# Statistiques spatiales

Juste Raimbault[1,2,3,4,*]

* juste.raimbault@ign.fr

[1]LASTIG, Univ Gustave Eiffel, IGN-ENSG
[2]CASA, UCL
[3]UPS CNRS 3611 ISC-PIF
[4]UMR CNRS 8504 Géographie-cités

ING3 - Filière Data Science - UE2 Analyse de données

20/11/2023

# Statistiques spatiales

# Non-stationnarité : définition

$X_t$ processus stochastique avec loi de probabilité jointe $F_X$

**Stationnarité stricte :** pour tous $\tau$ et $t_1, \ldots, t_n$

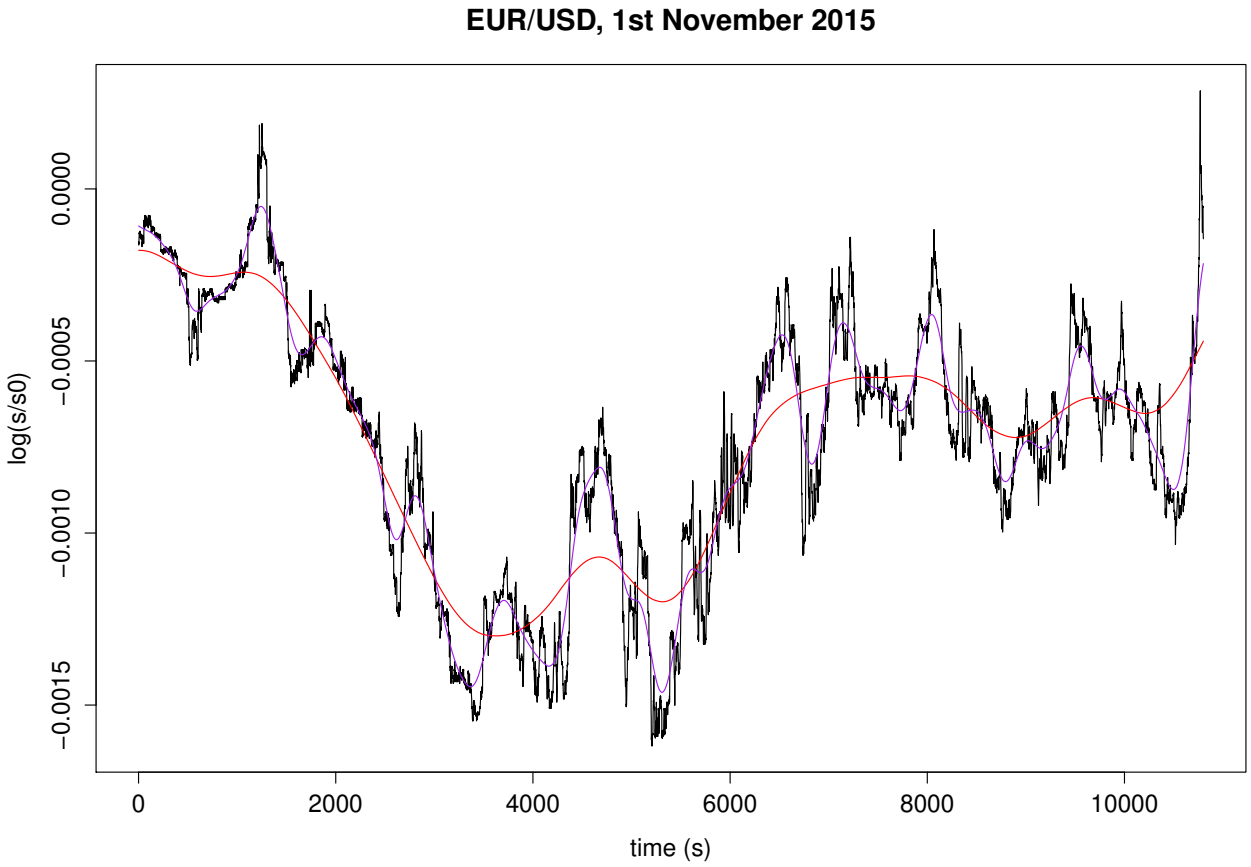
$$F_X(x_{t_1+\tau}, \ldots, x_{t_n+\tau} = F_X(x_{t_1}, \ldots, x_{t_n})$$

