YÜKSEK DERECELİ MOMENTLERE DAYALI PORTFÖY OPTİMİZASYON MODELİ: POLİNOM HEDEF PROGRAMLAMA

Lisans Tezi

Ümmü SAVRAN

Eskişehir, 2024

YÜKSEK DERECELİ MOMENTLERE DAYALI PORTFÖY OPTİMİZASYON MODELİ: POLİNOM HEDEF PROGRAMLAMA

Ümmü SAVRAN

LİSANS TEZİ

Fen Fakültesi

İstatistik Bölümü

Danışman: Prof. Dr. İlhan USTA

Eskişehir

Eskişehir Teknik Üniversitesi

2024

ABSTRACT

PORTFOLIO OPTIMIZATION MODEL BASED ON HIGH DEGREE MOMENTS: POLYNOMIAL GOAL PROGRAMMING

Ümmü SAVRAN

Department of Statistics

Eskişehir Technical University, Faculty of Science, 2024

Supervisor: Prof. Dr. İlhan USTA

Markowitz's (1952) mean-variance (MV) model which is accepted as a pioneer model of portfolio optimization, is inadequate when stock returns are not a multivariate normal distributed or contain outliers. For this reason, the applications of new models using higher order moments in portfolio selection have become quite common in recent years. Among these models, the mean-variance-skewness and kurtosis (MVSK) model stands out. In this model, the objective is to maximize the expected return and skewness of the portfolio while minimizing the variance and kurtosis of the portfolio. One of the methods used to find the optimal solution of this objective function under certain constraints is polynomial objective programming. In this study, polynomial goal programming is coded in R programming language to solve the portfolio optimization problem for the MVSK model. Using the codes generated in R programming language, the optimal weight values of 3 stocks in the BIST-30 index according to the MVSK and MV models are obtained and the optimal portfolio composition for the investor is revealed.

Keywords: Portfolio optimization, polynomial goal programming, mean-variance-skewness-kurtosis model

ÖZET

YÜKSEK DERECELİ MOMENTLERE DAYALI PORTFÖY OPTİMİZASYON MODELİ: POLİNOM HEDEF PROGRAMLAMA

Ümmü SAVRAN

İstatistik Bölümü

Eskişehir Teknik Üniversitesi, Fen Fakültesi, 2024

Danışman: Prof. Dr. İlhan USTA

Portföy optimizasyonun öncü modeli olarak kabul edilen Markowitz'in (1952) ortalama-varyans (MV) modeli, hisse senedi getirilerinin çok boyutlu normal dağılmadığı veya aykırı değerler içerdiği durumlarda yetersiz kalmaktadır. Bu nedenle portföy seçiminde daha yüksek dereceden momentleri kullanan yeni modellerin uygulanmaları son yıllarda oldukça yaygınlaşmıştır. Bu modeller arasında ortalama-varyans-çarpıklık ve basıklık (MVSK) modeli öne çıkmaktadır. Bu modelde amaç, portföyün beklenen getirisi ve çarpıklığının maksimize ederken ve aynı zamanda portföyün varyansı ve basıklığını minimize etmektedir. Belirli kısıtlar altında bu amaç fonksiyonunun optimum çözümünü bulmak için kullanılan yöntemlerden biri polinom hedef programlamadır. Bu çalışmada MVSK modeline ilişkin portföy optimizasyon problemini çözmek üzere polinom hedef programlama R programlama dilinde kodlanmıştır. R programlama dilinde oluşturulan kodlar kullanılarak BİST-30 endeksi içinde yer alan 3 hisse senedinin MVSK ve MV modellerine göre en optimal ağırlık değerleri elde edilmiş ve yatırımcı için en uygun portföy bileşimi ortaya konmuştur.

Anahtar Kelimeler: Portföy optimizasyonu, polinom hedef programlama, ortalama–varyans–çarpıklık–basıklık modeli

İÇİNDEKİLER

TABLO LİSTESİ

GRAFİK LİSTESİ

1. GİRİŞ

Küreselleşen Dünya'da her geçen yıl siyasi ve ekonomik dalgalanmalar piyasalara ilişkin belirsizliğin artmasına sebep olmaktadır. Belirsizliğin artışı ekonomik piyasalarda yatırımcıların karar verme süreçlerini zorlaştırmaktadır. Yatırımcıların ekonomik olarak ayakta kalması için çeşitli para kazanma yöntemlerine başvurmaktadır. Bunlardan bir tanesi de finansal piyasalara yönelik yatırım araçlarının kullanılmasıdır. Finansal piyasalarda yatırımcıların, en az riskle ve en fazla getiri hedefi daha karmaşık hale gelmektedir. En iyi risk-getiri dengesini portföy optimizasyonu ile belli kısıtlar altında işlemler yapılabilmektedir. Portföy optimizasyonu yani optimal portföy alanında geliştirilen ve uygulama alanı bulan birçok teori söz konusudur. En önemli ve bilinen ise modern yatırım teorisinin kurucusu olan Harry Markowitz'in ortalama-varyans modelidir.

