Signal.

Traitement numérique d'un signal

Le 15.12.2019

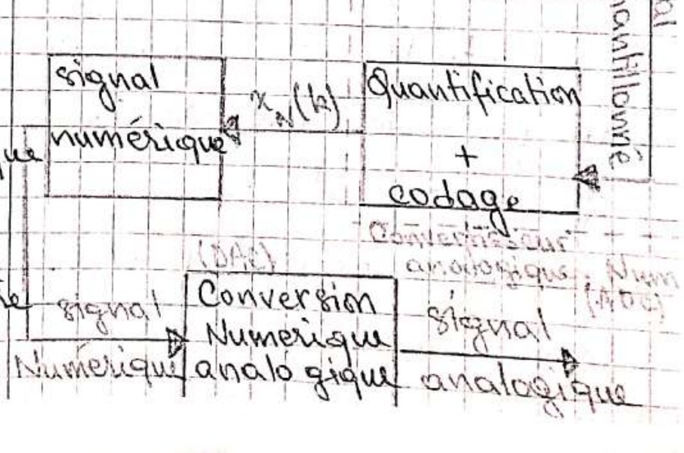
Chap 1 : Échantillonnage

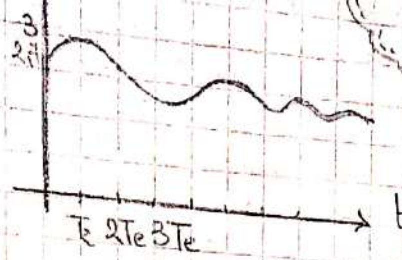
I. Introduction au traitement numérique d'un signal :

À l'instant des signaux analogiques, le traitement des signaux discrets (numériques = échantillonnés) a pour but d'extraire l'information qu'ils portent. Ce traitement s'effectue à l'aide des systèmes numériques qui sont composés de systèmes à microprocesseurs (μP), micro-contrôleurs (μC), DSP (Digital Signal processing), micro-ordinateurs, circuits logiques (les portes, FPGA ...).

Le traitement numérique d'un signal permet un gain de temps et d'argent par rapport au traitement analogique d'un signal. Le même circuit numérique peut être utilisé pour divers applications sans changer de circuit ce qui n'est pas le cas pour les systèmes analogiques, d'où l'utilisation actuelle de ces circuits dans la plupart des systèmes (Television, Radio, telephonie, domaine medical, ...).

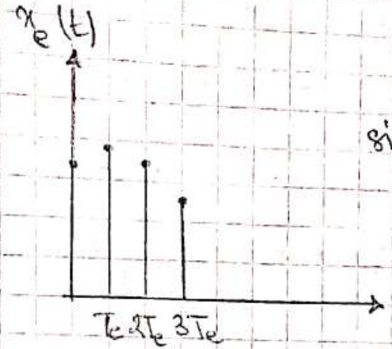
Cependant, jusqu'à présent la plupart des signaux à traiter ~~sont~~ proviennent de capteurs de mesure et sont de nature analogique. Ces signaux doivent être alors (échantillonnés) numérisés pour qu'ils puissent être traités d'une manière numérique.



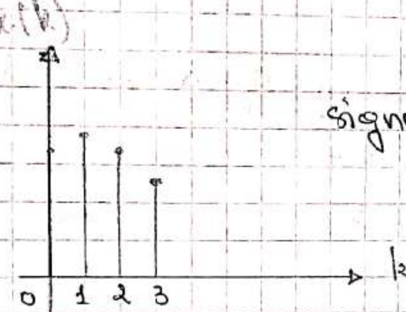


(... pas de partie négative)

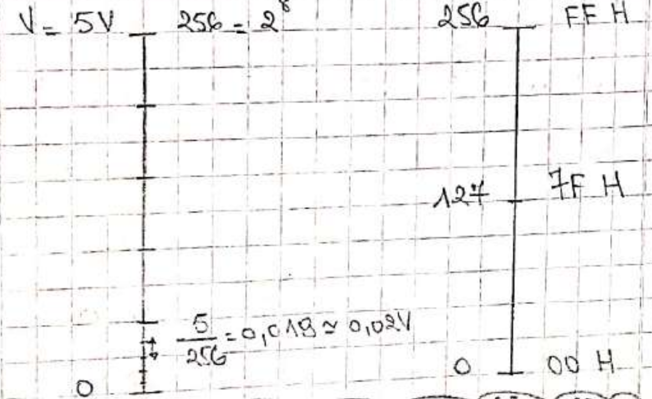
signaux bipolaires = avec partie négative



signal echantillonné



signal echantillonné

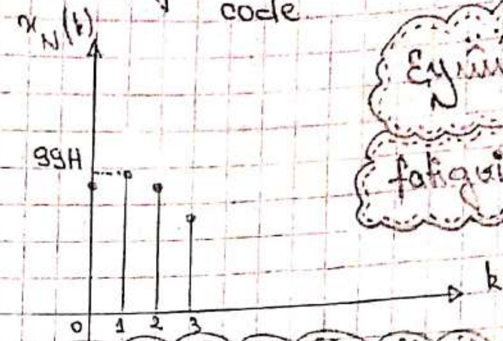


→ La quantification : la division de la plage en intervalle

→ pas de quantification : 0,01 V

Division de la plage de l'amplitude du signal avec un pas de quantification $q = \frac{V}{2^N}$ en 2^N intervalles (~~s'appelle~~) correspond à la quantification.

Le signal numerique codé



Eyiiiiy fatiguiiiiy

On fait un codage pour mémoriser les signaux

→ Le signal discret est equivalant au signal echantillonné ou numérique.

Le signal discret c'est la variable du temps qui est discrète

II. Echantillonnage :

L'opération d'échantillonnage consiste à convertir un signal analogique de forme quelconque en une suite de valeurs ponctuelles appellées échantillons prélevés à des instants multiples de "Te" appellés pas d'echantillonnage

→ Le prélèvement s'effectue à un rythme régulier.

Te : intervalle entre deux échantillons

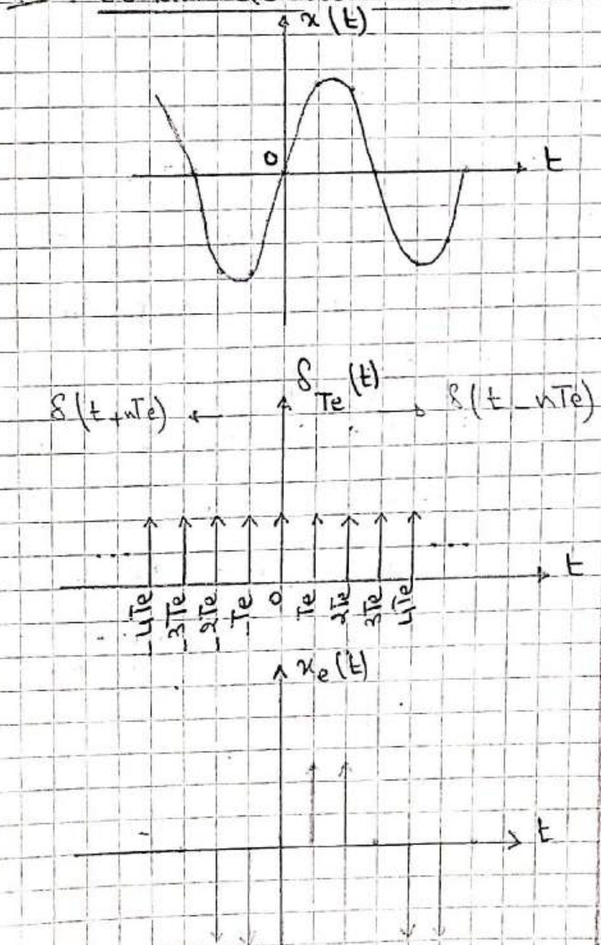
Le 16.12.2019

Remarque :

Théoriquement, l'echantillonnage est une opération réversible, c'est à dire on peut restituer le signal analogique à parti de ses échantillons (sous certaines conditions).

Cependant en pratique la procédure d'echantillonnage introduit toujours des distorsions qu'il convient de limiter

III Echantillonneur idéal :



Rappel :

$$x(t)\,\delta(t) = x(0)\,\delta(t)$$

$$x(t)\,\delta(t-t_0) = x(t_0)\,\delta(t-t_0)$$

$$\delta_{Te}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t-kTe)$$

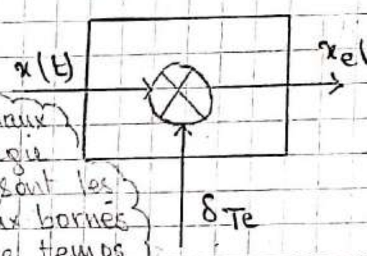
$$= \dots + \delta(t+2Te) + \delta(t+Te) + \delta(t) + \delta(t-Te) + \delta(t-2Te) + \delta(t-3Te) + \dots$$

$$x_e(t) = x(t)\,.\,\delta_{Te}(t)$$

$$x_e(t) = x(t)\,.\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t- \quad)$$

$$x_e(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(t)\,\delta(t-kTe)$$

$$\boxed{x_e(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kTe)\,\delta(t-kTe)}$$



Les signaux à énergie finie sont les signaux bornés dans le temps

Echantillonneur idéal

D'un point de vue fréquentiel

$$x_e(t) = x(t)\,.\,\delta_{Te}(t)$$

Appliquons la TF : (transformée de Fourier) :

$$X_e(f) = X(f) * TF\{\delta_{Te}(t)\}$$

La suite est dans la page suivante

Rappel sur la TF :

$$X(f) = TF\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-2\pi f t}\, dt$$

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\,\delta(t)\,dt = x(0) \quad (\text{Déf de } \delta(t))$$

... les signaux periodiques :

($x(t)$ de periode T_0) :

$$X(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k \, \delta(f - kF_0)$$

$$X_k = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) \, e^{-2\pi f t} \, dt$$

Si $x(t) = \delta_{Te}(t)$

$$TF\{\delta_{Te}(t)\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k \, \delta(f - kF_e)$$

$$X_k = \frac{1}{Te} \int_0^{Te} \delta(t) \, e^{-2\pi k F_e t} \, dt$$

$$X_k = F_e \cdot e^0 = F_e$$

$$TF\{\delta_{Te}(t)\} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} F_e \, \delta(f - kF_e)$$

$$= Fe \sum_k \delta(f - kF_e)$$

$$= Fe \, \delta_{Fe}(f)$$

fin du rappel ;