**Stationnarité faible :** pour tous $t, \tau, t_1, t2$, et $X_t$ de variance finie,

$$\mathbb{E}[X_t] = \mathbb{E}[X_{t+\tau}]$$

$$\mathrm{Cov}[X_{t_1}, X\,t_2] = \mathrm{Cov}[X_{t_1-t_2}, X0]$$

# Non-stationnarité temporelle : exemple




Séries temporelles financières avec moyenne et autocovariance variable dans le temps [Raimbault, 2019]

# Non-stationnarité spatiale : exemples

- Tout processus ponctuel dont les moyennes agrégées à d'autres niveaux géographiques varient dans l'espace
- Tout processus de moyenne constante mais dont la fonction d'autocorrélation varie dans l'espace ou n'est pas définie
- En fait la quasi totalité des processus impliquant des structures ou formes spatiales
- Même pour des processus pouvant être stationnaires (géographie physique, climat), celle-ci est locale

# Tests de non-stationnarité spatiale

Méthodes variées dépendant de l'approche prise et du contexte :

- test de comparaison des moyennes entre zones géographiques
- variation du spectre [Fuentes, 2005]
- significativité statistique de la variation des coefficients d'une régression géographique pondérée [Leung et al., 2000]
- ...

# Auto-corrélation spatiale : définition et tests

$\rightarrow$ corrélation entre valeurs voisines d'un processus spatial :
$\mathrm{Cov}[X_{x_1}, X_{x_2}] \neq 0$

Tests statistiques sur les résidus d'un modèle linéaire :

- Test de Moran
- Tests des multiplicateurs de Lagrange

# Méthodes

Extensions spatiales des modèles statistiques :

- Régression géographique pondérée
- Auto-régressions spatiales
- Régression multi-niveaux

Méthodes avancées permettant de gérer la **non-stationnarité spatiale** (GWR et multi-niveau), **l'aspect multi-échelle** (multi-niveaux) et **l'autocorrélation spatiale** (GWR et auto-régressions)

