. СПб.: Изд-во СПбГУ, 2000. С. 156.
34. Академик Данилевич Я. Б., Петров Ю. П. О необходимости расширения понятия эквивалентности математических моделей // Доклады Академии наук, 2000, том 371, № 4. С. 473—475.
35. Подчукаев В. А. К проблеме грубости. Сборник "Аналитические методы синтеза регуляторов". Саратов, 1997. С. 206–235
36. Петров Ю. П., Фроленков Д. Б. Изменение корректности при преобразованиях уравнений // Вестник Санкт-Петербургского государственного университета, сер. 1, вып. 1, 2000. С. 52—57.
37. Красноперова Д. Г., Петров Ю. П. Неожиданности, возникающие при проверке параметрической устойчивости систем управления. Тезисы докладов шестого Международного семинара "Устойчивость и колебания нелинейных систем управления". М., 2000.
38. Красноперова Д. Г., Петров Ю. П. Необходимое уточнение теоремы о непрерывной зависимости решений дифференциальных уравнений от параметров. Тезисы докладов Четвертого сибирского конгресса по прикладной и индустриальной математике (ИНПРИМ-2000).
39. Красноперова Д. Г., Петров Ю. П. Обеспечение достоверности результатов расчета, использующего дифференциальные уравнения. Тезисы докладов симпозиума "Математическое моделирование в естественных и гуманитарных науках". Воронеж, 2000.
40. Красноперова Д. Г., Петров Ю. П., Фроленков Д. Б. Изменения в непрерывной зависимости решений дифференциальных уравнений от параметров при эквивалентных преобразованиях. Труды Международной научной конференции "Аналитическая теория автоматического управления и ее приложения". Саратов, 2000.
41. Новогран С. С., Петров Ю. П. Оптимизация нелинейных систем с вырожденными критериями качества. Труды Пятого симпозиума Международной федерации по автоматическому управлению. СПб., 2001.
42. Новогран С. С., Петров Ю. П. Нарушение устойчивости систем управления электродвигателями при вариациях параметров. Сборник докладов конференции "Оптим-2001", СПб., 2001.

43. Новогран С. С., Петров Ю. П. О новом источнике ошибок в расчетах, которые могут быть причиной аварий. Тезисы докладов научно-технической конференции "XL Крыловские чтения", СПб., 2001.

44. Петров Ю. П. О корректных, некорректных и промежуточных задачах математики (популярный рассказ). СПб.: Изд-во АНО НПО "Мир и семья", 2001. С. 77.

45. Петров Ю. П. Управление, устойчивость, оптимизация (научно-популярные очерки). СПб.: Изд-во СПбГУ, 2002. С. 94.

46. Васильев Ф. П., Иваницкий А. Ю. Линейное программирование. М.: Факториал, 1988. С. 176.

47. Петров Ю. П., Сизиков В. С. Корректные, некорректные и промежуточные задачи с приложениями. Учебное пособие для вузов. СПб.: Политехника, 2003. С. 261.

48. Конев В. Ю., Мироновский Л. А. Основные функции пакета MATLAB. Учебное пособие. СПб.: СПб ГААП, 1994. С. 75.

49. Андриевский Б. Р., Фрадков А. Л. Элементы математического моделирования в программных средах MATLAB 5 и Scilab. СПб.: Наука, 2001. С. 285.

50. Дьяконов В. П., Абраменкова И. В. MATLAB 5.0/5.3. Система символьной математики. М.: Нолидж, 1999. С. 640.

51. Дьяконов В. П. Mathcad 2001. Учебный курс. СПб.: Питер, 2001. С. 621.

52. Потемкин В. Г. Система MATLAB. Справочное пособие. М.: Диалог-МИФИ, 1999. С. 350.

53. Чен К., Джиблин П., Червинг А. MATLAB в математических исследованиях. М.: Мир, 2001. С. 346.

54. Поршнев С. В. Компьютерное моделирование физических процессов в пакете MATLAB. Учебное пособие для вузов. М.: Телеком, 2003. С. 592.

55. Кирьянов Д. В., Mathcad 11. СПб.: БХВ-Петербург, 2003. С. 538.

56. Дьяконов В. П. Mathcad 2001, учебный курс. СПб.: Питер, 2001. С. 621.

57. Чертков К. Г. Исследование чувствительности к погрешностям округления собственных значений линейных систем. Тула: Известия Тульского государственного университета, 2002. С. 138—140.

58. Степанов В. В. Курс дифференциальных уравнений. М.: ГИТТЛ, 1953. С. 468.

59. Матвеев Н. М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Высшая школа, 1967. С. 564.

60. Арнольд В. И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1975. С. 239

61. Матвеев Н. М. Обыкновенные дифференциальные уравнения. СПб.: Специальная литература, 1996. С. 371.

62. Адрианова Л. Я. Введение в теорию линейных систем дифференциальных уравнений. СПб.: Изд-во СПбГУ, 1992. С. 239.

63. Математическая энциклопедия. В 5-ти томах. М.: Советская энциклопедия, 1977.

64. Математический энциклопедический словарь. М.: Научное издательство "Большая российская энциклопедия", 1995. С. 847.

65. Алимов Ш. А., Колягин Ю. М.: Сидоров Ю. В. Пробный учебник для 10—11 классов средней школы. М.: Просвещение, 1990. С. 304.

66. Волгин Л. Н. Применение теории полиномиального исчисления к задачам теории автоматического управления // Известия АН СССР. Техническая кибернетика, 1987, № 6. С. 133—142.

67. Ларин В. Б. "Письмо в редакцию"; "Заключение" редколлегии журнала относительно полемики между Л. Н. Волгиным и В. Б. Лариным // Известия АН СССР, Техническая кибернетика, 1990, № 3. С. 213—214.

68. Петров Ю. П. Новые главы теории управления и компьютерных вычислений. СПб.: БХВ-Петербург, 2004. С. 192.

69. Клайн М. Математика. Утрата определенности. М.: Мир, 1984. С. 480.

70. Петров Ю. П. Очерк истории автоматического управления. СПб.: 2004. С. 270.

С публикациями [31]; [32]; [33]; [44]; [45] можно ознакомиться в Интернете на сайте: **www.petrov1930.narod.ru**.