

# Module : systèmes non linéaires

Ahmed MAIDI (UMMTO)

Master académique (AS et AI)

*ahmed.maidi@gmail.com*

17 mai 2020

# Chapitre 4. Fondements de la théorie de stabilité de Lyapunov

- 1 Stabilité d'un système linéaire
- 2 Définition de la stabilité
- 3 Méthode directe de Lyapunov (seconde méthode)
- 4 Construction des fonctions de Lyapunov
- 5 Théorème d'invariance de LaSalle
- 6 Exercices

# Stabilité d'un système linéaire

Considérons le système **linéaire** :

$$\dot{x}(t) = A x(t) + B u(t) \quad (1)$$

corrigé par une loi de commande de la forme (retour d'état) :

$$u(t) = K x(t) \quad (2)$$

le système en **boucle fermée** prend la forme suivante :

$$\dot{x}(t) = (A - B K) x(t) \quad (3)$$

On suppose que la matrice d'état en boucle fermée  $A - B K$  **n'est pas singulière**. Dans ce cas, le système en boucle fermée admet un seul point d'équilibre  $x_e = 0$ . Ainsi, le système est **asymptotiquement stable** si toutes les valeurs propres de la matrice  $A - B K$  sont à **parties réelles strictement négative**.

# Définition de la stabilité

## Définition intuitive

Pour les systèmes **non linéaires**, il est **impossible** de trouver un **équivalent universel du concept de valeur propre** associé au système dynamique.

Ainsi, on peut procéder par **linéarisation** du système non linéaire autour du point d'équilibre  $x_e$ , puis d'**étudier les valeurs propres** de la matrice d'état du système linéarisé. Cette méthode appelée première **méthode de Lyapunov** ou **méthode indirecte de Lyapunov** a été étudiée en détail au Chapitre 2. Cette méthode **présente certaines limitations** pour conclure sur la stabilité d'un point d'équilibre, par exemple lorsque les valeurs propres de la matrice d'état sont des  **nombres imaginaires purs**.

Dans ce cas, on doit utiliser d'autres techniques pour l'analyse de stabilité.

# Définition de la stabilité

## Définition intuitive

Définition :

Si en perturbant légèrement un système dynamique de son point d'équilibre, et il reste proche de ce point d'équilibre, alors le système est stable au sens de Lyapunov.

La stabilité intuitive est illustrée par la Figure 1. Initialement, on suppose que la bille est à l'état d'équilibre (point bleu) puis on la perturbe légèrement pour la dévier de sa position d'équilibre. Dans le cas *a*, après un certain temps, la bille regagne son point d'équilibre, par contre dans le cas *b* la bille s'éloigne carrément de son point d'équilibre.

# Définition de la stabilité

## Définition intuitive

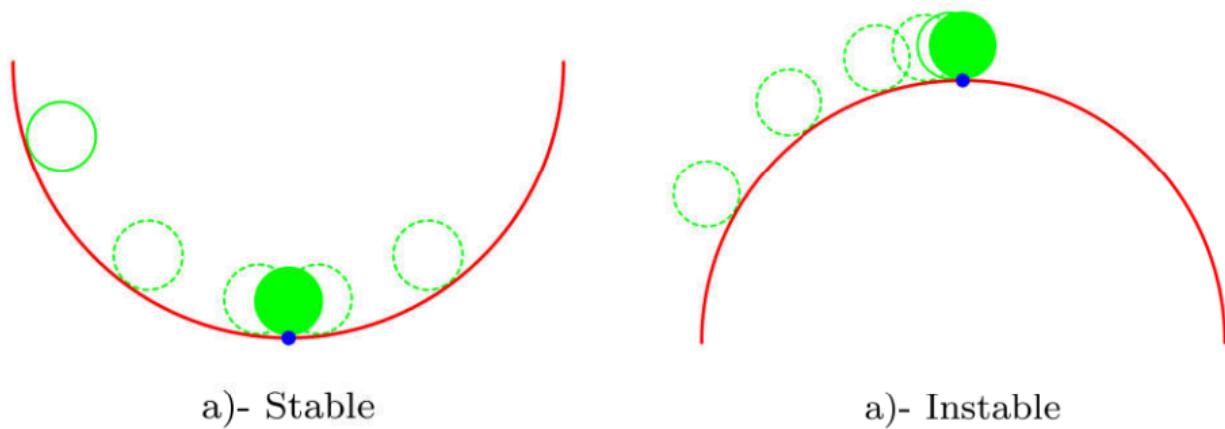


FIGURE 1 – Stabilité en sens de Lyapunov.

# Définition de la stabilité

## Rappels mathématiques

### Espace vectoriel

Un espace vectoriel  $X$  sur l'ensemble des nombres réels  $\mathbb{R}$  est dit **normé** si à tout  $x \in X$  **est associé un nombre positif  $\|x\|$** , appelé **norme** de  $x$ , tel que les **trois axiomes** ci-après ont lieu :

- ①  $\|x\| = 0$  si et seulement si  $x = 0$ ;
- ②  $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$  pour tout  $x \in X$  et tout  $\lambda \in \mathbb{R}$ ;
- ③  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$  pour tous  $x, y \in X$ .

### Boule ouverte

On appelle une **boule ouverte** de centre en  $x^* \in X$  et de rayon  $r > 0$ , l'ensemble  $B_r(x^*) = \{x \in X : \|x - x^*\| < r\}$ .

# Définition de la stabilité

## Rappels mathématiques

### Boule fermée

On appelle une **boule fermée** de centre en  $x^* \in X$  et de rayon  $r > 0$ , l'ensemble  $\bar{B}_r(x^*) = \{x \in X : \|x - x^*\| \leq r\}$ .

### Ensemble borné

Un ensemble  $\Omega \subset X$  est dit **borné** s'il est **contenu** dans une **boule (ouverte ou fermée)**.

### Ensemble fermé

Un point  $a \in X$  est appelé point d'**accumulation** de l'ensemble  $M \subset X$  si dans toute boule  $S_r(a)$  il existe un point  $x \in M$ ,  $x \neq a$ . L'ensemble de tous les points d'**accumulation** de  $M$  est noté  $M'$ . L'ensemble  $M \cup M'$  est appelé fermeture de  $M$  est noté  $\bar{M}$ . L'ensemble  $M \subset X$  est **fermé** si  $\bar{M} = M$ .

# Définition de la stabilité

## Définition mathématique

### Ensemble compact

Un ensemble  $\Omega \subset \Re^n$  est dit **compact** s'il est **fermé et borné**.

### Définition formelle

Le point d'équilibre  $x_e$  d'un système initialement à l'état initial  $x(0)$  est dit **stable au sens de Lyapunov**, si  $\forall R > 0$ ,  $\exists r(R) > 0$  tel que  $\|x(0) - x_e\| < r$  implique  $\|x(t) - x_e\| < R$ ,  $\forall t \geq 0$ . Dans le cas contraire le système est dit **instable**.

