

Probabilités & Statistique

M2 IGAST

Yann MENEROUX

Contact : yann.meneroux@ign.fr

Service de Géodésie et Métrologie

Institut National de l'Information Géographique et Forestière - IGN

18 octobre - 22 octobre 2024

Statistique vs Probabilités ?

- **Statistique** : méthodologie (démarche) scientifique visant à acquérir des connaissances sur l'état d'un objet difficilement perceptible sur le plan cognitif :
 - objet **massif** (population, big data...) : résumer, synthétiser, visualiser, échantillonner, compresser...
 - objet **incertain** (observations bruitées) : moyenner, borner, encadrer, compenser...

Statistique vs Probabilités ?

- **Statistique** : méthodologie (démarche) scientifique visant à acquérir des connaissances sur l'état d'un objet difficilement perceptible sur le plan cognitif :
 - objet **massif** (population, big data...) : résumer, synthétiser, visualiser, échantillonner, compresser...
 - objet **incertain** (observations bruitées) : moyenner, borner, encadrer, compenser...
- **Probabilités** : théorie mathématique traitant de l'aléatoire, sans justification a priori (même si généralement fondée sur des besoins pratiques) et opérant dans un cadre contrôlé (information parfaite).

Statistique vs Probabilités ?

- **Statistique** : méthodologie (démarche) scientifique visant à acquérir des connaissances sur l'état d'un objet difficilement perceptible sur le plan cognitif :
 - objet **massif** (population, big data...) : résumer, synthétiser, visualiser, échantillonner, compresser...
 - objet **incertain** (observations bruitées) : moyenner, borner, encadrer, compenser...
- **Probabilités** : théorie mathématique traitant de l'aléatoire, sans justification a priori (même si généralement fondée sur des besoins pratiques) et opérant dans un cadre contrôlé (information parfaite).
- En général, la statistique cherche à **décrire** des états présents ou passés. La théorie des probabilités cherche à **prédir** des évènements futurs.

Naissance au XVIIe ?

Naissance au XVIIe ?



Siège de Platée (-430 av J.C.)

Naissance au XVIIe ?



Siège de Platée (-430 av J.C.)

Naissance au XVIIe ?



Thucydide



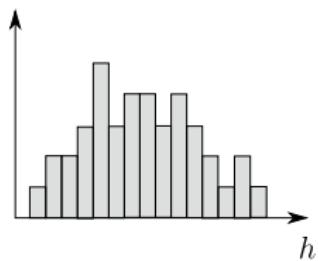
Siège de Platée (-430 av J.C.)

Naissance au XVIIe ?



Siège de Platée (-430 av J.C.)

Thucydide

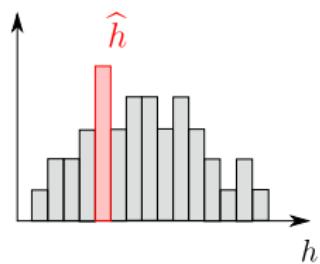


Naissance au XVIIe ?



Siège de Platée (-430 av J.C.)

Thucydide



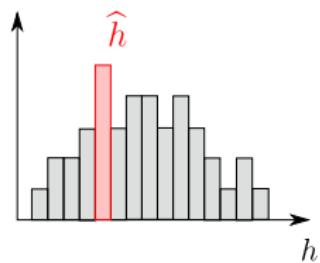
Naissance au XVIIe ?



Siège de Platée (-430 av J.C.)

$$L(h, x)$$

Thucydide



Naissance au XVIIe ?

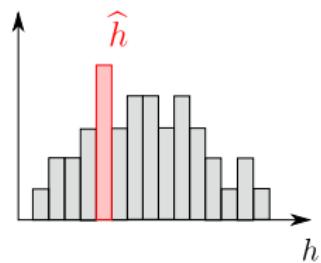


Thucydide



Siège de Platée (-430 av J.C.)

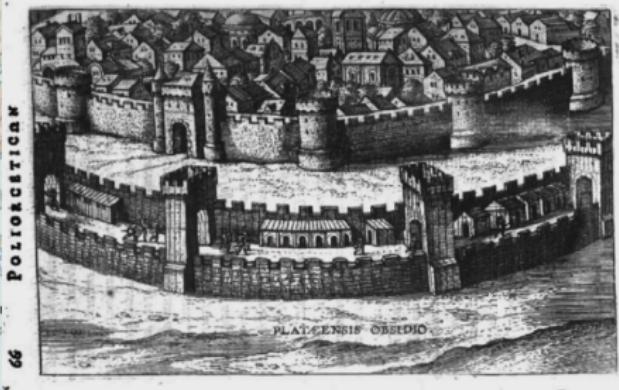
$$L(h, x) = 1 - \mathbf{1}_h(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = h \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$



Naissance au XVIIe ?



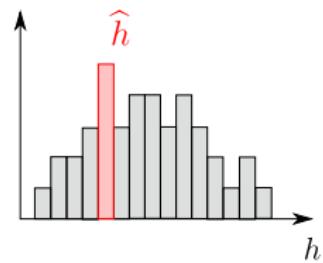
Thucydide



Siège de Platée (-430 av J.C.)

$$L(h, x) = 1 - \mathbf{1}_h(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = h \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$\hat{h} = \operatorname{argmin}_h \mathbb{E}[L(h, X)]$$

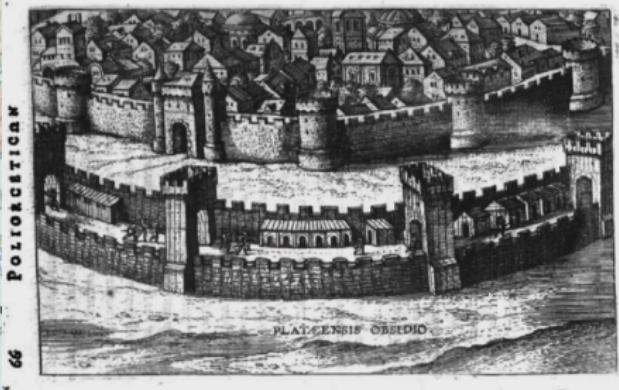


Naissance au XVIIe ?



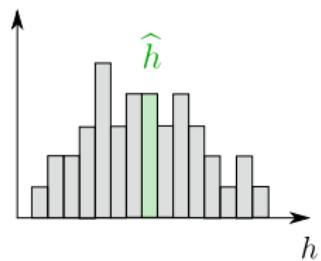
Siège de Platée (-430 av J.C.)

Thucydide



$$L(h, x) = |h - x| \quad (\text{Norme L1})$$

$$\hat{h} = \operatorname{argmin}_h \mathbb{E}[L(h, X)]$$



Naissance au XVIIe ?



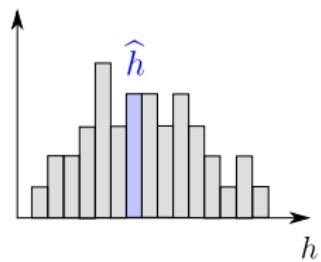
Thucydide



Siège de Platée (-430 av J.C.)

$$L(h, x) = (h - x)^2 \quad (\text{Norme L2})$$

$$\hat{h} = \operatorname{argmin}_h \mathbb{E}[L(h, X)]$$



Naissance des probabilités

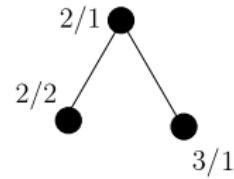
Correspondance de Pascal et Fermat (1654) : *Deux joueurs déposent chacun une mise m pour jouer une partie en 3 manches, mais décident de se quitter après deux victoires de l'un et une victoire de l'autre. Comment devraient-ils se répartir la mise ?*



2/1 ●

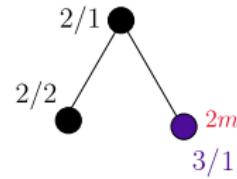
Naissance des probabilités

Correspondance de Pascal et Fermat (1654) : Deux joueurs déposent chacun une mise m pour jouer une partie en 3 manches, mais décident de se quitter après deux victoires de l'un et une victoire de l'autre. Comment devraient-ils se répartir la mise ?



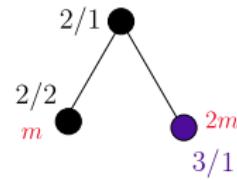
Naissance des probabilités

Correspondance de Pascal et Fermat (1654) : Deux joueurs déposent chacun une mise m pour jouer une partie en 3 manches, mais décident de se quitter après deux victoires de l'un et une victoire de l'autre. Comment devraient-ils se répartir la mise ?



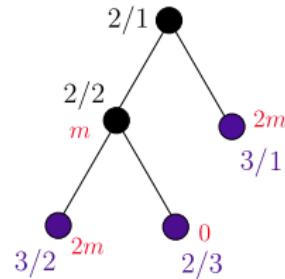
Naissance des probabilités

Correspondance de Pascal et Fermat (1654) : Deux joueurs déposent chacun une mise m pour jouer une partie en 3 manches, mais décident de se quitter après deux victoires de l'un et une victoire de l'autre. Comment devraient-ils se répartir la mise ?



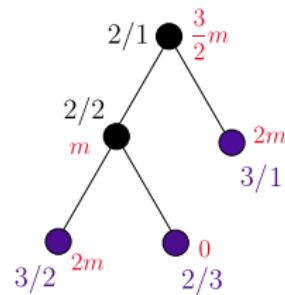
Naissance des probabilités

Correspondance de Pascal et Fermat (1654) : Deux joueurs déposent chacun une mise m pour jouer une partie en 3 manches, mais décident de se quitter après deux victoires de l'un et une victoire de l'autre. Comment devraient-ils se répartir la mise ?



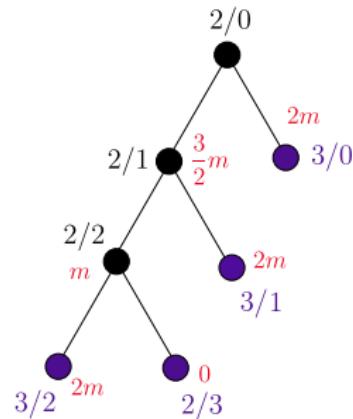
Naissance des probabilités

Correspondance de Pascal et Fermat (1654) : Deux joueurs déposent chacun une mise m pour jouer une partie en 3 manches, mais décident de se quitter après deux victoires de l'un et une victoire de l'autre. Comment devraient-ils se répartir la mise ?



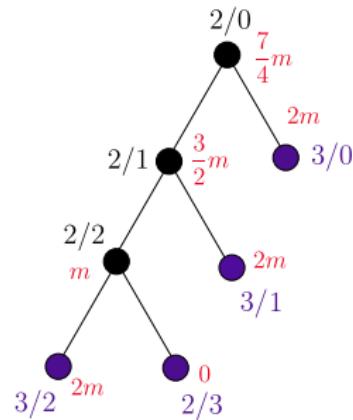
Naissance des probabilités

Correspondance de Pascal et Fermat (1654) : Deux joueurs déposent chacun une mise m pour jouer une partie en 3 manches, mais décident de se quitter après deux victoires de l'un et une victoire de l'autre. Comment devraient-ils se répartir la mise ?



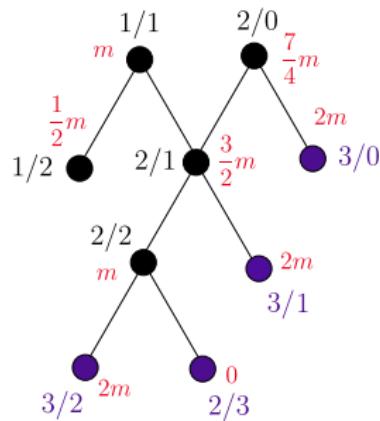
Naissance des probabilités

Correspondance de Pascal et Fermat (1654) : Deux joueurs déposent chacun une mise m pour jouer une partie en 3 manches, mais décident de se quitter après deux victoires de l'un et une victoire de l'autre. Comment devraient-ils se répartir la mise ?



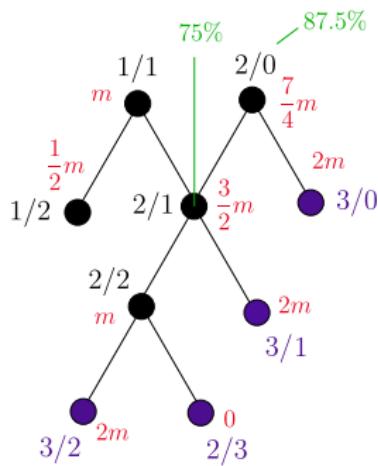
Naissance des probabilités

Correspondance de Pascal et Fermat (1654) : Deux joueurs déposent chacun une mise m pour jouer une partie en 3 manches, mais décident de se quitter après deux victoires de l'un et une victoire de l'autre. Comment devraient-ils se répartir la mise ?



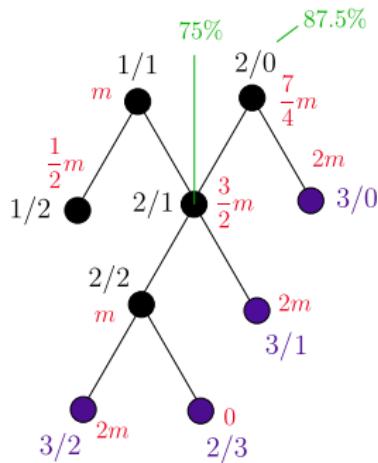
Naissance des probabilités

Correspondance de Pascal et Fermat (1654) : Deux joueurs déposent chacun une mise m pour jouer une partie en 3 manches, mais décident de se quitter après deux victoires de l'un et une victoire de l'autre. Comment devraient-ils se répartir la mise ?



Naissance des probabilités

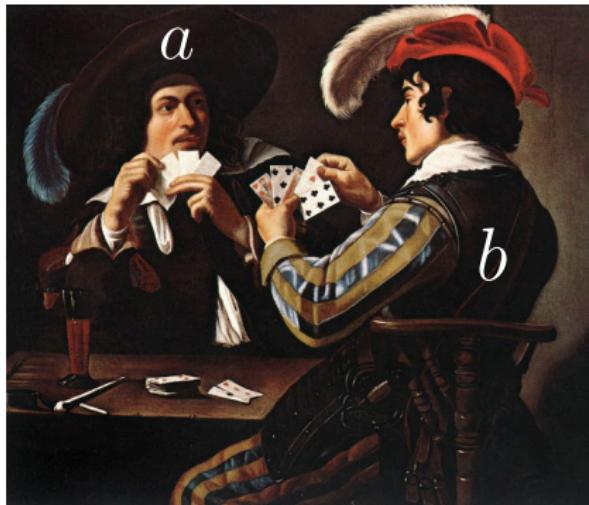
Correspondance de Pascal et Fermat (1654) : Deux joueurs déposent chacun une mise m pour jouer une partie en 3 manches, mais décident de se quitter après deux victoires de l'un et une victoire de l'autre. Comment devraient-ils se répartir la mise ?



$$G_n^p = \frac{1}{2}G_{n+1}^p + \frac{1}{2}G_{n+1}^{p+1}$$

Naissance des probabilités

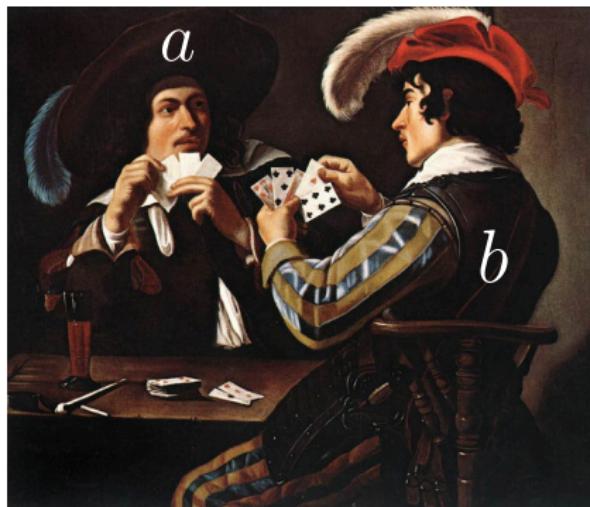
Correspondance de Pascal et Fermat (1654) : *Deux joueurs déposent chacun une mise m pour jouer une partie en 3 manches, mais décident de se quitter après deux victoires de l'un et une victoire de l'autre. Comment devraient-ils se répartir la mise ?*



$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^k b^{n-k}$$

Naissance des probabilités

Correspondance de Pascal et Fermat (1654) : *Deux joueurs déposent chacun une mise m pour jouer une partie en 3 manches, mais décident de se quitter après deux victoires de l'un et une victoire de l'autre. Comment devraient-ils se répartir la mise ?*

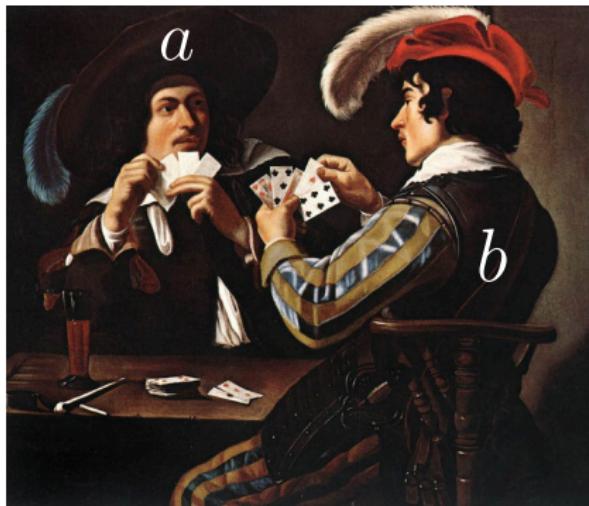


$$2/0 \Rightarrow (1 + 3) \text{ parties restantes}$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

Naissance des probabilités

Correspondance de Pascal et Fermat (1654) : Deux joueurs déposent chacun une mise m pour jouer une partie en 3 manches, mais décident de se quitter après deux victoires de l'un et une victoire de l'autre. Comment devraient-ils se répartir la mise ?



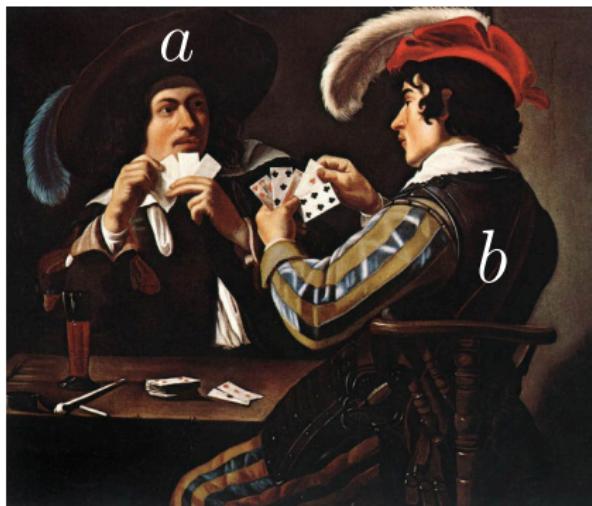
$$2/0 \Rightarrow (1 + 3) \text{ parties restantes}$$
$$(a + b)^3 = \overline{a^3} + 3\overline{a^2b} + 3\overline{ab^2} + \overline{b^3}$$

\swarrow \downarrow \searrow

$7/8$

Naissance des probabilités

Correspondance de Pascal et Fermat (1654) : Deux joueurs déposent chacun une mise m pour jouer une partie en 3 manches, mais décident de se quitter après deux victoires de l'un et une victoire de l'autre. Comment devraient-ils se répartir la mise ?



$2/0 \Rightarrow (1 + 3)$ parties restantes

$$(a+b)^3 = \overline{a^3} + 3\overline{a^2b} + 3\overline{ab^2} + \overline{b^3}$$

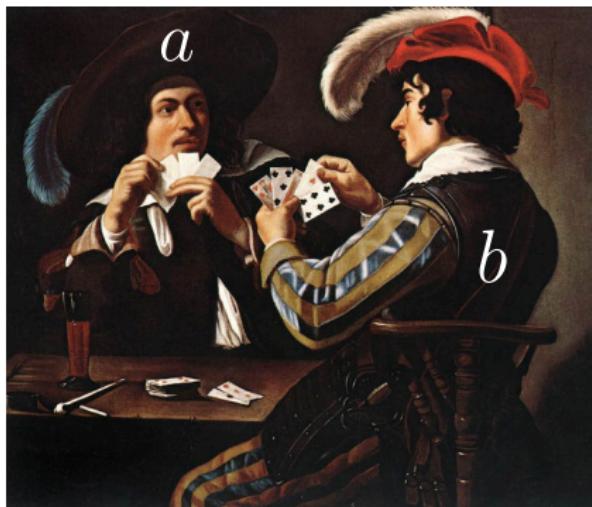
\swarrow \downarrow \searrow

$7/8$

	1	1	1	→
2	1	2		
3	1			
4				↓

Naissance des probabilités

Correspondance de Pascal et Fermat (1654) : Deux joueurs déposent chacun une mise m pour jouer une partie en 3 manches, mais décident de se quitter après deux victoires de l'un et une victoire de l'autre. Comment devraient-ils se répartir la mise ?



$2/0 \Rightarrow (1 + 3)$ parties restantes

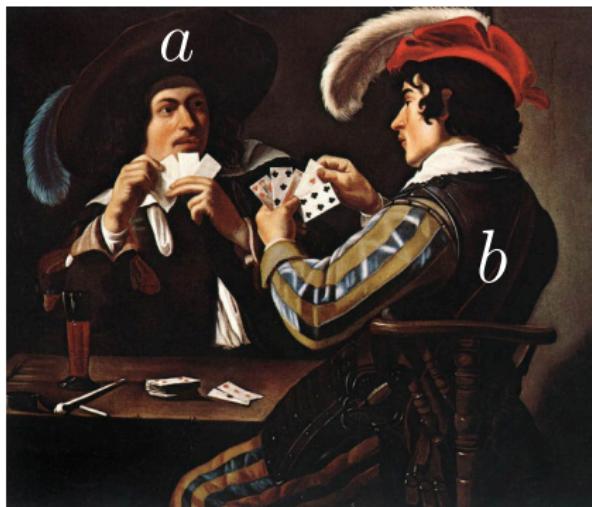
$$(a+b)^3 = \overline{a^3} + 3\overline{a^2b} + 3\overline{ab^2} + \overline{b^3}$$

\swarrow \downarrow \searrow
 $7/8$

	1	1	1	1
2	1	2	3	
3	1	3		
4	1			
5				

Naissance des probabilités

Correspondance de Pascal et Fermat (1654) : Deux joueurs déposent chacun une mise m pour jouer une partie en 3 manches, mais décident de se quitter après deux victoires de l'un et une victoire de l'autre. Comment devraient-ils se répartir la mise ?



$2/0 \Rightarrow (1 + 3)$ parties restantes

$$(a+b)^3 = \overline{a^3} + 3\overline{a^2b} + 3\overline{ab^2} + \overline{b^3}$$

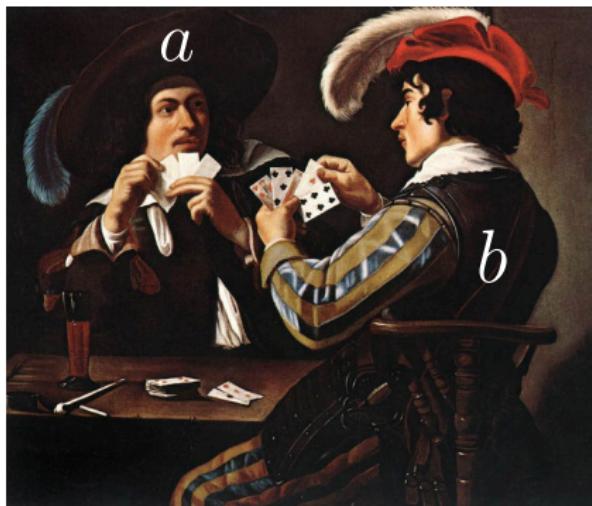
\swarrow \downarrow \searrow

$7/8$

	1	1	1	1	1
2	1	2	3	4	
3	1	3	6		
4	1	4			
5	1				
6					

Naissance des probabilités

Correspondance de Pascal et Fermat (1654) : Deux joueurs déposent chacun une mise m pour jouer une partie en 3 manches, mais décident de se quitter après deux victoires de l'un et une victoire de l'autre. Comment devraient-ils se répartir la mise ?



$$2/0 \Rightarrow (1+3) \text{ parties restantes}$$

$$(a+b)^3 = \overline{a^3} + 3\overline{a^2b} + 3\overline{ab^2} + \overline{b^3}$$

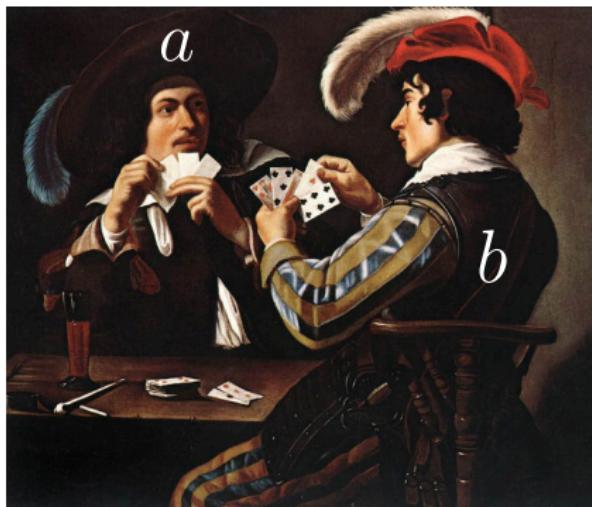
\swarrow \downarrow \searrow

$7/8$

1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	3	4	5	6	7	
3	1	3	6	10	15	21		
4	1	4	10	20	35			
5	1	5	15	35				
6	1	6	21					
7		7						
8	1							

Naissance des probabilités

Correspondance de Pascal et Fermat (1654) : Deux joueurs déposent chacun une mise m pour jouer une partie en 3 manches, mais décident de se quitter après deux victoires de l'un et une victoire de l'autre. Comment devraient-ils se répartir la mise ?



$$2/0 \Rightarrow (1+3) \text{ parties restantes}$$

$$(a+b)^3 = \cancel{a^3} + 3\cancel{a^2b} + 3ab^2 + \cancel{b^3}$$

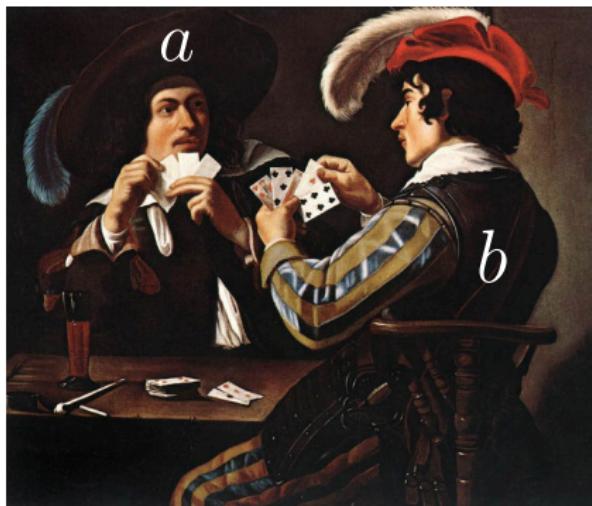
\swarrow \downarrow \searrow

$7/8$

1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	3	4	5	6	7	
3	1	3	6	10	15	21		
4	1	4	10	20	35			
5	1	5	15	35				
6	1	6	21					
7	1	7						
8	1							

Naissance des probabilités

Correspondance de Pascal et Fermat (1654) : Deux joueurs déposent chacun une mise m pour jouer une partie en 3 manches, mais décident de se quitter après deux victoires de l'un et une victoire de l'autre. Comment devraient-ils se répartir la mise ?



$$2/0 \Rightarrow (1+3) \text{ parties restantes}$$

$$(a+b)^3 = \overline{a^3} + 3\overline{a^2b} + 3\overline{ab^2} + \overline{b^3}$$

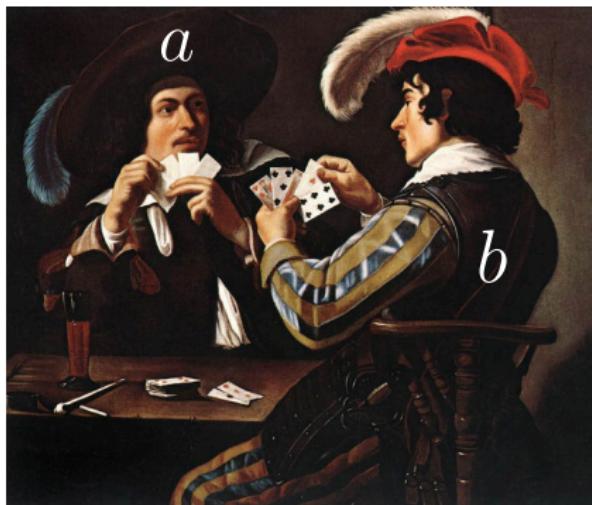
\swarrow \downarrow \searrow

$7/8$

1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	3	4	5	6	7	
3	1	3	6	10	15	21		
4	1	4	10	20	35			
5	1	5	15	35				
6	1	6	21					
7		7						
8	1							

Naissance des probabilités

Correspondance de Pascal et Fermat (1654) : Deux joueurs déposent chacun une mise m pour jouer une partie en 3 manches, mais décident de se quitter après deux victoires de l'un et une victoire de l'autre. Comment devraient-ils se répartir la mise ?



