2. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Рассмотрим уравнение: $f(x) = 0$. В дальнейшем мы будем говорить только о вещественных корнях этого уравнения.

Рекомендуемая литература: /2-6, 12-13/.

2.1. Постановка задачи

Пусть уравнение $f(x) = 0$ имеет k вещественных корней $c_1, c_2, \dots, c_k$. Требуется найти числа $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_k$, такие, что $\left|c_j - \bar{x}_j\right| \le \varepsilon$, где ε – заданная точность, $1 \le j \le k$.

Задача нахождения приближенных значений корней разбивается на два этапа:

1) отделение корней;

2) уточнение корней с заданной точностью.

Этап отделения вещественных корней заключается в отыскании достаточно малых отрезков $[a_j, b_j]$ таких, что каждый из этих отрезков содержит один корень уравнения ($c_j \in [a_j, b_j]$, $1 \le j \le k$) и каждый вещественный корень содержится ровно в одном отрезке.

На этапе уточнения корня известен отрезок $[a, b]$, который содержит один корень уравнения ($c \in [a, b]$). Ставится задача вычисления корня с заданной точностью, то есть нахождения $\bar{x} \in [a, b]$ такого, что $\left|c - \bar{x}\right| \le \varepsilon$, где ε – заданная точность.

2.2. Отделение корней

Рассматривается два способа решения задачи отделения корней – графический и аналитический.

Существует два подхода к графическому отделению корней.

1. Строится график: $f(x) = 0$ и приблизительно находятся абсциссы точек пересечения графика $f(x) = 0$ с осью x (рис. 2.1).

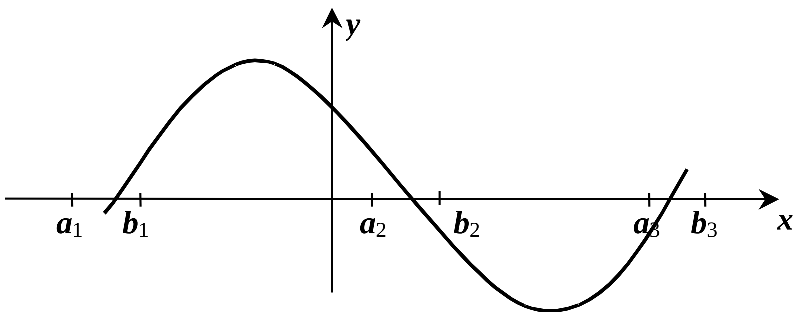

Рис. 2.1. Графическое отделение корней

2. Сначала уравнение $f(x) = 0$ записывается в виде $f_1(x) = f_2(x)$, а затем строятся графики: $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$ и приблизительно находятся абсциссы точек пересечения этих графиков (рис. 2.2).

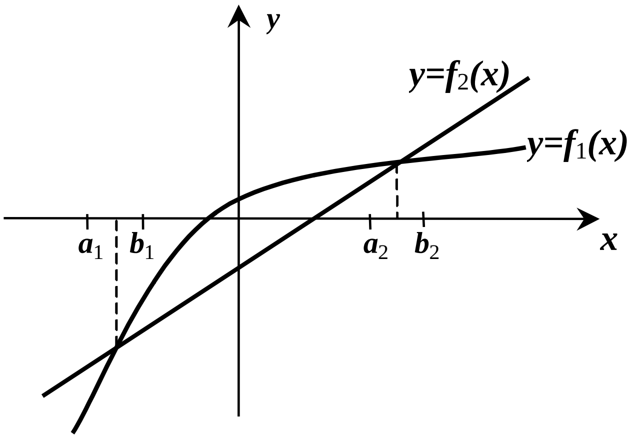

Рис. 2.2. Графическое отделение корней

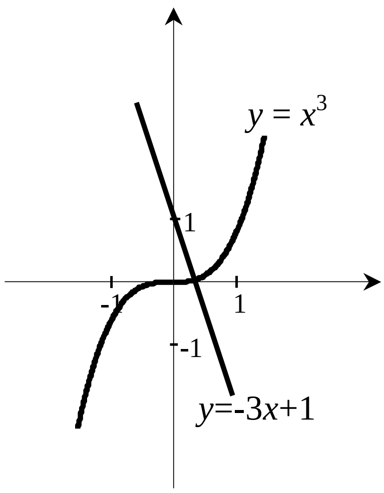

Рис. 2.3. Отделение корня

Пример

Требуется отделить корни уравнения: $x^3 + 3x - 1 = 0$.

