Introduction à l'Apprentissage Structuré
Modèles Graphiques Probabilistes

Master 2 GDS

Yann MENEROUX

Contact : `yann.meneroux@ign.fr`
Service de Géodésie et Métrologie
Institut National de l'Information Géographique et Forestière - IGN

22 novembre 2024

Rappels : marginalisation & conditionnement

Marginalisation

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires discrètes de loi P_{XY}.
La **loi marginale** P_X de la variable X est :

$$P_X(x) = \sum_y P_{XY}(x, y)$$

Conditionnement

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires discrètes de loi P_{XY}.
La **loi conditionnelle** $P_{X|Y=y}$ de X conditionnée à $Y = y$ est :

$$P_{X|Y} = \frac{\mathbb{P}(X, Y)}{\mathbb{P}(Y)}$$

Rappels : marginalisation & conditionnement

Marginalisation

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires de densité π_{XY}. La densité π_X de la **loi marginale** de X est :

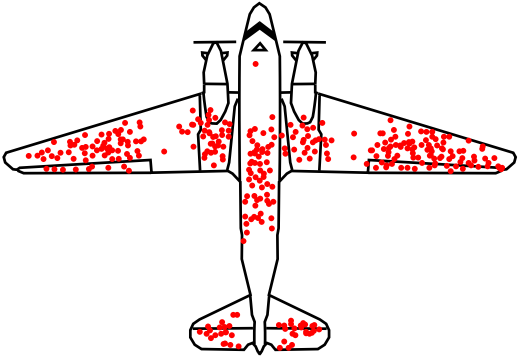
$$\pi_X(x) = \int_{\mathbb{R}} \pi_{XY}(x, y) dy$$

Conditionnement

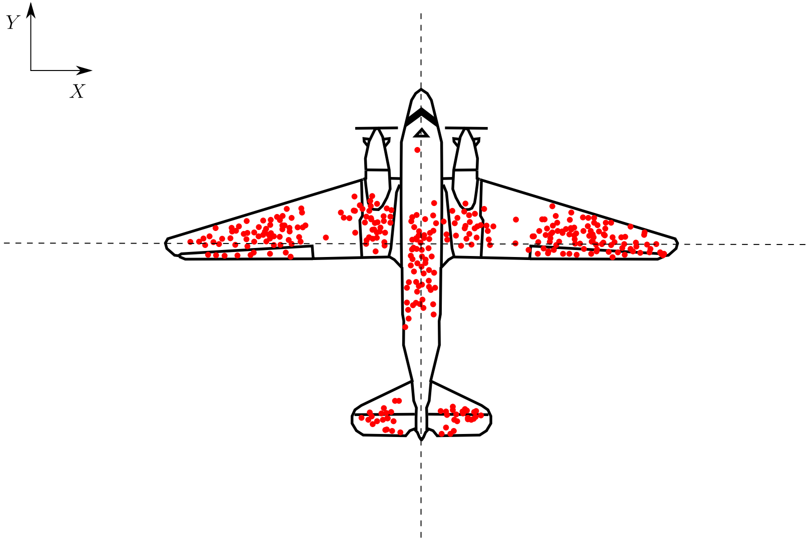
Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires de densité jointe π_{XY} et de lois marginales π_X et π_Y. La densité de la **loi conditionnelle** $\pi_{X|Y=y}$ de X conditionnée à $Y = y$ est :

$$\pi_{X|Y=y}(x) = \frac{\pi_{XY}(x, y)}{\pi_Y(y)}$$

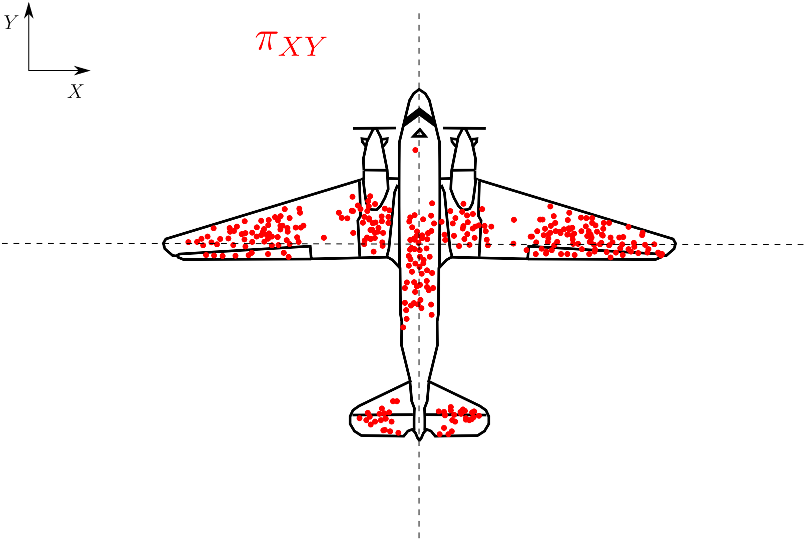
Rappels : marginalisation & conditionnement



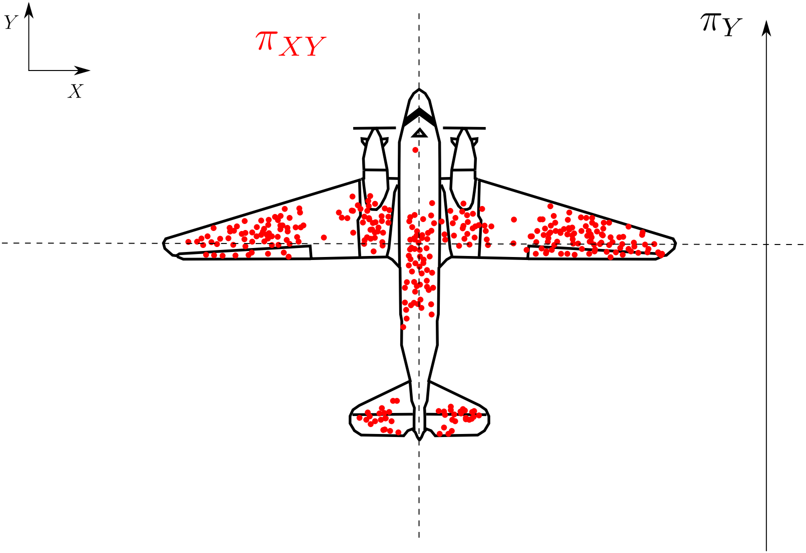
Rappels : marginalisation & conditionnement

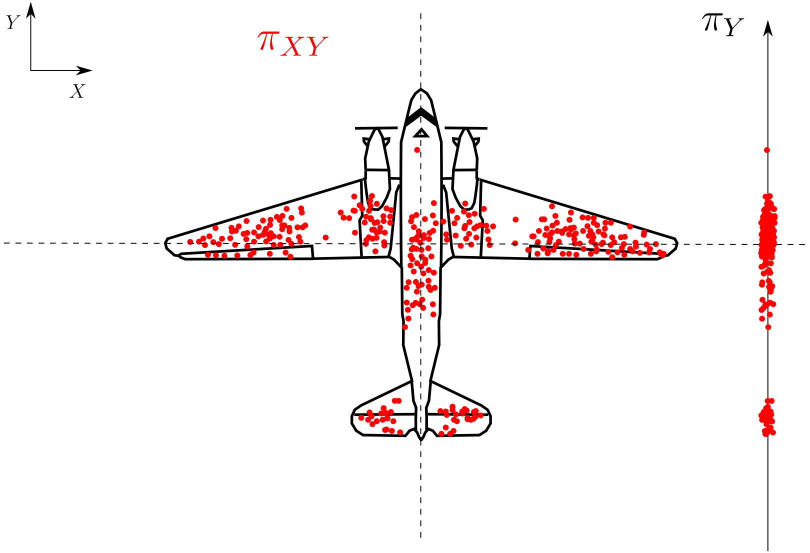


Rappels : marginalisation & conditionnement



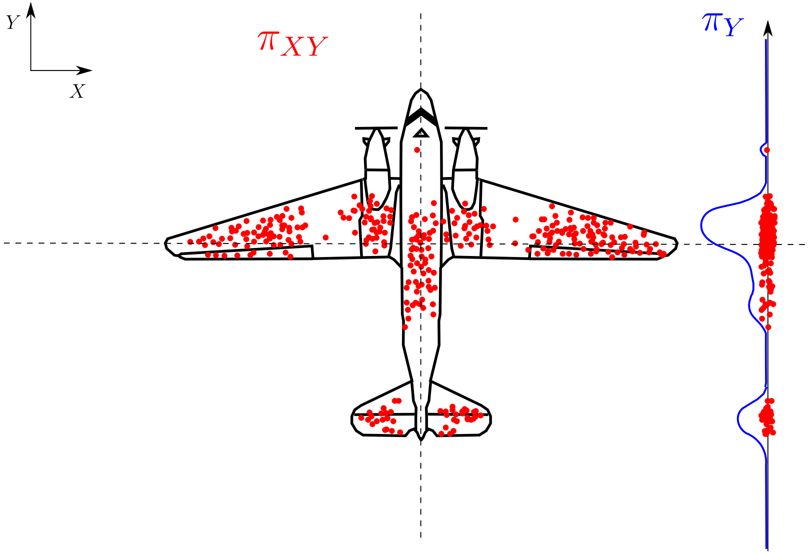
Rappels : marginalisation & conditionnement