# Préparation des données

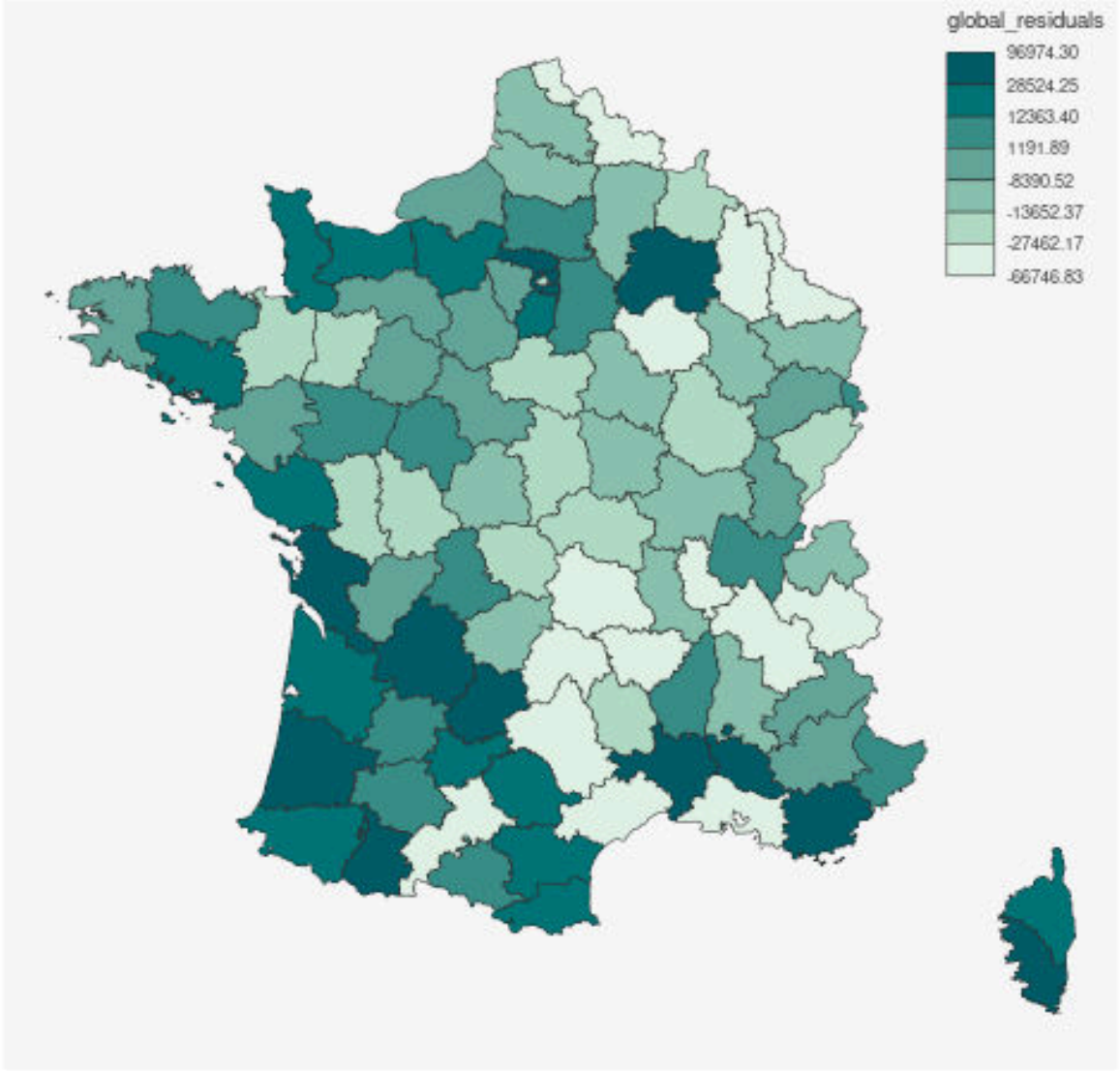
**Première partie du TP en R :**

$\rightarrow$ construction d'une base des prix immobiliers au niveau départemental, à partir de la base DVF et INSEE

$\rightarrow$ premières explorations, cartes et diagnostics

# Statistiques spatiales

# Exemple de résidus globaux structurés



# Régression géographique pondérée

*Comment inclure des effets de voisinage et prendre en compte la non-stationnarité spatiale dans des modèles statistiques ?*
[Fotheringham et al., 2003]

Modèle GWR basique pour les variables $y_i$ aux positions $\vec{u}_i$ et variables explicatives $x_{ik}$

$$y_i = \beta_0(\vec{u}_i) + \sum_k \beta_k(\vec{u}_i) x_{ik} + \varepsilon_i$$

avec les observations pondérées par un poids spatial $w_i(r)$ en fonction de la distance à $\vec{u}_i$

- Moindres-carrés pondérés, estimés à chaque localisation avec des poids spatiaux variables
- Différents kernels pour les poids spatiaux (gaussien, exponentiel, puissance, bisquare)
- Estimation de la taille de kernel optimale par optimisation de l'AIC par exemple

# AIC : définition

Pour comparer des modèles statistiques ajustés sur le même jeu de données, le **Critère d'Information d'Akaike** permet de prendre en compte le nombre de paramètres :

$$AIC = 2k - 2\ln L$$

pour un modèle de vraisemblance $L$ et paramètres $k$

Correction pour les échantillons de petite taille ($n$ observations) :