Решение. Запишем уравнение в виде: $x^3 = -3x + 1$, то есть $f_1(x) = x^3$, $f_2(x) = -3x + 1$, и построим графики: $y = x^3$ и $y = -3x + 1$ (рис. 2.3). Абсцисса точки пересечения графиков принадлежит отрезку [0, 1].

Отрезок [0, 1] содержит один корень уравнения: $x^3 + 3x - 1 = 0$.

Аналитически корни уравнения $f(x) = 0$ можно отделить, используя свойства функции, например, опираясь на следующую теорему.

Теорема

Если f(x) = 0 является непрерывно дифференцируемой функцией на отрезке $[a, b]$ $(f(x) \in C^1[a, b])$***, первая производная f не меняет знак на*** **[a, b]** $(f'(x) \neq 0, x \in [a, b])$***, и на концах отрезка функция f принимает значения разных знаков*** $(f(a) \cdot f(b) < 0)$***, то внутри отрезка*** **[a, b]** ***содержится один корень уравнения f(x) = 0.***

Отметим, что в дальнейшем мы будем для пространства n раз непрерывно дифференцируемых функций на отрезке [a, b] использовать обозначение: $C^n[a, b]$. Если функция f является непрерывной функцией на отрезке [a, b], то это можно записать так: $f \in C[a, b]$. Если функция f является непрерывно дифференцируемой на отрезке [a, b], то это можно записать следующим образом: $f \in C^1[a, b]$. Если f – дважды непрерывно дифференцируемая функция на отрезке [a, b], то будем использовать обозначение: $f \in C^2[a, b]$ и т.д.

2.3. Уточнение корня

Постановка задачи уточнения корня

Пусть известен отрезок [a, b], который содержит один корень уравнения $f(x) = 0$. Пусть c – точное значение корня , $c \in [a, b]$. Требуется найти число $\bar{x}$, для которого выполняется следующее неравенство: $\left|\bar{x} - c\right| \le \varepsilon$, где ε – заданная точность. Число $\bar{x}$ называется ***приближенным значением корня с точностью*** ε.

В дальнейшем мы будем рассматривать только итерационные методы для решения задачи уточнения корня. Суть этих методов заключается в следующем.

По функции $f(x)$ строится функция $\varphi(x)$ такая, что уравнение $x = \varphi(x)$ равносильно уравнению $f(x) = 0$ (уравнения $f(x) = 0$ и $x = \varphi(x)$ имеют одинаковые корни). Затем рассматривается последовательность чисел $\{x_0, x_1, x_2, ..., x_n, ...\}$, $x_0, x_1 = \varphi(x_0)$, $x_2 = \varphi(x_1), ..., x_{n+1} = \varphi(x_n)...$, где x_0 - начальное приближение корня. Последовательность $\{x_i\}$ при выполнении некоторых условий сходится к корню $x = c$.

Процесс вычисления $x_n = \varphi(x_{n-1})$ называется итерационным процессом; последовательность $x_0, \varphi(x_0), \varphi(x_1), ..., \varphi(x_n)...$ называется последовательностью итераций.

Если последовательность $\{x_n\}$ сходится к корню c, то, начиная с некоторого n, выполняется неравенство: $|x_n - c| \le \varepsilon$. Вычисления на этом прекращается и x_n считается приближенным значением корня, вычисленным с точностью ε.

Отметим, что ε – это погрешность численного метода, при этом не учитывается погрешность вычислений на ЭВМ. Последовательность может сходиться, а может и не сходиться. Если последовательность не сходится, то при реализации численного метода на ЭВМ получаем, как правило, машинное переполнение.

В дальнейшем будем рассматривать итерационные методы уточнения корня по следующей схеме:

1) условия на применение метода;
2) формула метода;
3) выбор начального приближения и сходимость метода;
4) условие остановки итерационного процесса.

2.4. Метод простой итерации

1. Пусть известен отрезок [a, b], который содержит один корень уравнения $f(x) = 0$. Функция f является непрерывно дифференцируемой функцией на этом отрезке ($f(x) \in C^1[a, b]$). При выполнении этих условий можно применять метод простой итерации.