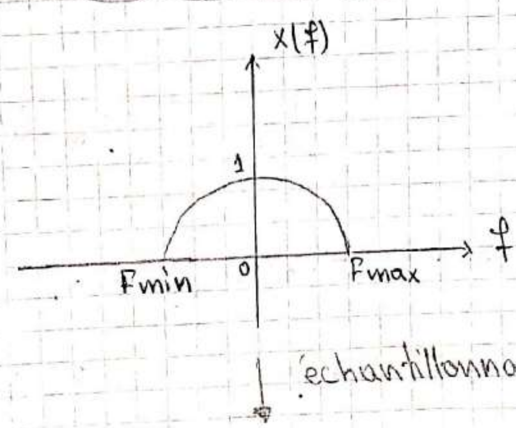
→ La suite est là :

$$X_e(f) = X(f) * Fe \, \delta_{Fe}(f)$$

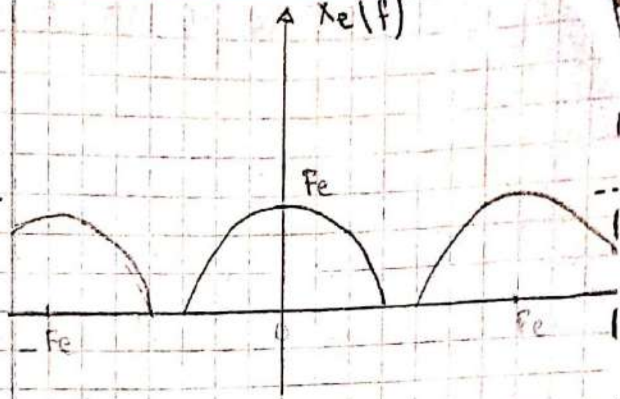
$$X_e(f) = X(f) * Fe \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(f - kFe)$$

$$X_e(f) = Fe \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(f) * \delta(f - kFe)$$

$$X_e(f) = F_e \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(f - kFe)$$



↓ echantillonnage



→ Le spectre d'amplitude $X_e(f)$ d'un signal echantillonné est identique au spectre du signal d'origine et qui se répète d'une manière identique avec une période "F_e" $\left(= \frac{1}{Te}\right)$

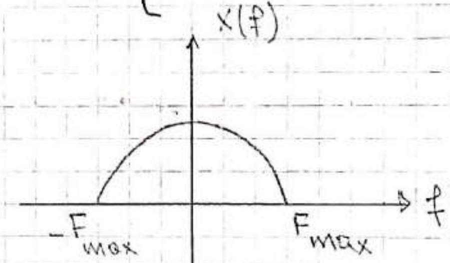
IV. Théorème de Shannon :

(théorème d'echantillonnage)

Il permet de définir la periode d'echantillonnage Te d'un signal ayant un spectre d'amplitude de type passe-bas.

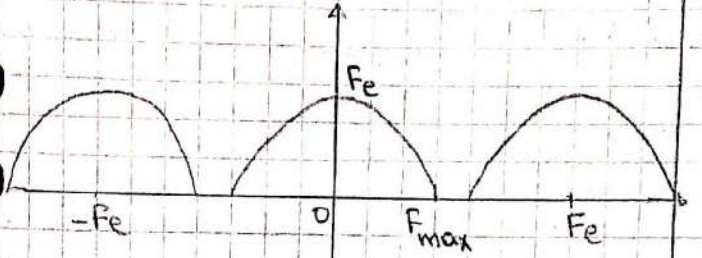
Soit $X(f)$ (~~la transformée~~) le spectre d'amplitude d'un signal $x(t)$ tel que

$$X(f) = \begin{cases} \neq 0 & \text{si } f \in [-F_{max}, F_{max}] \\ 0 & \end{cases}$$



Cas : $F_e - F_{max} \geq F_{max}$

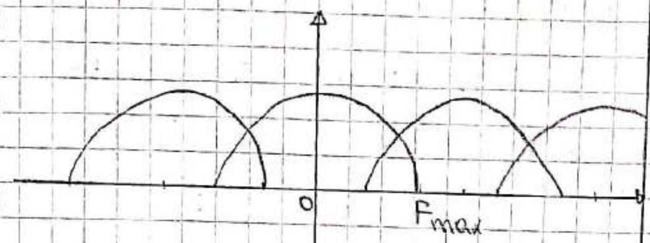
$F_e \geq 2F_{max}$



→ Pas de recouvrement spectrale.

Cas : $F_e - F_{max} \leq F_{max}$

$F_e \leq 2F_{max}$



→ Recouvrement spectrale.

Recouvrement spectrale ou chevauchement entre les spectres est dit en Anglais Aliasing.

* Si $F_e \geq 2F_{max}$, on peut restituer le signal car on peut extraire $X(f)$ à partir de $X_e(f)$

* Si $F_e \leq 2F_{max}$, $X_e(f)$ est déformé ce qui ne permet pas de restituer le signal d'origine.

Enoncé de Shannon

Un signal analogique $x(t)$ ayant un spectre d'amplitude bornée entre $[-F_{max}, F_{max}]$ est entierement décrit par ses valeurs instantannées régulièrement espacées d'une durée Te tel que :

$F_e \leq \frac{1}{2F_{max}}$ ou $F_e \geq 2F_{max}$

Le 19.12.2019

Remarques :

1. $\frac{F_e}{2} = F_N$: fréquence de Nyquist.

2. Quelques exemples :

→ Telephonie : Signal parole : $F_{max} = 3{,}4$ KHz

⇒ $F_e \geq 6{,}8$ KHz → standard international $F_e = 8$ KHz.

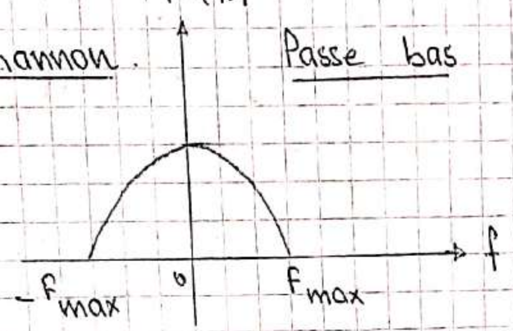
→ Video : $F_{max} = 5$ MHz

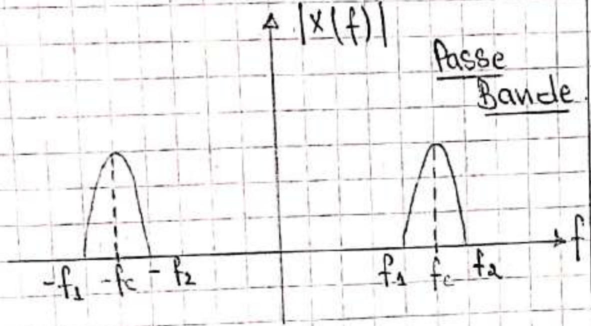
$F_e \geq 10$ MHz → $F_e = 18$ MHz.

* Pour appliquer le théorème de Shannon, il faut connaître F_{max} du signal analogique.

V. Echantillonnage des signaux à spectre d'amplitude bornée et non centré :

→ Le theoreme de Shannon concerne les signaux à spectre borné et centré (passe bas)

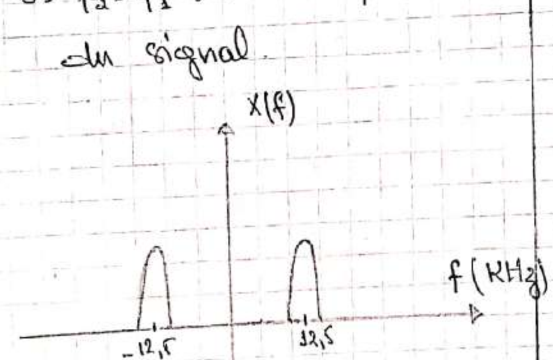




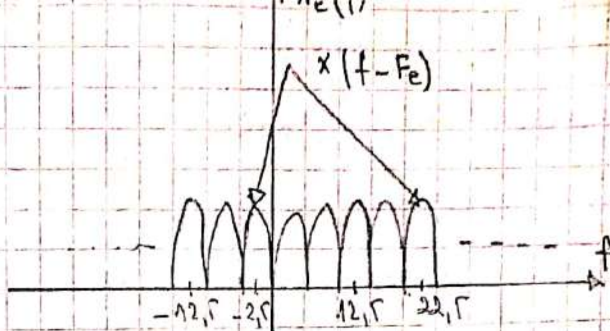
D'aprés Shannon, $F_e \geq 2f_c$

Or on peut toujours echantillonner ce type de signal avec $F_e = 2B$

$B = f_2 - f_1$: Bande passante du signal.



$F_e = 2B = 10$ KHz.



⇒ Pas de recouvrement spectral on peut ~~réaliser~~ réstituer le signal analogique à partir de ses echantillons

⇒ $F_e = 2B$ ~~convient~~

★ D'une maniere generale :

→ Si f_2 est un entier multiple de B c'est à dire $\frac{f_2}{B} = k \in \mathbb{N}$

→ Si $f_c = \frac{f_2 + f_1}{2} > \frac{B}{2}$

alors : $F_e = 2B$

→ Si $\frac{f_2}{B} = k \notin \mathbb{N}$

$F_e = 2B'$ avec $B' = \frac{f_2}{[k]}$ partie entière de k

Exemple :

$f_2 = 15$ KHz et $B = 2$ KHz

$f_1 = 13$ KHz.

$\frac{f_2}{B} = \frac{15}{2} = 7,5 = k$

$B = \frac{f_2}{[k]} = \frac{15}{7} = 2,14$

$F_e = 2B = 4,28$ KHz.

VI. Echantillonnage d'un signal translaté :

$x(t)$ et $x(t-t_0)$

Si $X(f)$ est la transformée de Fourier TF de $x(t)$

$$X(f) = TF\{x(t)\} = |X(f)| e^{j\varphi(f)}$$

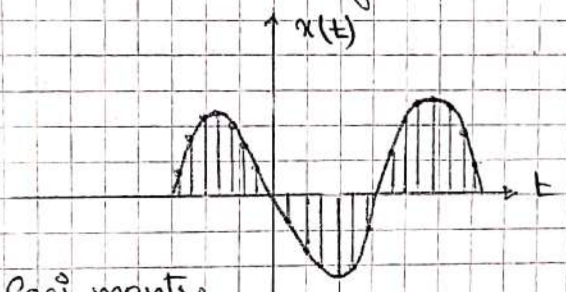
$$TF\{x(t-t_0)\} = X(f)\underbrace{e^{-j2\pi f t_0}}_{\text{déphasage}}$$

$$= |X(f)| e^{j\varphi(f)} \cdot e^{-j2\pi f t_0}$$

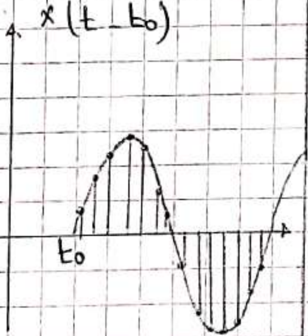
$$= |X(f)| e^{j(\varphi(f) - 2\pi f t_0)}$$

$\Rightarrow x(t)$ et $x(t-t_0)$ ont un même spectre d'amplitude

$\Rightarrow$ On peut les echantillonner avec la même fréquence d'echantillonnage.