Cette définition est illustrée par la Figure 2. Ainsi, **quelle que soit** la boule  $B_R(x_e)$ , on **peut toujours choisir** une certaine sous-boule  $B_r(x_e)$  telle que pour **n'importe quelle condition initiale**  $x(t_0) \in B_r(x_e)$ , la **trajectoire résultante**  $x(t) \in B_R(x_e)$ .

# Définition de la stabilité

## Définition mathématique

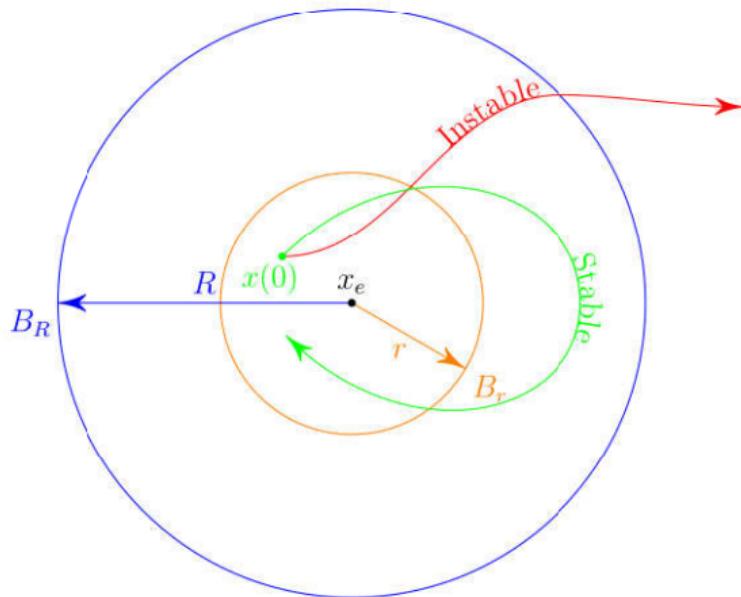


FIGURE 2 – Stabilité en sens de Lyapunov.

# Définition de la stabilité

## Définition mathématique

### Convergence

Un point d'équilibre  $x_e$  est dit **convergent** s'il existe  $\delta > 0$  tel que :

$$\|x(0) - x_e\| \leq \delta \Rightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = x_e$$

### Stabilité asymptotique (définition 1)

Un point d'équilibre  $x_e$  est **asymptotiquement stable** s'il est stable et s'il existe  $\alpha > 0$  tel que :  $\|x(0) - x_e\| < \alpha \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t)\| = x_e$ .

### Stabilité asymptotique (définition 2)

Un point d'équilibre est **asymptotiquement stable** s'il est stable et convergent.

### Domaine (ou région) d'attraction

Le domaine d'**attraction** d'un point d'équilibre  $x_e$  est l'ensemble :

$$\mathcal{R}_A = \left\{ x \mid \lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = x_e \right\} \quad (4)$$

# Définition de la stabilité

## Définition mathématique

### Stabilité exponentielle

Un point d'équilibre est **exponentiellement stable** s'il existe  $\alpha > 0$  et  $\lambda > 0$  tels que :

$$\forall t > 0, \exists B_r(x_e), \forall x(0) \in B_r(x_e), \|x(t) - x_e\| \leq \alpha \|x(0) - x_e\| e^{-\lambda t} \quad (5)$$

### Stabilité globale

- Si la propriété de stabilité asymptotique **est vérifiée quelque soit  $x(0)$** , le point d'équilibre est **globalement asymptotiquement stable**.
- Si la propriété de stabilité exponentielle **est vérifiée quelque soit  $x(0)$** , le point d'équilibre est **globalement exponentiellement stable**.

### Remarque

La stabilité exponentielle implique la stabilité asymptotique qui implique la stabilité.

## Méthode directe de Lyapunov (seconde méthode)

L'étude de la stabilité d'un système en utilisant la **définition de stabilité** présente des **inconvénients** remarquables :

- on **doit calculer** de manière explicite chaque solution qui correspond à chacune des conditions initiales, ce qui n'est pas toujours pratique,
- le maniement de la définition est **fastidieux**.

Alors, on doit chercher une alternative permettant d'étudier la stabilité **sans passer** par la résolution des équations différentielles ou l'utilisation de la définition. Dans ce qui suit, on présente la méthode célèbre de Lyapunov dont le principe est basée sur la notion de la **fonction d'énergie** du système.

La bille (Figure 1) possède une fonction d'énergie  $E$  qui comporte une part d'énergie potentielle  $E_p$  et une part d'énergie cinétique  $E_c$ . On a  $E = E_c + E_p$ .

## Méthode directe de Lyapunov (seconde méthode)

Lorsque l'énergie  $E$  diminue ou conservée mais dans les deux cas elle est minimale au point l'équilibre  $x_e$ , le système est stable.

Lorsque l'énergie  $E$  augmente ou conservée mais elle n'est pas minimale au point d'équilibre, le système est instable.

Considérons, le système mécanique de la Figure 3 composé d'une masse et d'un ressort.

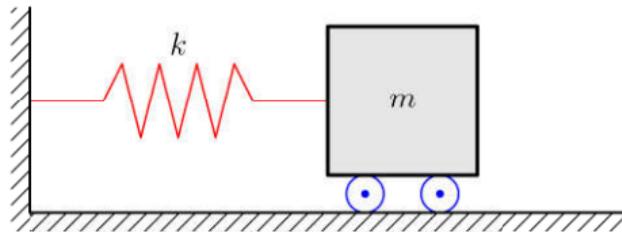


FIGURE 3 – Système masse-ressort.

## Méthode directe de Lyapunov (seconde méthode)

Le modèle d'état du système est :

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t) \quad (6)$$

$$\dot{x}_2(t) = -\frac{k}{m}x_1(t) - \frac{c}{m}x_2(t) \quad (7)$$

où  $m > 0$  est la masse,  $k > 0$  est la raideur du ressort et  $c > 0$  est le coefficient de frottement visqueux. Les variables d'état  $x_1(t) = x(t)$  et  $x_2(t) = \dot{x}(t)$  sont respectivement la **position** et la **vitesse** de la masse.