Finansal piyasa araçları kendi içerisinde belli riskleri taşımaktadır. Yatırımcılar, yatırımların taşıdığı risk ile beklenen getiri arasındaki en iyi dengeye ulaşabilmeyi amaçlamaktadırlar. Belirtilen amaca yönelik kullanılan birçok yatırım tekniği, finansal piyasa araçlarının sahip olduğu sistematik risklerin azaltmak için kullanılmaktadır. Böylece belli risk karşılında daha yüksek getiriler elde edilmektedir. Markowitz, bu konuda çalışan birisi olarak ortalama-varyans yöntemi ile belli bir getiri için en düşük risk ile portföylerin oluşmasını hedeflemiştir. Bu sonuca bağlı yatırımcı en düşük risk ile birlikte en yüksek getirili portföyü oluşmaktadır.

Markowitz'in Ortalama Varyans modelinin yeterliliği sorgulandığında, modelin getirilerinin çarpıklık ve basıklık ile karakterize olduğu ortaya konmaktadır. Çarpıklık ve basıklık gibi unsurların portföy seçimine dahil edilmesi amacıyla, Polinomiyal Hedef Programlama yaklaşımı kullanılarak önce çarpıklık, daha sonra basıklık portföy seçimine entegre edilmektedir.

Bu çalışmada, getirilerin portföy analizi ve optimizasyon sürecinde uygulanan işlemler detaylı bir şekilde açıklanmaktadır. Daha sonra Polinom Hedef Programlama yaklaşımı tanıtılarak, süreç içerisinde belirlenen hedefler ve bu hedeflere ulaşma yöntemleri ayrıntılı olarak ele alınmaktadır. Bunlara ek olarak kullanılacak veri setindeki değişkenler, yani her bir hisse senedinin getirisinin logaritmik hesaplanma yöntemi hakkında bilgi verilmektedir. Teorik anlatımlar R programlama dilinde uygulaması gerçekleştirilip sonuçlar değerlendirilecektir.

2. LİTERATÜR

Barış Altaylıgil 2008 yılında finansal yatırım araçları arasından optimal portföy seçimi için önce çarpıklığı dikkate alan ortalama-varyans-çarpıklık (MVS) modeli daha sonra iyi çeşitlendirilmiş bir portföy elde edebilmek için entropi ölçüsü ekleyerek ortalama-varyans-çarpıklık-entropi (MVSE) modelini tanımlamıştır. Bu iki model karşılaştırılarak Markowitz'in ortalama-varyans (MV) modeli ile karşılaştırılmıştır.[1]

Yusuf Topal ve Kenan İlarslan 2009 yılında Modern Portföy Teorisinde en önemli sorunlardan biri olan portföye dahil edilecek hisse senetlerinin ağırlıklarının ne olması gerektiği hakkında bir çalışma gerçekleştirmişlerdir. Bu çalışma Excel Çözücü ortamında portföye dahil edilecek hisse senetlerinin ağırlıkları belirlenerek yeni portföy oluşturulmuştur. Oluşturulan portföyün etkin sınır ile risksiz getiri oranı arasındaki ilişkisi geometrik olması portföyün optimal karakterdeki bir Tanjant portföyü olduğu sonucuna ulaşılmıştır.[8]

Rania Azmi ve Mehrdad Tamiz 2010 yılında yaptıkları çalışmada Portföy Seçimi (PS) alanında karar vericinin çok sayıda kısıtlama ve hedef varyasyonunu dahil etmesini sağlayan çok kriterli karar verme alanında en yaygın kullanılan hedef programlama (GP) yaklaşımı ile GP'nin ve varyantlarının Portföy Seçimi ve analiz problemlerine uygulanmasının kısa bir incelemesini gerçekleştirmişlerdir.

Burcu Aracıoğlu, Fatma Demircan ve Haluk Soyuer 2011 yılında İMKB 30 hisse senetleri üzerin de ortalama-varyans-çarpıklık ve basıklık modeli çerçevesinde, beklenen getiri ve çarpıklığın maksimize edilmesi, varyans ve basıklığın minimize edilmesi gibi birbiri ile çelişen ve aynı anda karşılanması gereken portföy amaçları, oluşturulacak polinomal hedef programlama yöntemi ile çalışmışlardır.[3]