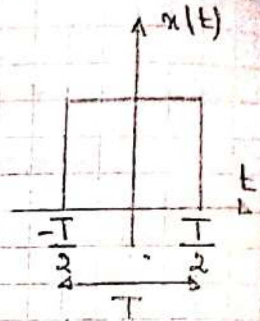
Ceci montre que l'ecart entre les impulsions est plus important que leurs positions.



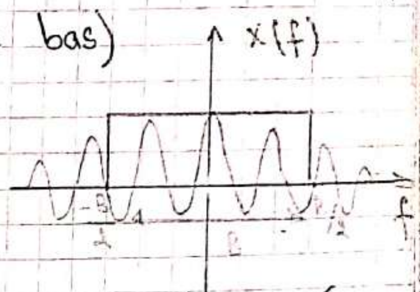
VII. Echantillonnage d'un signal à support borné (durée limitée) :

$x(t) = \Pi_T(t)$ (durée finie)

$X(f) = T \operatorname{sinc}(Tf)$



Or le theorème de Shannon a été établi pour des signaux ayant un spectre d'amplitude borné (passe bas)



Si $x(t)$ est à support borné sur spectre d'amplitude n'est pas borné en fréquence ($F_{max} = \infty$) $F_e = \infty$

En pratique limitée $|X(f)|$

$X(f) \cdot \Pi_B(f) \Rightarrow x(t) * B \operatorname{sinc}(Bt)$

$\Rightarrow x(t)$ est filtré avec un filtre linéaire de réponse impulsion.

$h(t) = B \operatorname{sinc}(Bt)$.

$\Rightarrow F_e \gg B$

VIII. Echantillonnage réel :

L'echantillonnage ne peut pas être réalisé physiquement à cause du peigne de Dirac qui est irréalisable.

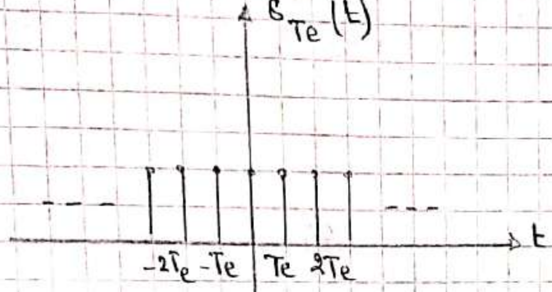
En pratique, on utilise un train d'impulsions de largeur finie à la place du peigne de Dirac.

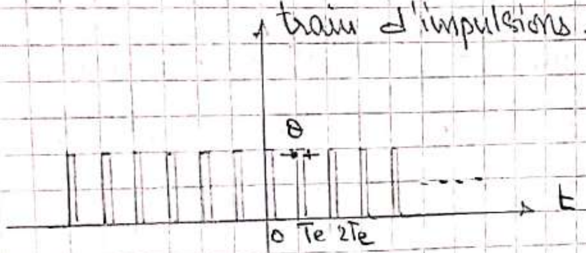
→ Echantillonnage idéal:

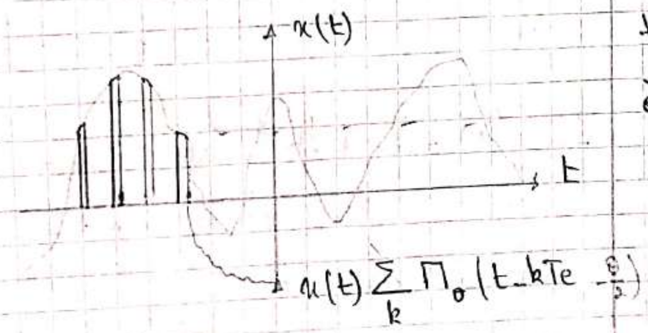
$$x_e(t) = x(t).\delta_{Te}(t) = x(t)\sum_k \delta(t - kT_e)$$

→ Echantillonnage réel:

$$x_e(t) = x(t).\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \Pi_\theta\left(t - kTe - \frac{\theta}{2}\right)$$







$x(t).\sum_k \Pi_\theta(t - kTe) - \frac{\theta}{2}$ ne fournit pas une suite d'echantillons pour obtenir un signal echantillonné.

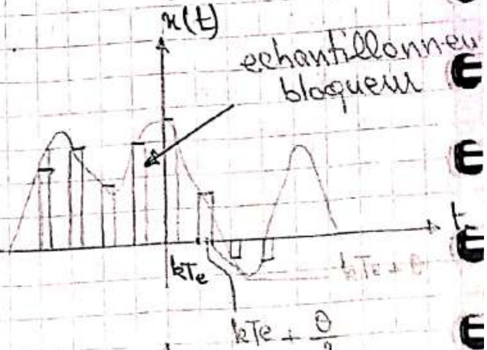
On doit prendre soit la valeur moyenne sur chaque interval θ (echantillonneur moyenneur) soit prendre les echantillons à l'instant kTe (echantillonneur bloqueur)

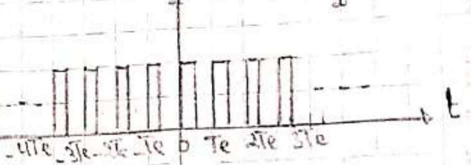
Ce dernier est le plus utilisé en pratique.

Le 05-01-2020

Echantillonneur bloqueur:

Il consiste à prendre l'echantillon du signal analogique à l'instant kTe et le mémoriser temporairement durant le temps de conversion en numérique (quantification + codage) qui correspond à θ.





À l'instant kTe

$$x(kTe) = x(t) \cdot \Pi_\theta\left(t - kTe - \frac{\theta}{2}\right)$$

$$x_e(t) = x(t) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \Pi_\theta\left(t - kTe - \frac{\theta}{2}\right)$$

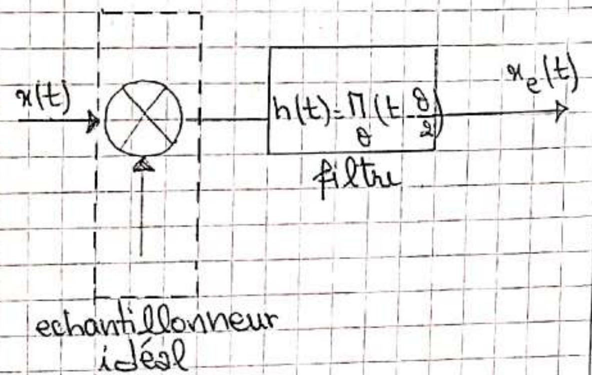
$$x_e(t) = x(t) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \Pi_\theta\left(t - \frac{\theta}{2}\right) * \delta(t - kTe)$$

$$x_e(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(t)\left[\Pi_\theta\left(t - \frac{\theta}{2}\right) * \delta(t - kTe)\right]$$

$$x_e(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(t)\left[\delta(t - kTe) * \Pi_\theta\left(t - \frac{\theta}{2}\right)\right]$$

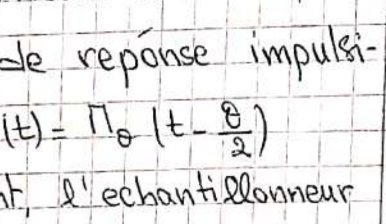
$$= \left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(t)\,\delta(t - kTe)\right] * \Pi_\theta\left(t - \frac{\theta}{2}\right)$$

$$x_e(t) = \underbrace{x(t) \cdot \delta_{Te}(t)}_{\text{echantillonneur idéal}} * \Pi_\theta\left(t - \frac{\theta}{2}\right)$$



→ Echantillonneur bloqueur = echantillonneur idéal + filtre linéaire de reponse impulsionnelle $h(t) = \Pi_\theta\left(t - \frac{\theta}{2}\right)$

Pratiquement, l'echantillonneur bloqueur peut-être réalisé avec un circuit de maintien (mémorisation) RC.



D'un point de vue fréquentiel

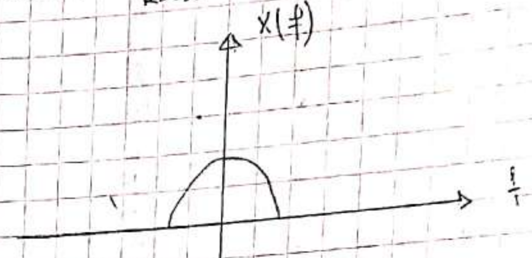
$$X_e(f) = X(f) * Fe\,\delta_{Fe}(f) \cdot TF\left\{\Pi_\theta\left(t - \frac{\theta}{2}\right)\right\}$$

$$TF\left\{\Pi_\theta\left(t - \frac{\theta}{2}\right)\right\} = \theta \operatorname{sinc}(f\theta)$$

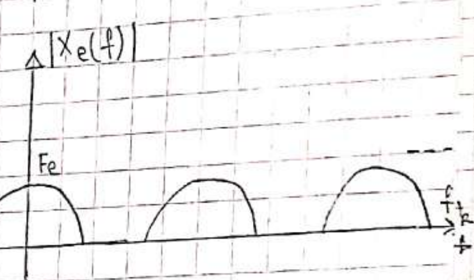
$$TF\left\{\Pi_\theta\left(t - \frac{\theta}{2}\right)\right\} = \theta \operatorname{sinc}(f\theta)\, e^{-j\pi\theta f}$$

$$X_e(f) = Fe \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(f - kFe) \cdot \theta \operatorname{sinc}(f\theta)$$

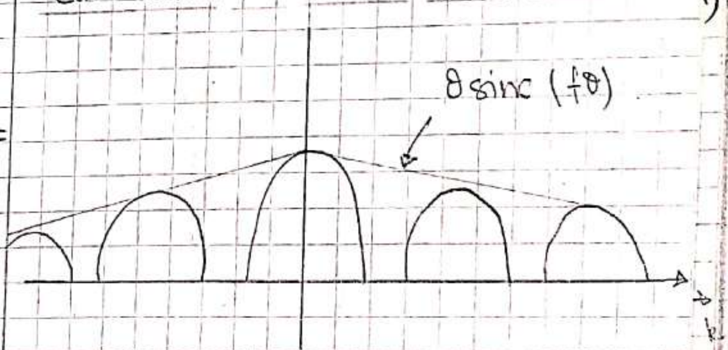
$$|X_e(f)| = Fe \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |X(f - kFe)|\, \theta \operatorname{sinc}(f\theta)$$