Les énergies cinétique et potentielle du système sont données comme suit :

$$E_p = \frac{1}{2} k x_1^2(t) \quad (8)$$

$$E_c = \frac{1}{2} m x_2^2(t) \quad (9)$$

La fonction d'énergie (énergie totale) du système est :

$$E(x_1(t), x_2(t)) = E_p + E_c = \frac{1}{2} k x_1^2(t) + \frac{1}{2} m x_2^2(t) \quad (10)$$

## Méthode directe de Lyapunov (seconde méthode)

La dérivée de la fonction d'énergie est donnée comme suit :

$$\frac{dE(x_1(t), x_2(t))}{dt} = \frac{\partial E(x_1(t), x_2(t))}{\partial x_1(t)} \frac{dx_1(t)}{dt} + \frac{\partial E(x_1(t), x_2(t))}{\partial x_2(t)} \frac{dx_2(t)}{dt} \quad (11)$$

$$= k x_1(t) \dot{x}_1(t) + m x_2(t) \dot{x}_2(t) \quad (12)$$

En utilisant les équations du modèle, la dérivée de la fonction d'énergie  $\dot{E}(t)$  peut être réécrite sous la forme suivante :

$$\frac{dE(x_1(t), x_2(t))}{dt} = k x_1(t) \underbrace{x_2(t)}_{\dot{x}_1(t)} + m x_2(t) \underbrace{\left( -\frac{k}{m}x_1(t) - \frac{c}{m}x_2(t) \right)}_{\dot{x}_2(t)} \quad (13)$$

$$= -c x_2^2(t) \quad (14)$$

Comme  $c > 0$ , alors la dérivée de la fonction d'énergie  $\dot{E}(t) \leq 0$  (système dissipatif), c'est-à-dire la fonction d'énergie  $E(t)$  diminue (décroissante). Le système est donc stable.

## Méthode directe de Lyapunov (seconde méthode)

Lyapunov a généralisé cette constatation à une classe plus large de fonctions et a développé des méthodes permettant d'analyser la stabilité d'un système sans recourir à la résolution des équations de ce dernier. Ces fonctions appelées fonctions de Lyapunov sont notées  $V(x)$ . Notons qu'une fonction d'énergie est une fonction de Lyapunov. Si pour un système dynamique la fonction d'énergie est unique, la fonction de Lyapunov peut être n'importe quelle fonction définie positive dont la dérivée temporelle est semi-définie négative.

## Méthode directe de Lyapunov (seconde méthode)

Dans cette section, on s'intéresse à la stabilité du point d'équilibre  $x_e = 0$ . Pour un point d'équilibre  $x_e \neq 0$ , on introduit le changement de variable suivant :

$$z(t) = x(t) - x_e \quad (15)$$

$$\dot{z}(t) = \dot{x}(t) - \dot{x}_e = f(x(t)) = f(z(t) + x_e) = g(z(t)) \quad (16)$$

Pour le système  $\dot{z}(t) = g(z)$ , le point d'équilibre est  $z_e = 0$  qu'on peut aisément vérifier comme suit :

$$g(0) = f(0 + x_e) = f(x_e) = 0 \quad (17)$$

Ainsi, l'étude de stabilité du point d'équilibre  $x_e$  du système  $\dot{x}(t) = f(x)$  est équivalente à l'étude de stabilité de l'origine  $z_e = 0$  (point d'équilibre) du système  $\dot{z}(t) = g(z)$ .

Avant d'introduire les résultats importants de la théorie de Lyapunov, nous introduisons certaines définitions et notions mathématiques utiles pour la suite du développement.

## Voisinage de l'origine

Le **voisinage de l'origine**, noté  $\Omega$  est un **domaine fermé borné** incluant l'origine.

## Fonctions définies positives

- Une fonction scalaire  $V : D \rightarrow \mathbb{R}$  est **localement définie positive** dans  $\Omega \subset D$  si :
  - ①  $0 \in \Omega$  et  $V(0) = 0$ ;
  - ②  $V(x) > 0, \forall x \in \Omega - \{0\}$ .
- Une fonction scalaire  $V : D \rightarrow \mathbb{R}$  est **définie positive** si :
  - ①  $0 \in D$  et  $V(0) = 0$ ;
  - ②  $V(x) > 0, \forall x \in D - \{0\}$ .

## Voisinage de l'origine

Le **voisinage de l'origine**, noté  $\Omega$  est un **domaine fermé borné** incluant l'origine.

## Fonctions définies positives

- Une fonction scalaire  $V : D \rightarrow \mathbb{R}$  est **localement définie positive** dans  $\Omega \subset D$  si :
  - ①  $0 \in \Omega$  et  $V(0) = 0$ ;
  - ②  $V(x) > 0, \forall x \in \Omega - \{0\}$ .
- Une fonction scalaire  $V : D \rightarrow \mathbb{R}$  est **définie positive** si :
  - ①  $0 \in D$  et  $V(0) = 0$ ;
  - ②  $V(x) > 0, \forall x \in D - \{0\}$ .

## Fonctions semi-définies positives

- Une fonction scalaire  $V : D \rightarrow \mathbb{R}$  est **localement semi-définie positive** dans  $\Omega \subset D$  si :
  - ①  $0 \in \Omega$  et  $V(0) = 0$ ;
  - ②  $V(x) \geq 0, \forall x \in \Omega - \{0\}$ .
- Une fonction scalaire  $V : D \rightarrow \mathbb{R}$  est **semi-définie positive** si :
  - ①  $0 \in D$  et  $V(0) = 0$ ;
  - ②  $V(x) \geq 0, \forall x \in D - \{0\}$ .

## Remarque

La forme **quadratique**  $V(x) = x^T P x$  ( $x \in D = \mathbb{R}^n$ ) et  $P = P^T$  (symétrique). on a  $V(x) > 0$  si  $P > 0$  et  $V(x) \geq 0$  si  $P \geq 0$ . Si les **valeurs propres** de la matrice  $P$  sont **toutes positives**, alors  $P$  est définie positive.

### Exemples :

On considère  $D = \mathbb{R}^2$ .

- Fonction localement définie positive :

$$V(x) = x_1^2 + \sin^2(x_2)$$

- Fonction définie positive :

$$V(x) = x_1^2 + x_2^2$$

- Fonction localement semi-définie positive :

$$V(x) = x_1 \sin(x_2)$$

- Fonction semi-définie positive :

$$V(x) = (x_1 + x_2)^2$$

## Fonction candidate de Lyapunov

Une fonction définie positive continue, notée  $V(x)$ , est une fonction candidate de Lyapunov.

On a vu que la fonction d'énergie pour un système stable est décroissante ou constante (conservée) lors de l'évolution du système. Par conséquent, on exige d'une fonction candidate de Lyapunov d'avoir une dérivée temporelle négative ou semi-négative.

## Dérivée de la fonction de Lyapunov

Soit  $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continûment différentiable en tous ses arguments et soit l'équation différentielle non linéaire  $\dot{x}(t) = f(x); x \in \mathbb{R}^n$ . On définit alors

## Dérivée de la fonction de Lyapunov

$$\dot{V}(x) = \left( \frac{\partial V(x)}{\partial x} \right)^T \frac{dx}{dt} \quad (18)$$

$$= [\nabla_x V(x)]^T \dot{x}(t) = [\nabla_x V(x)]^T f(x) \quad (19)$$

où  $\nabla_x V(x)$  est le gradient de la fonction  $V(x)$  donné comme suit :

$$\nabla_x V(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial V(x)}{\partial x_1} \\ \frac{\partial V(x)}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial V(x)}{\partial x_n} \end{bmatrix} \quad (20)$$

## Dérivée de la fonction de Lyapunov

$\dot{V}(x)$  est appelée la dérivée de  $V(x)$  le long des trajectoires de  $\dot{x}(t) = f(x)$  appelée aussi dérivée de Lie et notée  $L_f V(x)$ .