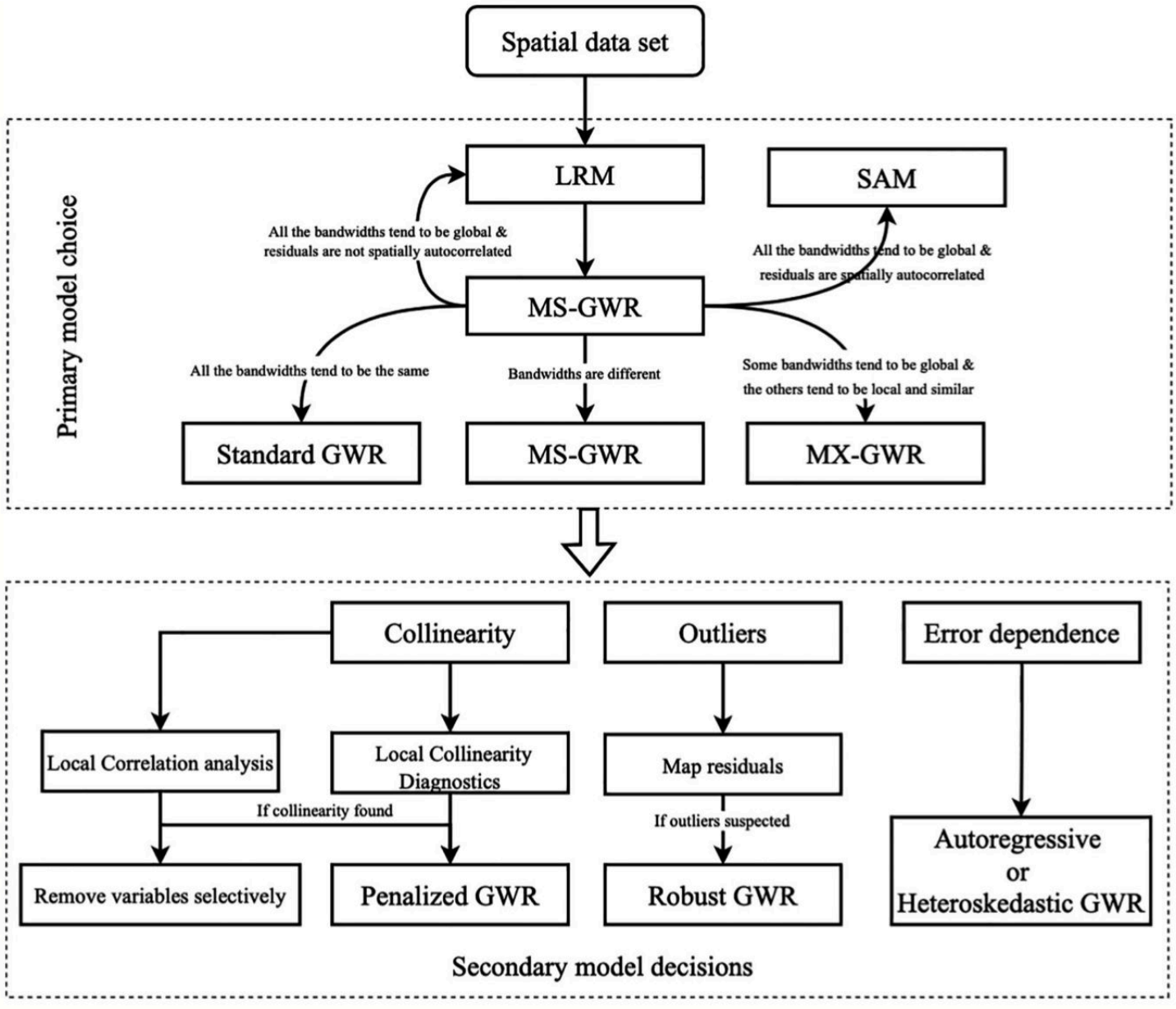
$$AICc = AIC + \frac{2k(k+1)}{n-k-1}$$

# Distance optimale et sélection de modèles

$\rightarrow$ sélection de distance optimale par algorithme d'optimisation GSS et minimisation de l'AICc (ou d'un critère de validation croisée) : `bw.gwr`

$\rightarrow$ sélection de modèle par méthode directe en minimisant l'AICc : `gwr.model.selection`

# Pour aller plus loin : cadre global pour GWR




[Comber et al., 2021]

# Application

**Deuxième partie du TP en R :** analyse GWR

**Données :** DVF agrégées au niveau départemental construites précédemment

# Modèles d'auto-régression spatiale

Ajout d'un terme auto-régressif dans le modèle linéaire :

$$y = \rho Wy + \beta X + \varepsilon$$

- Introduction d'effets de voisinages : prise en compte de l'autocorrélation spatiale (*spatial Durbin model*)
- Correlation avec l'erreur par le terme $Wy$
- Estimation par Maximum de Vraisemblance : `spatialreg::lagsarlm`

# Modèles à erreur spatiale

Prise en compte de la structure spatiale dans le terme d'erreur :

$$y = \beta X + \varepsilon$$

$$\varepsilon = \lambda W \varepsilon + u$$

- Erreur auto-regressive dans l'espace
- Test des multiplieurs de Lagrange pour savoir si préférable à un modèle de Durbin spatial
- Estimation par Maximum de Vraisemblance : `spatialreg::errorsarlm`

# Test des multiplicateurs de Lagrange

Test générique pour des modèles statistiques avec maximum de vraisemblance $\mathcal{L}(\vec{x}, \theta)$, avec le score défini par :

$$s(\theta) = \frac{\partial \log \mathcal{L}(\vec{x}, \theta)}{\partial \theta}$$

Alors $\sqrt{s(\theta_0)/I(\theta_0)}$ avec $I(\theta_0)$ information de Fisher, suit une distribution normale.