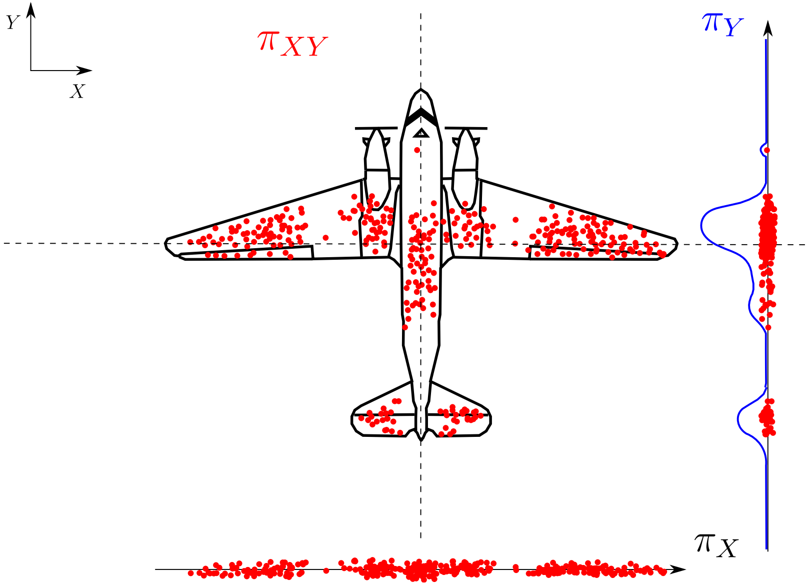


Y
X
π_{XY}
π_Y

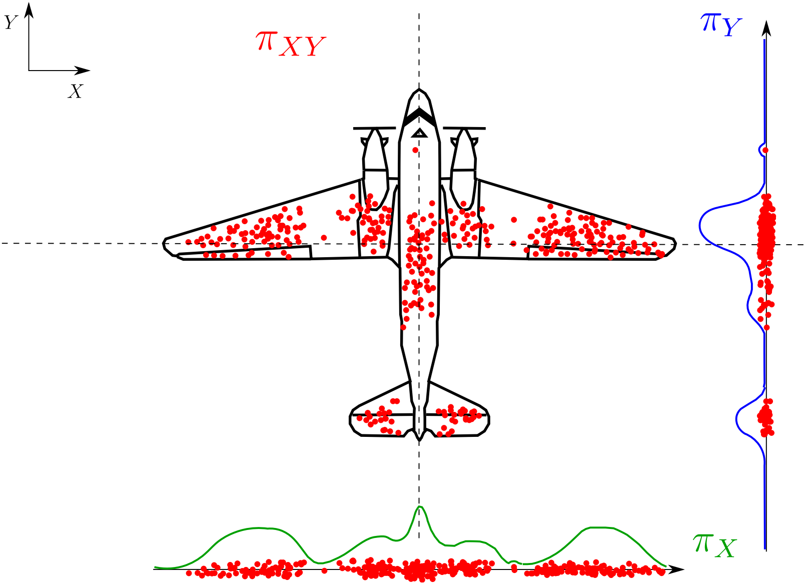
Rappels : marginalisation & conditionnement



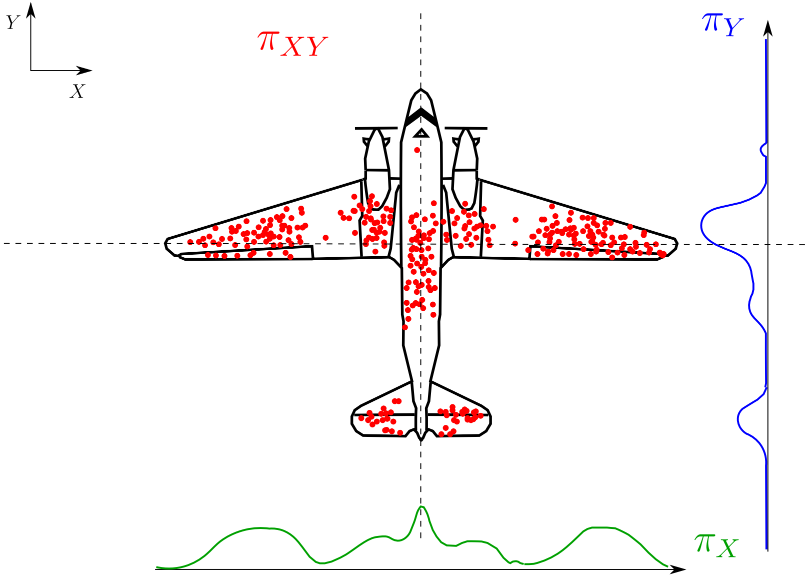
Rappels : marginalisation & conditionnement

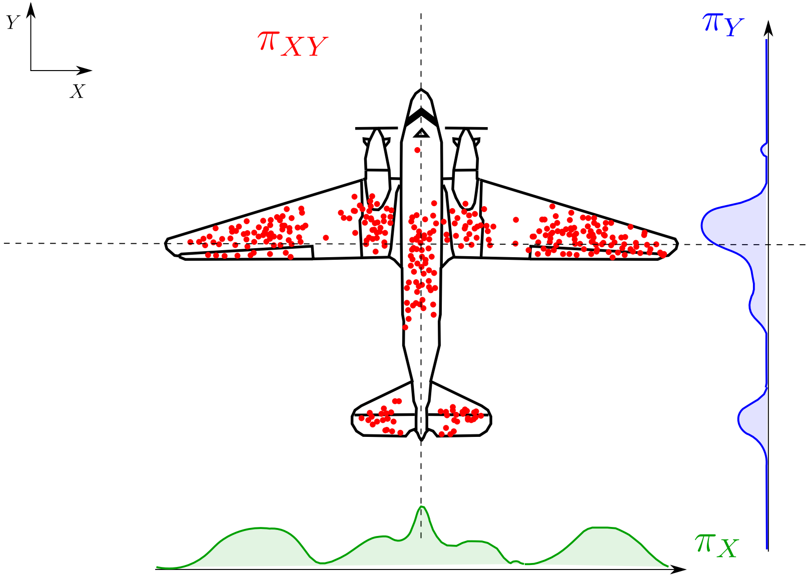


Rappels : marginalisation & conditionnement



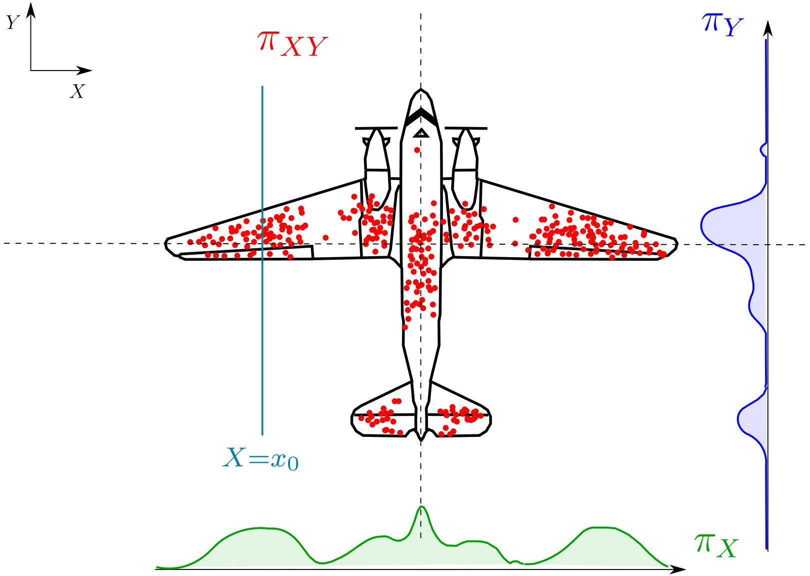
Rappels : marginalisation & conditionnement



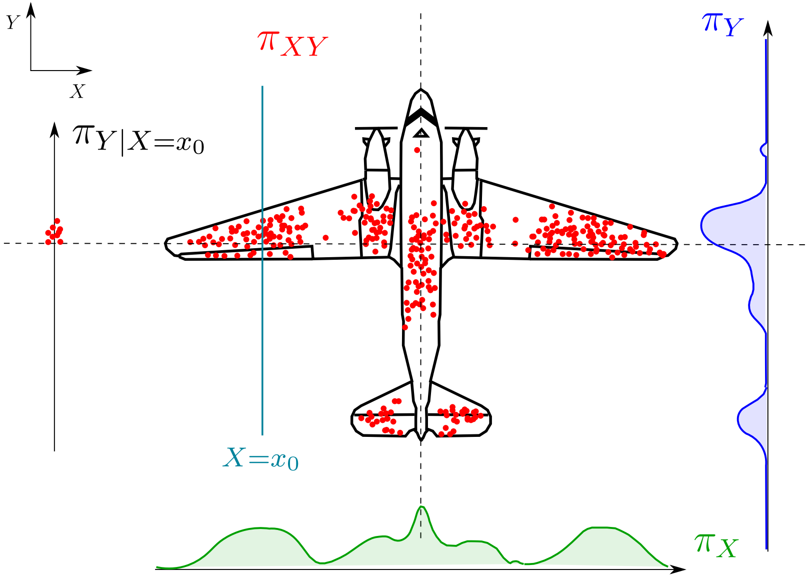


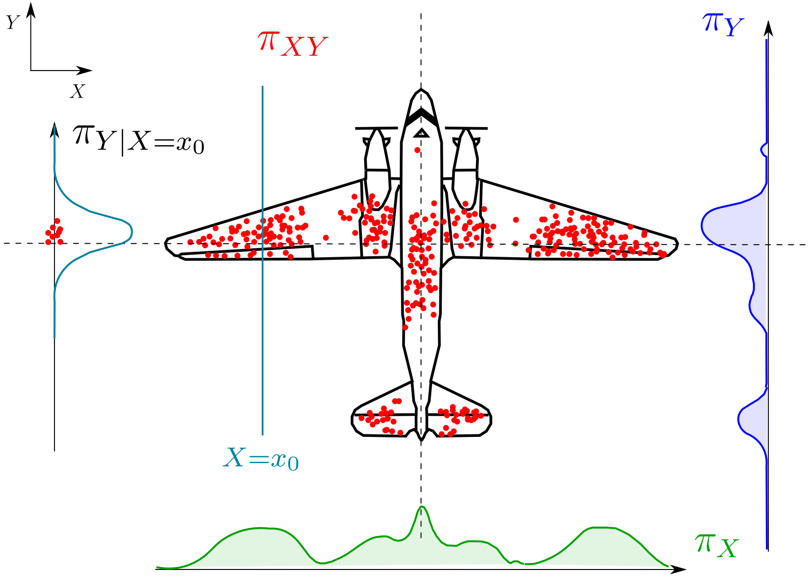
Y
X
π_{XY}
π_Y
π_X

Rappels : marginalisation & conditionnement



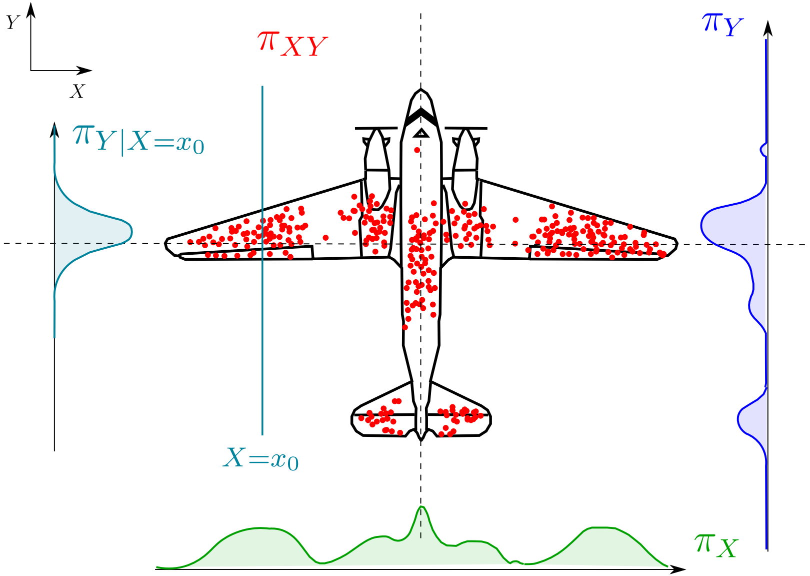
Rappels : marginalisation & conditionnement