## Fonction de Lyapunov

Une fonction de Lyapunov est une fonction candidate de Lyapunov, à savoir une fonction continue  $V(x)$  telle que

$$V(x) = 0 \text{ pour } x = 0 \quad (21)$$

$$V(x) > 0, \forall x \neq 0 \quad (22)$$

ayant en plus la propriété

$$\dot{V}(x) = 0 \text{ pour } x = 0 \quad (23)$$

$$\dot{V}(x) \leq 0, \forall x \neq 0 \quad (24)$$

### Exemple : Fonction candidate de Lyapunov et fonction de Lyapunov

Pour le système mécanique masse-ressort, on considère comme **fonction candidate de Lyapunov** la fonction d'énergie  $V(x) = E(x)$ , c'est-à-dire

$$V(x) = \frac{1}{2}m x_2^2(t) + \frac{1}{2}k x_1^2(t)$$

On a :

- $V(0) = 0$ ,
- $V(x) > 0, \forall x \in \Re^2$ ,
- $\dot{V}(x) = -c x_2^2(t) \leq 0, \forall x \in \Re^2 (c > 0)$ .

La fonction  $V(x)$  vérifie les propriétés d'une fonction de Lyapunov, par conséquent  $V(x)$  (fonction de l'énergie) est une **fonction de Lyapunov**.

### Exemple : Fonction candidate de Lyapunov et fonction de Lyapunov

Pour le même système masse-ressort, on considérons comme **fonction candidate de Lyapunov**

$$V(x) = \frac{1}{2}x_1^2(t) + \frac{1}{2}x_2^2(t)$$

On a :

- $V(0) = 0$ ,
- $V(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}^2$ ,
- $\dot{V}(x) = x_1(t)\dot{x}_1(t) + x_2(t)\dot{x}_2(t) \Rightarrow \dot{V}(x) = \left(1 - \frac{k}{m}\right)x_1(t)x_2(t) - \frac{c}{m}x_2^2(t)$

On remarque que  $\dot{V}(x)$  n'est pas semi-définie négative, par conséquent la fonction  $V(x)$  ne vérifie pas la propriété  $\dot{V}(x) \leq 0$  alors la fonction  $V(x)$  n'est pas une fonction de Lyapunov.

## Théorème de stabilité de Lyapunov

Soit  $x_e = 0$  le point d'équilibre du système  $\dot{x}(t) = f(x)$ ,  $f(x) : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ , et soit  $V : D \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continument différentiable telle que :

- ①  $V(0) = 0$ ,
- ②  $V(x) > 0$ ,  $\forall x \in D - \{0\}$ ,
- ③  $\dot{V}(x) \leq 0$ ,  $\forall x \in D - \{0\}$ ,

alors le système est **localement stable**.

### Théorème de stabilité asymptotique de Lyapunov

Soit  $x_e = 0$  le point d'équilibre du système  $\dot{x}(t) = f(x)$ ,  $f(x) : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ , et soit  $V : D \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continument différentiable telle que :

- ①  $V(0) = 0$ ,
- ②  $V(x) > 0$ ,  $\forall x \in D - \{0\}$ ,
- ③  $\dot{V}(x) < 0$ ,  $\forall x \in D - \{0\}$ ,

alors  $x_e = 0$  est **localement asymptotiquement stable**.

### Théorème de stabilité asymptotique de Lyapunov

Soit  $x_e = 0$  le point d'équilibre du système  $\dot{x}(t) = f(x)$ ,  $f(x) : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ , et soit  $V : D \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continument différentiable telle que :

- ①  $V(0) = 0$ ,
- ②  $V(x) > 0$ ,  $\forall x \in D - \{0\}$ ,
- ③  $\dot{V}(x) < 0$ ,  $\forall x \in D - \{0\}$ ,

s'il existe deux constantes  $\eta$  et  $\beta$  tels que

$$V(x) \leq \eta \|x\|^2 \quad (25)$$

$$\dot{V}(x) \leq -\beta V(x) \quad (26)$$

alors  $x_e = 0$  est **localement exponentiellement stable**.

# Méthode directe de Lyapunov (seconde méthode)

Application aux systèmes linéaires

## Stabilité globale

Dans les définitions précédentes, la stabilité est globale si  $D = \mathbb{R}^n$  et la fonction de Lyapunov vérifie la condition de croissance à l'infinie, c'est-à-dire  $\lim_{\|x\| \rightarrow +\infty} V(x)$ .

Pour le système linéaire

$$\dot{x}(t) = A x(t) \quad (27)$$

On prend comme fonction candidate de Lyapunov, la fonction quadratique  $V(x) = x^T P x$ , alors

$$\dot{V}(x) = \dot{x}^T P x + x^T P \dot{x} \quad (28)$$

$$= (A x)^T P x + x^T P (A x) \quad (29)$$

$$= x^T A^T P x + x^T P A x \quad (30)$$

$$= x^T \left( A^T P + P A \right) x \quad (31)$$

## Méthode directe de Lyapunov (seconde méthode)

### Application aux systèmes linéaires

Pour garantir la stabilité asymptotique, on considère  $\dot{V}(x) = -x^T Q x$  et on impose la condition  $Q = Q^T > 0$ . Le problème revient à chercher deux matrices  $P$  et  $Q$  définies positives vérifiant l'équation suivante :

$$A^T P + P A = -Q \quad (32)$$

### Théorème : stabilité d'un système linéaire

Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un système linéaire  $\dot{x}(t) = A x$  soit **asymptotiquement stable** est que  $\forall Q = Q^T > 0$ , la matrice  $P$ , unique solution de l'équation de Lyapunov suivante

$$A^T P + P A + Q = 0 \quad (33)$$

soit définie positive.

### Exemples : Application de la méthode directe de Lyapunov

**Exemple 1.** Étudier la stabilité de l'**origine** du système suivant

$$\dot{x}_1(t) = x_1^3(t) + x_1(t)x_2^2(t) - x_1(t) \quad (34)$$

$$\dot{x}_2(t) = x_2^3(t) + x_1^2(t)x_2(t) - x_2(t) \quad (35)$$

en considérant comme fonction candidate de Lyapunov

$$V(x) = x_1^2(t) + x_2^2(t) \quad (36)$$

Il clair que  $V(0) = 0$  et  $V(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}^2$ . On a :

$$\begin{aligned}\dot{V}(x) &= 2x_1(t)\dot{x}_1(t) + 2x_2(t)\dot{x}_2(t) \\&= 2x_1(t) \left( x_1^3(t) + x_1(t)x_2^2(t) - x_1(t) \right) + 2x_2(t) \left( x_2^3(t) + x_1^2(t)x_2(t) - x_2(t) \right) \\&= 2 \left( x_1^2(t) + x_2^2(t) \right) \left( x_1^2(t) + x_2^2(t) - 1 \right)\end{aligned} \quad (37)$$

### Exemples : Application de la méthode directe de Lyapunov

On remarque que  $\dot{V}(x) < 0$  pour  $x(t) \in B_1(0)$  (Boule de rayon  $r = 1$  centrée à l'origine  $x^* = 0$ ).  $B_1(0)$  est définie comme suit :

$$B_1(0) = \{x \mid x_1^2(t) + x_2^2(t) - 1\} \quad (38)$$

On conclut que l'**origine est localement asymptotiquement stable** et le domaine d'attraction est la boule  $B_1(0)$ .