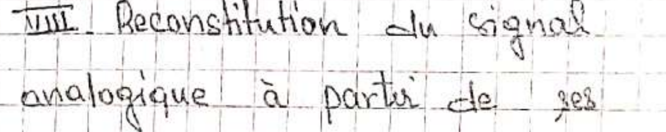
Cas idéal :



Cas echantillonneur bloqueur :



VIII Reconstitution du signal analogique à partir de ses echantillons :



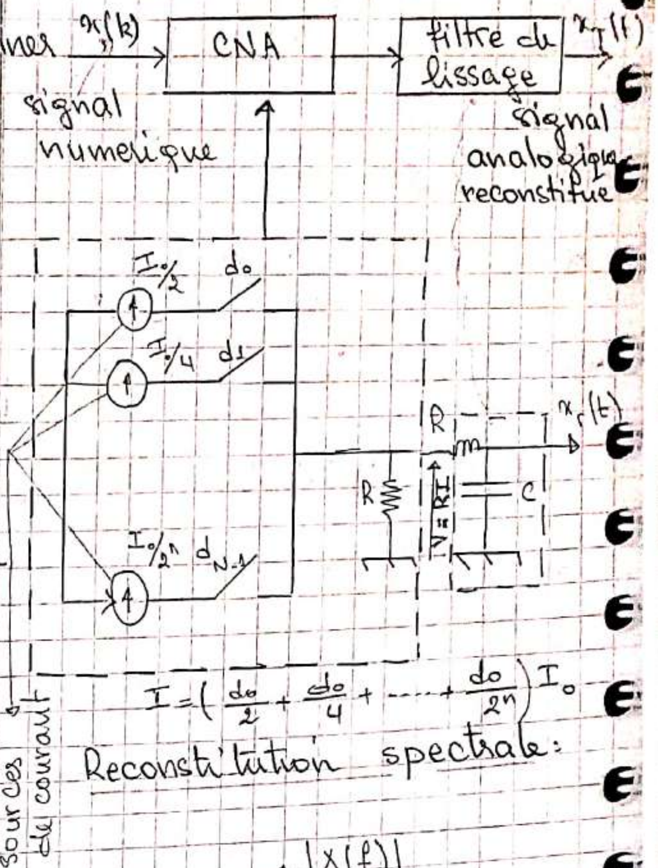
La reconstitution d'un signal analogique à partir des echantillons consiste à determiner toutes les valeurs du signal entre deux echantillons successifs. Cette opération peut-être réalisée par une interpolation polynomiale. En pratique, un polynôme d'ordre 0 ou eventuellement d'ordre 1 est utilisé.

→ Dans (~~x~~) le cas de l'interpolation polynomiale d'ordre 0 il suffit de maintenir dans tout l'interval $kTe < t < (k+1)Te$ la valeur de l'echantillon à l'instant kTe. Cette opération est réalisée par un convertisseur numérique-analogique (CNA)

L'echantillonneur bloqueur d'ordre 0 introduit un effet escalier, qui est indésirable. Pour l'eliminer, on rajoute un filtre de lissage.

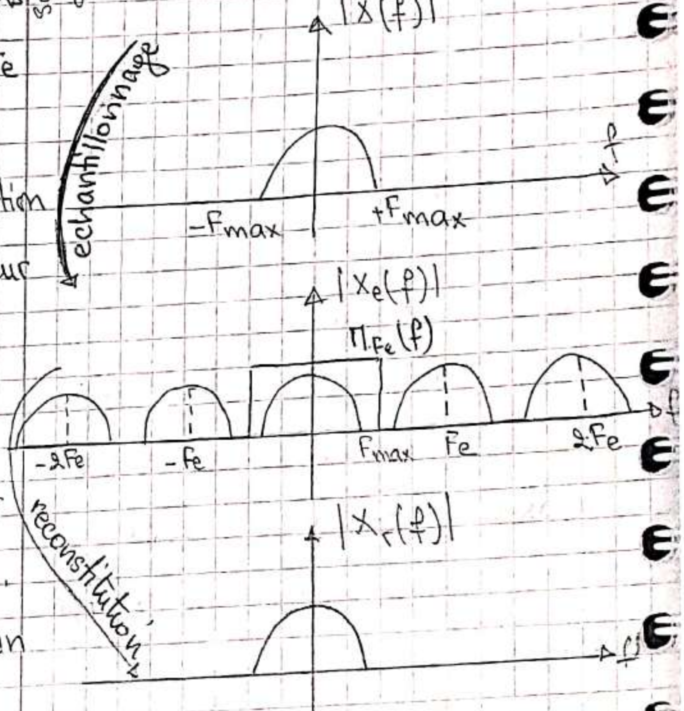
Le 09.01.2020

En pratique :



$$I = \left(\frac{d_0}{2} + \frac{d_0}{4} + \dots + \frac{d_0}{2^n}\right) I_0$$

Reconstitution spectrale :



$$X_r(f) = X_e(f) \cdot \Pi_{Fe}(f)$$

$$X_r(f) = x_e(t) * Fe\, sinc(Fe\,t)$$

$$\Pi_T(t) \xrightarrow{TF} T\, sinc(fT)$$

$$F\, sinc(FT) \longrightarrow \Pi_F(f)$$

$x_e(t) \rightarrow$ Filtre $h(t) = Fe\, \text{sinc}(Fe\, t)$ $\rightarrow x_r(t)$

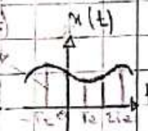
filtre passe-bas

Chap 2 : Signaux discrets.

1) Introduction :

Un signal discret (echantillonné) $x_e(t)$ est défini par les valeurs instantannées à des instants multiples de Te (pas ou période d'echantillonnage)

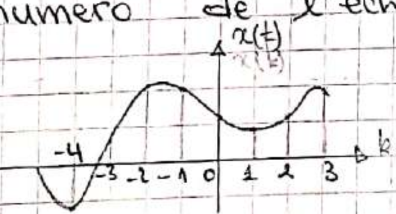
$x_e(t) = x(t)$ à $t = kTe$



avec : $k \in \mathbb{N}$

$x_e(t) = x(kTe)$

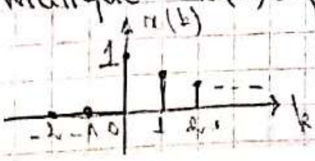
Au lieu de s'encombrer de Te, on représente un signal discret par $x(k)$ avec k étant le numéro de l'echantillon



$x(k)$ peut-être représenté par les valeurs de ses echantillons

$x(k) = \{ \ldots 1{,}5 ; 2{,}5 ; 1{,}8 ; 2 ; 1{,}9 \ldots \}$

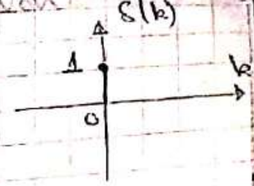
ou par une formule mathématique : $x(k) = \begin{cases} (0{,}5)^k & k \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$



2). Signaux elementaire

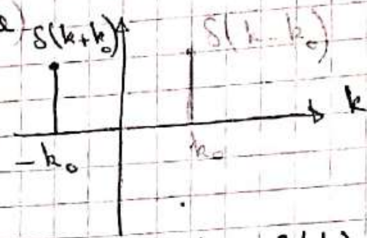
→ Signal echantillon

$$\delta(k) = \begin{cases} 1 & \text{si } k = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$



Remarque :

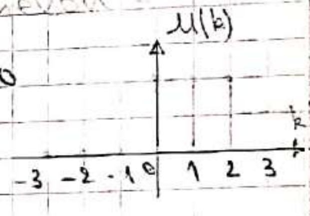
→ $\delta(k - k_0) \equiv \delta(k)$ retardé de k_0 echantillons.



→ $\delta(k + k_0) = \delta(k)$ avancé de k_0 echantillons.

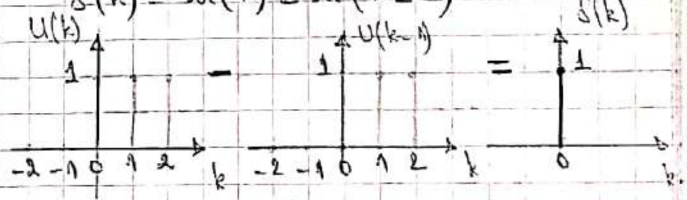
→ Signal echelon :

$$u(k) = \begin{cases} 1 & \text{si } k \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$



$$u(k) = \sum_{l=0}^{+\infty} \delta(k - l) = \delta(k) + \delta(k-1) + \delta(k-2) + \ldots$$

$$\delta(k) = u(k) - u(k-1)$$



$$\delta(t) = \frac{du(t)}{dt} = \frac{\Delta u(t)}{\Delta t} = \frac{u(t) - u(t - \Delta t)}{\Delta t}$$

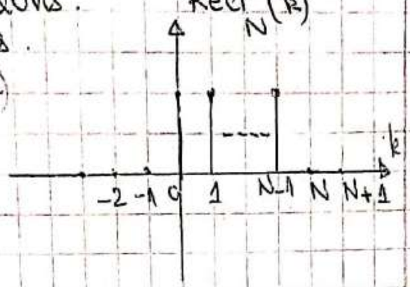
$$= \frac{u(kTe) - u(k-1)Te}{Te} = u(k)\, u(k-1)$$

$(\Delta t = Te)$

→ Signal rectangulaire :

$$Rect_N(k) = \begin{cases} 1 & si \quad 0 \leq k \leq N-1 \\ 0 & sinon \end{cases}$$

Possède N echantillons finies. (Durée finie)



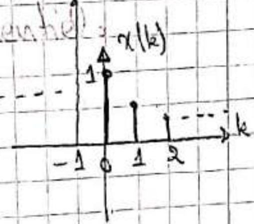
$$rect_N(k) = \delta(k) + \delta(k-1) \cdots + \delta(k-N-1)$$
$$= \sum_{l=0}^{N-1} \delta(k-l)$$

$$rect_N(k) = u(k) - u(k-N)$$

→ Signal exponentiel :

$$x(k) = a^k$$

exemple : $a = 0,5$

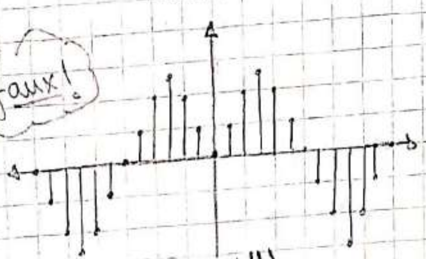


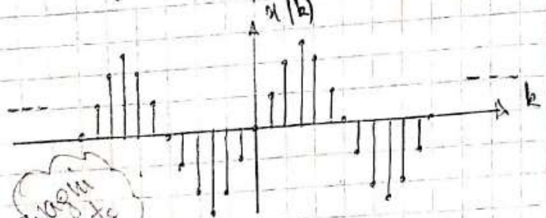
→ Signal sinusoïdal :

$$x(k) = \sin\left(\frac{2\pi}{N} k\right)$$

avec : N = période du signal = Nbre d'echantillons.

faux !





wagin juste

Remarque :

$x(k)$ peut-être complexe (valeurs des echantillons sont complexes)

$$x(k) = e^{(a+j2\pi f)k}$$
$$= e^{ak}\left(\cos(2\pi f k) + j\sin(2\pi f k)\right)$$

le 15.01.2020

~~Comme en analogique, les signaux discrets peuvent être de nature deterministe~~

3) Quelques définitions sur les signaux discrets :

Comme en analogique, les signaux discrets peuvent être de nature deterministe

* Signaux périodiques :

$x(k)$ est périodique de periode N

avec N : Nbre d'echantillons.

si : $x(k) = x(k + \alpha N)$, $\alpha \in \mathbb{N}$.