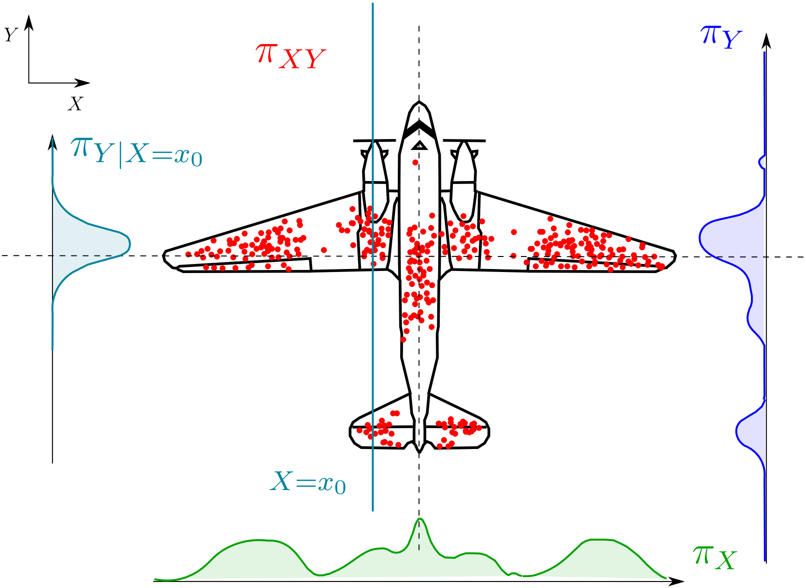


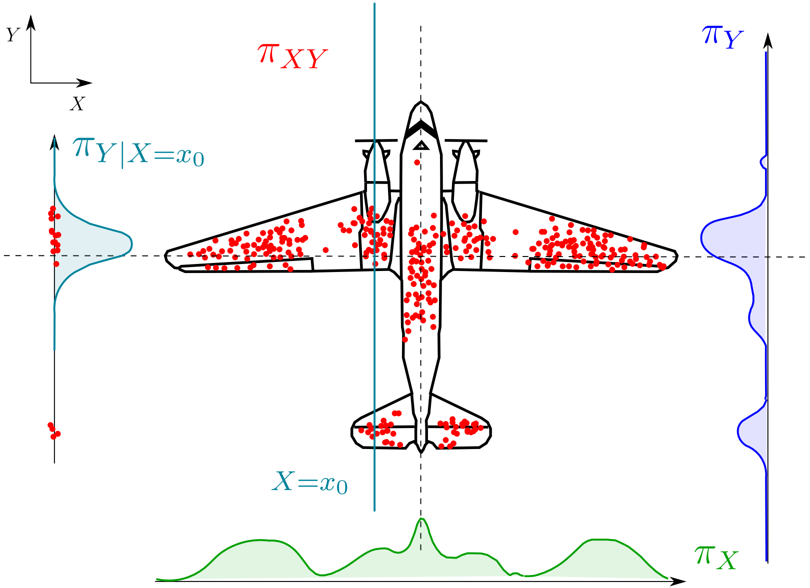
Y
X
π_{XY}
π_Y
$\pi_{Y|X=x_0}$
$X = x_0$
π_X

Rappels : marginalisation & conditionnement



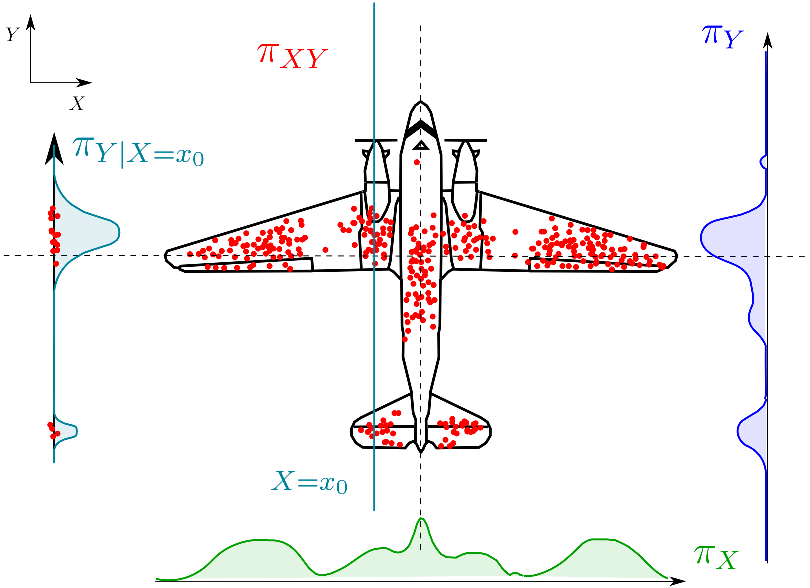
Rappels : marginalisation & conditionnement



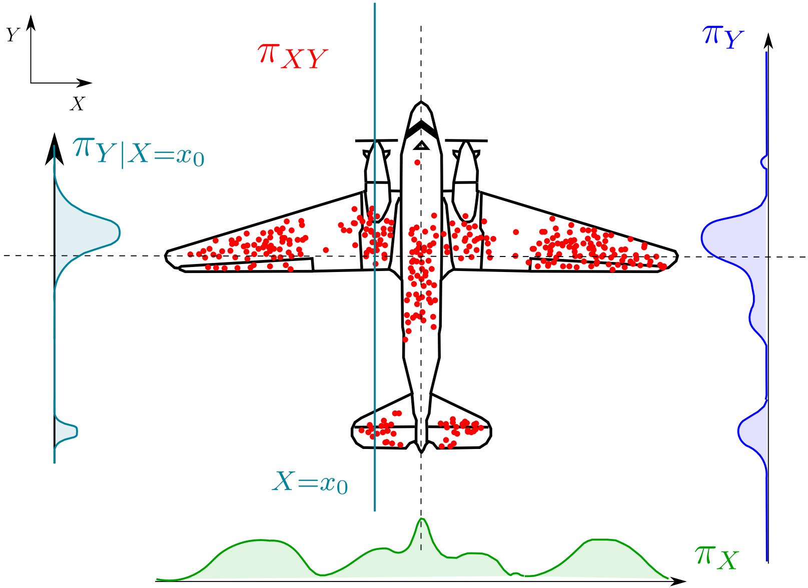


Y
X
π_{XY}
π_Y
$\pi_{Y|X=x_0}$
$X = x_0$
π_X

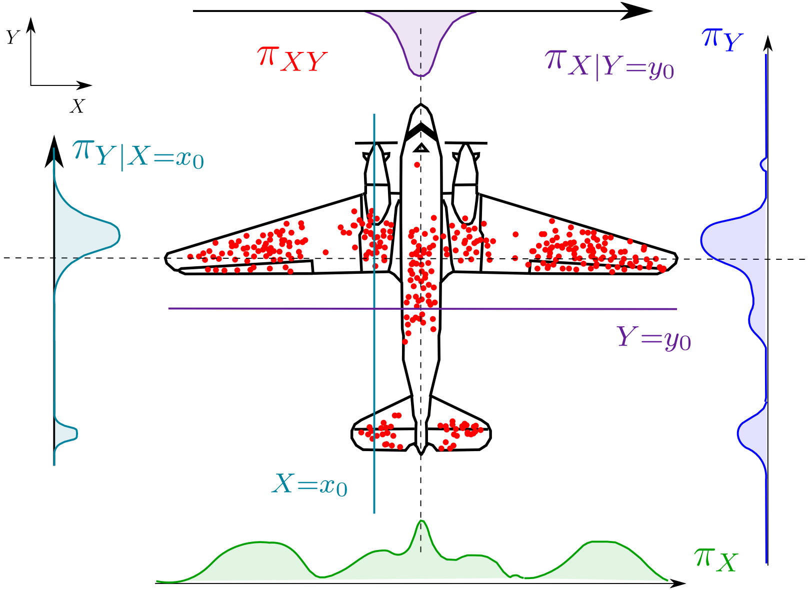
Rappels : marginalisation & conditionnement



Rappels : marginalisation & conditionnement



Rappels : marginalisation & conditionnement



Rappels : règle de chaînage

Règle de chaînage des probabilités (chain rule) :

$$P(X,Y) = P(X|Y)P(Y)$$

Règle de chaînage des probabilités (chain rule) :

$$\overbrace{P(X,Y)}^{\text{Jointe}} = \overbrace{P(X|Y)}^{\text{Conditionnelle}} \times \overbrace{P(Y)}^{\text{Marginale}}$$

Rappels : règle de chaînage

Règle de chaînage des probabilités (chain rule) :

$$\overbrace{P(X,Y)}^{\text{Jointe}} = \overbrace{P(X|Y)}^{\text{Conditionnelle}} \times \overbrace{P(Y)}^{\text{Marginale}}$$

E.g. $P({\color{red}A}, {\color{green}B}, {\color{blue}C}, {\color{teal}D})$

Rappels : règle de chaînage

Règle de chaînage des probabilités (chain rule) :

$$\overbrace{P(X,Y)}^{\text{Jointe}} = \overbrace{P(X|Y)}^{\text{Conditionnelle}} \times \overbrace{P(Y)}^{\text{Marginale}}$$