**Exemple 2.** Étudier la stabilité de l'**origine** du système

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t) \quad (39)$$

$$\dot{x}_2(t) = -\sin(x_1(t)) \quad (40)$$

en considérant comme fonction candidate de Lyapunov

$$V(x) = (1 - \cos(x_1(t))) + \frac{1}{2}x_2^2(t) \quad (41)$$

## Méthode directe de Lyapunov (seconde méthode)

### Exemples : Application de la méthode directe de Lyapunov

Il clair que  $V(0) = 0$  et  $V(x) > 0, \forall x \in [-2\pi, 2\pi] \times \mathbb{R}$ . On a :

$$\dot{V}(x) = \frac{\partial V(x)}{\partial x_1(t)} \frac{dx_1(t)}{dt} + \frac{\partial V(x)}{\partial x_2(t)} \frac{dx_2(t)}{dt} \quad (42)$$

$$= \sin(x_1(t)) x_2(t) + x_2(t) (-\sin(x_1(t))) \quad (43)$$

$$= 0 \quad (44)$$

On remarque bien que  $\dot{V}(x) = 0$ , donc l'**origine est stable**.

# Construction des fonctions de Lyapunov

Méthode de Krasovskii

## Théorème

Soit le système autonome  $\dot{x}(t) = f(x)$  dont le point d'équilibre étudiée est l'origine et soit la matrice jacobienne du système :

$$A(x) = \nabla_x f(x) \quad (45)$$

Si la matrice  $F(x)$  définie par :

$$F(x) = A(x) + [A(x)]^T \quad (46)$$

est **définie négative** dans un voisinage  $\Omega$  de l'origine alors l'origine est un point d'équilibre **localement asymptotiquement stable**. Une fonction de Lyapunov pour ce système est  $V(x) = [f(x)]^T f(x)$ . Si de plus,  $\Omega = \mathfrak{R}^n$  et  $\lim_{\|x\| \rightarrow +\infty} V(x) = +\infty$  alors le point d'équilibre est **globalement asymptotiquement stable**.

# Construction des fonctions de Lyapunov

Méthode de Krasovskii

## Théorème

Soit  $\dot{x}(t) = f(x)$  dont le point d'équilibre étudiée est l'origine et  $A(x)$  sa jacobienne. S'il existe deux matrices  $P = P^T > 0$ ;  $Q = Q^T > 0$  telles que :

$$F(x) = [A(x)]^T P + P A(x) + Q < 0, \quad x \in \Omega \quad (47)$$

alors l'origine est **localement asymptotiquement stable**. La fonction  $V(x) = [f(x)]^T P f(x)$  est une fonction de Lyapunov pour le système.

Si de plus  $\Omega = \mathfrak{R}^n$  et  $\lim_{\|x\| \rightarrow +\infty} V(x) = +\infty$  alors le système est **globalement asymptotiquement stable**.

# Construction des fonctions de Lyapunov

## Méthode de Krasovskii

Exemple :

Soit le système

$$\dot{x}_1(t) = -6x_1(t) + 2x_2(t) \quad (48)$$

$$\dot{x}_2(t) = 2x_1(t) - 6x_2(t) - 2x_2^3(t) \quad (49)$$

qui pour point d'équilibre l'origine. On calcule la jacobienne  $A(x)$ ,

$$A(x) = \begin{bmatrix} -6 & 2 \\ 2 & -6 - 6x_2^2(t) \end{bmatrix} \quad (50)$$

$$F(x) = A(x) + [A(x)]^T \quad (51)$$

$$= \begin{bmatrix} -12 & 4 \\ 4 & -12 - 12x_2^2(t) \end{bmatrix} \quad (52)$$

# Construction des fonctions de Lyapunov

## Méthode de Krasovskii

### Exemple

Les mineurs diagonaux principaux de  $F(x)$  sont :

- $| -12 | = -12 < 0$  ( $| \cdot |$  c'est le déterminant et non la valeur absolue),
- $\begin{vmatrix} -12 & 4 \\ 4 & -12 - 12x_2^2(t) \end{vmatrix} = -128 - 12x_2^2(t) < 0.$

Les deux mineurs sont négatives, la matrice  $F(x)$  est définie négative, alors l'origine est **localement asymptotiquement stable**. La fonction de Lyapunov d'après le premier théorème de Krasovskii est :

$$V(x) = [f(x)]^T f(x) \quad (53)$$

$$= \begin{bmatrix} -6x_1(t) + 2x_2(t) & 2x_1(t) - 6x_2(t) - 2x_2^3(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -6x_1(t) + 2x_2(t) \\ 2x_1(t) - 6x_2(t) - 2x_2^3(t) \end{bmatrix} \quad (54)$$

# Construction des fonctions de Lyapunov

Méthode de Krasovskii

## Exemple

$$V(x) = (-6x_1(t) + 2x_2(t))^2 + \left(2x_1(t) - 6x_2(t) - 2x_2^3(t)\right)^2 \quad (55)$$

On remarque aussi que  $\lim_{\|x\| \rightarrow +\infty} V(x) = +\infty$ , alors l'origine est globalement asymptotiquement stable.

## Remarque

Bien que l'application de la méthode de Krasovskii est simple, néanmoins son usage est limité du fait de problèmes tels que :

- la jacobienne  $A(x)$  non définie négative,
- difficulté pour vérifier  $F(x)$  est définie négative.

# Construction des fonctions de Lyapunov

## Méthode du gradient variable

Le principe de la méthode du gradient variable consiste à assumer que le gradient  $\nabla_x V(x) = g(x)$  de la fonction de Lyapunov  $V(x)$  est connu. Par la suite, en intégrant le gradient  $\nabla_x V(x)$ , on détermine la fonction de Lyapunov  $V(x)$ .