$2/0 \Rightarrow (1 + 3)$ parties restantes

$$(a+b)^3 = \overline{a^3} + 3\overline{a^2b} + 3\overline{ab^2} + \overline{b^3}$$

\swarrow \downarrow \searrow

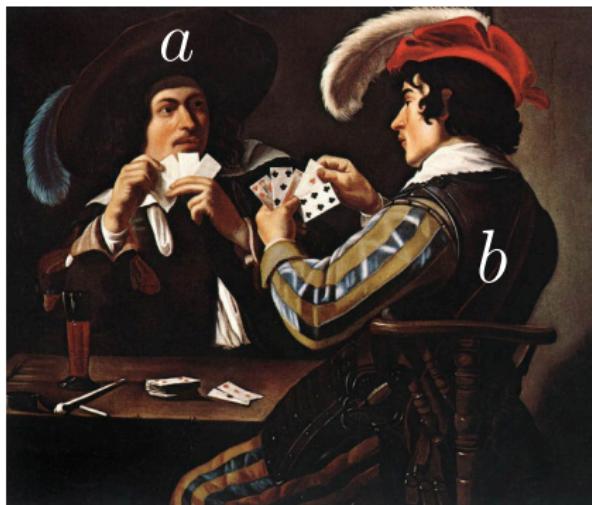
$7/8$

1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	3	4	5	6	7	
3	1	3	6	10	15	21		
4	1	4	10	20	35			
5	1	5	15	35				
6	1	6	21					
	1	7						
8	1							

$8/5$
10 manches gagnantes

Naissance des probabilités

Correspondance de Pascal et Fermat (1654) : Deux joueurs déposent chacun une mise m pour jouer une partie en 3 manches, mais décident de se quitter après deux victoires de l'un et une victoire de l'autre. Comment devraient-ils se répartir la mise ?



$2/0 \Rightarrow (1+3)$ parties restantes

$$(a+b)^3 = \overline{a^3} + 3\overline{a^2b} + 3\overline{ab^2} + \overline{b^3}$$

\swarrow \downarrow \searrow

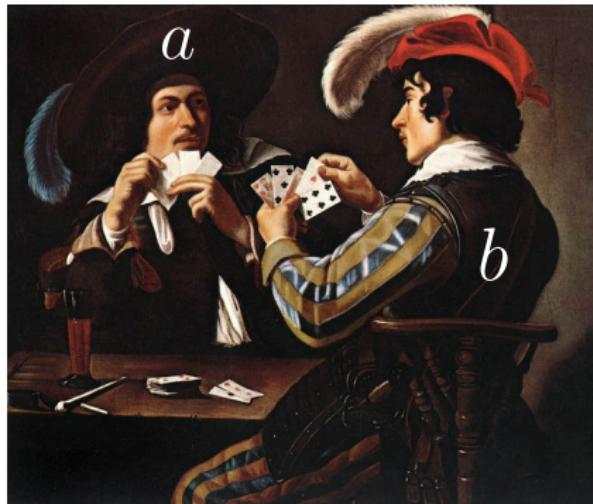
$7/8$

1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	3	4	5	6	7	
3	1	3	6	10	15	21		
4	1	4	10	20	35			
5	1	5	15	35				
6	1	6	21					
7	1	7						
8	1							

8/5
10 manches gagnantes

Naissance des probabilités

Correspondance de Pascal et Fermat (1654) : Deux joueurs déposent chacun une mise m pour jouer une partie en 3 manches, mais décident de se quitter après deux victoires de l'un et une victoire de l'autre. Comment devraient-ils se répartir la mise ?



$$2/0 \Rightarrow (1+3) \text{ parties restantes}$$

$$(a+b)^3 = \overline{a^3} + 3\overline{a^2b} + 3\overline{ab^2} + \overline{b^3}$$

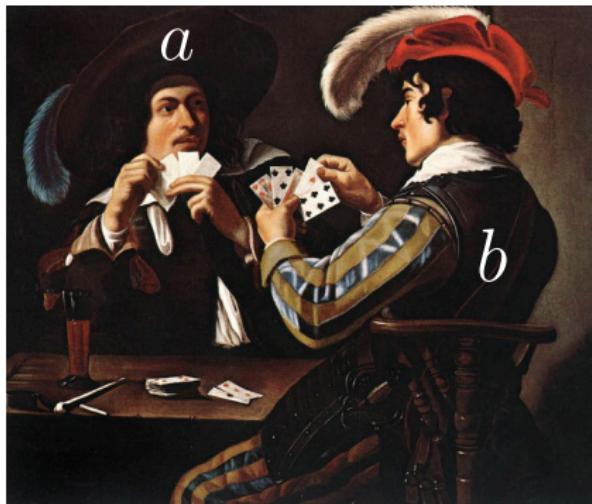
\swarrow \downarrow \searrow
 $7/8$

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	3	4	5	6	7					
3	1	3	6	10	15	21						
4	1	4	10	20	35							
5	1	5	15	35								
6	1	6	21									
7	1	7										
8	1											

8/5
10 manches gagnantes

Naissance des probabilités

Correspondance de Pascal et Fermat (1654) : Deux joueurs déposent chacun une mise m pour jouer une partie en 3 manches, mais décident de se quitter après deux victoires de l'un et une victoire de l'autre. Comment devraient-ils se répartir la mise ?



$$2/0 \Rightarrow (1+3) \text{ parties restantes}$$

$$(a+b)^3 = \overline{a^3} + 3\overline{a^2b} + 3\overline{ab^2} + \overline{b^3}$$

7/8

1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	3	4	5	6	7	
3	1	3	6	10	15	21		
4	1	4	10	20	35			
5	1	5	15	35				
6	1	6	21					
7	1	7						
8	1							

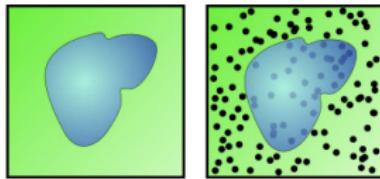
8/5
10 manches gagnantes
57/64 ≈ 89%

Naissance des probabilités

La géométrie du hasard (Pascal, 1662)

Naissance des probabilités

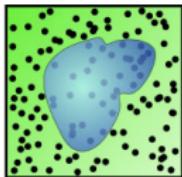
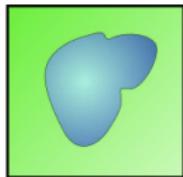
La géométrie du hasard (Pascal, 1662)



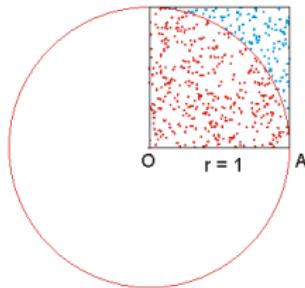
Méthodes de Monte-Carlo

Naissance des probabilités

La géométrie du hasard (Pascal, 1662)



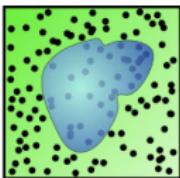
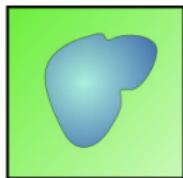
Méthodes de Monte-Carlo



$$\frac{A_d}{A_c} = \frac{\pi r^2}{(2r)^2} \Rightarrow \pi = 4 \times \mathbb{P}(\bullet) \approx 4 \times \frac{N_\bullet}{N_\bullet}$$

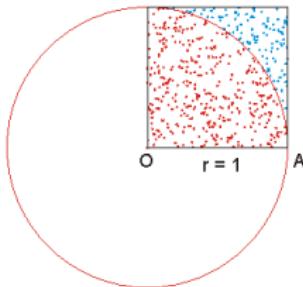
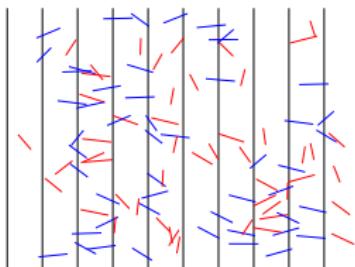
Naissance des probabilités

La géométrie du hasard (Pascal, 1662)



Méthodes de Monte-Carlo

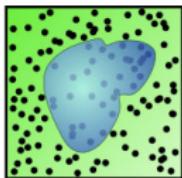
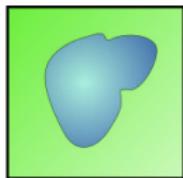
Aiguille de Buffon (1733)



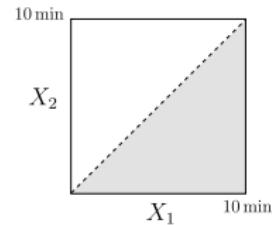
$$\frac{A_d}{A_c} = \frac{\pi r^2}{(2r)^2} \Rightarrow \pi = 4 \times \mathbb{P}(\bullet) \approx 4 \times \frac{N_\bullet}{N_\bullet}$$

Naissance des probabilités

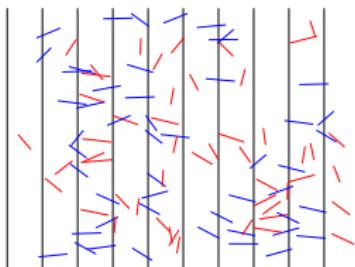
La géométrie du hasard (Pascal, 1662)



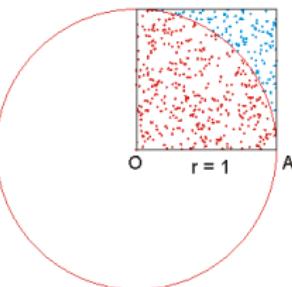
Méthodes de Monte-Carlo



Aiguille de Buffon (1733)

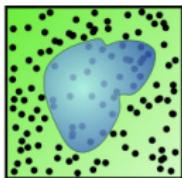
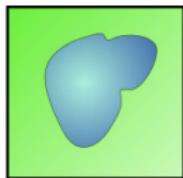


$$\frac{A_d}{A_c} = \frac{\pi r^2}{(2r)^2} \Rightarrow \pi = 4 \times \mathbb{P}(\bullet) \approx 4 \times \frac{N_\bullet}{N_\bullet}$$



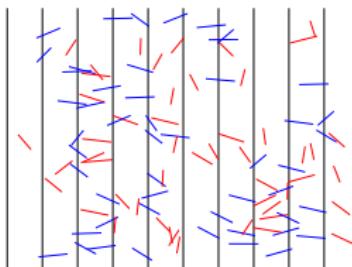
Naissance des probabilités

La géométrie du hasard (Pascal, 1662)

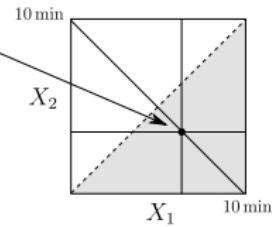
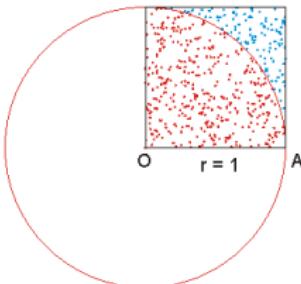


Méthodes de Monte-Carlo

Aiguille de Buffon (1733)

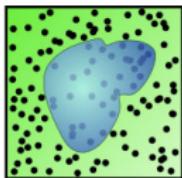
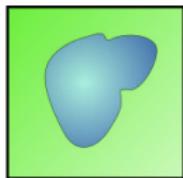


$$\frac{A_d}{A_c} = \frac{\pi r^2}{(2r)^2} \Rightarrow \pi = 4 \times \mathbb{P}(\bullet) \approx 4 \times \frac{N_\bullet}{N_\bullet}$$



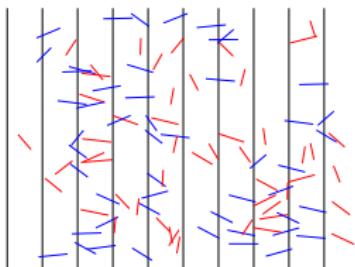
Naissance des probabilités

La géométrie du hasard (Pascal, 1662)

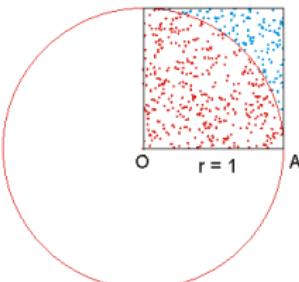


Méthodes de Monte-Carlo

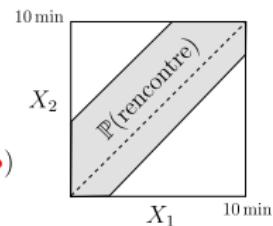
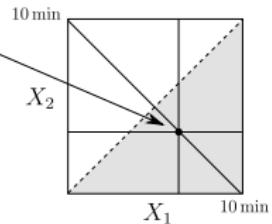
Aiguille de Buffon (1733)



$$\frac{A_d}{A_c} = \frac{\pi r^2}{(2r)^2} \Rightarrow \pi = 4 \times \mathbb{P}(\bullet) \approx 4 \times \frac{N_\bullet}{N_\bullet}$$



$$\mathbb{E}[\min(X_1, X_2)]$$



Naissance des probabilités

- Probabilisme (XVI^e siècle)
- Pas d'utilisation en dehors des jeux



Naissance des probabilités

- Probabilisme (XVI^e siècle)
- Pas d'utilisation en dehors des jeux
- Leibniz : outil de connaissance et de raisonnement sur le réel. La Statistique devient un instrument scientifique (1677)



Let us calculate Sir

Preface to the General Science (1677)

Naissance des probabilités

- Probabilisme (XVI^e siècle)
- Pas d'utilisation en dehors des jeux
- Leibniz : outil de connaissance et de raisonnement sur le réel. La Statistique devient un instrument scientifique (1677)
- Paradoxe de Saint-Petersbourg (1713)



Let us calculate Sir
Preface to the General Science (1677)

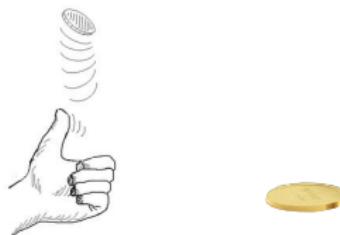


Naissance des probabilités

- Probabilisme (XVI^e siècle)
- Pas d'utilisation en dehors des jeux
- Leibniz : outil de connaissance et de raisonnement sur le réel. La Statistique devient un instrument scientifique (1677)
- Paradoxe de Saint-Petersbourg (1713)



Let us calculate Sir
Preface to the General Science (1677)

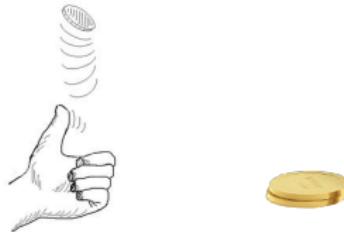


Naissance des probabilités

- Probabilisme (XVI^e siècle)
- Pas d'utilisation en dehors des jeux
- Leibniz : outil de connaissance et de raisonnement sur le réel. La Statistique devient un instrument scientifique (1677)
- Paradoxe de Saint-Petersbourg (1713)



Let us calculate Sir
Preface to the General Science (1677)

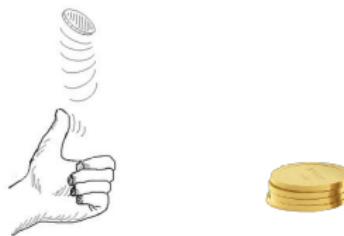


Naissance des probabilités

- Probabilisme (XVI^e siècle)
- Pas d'utilisation en dehors des jeux
- Leibniz : outil de connaissance et de raisonnement sur le réel. La Statistique devient un instrument scientifique (1677)
- Paradoxe de Saint-Petersbourg (1713)



Let us calculate Sir
Preface to the General Science (1677)



Naissance des probabilités

- Probabilisme (XVI^e siècle)
- Pas d'utilisation en dehors des jeux
- Leibniz : outil de connaissance et de raisonnement sur le réel. La Statistique devient un instrument scientifique (1677)
- Paradoxe de Saint-Petersbourg (1713)



Let us calculate Sir
Preface to the General Science (1677)



Naissance des probabilités

- Probabilisme (XVI^e siècle)
- Pas d'utilisation en dehors des jeux
- Leibniz : outil de connaissance et de raisonnement sur le réel. La Statistique devient un instrument scientifique (1677)
- Paradoxe de Saint-Petersbourg (1713)



Let us calculate Sir
Preface to the General Science (1677)

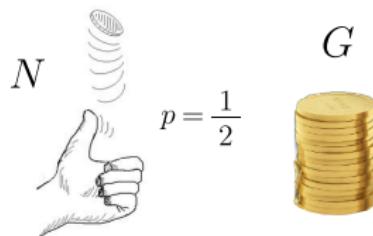


Naissance des probabilités

- Probabilisme (XVI^e siècle)
- Pas d'utilisation en dehors des jeux
- Leibniz : outil de connaissance et de raisonnement sur le réel. La Statistique devient un instrument scientifique (1677)
- Paradoxe de Saint-Petersbourg (1713)



Let us calculate Sir
Preface to the General Science (1677)



Naissance des probabilités

- Probabilisme (XVI^e siècle)
- Pas d'utilisation en dehors des jeux
- Leibniz : outil de connaissance et de raisonnement sur le réel. La Statistique devient un instrument scientifique (1677)
- Paradoxe de Saint-Petersbourg (1713)



Let us calculate Sir
Preface to the General Science (1677)

$$N \quad G \quad \mathbb{P}(N = n) = p^{n-1}(1-p) = \frac{1}{2^n}$$

A diagram illustrating the St. Petersburg paradox. On the left, a hand holds a single coin labeled N . In the center, a stack of coins is labeled G . To the right is the probability formula for the event $N = n$.

$$p = \frac{1}{2}$$

Naissance des probabilités

- Probabilisme (XVI^e siècle)
- Pas d'utilisation en dehors des jeux
- Leibniz : outil de connaissance et de raisonnement sur le réel. La Statistique devient un instrument scientifique (1677)
- Paradoxe de Saint-Petersbourg (1713)



Let us calculate Sir

Preface to the General Science (1677)



$$p = \frac{1}{2}$$



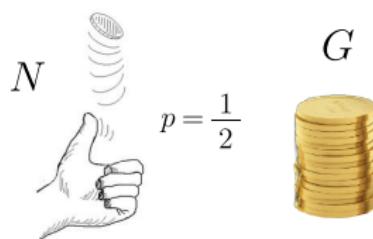
$$\mathbb{P}(N = n) = \underbrace{p^{n-1}(1-p)}_{\text{Loi géométrique}} = \frac{1}{2^n}$$

Naissance des probabilités

- Probabilisme (XVI^e siècle)
- Pas d'utilisation en dehors des jeux
- Leibniz : outil de connaissance et de raisonnement sur le réel. La Statistique devient un instrument scientifique (1677)
- Paradoxe de Saint-Petersbourg (1713)



Let us calculate Sir
Preface to the General Science (1677)



$$p = \frac{1}{2}$$

$$\mathbb{P}(N = n) = \underbrace{p^{n-1}(1-p)}_{\text{Loi géométrique}} = \frac{1}{2^n} \rightarrow G = 2^{n-1}$$

Naissance des probabilités

- Probabilisme (XVI^e siècle)
- Pas d'utilisation en dehors des jeux
- Leibniz : outil de connaissance et de raisonnement sur le réel. La Statistique devient un instrument scientifique (1677)
- Paradoxe de Saint-Petersbourg (1713)



Let us calculate Sir
Preface to the General Science (1677)



$$p = \frac{1}{2}$$



$$\mathbb{P}(N = n) = \underbrace{p^{n-1}(1-p)}_{\text{Loi géométrique}} = \frac{1}{2^n} \rightarrow G = 2^{n-1}$$

$$\mathbb{E}[G] = \sum_n 2^{n-1} \mathbb{P}(N = n)$$

Naissance des probabilités

- Probabilisme (XVI^e siècle)
- Pas d'utilisation en dehors des jeux
- Leibniz : outil de connaissance et de raisonnement sur le réel. La Statistique devient un instrument scientifique (1677)
- Paradoxe de Saint-Petersbourg (1713)



Let us calculate Sir
Preface to the General Science (1677)



$$p = \frac{1}{2}$$



$$\mathbb{P}(N = n) = \underbrace{p^{n-1}(1-p)}_{\text{Loi géométrique}} = \frac{1}{2^n} \rightarrow G = 2^{n-1}$$

$$\mathbb{E}[G] = \sum_n 2^{n-1} \mathbb{P}(N = n) = \sum_n \frac{1}{2}$$

Naissance des probabilités

- Probabilisme (XVI^e siècle)
- Pas d'utilisation en dehors des jeux
- Leibniz : outil de connaissance et de raisonnement sur le réel. La Statistique devient un instrument scientifique (1677)
- Paradoxe de Saint-Petersbourg (1713)



Let us calculate Sir
Preface to the General Science (1677)



$$p = \frac{1}{2}$$



$$\mathbb{P}(N = n) = \underbrace{p^{n-1}(1-p)}_{\text{Loi géométrique}} = \frac{1}{2^n} \rightarrow G = 2^{n-1}$$

$$\mathbb{E}[G] = \sum_n 2^{n-1} \mathbb{P}(N = n) = \sum_n \frac{1}{2} = \infty$$

Naissance des probabilités

- Probabilisme (XVI^e siècle)
- Pas d'utilisation en dehors des jeux
- Leibniz : outil de connaissance et de raisonnement sur le réel. La Statistique devient un instrument scientifique (1677)
- Paradoxe de Saint-Petersbourg (1713)



Let us calculate Sir
Preface to the General Science (1677)



$$p = \frac{1}{2}$$



$$\mathbb{P}(N = n) = \underbrace{p^{n-1}(1-p)}_{\text{Loi géométrique}} = \frac{1}{2^n} \rightarrow G = 2^{n-1}$$

$$\mathbb{E}[G] = \sum_n 2^{n-1} \mathbb{P}(N = n) = \sum_n \frac{1}{2} = \infty$$

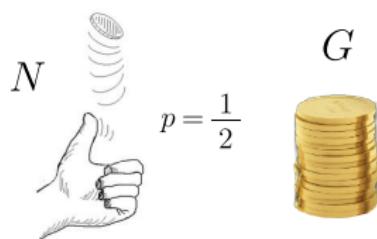
- Bayes : théorie des causes (1763)

Naissance des probabilités

- Probabilisme (XVI^e siècle)
- Pas d'utilisation en dehors des jeux
- Leibniz : outil de connaissance et de raisonnement sur le réel. La Statistique devient un instrument scientifique (1677)
- Paradoxe de Saint-Petersbourg (1713)



Let us calculate Sir
Preface to the General Science (1677)



$$\mathbb{P}(N = n) = \underbrace{p^{n-1}(1-p)}_{\text{Loi géométrique}} = \frac{1}{2^n} \rightarrow G = 2^{n-1}$$

$$\mathbb{E}[G] = \sum_n 2^{n-1} \mathbb{P}(N = n) = \sum_n \frac{1}{2} = \infty$$

- Bayes : théorie des causes (1763)
- Fin XVIII^e : *Arithmétique politique* (démographie, tables de mortalité, etc)

Naissance des probabilités

→ Probabilisme (XVI^e siècle)

Autorité

→ Pas d'utilisation en dehors des jeux

Justice,
équité



→ Leibniz : outil de connaissance et de raisonnement
sur le réel. La Statistique devient un instrument scientifique (1677)

→ Paradoxe de Saint-Petersbourg (1713)

Let us calculate Sir

Preface to the General Science (1677)



$$p = \frac{1}{2}$$



$$\mathbb{P}(N = n) = \underbrace{p^{n-1}(1-p)}_{\text{Loi géométrique}} = \frac{1}{2^n} \rightarrow G = 2^{n-1}$$

$$\mathbb{E}[G] = \sum_n 2^{n-1} \mathbb{P}(N = n) = \sum_n \frac{1}{2} = \infty$$

→ Bayes : théorie des causes (1763)

Universalité

Légitimité

→ Fin XVIII^e : *Arithmétique politique* (démographie, tables de mortalité, etc)

Loi des grands nombres. Si une expérience se réalise favorablement avec une probabilité $p = \frac{r}{t}$, alors pour tout indice de confiance $c \in [0, 1[$ arbitrairement proche de 1, il existe un nombre n de tirages tel que, avec une probabilité c , la statistique empirique $\frac{X}{n}$ est comprise entre $\frac{r-1}{t}$ et $\frac{r+1}{t}$.

Bernoulli (1623-1789) - (*Ars Conjectandi*, 1713)

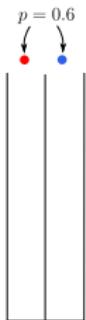
Exemple. Si une expérience se réalise favorablement avec une probabilité $p = 0.6$, pour un nombre $n > 25550$ de tirages :

$$\mathbb{P}\left(0.58 \leq \frac{X}{n} \leq 0.62\right) > \frac{1000}{1001}$$

Bernoulli (1623-1789) - (*Ars Conjectandi*, 1713)

Exemple. Si une expérience se réalise favorablement avec une probabilité $p = 0.6$, pour un nombre $n > 25550$ de tirages :

$$\mathbb{P}\left(0.58 \leq \frac{X}{n} \leq 0.62\right) > \frac{1000}{1001}$$



Bernoulli (1623-1789) - (*Ars Conjectandi*, 1713)

Exemple. Si une expérience se réalise favorablement avec une probabilité $p = 0.6$, pour un nombre $n > 25550$ de tirages :

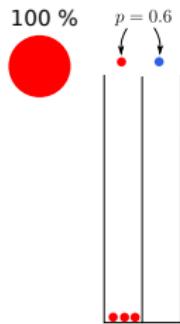
$$\mathbb{P}\left(0.58 \leq \frac{X}{n} \leq 0.62\right) > \frac{1000}{1001}$$



Bernoulli (1623-1789) - (*Ars Conjectandi*, 1713)

Exemple. Si une expérience se réalise favorablement avec une probabilité $p = 0.6$, pour un nombre $n > 25550$ de tirages :

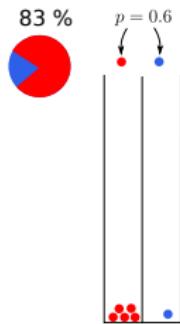
$$\mathbb{P}\left(0.58 \leq \frac{X}{n} \leq 0.62\right) > \frac{1000}{1001}$$



Bernoulli (1623-1789) - (*Ars Conjectandi*, 1713)

Exemple. Si une expérience se réalise favorablement avec une probabilité $p = 0.6$, pour un nombre $n > 25550$ de tirages :

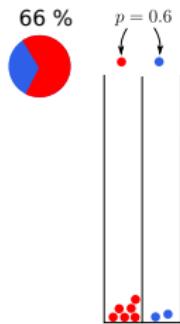
$$\mathbb{P}\left(0.58 \leq \frac{X}{n} \leq 0.62\right) > \frac{1000}{1001}$$



Bernoulli (1623-1789) - (*Ars Conjectandi*, 1713)

Exemple. Si une expérience se réalise favorablement avec une probabilité $p = 0.6$, pour un nombre $n > 25550$ de tirages :

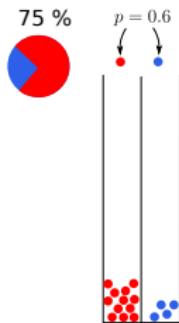
$$\mathbb{P}\left(0.58 \leq \frac{X}{n} \leq 0.62\right) > \frac{1000}{1001}$$



Bernoulli (1623-1789) - (*Ars Conjectandi*, 1713)

Exemple. Si une expérience se réalise favorablement avec une probabilité $p = 0.6$, pour un nombre $n > 25550$ de tirages :

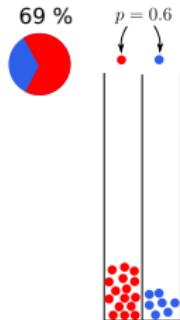
$$\mathbb{P}\left(0.58 \leqslant \frac{X}{n} \leqslant 0.62\right) > \frac{1000}{1001}$$



Bernoulli (1623-1789) - (*Ars Conjectandi*, 1713)

Exemple. Si une expérience se réalise favorablement avec une probabilité $p = 0.6$, pour un nombre $n > 25550$ de tirages :

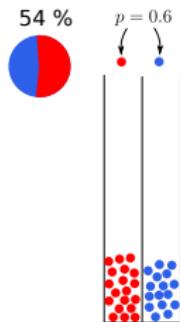
$$\mathbb{P}\left(0.58 \leq \frac{X}{n} \leq 0.62\right) > \frac{1000}{1001}$$



Bernoulli (1623-1789) - (*Ars Conjectandi*, 1713)

Exemple. Si une expérience se réalise favorablement avec une probabilité $p = 0.6$, pour un nombre $n > 25550$ de tirages :

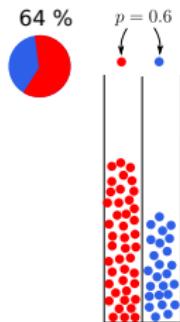
$$\mathbb{P}\left(0.58 \leq \frac{X}{n} \leq 0.62\right) > \frac{1000}{1001}$$



Bernoulli (1623-1789) - (*Ars Conjectandi*, 1713)

Exemple. Si une expérience se réalise favorablement avec une probabilité $p = 0.6$, pour un nombre $n > 25550$ de tirages :

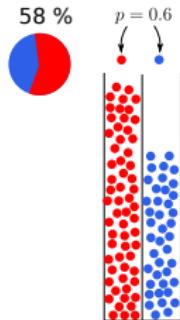
$$\mathbb{P}\left(0.58 \leqslant \frac{X}{n} \leqslant 0.62\right) > \frac{1000}{1001}$$



Bernoulli (1623-1789) - (*Ars Conjectandi*, 1713)

Exemple. Si une expérience se réalise favorablement avec une probabilité $p = 0.6$, pour un nombre $n > 25550$ de tirages :