E.g. $P(A,B,C,D) = P(A,B,C|D)P(D)$

Rappels : règle de chaînage

Règle de chaînage des probabilités (chain rule) :

$$\overbrace{P(X,Y)}^{\text{Jointe}} = \overbrace{P(X|Y)}^{\text{Conditionnelle}} \times \overbrace{P(Y)}^{\text{Marginale}}$$

E.g. $P({\color{red}A},{\color{green}B},{\color{blue}C},{\color{teal}D}) = P({\color{red}A},{\color{green}B}|{\color{blue}C},{\color{teal}D})P({\color{blue}C}|{\color{teal}D})P({\color{teal}D})$

Rappels : règle de chaînage

Règle de chaînage des probabilités (chain rule) :

$$\overbrace{P(X,Y)}^{\text{Jointe}} = \overbrace{P(X|Y)}^{\text{Conditionnelle}} \times \overbrace{P(Y)}^{\text{Marginale}}$$

E.g. $P(A,B,C,D) = P(A|B,C,D)P(B|C,D)P(C|D)P(D)$

Règle de chaînage des probabilités (chain rule) :

$$\overbrace{P(X,Y)}^{\text{Jointe}} = \overbrace{P(X|Y)}^{\text{Conditionnelle}} \times \overbrace{P(Y)}^{\text{Marginale}}$$

E.g. $P(A,B,C,D) = P(A|B,C,D)P(B|C,D)P(C|D)P(D)$

Règle de chaînage

Soient A_1, A_2, ... A_n une suite de variables aléatoires quelconques. Alors, la loi jointe des A_k s'exprime par :

$$P(A_1, A_2, ...A_n) = \prod_{i=1}^{n} P\big(A_i \mid \{A_k\}_{k<i}\big)$$

avec la convention que $P(A_i|\varnothing) = P(A_i)$

Rappels : théorème de Bayes...

Théorie bayésienne des probabilités

Théorème de Bayes

Soient X et Y deux variables aléatoires. Alors :

$$P(X|Y) = \frac{P(Y|X)P(X)}{P(Y)}$$

Théorie bayésienne des probabilités

Théorème de Bayes

Soient X et Y deux variables aléatoires. Alors :

$$P(X|Y) = \frac{P(Y|X)P(X)}{P(Y)}$$

Preuve. $P(X|Y) = \frac{P(X,Y)}{P(Y)} \Rightarrow P(X,Y) = P(X|Y)P(Y) = P(Y|X)P(X) \Rightarrow P(X|Y) = \frac{P(Y|X)P(X)}{P(Y)}$

Rappels : théorème de Bayes...

Théorie bayésienne des probabilités

Théorème de Bayes

Soient X et Y deux variables aléatoires. Alors :

$$P(X|Y) = \frac{P(Y|X)P(X)}{P(Y)}$$

Preuve. $P(X|Y) = \frac{P(X,Y)}{P(Y)} \Rightarrow P(X,Y) = P(X|Y)P(Y) = P(Y|X)P(X) \Rightarrow P(X|Y) = \frac{P(Y|X)P(X)}{P(Y)}$

Probabilités des causes : soit $\mathcal{D}$ un ensemble de données observées et θ un jeu de causes (inconnues) ayant potentiellement généré $\mathcal{D}$.

$$P(\theta|\mathcal{D}) = \frac{P(\mathcal{D}|\theta)P(\theta)}{P(\mathcal{D})}$$

Théorie bayésienne des probabilités

Théorème de Bayes

Soient X et Y deux variables aléatoires. Alors :

$$P(X|Y) = \frac{P(Y|X)P(X)}{P(Y)}$$

Preuve. $P(X|Y) = \frac{P(X,Y)}{P(Y)} \Rightarrow P(X,Y) = P(X|Y)P(Y) = P(Y|X)P(X) \Rightarrow P(X|Y) = \frac{P(Y|X)P(X)}{P(Y)}$

Probabilités des causes : soit $\mathcal{D}$ un ensemble de données observées et θ un jeu de causes (inconnues) ayant potentiellement généré $\mathcal{D}$.

$$\widehat{\theta} = \underset{\theta \in \Theta}{\text{argmax}} \frac{P(\mathcal{D}|\theta)P(\theta)}{P(\mathcal{D})}$$

Théorie bayésienne des probabilités

Théorème de Bayes

Soient X et Y deux variables aléatoires. Alors :

$$P(X|Y) = \frac{P(Y|X)P(X)}{P(Y)}$$

Preuve. $P(X|Y) = \frac{P(X,Y)}{P(Y)} \Rightarrow P(X,Y) = P(X|Y)P(Y) = P(Y|X)P(X) \Rightarrow P(X|Y) = \frac{P(Y|X)P(X)}{P(Y)}$

Exercice.

Joseph a 2 enfants. L'un est une fille. $\mathbb{P}$ que l'autre soit une fille ?

Soit $\mathbf{X} = (A_1, A_2, ...A_n)$ un groupe de $n \in \mathbb{N}$ variables aléatoires (supposées bimodales, *i.e.* $A_i(\omega) \in \{0, 1\}$).

Inférence bayésienne

Soit $\mathbf{X} = (A_1, A_2, ...A_n)$ un groupe de $n \in \mathbb{N}$ variables aléatoires (supposées bimodales, *i.e.* $A_i(\omega) \in \{0, 1\}$).

Supposons avoir une connaissance parfaite de la loi $P(\mathbf{X})$...

Soit $\mathbf{X} = (A_1, A_2, ...A_n)$ un groupe de $n \in \mathbb{N}$ variables aléatoires (supposées bimodales, *i.e.* $A_i(\omega) \in \{0, 1\}$).

Supposons avoir une connaissance parfaite de la loi $P(\mathbf{X})$...

... alors, on peut inférer l'état de n'importe quel sous-groupe de variables à partir de la connaissance de tout-ou-partie des autres. Par exemple, avec $n = 5$, connaissant A_2 et A_5, on peut chercher à déterminer A_1 et A_3 en calculant :

Soit $\mathbf{X} = (A_1, A_2, ...A_n)$ un groupe de $n \in \mathbb{N}$ variables aléatoires (supposées bimodales, *i.e.* $A_i(\omega) \in \{0, 1\}$).

Supposons avoir une connaissance parfaite de la loi $P(\mathbf{X})$...

... alors, on peut inférer l'état de n'importe quel sous-groupe de variables à partir de la connaissance de tout-ou-partie des autres. Par exemple, avec $n = 5$, connaissant A_2 et A_5, on peut chercher à déterminer A_1 et A_3 en calculant :

$$P(A_1, A_3 \mid A_2, A_5) = \frac{P(A_1, A_2, A_3, A_5)}{P(A_2, A_5)}$$

Inférence bayésienne

Soit $\mathbf{X} = (A_1, A_2, ...A_n)$ un groupe de $n \in \mathbb{N}$ variables aléatoires (supposées bimodales, *i.e.* $A_i(\omega) \in \{0, 1\}$).

Supposons avoir une connaissance parfaite de la loi $P(\mathbf{X})$...

... alors, on peut inférer l'état de n'importe quel sous-groupe de variables à partir de la connaissance de tout-ou-partie des autres. Par exemple, avec $n = 5$, connaissant A_2 et A_5, on peut chercher à déterminer A_1 et A_3 en calculant :

$$P(A_1, A_3 \mid A_2, A_5) = \frac{\sum_{a_4} P(A_1, A_2, A_3, a_4, A_5)}{\sum_{a_1} \sum_{a_3} \sum_{a_4} P(a_1 A_2, a_3, a_4, A_5)}$$

Problème. La loi jointe $P(\mathbf{X}) = P(A_1, A_2, ...A_n)$ est en général complexe à estimer ($\Theta(2^n)$ paramètres à calculer...)

Objectif : identifier les indépendances...

Dans certains cas, X et Y peuvent être traitées séparemment.

Objectif : identifier les indépendances...

Dans certains cas, X et Y peuvent être traitées séparemment.

Indépendance

Deux variables aléatoires X et Y sont indépendantes si, et seulement si, l'observation de l'une d'entre elles n'apporte aucune information sur la loi de l'autre :

$$\mathbb{P}(X|Y) = \mathbb{P}(X)$$

Objectif : identifier les indépendances...

Dans certains cas, X et Y peuvent être traitées séparemment.

Indépendance

Deux variables aléatoires X et Y sont indépendantes si, et seulement si, l'observation de l'une d'entre elles n'apporte aucune information sur la loi de l'autre :

$$\mathbb{P}(X|Y) = \mathbb{P}(X)$$

Objectif : identifier les indépendances...

Dans certains cas, X et Y peuvent être traitées séparemment.

Indépendance

Deux variables aléatoires X et Y sont indépendantes si, et seulement si, l'observation de l'une d'entre elles n'apporte aucune information sur la loi de l'autre :

$$\mathbb{P}(Y|X) = \mathbb{P}(Y)$$

Objectif : identifier les indépendances...

Dans certains cas, X et Y peuvent être traitées séparemment.

Indépendance

Deux variables aléatoires X et Y sont indépendantes si, et seulement si, l'observation de l'une d'entre elles n'apporte aucune information sur la loi de l'autre :

$$\mathbb{P}(X|Y) = \mathbb{P}(X) \;\Leftrightarrow\; \mathbb{P}(Y|X) = \mathbb{P}(Y)$$

Objectif : identifier les indépendances...

Dans certains cas, X et Y peuvent être traitées séparemment.

Indépendance

Deux variables aléatoires X et Y sont indépendantes si, et seulement si, l'observation de l'une d'entre elles n'apporte aucune information sur la loi de l'autre :

$$\mathbb{P}(X|Y) = \mathbb{P}(X) \Leftrightarrow \mathbb{P}(Y|X) = \mathbb{P}(Y)$$

Conséquence :

Objectif : identifier les indépendances...

Dans certains cas, X et Y peuvent être traitées séparemment.