On a :

$$g(x) = \nabla_x V(x) \quad (56)$$

$$g(x) dx = \nabla_x V(x) dx = dV(x) \quad (57)$$

par conséquent :

$$V(x_f) - V(x_0) = \int_{x_0}^{x_f} \nabla_x V(x) dx = \int_{x_0}^{x_f} g(x) dx \quad (58)$$

La différence  $V(x_f) - V(x_0)$  dépend de l'état initial  $x(t_0) = x_0$  et l'état final  $x(t_f) = x_f$  et non de la trajectoire allant de  $x_0$  à  $x_f$ . Cette propriété est utilisée pour déterminer  $V(x)$  en intégrant  $\nabla_x V(x)$  le long des axes de coordonnées :

# Construction des fonctions de Lyapunov

## Méthode du gradient variable

$$V(x) = \int_0^x g(x) dx \quad (59)$$

$$= \int_0^{x_1} g_1(s_1, 0, \dots, 0) ds_1 + \int_0^{x_2} g_2(x_1, x_2, \dots, 0) ds_2 \quad (60)$$

$$+ \dots + \int_0^{x_n} g_n(x_1, x_2, \dots, x_n) ds_n \quad (61)$$

Comme le gradient  $g(x)$  d'une fonction scalaire  $V(x)$  est une fonction vectorielle, par conséquent son Jacobien  $\nabla_x g(x)$  doit satisfaire la **condition de symétrie**  $\nabla_x g(x) = [\nabla_x g(x)]^T$ , alors les paramètres inconnus de  $g(x)$  doivent satisfaire cette condition de symétrie. Généralement, on considère :

$$g_i(x) = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \quad (62)$$

où  $a_{ij}$  sont les paramètres à déterminer.

# Construction des fonctions de Lyapunov

## Méthode du gradient variable

Pour déterminer la fonction de Lyapunov en utilisant la méthode du gradient variable, on suit les étapes suivantes :

- ① en utilisant la formule (62), déterminer  $g(x) = \nabla_x V(x)$ ,
- ② imposer la condition de symétrie  $\nabla_x g(x) = [\nabla_x g(x)]^T$ ,
- ③ déterminer  $\dot{V}(x) = [\nabla_x V(x)]^T f(x) = [g(x)]^T f(x)$ ,
- ④ déterminer  $V(x)$  en utilisant la formule (61),
- ⑤ vérifier que  $V(x) > 0$  et  $\dot{V}(x) < 0$ .

# Construction des fonctions de Lyapunov

## Méthode du gradient variable

Exemple :

Considérons le système suivant :

$$\dot{x}_1(t) = -2x_1(t) \quad (63)$$

$$\dot{x}_2(t) = -2x_2(t) + 2x_1(t)x_2^2(t) \quad (64)$$

Étape 1. En utilisant la formule (62), il vient :

$$g_1(x) = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \quad (65)$$

$$g_2(x) = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \quad (66)$$

alors

$$g(x) = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{bmatrix} \quad (67)$$

# Construction des fonctions de Lyapunov

## Méthode du gradient variable

Exemple :

$$\nabla_x g(x) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad (68)$$

**Étape 2.** On impose la condition de la symétrie de  $\nabla_x g(x)$ , c'est-à-dire  $\nabla_x g(x) = [\nabla_x g(x)]^T$ , il vient :

$$a_{12} = a_{21} \quad (69)$$

On prend

$$a_{12} = a_{21} = 0 \quad (70)$$

Par conséquent :

$$g(x) = \begin{bmatrix} a_{11} x_1 \\ a_{22} x_2 \end{bmatrix} \quad (71)$$

# Construction des fonctions de Lyapunov

## Méthode du gradient variable

Exemple :

Étape 3. Calcul de  $\dot{V}(x)$  :

$$\dot{V}(x) = [g(x)]^T f(x) = [a_{11} x_1(t) \quad a_{22} x_2(t)] \begin{bmatrix} -2x_1(t) \\ -2x_2(t) + 2x_1(t)x_2^2(t) \end{bmatrix} \quad (72)$$

$$= -2a_{11}x_1^2(t) - 2a_{22}x_2^2(t)(1 - x_1(t)x_2(t)) \quad (73)$$

Étape 3. Calcul de  $V(x)$  en utilisant la formule (61) :

$$V(x) = \int_0^{x_1} g_1(s_1, 0) ds_1 + \int_0^{x_2} g_2(s_1, s_2) ds_2 \quad (74)$$

$$= \int_0^{x_1} a_{11} s_1 ds_1 + \int_0^{x_2} a_{22} s_2 ds_2 \quad (75)$$

$$= \frac{a_{11}}{2} x_1^2(t) + \frac{a_{22}}{2} x_2^2(t) \quad (76)$$

# Construction des fonctions de Lyapunov

## Méthode du gradient variable

Exemple :

**Étape 5.** On remarque que  $V(0) = 0$ . Pour garantir  $V(x) > 0$ , on doit choisir  $a_{11} > 0$  et  $a_{22} > 0$ . Par exemple, en prenant  $a_{11} = a_{22} = 2$ , on obtient :

$$\dot{V}(x) = -2x_1^2(t) - 2x_2^2(t)(1 - x_1(t)x_2(t)) \quad (77)$$

Ainsi, le système est localement asymptotiquement stable si  $1 - x_1(t)x_2(t) \geq 0$ .

# Théorème d'invariance de LaSalle

## Position du problème

Certains systèmes ont la caractéristique d'avoir une **fonction de Lyapunov décroissante**  $\dot{V}(x) \leq 0$  mais ils sont **néanmoins asymptotiquement stable**.

### Exemple : Pendule inversé

On considère le pendule de la Figure 4. On suppose que la masse est soumise à une force de résistance de friction proportionnelle à la vitesse de la masse. Dans ce cas, le modèle d'état du pendule est donné comme suit :

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t) \quad (78)$$

$$\dot{x}_2(t) = -\frac{g}{l} \sin(x_1(t)) - \frac{k}{m} x_2(t) \quad (79)$$

où  $x_1(t) = \theta(t)$  (position angulaire, c'est l'angle que la corde fait avec la verticale),  $x_1(t) = \dot{\theta}(t)$  (vitesse angulaire).  $g$  est l'accélération de la gravité,  $k$  est le coefficient de frottement,  $m$  est la masse en mouvement,  $l$  est la longueur de la corde rigide.

## Pendule inversé

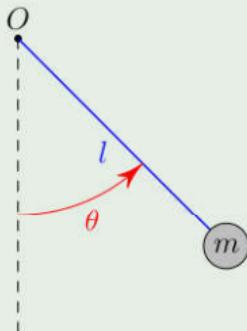


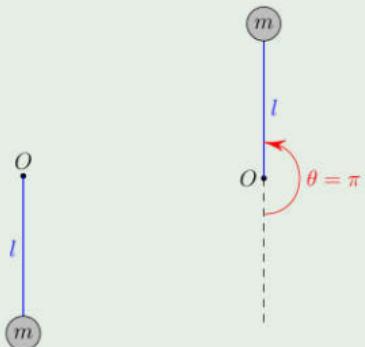
FIGURE 4 – Pendule simple.