2. По функции $f(x)$ строится функция $\varphi(x)$, удовлетворяющая трём условиям: она должна быть непрерывно дифференцируемой ($\varphi(x) \in C^1[a, b]$), такая, что уравнение $x = \varphi(x)$ равносильно уравнению $f(x)=0$; должна также ***переводить отрезок*** [a, b] ***в себя***.

Будем говорить, что ***функция*** $\varphi(x)$ ***переводит отрезок*** **[a, b]** ***в себя, если для любого*** $x \in [a, b]$, $y = \varphi(x)$ ***также принадлежит*** **[a, b] ($y \in [a, b]$).**

На функцию $\varphi(x)$ накладывается третье условие:

$$\max_{a \le x \le b} |\varphi'(x)| = q < 1 .$$

Формула метода: $x_{n+1} = \varphi(x_n)$.

3. При выполнении этих трех условий для любого начального приближения $x_0 \in [a, b]$ последовательность итераций $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ сходится к корню уравнения: $x = \varphi(x)$ на отрезке [a, b] ($\lim\limits_{x \to \infty} x_n = c$).

Как правило, в качестве x_0 выбирается один из концов [a, b].

4. Условие остановки итерационного процесса:

$$\left|x_{n+1}-x_n\right| \le \frac{\varepsilon(1-q)}{q},$$

где ε – заданная точность

Число x_{n+1} при выполнении условия остановки итерационного процесса является ***приближенным значением корня уравнения*** $f(x) = 0$ на отрезке $[a, b]$, ***найденным методом простой итерации с точностью*** ε.

Пример

Построить алгоритм для уточнения корня уравнения: $x^3 + 5x - 1 = 0$ на отрезке $[0, 1]$ методом простой итерации с точностью ε.

Решение

1. Функция $f(x) = x^3+5x-1$ является непрерывно дифференцируемой на отрезке $[0,1]$, содержащем один корень уравнения.

2. Наибольшую трудность в методе простой итерации представляет построение функции $\varphi(x)$, удовлетворяющей всем условиям:

$$x^3+5x-1=0, \qquad x^3=1-5x, \qquad x=\sqrt[3]{1-5x}.$$

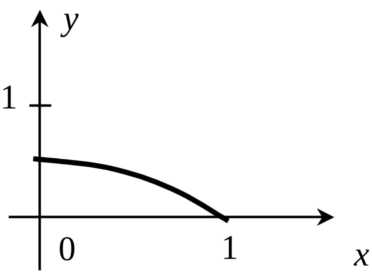

Рис. 2.4. График функции $\varphi_2(x)$

Рассмотрим: $\varphi_1(x)=\sqrt[3]{1-5x}$.

Уравнение $x = \varphi_1(x)$ эквивалентно уравнению $f(x) = 0$, но функция $\varphi_1(x)$ не является непрерывно дифференцируемой на отрезке $[0, 1]$.

С другой стороны, $x^3+5x-1=0$, следовательно, $5x=1-x^3$. Отсюда: $\varphi_2(x)=\frac{1-x^3}{5}$ – непрерывно дифференцируемая функция. Отметим, что уравнение: $x = \varphi_2(x)$ эквивалентно уравнению $f(x) = 0$. Из графика (рис. 2.4) видно, что функция $\varphi_2(x)$ переводит отрезок $[0, 1]$ в себя.

Условие, что функция $\varphi(x)$ переводит отрезок $[a, b]$ в себя, можно переформулировать следующим образом: пусть $[a, b]$ – область определения функции $\varphi(x)$, а $[c, d]$ – область изменения $\varphi(x)$. Если отрезок $[c, d]$ принадлежит отрезку $[a, b]$, то функция $\varphi(x)$ переводит отрезок $[a, b]$ в себя.

Найдем $q=\max\limits_{a\le x\le b}\left|\varphi'(x)\right|$:

$$\varphi_2'(x)=-\frac{3x^2}{5}, \qquad q=\max_{a\le x\le b}\left|\varphi'(x)\right|=0.6<1.$$

Все условия для функции $\varphi(x)$ выполнены.

Формула итерационного процесса: $x_{n+1} = \varphi_2(x_n)$.

3. Начальное приближение: $x_0 = 0$.

4. Условие остановки итерационного процесса:

$$\left|x_{n+1}-x_n\right| \le \frac{\varepsilon(1-q)}{q}.$$

При выполнении этого условия x_{n+1} – ***приближенное значение корня на отрезке*** $[0,1]$, ***найденное методом простой итерации с точностью*** ε. На рис. 2.5. иллюстрируется применение метода простой итерации.