* Causalité :

$x(k)$ est causal si :

$$x(k) = 0 \quad \forall\, k < 0.$$

* Parité :

$x(k) = x(-k) \Rightarrow x(k)$ est paire

$x(k) = -x(-k) \Rightarrow x(k)$ est impaire

$$x(k) = x_p(k) + x_{imp}(k)$$

$$x_p(k) = \frac{x(k) + x(-k)}{2}$$

$$x_{imp}(k) = \frac{x_k - x(-k)}{2}$$

* Signaux à énergie finie.

$x(k)$ est à énergie fini si :

$$W_i = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |x(k)|^2 < \infty$$

* Signaux à puissance moyenne finie.

$x(k)$ est à puissance moyenne fini si :

$$0 < P_x = \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}} |x(k)|^2 < \infty$$

$$0 < \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |x(t)|^2 dt < \infty$$

Quelques Opérations :

Somme (différence) :

$$x(k) = x_1(k) \pm x_2(k).$$

Produit :

$$x(k) = x_1(k) \cdot x_2(k).$$

à condition que $x_1(k)$ et $x_2(k)$ ont la même période d'échantillonnage sinon on peut précéder à un rééchantillonnage.

* Signaux à durée finie

$x(k)$ est à durée finie s'il possède un nombre fini d'échantillons.

Remarque :

→ Un signal à durée fini est forcément à énergie finie.

→ Un signal ayant un [illegible] infini d'échantillons est en princip à puissance moyenne finie.

Formules utiles :

* $$\sum_{k=0}^{N-1} \alpha^k = \begin{cases} \frac{1-\alpha^N}{1-\alpha} & \text{si } \alpha \neq 1 \\ N & \text{si } \alpha = 1 \end{cases}$$

* $$\sum_{k=l}^{\infty} \alpha^k = \frac{\alpha^l}{1-\alpha} \quad ; \quad |\alpha| < 1$$

* $$\sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k = \frac{1}{1-\alpha} \quad ; \quad |\alpha| < 1$$

* $$\sum_{k=0}^{\infty} k\alpha^k = \frac{\alpha}{(1-\alpha)^2} \quad ; \quad |\alpha| < 1$$

Chap III : Transformée de Fourrier des signaux discrets.

I- Introduction

la T.F est une opération qui permet de représenter des signaux analogiques ou discrets dans un espace fréquentiel c'est l'outil le plus important (indispensable) en traitement du signal.

Pour les signaux discrets la T.F se décrit en deux types :

→ La TFSD (transformée de fourrier des signaux discrets)

→ La TFD (transformée de fourrier discrète)

La TFSD permet de représenter un signal discret dans l'espace fréquentiel de la même manière qu'un signal analogique. Elle est donc plus utile théoriquement pour comprendre ou établir des analogies.

→ La TF d'un signal analogique $x(t)$ est :

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-j2\pi ft}\, dt$$

condition : $\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|\, dt < \infty$

$x(t)$ est absolument intégrable.

→ La TF d'un signal discret (TFSD) est :

$$X(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\, e^{-j2\pi fk}.$$

condition : $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |x(k)| < \infty$

Absollument sommable.

Propriétés de la TFSD

toutes les propriétés de la TFSD sont identiques à celle de la TF des signaux analogiques, a quelques exptions près.

Cependant, une des propriétés importante n'existe pas dans la TF c'est celle de la périodicité de $X(f)$:

• Propriété de périodicité :

La TFSD $X(f)$ est tjrs Périodique de Periode $F = 1$ $\forall\, x(k)$ (Periodique ou Non Periodique)

Preuve :

Verifions que $X(f) = X(f + \alpha F)$ $\alpha \in \mathbb{N}$.

$$X(f) = X(f+\alpha)$$

$$X(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\, e^{-j2\pi kf}$$

$$X(f+\alpha) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\, e^{-j2\pi k(f+\alpha)}$$

$$X(f+\alpha) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\, e^{-j2\pi kf}\, e^{-j2\pi k \alpha}$$ entier

Remarque : Toutes les fréquence de $X(k)$ sont Normalisé entre 0 et 1

* TFSD inverse : Le 22.01.2020

Pour un signal analogique TF^{-1} d'un signal $x'(t)$ est

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)\, e^{+j2\pi ft}\, dt$$

Pour un signal discret $x(k)$ sa $TFSD^{-1}$ est :

$$x(k) = \frac{1}{F}\int_{-F/2}^{F/2} X(f)\, e^{j2\pi fk}\, df$$

$$x(k) = \int_{-1/2}^{1/2} X(f)\, e^{j2\pi fk}\, df \quad TFSD^{-1}$$

→ Quelques propriétés :

$$\left.\begin{aligned}
&x(k) \xrightarrow{TFSD} X(f) \\
&x(k-k_0) \xrightarrow{TFSD} X(f)\, e^{-j2\pi fk_0} \\
&x(k+k_0) \xrightarrow{TFSD} X(f)\, e^{j2\pi k_0 f} \\
&x(k)\, e^{-j2\pi f_0 k} \xrightarrow{TFSD} X(f+f_0) \\
&x(k)\, e^{j2\pi kf_0} \xrightarrow{TFSD} X(f-f_0)
\end{aligned}\right\} = TF$$

→ Similitude :

$$x(at) \xrightarrow{TF} \frac{1}{|a|} X(f/a)$$

$$x(ak) \xrightarrow{TFSD} X(f/a)$$

* Théorème de Parseval :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2\, df$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |x(k)|^2 = \int_{-1/2}^{1/2} |X(f)|^2\, df$$

* Théorème de Plancherel :

$$x(k) * h(t) \xrightarrow{TFSD} X(f) \cdot H(f)$$

$$x(k) \cdot h(k) \xrightarrow{TFSD} X(f) \circledast H(f)$$

Quelques exemples de TFSD :

$$\delta(t) \xrightarrow{TF} X(f) = 1$$

$$\delta(k) \xrightarrow{TFSD} X(f) = 1$$

$$X(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(k)\, e^{-j2\pi kf}$$

$$= e^0 = 1$$

avec : $\delta(k) = \begin{cases} 1 & \text{si } k = 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

$$\cos(2\pi kf_0) \xrightarrow{TFSD} \delta(f-f_0) + \delta(f+f_0)$$

- $x(k) = \text{rect}_N(k + N/2)$

$$X(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\, e^{-j2\pi kf}$$

$$X(f) = \sum_{-N/2}^{N/2-1} 1\, e^{-j2\pi fk}$$

$$X(f) = \sum_{k=-N/2}^{N/2-1} \big(\underbrace{e^{-j2\pi f}}_{\alpha}\big)^k$$

$$X(f) = \sum_{k=0}^{N-1} \left(e^{-j2\pi f}\right)^{k-\frac{N}{2}}$$

$$= \sum_{k=0}^{N-1} e^{-j2\pi kf}\, e^{j\pi fN}$$

$$= e^{j\pi fN} \sum_{k=0}^{N-1} \left(e^{-j2\pi f_0}\right)^k$$

$$X(f) = e^{j\pi fN}\, \frac{1 - e^{j2\pi fN}}{1 - e^{-j2\pi f}}$$

$$X(f) = \frac{e^{j\pi fN} - e^{-j\pi fN}}{1 - e^{-j2\pi f}}$$

$$= \frac{e^{j\pi fN} - e^{j\pi fN}}{e^{j\pi f} \cdot e^{-j\pi f} - e^{-j\pi f} e^{-j\pi f}}$$

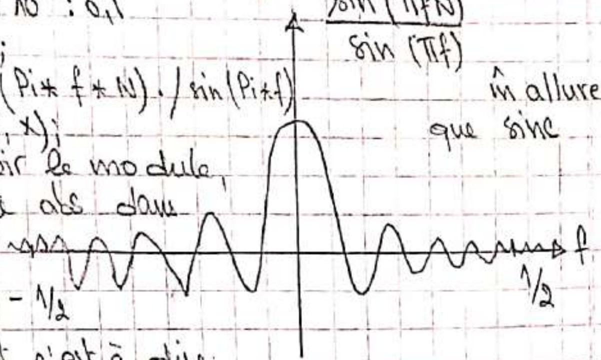
$$X(f) = \frac{1}{e^{-j\pi f}}\, \frac{e^{j\pi fN} - e^{-j\pi fN} \,/2j}{e^{j\pi f} - e^{-j\pi f} \,/2j}$$

$$X(f) = e^{j\pi f}\,\frac{\sin(\pi f N)}{\sin(\pi f)}$$

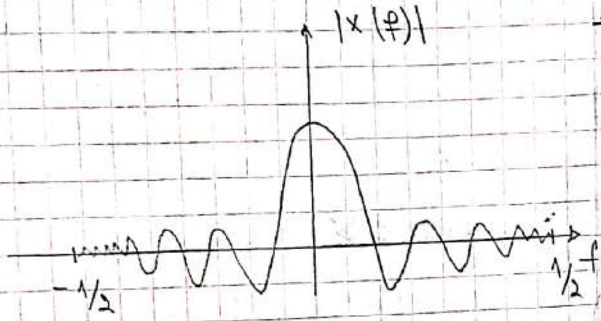
$$\Rightarrow |X(f)| = \left|\frac{\sin(\pi f N)}{\sin(\pi f)}\right|$$

$$\mathrm{sinc}(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$$

$f = -0,5 : 10^{-3} : 0,5;$
$N = 50;$
$x = \sin(Pi*f*N)./\sin(Pi*f);$
Plot (f, x);
Pour voir le module, on ajoute abs dans le plot c'est à dire plot (f, abs x);



m allure que sinc



3. Transformée de Fourier discrète (TFD) :

La TFSD ne peut pas être utilisée sur les systèmes numériques car

→ son calcul nécessite un nombre infini d'echantillons.