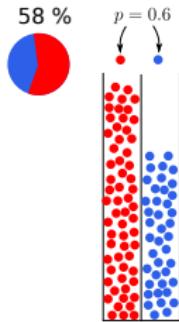
$$\mathbb{P}\left(0.58 \leq \frac{X}{n} \leq 0.62\right) > \frac{1000}{1001}$$



Bernoulli (1623-1789) - (*Ars Conjectandi*, 1713)

Exemple. Si une expérience se réalise favorablement avec une probabilité $p = 0.6$, pour un nombre $n > 25550$ de tirages :

$$\mathbb{P}\left(0.58 \leq \frac{X}{n} \leq 0.62\right) > \frac{1000}{1001}$$

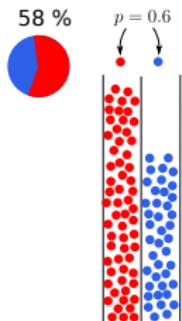


Un évènement doit arriver dans le futur aussi souvent qu'il a été donné à observer dans le passé

Bernoulli (1623-1789) - (*Ars Conjectandi*, 1713)

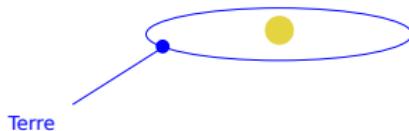
Exemple. Si une expérience se réalise favorablement avec une probabilité $p = 0.6$, pour un nombre $n > 25550$ de tirages :

$$\mathbb{P}\left(0.58 \leq \frac{X}{n} \leq 0.62\right) > \frac{1000}{1001}$$



Un évènement doit arriver dans le futur aussi souvent qu'il a été donné à observer dans le passé

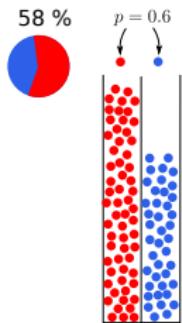
Daniel Bernoulli :
→ premier calcul de p-value (1732)



Bernoulli (1623-1789) - (*Ars Conjectandi*, 1713)

Exemple. Si une expérience se réalise favorablement avec une probabilité $p = 0.6$, pour un nombre $n > 25550$ de tirages :

$$\mathbb{P}\left(0.58 \leq \frac{X}{n} \leq 0.62\right) > \frac{1000}{1001}$$



Un évènement doit arriver dans le futur aussi souvent qu'il a été donné à observer dans le passé

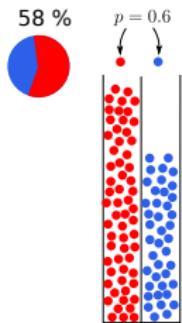
Daniel Bernoulli :
→ premier calcul de p-value (1732)



Bernoulli (1623-1789) - (*Ars Conjectandi*, 1713)

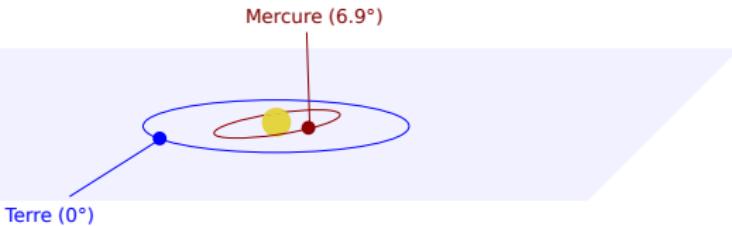
Exemple. Si une expérience se réalise favorablement avec une probabilité $p = 0.6$, pour un nombre $n > 25550$ de tirages :

$$\mathbb{P}\left(0.58 \leq \frac{X}{n} \leq 0.62\right) > \frac{1000}{1001}$$



Un évènement doit arriver dans le futur aussi souvent qu'il a été donné à observer dans le passé

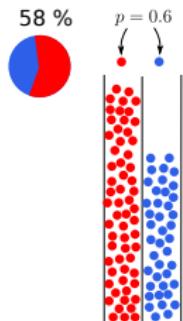
Daniel Bernoulli :
→ premier calcul de p-value (1732)



Bernoulli (1623-1789) - (*Ars Conjectandi*, 1713)

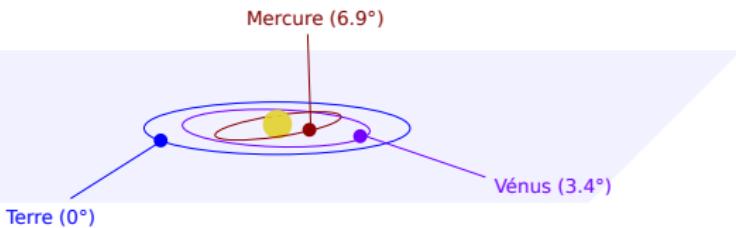
Exemple. Si une expérience se réalise favorablement avec une probabilité $p = 0.6$, pour un nombre $n > 25550$ de tirages :

$$\mathbb{P}\left(0.58 \leq \frac{X}{n} \leq 0.62\right) > \frac{1000}{1001}$$



Un évènement doit arriver dans le futur aussi souvent qu'il a été donné à observer dans le passé

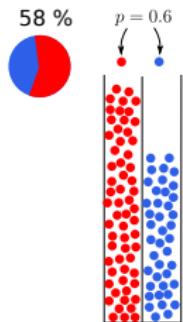
Daniel Bernoulli :
→ premier calcul de p-value (1732)



Bernoulli (1623-1789) - (*Ars Conjectandi*, 1713)

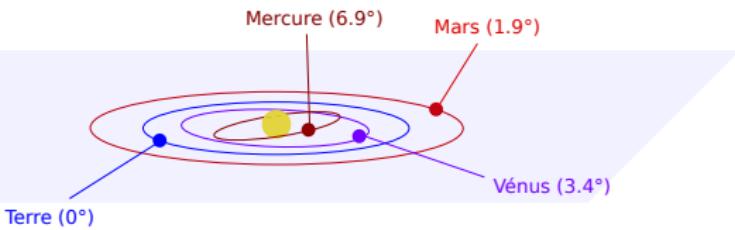
Exemple. Si une expérience se réalise favorablement avec une probabilité $p = 0.6$, pour un nombre $n > 25550$ de tirages :

$$\mathbb{P}\left(0.58 \leq \frac{X}{n} \leq 0.62\right) > \frac{1000}{1001}$$



Un évènement doit arriver dans le futur aussi souvent qu'il a été donné à observer dans le passé

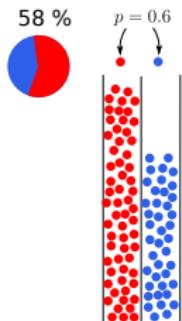
Daniel Bernoulli :
→ premier calcul de p-value (1732)



Bernoulli (1623-1789) - (*Ars Conjectandi*, 1713)

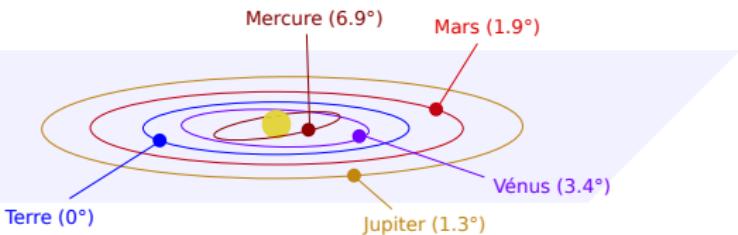
Exemple. Si une expérience se réalise favorablement avec une probabilité $p = 0.6$, pour un nombre $n > 25550$ de tirages :

$$\mathbb{P}\left(0.58 \leq \frac{X}{n} \leq 0.62\right) > \frac{1000}{1001}$$



Un évènement doit arriver dans le futur aussi souvent qu'il a été donné à observer dans le passé

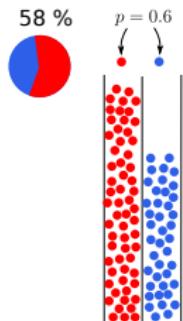
Daniel Bernoulli :
→ premier calcul de p-value (1732)



Bernoulli (1623-1789) - (*Ars Conjectandi*, 1713)

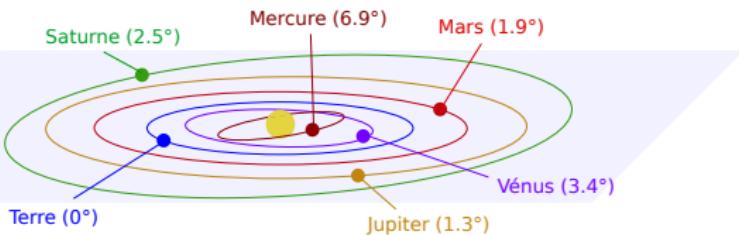
Exemple. Si une expérience se réalise favorablement avec une probabilité $p = 0.6$, pour un nombre $n > 25550$ de tirages :

$$\mathbb{P}\left(0.58 \leq \frac{X}{n} \leq 0.62\right) > \frac{1000}{1001}$$



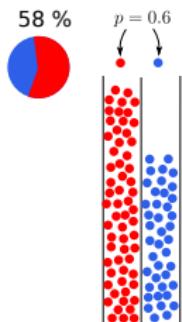
Un évènement doit arriver dans le futur aussi souvent qu'il a été donné à observer dans le passé

Daniel Bernoulli :
→ premier calcul de p-value (1732)



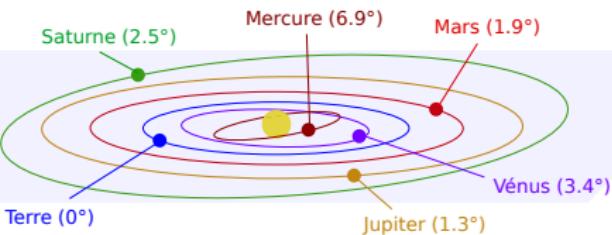
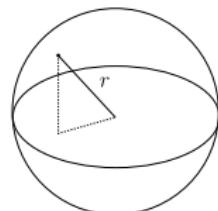
Exemple. Si une expérience se réalise favorablement avec une probabilité $p = 0.6$, pour un nombre $n > 25550$ de tirages :

$$\mathbb{P}\left(0.58 \leq \frac{X}{n} \leq 0.62\right) > \frac{1000}{1001}$$



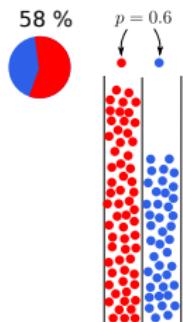
Un évènement doit arriver dans le futur aussi souvent qu'il a été donné à observer dans le passé

Daniel Bernoulli :
→ premier calcul de p-value (1732)



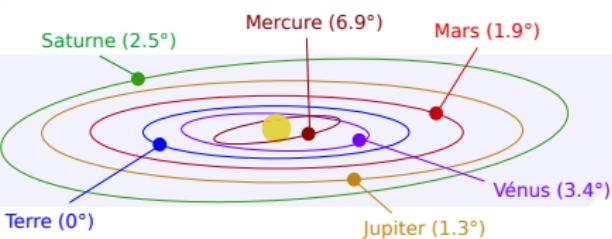
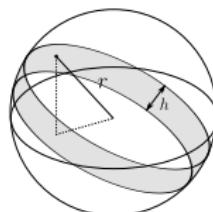
Exemple. Si une expérience se réalise favorablement avec une probabilité $p = 0.6$, pour un nombre $n > 25550$ de tirages :

$$\mathbb{P}\left(0.58 \leq \frac{X}{n} \leq 0.62\right) > \frac{1000}{1001}$$



Un évènement doit arriver dans le futur aussi souvent qu'il a été donné à observer dans le passé

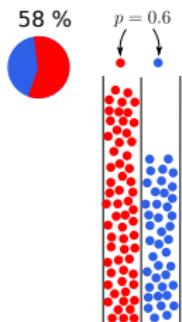
Daniel Bernoulli :
→ premier calcul de p-value (1732)



Bernoulli (1623-1789) - (*Ars Conjectandi*, 1713)

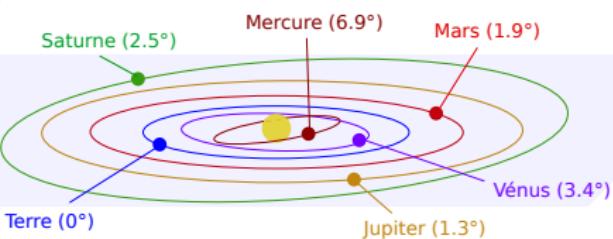
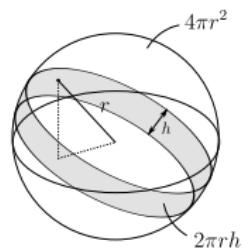
Exemple. Si une expérience se réalise favorablement avec une probabilité $p = 0.6$, pour un nombre $n > 25550$ de tirages :

$$\mathbb{P}\left(0.58 \leq \frac{X}{n} \leq 0.62\right) > \frac{1000}{1001}$$



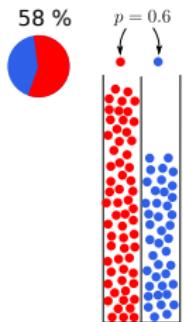
Un évènement doit arriver dans le futur aussi souvent qu'il a été donné à observer dans le passé

Daniel Bernoulli :
→ premier calcul de p-value (1732)



Exemple. Si une expérience se réalise favorablement avec une probabilité $p = 0.6$, pour un nombre $n > 25550$ de tirages :

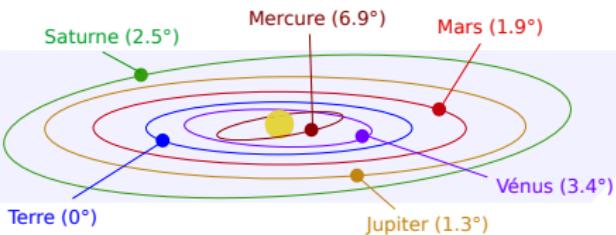
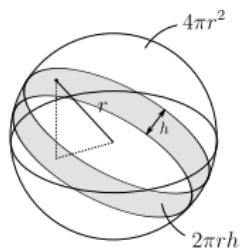
$$\mathbb{P}\left(0.58 \leq \frac{X}{n} \leq 0.62\right) > \frac{1000}{1001}$$



Un évènement doit arriver dans le futur aussi souvent qu'il a été donné à observer dans le passé

Daniel Bernoulli :
→ premier calcul de p-value (1732)

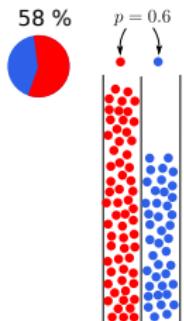
$$\frac{2\pi rh}{4\pi r^2} = \frac{1}{2} \frac{h}{r} = \frac{\sin \theta_{max}}{2} = 0.06$$



Bernoulli (1623-1789) - (*Ars Conjectandi*, 1713)

Exemple. Si une expérience se réalise favorablement avec une probabilité $p = 0.6$, pour un nombre $n > 25550$ de tirages :

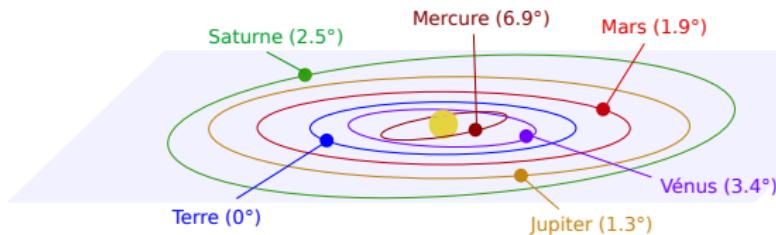
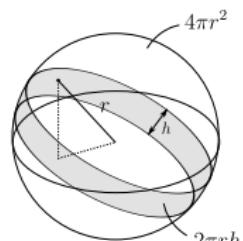
$$\mathbb{P}\left(0.58 \leq \frac{X}{n} \leq 0.62\right) > \frac{1000}{1001}$$



Un évènement doit arriver dans le futur aussi souvent qu'il a été donné à observer dans le passé

Daniel Bernoulli :
→ premier calcul de p-value (1732)

$$\frac{2\pi rh}{4\pi r^2} = \frac{1}{2} \frac{h}{r} = \frac{\sin \theta_{max}}{2} = 0.06$$

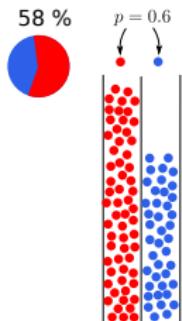


$$0.06^{n-1}$$

Bernoulli (1623-1789) - (*Ars Conjectandi*, 1713)

Exemple. Si une expérience se réalise favorablement avec une probabilité $p = 0.6$, pour un nombre $n > 25550$ de tirages :

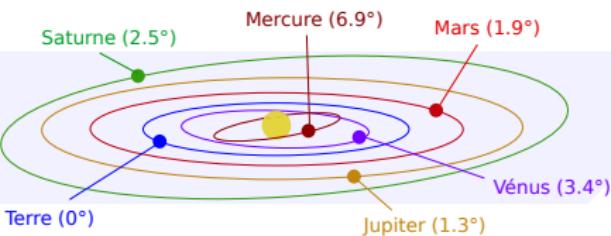
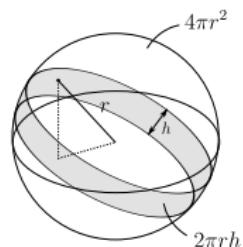
$$\mathbb{P}\left(0.58 \leq \frac{X}{n} \leq 0.62\right) > \frac{1000}{1001}$$



Un évènement doit arriver dans le futur aussi souvent qu'il a été donné à observer dans le passé

Daniel Bernoulli :
→ premier calcul de p-value (1732)

$$\frac{2\pi rh}{4\pi r^2} = \frac{1}{2} \frac{h}{r} = \frac{\sin \theta_{max}}{2} = 0.06$$

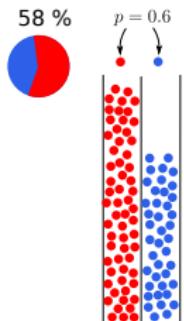


$$0.06^{n-1} \rightarrow p = 7e^{-7}$$

Bernoulli (1623-1789) - (*Ars Conjectandi*, 1713)

Exemple. Si une expérience se réalise favorablement avec une probabilité $p = 0.6$, pour un nombre $n > 25550$ de tirages :

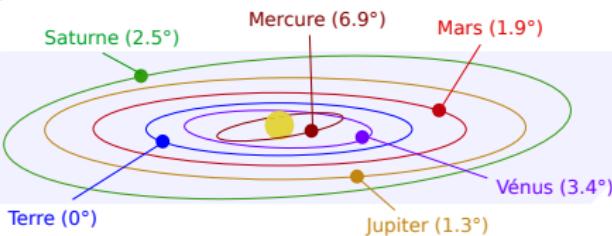
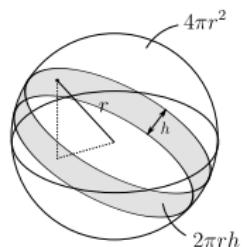
$$\mathbb{P}\left(0.58 \leq \frac{X}{n} \leq 0.62\right) > \frac{1000}{1001}$$



Un évènement doit arriver dans le futur aussi souvent qu'il a été donné à observer dans le passé

Daniel Bernoulli :
→ premier calcul de p-value (1732)

$$\frac{2\pi rh}{4\pi r^2} = \frac{1}{2} \frac{h}{r} = \frac{\sin \theta_{max}}{2} = 0.06$$

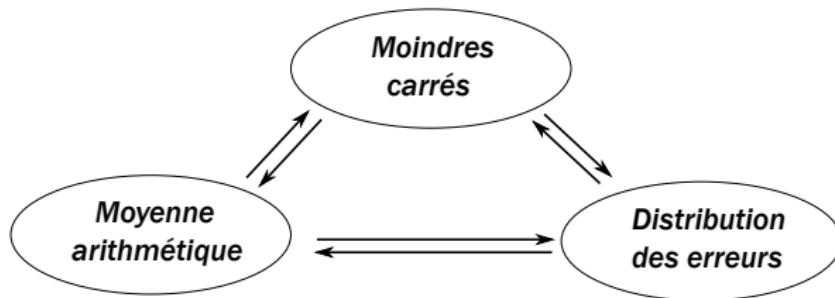


$$0.06^{n-1} \rightarrow p = 7e^{-7}$$

p-value

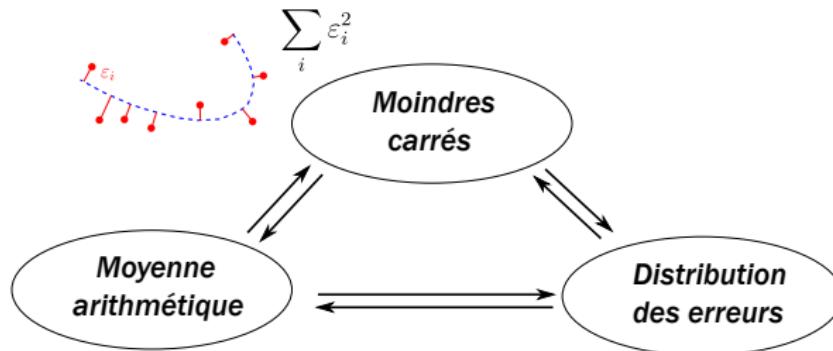
Théorie des erreurs

Cotes (1722), Lambert (1760), Laplace (1775), Lagrange (1776), Legendre (1809), Gauss(1823)



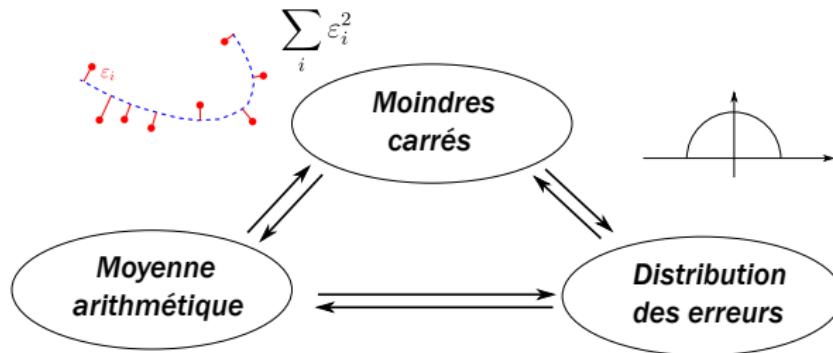
Théorie des erreurs

Cotes (1722), Lambert (1760), Laplace (1775), Lagrange (1776), Legendre (1809), Gauss(1823)



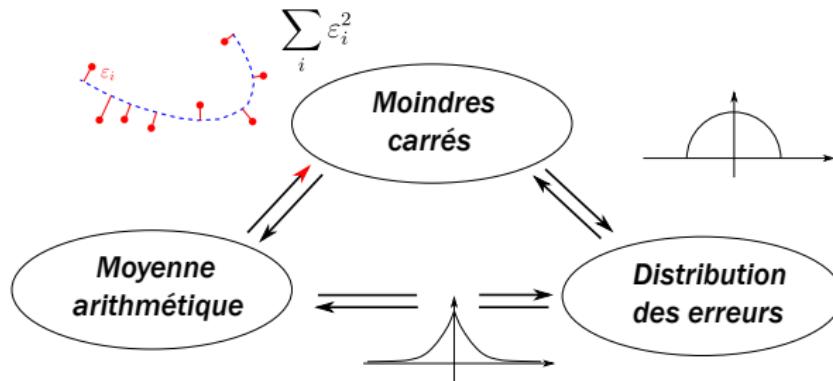
Théorie des erreurs

Cotes (1722), Lambert (1760), Laplace (1775), Lagrange (1776), Legendre (1809), Gauss(1823)



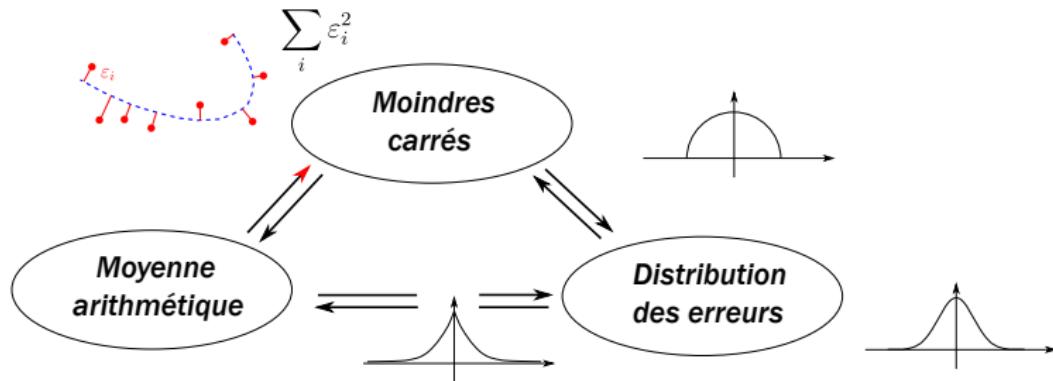
Théorie des erreurs

Cotes (1722), Lambert (1760), Laplace (1775), Lagrange (1776), Legendre (1809), Gauss(1823)



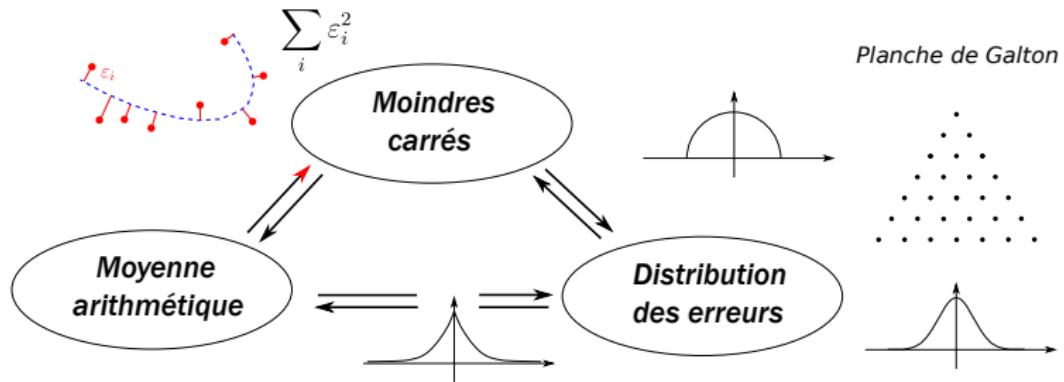
Théorie des erreurs

Cotes (1722), Lambert (1760), Laplace (1775), Lagrange (1776), Legendre (1809), Gauss(1823)



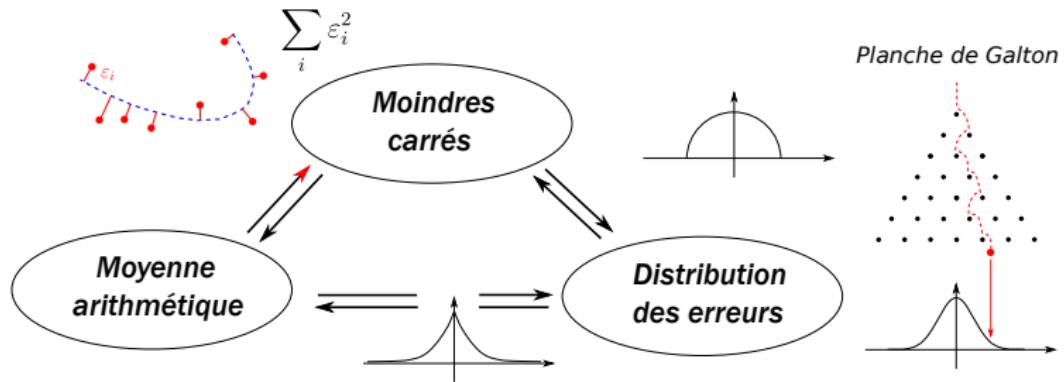
Théorie des erreurs

Cotes (1722), Lambert (1760), Laplace (1775), Lagrange (1776), Legendre (1809), Gauss(1823)



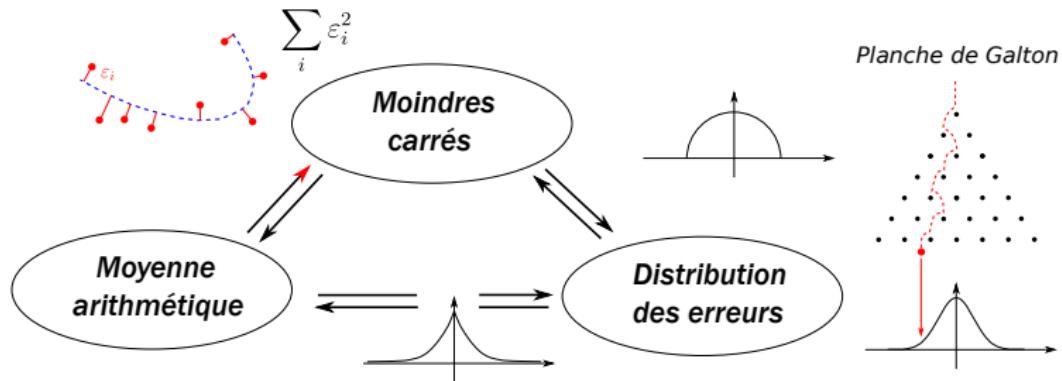
Théorie des erreurs

Cotes (1722), Lambert (1760), Laplace (1775), Lagrange (1776), Legendre (1809), Gauss(1823)



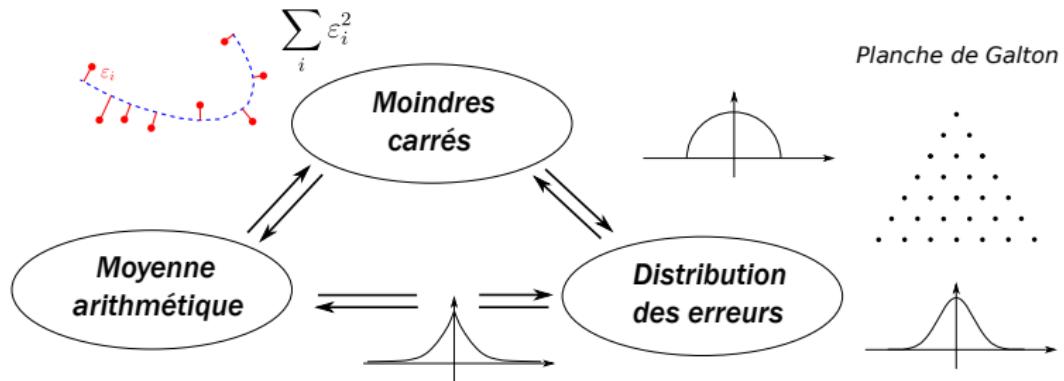
Théorie des erreurs

Cotes (1722), Lambert (1760), Laplace (1775), Lagrange (1776), Legendre (1809), Gauss(1823)



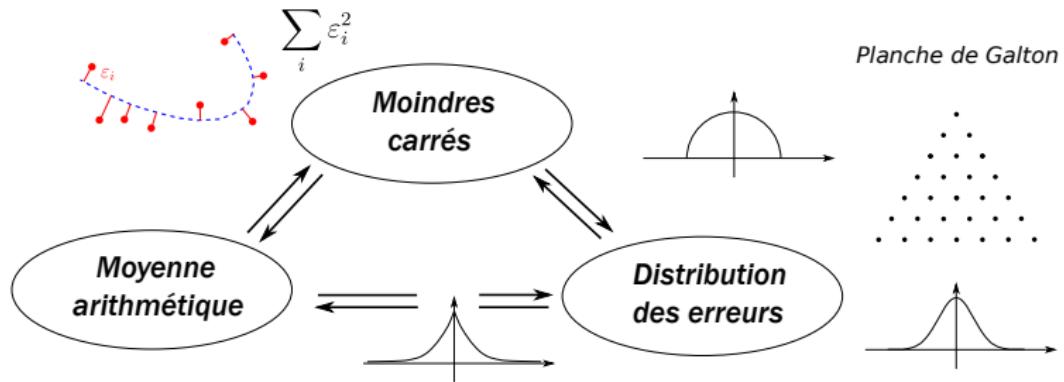
Théorie des erreurs

Cotes (1722), Lambert (1760), Laplace (1775), Lagrange (1776), Legendre (1809), Gauss(1823)



Théorie des erreurs

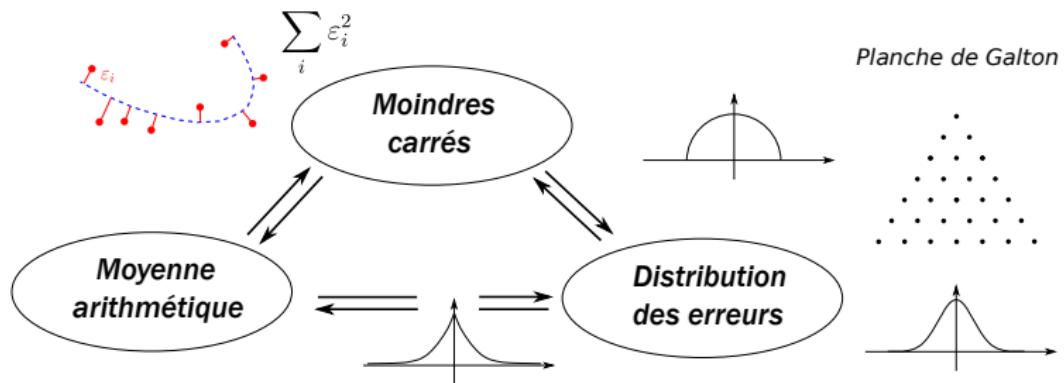
Cotes (1722), Lambert (1760), Laplace (1775), Lagrange (1776), Legendre (1809), Gauss(1823)



$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ des observations d'une inconnue m , f la distribution recherchée.