Emrah Korhan 2013 yılında yaptığı çalışmada geçmiş verileri kullanılarak portföy oluşturmanın üzerinde durmuştur. 2006 ile 2011 yılları arasında BİST 30 endeksi içinde yer alan 24 hisse senedinin farklı geçmiş sürelerinden oluşan verileri kullanılarak Markowitz ortalama varyans modeli ile çok sayıda portföy oluşturmuş ve bu portföylerin elde tutulması halinde en iyi yatırım vadeleri bulunmuş ve geçmiş takip süreleri ile yatırım vadeleri arasında oluşan ilişkiden yola çıkarak en uygun yatırım vadeleri konusunda yatırımcılara karar verme aşamasında yardımcıyı olmayı hedeflemiştir.[6]

3. PORTFÖY OPTİMİZASYONU VE POLİNOM HEDEF PROGRAMLAMA

Portföy kavramı; hisse senedi, tahvil, nakit ve cüzdan gibi finansal terimlerin topluluğunu ifade eder. Portföy, belirli hedeflere ulaşmayı amaçlayan yatırımcı grubunun elinde bulunan, birbirleriyle ilişkiye sahip ve kendine ait özellikleri bulunan bir varlıktır [2]. Portföy içerisinde yer alan yatırımlar genellikle bireysel yatırımcıların yatırımları olan hisse senetlerinden oluşmaktadır [6].

Getiri oranı, yatırımcının yaptığı yatırımdan elde ettiği para kazanç veya kaybının getiri oranıdır. Bir yatırımcının beklediği getiri oranı, halihazırda var olan verilerden ve gelecekteki yatırımcının beklentilerinden hesaplanabilir. [7]

Risk ise şirketlerin yatırım kararlarında her zaman dikkate alması gereken konudur. Genel olarak riskleri iki gruba ayırabiliriz: sistematik riskler ve sistematik olmayan riskler. Sistematik riskler çeşitlendirmeyle azaltılabilen risklerdir. Fakat, savaş, ekonomik kriz ve enflasyon gibi işletmelerin kontrolünde olmayan risklerse çeşitlendirme ile azaltılamaz. [7]

Portföy analizleri genellikle matrisler ile yapılır. Bu matrisler ile bir işletmenin pazarda nasıl bir strateji izlemesi ve yatırımlarını hangi alanlarda yoğunlaşması gerektiği üzerinde yardımcı olur [4].

Portföy optimizasyonunda portföyün getirisini maksimize ederken riskini de minimize etmek, finans alanında önemli bir konudur. Portföye dahil edilecek menkul kıymetlerin ağırlıklarını belirlerken, konulacak kısıtların belirlenmesi, optimizasyon seçeneklerinin hangisinin uygulanacağı ve ek olarak geçmiş döneme ait veriler üzerinde optimizasyon gerçekleştirilmektedir.

Markowitz Ortalama Varyans modeli çalışmasının ardından, finansal varlıkların getirileri tipik olarak ortalamaları ile tanımlanırken, risk varyasyonla tanımlanır. Daha sonra, Markowitz'in servet tahsisi için önerdiği ortalama varyans kriterinin yeterliliğini sorgulanması sonucu modelin güncellenmesi gerektiğinden varlık getirilerinin çarpıklık ve basıklık ile karakterize olduğu üzerine bir çalışma gerçekleştirilmektedir.

Polinom Hedef Programlama (Polinomial Goal Programing PGP), amaç fonksiyonunun bir dizi fonksiyonun kısıtlayıcı koşullar altında maksimize ya da minimize edecek optimum noktayı araştıran doğrusal olmayan programlamadır. Bu çalışmada, beklenen getiri ve çarpıklığı en üst düzeye çıkaran ve aynı anda risk ve basıklığı en aza indiren çok sayıda çelişkili ve rakip portföy hedefi içeren portföy optimizasyonu sorununa çözüm bulmak için kullanılmaktadır.

Portföy optimizasyonunun uygulamasında varlık getirilerinin Ortalama, varyans, çarpıklık ve basıklıklarının hesaplanması için gerekli olan notasyonlar tanımlanmaktadır.

$\boldsymbol{w} = (w_1, w_2, w_3, \ldots, w_n)^T$ portföyün ağırlıklarının vektörüdür ve w_i i' inci varlığın ağırlığıdır. $\sum_{i=1}^{n} w_i = w^T \mathbf{1} = 1$, $\mathbf{1}$ burada $n \times 1$ boyutunda birim vektörüdür. Ayrıca portföy ağırlıkları $w_i \in [0,1]$ $i = 1, \ldots, n$ olacak şekilde kısıtlandırılmıştır.

$\boldsymbol{R} = (R_1, R_{2,} R_3, \ldots, R_n)^T$, getiriler vektörünün transpozudur.