Indépendance

Deux variables aléatoires X et Y sont indépendantes si, et seulement si, l'observation de l'une d'entre elles n'apporte aucune information sur la loi de l'autre :

$$\mathbb{P}(X|Y) = \mathbb{P}(X) \;\Leftrightarrow\; \mathbb{P}(Y|X) = \mathbb{P}(Y)$$

Conséquence :

$$\overbrace{\mathbb{P}(X,Y) = \mathbb{P}(X|Y) \times \mathbb{P}(Y)}^{\text{Chain rule}}$$

Objectif : identifier les indépendances...

Dans certains cas, X et Y peuvent être traitées séparemment.

Indépendance

Deux variables aléatoires X et Y sont indépendantes si, et seulement si, l'observation de l'une d'entre elles n'apporte aucune information sur la loi de l'autre :

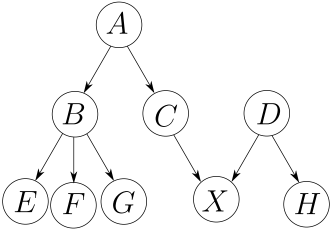
$$\mathbb{P}(X|Y) = \mathbb{P}(X) \;\Leftrightarrow\; \mathbb{P}(Y|X) = \mathbb{P}(Y)$$

Conséquence :

$$\overbrace{\mathbb{P}(X,Y) = \mathbb{P}(X|Y) \times \mathbb{P}(Y)}^{\text{Chain rule}} = \mathbb{P}(X) \times \mathbb{P}(Y)$$

Modèle graphique probabiliste

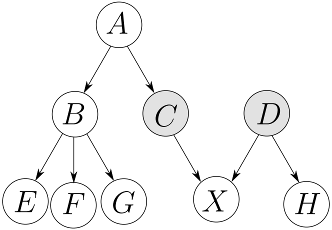
Réseau bayesien (Bayesian Network) : simplification des dépendances



Définition. Soit $G(V, E)$ un graphe. Pour un noeud $X \in V$, on note Pa_X l'ensemble des parents de X.

$$P(X_1, X_2, ...X_n) = \prod_{X_i \in V} P\big(X_i | \mathsf{Pa}_{X_i}\big)$$

Réseau bayesien (Bayesian Network) : simplification des dépendances

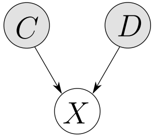


Définition. Soit $G(V, E)$ un graphe. Pour un noeud $X \in V$, on note Pa_X l'ensemble des parents de X.

$$P(X_1, X_2, ...X_n) = \prod_{X_i \in V} P\big(X_i | \mathsf{Pa}_{X_i}\big)$$

Sachant ses parents C et D, la variable X est indépendante de tous ses non-descendants.

Réseau bayesien (Bayesian Network) : simplification des dépendances



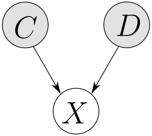
Définition. Soit $G(V, E)$ un graphe. Pour un noeud $X \in V$, on note Pa_X l'ensemble des parents de X.

$$P(X_1, X_2, ...X_n) = \prod_{X_i \in V} P\big(X_i | \mathsf{Pa}_{X_i}\big)$$

Sachant ses parents C et D, la variable X est indépendante de tous ses non-descendants.

Modèle graphique probabiliste

Réseau bayesien (Bayesian Network) : simplification des dépendances



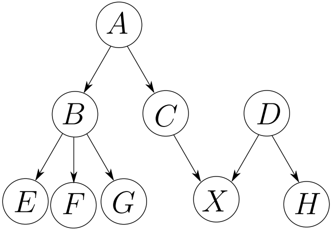
Définition. Soit $G(V, E)$ un graphe. Pour un noeud $X \in V$, on note Pa_X l'ensemble des parents de X.

$$P(X_1, X_2, ...X_n) = \prod_{X_i \in V} P\big(X_i | \mathsf{Pa}_{X_i}\big)$$

$$P(X|A, B, C, D, E, F, G, H) = P(X|C, D)$$

Modèle graphique probabiliste

Réseau bayesien (Bayesian Network) : simplification des dépendances



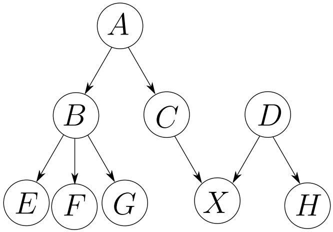
Définition. Soit $G(V, E)$ un graphe. Pour un noeud $X \in V$, on note Pa_X l'ensemble des parents de X.

$$P(X_1, X_2, ...X_n) = \prod_{X_i \in V} P\big(X_i | \mathrm{Pa}_{X_i}\big)$$

Exemple. (loi jointe du modèle ci-dessus) :

Modèle graphique probabiliste

Réseau bayesien (Bayesian Network) : simplification des dépendances



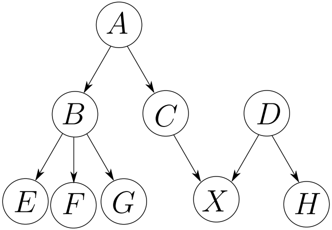
Définition. Soit $G(V, E)$ un graphe. Pour un noeud $X \in V$, on note Pa_X l'ensemble des parents de X.

$$P(X_1, X_2, ...X_n) = \prod_{X_i \in V} P\big(X_i | \mathrm{Pa}_{X_i}\big)$$

Exemple. (loi jointe du modèle ci-dessus) :
$P(A)$

Modèle graphique probabiliste

Réseau bayesien (Bayesian Network) : simplification des dépendances



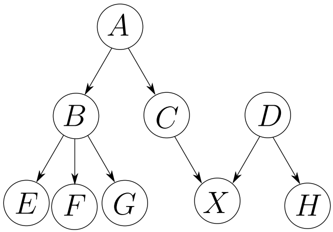
Définition. Soit $G(V, E)$ un graphe. Pour un noeud $X \in V$, on note Pa_X l'ensemble des parents de X.

$$P(X_1, X_2, ...X_n) = \prod_{X_i \in V} P\big(X_i | \mathsf{Pa}_{X_i}\big)$$

Exemple. (loi jointe du modèle ci-dessus) :
$P(A)P(D)$

Modèle graphique probabiliste

Réseau bayesien (Bayesian Network) : simplification des dépendances



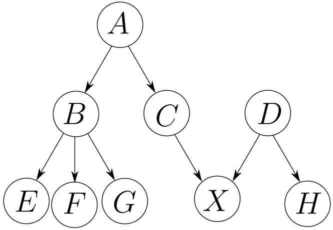
Définition. Soit $G(V, E)$ un graphe. Pour un noeud $X \in V$, on note Pa_X l'ensemble des parents de X.

$$P(X_1, X_2, ...X_n) = \prod_{X_i \in V} P\big(X_i | \mathsf{Pa}_{X_i}\big)$$

Exemple. (loi jointe du modèle ci-dessus) :
$P(A)P(D)P(B|A)$

Modèle graphique probabiliste

Réseau bayesien (Bayesian Network) : simplification des dépendances



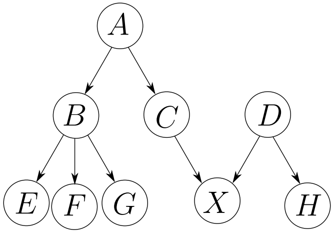
Définition. Soit $G(V,E)$ un graphe. Pour un noeud $X \in V$, on note Pa_X l'ensemble des parents de X.

$$P(X_1, X_2, ...X_n) = \prod_{X_i \in V} P\big(X_i | \mathsf{Pa}_{X_i}\big)$$

Exemple. (loi jointe du modèle ci-dessus) :
$P(A)P(D)P(B|A)(C|A)$

Modèle graphique probabiliste

Réseau bayesien (Bayesian Network) : simplification des dépendances

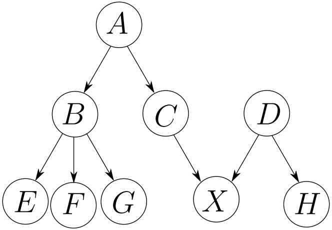


Définition. Soit $G(V, E)$ un graphe. Pour un noeud $X \in V$, on note Pa_X l'ensemble des parents de X.

$$P(X_1, X_2, ...X_n) = \prod_{X_i \in V} P\big(X_i | \mathsf{Pa}_{X_i}\big)$$

Exemple. (loi jointe du modèle ci-dessus) :
$P(A)P(D)P(B|A)(C|A)P(E|B)$

Réseau bayesien (Bayesian Network) : simplification des dépendances



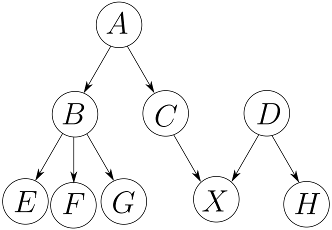
Définition. Soit $G(V, E)$ un graphe. Pour un noeud $X \in V$, on note Pa_X l'ensemble des parents de X.

$$P(X_1, X_2, ...X_n) = \prod_{X_i \in V} P\big(X_i | \mathsf{Pa}_{X_i}\big)$$

Exemple. (loi jointe du modèle ci-dessus) :
$P(A)P(D)P(B|A)(C|A)P(E|B)P(F|B)$

Modèle graphique probabiliste

Réseau bayesien (Bayesian Network) : simplification des dépendances



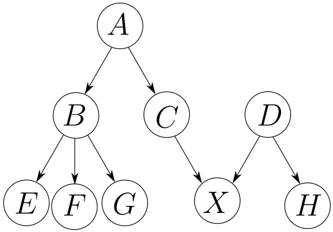
Définition. Soit $G(V, E)$ un graphe. Pour un noeud $X \in V$, on note Pa_X l'ensemble des parents de X.

$$P(X_1, X_2, ...X_n) = \prod_{X_i \in V} P\big(X_i | \mathsf{Pa}_{X_i}\big)$$

Exemple. (loi jointe du modèle ci-dessus) :
$P(A)P(D)P(B|A)(C|A)P(E|B)P(F|B)P(G|B)$

Modèle graphique probabiliste

Réseau bayesien (Bayesian Network) : simplification des dépendances

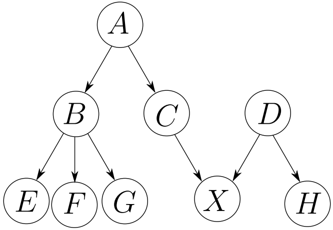


Définition. Soit $G(V, E)$ un graphe. Pour un noeud $X \in V$, on note Pa_X l'ensemble des parents de X.

$$P(X_1, X_2, ...X_n) = \prod_{X_i \in V} P\big(X_i | \mathsf{Pa}_{X_i}\big)$$

Exemple. (loi jointe du modèle ci-dessus) :
$P(A)P(D)P(B|A)(C|A)P(E|B)P(F|B)P(G|B)P(X|C,D)$

Réseau bayesien (Bayesian Network) : simplification des dépendances



Définition. Soit $G(V, E)$ un graphe. Pour un noeud $X \in V$, on note Pa_X l'ensemble des parents de X.

$$P(X_1, X_2, ...X_n) = \prod_{X_i \in V} P\big(X_i | \mathsf{Pa}_{X_i}\big)$$

Exemple. (loi jointe du modèle ci-dessus) :
$P(A)P(D)P(B|A)(C|A)P(E|B)P(F|B)P(G|B)P(X|C, D)P(H|D)$

Chaîne de Markov

$$X_1 \longrightarrow X_2 \longrightarrow X_3 \longrightarrow X_4$$

Un peu de multivarié...