Théorie des erreurs

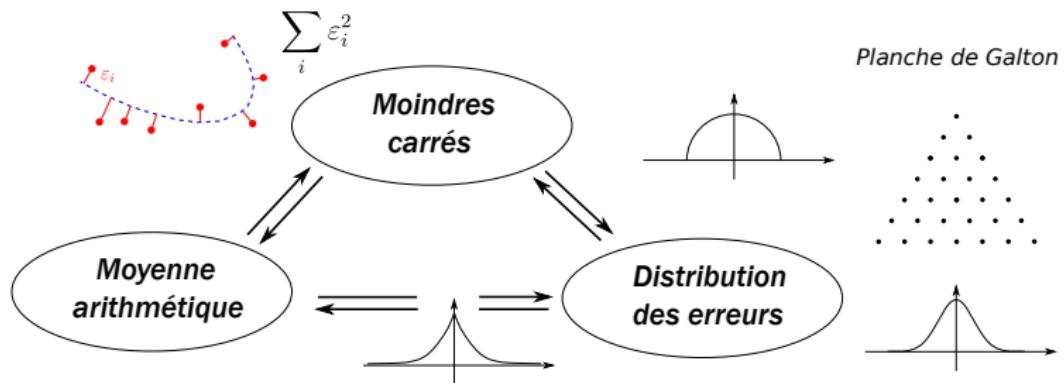
Cotes (1722), Lambert (1760), Laplace (1775), Lagrange (1776), Legendre (1809), Gauss(1823)



$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ des observations d'une inconnue m , f la distribution recherchée. Principe de **maximum de vraisemblance** :

Théorie des erreurs

Cotes (1722), Lambert (1760), Laplace (1775), Lagrange (1776), Legendre (1809), Gauss(1823)

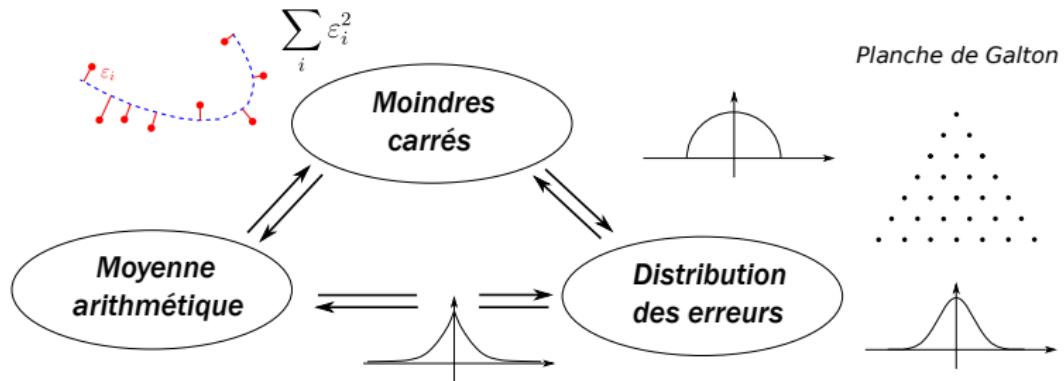


$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ des observations d'une inconnue m , f la distribution recherchée. Principe de **maximum de vraisemblance** :

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}|f) \equiv f(x_1) \times f(x_2) \times \dots \times f(x_n) = \prod_{i=1}^n f(x_i)$$

Théorie des erreurs

Cotes (1722), Lambert (1760), Laplace (1775), Lagrange (1776), Legendre (1809), Gauss(1823)

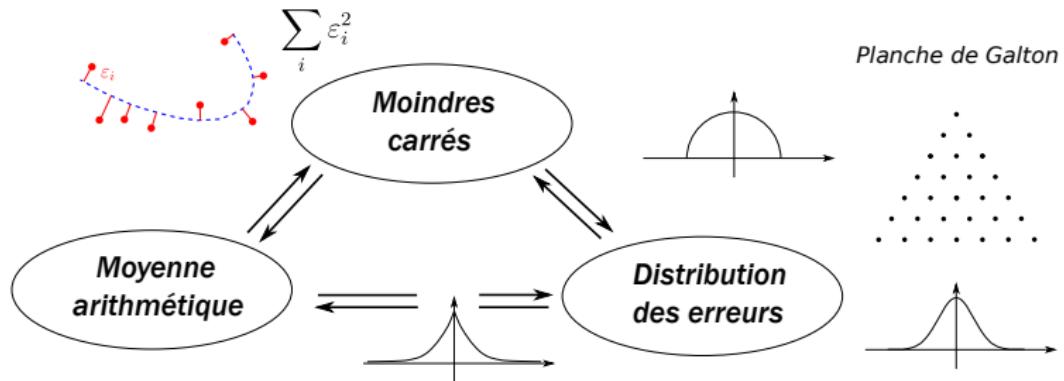


$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ des observations d'une inconnue m , f la distribution recherchée. Principe de **maximum de vraisemblance** :

$$\log \left(\mathcal{L}(\mathbf{x}|f) \right) = \sum_{i=1}^n \log f(x_i)$$

Théorie des erreurs

Cotes (1722), Lambert (1760), Laplace (1775), Lagrange (1776), Legendre (1809), Gauss(1823)

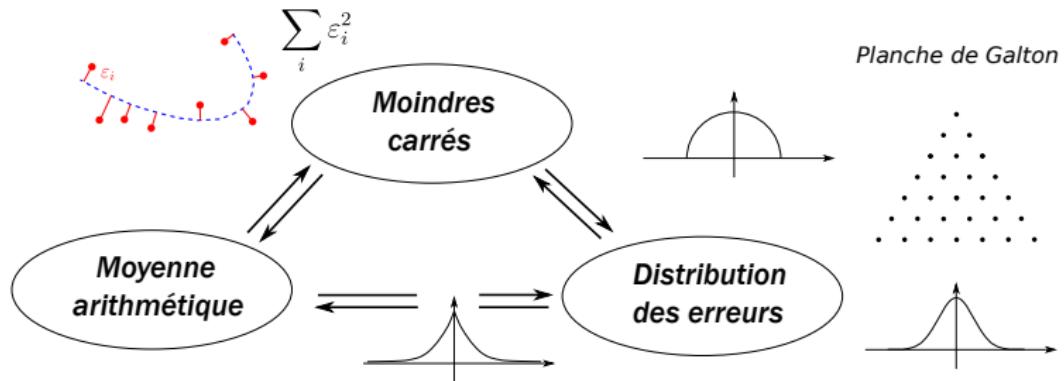


$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ des observations d'une inconnue m , f la distribution recherchée. Principe de **maximum de vraisemblance** :

$$l(\mathbf{x}|f) = \sum_{i=1}^n \log f(x_i)$$

Théorie des erreurs

Cotes (1722), Lambert (1760), Laplace (1775), Lagrange (1776), Legendre (1809), Gauss(1823)

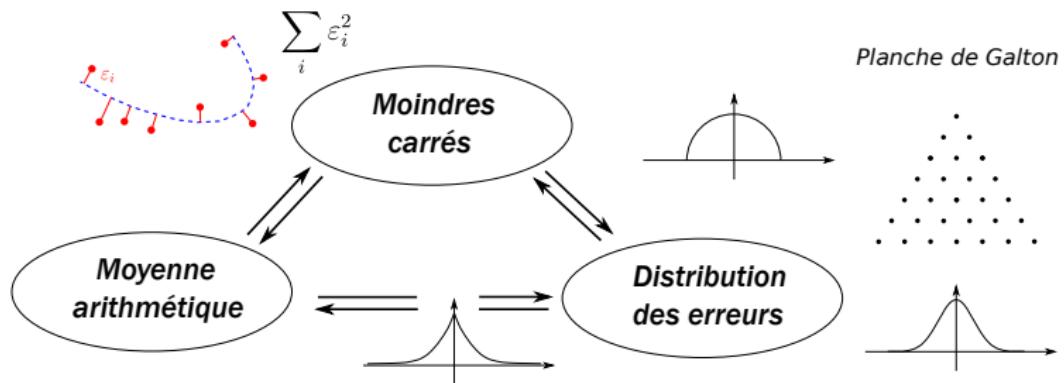


$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ des observations d'une inconnue m , f la distribution recherchée. Principe de **maximum de vraisemblance** :

$$\max_m l(\mathbf{x}|f) = \max_m \sum_{i=1}^n \log f(x_i)$$

Théorie des erreurs

Cotes (1722), Lambert (1760), Laplace (1775), Lagrange (1776), Legendre (1809), Gauss(1823)

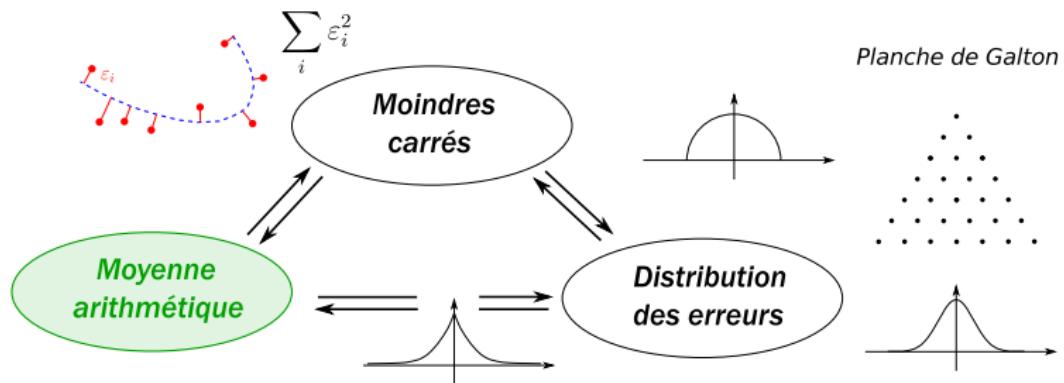


$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ des observations d'une inconnue m , f la distribution recherchée. Principe de **maximum de vraisemblance** :

$$\frac{\partial l(\mathbf{x}|f)}{\partial m} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \log f(x_i)}{\partial m} = 0$$

Théorie des erreurs

Cotes (1722), Lambert (1760), Laplace (1775), Lagrange (1776), Legendre (1809), Gauss(1823)

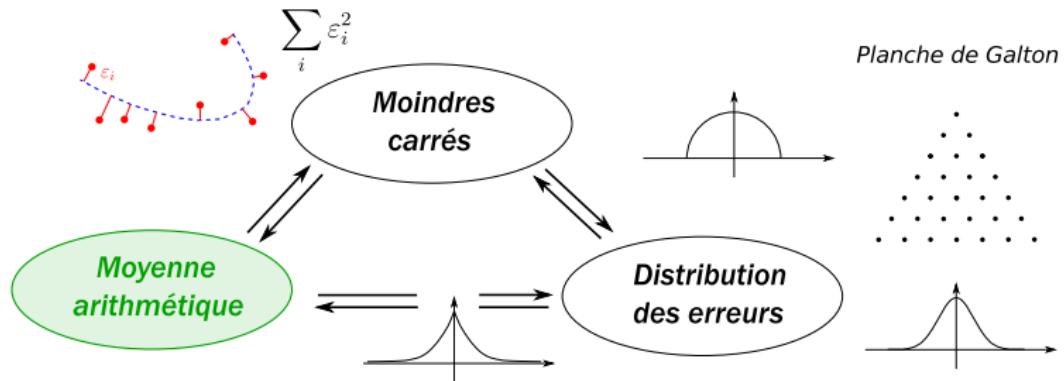


$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ des observations d'une **inconnue m** , f la **distribution recherchée**. Principe de **maximum de vraisemblance** :

$$\frac{\partial l(\mathbf{x}|f)}{\partial m} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \log f(x_i)}{\partial m} = 0 = \sum_{i=1}^n (x_i - m)$$

Théorie des erreurs

Cotes (1722), Lambert (1760), Laplace (1775), Lagrange (1776), Legendre (1809), Gauss(1823)

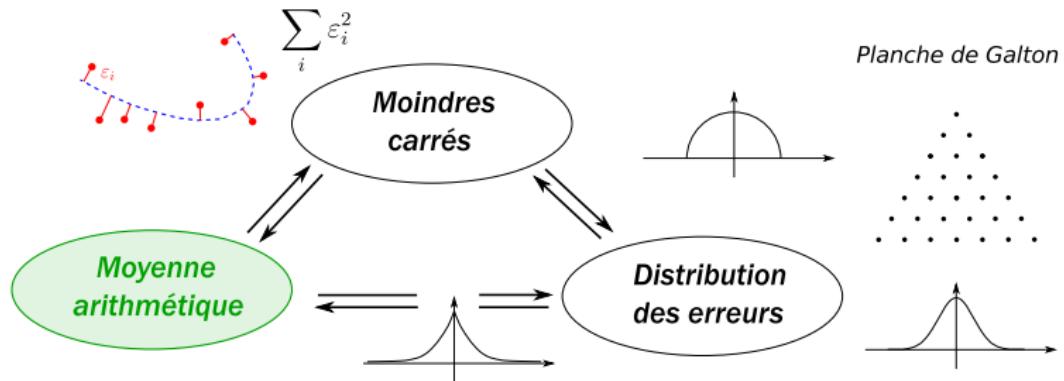


$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ des observations d'une **inconnue m** , f la **distribution recherchée**. Principe de **maximum de vraisemblance** :

$$\frac{\partial \log f(x_i)}{\partial m} = (x_i - m)$$

Théorie des erreurs

Cotes (1722), Lambert (1760), Laplace (1775), Lagrange (1776), Legendre (1809), Gauss(1823)

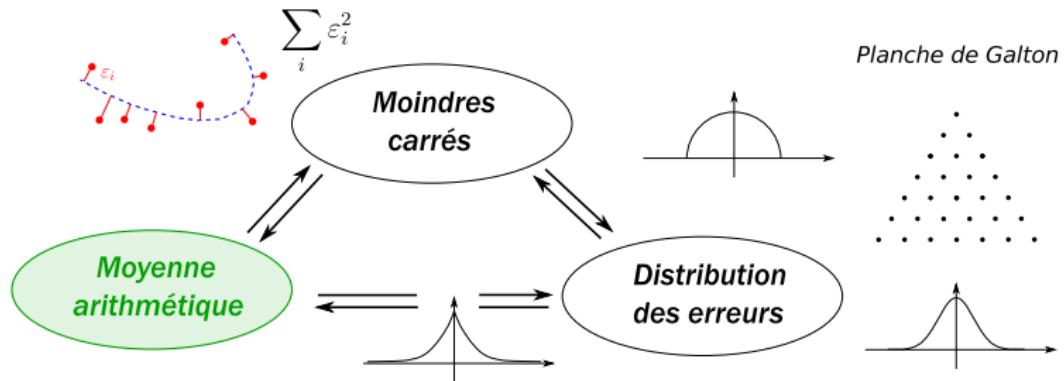


$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ des observations d'une **inconnue m** , f la **distribution recherchée**. Principe de **maximum de vraisemblance** :

$$\frac{\partial \log f(x_i)}{\partial m} = (x_i - m)$$

Théorie des erreurs

Cotes (1722), Lambert (1760), Laplace (1775), Lagrange (1776), Legendre (1809), Gauss(1823)

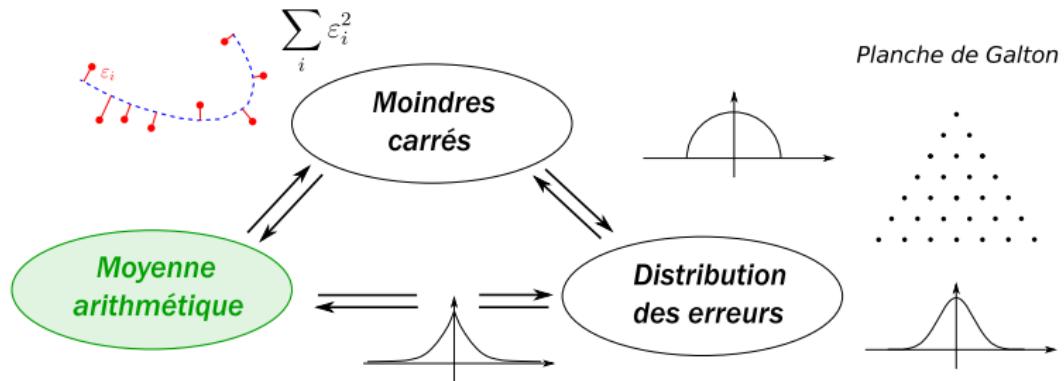


$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ des observations d'une **inconnue m** , f la **distribution recherchée**. Principe de **maximum de vraisemblance** :

$$\log f(x_i) = -\frac{1}{2}(x_i - m)^2 + C^{te}$$

Théorie des erreurs

Cotes (1722), Lambert (1760), Laplace (1775), Lagrange (1776), Legendre (1809), Gauss(1823)

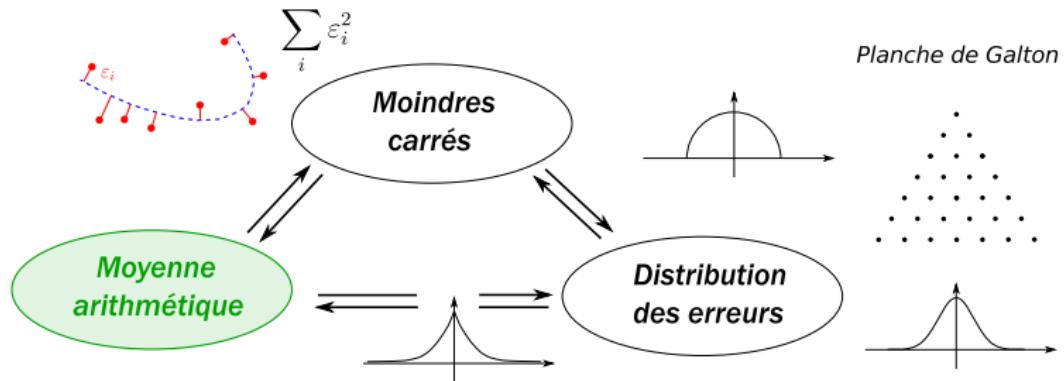


$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ des observations d'une **inconnue m** , f la **distribution recherchée**. Principe de **maximum de vraisemblance** :

$$f(x_i) \propto \exp\left(-\frac{1}{2}(x_i - m)^2\right)$$

Théorie des erreurs

Cotes (1722), Lambert (1760), Laplace (1775), Lagrange (1776), Legendre (1809), Gauss(1823)

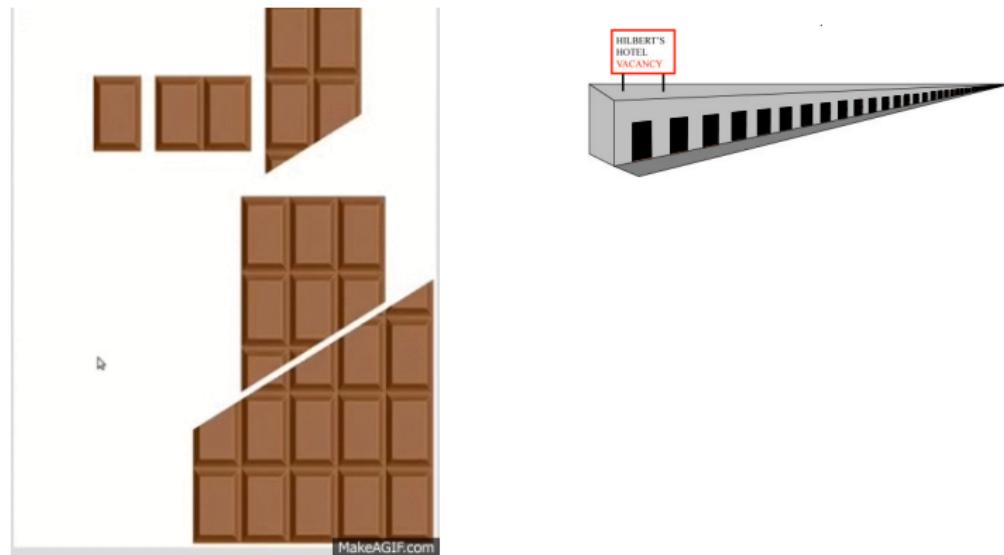


$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ des observations d'une **inconnue m** , f la **distribution recherchée**. Principe de **maximum de vraisemblance** :

$$f(x_i) \propto \exp\left(-\frac{1}{2}(x_i - m)^2\right)$$

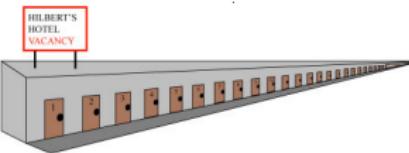
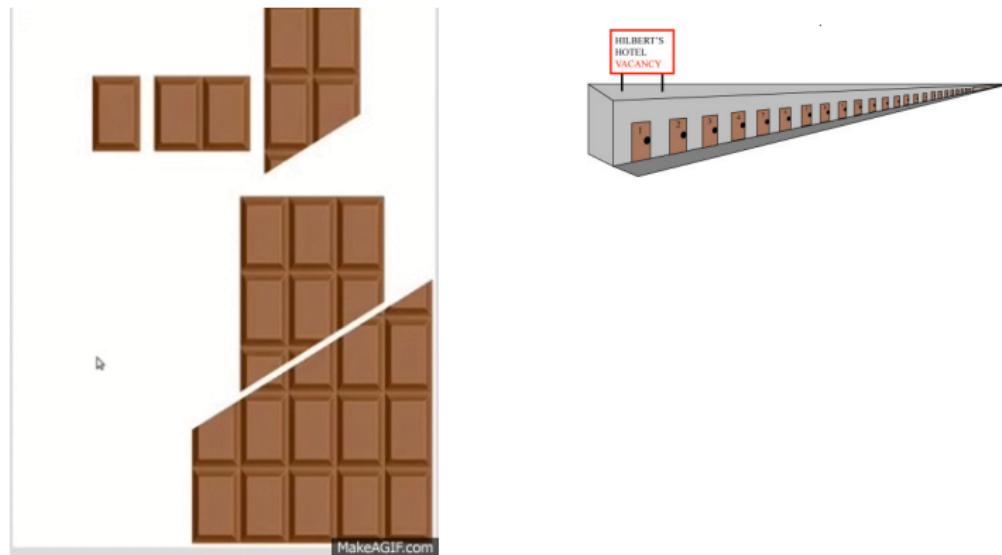
→ f est la **loi normale** (ou loi gaussienne)

Théorie de la mesure : Borel (1894), Lebesgue (1901)



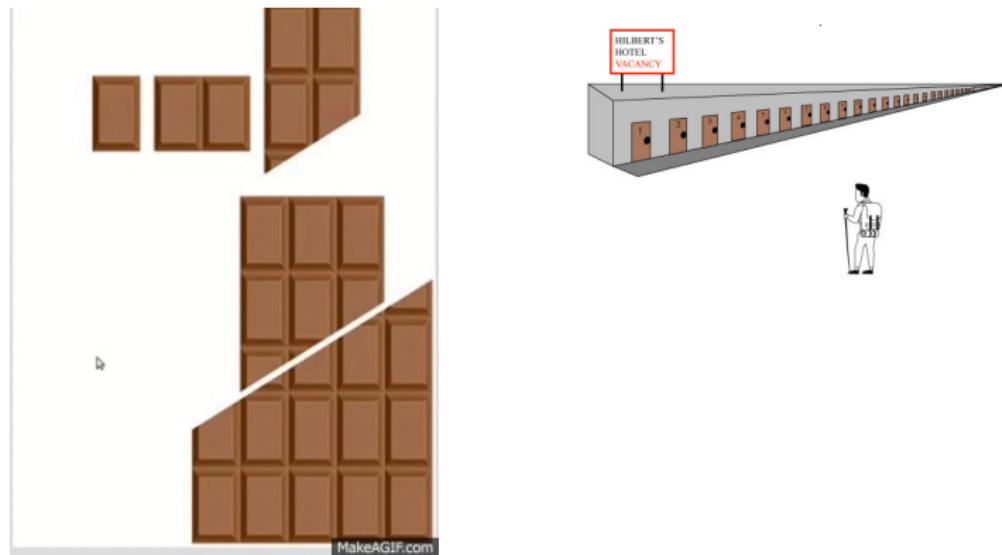
Axiomatique moderne - Kolmogorov

Théorie de la mesure : Borel (1894), Lebesgue (1901)



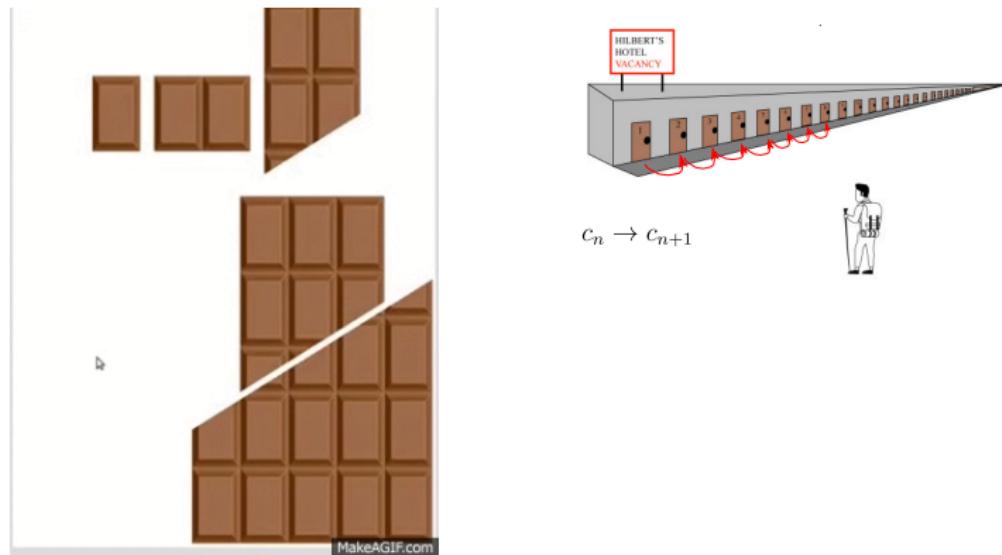
Axiomatique moderne - Kolmogorov

Théorie de la mesure : Borel (1894), Lebesgue (1901)