Рис. 2.5. Геометрический смысл метода простой итерации

Теорема о сходимости и оценка погрешности

Пусть отрезок [a, b] ***содержит один корень уравнения*** $x = \varphi(x)$, ***функция*** $\varphi(x)$ ***является непрерывно дифференцируемой на отрезке*** [a, b]***, переводит отрезок*** [a, b] ***в себя, и выполнено условие***:

$$q = \max_{a \le x \le b} \left|\varphi'(x)\right| < 1 .$$

Тогда для любого начального приближения $x_0 \in [a, b]$ ***последовательность*** $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ ***сходится к корню уравнения*** $y = \varphi(x)$ **на отрезке** [a, b] ***и справедлива оценка погрешности***:

$$\left|x_{n+1} - c\right| \le \frac{q}{1-q}\left|x_{n+1} - x_n\right| .$$

Устойчивость метода простой итерации. При выполнении условий теоремы о сходимости алгоритм метода простой итерации является устойчивым.

Сложность метода простой итерации. Объем памяти ЭВМ, необходимый для реализации метода простой итерации, незначителен. На каждом шаге нужно хранить x_n, x_{n+1}, q и ε.

Оценим число арифметических действий, необходимых для реализации метода простой итерации. Запишем оценку для числа $n_0 = n_0(\varepsilon)$ такого что, для всех $n \ge n_0$ выполняется неравенство: $\left|x_n - c\right| \le \varepsilon\left|x_0 - c\right|$:

$$n_0(\varepsilon) = \left[\frac{\ln(1/\varepsilon)}{\ln(1/q)}\right] + 1.$$

Из этой оценки вытекает, что чем ближе q к единице, тем медленнее сходится метод.

Замечание. Не существует общего правила построения $\varphi(x)$ по $f(x)$ так, чтобы выполнялись все условия теоремы о сходимости. Часто используется следующий подход: в качестве функции φ выбирается функция $\varphi(x) = x + k\cdot f(x)$, где k – константа.

При программировании метода простой итерации для остановки итерационного процесса часто требуют одновременного выполнения двух условий:

$$\left|x_{n+1} - x_n\right| \le \frac{1-q}{q}\varepsilon \quad \text{и} \quad \left|f(x_{n+1})\right| \le \varepsilon .$$

Все остальные итерационные методы, которые мы будем рассматривать, являются частными случаями метода простой итерации. Например, при $\varphi(x) = x - f(x)/f'(x)$ метод Ньютона является частным случаем метода простой итерации.

2.5. Метод Ньютона

1. Пусть известен отрезок [a, b], который содержит один корень уравнения $f(x) = 0$. Функция $f(x)$ является дважды непрерывно дифференцируемой на отрезке [a, b] ($f(x) \in C^2[a, b]$). Функция f принимает на концах отрезка [a, b] значения разных знаков ($f(a)\cdot f(b) < 0$). Первая и вторая производные функции f не обращаются в ноль на отрезке [a, b] ($f' \ne 0$, $f'' \ne 0$). При выполнении этих условий для уточнения корня можно использовать метод Ньютона

2. Формула метода:

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n)/f'(x_n) .$$

3. Точка x_0 – начальное приближение – выбирается из условия: $f(x_0) f''(x) > 0$. В качестве x_0 выбирается, как правило, один из концов отрезка [a, b]:

если $f(a)\cdot f''(x) > 0$, то $x_0 = a$;

если $f(b)\cdot f''(x) > 0$, то $x_0 = b$.

Отметим, что, так как $f''(x)$ не меняет знак на отрезке [a, b] и $f(a)\cdot f(b) < 0$, то на отрезке [a, b] выполнено только одно из предыдущих условий: либо $f(a)\cdot f''(x) > 0$, либо $f(b)\cdot f''(x) > 0$.

При выполнении этих условий последовательность $\{x_n\}$ сходится к точному значению корня на отрезке $[a, b]$.

4. Для метода Ньютона известны несколько условий остановки итерационного процесса. Рассмотрим одно из них: $|f(x_{n+1})| \le m \cdot \varepsilon$, где $m = \min\limits_{a \le x \le b} |f'(x)|$. При выполнении этого условия x_{n+1} является приближенным значением корня уравнения на отрезке $[a, b]$, найденным методом Ньютона с точностью ε. Условие остановки итерационного процесса вытекает из оценки погрешности для метода Ньютона: $|x_{n+1} - c| \le |f(x_{n+1})/m|$.