Getirilerin beklenen değerinin transpoz vektörü $E(\boldsymbol{R}) = \boldsymbol{\mu} = (\boldsymbol{\mu_1}, \mu_2, \ldots, \mu_n)^T$ olarak tanımlanır ve $\mu_i = E(R_i)$ eşittir. Ayrıca getirilerin $n \times n$ boyutlu varyans – kovaryans matrisi $E[\boldsymbol{R} - E(\boldsymbol{R})]^2 = \boldsymbol{V}$ olarak tanımlanır. Burada $\boldsymbol{V}$**,** V matrisinin elemanları $\sigma_{ij} = E[(R_i - E[R_i])((R_j - E[R_j]))]$ olan ve i ve j varlık getirilerinin arasındaki kovaryansını gösteren elemanlardan oluşur ve $\forall(i,j) \in [1, \ldots, n]$ için tanımlanır. Getiri vektörünün $n \times n^2$ çarpıklık – kovaryans matrisi $E[\boldsymbol{R} - E(\boldsymbol{R})]^3 = \boldsymbol{S}$ olarak tanımlanır. Burada $\boldsymbol{S}$**,** elemanları $s_{ijl} = E[(R_i - E[R_i])((R_j - E[R_j])(R_l - E[R_l])]$ olan ve i,j ve l varlıkları arasındaki getirilerin çarpıklık-kovaryansını gösteren elemanlardan oluşur ve $\forall(i,j,l) \in [1, \ldots, n]$ için tanımlanır. Getiri vektörünün $n \times n^3$ basıklık- kovaryans matrisi $E[\boldsymbol{R} - E(\boldsymbol{R})]^4 = \boldsymbol{K}$ olarak tanımlanır. Burada **K**, elemanları $k_{ijlt} = E[(R_i - E[R_i])((R_j - E[R_j])(R_l - E[R_l])(R_t - E[R_t])]$ olan ve i, j, l ve t varlıkları arasındaki getirilerin basıklık-kovaryansını gösteren elemanlardan oluşur ve $\forall(i,j,l,t) \in [1, \ldots, n]$ için tanımlanır. [9]

Portföyün Ortalaması, varyansı, çarpıklık ve basıklık değerleri $R_p = \sum_{i=1}^{n} w_i R_i$, portföyün getirileri ve $\otimes$ kronecker çarpım olmak üzere;

$$E(R_p) = E(\boldsymbol{w}^T \boldsymbol{R}) = \sum_{i=1}^{n} w_i \mu_i = \boldsymbol{w}^T \boldsymbol{\mu} \tag{1}$$

$$\sigma^2(R_p) = E(\boldsymbol{w}^T \boldsymbol{R} - E(\boldsymbol{w}^T \boldsymbol{R}))^2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} w_i w_j \sigma_{ij} = \boldsymbol{w}^T \boldsymbol{V} \boldsymbol{w} \tag{2}$$

$$S_3(R_p) = E(\boldsymbol{w}^T \boldsymbol{R} - E(\boldsymbol{w}^T \boldsymbol{R}))^3 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} w_i w_j w_l s_{ijl} = \boldsymbol{w}^T \boldsymbol{S}(\boldsymbol{w} \otimes \mathbf{w}) \tag{3}$$

$$K_4(R_p) = E\left(\boldsymbol{w}^T \boldsymbol{R} - E(\boldsymbol{w}^T \boldsymbol{R})\right)^4 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} \sum_{t=1}^{n} w_i w_j w_l w_t k_{ijlt} = \boldsymbol{w}^T \boldsymbol{K}(\boldsymbol{w} \otimes \mathbf{w} \otimes \mathbf{w}) \tag{4}$$

olarak tanımlanır.

Beklenen getirinin ve getirinin çarpıklığı en üst düzeye çıkarılması, getirinin varyansının ve basıklığının en aza indirilmesi gibi çoklu hedefleri birleştirmek için maksimum beklenen getiri , maksimum beklenen çarpıklık, minimum varyans, minimum basıklık formülleri $W^T I = 1$, $W \geq 0$ olmak üzere:

$$\text{Maksimum } E(R_p) = \boldsymbol{w}^T \boldsymbol{\mu} \tag{5}$$

$$\text{Minimum } \sigma^2(R_p) = \boldsymbol{w}^T \boldsymbol{V} \boldsymbol{w} \tag{6}$$

$$\text{Maksimum } S_3(R_p) = \boldsymbol{w}^T \boldsymbol{S}(\boldsymbol{w} \otimes \mathbf{w}) \tag{7}$$

$$\text{Minimum } K_4(R_p) = \boldsymbol{w}^T \boldsymbol{K}(\boldsymbol{w} \otimes \mathbf{w} \otimes \mathbf{w}) \tag{8}$$

ifade edilir. Bu modeli çözmek basit ancak çeşitli amaçları tek bir amaç fonksiyonunda birleştirmek gerekir. Hedefleri tek bir amaç fonksiyonunda birleştirmek için polinom hedef programlama yaklaşımı kullanılmaktadır. İlk olarak d1, d2, d3, d4 sırasıyla beklenen getiri, varyans, çarpıklık ve basıklıkların sapmalarını açıklayan hedef değişkenleri olsun. Arzulanan seviye, diğer amaçlar dikkate alınmadan belirli bir amaç için en iyi durumu gösterir. Bu nedenle E*, V*, S* ve K* arzulanan seviyeler, dört bağımsız alt problem xxx çözülerek gösterilir.