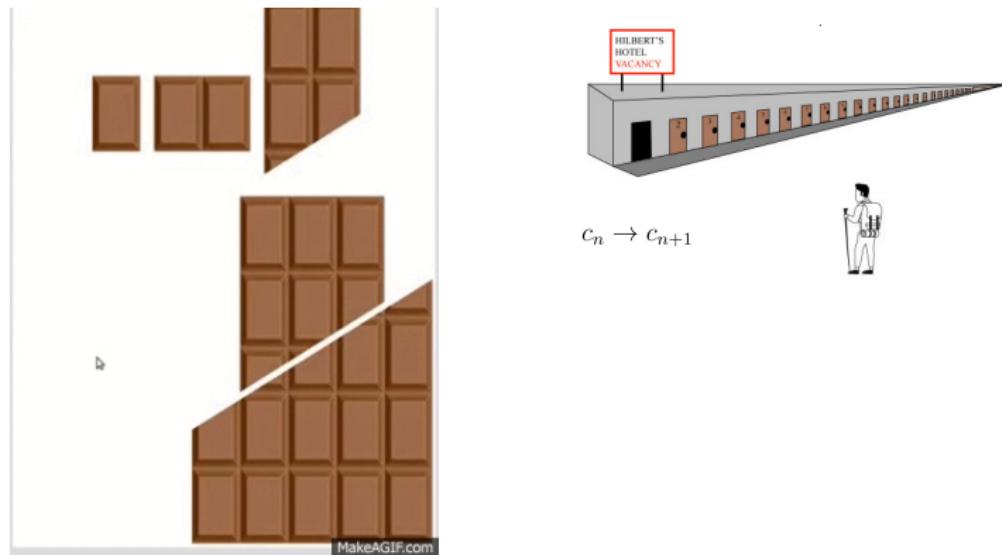
Axiomatique moderne - Kolmogorov

Théorie de la mesure : Borel (1894), Lebesgue (1901)



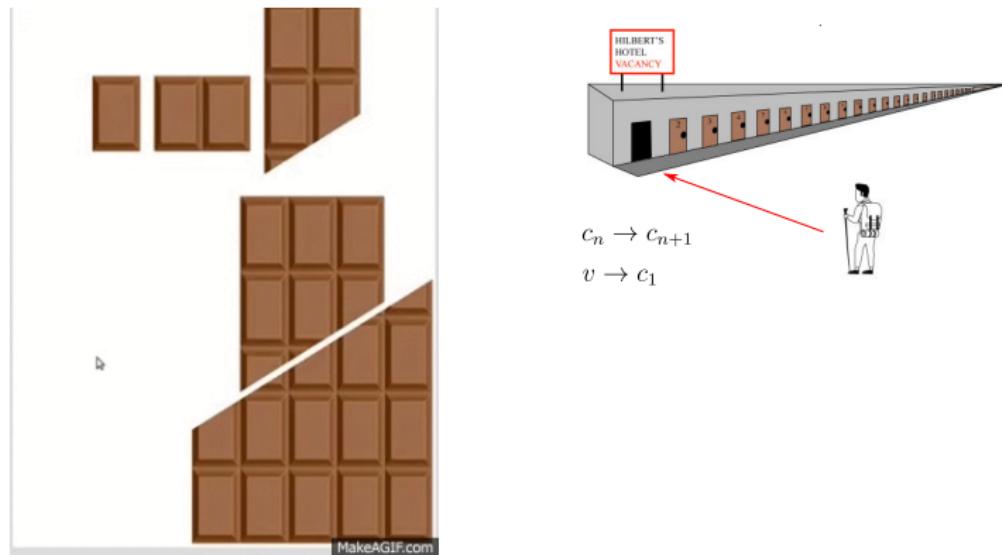
Axiomatique moderne - Kolmogorov

Théorie de la mesure : Borel (1894), Lebesgue (1901)



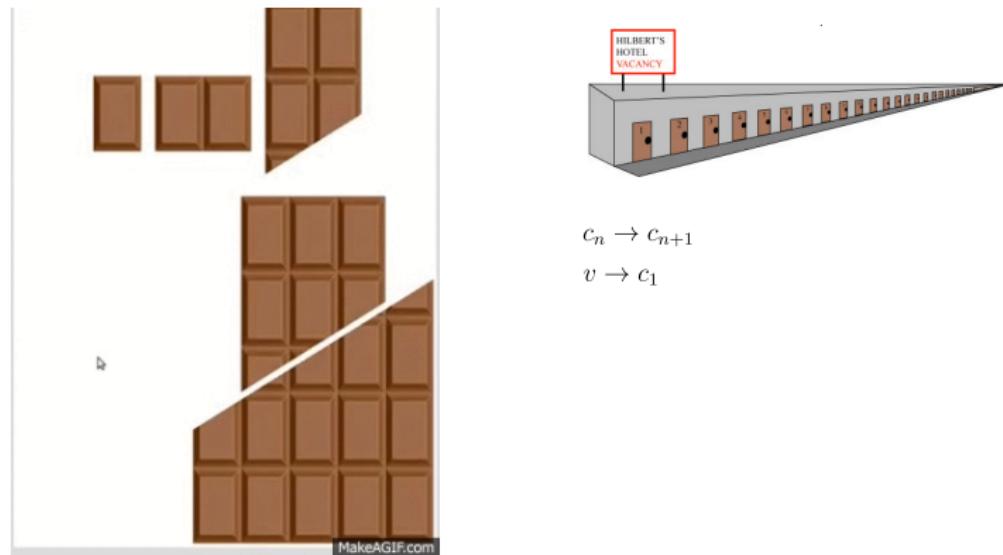
Axiomatique moderne - Kolmogorov

Théorie de la mesure : Borel (1894), Lebesgue (1901)



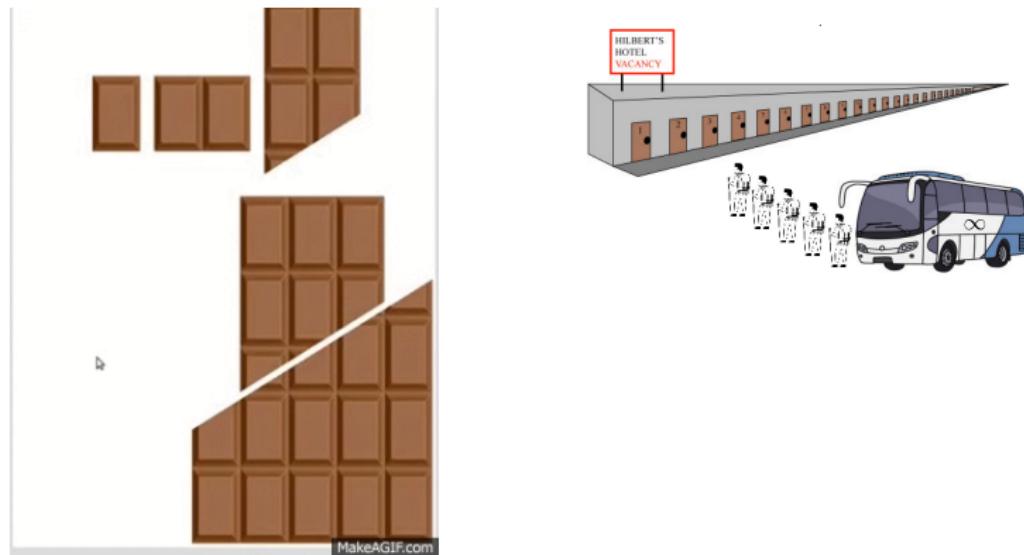
Axiomatique moderne - Kolmogorov

Théorie de la mesure : Borel (1894), Lebesgue (1901)



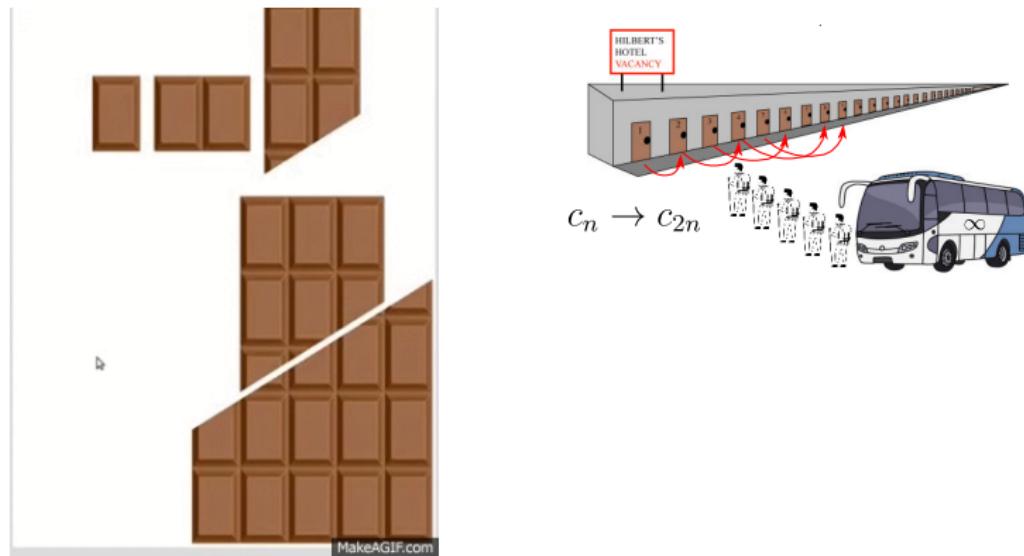
Axiomatique moderne - Kolmogorov

Théorie de la mesure : Borel (1894), Lebesgue (1901)



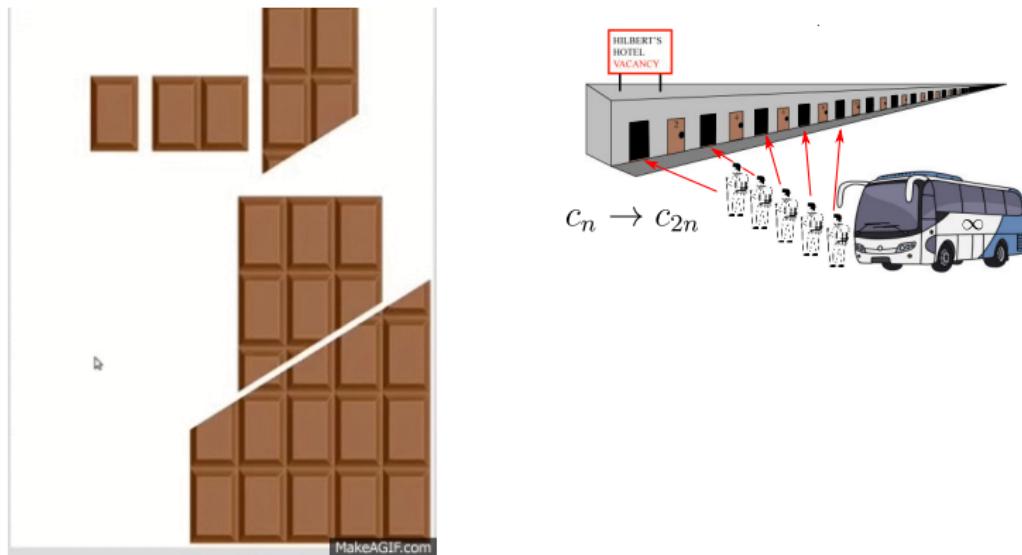
Axiomatique moderne - Kolmogorov

Théorie de la mesure : Borel (1894), Lebesgue (1901)

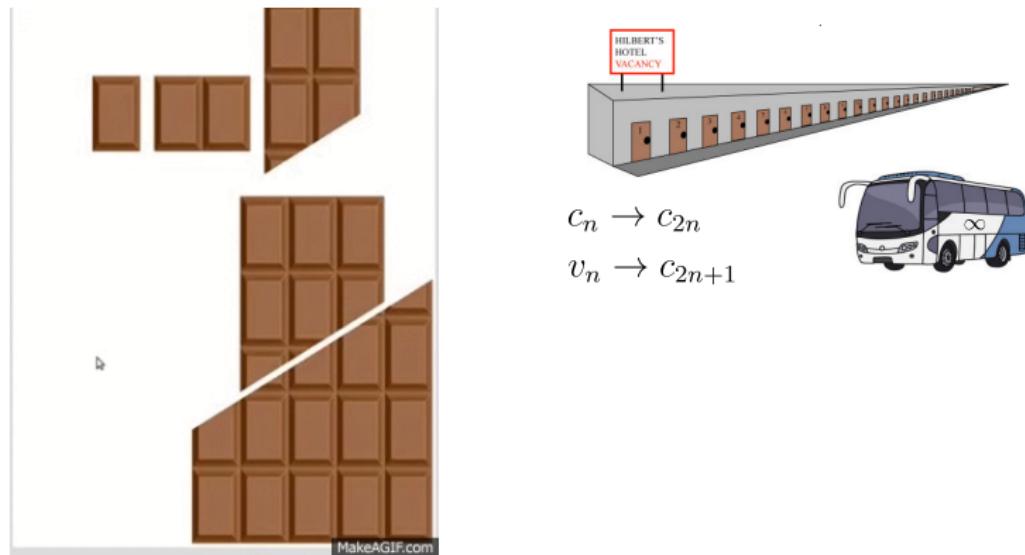


Axiomatique moderne - Kolmogorov

Théorie de la mesure : Borel (1894), Lebesgue (1901)

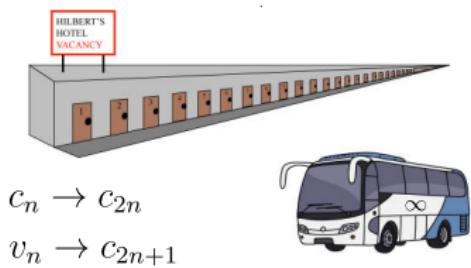
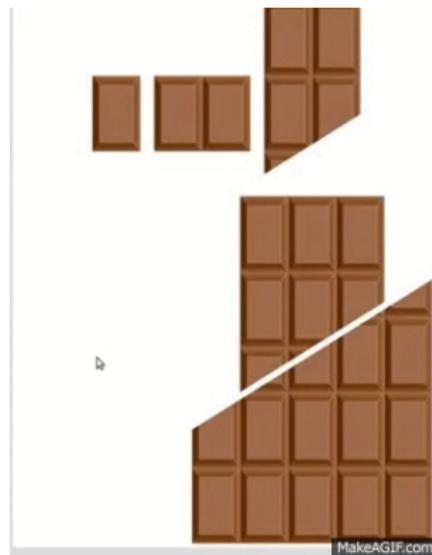


Théorie de la mesure : Borel (1894), Lebesgue (1901)



Axiomatique moderne - Kolmogorov

Théorie de la mesure : Borel (1894), Lebesgue (1901)



Probabilités modernes



Probabilités modernes



Probabilités modernes



THE GERMAN TANK PROBLEM



Probabilités modernes



THE GERMAN TANK PROBLEM



Probabilités modernes



Trouver $a \in \mathbb{R}_+$
t.q. $x_i \sim \mathcal{U}([1, a])$

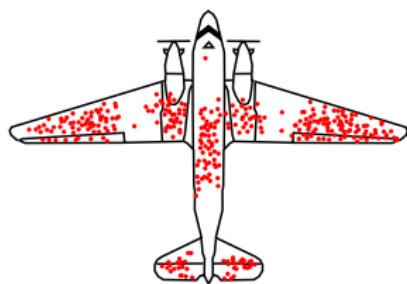
THE GERMAN TANK PROBLEM



Probabilités modernes



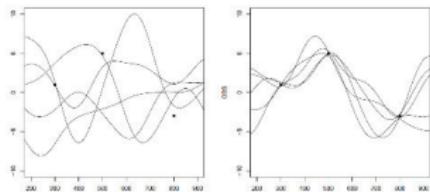
Trouver $a \in \mathbb{R}_+$
t.q. $x_i \sim \mathcal{U}([1, a])$



THE GERMAN TANK PROBLEM

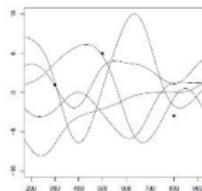


Probabilités modernes

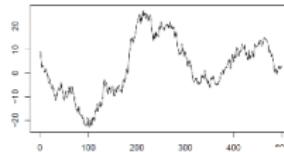
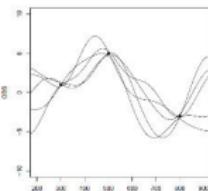


Fonctions aléatoires

Probabilités modernes

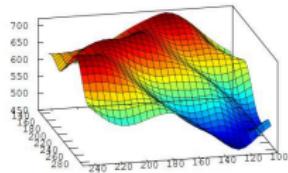


Fonctions aléatoires

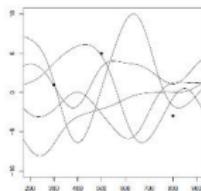


Processus 1D
Séries temporelles, économie...

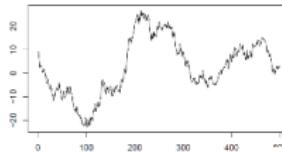
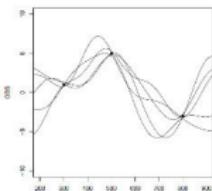
Processus 2D
MNT



Probabilités modernes

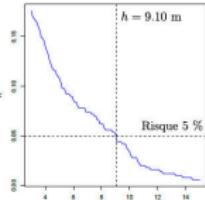
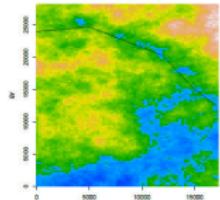
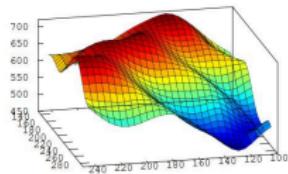


Fonctions aléatoires



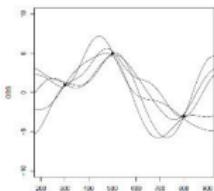
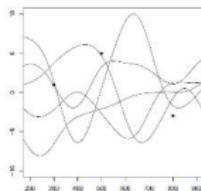
Processus 1D
Séries temporelles, économie...

Processus 2D
MNT

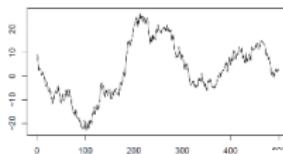


Simulations, propagation d'incertitudes...

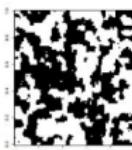
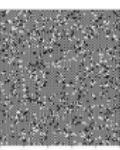
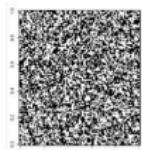
Probabilités modernes



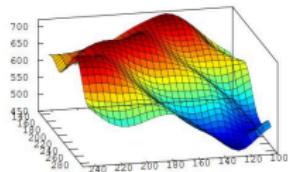
Fonctions aléatoires



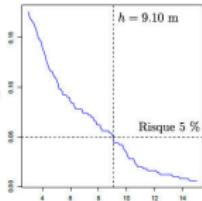
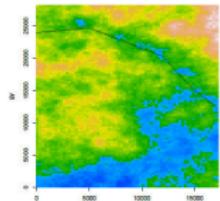
Processus 1D
Séries temporelles, économie...



Champs de Markov

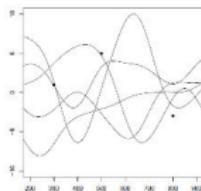


Processus 2D
MNT

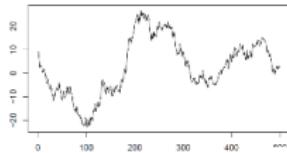
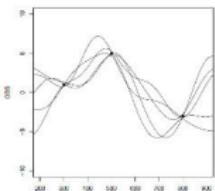


Simulations, propagation d'incertitudes...

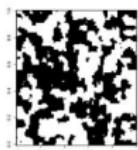
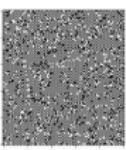
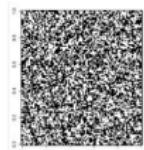
Probabilités modernes



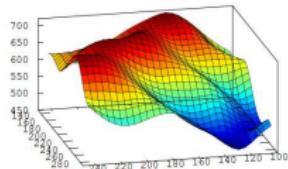
Fonctions aléatoires



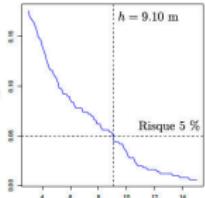
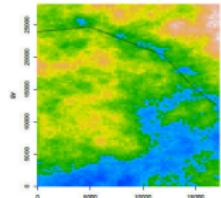
Processus 1D
Séries temporelles, économie...



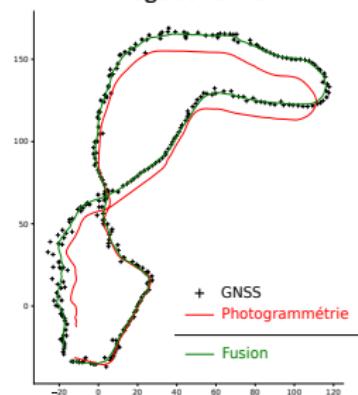
Champs de Markov



Processus 2D
MNT

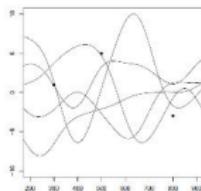


Simulations, propagation d'incertitudes...

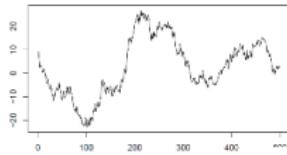
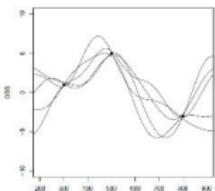


Filtrage de Kalman

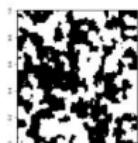
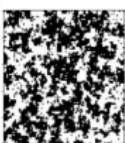
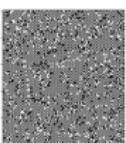
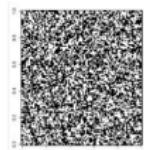
Probabilités modernes



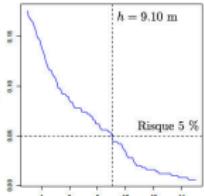
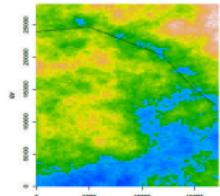
Fonctions aléatoires



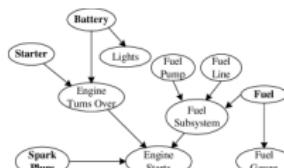
Processus 1D
Séries temporelles, économie...



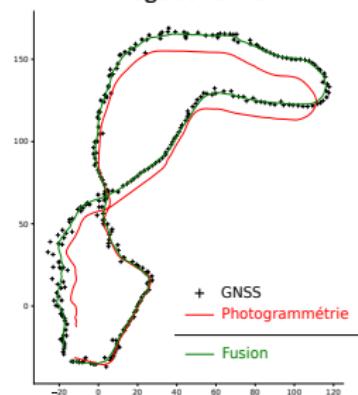
Champs de Markov



Simulations, propagation d'incertitudes...



Modèles graphiques



Programme du cours

- 25/10 PM : Rappels de probabilités I
- 26/10 PM : Rappels de probabilités II
- 27/10 PM : Rappels de probabilités III
- 14/11 : Géostatistique I - Processus stochastiques
- 15/11 : Géostatistique II - Krigeage et applications
- 22/11 : Apprentissage supervisé & validation
- 24/11 : Réseaux bayésiens et *non-supervisé*

Programme du cours

- 25/10 PM : Rappels de probabilités I
- 26/10 PM : Rappels de probabilités II
- 27/10 PM : Rappels de probabilités III
- 14/11 : Géostatistique I - Processus stochastiques
- 15/11 : Géostatistique II - Krigeage et applications
- 22/11 : Apprentissage supervisé & validation
- 24/11 : Réseaux bayésiens et *non-supervisé*

Programme du cours

- 25/10 PM : Rappels de probabilités I
- 26/10 PM : Rappels de probabilités II
- 27/10 PM : Rappels de probabilités III
- 14/11 : Géostatistique I - Processus stochastiques
- 15/11 : Géostatistique II - Krigeage et applications
- 22/11 : Apprentissage supervisé & validation
- 24/11 : Réseaux bayésiens et *non-supervisé*

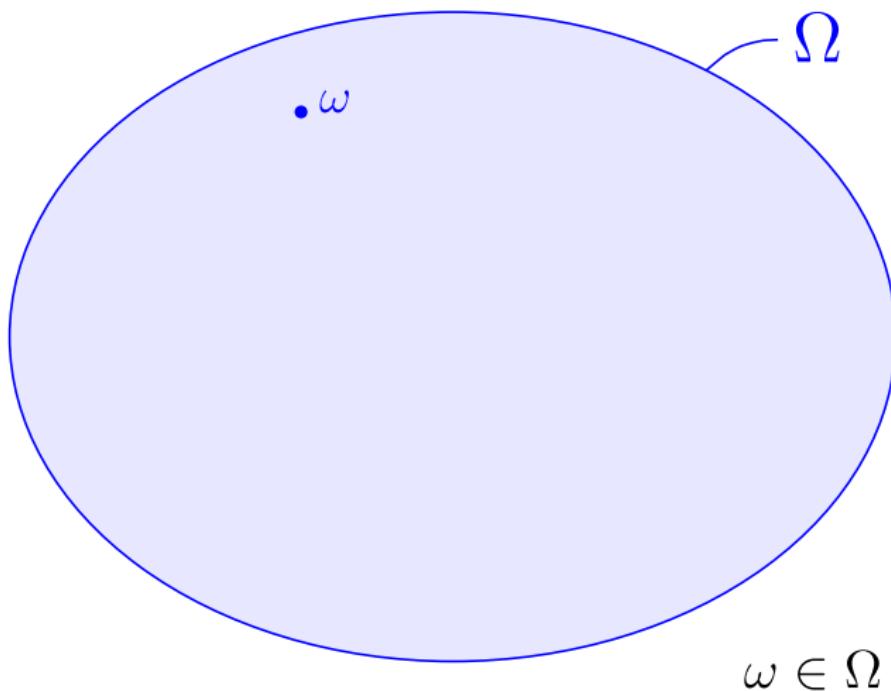
Programme du cours

- 25/10 PM : Rappels de probabilités I
- 26/10 PM : Rappels de probabilités II
- 27/10 PM : Rappels de probabilités III
- 14/11 : Géostatistique I - Processus stochastiques
- 15/11 : Géostatistique II - Krigeage et applications
- 22/11 : Apprentissage supervisé & validation
- 24/11 : Réseaux bayésiens et *non-supervisé*

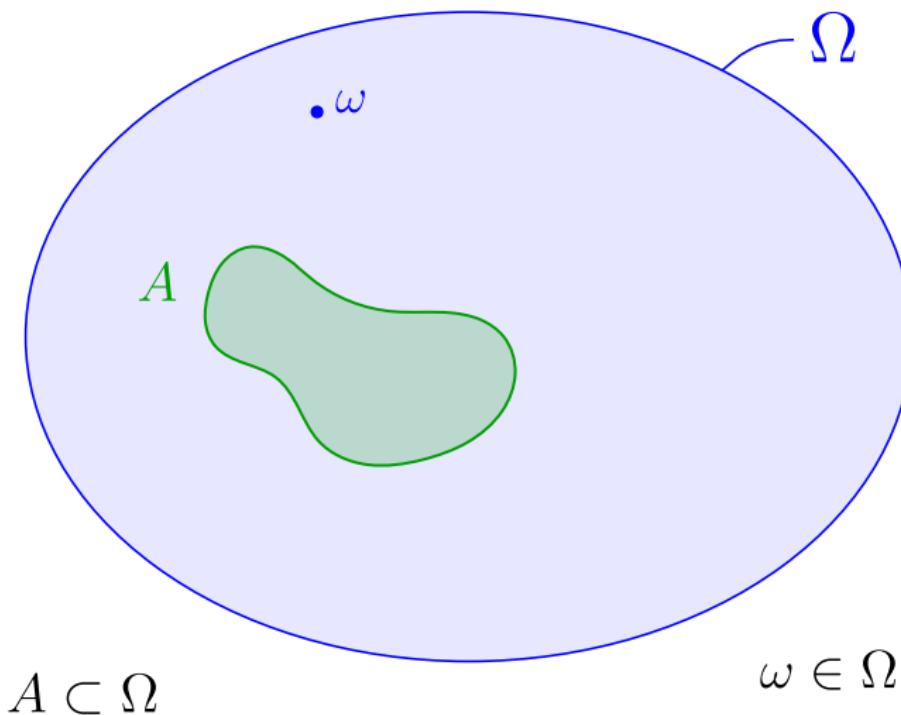
Définitions de base

- *Rappels*
- *Espace probabilisable*
- *Mesure de probabilité*
- *Propriétés*

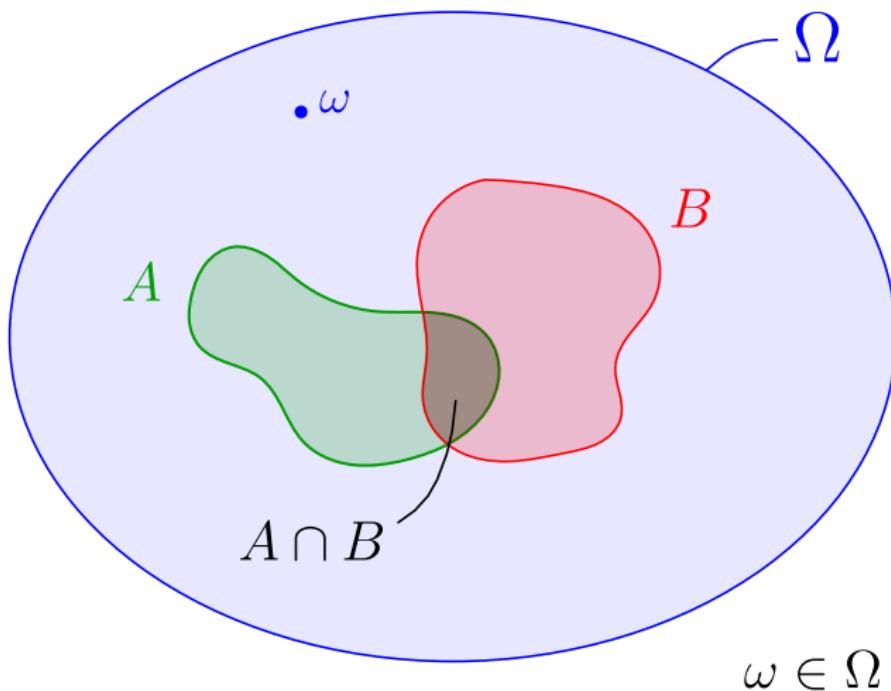
Quelques rappels de théorie des ensembles