При программной реализации метода Ньютона, как правило, для остановки итерационного процесса требуется выполнение одновременно двух условий:

$$|x_{n+1} - x_n| \le \varepsilon \quad \text{и} \quad |f(x_{n+1})| \le m \cdot \varepsilon.$$

Пример

Построить алгоритм для уточнения коря уравнения $x^3 + 3x - 1 = 0$ на отрезке [0,1] методом Ньютона с точностью ε.

Решение

1. Отрезок [0, 1] содержит один корень уравнения $f(x) = 0$. Функция $f(x)$ является дважды непрерывно дифференцируемой на отрезке [0, 1] ($f(x) \in C^2[0, 1]$). Функция f принимает на концах отрезка [0, 1] значения разных знаков. Первая производная функция f не обращаются в ноль на отрезке. То есть:

$$f(x) = x^3 + 3x - 1; \quad f(x) \in C^2[a,b];$$

$$f(0) \cdot f(1) < 0;$$

$$f' = 3x^2 + 3 \ne 0;$$

$$f'' = 6x; \qquad f''(0) = 0.$$

Вторая производная f обращается в ноль на отрезке [0, 1]. В таких случаях рекомендуется уменьшить отрезок $[a, b]$ таким образом, чтобы уменьшенный отрезок содержал корень уравнения, и для этого отрезка выполнялись все условия.

Рассмотрим отрезок [0.1, 1]. Этот отрезок содержит один корень уравнения $f(x) = 0$ и для него выполняются все условия для функции $f(x)$.

2. Формула метода:

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n)/f'(x_n).$$

3. $f(1)\ f''(x) > 0$, начальное приближение $x_0 = 1$.

4. Условие остановки итерационного процесса:

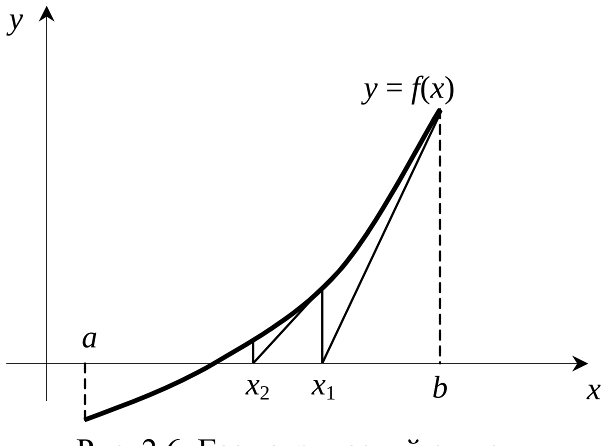

Рис. 2.6. Геометрический смысл метода Ньютона

$$|f(x_{n+1})| \le m \cdot \varepsilon, \text{ где } m = \min_{a \le x \le b} |f'(x)|; \quad m = \min_{0.1 \le x \le 1} |3x^2 + 3| = 3.03.$$

Число x_{n+1}, для которого выполняется условие остановки, является ***приближенным значением корня уравнения*** на отрезке [0.1, 1], ***найденным методом Ньютона с точностью*** ε. На рис. 2.6. иллюстрируется применение метода Ньютона. В рассматриваемом случае начальное приближение $x_0 = b$. Метод Ньютона называют также методом касательных.

2.6. Метод хорд

1. Условия на применение метода хорд те же самые, что и для метода Ньютона.

Пусть известен отрезок [$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$], который содержит один корень уравнения $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = 0$. Функция $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ является дважды непрерывно дифференцируемой на [$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$] ($\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \in \boldsymbol{C}^2[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]$). Функция $\boldsymbol{f}$ принимает на концах отрезка [$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$] значения разных знаков ($\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{f}(\boldsymbol{b}) < 0$). Первая и вторая производные функции $\boldsymbol{f}$ не обращаются в ноль на отрезке [$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$] ($\boldsymbol{f}' \neq 0$, $\boldsymbol{f}'' \neq 0$). При выполнении этих условий для уточнения корня можно использовать метод хорд.

