Примеры решения задач

Задача 1

Отделить корни уравнения $x^3 + 5x - 8 = 0$ и построить алгоритм для уточнения одного из них методом простой итерации с точностью ε.

Решение

Отделение корней

Запишем $f(x) = 0$ в виде: $x^3 = -5x + 8$ и построим графики: $y = x^3$ и $y = -5x + 8$. Отрезок [1,2] содержит один корень уравнения (рис. 2.9).

Уточнение корня на отрезке [1,2].

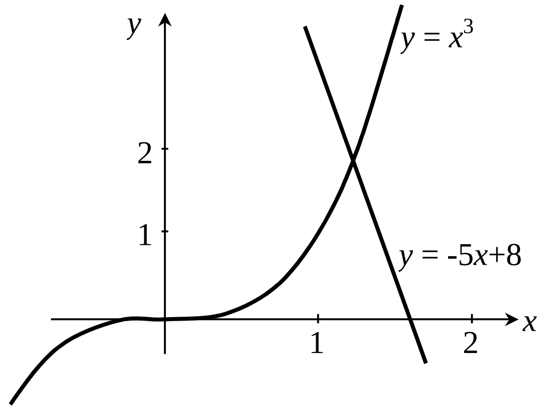

Рис. 2.9. Отделение корней

1. Отрезок [1,2] содержит один корень уравнения $f(x) = 0$. Функция f является непрерывно дифференцируемой на этом отрезке($f \in C^1[1,2]$).

2. Рассмотрим несколько функций $\varphi(x)$:

а) $x^3 + 5x - 8 = 0$, отсюда $x = \dfrac{8 - x^3}{5}$.

$$\varphi_1(x) = \frac{8 - x^3}{5}.$$

$\varphi_1'(x) = -0.6\,x^2$, отсюда $\max\limits_{1 \le x \le 2} |\varphi_1'(x)| > 1$.

Следовательно, $\varphi_1(x)$ – неудачный выбор.

б) $x^3 + 5x - 8 = 0$, отсюда $x^3 = 8 - 5x$ и $x = \sqrt[3]{8 - 5x}$.

$\varphi_2(x) = \sqrt[3]{8 - 5x}$.

Функция $\varphi_2(x)$ не является непрерывно дифференцируемой на отрезке [1,2].

$$\varphi_2' = -\frac{5}{3\sqrt[3]{(8 - 5x)^2}}.$$

$\varphi_2(x)$ – неудачный выбор.

в) $x^3 + 5x - 8 = 0$, следовательно, $x^3 + 10x - 10x + 5x - 8 = 0$.

$15x = 8 - x^3 + 10x$, следовательно, $x = \dfrac{8 + 10x - x^3}{15}$,

$$\varphi_3(x) = \frac{8 + 10x - x^3}{15}.$$

$\varphi_3(x)$ является непрерывно дифференцируемой на [1,2].

$$\max_{1 \le x \le 2} |\varphi_3'(x)| = \max_{1 \le x \le 2} \left| \frac{-3x^2 + 10}{15} \right| = \frac{7}{15} < 1; \quad q = \frac{7}{15}.$$

$\varphi_3(x)$ переводит отрезок [1, 2] в себя. Функция $\varphi_3(x)$ сначала возрастает на отрезке $\left[1, \sqrt{10/3}\right]$ $\left(\varphi_3'(x) > 0\right)$, достигает максимума при $x = \sqrt{10/3}$, а затем убывает.

$\varphi_3(x)$ возрастает от $\dfrac{17}{15}$ до $\dfrac{20.1}{15}$, убывает от $\dfrac{20.1}{15}$ до $\dfrac{4}{3}$. Область изменения $\varphi_3(x)$ полностью принадлежит ее области определения, следовательно, функция $\varphi_3(x)$ переводит отрезок [1,2] в себя.

Выполнены все условия для функции $\varphi(x)$, следовательно, $x_{n+1} = \dfrac{8 + 10x_n - x_n^3}{15}$.

3. Начальное приближение: $x_0 = 1$.

4. Условие остановки итерационного процесса:

$$\left|x_{n+1}-x_n\right| \le \frac{1-q}{q}\,\varepsilon, \qquad q=\frac{7}{15}.$$

Число x_{n+1} , для которого выполняется условие остановки итерационного процесса, ***является приближенным значением корня уравнения, полученным методом простой итерации с точностью ε.***

Задача 2

Отделить корни уравнения $x^3 - 3x^2 + 4x - 1 = 0$ и построить алгоритм для уточнения одного из них методом Ньютона с точностью ε.