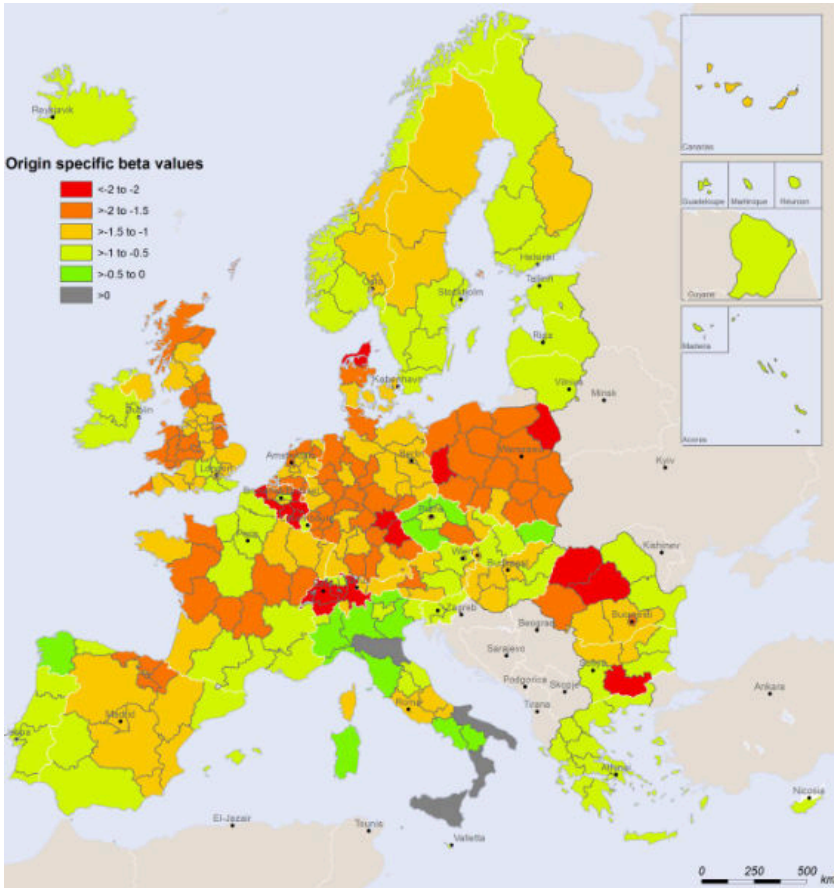
$\rightarrow$ application au modèles Durbin et d'erreur spatiale via leur maximum de vraisemblance