2. Формула метода:

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n)\frac{x_n - d}{f(x_n) - f(d)},$$

то есть

$$\varphi(x) = x - f(x)\frac{x - d}{f(x) - f(d)},$$

где $\boldsymbol{d}$ – неподвижная точка, которая выбирается из условия $\boldsymbol{f}(d)\cdot\boldsymbol{f}''(\boldsymbol{x}) > 0$. То есть условие на начальное приближение в методе Ньютона соответствует условию на неподвижную точку в методе хорд:

если $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{f}''(\boldsymbol{x}) > 0$, то $\boldsymbol{d} = \boldsymbol{a}$;

если $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{f}''(\boldsymbol{x}) > 0$, то $\boldsymbol{d} = \boldsymbol{b}$.

3. Если $\boldsymbol{d} = \boldsymbol{a}$, то начальное приближение $\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{b}$.
   Если $\boldsymbol{d} = \boldsymbol{b}$, то начальное приближение $\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{a}$.

Таким образом, один из концов отрезка является неподвижной точкой, а другой – точкой начального приближения.

4. Условие остановки итерационного процесса то же самое, что и для метода Ньютона:

$$\left|f(x_{n+1})\right| \le m\cdot\varepsilon \quad \textbf{, где} \quad m = \min_{a\le x\le b}\left|f'(x)\right|.$$

При выполнении этого условия $\boldsymbol{x}_{n+1}$ является ***приближенным значением корня уравнения*** $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = 0$ на отрезке [$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$], ***найденным методом хорд с точностью*** $\boldsymbol{\varepsilon}$. На рис. 2.7. иллюстрируется применение метода хорд, в рассматриваемом случае неподвижная точка $\boldsymbol{d} = \boldsymbol{b}$.

Пример

Построить алгоритм для уточнения корня уравнения $\boldsymbol{x}^3 + 3\boldsymbol{x} - 1 = 0$ на отрезке [0,1] методом хорд с точностью $\boldsymbol{\varepsilon}$.

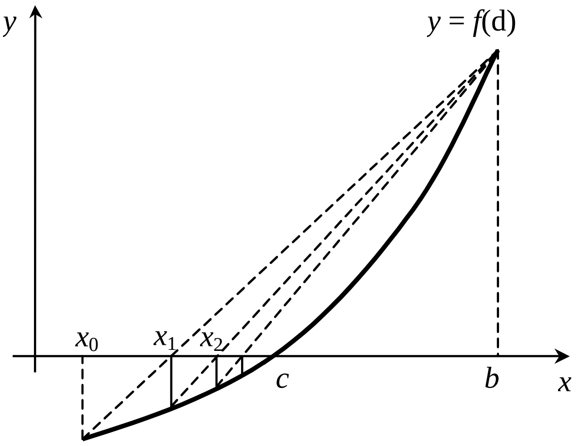

Рис. 2.7. Геометрический смысл метода хорд

Решение

$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^3 + 3\boldsymbol{x} - 1$.

1. В предыдущем примере мы убедились, что от отрезка [0, 1] нужно перейти к уменьшенному отрезку [0.1, 1]. Этот отрезок содержит один корень уравнения $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = 0$ и для него выполняются все условия для функции $\boldsymbol{f}$.

2. $f(1)f''(x) > 0$, следовательно, $\boldsymbol{d} = 1$.

Формула метода:

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n)\frac{x_n - d}{f(x_n) - f(d)}.$$

3. Так как $\boldsymbol{d} = 1$, начальное приближение $\boldsymbol{x}_0 = 0.1$.

4. Условие остановки итерационного процесса:

$$\left|f(x_n)\right| \le m\cdot\varepsilon \quad \textbf{, где} \quad m = \min_{a\le x\le b}(f'(x)) = 3.03.$$

Число $\boldsymbol{x}_{n+1}$, для которого выполняется условие остановки итерационного процесса, является ***приближенным значением корня уравнения*** $\boldsymbol{f}(x) = 0$ на отрезке [0,1, 1], ***найденным методом хорд с точностью*** $\boldsymbol{\varepsilon}$.

2.7. Комбинированный метод хорд и касательных

Метод Ньютона называют также методом касательных. Комбинируя метод хорд и метод Ньютона, можно построить метод отыскания вещественных корней уравнения $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = 0$, в котором при прежних предположениях относительно $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ на каждом шаге итерационного процесса мы получаем два приближения к корню $\boldsymbol{x}_{n+1}$ и $\overline{\boldsymbol{x}}_{n+1}$, причем $\boldsymbol{x}_{n+1} < \boldsymbol{c} < \overline{\boldsymbol{x}}_{n+1}$ где $\boldsymbol{c}$ –точное значение корня.