Chaîne de Markov

$$X_1, X_2, X_3, X_4 \sim \mathcal{G}$$

$$X_1 \longrightarrow X_2 \longrightarrow X_3 \longrightarrow X_4$$

Chaîne de Markov

$$X_1, X_2, X_3, X_4 \sim \mathcal{G}$$

$$X_1 \longrightarrow X_2 \longrightarrow X_3 \longrightarrow X_4$$

$$P(X_1, X_2, X_3, X_4) =$$

Un peu de multivarié...

Chaîne de Markov

$$X_1, X_2, X_3, X_4 \sim \mathcal{G}$$

$$X_1 \longrightarrow X_2 \longrightarrow X_3 \longrightarrow X_4$$

$$P(X_1, X_2, X_3, X_4) = P(X_4|X_1, X_2, X_3)P(X_1, X_2, X_3)$$

Un peu de multivarié...

Chaîne de Markov

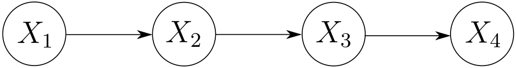
$$X_1, X_2, X_3, X_4 \sim \mathcal{G}$$

$$X_1 \longrightarrow X_2 \longrightarrow X_3 \longrightarrow X_4$$

$$P(X_1, X_2, X_3, X_4) = P(X_4 | X_1, X_2, X_3) P(X_1, X_2, X_3)$$

Chaîne de Markov

$$X_1, X_2, X_3, X_4 \sim \mathcal{G}$$



$$\begin{aligned} P(X_1, X_2, X_3, X_4) &= P(X_4 | X_1, X_2, X_3) P(X_1, X_2, X_3) \\ &= P(X_4 | X_3) P(X_1, X_2, X_3) \end{aligned}$$

Un peu de multivarié...

Chaîne de Markov

$$X_1, X_2, X_3, X_4 \sim \mathcal{G}$$

$$X_1 \longrightarrow X_2 \longrightarrow X_3 \longrightarrow X_4$$

$$\begin{aligned}
P(X_1, X_2, X_3, X_4) &= P(X_4 | X_1, X_2, X_3) P(X_1, X_2, X_3) \\
&= P(X_4 | X_3) P(X_1, X_2, X_3) \\
&= P(X_4 | X_3) P(X_3 | X_1, X_2) P(X_1, X_2)
\end{aligned}$$

Un peu de multivarié...

Chaîne de Markov

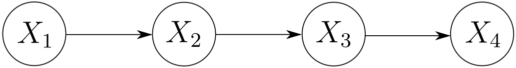
$$X_1, X_2, X_3, X_4 \sim \mathcal{G}$$

$$X_1 \longrightarrow X_2 \longrightarrow X_3 \longrightarrow X_4$$

$$\begin{aligned} P(X_1, X_2, X_3, X_4) &= P(X_4 | X_1, X_2, X_3) P(X_1, X_2, X_3) \\ &= P(X_4 | X_3) P(X_1, X_2, X_3) \\ &= P(X_4 | X_3) P(X_3 | X_1, X_2) P(X_1, X_2) \end{aligned}$$

Chaîne de Markov

$$X_1, X_2, X_3, X_4 \sim \mathcal{G}$$



$$\begin{aligned}
P(X_1, X_2, X_3, X_4) &= P(X_4 | X_1, X_2, X_3) P(X_1, X_2, X_3) \\
&= P(X_4 | X_3) P(X_1, X_2, X_3) \\
&= P(X_4 | X_3) P(X_3 | X_1, X_2) P(X_1, X_2) \\
&= P(X_4 | X_3) P(X_3 | X_2) P(X_1, X_2)
\end{aligned}$$

Un peu de multivarié...

Chaîne de Markov

$$X_1, X_2, X_3, X_4 \sim \mathcal{G}$$

$$X_1 \longrightarrow X_2 \longrightarrow X_3 \longrightarrow X_4$$

$$\begin{aligned}
P(X_1, X_2, X_3, X_4) &= P(X_4 | X_1, X_2, X_3) P(X_1, X_2, X_3) \\
&= P(X_4 | X_3) P(X_1, X_2, X_3) \\
&= P(X_4 | X_3) P(X_3 | X_1, X_2) P(X_1, X_2) \\
&= P(X_4 | X_3) P(X_3 | X_2) P(X_1, X_2) \\
&= P(X_4 | X_3) P(X_3 | X_2) P(X_2 | X_1) P(X_1)
\end{aligned}$$

Un peu de multivarié...

Chaîne de Markov

$$X_1, X_2, X_3, X_4 \sim \mathcal{G}$$

$$X_1 \longrightarrow X_2 \longrightarrow X_3 \longrightarrow X_4$$

$$\begin{aligned}
P(X_1, X_2, X_3, X_4) &= P(X_4|X_1, X_2, X_3)P(X_1, X_2, X_3) \\
&= P(X_4|X_3)P(X_1, X_2, X_3) \\
&= P(X_4|X_3)P(X_3|X_1, X_2)P(X_1, X_2) \\
&= P(X_4|X_3)P(X_3|X_2)P(X_1, X_2) \\
&= P(X_4|X_3)P(X_3|X_2)P(X_2|X_1)P(X_1)
\end{aligned}$$

$$P(X_1, X_2, X_3, X_4) = P(X_1)\,P(X_2|X_1)P(X_3|X_2)P(X_4|X_3)$$

Un peu de multivarié...

Chaîne de Markov

$$X_1, X_2, X_3, X_4 \sim \mathcal{G}$$

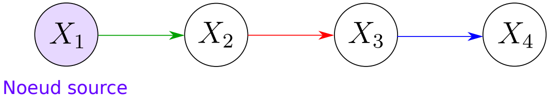
$$X_1 \longrightarrow X_2 \longrightarrow X_3 \longrightarrow X_4$$

$$\begin{aligned}
P(X_1, X_2, X_3, X_4) &= P(X_4|X_1, X_2, X_3)P(X_1, X_2, X_3) \\
&= P(X_4|X_3)P(X_1, X_2, X_3) \\
&= P(X_4|X_3)P(X_3|X_1, X_2)P(X_1, X_2) \\
&= P(X_4|X_3)P(X_3|X_2)P(X_1, X_2) \\
&= P(X_4|X_3)P(X_3|X_2)P(X_2|X_1)P(X_1)
\end{aligned}$$

$$\boxed{P(X_1, X_2, X_3, X_4) = P(X_1)\,P(X_2|X_1)P(X_3|X_2)P(X_4|X_3)}$$

Chaîne de Markov

$$X_1, X_2, X_3, X_4 \sim \mathcal{G}$$



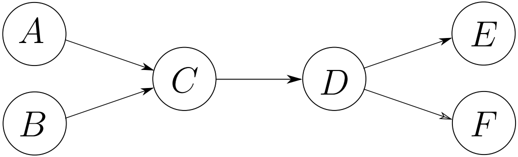
$$\begin{aligned}
P(X_1, X_2, X_3, X_4) &= P(X_4|X_1, X_2, X_3)P(X_1, X_2, X_3) \\
&= P(X_4|X_3)P(X_1, X_2, X_3) \\
&= P(X_4|X_3)P(X_3|X_1, X_2)P(X_1, X_2) \\
&= P(X_4|X_3)P(X_3|X_2)P(X_1, X_2) \\
&= P(X_4|X_3)P(X_3|X_2)P(X_2|X_1)P(X_1)
\end{aligned}$$

$$\boxed{P(X_1, X_2, X_3, X_4) = P(X_1)\, P(X_2|X_1) P(X_3|X_2) P(X_4|X_3)}$$

Un peu de multivarié...

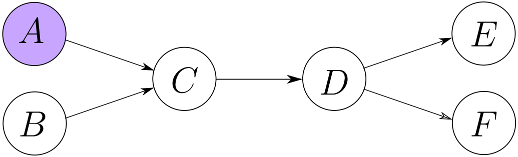
Cas général

$A, B, C, D, E, F \sim \mathcal{G}$



Cas général

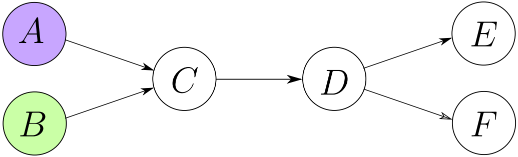
$A, B, C, D, E, F \sim \mathcal{G}$



$P(A)$ ...

Un peu de multivarié...

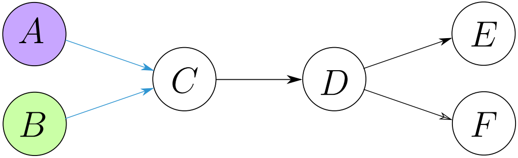
Cas général $\qquad A, B, C, D, E, F \sim \mathcal{G}$



$P(A) \times P(B)$ ...

Cas général

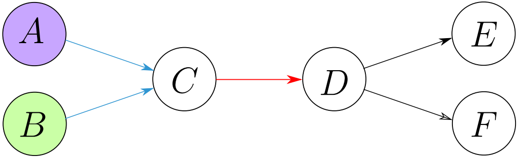
$A, B, C, D, E, F \sim \mathcal{G}$



$P(A) \times P(B) \times P(C|A, B)$ ...