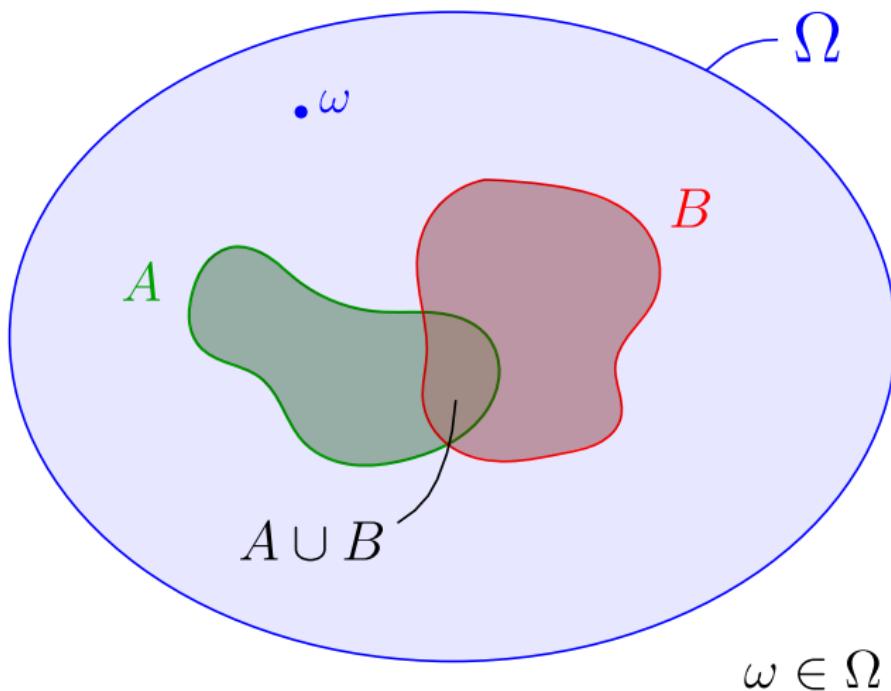
Quelques rappels de théorie des ensembles



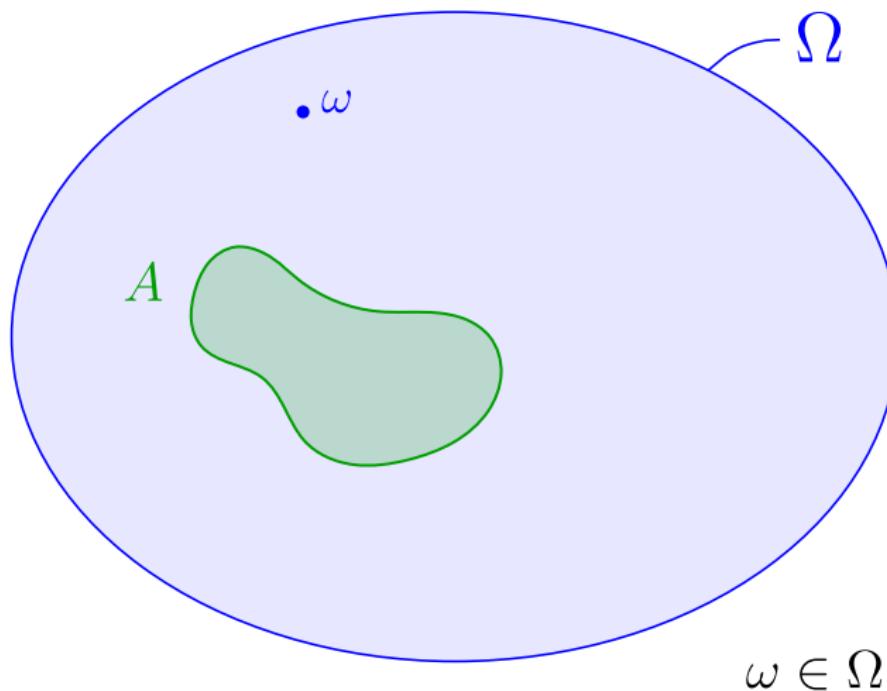
Quelques rappels de théorie des ensembles



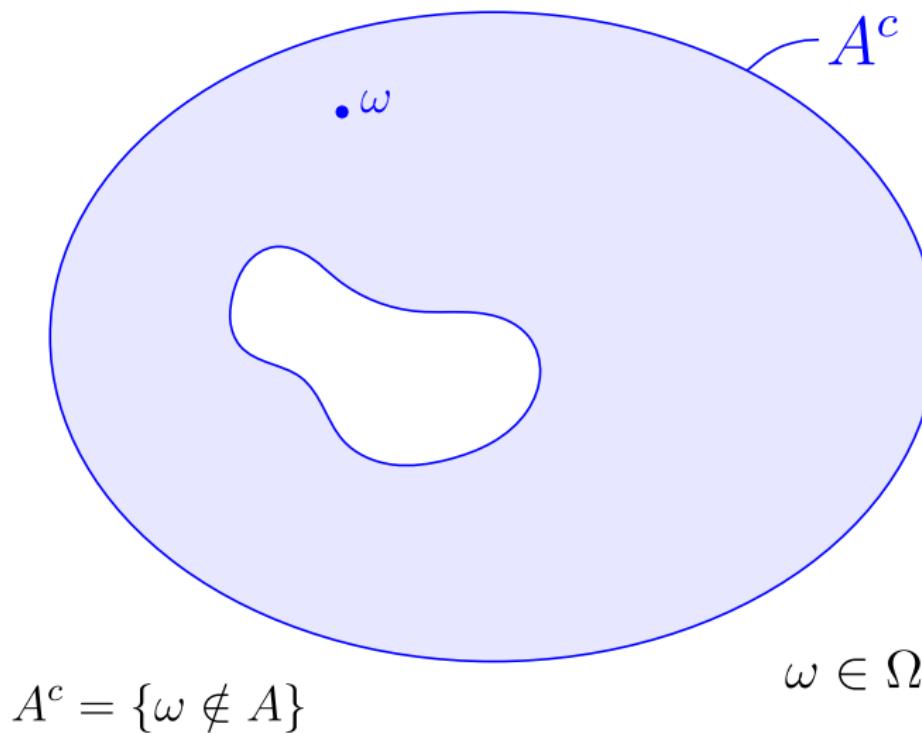
Quelques rappels de théorie des ensembles



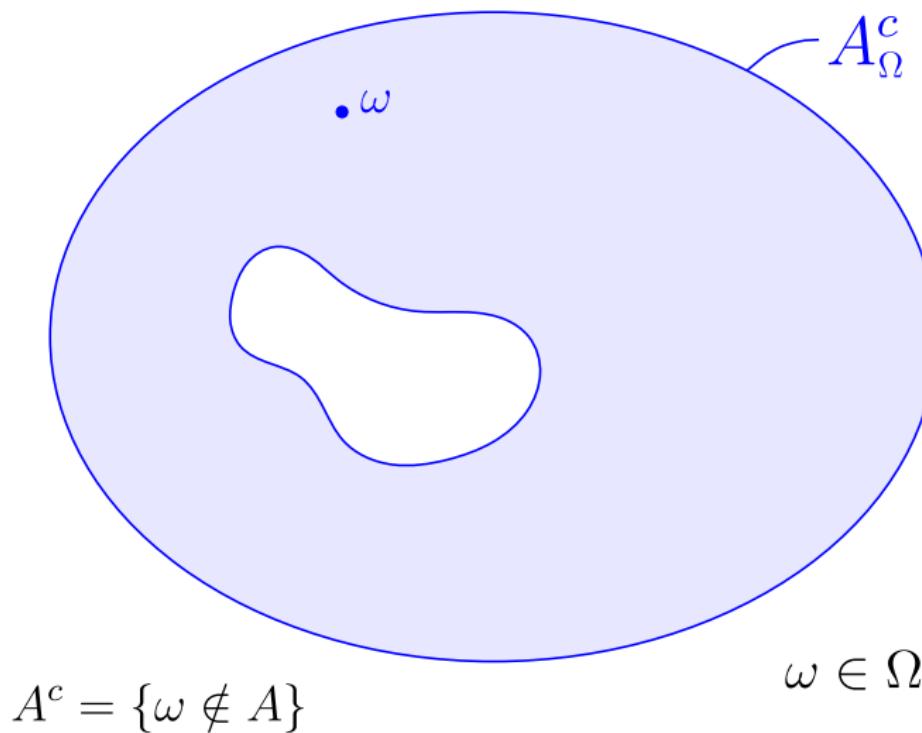
Quelques rappels de théorie des ensembles



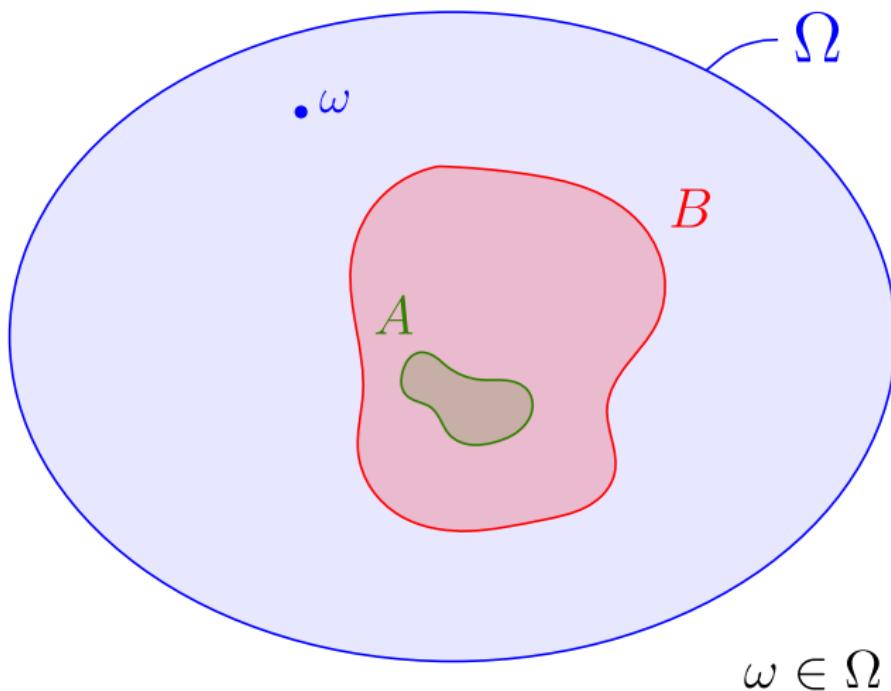
Quelques rappels de théorie des ensembles



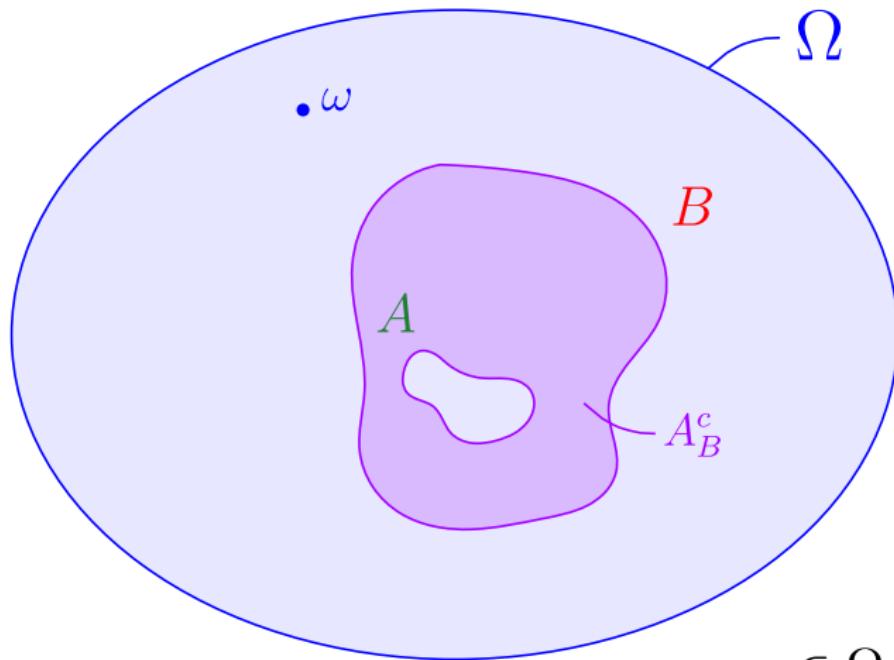
Quelques rappels de théorie des ensembles



Quelques rappels de théorie des ensembles

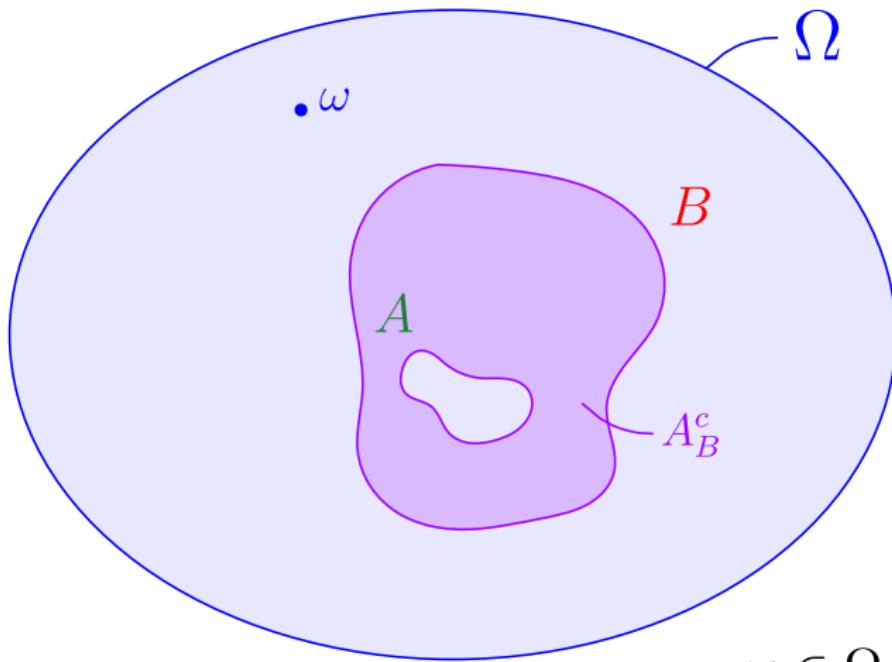


Quelques rappels de théorie des ensembles



$$A_B^c = \{\omega \in B \mid \omega \notin A\}$$

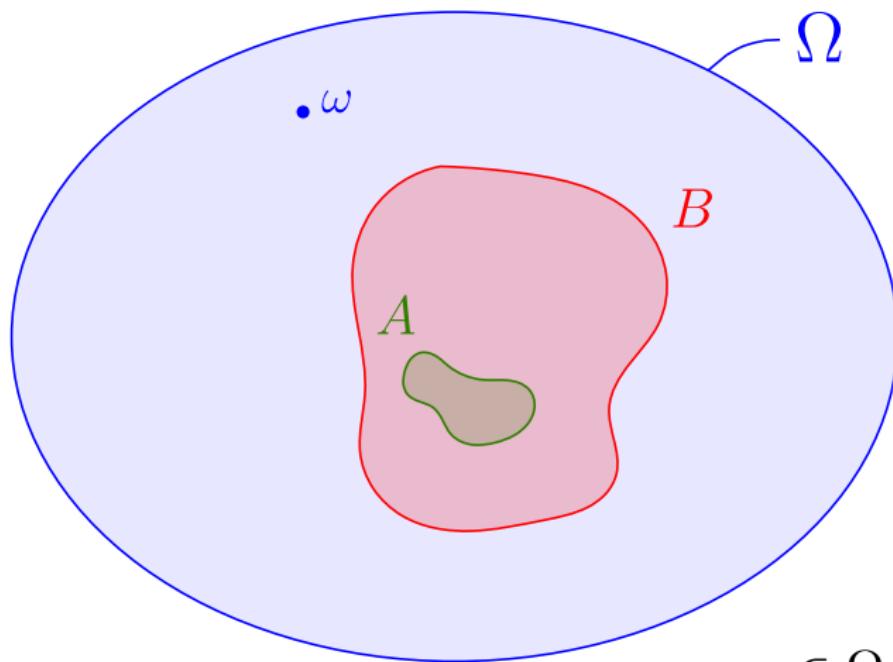
Quelques rappels de théorie des ensembles



$$A_B^c = \{\omega \in B \mid \omega \notin A\} = A^c \cap B$$

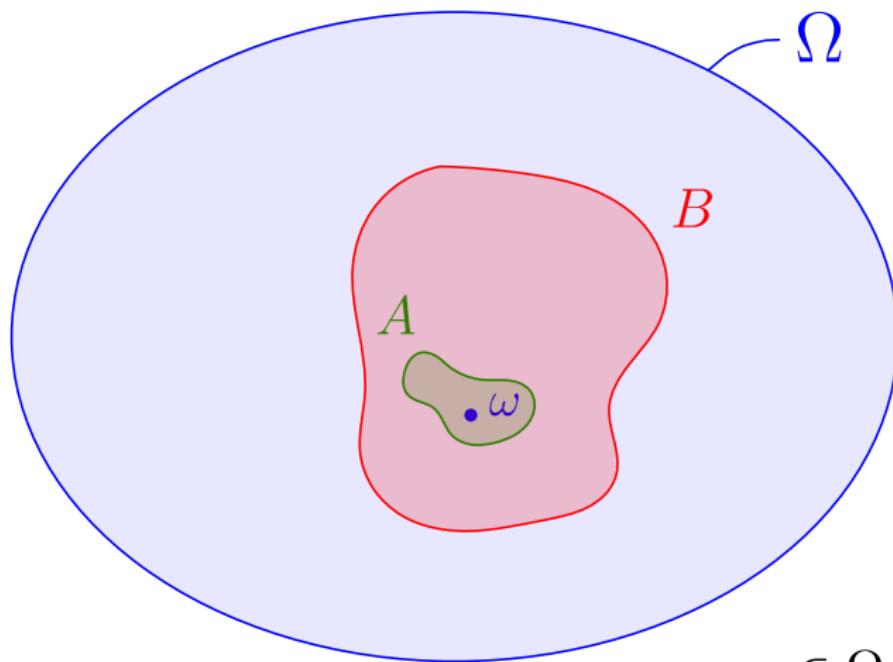
$$\omega \in \Omega$$

Quelques rappels de théorie des ensembles



$A \subset B :$

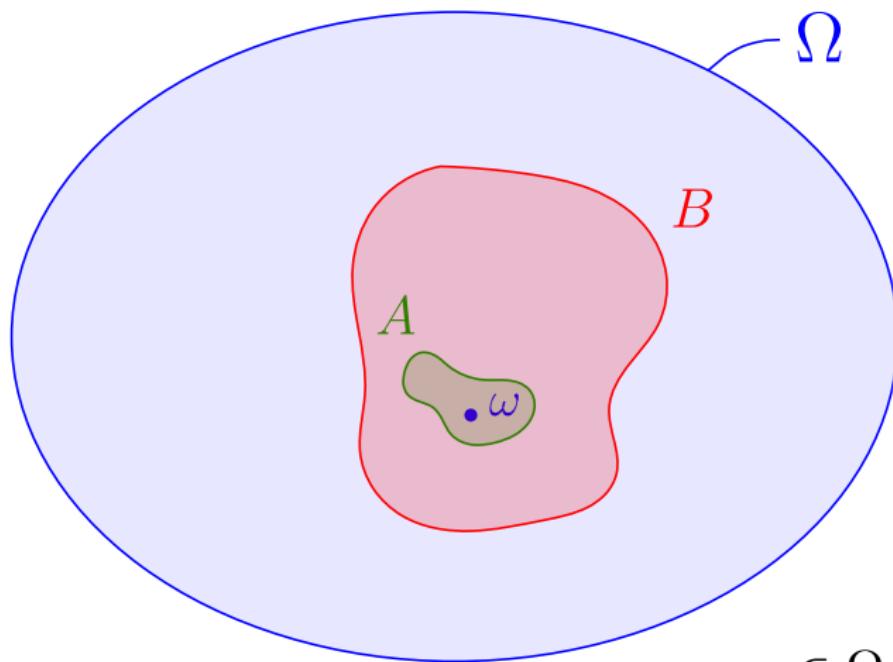
Quelques rappels de théorie des ensembles



$$A \subset B : \omega \in A \Rightarrow \omega \in B$$

$$\omega \in \Omega$$

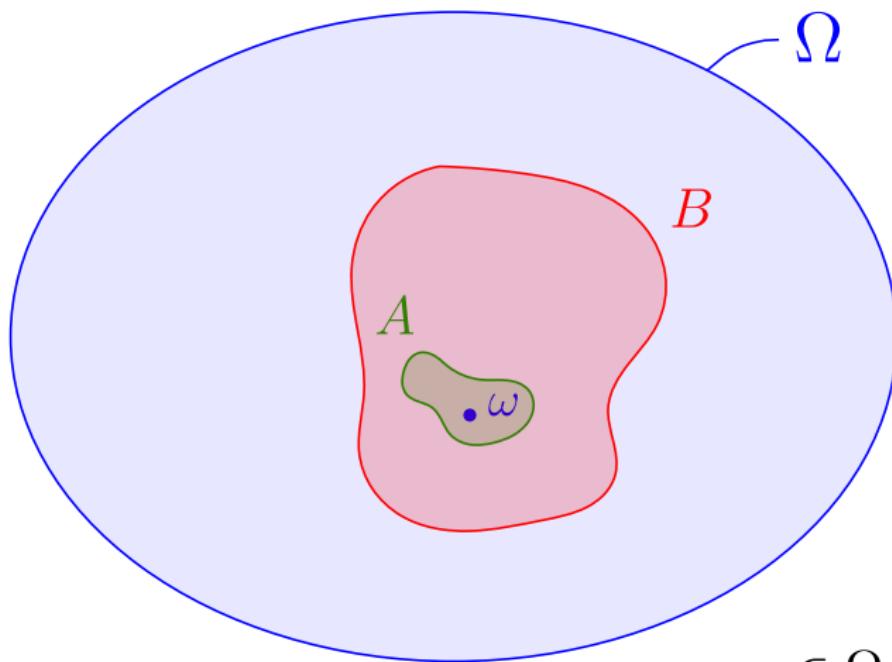
Quelques rappels de théorie des ensembles



$$A = B : \omega \in A \Leftrightarrow \omega \in B$$

$$\omega \in \Omega$$

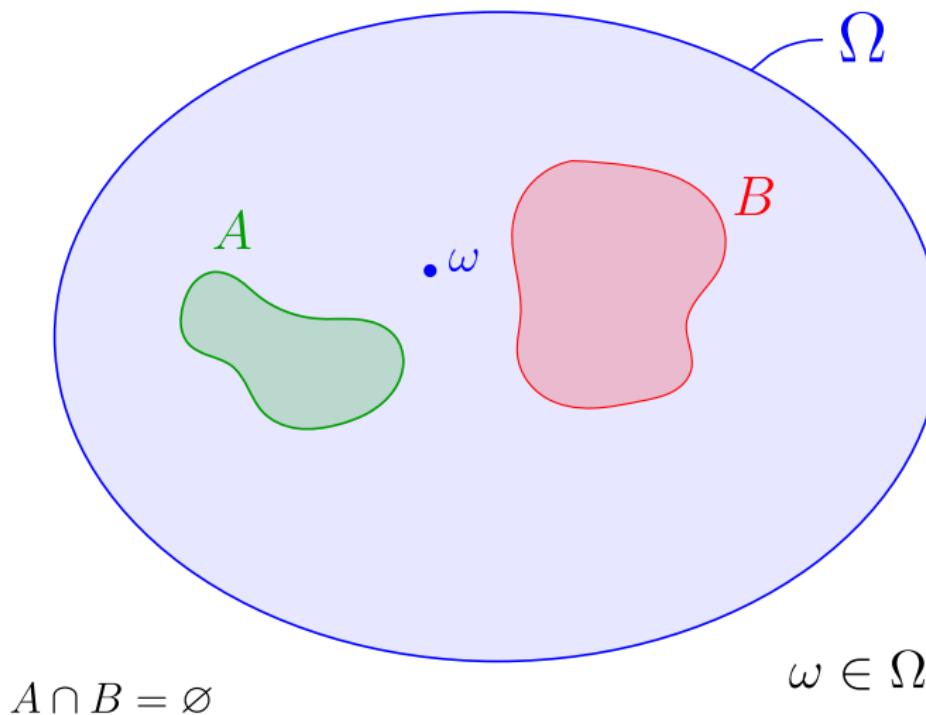
Quelques rappels de théorie des ensembles