1. Условия на применение метода те же, что и в методе Ньютона.

Пусть известен отрезок $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$, который содержит один корень уравнения: $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = 0$. Функция $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ является дважды непрерывно дифференцируемой на $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ ($\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \in \boldsymbol{C}^2[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$). Функция $\boldsymbol{f}$ принимает на концах отрезка $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ значения разных знаков ($\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{f}(\boldsymbol{b}) < 0$). Первая и вторая производные функции $\boldsymbol{f}$ не обращаются в ноль на отрезке $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$

($\boldsymbol{f}' \neq 0$, $\boldsymbol{f}'' \neq 0$).

2. Возможны два случая:

- если $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{f}''(\boldsymbol{x}) > 0$, то слева применяем метод Ньютона, а справа метод хорд.

Формулы метода:

$$\boldsymbol{x}_{n+1} = \boldsymbol{x}_n - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_n)/\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}_n);$$

$$\overline{\boldsymbol{x}}_{n+1} = \overline{\boldsymbol{x}}_n - \boldsymbol{f}(\overline{\boldsymbol{x}}_n)\frac{\overline{\boldsymbol{x}}_n - \boldsymbol{x}_n}{\boldsymbol{f}(\overline{\boldsymbol{x}}_n) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_n)};$$

- если $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{f}''(\boldsymbol{x}) > 0$, то слева применяем метод хорд, а справа метод Ньютона (метод касательных).

Формулы метода:

$$\boldsymbol{x}_{n+1} = \boldsymbol{x}_n - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_n)\frac{\overline{\boldsymbol{x}}_n - \boldsymbol{x}_n}{\boldsymbol{f}(\overline{\boldsymbol{x}}_n) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_n)};$$

$$\overline{\boldsymbol{x}}_{n+1} = \overline{\boldsymbol{x}}_n - \boldsymbol{f}(\overline{\boldsymbol{x}}_n)/\boldsymbol{f}'(\overline{\boldsymbol{x}}_n).$$

В качестве точек начального приближения выбираются: $\boldsymbol{x}_0 = a$, $\overline{\boldsymbol{x}}_0 = \boldsymbol{b}$.

4. Условие остановки итерационного процесса: $\overline{\boldsymbol{x}}_{n+1} - \boldsymbol{x}_{n+1} \leq \boldsymbol{\varepsilon}$, при выполнении этого условия любая точка из отрезка $[\boldsymbol{x}_{n+1}, \overline{\boldsymbol{x}}_{n+1}]$ приближает корень уравнения с точностью $\boldsymbol{\varepsilon}$. Чаще всего принимают: $\boldsymbol{x}_* = \dfrac{\boldsymbol{x}_{n+1} + \overline{\boldsymbol{x}}_{n+1}}{2}$.

На рис. 2.8. иллюстрируется применение комбинированного метода хорд и касательных. В рассматриваемом случае справа применяется метод Ньютона, а слева – метод хорд.

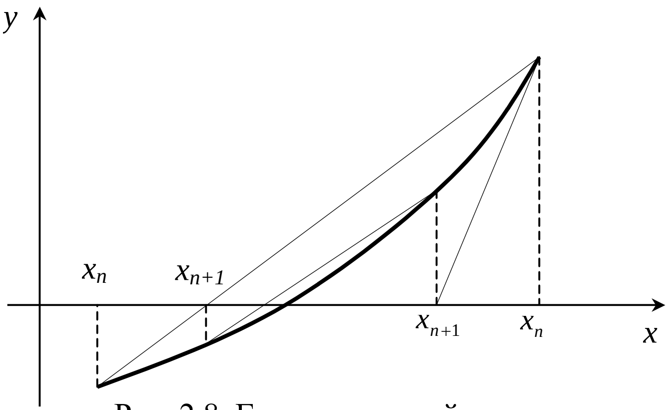

Рис. 2.8. Геометрический смысл комбинированного метода хорд и касательных

Пример

Построить алгоритм для уточнения корня уравнения $\boldsymbol{x}^3 + 3\boldsymbol{x} - 1 = 0$ комбинированным методом хорд и касательных с точностью $\boldsymbol{\varepsilon}$ на отрезке [0.1, 1].