Cas général

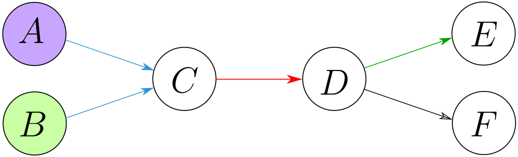
$A, B, C, D, E, F \sim \mathcal{G}$



$P(A) \times P(B) \times P(C|A, B) \times P(D|C)$ ...

Un peu de multivarié...

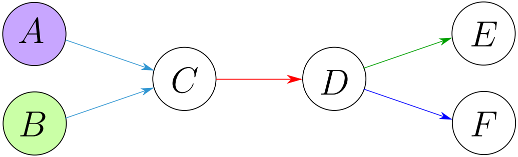
Cas général $A, B, C, D, E, F \sim \mathcal{G}$



$P(A) \times P(B) \times P(C|A,B) \times P(D|C) \times P(E|D)$ ...

Cas général

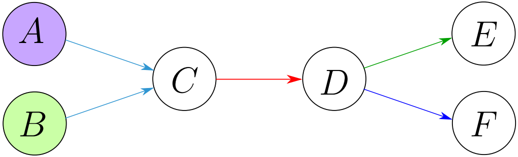
$$A, B, C, D, E, F \sim \mathcal{G}$$



$$P(A) \times P(B) \times P(C|A,B) \times P(D|C) \times P(E|D) \times P(F|D)$$

Cas général

$A, B, C, D, E, F \sim \mathcal{G}$

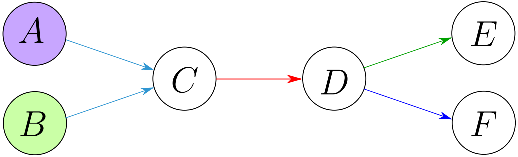


$$P(A) \times P(B) \times P(C|A,B) \times P(D|C) \times P(E|D) \times P(F|D)$$

$$= P(A,B) \times P(C|A,B) \times P(D|C) \times P(E|D) \times P(F|D)$$

Cas général

$A, B, C, D, E, F \sim \mathcal{G}$

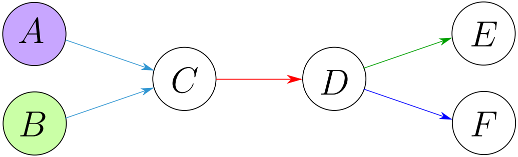


$$P(A) \times P(B) \times P(C|A,B) \times P(D|C) \times P(E|D) \times P(F|D)$$

$$= P(A,B) \times P(C|A,B) \times P(D|C) \times P(E|D) \times P(F|D)$$
$$= P(A,B,C) \times P(D|C) \times P(E|D) \times P(F|D)$$

Cas général

$A, B, C, D, E, F \sim \mathcal{G}$

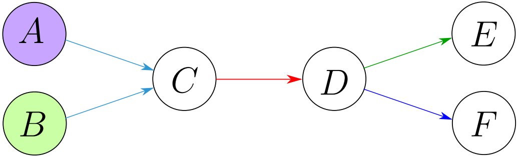


$$P(A) \times P(B) \times P(C|A,B) \times P(D|C) \times P(E|D) \times P(F|D)$$

$$= P(A,B) \times P(C|A,B) \times P(D|C) \times P(E|D) \times P(F|D)$$
$$= P(A,B,C) \times P(D|C) \times P(E|D) \times P(F|D)$$
$$= P(A,B,C) \times P(D|A,B,C) \times P(E|D) \times P(F|D)$$

Cas général

$A, B, C, D, E, F \sim \mathcal{G}$

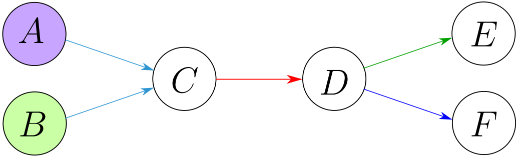


$$P(A) \times P(B) \times P(C|A,B) \times P(D|C) \times P(E|D) \times P(F|D)$$

$$\begin{aligned}
&= P(A,B) \times P(C|A,B) \times P(D|C) \times P(E|D) \times P(F|D) \\
&= P(A,B,C) \times P(D|C) \times P(E|D) \times P(F|D) \\
&= P(A,B,C) \times P(D|A,B,C) \times P(E|D) \times P(F|D) \\
&= P(A,B,C,D) \times P(E|D) \times P(F|D)
\end{aligned}$$

Cas général

$$A, B, C, D, E, F \sim \mathcal{G}$$



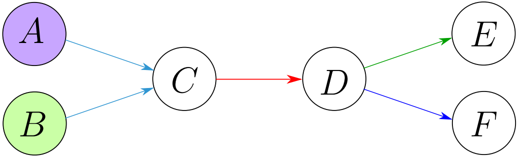
$$P(A) \times P(B) \times P(C|A,B) \times P(D|C) \times P(E|D) \times P(F|D)$$

$$\begin{aligned}
&= P(A,B) \times P(C|A,B) \times P(D|C) \times P(E|D) \times P(F|D) \\
&= P(A,B,C) \times P(D|C) \times P(E|D) \times P(F|D) \\
&= P(A,B,C) \times P(D|A,B,C) \times P(E|D) \times P(F|D) \\
&= P(A,B,C,D) \times P(E|D) \times P(F|D) \\
&= P(A,B,C,D) \times P(E|A,B,C,D) \times P(F|D)
\end{aligned}$$

Un peu de multivarié...

Cas général

$$A, B, C, D, E, F \sim \mathcal{G}$$

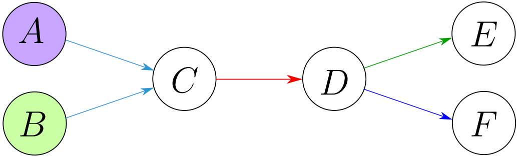


$$P(A) \times P(B) \times P(C|A, B) \times P(D|C) \times P(E|D) \times P(F|D)$$

$$\begin{aligned}
&= P(A, B) \times P(C|A, B) \times P(D|C) \times P(E|D) \times P(F|D) \\
&= P(A, B, C) \times P(D|C) \times P(E|D) \times P(F|D) \\
&= P(A, B, C) \times P(D|A, B, C) \times P(E|D) \times P(F|D) \\
&= P(A, B, C, D) \times P(E|D) \times P(F|D) \\
&= P(A, B, C, D) \times P(E|A, B, C, D) \times P(F|D) \\
&= P(A, B, C, D, E) \times P(F|D)
\end{aligned}$$

Cas général

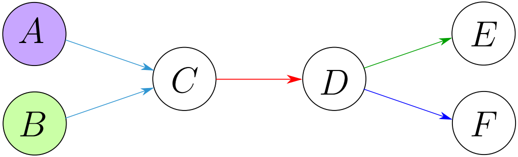
$A, B, C, D, E, F \sim \mathcal{G}$



$$P(A) \times P(B) \times P(C|A,B) \times P(D|C) \times P(E|D) \times P(F|D)$$

$$\begin{aligned}
&= P(A,B) \times P(C|A,B) \times P(D|C) \times P(E|D) \times P(F|D) \\
&= P(A,B,C) \times P(D|C) \times P(E|D) \times P(F|D) \\
&= P(A,B,C) \times P(D|A,B,C) \times P(E|D) \times P(F|D) \\
&= P(A,B,C,D) \times P(E|D) \times P(F|D) \\
&= P(A,B,C,D) \times P(E|A,B,C,D) \times P(F|D) \\
&= P(A,B,C,D,E) \times P(F|D) \\
&= P(A,B,C,D,E) \times P(F|A,B,C,D,E)
\end{aligned}$$

Cas général $A, B, C, D, E, F \sim \mathcal{G}$



$$P(A) \times P(B) \times P(C|A,B) \times P(D|C) \times P(E|D) \times P(F|D)$$

$$\begin{aligned}
&= P(A,B) \times P(C|A,B) \times P(D|C) \times P(E|D) \times P(F|D)\\
&= P(A,B,C) \times P(D|C) \times P(E|D) \times P(F|D)\\
&= P(A,B,C) \times P(D|A,B,C) \times P(E|D) \times P(F|D)\\
&= P(A,B,C,D) \times P(E|D) \times P(F|D)\\
&= P(A,B,C,D) \times P(E|A,B,C,D) \times P(F|D)\\
&= P(A,B,C,D,E) \times P(F|D)\\
&= P(A,B,C,D,E) \times P(F|A,B,C,D,E) = P(A,B,C,D,E,F) \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

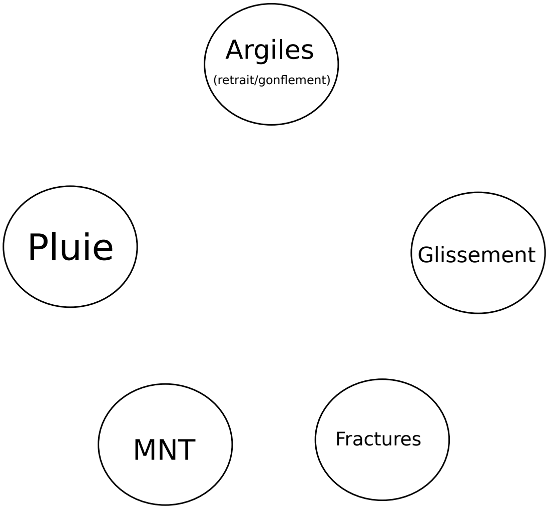
Des fractures ont été constatées sur un site (habité) à fort relief. On cherche à savoir si ces fractures peuvent être le signe précurseur d'un glissement de terrain.

Le MNT nous dit que le terrain est à risque ($p \geqslant 7^\circ$).