Решение

Отделение корней

$x^3 - 3x^2 + 4x - 1 = 0$, отсюда $x^3 = 3x^2 - 4x + 1$.

Отрезок [0,1] содержит один корень уравнения (рис. 2.10).

Уточнение корня

Проверим условия для функции $f = x^3 - 3x^2 + 4x - 1$

$$f' = 3x^2 - 6x + 4, \qquad f'' = 6x - 6, \qquad f''(1) = 0.$$

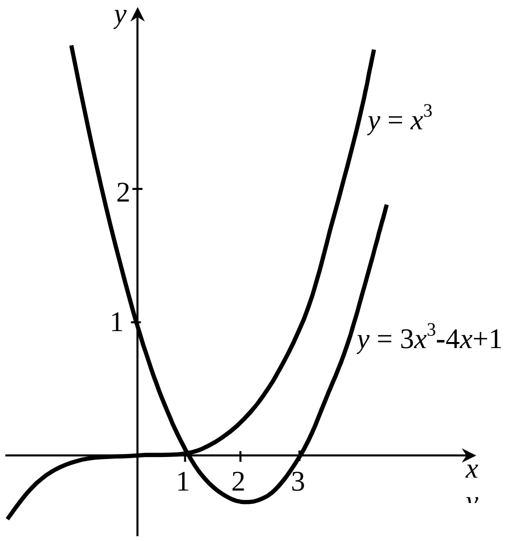

Рис. 2.10. Отделение корня

Необходимо уменьшить отрезок [0,1] таким образом, чтобы уменьшенный отрезок содержал корень уравнения, и при этом выполнялись все условия для функции $f(x)$.

Рассмотрим отрезок [0,0.9]:

$$f(x) \in C^2[0{,}0.9], \qquad f(0)\cdot f(0.9) < 0, \quad f' \ne 0, \quad f'' \ne 0.$$

Отрезок [0,0.9] содержит один корень уравнения, и для него выполняются все условия для функции $f(x)$. Функция f является дважды непрерывно дифференцируемой на этом отрезке, на концах отрезка принимает значения разных знаков, первая и вторая производные функции f не обращаются в ноль на этом отрезке.

2. Формула метода: $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$.

3. Начальное приближение:

$$f(0)\cdot f''(x) > 0, \text{ следовательно, } x_0 = 0.$$

4. Условие остановки итерационного процесса:

$\left|f(x_{n+1})\right| \le m\cdot\varepsilon$, где $m = \min\limits_{0\le x\le 0.9}\left|f'(x)\right| = 1.03$.

При выполнении этого условия x_{n+1} ***является приближенным значением корня уравнения, полученным методом Ньютона с точностью ε.***

Задача 3

Отделить корни уравнения: $2^x + 3x - 2 = 0$ и построить алгоритм для уточнения одного из них методом хорд с точностью ε.

Решение

Отделение корней

$2^x + 3x - 2 = 0$, отсюда $2^x = 2 - 3x$.

Отрезок [0,1] содержит один корень уравнения: $2^x + 3x - 2 = 0$ (рис. 2.11).

Уточнение корня

1. Отрезок [0,1] содержит один корень уравнения, функция f является дважды непрерывно дифференцируемой на этом отрезке, на концах отрезка принимает значения разных знаков, первая и вторая производные функции f не обращаются в ноль на этом отрезке:

$$f(x) \in C^2[0,1], \quad f(0)\cdot f(1) < 0,$$

$$f' = 2^x \ln 2 + 3 > 0, \; f'' = 2^x \ln^2 2 > 0.$$

2. Формула метода:

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n)\cdot\frac{x_n - d}{f(x_n) - f(d)},$$

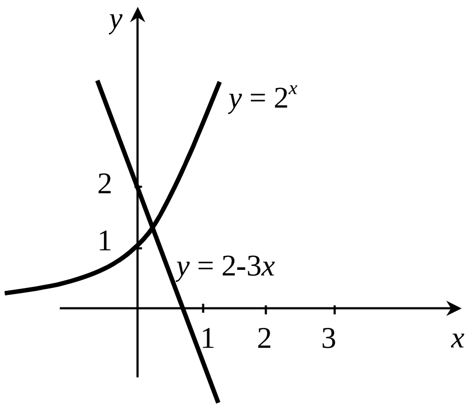

Рис. 2.11. Отделение корня

где d – неподвижная точка, $f(1)\cdot f''(x) > 0$, следовательно $d = 1$.