Les points d'équilibre du pendule sont  $(0, 0)$  et  $(k \pi, 0)$  ( $k = 0, \pm 1, \pm 2 \dots$ ).

**Physiquement**, on a deux points d'équilibre  $(0, 0)$  et  $(\pi, 0)$  (Figure 5). Les autres c'est une duplication mathématique de ces deux points car le pendule peut faire un certain nombre de tours autour de son point de rotation  $O$ .

## Pendule inversé

En utilisant la **définition intuitive** de la stabilité, il est clair le point d'équilibre  $(\pi, 0)$  est instable. Par contre, le point d'équilibre  $(0, 0)$  est stable. De plus, en utilisant la **définition de la stabilité asymptotique**, on peut confirmer que le point  $(0, 0)$  est asymptotiquement stable. Car si le pendule est à la position d'équilibre  $(0, 0)$  et on le perturbe légèrement, le pendule, après un certain temps, va regagner sa position d'équilibre initiale  $(0, 0)$ .



Point d'équilibre  $(0, 0)$  Point d'équilibre  $(\pi, 0)$

FIGURE 5 – Points d'équilibres du pendule simple.

# Théorème d'invariance de LaSalle

## Position du problème

### Pendule inversé

Appliquons maintenant la théorie de Lyapunov pour étudier la stabilité du point d'équilibre  $(0, 0)$ . On prend comme fonction de Lyapunov, la fonction d'énergie définie comme suit :

$$V(x) = \frac{1}{2} m l^2 x_2^2(t) + m g l (1 - \cos(x_1(t))) \quad (80)$$

En calculant la dérivée de  $\dot{V}(x)$ , on obtient :  $\dot{V}(x) = -k l^2 x_2^2(t)$ .

Il est clair que pour  $x_2 = 0$  et  $x_1 \neq 0$ , on a  $\dot{V}(x) = 0$ , on déduit que la  $\dot{V}(x)$  est semi-définie négative, c'est-à-dire  $\dot{V}(x) \leq 0$ , alors d'après la théorie de Lyapunov, le point d'équilibre  $(0, 0)$  est stable.

Cette conclusion est en contradiction avec la réalité physique. Cet exemple montre clairement que le théorème de Lyapunov n'est pas conclusif quant à la stabilité locale asymptotique.

# Théorème d'invariance de LaSalle

## Ensemble invariant

Le théorème d'**invariance de LaSalle** permet de surmonter cette contradiction apparente en présentant des **conditions supplémentaires sur la fonction  $V(x)$  et sa dérivée  $\dot{V}(x)$  dans le temps** pour garantir la stabilité asymptotique. L'idée de base consiste à généraliser le concept du point d'équilibre en introduisant le concept de l' **ensemble invariant**.

### Définition

Un ensemble **invariant**  $\mathcal{M}$  (Figure 6), pour un système dynamique  $\dot{x}(t) = f(x)$ , est défini comme l'**ensemble de conditions initiales**, tels que la solution  $x(t)$  reste dans l'**ensemble**  $\mathcal{M} \forall t > 0$ , c'est-à-dire

$$x(0) \in \mathcal{M} \Rightarrow x(t) \in \mathcal{M}, \quad \forall t \geq 0 \quad (81)$$

### Exemples : ensemble invariant

Le point d'équilibre, le cycle limite, le domaine d'attraction et l'espace Euclidien sont des ensembles invariants.

## Théorème d'invariance de LaSalle

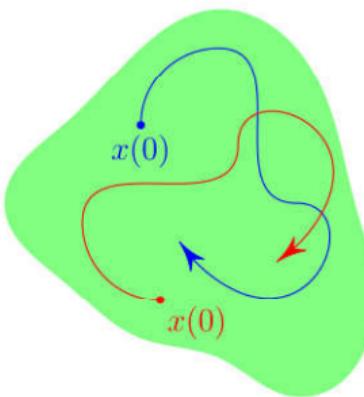


FIGURE 6 – Domaine invariant.

Le théorème de LaSalle permet de conclure sur la stabilité asymptotique dans le cas où  $\dot{V}(x) \leq 0$  au lieu de  $\dot{V}(x) < 0$ . La différence entre les deux cas se situent dans la possibilité que  $\dot{V}(x) = 0$ . L'ensemble des points pour lesquels  $\dot{V}(x) = 0$  est défini comme suit :

$$\mathcal{R}_0 = \{x \mid \dot{V}(x) = 0\} \quad (82)$$

## Théorème d'invariance de LaSalle

Soit  $V : D \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continument différentiable et  $\Omega_l = \{x \mid V(x) \leq l\}$  avec  $l > 0$ . Supposons que :

- l'ensemble  $\Omega_l$  ( $\Omega_l \subset D$ ) est compact (fermé et borné),
- $\dot{V}(x) \leq 0, \forall x \in \Omega_l$ ,
- $\mathcal{R}_0 = \{x \in \Omega_l \mid \dot{V}(x) = 0\}$  ( $\mathcal{R}_0 \subset \Omega_r$ ),
- $\mathcal{M}$  le plus grand ensemble invariant dans  $\mathcal{R}_0$  ( $M \subset \mathcal{R}_0$ ),

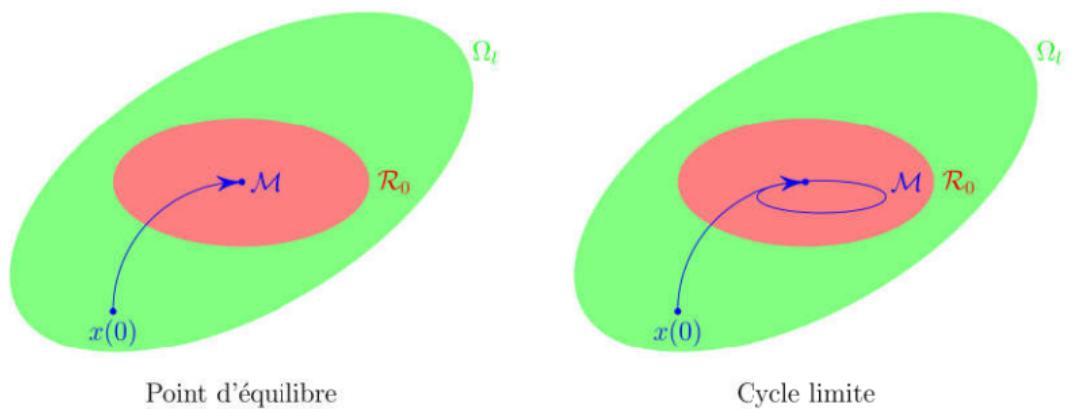
alors  $\forall x(0) \in \Omega_l$ , la solution  $x(t) \rightarrow \mathcal{M}$  lorsque  $t \rightarrow +\infty$ .