→ La variable frequentielle f est continue et ne peut être manipulée dans le système numérique.

Pour remedier à ces deux inconvénients, la TFD a été proposé. Elle consiste a discrétisé la variable fréquentielle f et prendre un nombre fini d'echantillons. Il suffit donc de diviser l'axe des fréquences en n échantillons tel que :

$$f_n = n\Delta f \quad ; \quad \Delta f = \frac{1}{N}$$

→ La TFD d'un signal discret $x(k)$ est définie par :

$$X(n\Delta f) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k)\, e^{-j2\pi k n \Delta f}$$

$$X(n) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k)\, e^{-j\frac{2\pi k n}{N}}$$

$$n = -\frac{N}{2}, \dots, \frac{N}{2} - 1$$

Le 29-01-2020

Remarque :

$X(n)$ est periodique de periode N $\forall\, x(k)$

Preuve :

Montrons que $X_n = X(n + \alpha N)$

$$X(n+\alpha N) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k)\, e^{-j\frac{2\pi k}{N}(n+\alpha N)}$$

$$= \underbrace{\sum_{k=0}^{N-1} x(k)\, e^{-j\frac{2\pi k n}{N}}}_{X(n)} \cdot \underbrace{e^{-j2\pi k\alpha}}_{=1}$$

$X(n+\alpha N) = X(n)$ CQFD

La TFD inverse est:

$$x(k) = TFD^{-1}\{X(n)\}$$

$$\boxed{x(k) = \frac{1}{N}\sum_{n=-\frac{N}{2}}^{N/2-1} X(n)\, e^{j\frac{2\pi kn}{N}} \qquad k = 0, \dots, N-1}$$

Remarque:

$x(k)$ est périodique de période N ce qui est contradictoire avec le signal d'origine qui peut ne pas être périodique.

II Propriétés de la TFD:

(voir table):

$x(k) \in \mathbb{C}$ $\quad x^*(k) \xrightarrow{TFD} X^*(-n)$

$x(ak) \xrightarrow{TFD} X^*\left(\frac{n}{a}\right)$

$x(k) * y(k) \xrightarrow{TFD} X(n)\,Y(n)$

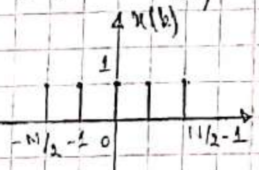
$x(k)\, y(k) \xrightarrow{TFD} X(n) \circledast Y(n)$

III Calcul de la TFD:

1. Calcul analytique:

exemple: $x(k) = rect_N\left(k + \frac{N}{2}\right)$

$$X(n) = \sum_{k=-N/2}^{N/2-1} x(k)\, e^{-j\frac{2\pi kn}{N}}$$



$$X(n) = \sum_{k=0}^{N-1} e^{-j\frac{2\pi(k - N/2)n}{N}}$$

$$X(n) = \sum_{k=0}^{N-1} e^{-j\frac{2\pi kn}{N}} \cdot \underbrace{e^{j\pi n}}_{(-1)^n}$$

$$X(n) = (-1)^n \sum_{k=0}^{N-1} \left(e^{-j\frac{2\pi n}{N}}\right)^k$$

$$X(n) = (-1)^n \frac{1 - \left(e^{-j\frac{2\pi n}{N}}\right)^N}{1 - e^{-j\frac{2\pi n}{N}}}$$

$$X(n) = (-1)^n \frac{1 - e^{-j2\pi n}}{1 - e^{-j\frac{2\pi n}{N}}}$$

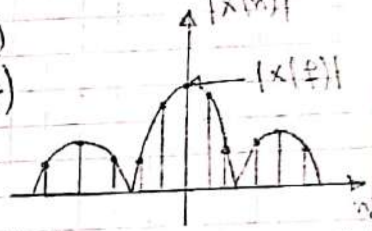
$$X(n) = \frac{e^{j\pi n} - e^{-j\pi n}}{e^{j\frac{2\pi}{N}} \cdot e^{-j\frac{\pi n}{N}} - e^{-j\frac{\pi n}{N}} \cdot e^{-j\frac{\pi n}{N}}}$$

$$X(n) = \frac{e^{j\pi n} - e^{-j\pi n}}{e^{-j\frac{\pi n}{N}}\left(e^{j\frac{\pi n}{N}} - e^{-j\frac{\pi n}{N}}\right)}$$

$$\boxed{X(n) = e^{j\frac{\pi n}{N}} \underbrace{\frac{\sin(\pi n)}{\sin\left(\frac{\pi n}{N}\right)}}_{\text{sinc}}}$$

$$TFSD = X(f) = e^{j\pi f} \frac{\sin(\pi f N)}{\sin(\pi f)} = \text{sinc}$$

$$|X(n)| = \frac{\sin(\pi n)}{\sin\left(\frac{\pi n}{N}\right)}$$



2. Calcul numérique:

$x(k) = rect_N\left(k + \frac{N}{2}\right)$ $\quad N = 4$

$$X(n) = \sum_{k=-\frac{N}{2}}^{N/2-1} x(k)\, e^{-j\frac{2\pi nk}{N}}$$

$$n = -\frac{N}{2}, \dots, \frac{N}{2} - 1.$$

$n = -2$:

$$X(n) = \sum_{k=-2}^{1} x(k)\, e^{j\pi k}$$

$$= (1)e^{-j2\pi} + (1)e^{-j\pi} + (1)e^{0} + (1)e^{j\pi}$$

$$X(-2) = 1 - 1 + 1 - 1 = 0$$

$n = -1$:

$$X(-1) = \sum_{k=-2}^{1} x(k)\, e^{j\frac{k\pi}{2}}$$

$$= (1)e^{-j\pi} + (1)e^{-j\frac{\pi}{2}} + (1)e^{0} + (1)e^{j\pi/2}$$

$$= -1 - j + 1 + j$$

$$X(-1) = 0$$

n=0 :

$$X(0)=\sum_{k=-2}^{1} x(k) = x(-2)+x(-1)+x(0)+x(1)$$
$$= 1+1+1+1$$

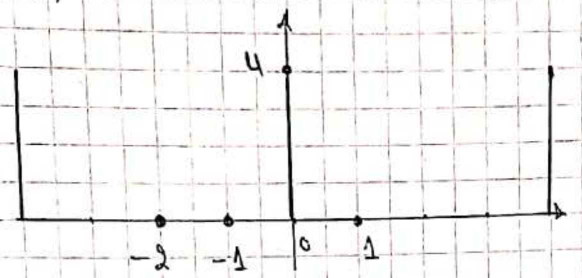
$X(0) = 4$

n=1 :

$$X(1)=\sum_{k=-\infty}^{1} x(k)e^{j\frac{k\pi}{2}}$$

$$X(1) = (1)(-1)+(1)(-j)+(1)(1)+(1)(j)$$

$X(1) = 0$



3. Calcul par programmation :

La TFD a été conçu pour être executée sur un ordinateur ou un système numérique. Cependant, le nombre d'operations peut-être assez grand (taux de calcul est elevé). Pour accelerer les calculs un algorithme rapide appelé FFT (Fast Fourier Transform) a été proposé par deux américains "cooly and Turkey".

Franquier = bouvier ?

7: periodique

Le 05-02-2020

4. TFD d'un signal périodique

Soit $x_p(k)$ un signal periodique de periode N_p (ech)

→ La TFD de $x_p(t)$ est :

$$X_p(n) = \sum_{k=0}^{N_p-1} x_p(k)e^{-j\frac{2\pi kn}{N_p}}$$

$$n = -\frac{N_p}{2},\dots,\frac{N_p}{2}-1$$

→ La TFD inverse est :

$$x_p(k)=\frac{1}{N_p}\sum_{n=-\frac{N_p}{2}}^{N/p-1} X_p(n)e^{j\frac{2\pi nk}{N_p}}$$

$$k=0,\dots,N_p-1$$

Remarques :

1. $X_p(n)$ est aussi périodique de periode N_p

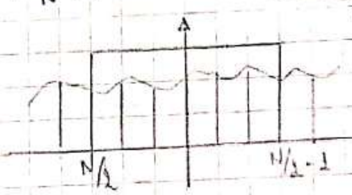
2. La TFD de $x(k)$ (non périodique) et celle de $x_p(k)$ se calcule de la même manière et peuvent être confondues.

5. TFD d'un signal à durée illimitée.

Soit $x(k)$ un signal qui possède une nombre infini d'echantillons. Pour calculer la TFD, on prend N échantillons ~~(...)~~ pour limiter sa durée.

$$x_N(k) = x(k) \, . \, \text{rect}_N\left(k+\frac{N}{2}\right)$$

pour borner le signal.



$$X_N(n) = X(n) * \text{TFD}\left\{\text{rect}_N\left(k+\frac{N}{2}\right)\right\}$$

$$X_N(n) = X(n) * e^{j\frac{\pi n}{N}} \underbrace{\frac{\sin(\pi n)}{\sin\frac{\pi n}{N}}}_{\text{"sinc}}$$

TFD ou $x(k)$

$$x(k) \longrightarrow \boxed{h(k)} \longrightarrow x_N(k)$$

$X(n)$ sera perturbé par la TFD de $\text{rect}_N(k)$. Cette perturbation se manifeste par des oscillations qu'on appelle phénomène de Gibbs.

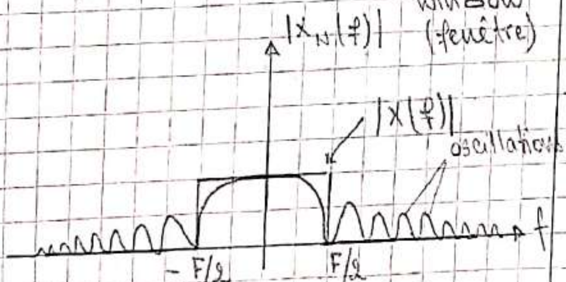
c'est un phénomène génant?!