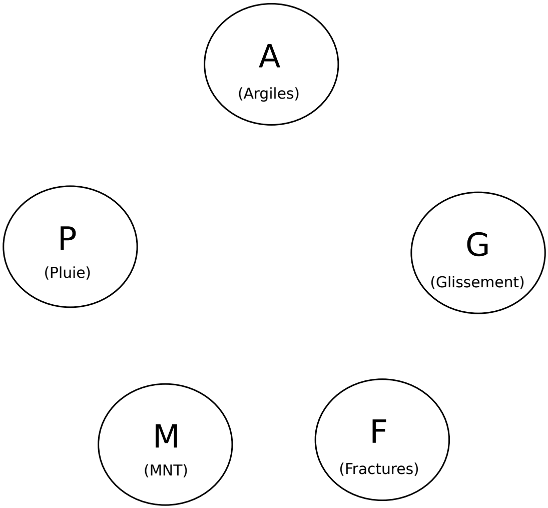
Cependant, ces fractures peuvent aussi avoir été causées par le phénomère de *retrait-gonflement des argiles*, d'autant que les mois précédents ont été témoin d'une forte pluviométrie.

Doit-on faire évacuer la zone ?

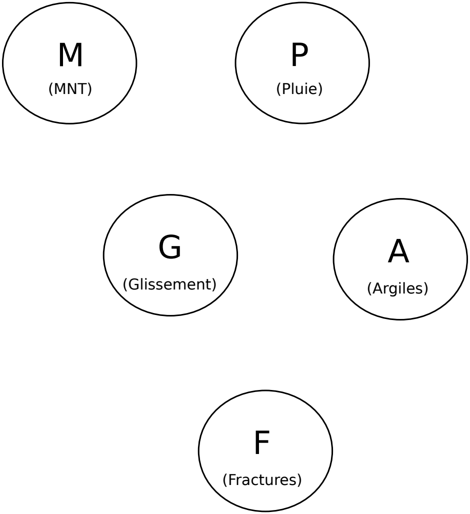
Travaux pratiques



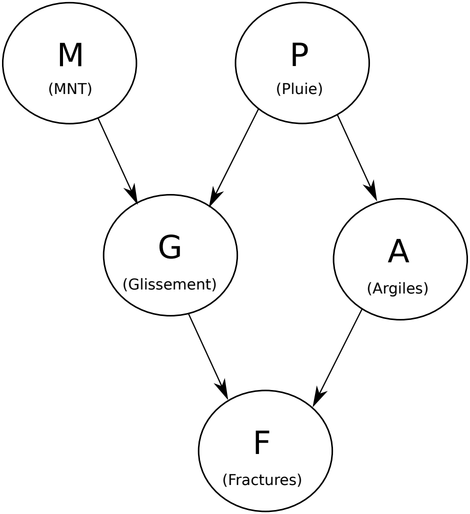
Travaux pratiques



Travaux pratiques

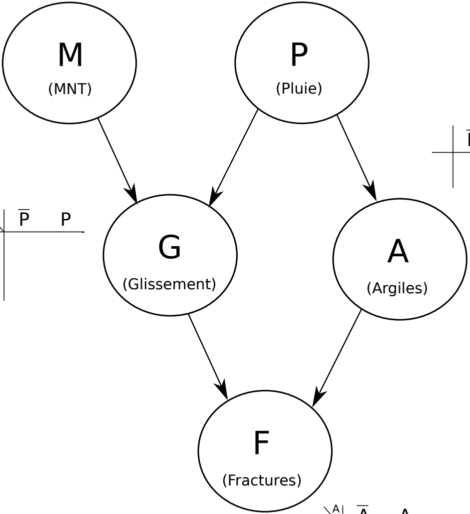


Travaux pratiques



P(M) =

P(P) =

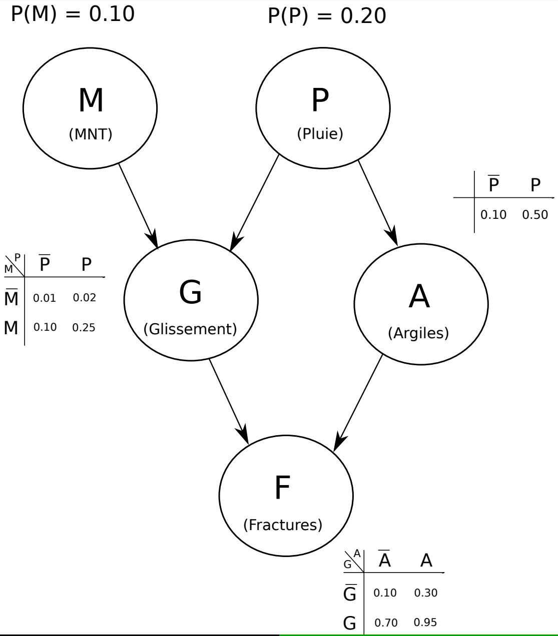


M \ P	$\overline{P}$	P
$\overline{M}$		
M		

$\overline{P}$	P

G \ A	$\overline{A}$	A
$\overline{G}$		
G		

Travaux pratiques



Loi jointe sous forme factorisée :

$$P(M, P, G, A, F) = P(M) \times P(P) \times P(G \mid M, P)$$
$$\times P(A \mid P) \times P(F \mid G, A)$$

Travaux pratiques

Loi jointe sous forme factorisée :

$$P(M, P, G, A, F) = P(M) \times P(P) \times P(G \mid M, P)$$
$$\times P(A \mid P) \times P(F \mid G, A)$$

Nombre de paramètres : $1+1+4+2+4 = 12$ (au lieu de $2^5 - 1 = 31$ dans le modèle sans indépendances).

Loi jointe sous forme factorisée :

$$P(M,P,G,A,F) = P(M) \times P(P) \times P(G \mid M,P)$$
$$\times P(A \mid P) \times P(F \mid G,A)$$

Nombre de paramètres : $1+1+4+2+4 = 12$ (au lieu de $2^5-1 = 31$ dans le modèle sans indépendances).

La résponse à la question nécessite d'évaluer :

$$P(A = 1 \mid M = 1, F = 1, P = 1)$$

Loi jointe sous forme factorisée :

$$P(M, P, G, A, F) = P(M) \times P(P) \times P(G \mid M, P)$$
$$\times P(A \mid P) \times P(F \mid G, A)$$

Nombre de paramètres : $1+1+4+2+4 = 12$ (au lieu de $2^5 - 1 = 31$ dans le modèle sans indépendances).

La résponse à la question nécessite d'évaluer :

$$P(A \mid M, F, P) = \frac{P(M, P, A, F)}{P(M, P, F)}$$
$$= \frac{\sum_g P(M, P, g, A, F)}{\sum_g \sum_a P(M, P, g, a, F)}$$

Travaux pratiques

Loi jointe sous forme factorisée :

$$P(M,P,G,A,F) = P(M) \times P(P) \times P(G \mid M,P)$$
$$\times P(A \mid P) \times P(F \mid G,A)$$

Nombre de paramètres : $1+1+4+2+4 = 12$ (au lieu de $2^5-1 = 31$ dans le modèle sans indépendances).

La résponse à la question nécessite d'évaluer :

$$P(A \mid M,F,P) = \frac{P(M,P,A,F)}{P(M,P,F)}$$

$$\frac{P(MPGAF) + P(MP\overline{G}AF)}{P(MPGAF) + P(MPG\overline{A}F) + P(MP\overline{G}AF) + P(MP\overline{G}\overline{A}F)}$$

Travaux pratiques

$$P(M,P,G,A,F) = 0.1 \times 0.2 \times 0.25 \times 0.5 \times 0.95 = \texttt{0.002375}$$

$$P(M,P,\overline{G},A,F) = 0.1 \times 0.2 \times 0.75 \times 0.5 \times 0.3 \ = \texttt{0.002250}$$

$$P(M,P,G,\overline{A},F) = 0.1 \times 0.2 \times 0.25 \times 0.5 \times 0.7 \ = \texttt{0.001750}$$

$$P(M,P,\overline{G},\overline{A},F) = 0.1 \times 0.2 \times 0.75 \times 0.5 \times 0.1 \ = \texttt{0.000750}$$

Travaux pratiques

$$P(M,P,G,A,F) = 0.1 \times 0.2 \times 0.25 \times 0.5 \times 0.95 = 0.002375$$

$$P(M,P,\overline{G},A,F) = 0.1 \times 0.2 \times 0.75 \times 0.5 \times 0.3 = 0.002250$$

$$P(M,P,G,\overline{A},F) = 0.1 \times 0.2 \times 0.25 \times 0.5 \times 0.7 = 0.001750$$

$$P(M,P,\overline{G},\overline{A},F) = 0.1 \times 0.2 \times 0.75 \times 0.5 \times 0.1 = 0.000750$$

La probabilité recherchée vaut :

$$P(A \mid M,F,P) = \frac{0.002375 + 0.002250}{0.002375 + 0.002250 + 0.001750 + 0.000750}$$

$$P(M,P,G,A,F) = 0.1 \times 0.2 \times 0.25 \times 0.5 \times 0.95 = \texttt{0.002375}$$

$$P(M,P,\overline{G},A,F) = 0.1 \times 0.2 \times 0.75 \times 0.5 \times 0.3 \ = \texttt{0.002250}$$

$$P(M,P,G,\overline{A},F) = 0.1 \times 0.2 \times 0.25 \times 0.5 \times 0.7 \ = \texttt{0.001750}$$

$$P(M,P,\overline{G},\overline{A},F) = 0.1 \times 0.2 \times 0.75 \times 0.5 \times 0.1 \ = \texttt{0.000750}$$

La probabilité recherchée vaut :

$$P(A \mid M,F,P) = \frac{0.002375 + 0.002250}{0.002375 + 0.002250 + 0.001750 + 0.000750}$$

$$= 64.9\%$$

$$P(M,P,G,A,F) = 0.1 \times 0.2 \times 0.25 \times 0.5 \times 0.95 = \texttt{0.002375}$$

$$P(M,P,\overline{G},A,F) = 0.1 \times 0.2 \times 0.75 \times 0.5 \times 0.3 = \texttt{0.002250}$$

$$P(M,P,G,\overline{A},F) = 0.1 \times 0.2 \times 0.25 \times 0.5 \times 0.7 = \texttt{0.001750}$$

$$P(M,P,\overline{G},\overline{A},F) = 0.1 \times 0.2 \times 0.75 \times 0.5 \times 0.1 = \texttt{0.000750}$$

La probabilité recherchée vaut :

$$P(A \mid M,F,P) = \frac{0.002375 + 0.002250}{0.002375 + 0.002250 + 0.001750 + 0.000750}$$

$$= 64.9\%$$

Le glissement de terrain n'est pas à exclure (35 % de chances)...