Maksimum $E^*(R_p) = \boldsymbol{w}^T \boldsymbol{\mu}$ (9)

Minimum $V^*(R_p) = \boldsymbol{w}^T \boldsymbol{V} \boldsymbol{w}$ (10)

Maksimum $S^*(R_p) = \boldsymbol{w}^T \boldsymbol{S}(\boldsymbol{w} \otimes \mathbf{w})$ (11)

Minimum $K^*(R_p) = \boldsymbol{w}^T \boldsymbol{K}(\boldsymbol{w} \otimes \mathbf{w} \otimes \mathbf{w})$ (12)

$w^T \mathbf{1} = 1, \quad w \geq 0,$ olmak koşulu ile Bu problemlerin amacı, ideal senaryodan sapmaların arzulanan seviyeler tarafından minimize edilmesi olarak tanımlanabilir.

Polinom Hedef Programlama modeli:

Minimize $Z = |\frac{d_1}{R^*}|^{\lambda 1} + |\frac{d_2}{V^*}|^{\lambda 2} + |\frac{d_3}{S^*}|^{\lambda 3} + |\frac{d_4}{K^*}|^{\lambda 4}$ (13)

$\boldsymbol{w}^T \boldsymbol{\mu} + d_1 = R^*$ (14)

$\boldsymbol{w}^T \boldsymbol{V} \boldsymbol{w} - d_2 = V^*$ (15)

$\boldsymbol{w}^T \boldsymbol{S}(\boldsymbol{w} \otimes \mathbf{w}) + d_3 = S^*$ (16)

$\boldsymbol{w}^T \boldsymbol{K}(\boldsymbol{w} \otimes \mathbf{w} \otimes \mathbf{w}) - d_4 = K^*$ (17)

$w^T \mathbf{1} = 1, \quad w \geq 0, \quad d_i \geq 0 \quad i = 1,2,3,4$

Olmak koşulu ile PGP süreci iki aşamalı bir prosedür içerir. İlk olarak, sırasıyla R*,V*,S* ve K* arzu edilen seviyeleri (9)-(12) ‘den elde edilir. Bu arzu edilen değerler (13)'e yerleştirilir ve Z'nin minimum değeri, yatırımcı tercihlerinin $\{\lambda_i\}(i = 1,2,3,4)$ için verilen kümesine göre bulunur.

4. METODOLOJİ

4.1 Amaç

Bir yatırımcının BİST-30 içerisinden üç hisse senedine yapacağı yatırım sürecinde en az riskle, en fazla getiriyi elde etmesi için ortalama-varyans-çarpıklık ve basıklık modeli çerçevesinde ortalama ve çarpıklık maksimize edilmesi, varyans ve basıklığın minimize edilmesi gibi birbirine zıt olan portföy amaçları aynı anda oluşturmak için polinom hedef programlama yöntemi ile portföy içindeki hisse senedi dağılımı incelenecektir.

4.2 Veri Seti

Bu çalışmada 2023 yılında Türkiye’deki BİST 30 endeksinde yer alan Arçelik, Akbank ve Türk Hava Yolları hisselerinin 02.01.2023 – 29.12.2023 tarihleri arasındaki günlük açılış değerleri logaritmik getiri yöntemi ile getiriler hesaplanmıştır.

$$\text{Logaritmik getiri} = \ln\left(\frac{Dönem\ Sonu\ Fiyat}{Dönem\ Başı\ Fiyat}\right) \quad (18)$$

Günlük getiriler olarak güncellenen veri setinde 248 gözlem ve 3 değişken oluşan bir matris veri setidir.

4.3 Yöntem

Bu çalışma kapsamında veri setinde yer alan 3 hisse senedinin günlük logaritmik getirileri R programlama dilinde hesaplanmıştır. Sonuçların ilk 10 gözlemi Tablo 1 de yer almaktadır.

ARÇELİK	AKBANK	THY
-0.0024125464	-0.002219	-0.0287949019
-0.0056520134	0.043485112	0.0226626006
0.0200407509	0.020532440	-0.0008791209
-0.0079681696	0.016537845	0.0217494437
0.0384511864	0.003581482	0.0527981856
-0.0448717542	0.019722510	0.0127337929
-0.0016116039	-0.026898348	0.0127337929
0.0064308903	0.012778094	0.0028530690
0.0245362526	-0.022080486	0.0243252521
-0.0269429927	-0.003641096	0.0039643263

Tablo 1:Veri Seti

Günlük getirilerin ortalaması – varyansı – çarpıklığı ve basıklık değerleri R programlama dilinde hesaplanmıştır. Sonuçlar Tablo 2 de yer almaktadır.