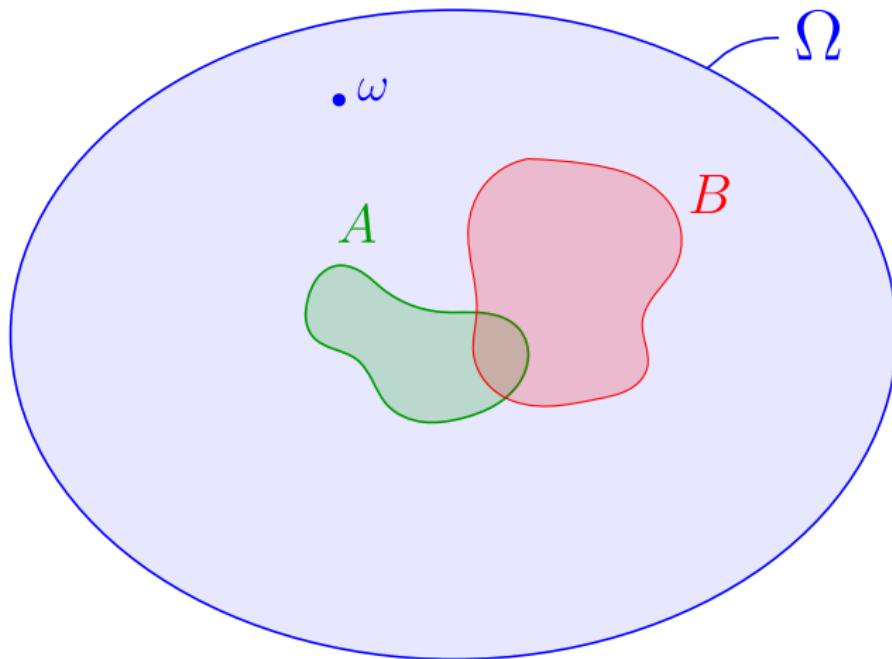
$$A = B : A \subset B \text{ et } B \subset A$$

$$\omega \in \Omega$$

Quelques rappels de théorie des ensembles

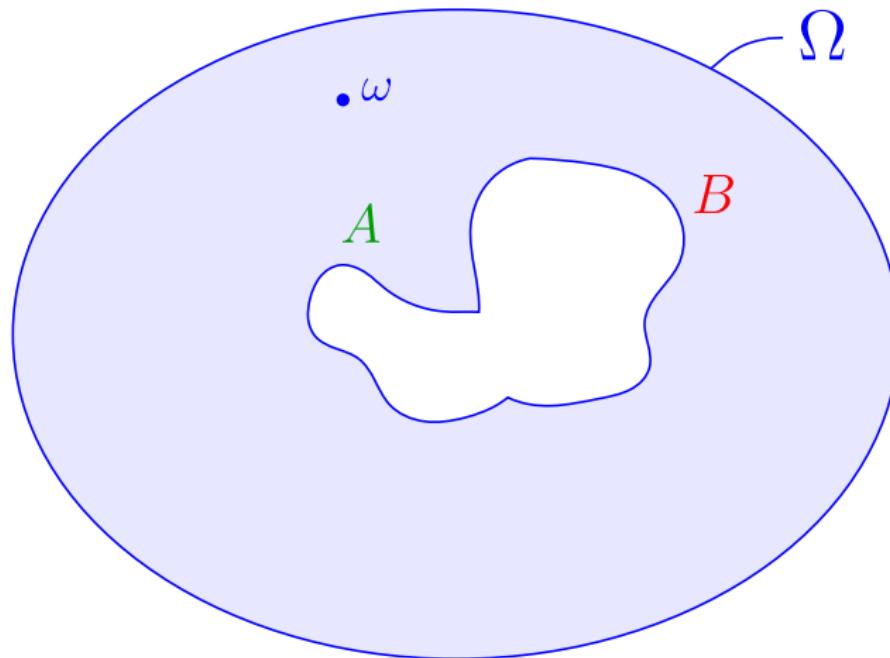


Quelques rappels de théorie des ensembles



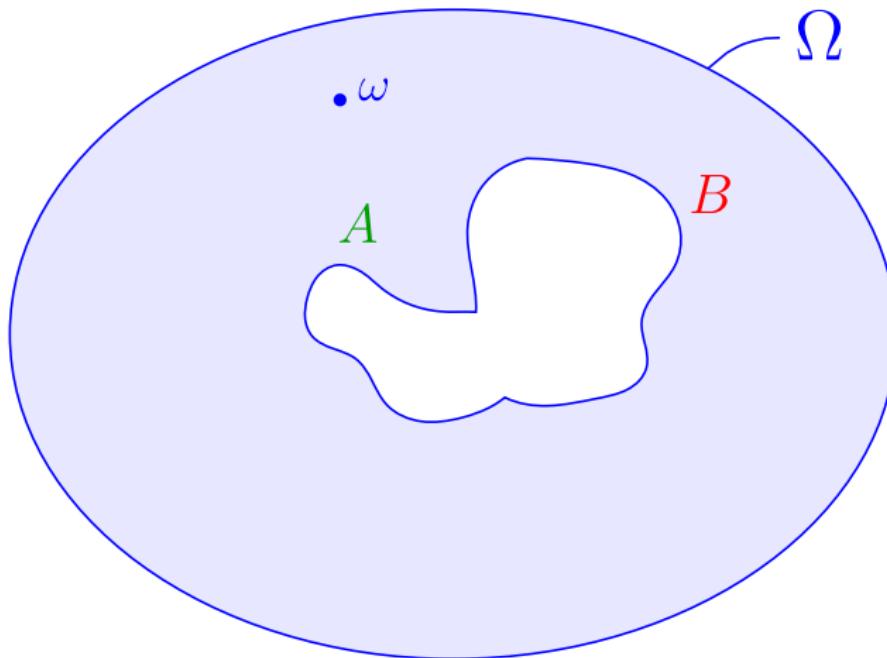
$$(A \cup B)^c$$

Quelques rappels de théorie des ensembles



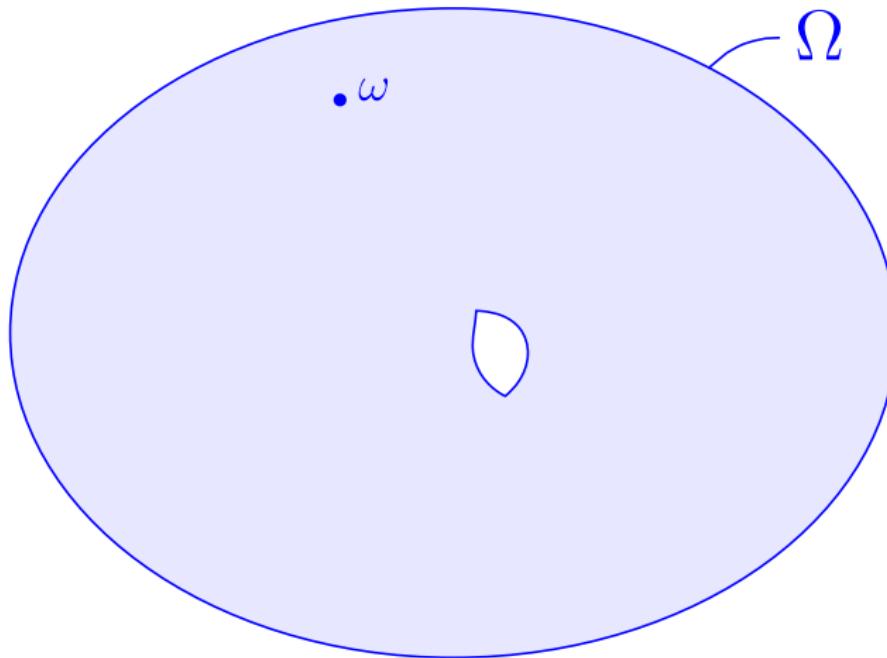
$$(A \cup B)^c$$

Quelques rappels de théorie des ensembles



$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$

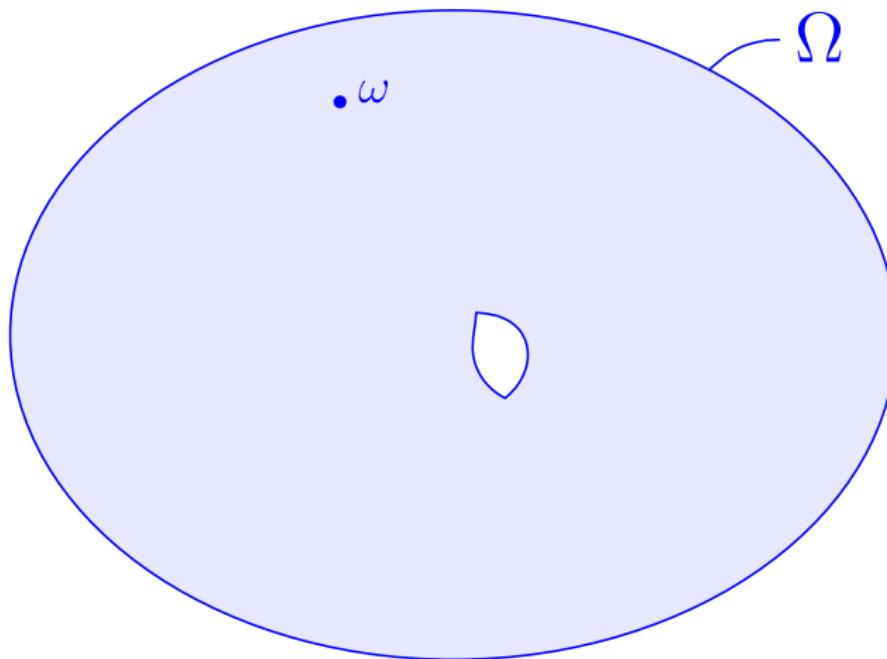
Quelques rappels de théorie des ensembles



$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$

$$(A \cap B)^c$$

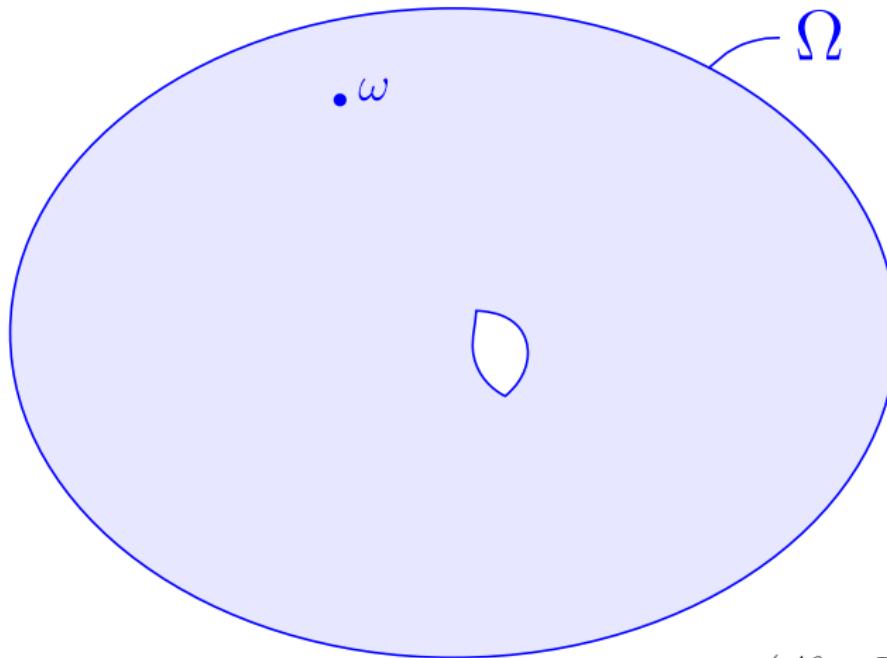
Quelques rappels de théorie des ensembles



$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$

$$(A \cap B)^c = (A^{c^c} \cap B^{c^c})^c$$

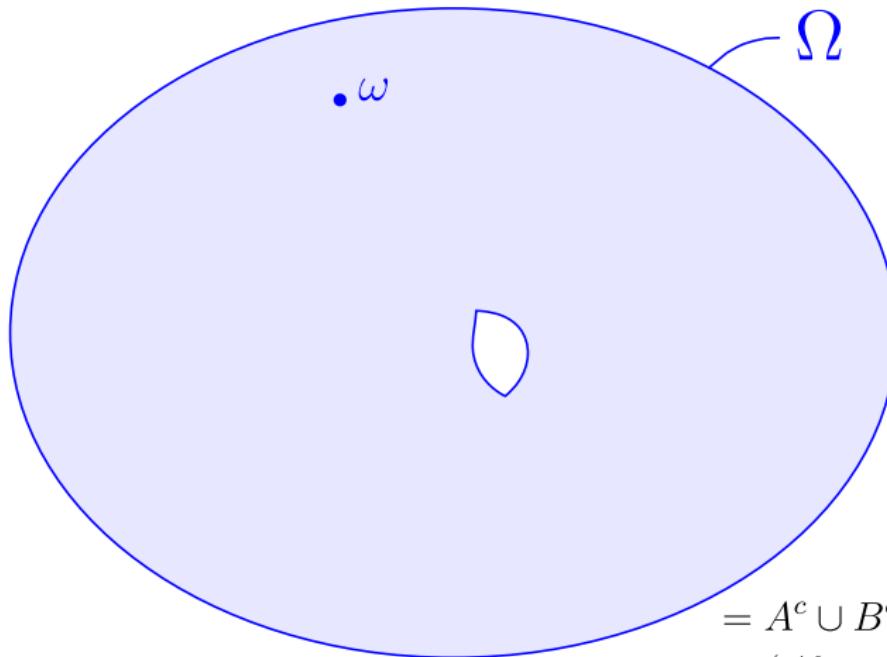
Quelques rappels de théorie des ensembles



$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$

$$(A \cap B)^c = (A^c \cup B^c)^c$$

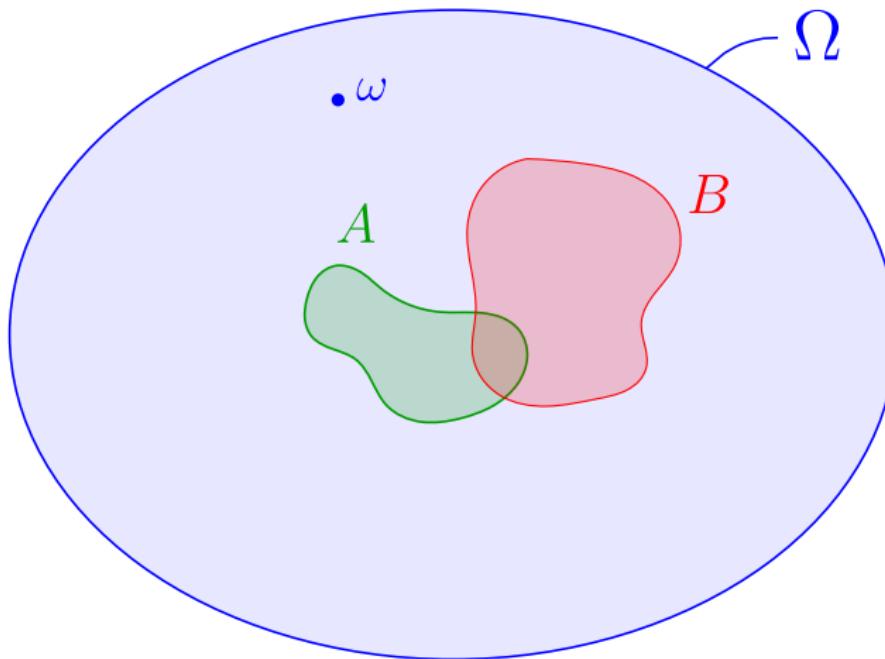
Quelques rappels de théorie des ensembles



$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$

$$\begin{aligned} &= A^c \cup B^c \\ &= (A^c \cup B^c)^c \\ (A \cap B)^c &= (A^{c^c} \cap B^{c^c})^c \end{aligned}$$

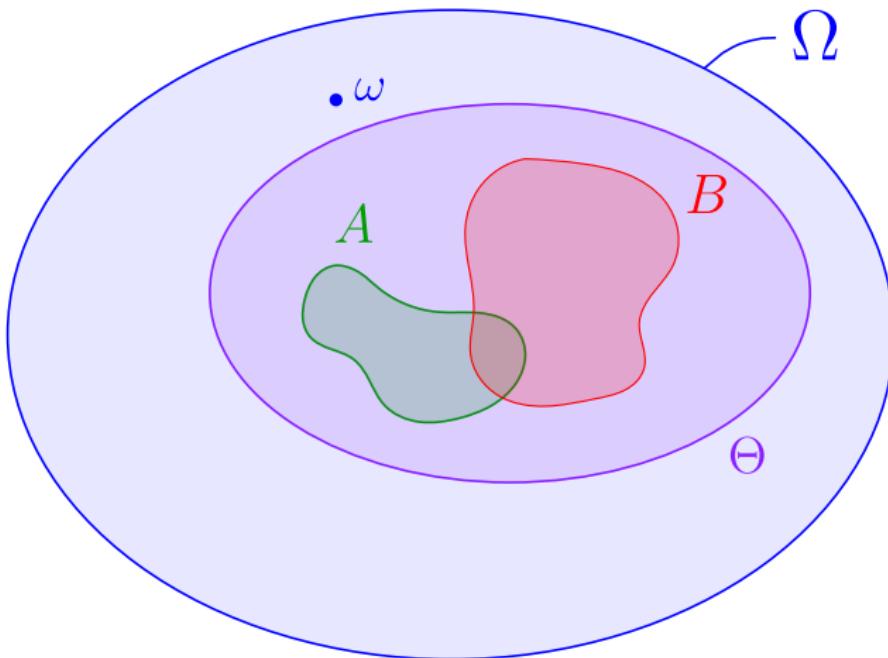
Quelques rappels de théorie des ensembles



$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$

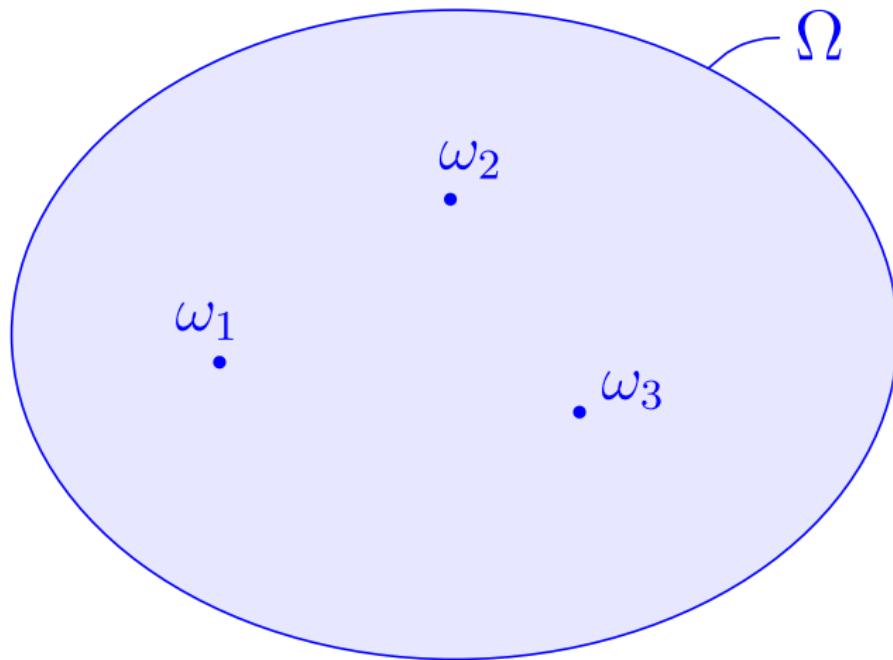
Quelques rappels de théorie des ensembles



$$(A \cup B)_{\Theta}^c = A_{\Theta}^c \cap B_{\Theta}^c$$

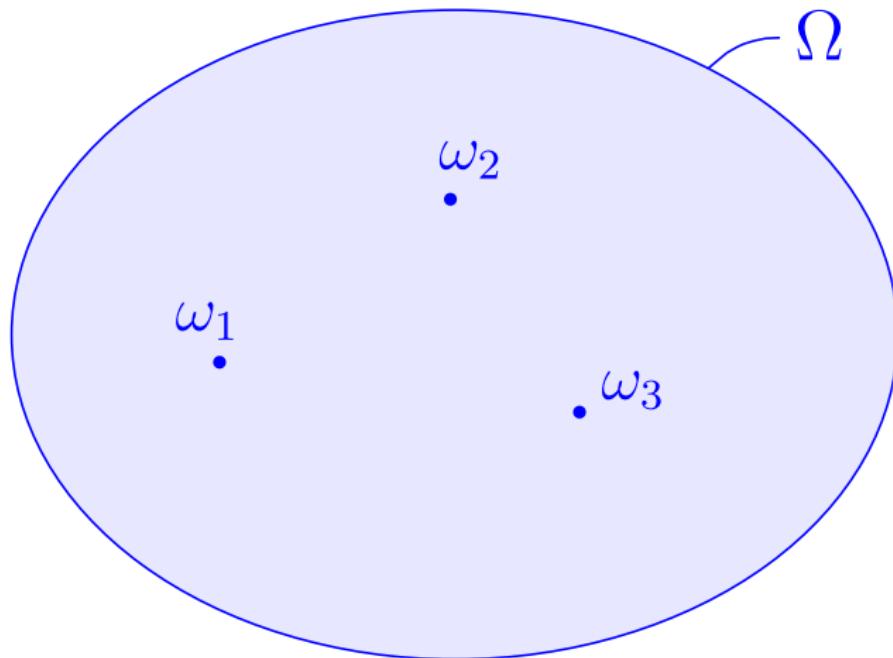
$$(A \cap B)_{\Theta}^c = A_{\Theta}^c \cup B_{\Theta}^c$$

Quelques rappels de théorie des ensembles



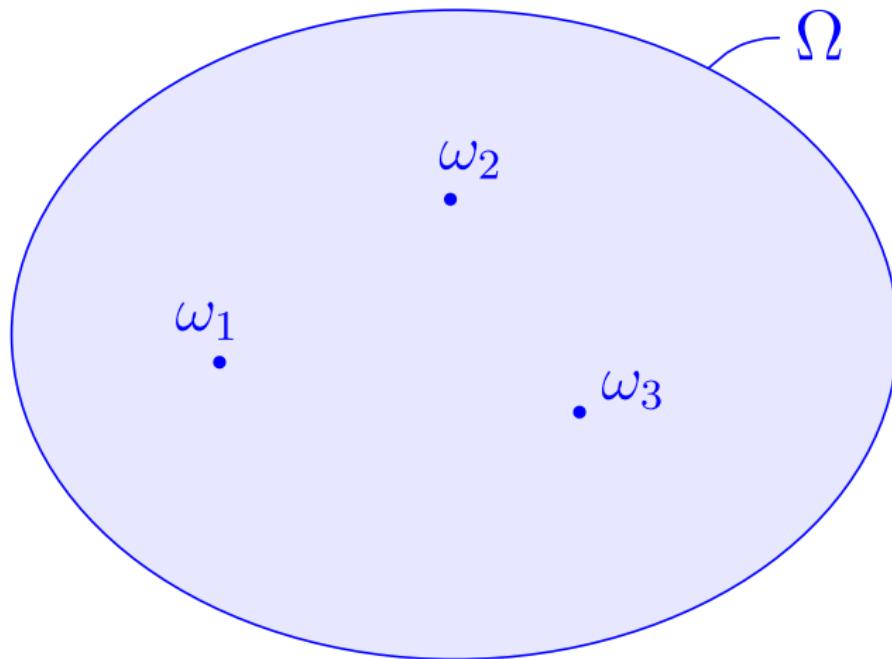
$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$$

Quelques rappels de théorie des ensembles



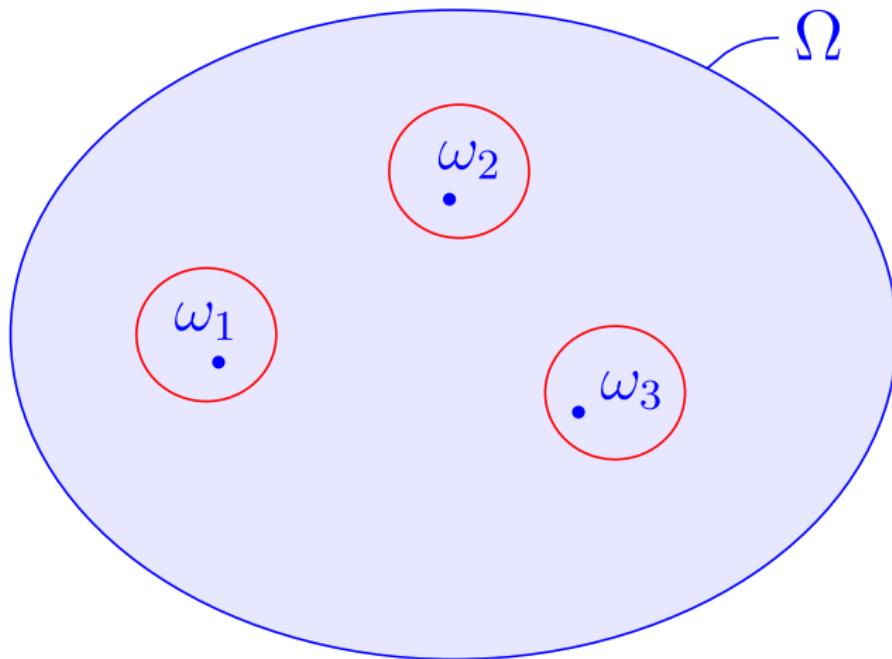
$$\mathcal{P}(\Omega) = \{$$

Quelques rappels de théorie des ensembles



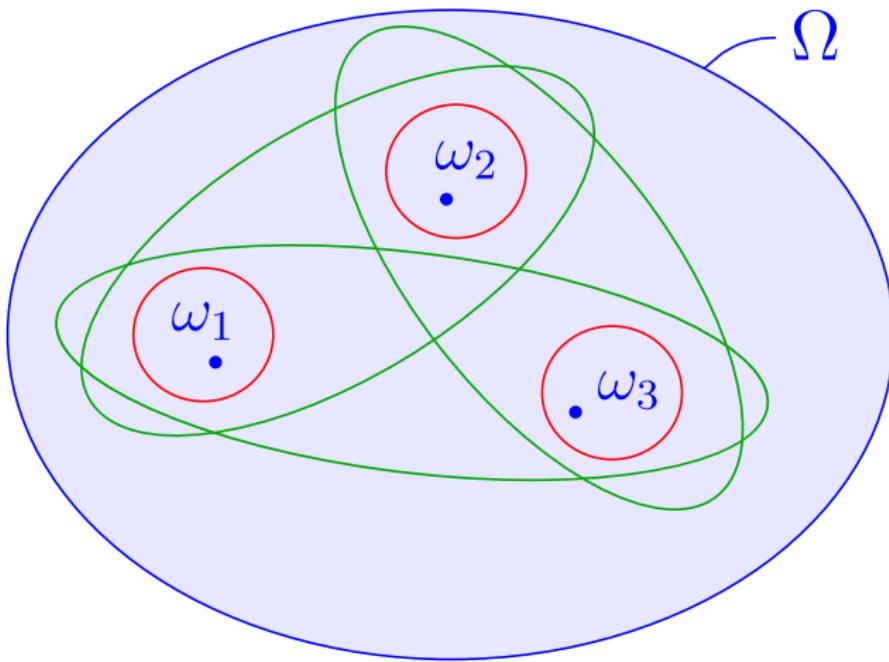
$$\mathcal{P}(\Omega) = \left\{ \emptyset \right.$$

Quelques rappels de théorie des ensembles



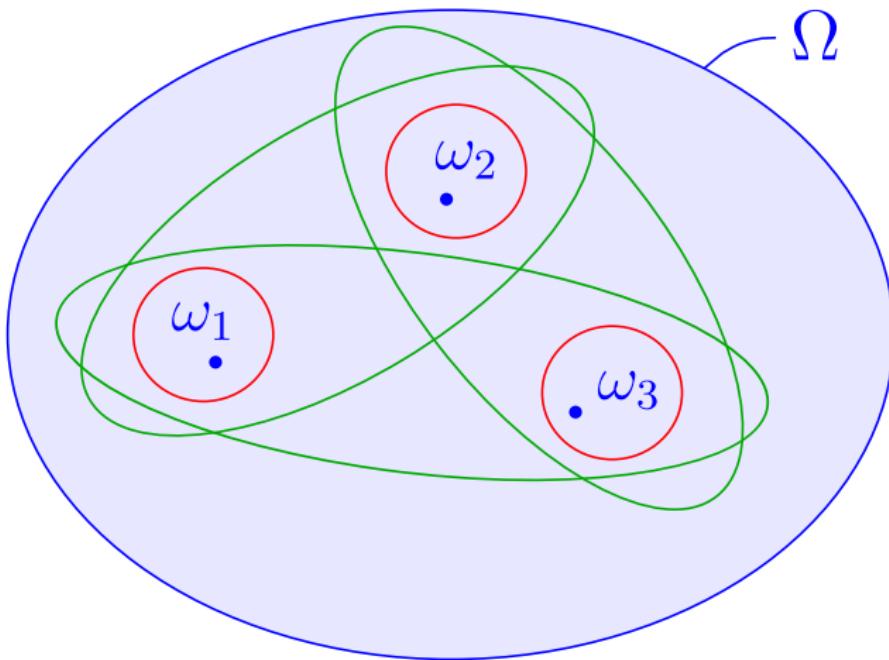
$$\mathcal{P}(\Omega) = \left\{ \emptyset, \omega_1, \omega_2, \omega_3 \right.$$

Quelques rappels de théorie des ensembles



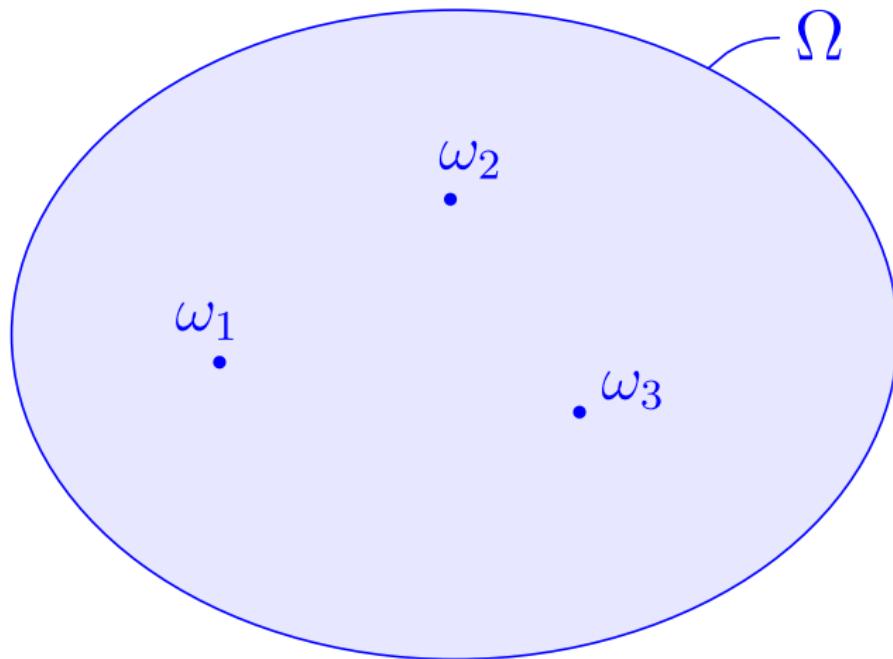
$$\mathcal{P}(\Omega) = \left\{ \emptyset, \omega_1, \omega_2, \omega_3, \{\omega_1, \omega_2\}, \{\omega_2, \omega_3\}, \{\omega_1, \omega_3\} \right\}$$

Quelques rappels de théorie des ensembles



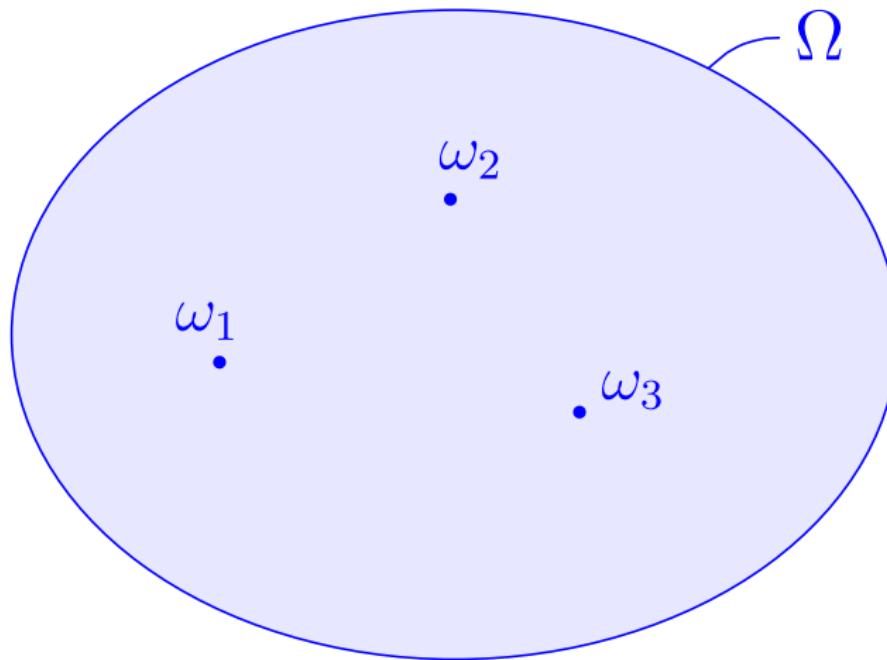
$$\mathcal{P}(\Omega) = \left\{ \emptyset, \omega_1, \omega_2, \omega_3, \{\omega_1, \omega_2\}, \{\omega_2, \omega_3\}, \{\omega_1, \omega_3\}, \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\} \right\}$$

Quelques rappels de théorie des ensembles



$$\text{card}(\mathcal{P}(\Omega)) = 2^{|\Omega|}$$

Quelques rappels de théorie des ensembles



$$\text{card}(\mathcal{P}(\Omega)) = 2^{|\Omega|}$$

$$\mathcal{P}(\Omega) = 2^\Omega$$

Ensemble dénombrable

Un ensemble (fini ou infini) est **dénombrable** quand ses éléments peuvent être numérotés sans omission.