Решение

1. В предыдущих примерах мы проверили, что отрезок [0.1, 1] содержит один корень уравнения, и выполняются все условия для применения метода Ньютона:

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{C}^2[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]);\quad \boldsymbol{f}(0.1)\cdot\boldsymbol{f}(1) < 0;\quad \boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}) \neq 0;\quad \boldsymbol{f}''(\boldsymbol{x}) \neq 0.$$

2. Определим, какой из методов нужно применять слева, а какой справа:

$$f(0.1)f''(x)<0, \quad \text{для} \quad x\in[0.1,1];$$

$$f(1)f''(x)>0, \quad \text{для} \quad x\in[0.1,1].$$

Следовательно, слева применяем метод хорд, а справа – метод касательных (Ньютона). Запишем формулы:

$$x_{n+1}=x_n-f(x_n)\frac{\overline{x_n}-x_n}{f(\overline{x_n})-f(x_n)},$$

$$\overline{x_{n+1}}=\overline{x_n}-f(\overline{x_n})\big/f'(\overline{x_n}).$$

3. Точки начального приближения:

$$x_0=0.1\,, \qquad \overline{x_0}=1\,.$$

4. Условие остановки итерационного процесса:

$$\overline{x_{n+1}}-x_{n+1}\le\varepsilon\,.$$

Приближенное значение: $x_*=\dfrac{x_{n+1}+\overline{x_{n+1}}}{2}$.

При выполнении условия остановки итерационного процесса x_* ***является приближенным значением корня уравнения, полученным комбинированным методом хорд и касательных с точностью*** ε.

2.8. Метод итераций

1. Пусть известен отрезок $[a, b]$, содержащий один корень уравнения $f(x) = 0$. Функция $f(x)$ является непрерывно дифференцируемой на $[a, b]$ ($f(x)\in C^1[a, b]$). Первая производная функции f не обращается в ноль на отрезке $[a, b]$ ($f'\neq 0$).

2. Формула метода:

$$x_{n+1}=x_n-f(x_n)/p\ \text{, то есть}\ \varphi(x)=x-f(x)/p.$$

Здесь p – константа, которая выбирается следующим образом: знак p – совпадает со знаком $f'(x)$ на $[a, b]$:

$$sign(p)=sign(\underset{a\le x\le b}{f'}(x)),$$

а модуль p выбирается из условия:

$$|p|>R/2\ \text{, где}\ R=\max_{a\le x\le b}|f'(x)|.$$

3. Метод итераций сходится для любого начального приближения x_0=$[a, b]$, если

$$q=\max_{a\le x\le b}|\varphi'(x)|<1$$

В качестве x_0 выбирается один из концов отрезка $[a, b]$.

4. Условие остановки итерационного процесса:

$$|x_{n+1}-x_n|\le\frac{1-q}{q}\varepsilon\,.$$

Число x_{n+1}, для которого выполняется условие остановки итерационного процесса, ***является приближенным значением корня уравнения, полученного с помощью метода итераций с точностью*** ε.

Пример

Построить алгоритм для уточнения корня уравнения $x^3 + 3x – 1 = 0$ методом итераций с точностью ε на отрезке [0,1].

Решение

1. Отрезок содержит один корень уравнения, функция f является непрерывно дифференцируемой на этом отрезке, первая производная функции f не обращается в ноль на этом отрезке:

$$f(x)\in C^1[a,b],\ f'=3x^2+3\neq 0.$$

2. Формула метода:

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n)/p.$$

$f'(x) > 0$ на [0, 1], следовательно, $p > 0$.

$R = \max\limits_{0 \le x \le 1} |3x^2 + 3| = 6$, $p = 4$, следовательно, $x_{n+1} = x_n - f(x_n)/4$.

Сразу проверим, что

$$q = \max_{a \le x \le b} |\varphi'(x)| < 1;$$

$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{p} = x - \frac{x^3 + 3x - 1}{4};$$

$$\max_{a \le x \le b} |\varphi'(x)| = 0.5 < 1.$$

3. Начальное приближение $x_0 = 0$.

4. Условие остановки итерационного процесса:

$$|x_{n+1} - x_n| \le \frac{1-q}{q}\varepsilon, \qquad q = 0.5.$$

Число x_{n+1}, для которого выполняется условие остановки итерационного процесса, ***является приближенным значением корня уравнения, полученного с помощью метода итераций с точностью ε.***