	ARÇELİK	AKBANK	THY
ORTALAMA	-0.0003567096	-0.0028445966	-0.0019234089
VARYANS	0.0011345182	0.0012875846	0.0009255089
ÇARPIKLIK	-0.1175632	-0.1664802	-0.4059332
BASIKLIK	4.639063	4.833323	3.549103
SHAPİRO - WİLK	0.0001563	1.987e-05	0.005678

Tablo 2:Getirilerin Dağılım Özellikleri

Burada elde edilen değerlerin matrisleri yani varyans-kovaryans matrisi , çarpıklık matrisi ve basıklık matrisi portföy optimizasyonunda kullanılacaktır. Varyans- kovaryans matrisi Tablo 3 de, Çarpıklık matrisi Tablo 4 de, Basıklık matrisi Tablo 5 de yer almaktadır.

	ARÇELİK	AKBANK	THY
ARÇELİK	0.0011345182	0.0006359498	0.0005977680
AKBANK	0.0006359498	0.0012875846	0.0005683044
THY	0.0005977680	0.0005683044	0.0009255089

Tablo 3: Varyan- Kovaryans Matrisi

		ARÇELİK	AKBANK	THY
		s_{ii1}	s_{ii2}	s_{ii3}
ARÇELİK	s_{11j}	-4.465249e-06	5.615713e-06	9.976869e-07
AKBANK	s_{22j}	1.215174e-06	-7.645103e-06	4.035963e-06
THY	s_{33j}	-4.317860e-06	-1.205224e-06	-1.136011e-05

		ARÇELİK	AKBANK	THY
		s_{i11}	s_{i22}	s_{i33}
ARÇELİK	s_{1jj}	-4.465249e-06	1.215174e-06	-4.317860e-06
AKBANK	s_{2jj}	5.615713e-06	-7.645103e-06	-1.205224e-06
THY	s_{3jj}	9.976869e-07	4.035963e-06	-1.136011e-05

Tablo 4: Çarpıklık matrisi

		ARÇELİK	AKBANK	THY
		k_{iii1}	k_{iii2}	k_{iii3}
ARÇELİK	k_{111j}	5.922833e-06	3.432502e-06	2.138046e-06
AKBANK	k_{222j}	4.012629e-06	7.948289e-06	3.570376e-06
THY	k_{333j}	2.067182e-06	2.065063e-06	3.015477e-06

		ARÇELİK	AKBANK	THY
		k_{i111}	k_{i222}	k_{i333}
ARÇELİK	k_{1jjj}	5.922833e-06	4.012629e-06	2.067182e-06
AKBANK	k_{2jjj}	3.462846e-06	7.948289e-06	2.065063e-06
THY	k_{3jjj}	2.655902e-06	3.570376e-06	3.015477e-06

		ARÇELİK	AKBANK	THY
		k_{ii11}	k_{ii22}	k_{ii23}
ARÇELİK	k_{11jj}	5.922833e-06	3.432502e-06	2.138046e-06
AKBANK	k_{22jj}	3.432502e-06	7.948289e-06	2.770073e-06
THY	k_{33jj}	138046e-06	2.770073e-06	3.015477e-06

Tablo 4: Basıklık matrisi

Portföy optimizasyon sürecinde üç hisse senedi için ağırlıklar, 0 ile 1 arasında olacak şekilde uniform dağılımdan rastgele seçilmiştir ancak bu üç ağırlığın toplamı 1 olacak ve ağırlık değerleri 0 dan büyük olacak şekilde portföy ağırlık vektörü elde edildi.

Portföy optimizasyon sürecinde portföyün ortalaması, varyansı çarpıklığı ve basıklığı hesaplanmıştır. Bu süreç, portföy optimizasyonunun ve risk değerlendirmesinin önemli bir parçasıdır.

- Portföyün ortalaması, hisse senetlerinin ortalama getirileri ve ağırlıkların çarpımı ile hesaplanmıştır.

- Portföyün varyansı varyans-kovaryans matrisinin soldan ağırlık matrisi sağdan ağırlık matrisinin transpozu ile çarpılarak hesaplanmıştır.
- Portföyün çarpıklığı üçüncü moment matrisi kullanılarak hesaplanmıştır.
- Portföyün basıklığı dördüncü moment matrisi kullanılarak hesaplanmıştır.

Bu yöntem sonucunda, portföy ağırlıklarının rastgele belirlenmesi ve portföy performansının çeşitli istatistiksel ölçütlerle değerlendirilir. Rastgele ağırlık belirleme yöntemi, portföy çeşitliliğini artırmak ve farklı risk-getiri profillerini incelemek için kullanışlıdır. Bu süreç, portföy optimizasyonu ve risk yönetimi stratejilerinin geliştirilmesinde önemli bir rol oynamaktadır.