3. Так как d = 1, то начальное приближение $x_0 = 0$.

4. Условие остановки итерационного процесса:

$$|f(x_{n+1})| \le m\cdot\varepsilon, \quad m = \min_{0\le x\le 1}|f'(x)| = \ln 2 + 3.$$

При выполнении этого условия x_{n+1} ***является приближенным значением корня уравнения, полученным методом хорд с точностью ε.***

Задача 4

Построить алгоритм для вычисления $\sqrt{13}$ комбинированным методом хорд и касательных с точностью ε.

Решение

Отметим, что вычисление $\sqrt{a}$ с заданной точностью ε эквивалентно уточнению положительного корня следующего уравнения $x^2 - a = 0$.

1. $x^2 - 13 = 0$. Положительный корень этого уравнения принадлежит отрезку [3,4]:

$$f(x) = x^2 - 13, \qquad f(x) \in C^2[3,4], \qquad f(3)\cdot f(4) < 0.$$

$f' = 2x \ne 0, \quad f'' = 2 \ne 0$ на отрезке [3,4].

Функция f является дважды непрерывно дифференцируемой на этом отрезке, на концах отрезка принимает значения разных знаков, первая и вторая производные функции f не обращаются в ноль на этом отрезке.

2. $f(4)\cdot f''(x) > 0$, следовательно, слева применяем метод хорд, а справа – метод Ньютона. Формулы метода:

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n)\cdot\frac{\overline{x_n} - x_n}{f(\overline{x_n}) - f(x_n)},$$

$$\overline{x_{n+1}} = \overline{x_n} - \frac{f(\overline{x_n})}{f'(\overline{x_n})}.$$

3. Точки начального приближения: $x_0 = 3, \qquad \overline{x_0} = 4.$

4. Условие остановки итерационного процесса:

$$\overline{x_{n+1}} - x_{n+1} \le \varepsilon.$$

При выполнении этого условия $x_* = \dfrac{x_{n+1} + \overline{x_{n+1}}}{2}$ ***является приближенным значением*** $\sqrt{13}$***, полученным комбинированным методом хорд и касательных с точностью ε.***

Задача 5

Известно, что отрезок [1, 2] содержит один корень уравнения: $x^3+2x-11=0$. Построим алгоритм для уточнения этого корня методом итераций с точностью ε.

Решение

1. Отрезок [1, 2] содержит один корень уравнения: $f=x^3+2x-11=0$.

Функция f является непрерывно дифференцируемой на этом отрезке ($f\in C^1[1,2]$). Первая производная функции f не обращается в ноль на отрезке [1, 2].

$f'=3x^2+2\neq 0$ для $x\in$ [1, 2].

2. Формула метода: $x_{n+1}=x_n-f(x_n)/p$.

$f'(x)>0$ на отрезке [1, 2], следовательно, $p>0$.

$R=\max\limits_{1\le x\le 2}|f'(x)|=14$, $p=8$.

$x_{n+1}=x_n-f(x_n)/8$.

Проверим, что $q=\max\limits_{1\le x\le 2}|f'(x)|<1$:

$$\varphi(x)=x-\frac{f(x)}{p}=x-\frac{x^3+2x-11}{8},$$

$$\varphi'(x)=1-\frac{f'}{p}=\frac{8-3x^2-2}{8}=\frac{6-3x^2}{8}.$$

$$q=\max_{1\le x\le 2}|\varphi'(x)|=\frac{6}{8}=0.75<1.$$

3. Начальное приближение: $x_0=1$.

4. Условие остановки итерационного процесса:

$$|x_{n+1}-x_n|\le\frac{1-q}{q}\varepsilon,\quad q=0.75.$$

Здесь x_{n+1}, для которого выполняется условие остановки итерационного процесса, ***является приближенным значением корня уравнения, полученным методом итераций с точностью*** $\boldsymbol{\varepsilon}$.