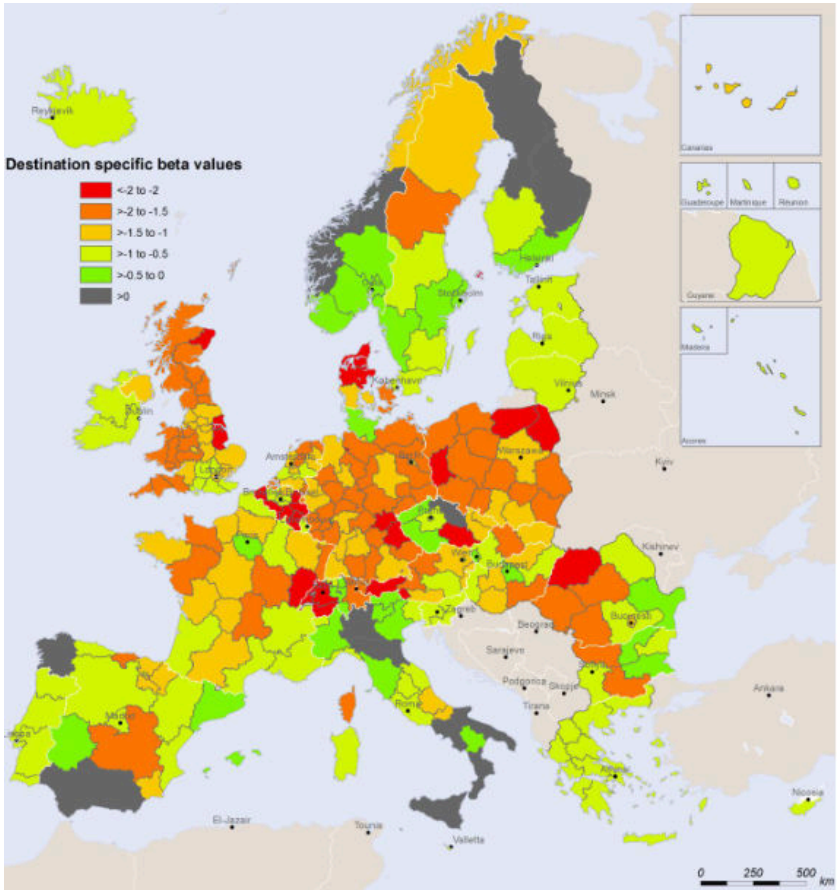
# Application

**Troisième partie du TP en R :** auto-régressions spatiales

**Données :** DVF agrégées au niveau départemental construites précédemment

# Régression multi-niveau : exemple




Paramètres de l'effet de la distance pour un modèle de migration, spécifiques aux origines et destinations, calculés par une régression multi-niveaux [Dennett and Wilson, 2013]

# Régression multi-niveau

Lorsque des données peuvent être groupées par une variable catégorielle, une estimation au sein de chaque groupe est incluse dans la régression ("effets fixes") :

$$y = \alpha + \beta X + \sum_j (\alpha_j + \beta_j X_j + \varepsilon_j)$$

- *Random intercepts :* constantes $\alpha_j$ uniquement
- *Random slopes :* coefficients $\beta_j$

# Application aux données géographiques

- Groupement des observations selon des niveaux géographiques supérieurs, potentiellement plusieurs : régions, pays, . . .
- non-stationnarité prise en compte avec des coefficients variables
- pas de matrice de distance ou de poids spatiaux : niveau géographique exogène; mais prise en compte du caractère multi-échelle dans le cas de plusieurs niveaux
- pas de prise en compte de l'autocorrélation spatiale

# Application

**Quatrième partie du TP en R :** régressions multi-niveaux spatiales

**Données :** DVF agrégées au niveau départemental, groupement par régions

# Résumé des méthodes

| | Non-stationnarité | Auto-corrélation | Multi-échelles |
|---|---|---|---|
| Régression géographique pondérée | ✓ | ✓ | ✗ |
| Auto-régression spatiale | ✗ | ✓ | ✗ |
| Régression multi-niveau | ✓ | ✗ | ✓ |

# Synthèse

$\rightarrow$ méthodes statistiques adaptées à différents aspects des processus spatiaux

$\rightarrow$ méthodes complémentaires, à appliquer selon le contexte et les propriétés des données (tests d'auto-corrélation, de non-stationnarité)

$\rightarrow$ méthodes allant d'une application basique à un cadre complet plus avancé

**A retenir :** concepts et principes d'application, utilisation basique en R

# References I



Comber, A., Brunsdon, C., Charlton, M., Dong, G., Harris, R., Lu, B., Lü, Y., Murakami, D., Nakaya, T., Wang, Y., et al. (2021).
A route map for successful applications of geographically weighted regression.
*Geographical Analysis*.


Dennett, A. and Wilson, A. (2013).
A multilevel spatial interaction modelling framework for estimating interregional migration in europe.
*Environment and Planning A*, 45(6):1491–1507.


Fotheringham, A. S., Brunsdon, C., and Charlton, M. (2003).
*Geographically weighted regression: the analysis of spatially varying relationships*.
John Wiley & Sons.

# References II


Fuentes, M. (2005).
A formal test for nonstationarity of spatial stochastic processes.
*Journal of Multivariate Analysis*, 96(1):30–54.

Leung, Y., Mei, C.-L., and Zhang, W.-X. (2000).
Statistical tests for spatial nonstationarity based on the geographically weighted regression model.
*Environment and Planning A*, 32(1):9–32.

Raimbault, J. (2019).
Second-order control of complex systems with correlated synthetic data.
*Complex Adaptive Systems Modeling*, 7(1):1–19.