Pour illustrer ce phenomène, on va utiliser la TFSD à la place de la TFD

$$X_N(f) = X(f) * e^{j\pi f} \frac{\sin(\pi f N)}{\sin(\pi f)}$$

$$|X_N(f)| = |X(f)| * \left|\underbrace{\frac{\sin(\pi f N)}{\sin(\pi f)}}_{W_k(f)}\right|$$

$$w_n(k) = \text{rect}_N(k) \xrightarrow{\text{TFD}} \underbrace{W_k(f)}_{\text{window (fenêtre)}}$$



$$|X_N(f)| = |X(f)| * \underbrace{\frac{\sin(\pi f N)}{(\sin \pi f)}}_{\text{sinc}}$$

exemple: $\Pi_F(f)$

Remarque :

Pour mieux mettre en evidence le phenomène de Gibbs on utilise généralement une chaine logarithmique ou dB

$$20 \log |X_N(f)| = |X_N(f)|_{dB}$$

→ Le phenomène de Gibbs est gênant car il risque de fausser l'interpretation de la TFD d'un signal. Pour réduire ce phénomène soit un nombre d'echantillons N trés trés élevée, soit on remplace la fenêtre rectangulaire par d'autres fonctions comme la fenetre triangulaire, parabolique, polynomiale, cosinusoïdale, Hamming / Hanning, Blackman, Kaiser.

→ La troncature d'un signal est la répercussion sur la TFD ainsi que ~~ses~~ l'utilisation de ses fenêtres est egalement utilisées comme une méthode de conception des filtres à réponses impulsionnelles finies (RIF)

Le 05.02.2020

Chap IV : Systèmes discrets

I. Introduction

Un systèmes discrêt reçoit en entrée des signaux discrêts et fournit en sortie des signaux discrêts.

$$x(k) \longrightarrow \boxed{\text{Système discrêt}} \longrightarrow y(k)$$

Comme pour les systèmes analogiques, les systèmes discrets peuvent être représenté par une réponse impulsionnelle $h(k)$ (pour les systèmes linéaires et invariant dans le temps) ou ~~(pas)~~ d'une manière générale par la relation Entrée / Sortie.

Une grande catégorie du système est ~~donnée~~ décrite par une relation donnée sous forme d'une équation différentielle. Cette relation dans le cas discrêt devient une équation aux différences. Celle-ci occupe une place prépondérante en numérique.

Le 12.02.

II. Equations aux différences

Soit un système représenté par une EDO (eq différentielle ordinaire) d'ordre N

$$\alpha_N(t)\frac{d^N y(t)}{dt^N} + \alpha_{N-1}(t)\frac{d^{N-1}y(t)}{dt^{N-1}} + \dots + \alpha_0(t)\,y(t) = \beta_m(t)\frac{d^m x(t)}{dt^m} + \beta_{m-1}(t)\frac{d^{m-1}x(t)}{dt^{m-1}} + \dots + \beta_0(t)\,x(t)$$

$\alpha_i(t)_{i=\overline{0,N}}$ et $\beta_j(t)$ $(j=0,\dots,m)$ sont des coefficients qui dépendent du temps (E.D à coefficients variables)

si $\alpha_i(t)$ et $\beta_j(t)$ ne dépendent du temps

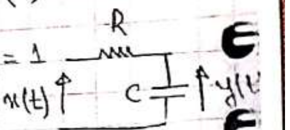
$\alpha_i(t) = \alpha_i \;\forall t$ et $\beta_j(t) = \beta_j \;\forall t$

alors ED à coefficients constants

exemple :

$$\frac{dy(t)}{dt} + RC\, y(t) = x(t)$$

$\alpha_1 = 1 \quad \alpha_0 = RC \quad \beta_0 = 1$



$$\sum_{i=0}^{N} \alpha_i\, y^{(i)}(t) = \sum_{j=0}^{m} \beta_j\, x^{(j)}(t)$$

L'équation aux différences est obtenues en discrétisant l'E.D. pour cela, on doit approximer les dérivées par les différences finies.

$$y'(t) = \frac{dy(t)}{dt} \simeq \frac{\Delta y(t)}{\Delta t} \qquad \Delta t = 1.$$

$$= \Delta y(t) = y(t+\Delta t) - y(t)$$

Difference finie d'ordre 1. $= y(t+1) - y(t)$ avant

$$= y(t) - y(t - \underbrace{\Delta t}_{1})$$ arrière

$$\frac{d^n y(t)}{dt^n} \simeq \frac{\Delta^{(n)} y(t)}{\Delta t^n} = \Delta^{(n)} y(t)$$

Difference finie d'ordre n.

$$\Delta^{(n)} y(t) = \Delta(\Delta^{(n-1)} y(t))$$

$$\Delta^2 y = \Delta(y(t) - y(t-1))$$
$$= \Delta y(t) - \Delta y(t-1)$$
$$= y(t) - y(t-1) - y(t-1) + y(t-2)$$
$$= y(t) - 2y(t-1) + y(t-2)$$

$$\alpha_N \Delta^{(N)} y(t) + \alpha_{N-1} \Delta^{N-1} y(t) + \dots +$$
$$\alpha_2 \Delta^{(2)} y(t) + \alpha_1 \Delta y(t) + \alpha_0 y(t) =$$
$$\beta_m \Delta^{(m)} x(t) + \beta_{m-1} \Delta^{(m-1)} x(t) + \dots$$
$$\beta_2 \Delta^{(2)} x(t) + \beta_1 \Delta x(t) + \beta_0 x(t).$$

$$\Rightarrow \alpha_0 y(t) + \alpha_1 (y(t) - y(t-1)) + \alpha_2 (y(t) - 2(y(t-1)) + y(t-2)) + \dots = \beta_0 x(t) + \beta_1 (x(t) - x(t-1)) + \beta_2 (x(t) - 2x(t-1) + x(t-2)) + \dots$$

$$y(t)(\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_N) + y(t-1) \times (-\alpha_1 - 2\alpha + \dots) + y(t-2)(\alpha_2 + \dots) \dots + y(t-N)\alpha_N = x(t)\underbrace{(\beta_0 + \beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_m)}_{b_0} + x(t-1)\underbrace{(-\beta_1 - 2\beta_2 + \dots)}_{b_1} + x(t-2) \times \underbrace{(\beta_2 + \dots)}_{b_2} + \dots + x(t-M)\beta_m$$

$$b_0 x(t) + b_1 x(t-1) + \dots + \ m$$

En echantillonnant $y(t)$ avec un pas $\Delta t = 1 = Te$.

$$a_0 y(k) + a_1 y(k-1) + \dots + a_N y(k-N) = b_0 x(k) + b_1 x(k-1) + \dots + b_m x(k-m)$$

Cette equation represente l'equation aux differences

$$\sum_{i=0}^{N} a_i y(k-i) = \sum_{j=0}^{m} b_j x(k-j)$$

modèle ARMA

$$y(k) = \sum_{j=0}^{m} \frac{b_j}{a_0} x(k-j) - \sum_{i=1}^{N} \frac{a_i}{a_0} y(k-i)$$

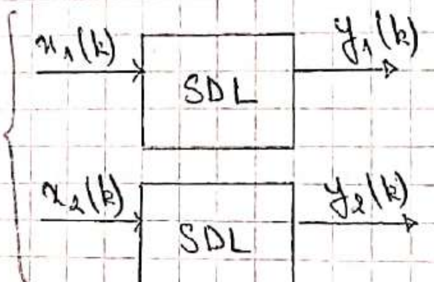
Une equation de difference n'est rien d'autre qu'une version discrète de l'ED

Les coefficients A_i, b_j representent le comportement ou les valeurs des constituants

III - Systèmes discret linéaires

Un système (ds) discrèt est linéaire s'il respecte le principe de superposition

Si



si: $x(k) = \gamma_1 x_1(k) + \gamma_2 x_2(k) \rightarrow \boxed{SDL} \rightarrow y(k) = \gamma_1 y_1(k) + \gamma_2 y_2(k)$

$\gamma \in \mathbb{R}$

alors le système est linéaire

exemple: Amplificateur $y(k) = Ax(k)$

$y_1(k) = Ax_1(k)$

$y_2(k) = Ax_2(k)$

$$y(k) = A(\gamma_1 x_1(k) + \gamma_2 x_2(k))$$

$$= \gamma_1 \underbrace{Ax_1(k)}_{y_1(k)} + \gamma_2 \underbrace{Ax_2(k)}_{y_2(k)}$$

$$= \gamma_1 y_1(k) + \gamma_2 y_2(k)$$

$\Rightarrow$ SDL.

Autre exemple: amplificateur quadratique

$y(k) = x^2(k)$

$y_1(k) = x_1^2(k)$ $\qquad y_2(k) = x_2^2(k)$

$$y(k) = (\underbrace{\gamma_1 x_1(k) + \gamma_2 x_2(k)}_{x(k)})^2$$

$$= \gamma_1^2 x_1^2(k) + \gamma_2^2 x_2^2(k) + 2\gamma_1\gamma_2 x_1 x_2$$

$$\neq \gamma_1 y_1(k) + \gamma_2 y_2(k)$$

$\Rightarrow$ non linéaire.

IV. Systèmes discret invariant:

Un système discret est invariant dans le temps si:

$x(k) \rightarrow \boxed{SD} \rightarrow y(k)$

et si: $x(k-k_0) \rightarrow \boxed{SD} \rightarrow y(k-k_0)$

alors le système est invariant.

V. Systèmes causals:

Un système discret (SD) est causal si sa sortie $y(k)$ à un instant donné (k_0) ne dépend pas des valeurs du ~~(signaux)~~ signal d'entrée $x(k)$ à des instants postérieurs à k_0 (la sortie ne précède pas l'entrée)

Exemple:

$y(1) - 2y(0) = x(1) + x(-1)$ ce qui vient avant 1 donc ulac a problème

$$y(k) - 2y(k-1) = x(k) + x(k-2)$$

$\Rightarrow$ S.D est causal.

$$y(k) - 2y(k-1) = x(k) + x(k+2)$$

$\Rightarrow$ S.D non causal.

Le 19-02-2020.

VI. Résolution de l'équation aux différences:

Soit l'équation aux différences suivante:

$$\sum_{i=0}^{N} \alpha_i y(k-i) = \sum_{j=0}^{M} \beta_j x(k-j)$$

sa résolution consiste à calculer $y(k)$.

$x(k) \rightarrow \boxed{} \rightarrow y(k)$

$$\begin{cases} y(k) - 2y(k-1) = 3x(k) + x(k-1) \\ x(k) = u(k) \end{cases}$$

Cette relation peut se faire de plusieurs manières.