4.5 Bulgular

Portföy optimizasyonu ve polinom hedef programlama işlemlerinin gerçekleşme sürecinde ilk adım olan Portföyün ortalama değerleri, portföyün varyansı, çarpıklığı, basıklık değerleri sırasıyla bu değerlerin maksimizasyonu ve minimizasyon süreçleri R programlama dilinde maksimizasyon ve minimizasyon fonksiyonları ile hesaplanmıştır. Değerler Tablo 5 te yer almaktadır.

	MEAN*	VARYANS*	ÇARPIKLIK*	BASIKLIK*
Optimum Değerler	-0.0003567096	0.02744584	1.384641e-06	2.288541e-06

Tablo 5:Portföy optimizasyon skorunun optimum çözüm seti.

Polinom hedef programlama elde edilen maksimum ve minimum hedefler birleştirilerek amaç fonksiyonu oluşturulmuştur. Bu amaç fonksiyonu, her bir hedef için sapmayı (d1, d2, d3, d4) minimize ederek optimal portföy ağırlıklarını bulmayı amaçlamaktadır.

Denklem 9 R programlama dilinde kodlanarak farklı yatırımcı tercihlerine sahip optimal portföy için ilk dört moment değerleri ve ağırlık dağılımları sırası ile Tablo 6 ve Tablo 7 de yer almaktadır.

PORTFÖY	λ	ORTALAMA	VARYANS	ÇARPIKLIK	BASIKLIK
1	**(1, 0, 0, 0)**	-0.0003567096	0.03368261	-4.465249e-06	5.922833e-06
2	**(0, 1, 0, 0)**	-0.001708501	0.02744584	-1.481558e-06	2.357317e-06
3	**(0, 0, 1, 0)**	-0.001421139	0.02966717	1.384641e-06	3.606965e-06
4	**(0, 0, 0, 1)**	-0.001613231	0.02765082	-3.271657e-06	2.288541e-06
5	**(1, 1, 0, 0)**	-0.0003567096	0.03368261	-4.465249e-06	5.922833e-06
6	**(1, 1, 1, 1)**	-0.001118281	0.0298128	8.588913e-07	3.615098e-06

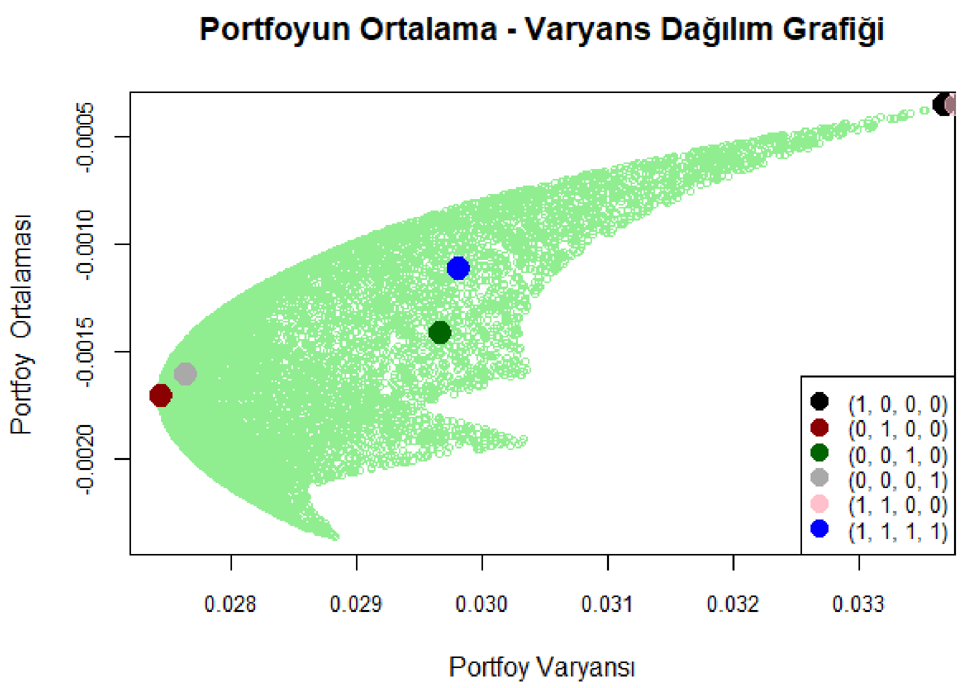
Tablo 6:Farklı yatırımcı tercihlerine sahip optimal portföy için ilk dört moment değerleri