Pour appliquer le théorème de LaSalle, on suit les étapes suivantes :

- ① On définit l'ensemble  $\Omega_l$  ( $\Omega_l = \{x \mid V(x) \leq l\}$ ) et  $\dot{V}(x) \leq 0, \forall x \in \Omega_l$ ),
- ② On détermine  $\mathcal{R}_0 = \{x \in \Omega_l \mid \dot{V}(x) = 0\}$ ,
- ③ On détermine le plus grand ensemble invariant  $\mathcal{M}$  dans  $\mathcal{R}_0$ .

## Théorème d'invariance de LaSalle

Le théorème de LaSalle possède l'avantage de s'appliquer à l'analyse de la convergence asymptotique vers un cycle comme l'illustre la Figure 7



Point d'équilibre

Cycle limite

FIGURE 7 – Points d'équilibres du pendule simple.

## Exemple : Pendule inversé

Rappelons que pour le pendule inversé :  $\dot{V}(x) = -k l^2 x_2^2(t)$ . Appliquons maintenant le théorème de LaSalle pour étudier la stabilité de l'origine. On considère  $k = l = m1$  et  $g = 10$ .

- **Étape 1.** Les lignes de contour de la fonction  $V(x)$  sont données par la Figure 8. On définit l'ensemble  $\Omega$  en prenant  $l = 10$ , ce qui donne  $\Omega = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \times [-2\sqrt{5}, 2\sqrt{5}]$ .
- **Étape 2.** Déterminons l'ensemble  $\mathcal{R}_0$  :

$$\mathcal{R}_0 = \{x \mid \dot{V}(x) = 0\} \Rightarrow \mathcal{R}_0 = \{x \mid x_2 = 0\} \quad (83)$$

par conséquent  $\mathcal{R}_0$  est l'ensemble de **tous les points appartenant à l'axe  $x_1$  (droite  $x_2 = 0$ )**. L'ensemble est indiqué en **rouge** dans la Figure 8.

## Exemple : Pendule inversé

- Étape 3. Cherchons maintenant, l'ensemble invariant  $\mathcal{M}$  en annulant la dérivée de la fonction qui décrit l'ensemble  $\mathcal{R}_0$ , c'est-à-dire

$$\dot{x}_2 = 0 \quad (84)$$

d'après l'équation du modèle

$$\dot{x}_2 = 0 \Rightarrow -\frac{g}{m} \sin(x_1) = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \text{ ou } x_1 = \pi \quad (85)$$

L'ensemble invariant contient un seul point, c'est-à-dire  $\mathcal{M} = \{(0, 0)\}$  et il est donc le plus large ensemble invariant inclus dans  $\mathcal{R}_0$ . Le plus large ensemble invariant  $\mathcal{M}$  est indiqué en vert dans la Figure 8.

En conclusion, d'après le théorème de LaSalle, toutes les trajectoires  $x(t)$  avec  $x(0) \in \Omega_l$  convergent vers  $\mathcal{M}$  quand  $t \rightarrow +\infty$ , c'est-à-dire vers le point d'équilibre  $(0, 0)$  donc le point est asymptotiquement stable.

## Exemple : Pendule inversé

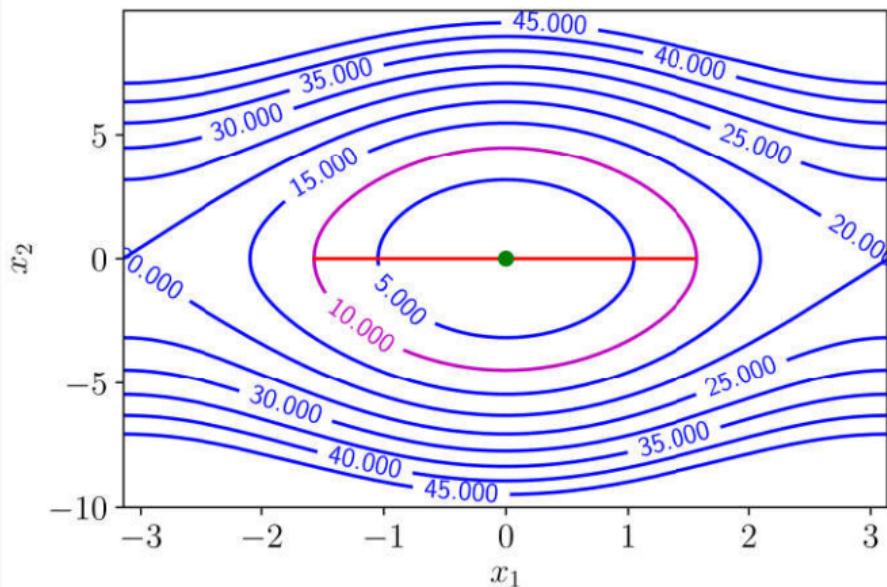


FIGURE 8 – Lignes de contours de la fonction de Lyapunov pour le pendule.

## Exercices

**Exo. 1** Soit le système dynamique

$$\dot{x}_1(t) = x_1(t) \left( x_1^2(t) + x_2^2(t) - 1 \right) - x_2(t) \quad (86)$$

$$\dot{x}_2(t) = x_1(t) + x_2(t) \left( x_1^2(t) + x_2^2(t) - 1 \right) \quad (87)$$

1. Déterminer les points d'équilibre du système,
2. Étudier la stabilité des points d'équilibre en utilisant la méthode directe de Lyapunov,
3. Déduire l'ensemble d'attraction pour chaque point d'équilibre s'il existe.

**Exo. 2** Soit le système dynamique

$$\dot{x}(t) = x(t) (-1 + 0,5 \sin(x(t))), \quad x(0) = 1 \quad (88)$$

1. Déterminer les bornes inférieure et supérieure de la solution  $x(t)$ ,
2. Étudier la stabilité des points d'équilibre en utilisant la méthode directe de Lyapunov en considérant  $V(x) = x^2(t)$ .

### **Exo. 3** Considérons le système

$$\dot{x}_1(t) = -x_1(t) - 4x_2(t) - x_1(t) \left( x_1^2(t) + x_2^2(t) \right), \quad \dot{x}_2(t) = x_1(t) - x_2(t) + x_2(t) \left( x_1^2(t) - x_2^2(t) \right) \quad (89)$$

En utilisant la fonction candidate de Lyapunov

$$V(x) = x_1^2(t) + 4x_2^2(t)$$

montrer que l'origine est asymptotiquement stable.

### **Exo. 4** Soit le système

$$\dot{x}_1(t) = -4x_1(t) + x_2(t) + 4x_1^2(t), \quad \dot{x}_2(t) = x_1(t) - x_1^2(t) - 4x_2(t) \quad (90)$$

- ① Montrer que l'origine est un point d'équilibre unique,
- ② Montrer par la méthode indirecte de Lyapunov que l'origine est asymptotiquement stable.
- ③ Est-ce que le point d'équilibre est globalement asymptotiquement stable ?  
(on donne  $V(x) = 4x_1^2(t) + 4x_2^2(t) + 2x_1(t)x_2(t)$ )