1. méthode directe :

On peut tirer directement $y(k)$

$$a_0 y(k) = \sum_{i=1}^{N} a_i\, y(k-i) = \sum_{j=0}^{M} b_j\, x(k-j)$$

$$y(k) = -\sum_{i=1}^{N} \frac{a_i}{a_0} y(k-i) + \sum_{j=0}^{M} \frac{b_j}{a_0} x(k-j)$$

. C'est une méthode simple, programmable et la plus utilisée en pratique.

Cependant, la solution $y(k)$ est représentée par les valeurs de ses echantillons. (Pas de relations mathematiques)

2. méthode par développement :

Elle est identique à la méthode directe sauf qu'elle recherche une relation modèle mathématique à partir des valeurs de $y(k)$

exemple :

$y(k) + a y(k-1) = x(k) \qquad |a| < 1$

→ Determinons la solution $y(k)$ sachant que : $x(k) = u(k)$ et $\underbrace{y(k) = 0 \text{ si } k < 0}_{CI}$

$y(k) = x(k) - a y(k-1)$

$k=0 \quad y(0) = u(0) - a y(-1) = 1.$

$k=1 \quad y(1) = u(1) - a y(0) = 1 - a$

$k=2 \quad y(2) = u(2) - a y(1) = 1 - a(1-a)$

$k=3 = y(3) = u(3) - a y(2) = 1 - a(1 - a + a^2)$

$y(k) = u(k) - a y(k-1)$

$= 1 - a(1 - a + a^2 - a^3 + \dots + (a)^{k-1})$

$= 1 - a + a^2 - a^3 + a^4 + \dots + (a)^k$

$= \sum_{i=0}^{k} (-1)^i a^i$

→ La solution est donnée par :

$$y(k) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i a^i = \sum_{i=0}^{k} (-a)^i$$

$$y(k) = \frac{1 - (-a)^{k+1}}{1+a}$$

. Comme $y(k) = a$? $k < 0$

$$y(k) = \frac{1 - (-a)^{k+1}}{1+a} u(k)$$

Remarque :

Si les CI changent, la solution va aussi changer.

3. Méthode Générale

Comme pour les equations ED les equations aux differences peuvent être résolu en determinant la solution $y_h(k)$ de l'equation homogène et $y_p(k)$ de l'equation particulière

→ La solution generale est alors :

$$y(k) = y_h(k) + y_p(k)$$

Cette solution possède des coefficients qui seront determiner en utilisant les conditions initiales.

* Solution de l'equation homogène

$$\sum_{i=0}^{N} a_i \, y(k-i) = 0$$

$$a_0 y(k) + a_1 y(k-1) + a_2 y(k-) + \dots + a_n y(k-N)$$

On pose $y(k) = z^k$

$$a_0 z^k + a_1 z^{k-1} + a_2 z^{k-1} + \dots + a_n z^{k-N}$$

$$z^{k-N}\underbrace{\left(a_0 z^N + a_1 z^{N-1} + a_2 z^{N-2} + \dots + a_n\right)}_{\text{Polynôme caracteristique}} = 0$$

Ce polynome d'ordre N va avoir N solutions réelles ou complexes

* Si N solutions sont distincts :

$$\boxed{y_h(k) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i z_i^k}$$ α_i coefficient

* Si il existe des racines multiples par exemple z_1 racine multiple (P) et les autres sont distincts.

$$\boxed{y_h(k) = \left(\alpha_1 + \alpha_2 h + \alpha_3 h^2 + \dots + \alpha_p h^{P-1}\right) z_1^k + \sum_{i=P+1}^{N} \alpha_j z_j^h}$$

Solution particulière :

La solution particulière doit être choisie en fonction de la forme des termes de $x(k)$. Ce choisi est difficile, nécessite une certaine experience cependant, il existe des formes typique $y(k) + y(k-1) = x(k)$

Termes de $x(k)$	Solution particulière $y(k)$
• Cste	• $y_p(k) = C_1$
• $C_1 k$	• $y_p(k) = C_1 k + C_2$
• $C a^k$	• $y_p(k) = C_1 a^k$
• $C \cos(w_0 k)$	• $y_p(k) = C_1 \cos(w_0 k) + C_2 \sin(w_0 k)$
• $C \sin(w_0 k)$	• $y_p(k) = C_1 \cos(w_0 k) + C_1 \sin(w_0 k)$
• $C a^k \cos(w_0 k)$	• $y_p(k) = C_1 a^k \cos(w_0 k) + C_2 a^k \sin(w_0 k)$

Exemple.

$$y(k) + a y(k-1) = x(k)$$

$$x(k) = u(k) \text{ et } CI = \begin{cases} y(k) = 0 \\ k < 0. \end{cases}$$

$\rightarrow y_h(k) =$

$$y(k) + a y(k-1) = 0$$

$$y(k) = z^k$$

$$z^k + a z^{k-1} = 0$$

$$z^{k-1}(z + a) = 0$$

$$z + a = 0 \Rightarrow z = -a$$

$$\boxed{y_h(k) = \alpha(-a)^k}$$

$\rightarrow y_p(k) =$

$$x(k) = u(k) = \begin{cases} 1 & \text{si } k \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$y_p(k) = C.$$

$$C_1 + a C_1 = 1 \quad (k \geq 0)$$

$$C_1 = \frac{1}{a+1}$$

→ Solution générale :

$$y(k) = y_h(k) + y_p(k)$$

$$y(k) = \alpha(-a)^k + \frac{1}{a+1}$$

→ Déterminons α avec CI :

$k = -1 \quad y(-1) = 0$

$$\Rightarrow \alpha(-)^{-1} + \frac{1}{a+1} = 0$$

$$\alpha(-a)^{-1} = -\frac{1}{a+1}$$

$$\alpha = \frac{-1}{-\frac{1}{a}(a+1)} \Rightarrow \alpha = \frac{a}{a+1}$$

$$y(k) = \frac{a}{a+1}(-a)^k + \frac{1}{a+1}$$

$$y(k) = \frac{-(-1)(-a)^k + 1}{a+1}$$

$$y(k) = \frac{1-(-a)^{k+1}}{a+1} \quad \text{si } k \geq 0$$

$$y(k) = 0 \quad \text{si } k < 0$$

$$y(k) = \frac{1-(-a)^{k+1}}{a+1}\, u(k)$$

4/ méthode basée sur la TFSD

Exemple :

$$y(k) + a y(k-1) = x(k)$$

$x(k) = u(k) \quad y(k) = 0$ si $k < 0$

Appliquons la TFSD à l'équation aux différences :

$$Y(f) + aY(f)e^{-j2\pi f} = X(f)$$

$$Y(f)\left(1 + ae^{-j2\pi f}\right) = X(f)$$

$$x(k) = u(k) \Rightarrow X(f) = \frac{1}{1+e^{-j2\pi f}}$$

$$* \; Y(f) = \frac{X(f)}{1+ae^{-j2\pi f}}$$

$$Y(f) = \frac{1}{1+ae^{-j2\pi f}} \cdot \frac{1}{1+e^{-j2\pi f}}$$

→ Appliquons la $TFSD^{-1}$ pour déterminer la solution $y(k)$

$$\left.\begin{array}{l} A + B = 1 \\ aB - A = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} B = \frac{1}{a+1} \\ A = \frac{a}{a+1} \end{array}$$

$$y(k) = A a^k u(k) + B u(k)$$

$$y(k) = \frac{a}{a+1} a^k u(k) + \frac{1}{a+1} u(k)$$

$$y(k) = \frac{a^{k+1} + 1}{a+1}\, u(k)$$

$$y(k) = \frac{(-1)^{k+1}(-a)^{k+1} + 1}{a+1}\, u(k)$$

VII. Produit de convolution :

1- Réponse impulsionnelle

Un syst discret linéaire et invariant dans le temps peut-être également représenté par sa réponse impulsionnelle. Réponse du syst au ~~sy~~ signal échantillon $\delta(k)$

$$\delta(k) \rightarrow \boxed{SDLI} \rightarrow h(k)$$

$$x(k) \rightarrow \boxed{h(k)} \rightarrow y(k)$$

Convolution

La convolution est une operation qui permet de determiner la réponse d'un SDLI dans le temps à un signal d'entrée $x(k)$ elle est défini par.

$$y(k) = x(k) * h(k)$$

$$y(k) = \sum_{-\infty}^{+\infty} x(k)\, h(k-l)$$

$$x(k) \longrightarrow \boxed{h(k)} \longrightarrow y(k) = x(k) * h(k)$$

Propriétés :

1- $y(k) = x(k) * h(k)$

si $x(k) = \delta(k) \Rightarrow y(k) = \delta(k) * h(k) = h(k)$

2. Commutativité :

$$y(k) = x(k) * h(k)$$
$$= h(k) * x(k)$$

3. Associativité :

$$y(k) = x(k) * (h_1(k) * h_2(k))$$
$$= (x(k) * h_1(k)) * h_2(k)$$

4- Distributivité / addition :

$$y(k) = x(k) * (h_1(k) + h_2(k))$$
$$= (x(k) * h_1(k)) + (x(k) * h_2(k))$$

5. $y(k-k_0) = x(k) * h(k-k_0)$
$$= x(k-k_0) * h(k)$$

$$x(k-k_0) * h(k-k_1) = y(k-k_0-k_1)$$

6. Théoreme de Parseval.

• $y(k) = x(k) * h(k)$

$\xrightarrow{TFSD} Y(f) = X(f) \cdot H(f)$

$\xrightarrow{TFD} Y(n) = X(n) \cdot H(n)$

• $y(k) = x(k) \cdot h(k)$

$\xrightarrow{TFSD} Y(f) = X(f) \circledast H(f)$

$\xrightarrow{TFD} Y(n) = \frac{1}{N} X(n) \cdot H(n)$

8. Système causal

Un syst discret est causal si sa réponse impulsionnelle $h(k)$ est causale $h(k) = 0 \ \forall k < 0$

Dans ce cas

$$y(k) = x(k) * h(k) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} x(k)\, h(k-l)$$

$$y(k) = h(k) * x(k) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} h(l)\, x(k-l)$$

$$y(k) = \sum_{l=0}^{\infty} x(l)\, h(x-l)$$

Si en plus $x(k)$ est causal

$$y(k) = x(k) * h(k) = \sum_{l=0}^{k} x(l)\, h(k-l)$$
$$= h(k) * x(k) = \sum_{l=0}^{k} h(l)\, x(k-l)$$

Cette relation est trés utilisé en pratique.

Σ finie pour determiner la réponse d'une SDLI.