PORTFÖY	1	2	3	4	5	6
λ	**(1, 0, 0, 0)**	**(0, 1, 0, 0)**	**(0, 0, 1, 0)**	**(0, 0, 0, 1)**	**(1, 1, 0, 0)**	**(1, 1, 1, 1)**
ARÇELİK	1.000000e+00	0.2732611	0.54923507	0.2737455	1.000000e+00	0.66055873
AKBANK	2.522670e-09	0.2314510	0.38886359	0.1288540	2.085549e-09	0.24942684
THY	2.230912e-08	0.4952880	0.06190134	0.5974005	2.481915e-08	0.09001443

Tablo 7:Farklı tercihlere sahip optimal portföy için ağırlıkların dağılımı

Tercihlerin hem portföylerdeki hisse senetlerinin kombinasyonu hem de portföylerin getirilerinin tanımlayıcı istatistikleri üzerindeki etkilerini analiz etmek için farklı tercih seviyeleri incelenmiştir. Yatırımcıların (1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,1,0), (0,0,0,1), (1,1,0,0), (1,1,1,1) tercihleri değerlendirilmiştir.

İlk dört portföyde birinci, ikinci, üçüncü ve dördüncü moment optimize edilmiştir. Portföy 5, (1,1,0,0) Markowitz ortalama-varyans portföyüdür. Portföy 6, (1,1,1,1) ortalama-varyans-çarpıklık-basıklık portföyüdür. Portföylerin değerlerinin, ortalama-varyans dağılım grafiği üzerindeki konumları Grafik 1'de gösterilmektedir.



Grafik 1: Portföyün Ortalama-Varyans Grafiği

5. SONUÇ

Yatırımcılar, risk ve getiri tercihleri arasında arzu ettikleri dengeyi sağlamak için sermayelerini bir dizi potansiyel yatırım arasında tahsis etmeyi amaçlamaktadır. Bu bağlamda, tercih edilen en önemli yatırım araçlarından biri de menkul kıymetlerdir. Burada cevaplanması gereken önemli sorular portföyün nasıl oluşturulacağı ve portföydeki yatırım araçlarının en iyi kombinasyonunun ne olacağıdır.

Bu çalışmada, söz konusu sorulara ortalama-varyans-çarpıklık-basıklık çerçevesinde bir Portföy Optimizasyon Modeli (PGP) kullanılarak cevap aranmaktadır. Bu modelde, beklenen getiriyi ve çarpıklığı maksimize etmek ile riski ve basıklığı minimize etmek gibi birbiriyle çelişen ve rekabet eden çoklu portföy amaçları, farklı yatırımcıların tercihleri doğrultusunda eş zamanlı olarak ele alınmaktadır.

Sonuçlarımız, yatırımcıların tercihlerinin hem portföyün varlık dağılımlarını hem de varlık getirilerinin tanımlayıcı istatistiklerini etkilediğini ortaya koymaktadır. Bu bulgular, yatırımcıların risk ve getiri tercihlerine dayalı olarak, portföylerinde optimal varlık dağılımlarını belirlemelerine yardımcı olabilecek önemli bilgiler sunmaktadır.

KAYNAKÇA

[1] Altaylıgil, B. (2008). Portföy seçimi için ortalama-varyans-çarpıklık modeli . *İstanbul Üniversitesi İşletme Fakültesi Dergisi* , Cilt/Vol:37, Sayı/No:2, 65-78 .

[2] AVUNDUK, O. (2019). MARKOWİTZ VE ELTON – GRUBER YÖNTEMLERİ .

[3] Burcu ARACIOĞLU, F. D. (2011). Mean–Variance–Skewness–Kurtosis Approach to Portfolio Optimization: An Application in İstanbul Stock Exchange. *EGE AKADEMİK BAKIŞ / EGE ACADEMIC REVIEW*, 9-17.

[4] ÇETİNKAYA, Ö. (2006). Rekabet Stratejilerinin Belirlenmesinde Portföy Analizi ve Tariş Üzerine Bir Araştırma. *Gazi Üniversitesi İktisadi ve İdari Bilimler Fakültesi Dergisi 8 / 3*, 57-56.

[5] Kin Keung Lai, L. Y. (2006). Mean-Variance-Skewness-Kurtosis-based Portfolio Optimization.

[6] KORHAN, E. (2013). ÇOK DÖNEMLİ MARKOWİTZ ORTALAMA VARYANS PORTFÖY OPTİMİZASYONU İLE EN UYGUN YATIRIM VADELERİNİN BELİRLENMESİ: BİST 30 ENDEKS HİSSELERİ ÜZERİNE BİR UYGULAMA .

[7] TAHİRZADE, L. (tarih yok). Ortalama-Varyans Modeli ile Portföy Optimizasyonu: COVID-19.

[8] Yusuf TOPAL, K. İ. (2009). PORTFÖY OPTİMİZASYONU BAĞLAMINDA TANJANT . *İ.İ.B.F. Dergisi* .

[9] Kantar, I. U. (2011). Mean-Variance-Skewness-Entropy Measures: A Multi-Objective.