Ensemble dénombrable

Un ensemble (fini ou infini) est **dénombrable** quand ses éléments peuvent être numérotés sans omission.

Définition : dénombrabilité (au sens large)

Un ensemble E est dit **dénombrable** s'il existe une bijection entre E et une partie de \mathbb{N} .

Ensemble dénombrable

Un ensemble (fini ou infini) est **dénombrable** quand ses éléments peuvent être numérotés sans omission.

Définition : dénombrabilité (au sens large)

Un ensemble E est dit **dénombrable** s'il existe une bijection entre E et une partie de \mathbb{N} .

Exemples :

- $\{P, F\}, \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \mathbb{N}, \{2k\}_{k \in \mathbb{N}} \dots$

Ensemble dénombrable

Un ensemble (fini ou infini) est **dénombrable** quand ses éléments peuvent être numérotés sans omission.

Définition : dénombrabilité (au sens large)

Un ensemble E est dit **dénombrable** s'il existe une bijection entre E et une partie de \mathbb{N} .

Exemples :

- $\{P, F\}, \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \mathbb{N}, \{2k\}_{k \in \mathbb{N}}$...sont dénombrables.

Ensemble dénombrable

Un ensemble (fini ou infini) est **dénombrable** quand ses éléments peuvent être numérotés sans omission.

Définition : dénombrabilité (au sens large)

Un ensemble E est dit **dénombrable** s'il existe une bijection entre E et une partie de \mathbb{N} .

Exemples :

- $\{P, F\}, \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \mathbb{N}, \{2k\}_{k \in \mathbb{N}}$...sont dénombrables.
- $[0, 1], \mathbb{R}, \mathbb{R}^2, \mathcal{P}(\mathbb{R})$...

Ensemble dénombrable

Un ensemble (fini ou infini) est **dénombrable** quand ses éléments peuvent être numérotés sans omission.

Définition : dénombrabilité (au sens large)

Un ensemble E est dit **dénombrable** s'il existe une bijection entre E et une partie de \mathbb{N} .

Exemples :

- $\{P, F\}, \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \mathbb{N}, \{2k\}_{k \in \mathbb{N}}$...sont dénombrables.
- $[0, 1], \mathbb{R}, \mathbb{R}^2, \mathcal{P}(\mathbb{R})$...ne sont pas dénombrables.

Ensemble dénombrable

Un ensemble (fini ou infini) est **dénombrable** quand ses éléments peuvent être numérotés sans omission.

Définition : dénombrabilité (au sens large)

Un ensemble E est dit **dénombrable** s'il existe une bijection entre E et une partie de \mathbb{N} .

Exemples :

- $\{P, F\}, \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \mathbb{N}, \{2k\}_{k \in \mathbb{N}}$...sont dénombrables.
- $[0, 1], \mathbb{R}, \mathbb{R}^2, \mathcal{P}(\mathbb{R})$...ne sont pas dénombrables.
- \mathbb{Z} ?

Ensemble dénombrable

Un ensemble (fini ou infini) est **dénombrable** quand ses éléments peuvent être numérotés sans omission.

Définition : dénombrabilité (au sens large)

Un ensemble E est dit **dénombrable** s'il existe une bijection entre E et une partie de \mathbb{N} .

Exemples :

- $\{P, F\}, \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \mathbb{N}, \{2k\}_{k \in \mathbb{N}}$...sont dénombrables.
- $[0, 1], \mathbb{R}, \mathbb{R}^2, \mathcal{P}(\mathbb{R})$...ne sont pas dénombrables.
- \mathbb{Z} ? \mathbb{N}^2 ?

Ensemble dénombrable

Un ensemble (fini ou infini) est **dénombrable** quand ses éléments peuvent être numérotés sans omission.

Définition : dénombrabilité (au sens large)

Un ensemble E est dit **dénombrable** s'il existe une bijection entre E et une partie de \mathbb{N} .

Exemples :

- $\{P, F\}, \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \mathbb{N}, \{2k\}_{k \in \mathbb{N}}$...sont dénombrables.
- $[0, 1], \mathbb{R}, \mathbb{R}^2, \mathcal{P}(\mathbb{R})$...ne sont pas dénombrables.
- $\mathbb{Z} ? \quad \mathbb{N}^2 ? \quad \mathbb{Q} ?$

Ensemble dénombrable

Un ensemble (fini ou infini) est **dénombrable** quand ses éléments peuvent être numérotés sans omission.

Définition : dénombrabilité (au sens large)

Un ensemble E est dit **dénombrable** s'il existe une bijection entre E et une partie de \mathbb{N} .

Exemples :

- $\{P, F\}, \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \mathbb{N}, \{2k\}_{k \in \mathbb{N}}$...sont dénombrables.
- $[0, 1], \mathbb{R}, \mathbb{R}^2, \mathcal{P}(\mathbb{R})$...ne sont pas dénombrables.
- $\mathbb{Z} ? \quad \mathbb{N}^2 ? \quad \mathbb{Q} ? \quad 2^{\mathbb{N}} = \mathcal{P}(\mathbb{N}) ?$

Espace probabilisable

Soit Ω l'univers des éventualités : ensemble **fondamental**

Définition : algèbre

Une famille $\mathcal{A} \subseteq 2^\Omega$ est une **algèbre** sur Ω si :

- \mathcal{A} est **non vide**
- Stabilité par **complémentaire** : $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$
- Stabilité par **union finie** :

$$(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{A} \Rightarrow (\bigcup_{k=0}^n A_k) \in \mathcal{A}$$

Espace probabilisable

Soit Ω l'univers des éventualités : ensemble **fondamental**

Définition : algèbre

Une famille $\mathcal{A} \subseteq 2^\Omega$ est une **algèbre** sur Ω si :

- \mathcal{A} est **non vide**
- Stabilité par **complémentaire** : $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$
- Stabilité par **union finie** :

$$(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{A} \Rightarrow (\bigcup_{k=0}^n A_k) \in \mathcal{A}$$

Espace probabilisable

Soit Ω l'univers des éventualités : ensemble **fondamental**

Définition : algèbre

Une famille $\mathcal{A} \subseteq 2^\Omega$ est une **algèbre** sur Ω si :

- \mathcal{A} est **non vide**
- Stabilité par **complémentaire** : $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$
- Stabilité par **union finie** :

$$(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{A} \Rightarrow (\bigcup_{k=0}^n A_k) \in \mathcal{A}$$

Exemple : $\{A \subset \mathbb{N} \mid A \text{ ou } A^c \text{ est fini}\}$ est une algèbre sur \mathbb{N} .

Soit Ω l'univers des éventualités : ensemble **fondamental**

Définition : tribu

Une famille $\mathcal{A} \subseteq 2^\Omega$ est une **tribu** sur Ω si :

- \mathcal{A} est **non vide**
- Stabilité par **complémentaire** : $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$
- Stabilité par **union dénombrable** :

$$(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{A} \Rightarrow (\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n) \in \mathcal{A}$$

La structure algébrique (Ω, \mathcal{A}) est un espace **mesurable** (ou probabilisable). Les éléments de $A \in \mathcal{A}$ sont des **parties mesurables**.

Exemple : $\{A \subset \mathbb{N} \mid A \text{ ou } A^c \text{ est fini}\}$ n'est pas une tribu sur \mathbb{N} .

Soit Ω l'univers des éventualités : ensemble **fondamental**

Définition : tribu

Une famille $\mathcal{A} \subseteq 2^\Omega$ est une **tribu** sur Ω si :

- \mathcal{A} est **non vide**
- Stabilité par **complémentaire** : $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$
- Stabilité par **union dénombrable** :

$$(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{A} \Rightarrow (\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n) \in \mathcal{A}$$

La structure algébrique (Ω, \mathcal{A}) est un espace **mesurable** (ou probabilisable). Les éléments de $A \in \mathcal{A}$ sont des **parties mesurables**.

Exemple : $\{\emptyset, \Omega\}$ et $\mathcal{P}(\Omega)$ sont toujours des tribus sur Ω .

Soit Ω l'univers des éventualités : ensemble **fondamental**

Définition : tribu - alternative

Une famille $\mathcal{A} \subseteq 2^\Omega$ est une **tribu** sur Ω si :

- $\emptyset \in \mathcal{A}$
- Stabilité par **complémentaire** : $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$
- Stabilité par **intersection dénombrable** :

$$(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{A} \Rightarrow (\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n) \in \mathcal{A}$$

La structure algébrique (Ω, \mathcal{A}) est un espace **mesurable** (ou probabilisable). Les éléments de $A \in \mathcal{A}$ sont des **parties mesurables**.

Exemple : $\{\emptyset, \Omega\}$ et $\mathcal{P}(\Omega)$ sont toujours des tribus sur Ω .

Espace probabilisable



Exemple : $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Espace probabilisable



Exemple : $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

- $\mathcal{A} = \{\emptyset, \Omega\}$ est une tribu (tribu grossière)

Espace probabilisable



Exemple : $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

- $\mathcal{A} = \{\emptyset, \Omega\}$ est une tribu (tribu grossière)
- $\mathcal{B} = \{\emptyset, \{1, 3, 5\}, \{2, 4, 6\}, \Omega\}$

Espace probabilisable



Exemple : $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

- $\mathcal{A} = \{\emptyset, \Omega\}$ est une tribu (tribu grossière)
- $\mathcal{B} = \{\emptyset, \{1, 3, 5\}, \{2, 4, 6\}, \Omega\}$ est une tribu

Espace probabilisable



Exemple : $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

- $\mathcal{A} = \{\emptyset, \Omega\}$ est une tribu (tribu grossière)
- $\mathcal{B} = \{\emptyset, \{1, 3, 5\}, \{2, 4, 6\}, \Omega\}$ est une tribu
- $\mathcal{C} = \{\emptyset, \{1, 2\}, \{3, 4\}, \{5, 6\}, \Omega\}$

Espace probabilisable



Exemple : $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

- $\mathcal{A} = \{\emptyset, \Omega\}$ est une tribu (tribu grossière)
- $\mathcal{B} = \{\emptyset, \{1, 3, 5\}, \{2, 4, 6\}, \Omega\}$ est une tribu
- $\mathcal{C} = \{\emptyset, \{1, 2\}, \{3, 4\}, \{5, 6\}, \Omega\}$ n'est pas une tribu

Espace probabilisable



Exemple : $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

- $\mathcal{A} = \{\emptyset, \Omega\}$ est une tribu (tribu grossière)
- $\mathcal{B} = \{\emptyset, \{1, 3, 5\}, \{2, 4, 6\}, \Omega\}$ est une tribu
- $\mathcal{C} = \{\emptyset, \{1, 2\}, \{3, 4\}, \{5, 6\}, \Omega\}$ n'est pas une tribu
 $\rightarrow \{1, 2\}^c = \{3, 4, 5, 6\} \notin \mathcal{C}$

Espace probabilisable



Exemple : $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

- $\mathcal{A} = \{\emptyset, \Omega\}$ est une tribu (tribu grossière)
- $\mathcal{B} = \{\emptyset, \{1, 3, 5\}, \{2, 4, 6\}, \Omega\}$ est une tribu
- $\mathcal{C} = \{\emptyset, \{1, 2\}, \{3, 4\}, \{5, 6\}, \Omega\}$ n'est pas une tribu
 $\rightarrow \{1, 2\}^c = \{3, 4, 5, 6\} \notin \mathcal{C}$
- Tribu engendrée par \mathcal{C} :

Espace probabilisable



Exemple : $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

- $\mathcal{A} = \{\emptyset, \Omega\}$ est une tribu (tribu grossière)
- $\mathcal{B} = \{\emptyset, \{1, 3, 5\}, \{2, 4, 6\}, \Omega\}$ est une tribu
- $\mathcal{C} = \{\emptyset, \{1, 2\}, \{3, 4\}, \{5, 6\}, \Omega\}$ n'est pas une tribu
 $\rightarrow \{1, 2\}^c = \{3, 4, 5, 6\} \notin \mathcal{C}$
- Tribu engendrée par \mathcal{C} :

$$\sigma(\mathcal{C})$$

Espace probabilisable



Exemple : $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

- $\mathcal{A} = \{\emptyset, \Omega\}$ est une tribu (tribu grossière)
- $\mathcal{B} = \{\emptyset, \{1, 3, 5\}, \{2, 4, 6\}, \Omega\}$ est une tribu
- $\mathcal{C} = \{\emptyset, \{1, 2\}, \{3, 4\}, \{5, 6\}, \Omega\}$ n'est pas une tribu
 $\rightarrow \{1, 2\}^c = \{3, 4, 5, 6\} \notin \mathcal{C}$

- Tribu engendrée par \mathcal{C} :

$$\sigma(\mathcal{C}) = \{\emptyset, \{1, 2\}, \{3, 4\}, \{5, 6\}, \Omega$$

Espace probabilisable



Exemple : $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

- $\mathcal{A} = \{\emptyset, \Omega\}$ est une tribu (tribu grossière)
- $\mathcal{B} = \{\emptyset, \{1, 3, 5\}, \{2, 4, 6\}, \Omega\}$ est une tribu
- $\mathcal{C} = \{\emptyset, \{1, 2\}, \{3, 4\}, \{5, 6\}, \Omega\}$ n'est pas une tribu
 $\rightarrow \{1, 2\}^c = \{3, 4, 5, 6\} \notin \mathcal{C}$

- Tribu engendrée par \mathcal{C} :

$$\sigma(\mathcal{C}) = \{\emptyset, \{1, 2\}, \{3, 4\}, \{5, 6\}, \Omega, \{1, 2, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 5, 6\}, \{1, 2, 4, 5, 6\}, \{1, 3, 4, 5, 6\}\}$$

Espace probabilisé

Soit (Ω, \mathcal{A}) un **espace mesurable**. Ω peut être **fini** ($\{P, F\}$), **infini dénombrable** ($\mathbb{N}, \mathbb{N}^2, \mathbb{Q}\dots$) ou même **continu** ($[0, 1], \mathbb{R}, \mathbb{R}^2\dots$).

Soit (Ω, \mathcal{A}) un **espace mesurable**. Ω peut être **fini** ($\{P, F\}$), **infini dénombrable** ($\mathbb{N}, \mathbb{N}^2, \mathbb{Q}\dots$) ou même **continu** ($[0, 1], \mathbb{R}, \mathbb{R}^2\dots$).

Définition : mesure

Une **mesure** sur (Ω, \mathcal{A}) est une fonction $\mu : \mathcal{A} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$:

Soit (Ω, \mathcal{A}) un **espace mesurable**. Ω peut être **fini** ($\{P, F\}$), **infini dénombrable** ($\mathbb{N}, \mathbb{N}^2, \mathbb{Q}\dots$) ou même **continu** ($[0, 1], \mathbb{R}, \mathbb{R}^2\dots$).

Définition : mesure

Une **mesure** sur (Ω, \mathcal{A}) est une fonction $\mu : \mathcal{A} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$:

- $\mu(\emptyset) = 0$

Soit (Ω, \mathcal{A}) un **espace mesurable**. Ω peut être **fini** ($\{P, F\}$), **infini dénombrable** ($\mathbb{N}, \mathbb{N}^2, \mathbb{Q}\dots$) ou même **continu** ($[0, 1], \mathbb{R}, \mathbb{R}^2\dots$).

Définition : mesure

Une **mesure** sur (Ω, \mathcal{A}) est une fonction $\mu : \mathcal{A} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$:

- $\mu(\emptyset) = 0$
- μ est **σ -additive** :

Soit (Ω, \mathcal{A}) un **espace mesurable**. Ω peut être **fini** ($\{P, F\}$), **infini dénombrable** ($\mathbb{N}, \mathbb{N}^2, \mathbb{Q}\dots$) ou même **continu** ($[0, 1], \mathbb{R}, \mathbb{R}^2\dots$).

Définition : mesure

Une **mesure** sur (Ω, \mathcal{A}) est une fonction $\mu : \mathcal{A} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$:

- $\mu(\emptyset) = 0$
- μ est **σ -additive** : $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de parties deux-à-deux disjointes de \mathcal{A} (i.e. $i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset$), alors :

Soit (Ω, \mathcal{A}) un **espace mesurable**. Ω peut être **fini** ($\{P, F\}$), **infini dénombrable** ($\mathbb{N}, \mathbb{N}^2, \mathbb{Q}\dots$) ou même **continu** ($[0, 1], \mathbb{R}, \mathbb{R}^2\dots$).

Définition : mesure

Une **mesure** sur (Ω, \mathcal{A}) est une fonction $\mu : \mathcal{A} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$:

- $\mu(\emptyset) = 0$
- μ est **σ -additive** : $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de parties deux-à-deux disjointes de \mathcal{A} (i.e. $i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset$), alors :

$$\mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n)$$

Soit (Ω, \mathcal{A}) un **espace mesurable**. Ω peut être **fini** ($\{P, F\}$), **infini dénombrable** ($\mathbb{N}, \mathbb{N}^2, \mathbb{Q}\dots$) ou même **continu** ($[0, 1], \mathbb{R}, \mathbb{R}^2\dots$).

Définition : mesure

Une **mesure** sur (Ω, \mathcal{A}) est une fonction $\mu : \mathcal{A} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$:

- $\mu(\emptyset) = 0$
- μ est **σ -additive** : $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de parties deux-à-deux disjointes de \mathcal{A} (i.e. $i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset$), alors :

$$\mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n)$$

Exemple : la mesure de **comptage** sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ définie pour toute partie A de \mathbb{N} par $\mu(A) = \text{card}(A)$.

Soit (Ω, \mathcal{A}) un **espace probabilisable**. Ω peut être **fini** ($\{P, F\}$), **infini dénombrable** ($\mathbb{N}, \mathbb{N}^2, \mathbb{Q}\dots$) ou même **continu** ($[0, 1], \mathbb{R}, \mathbb{R}^2\dots$).

Définition : mesure de probabilité (axiomes de Kolmogorov)

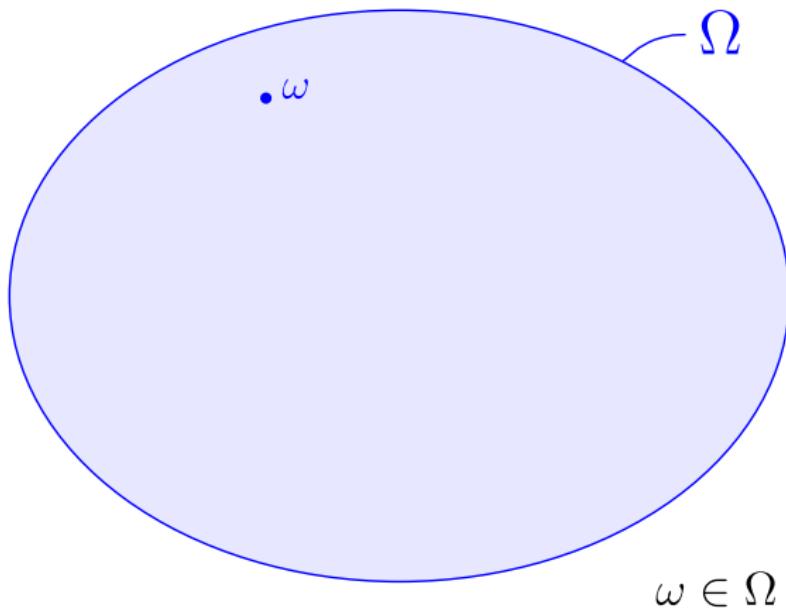
Une **mesure de probabilité** est une fonction $\mathbb{P} : \mathcal{A} \rightarrow [0, 1]$:

- $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$ et $\mathbb{P}(\Omega) = 1$
- μ est **σ -additive** : $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de parties deux-à-deux disjointes de \mathcal{A} (i.e. $i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset$), alors :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n)$$

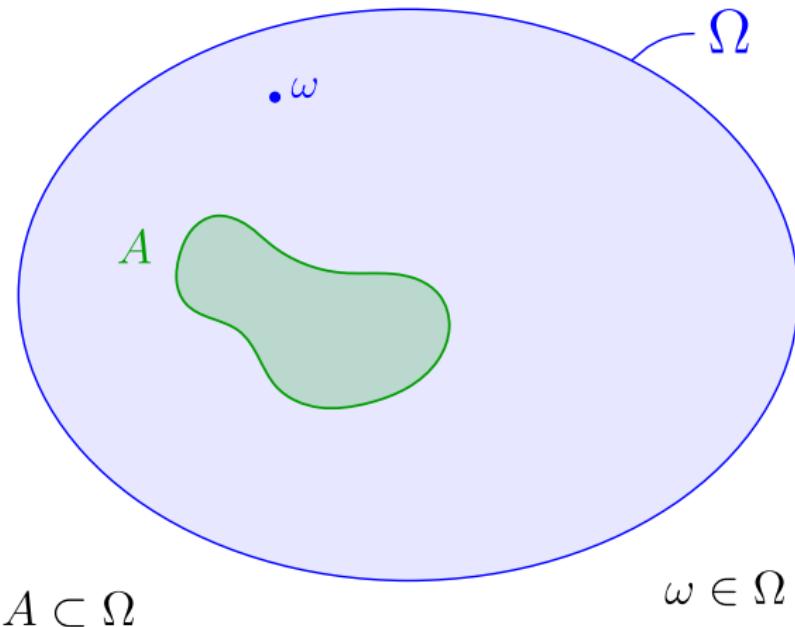
Exemple : la mesure de **dirac** sur (Ω, \mathcal{A}) définie pour un élément donné (fixé) $\omega \in \Omega$ par $\delta_\omega(A) = \mathbf{1}_{\omega \in A} \forall A \in \mathcal{A}$.

Vocabulaire probabiliste



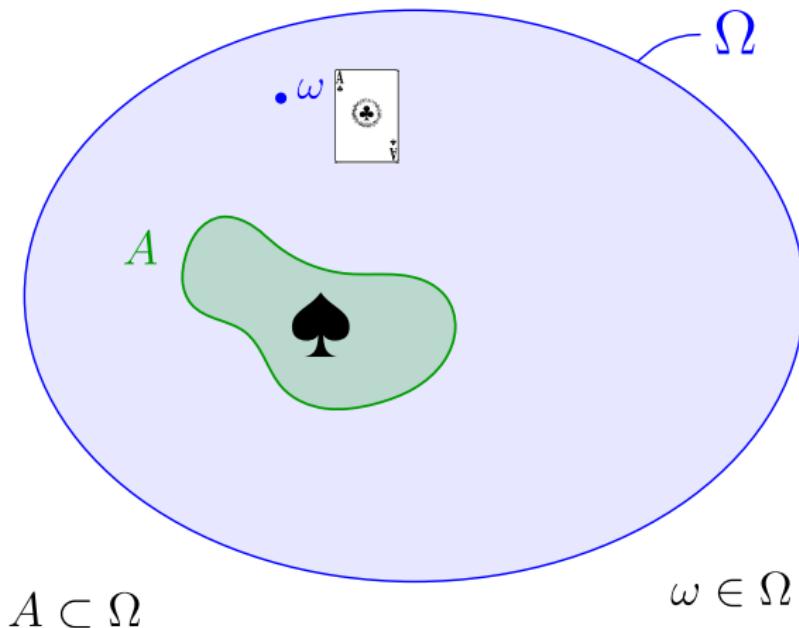
$\omega \in \Omega$ est une **éventualité** (élémentaire)

Vocabulaire probabiliste



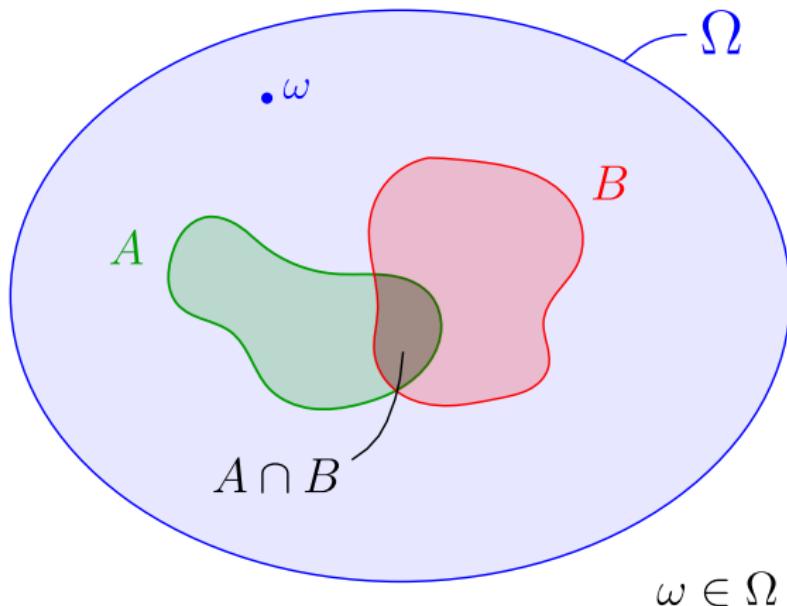
$A \subset \Omega$ est un évènement. Si $\omega \in \Omega$ alors, l'évènement A est réalisé.

Vocabulaire probabiliste



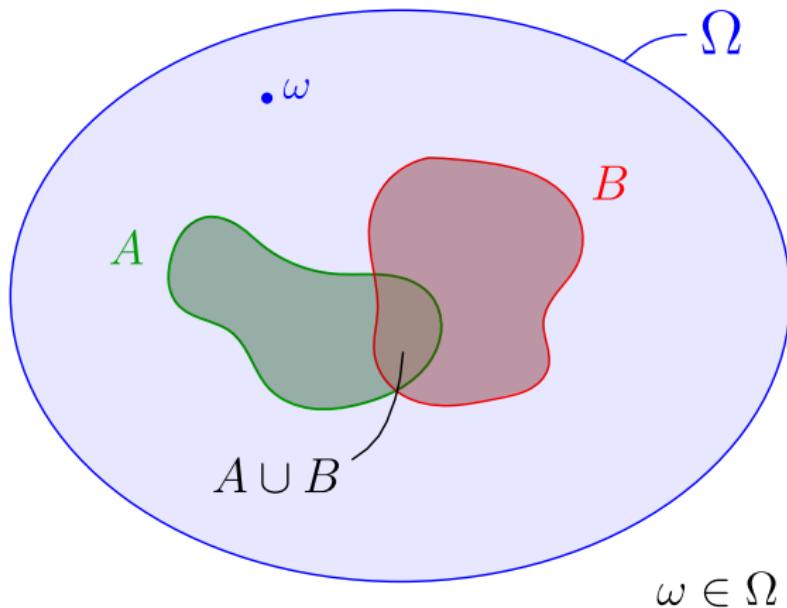
$A \subset \Omega$ est un évènement. Si $\omega \in \Omega$ alors, l'évènement A est réalisé.

Vocabulaire probabiliste



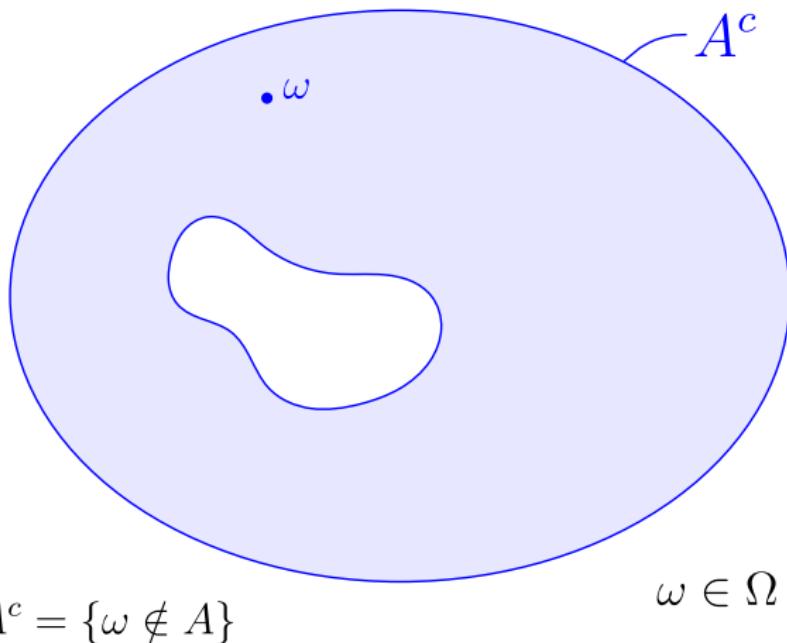
$A \cap B$: *A et B sont réalisés simultanément.*

Vocabulaire probabiliste



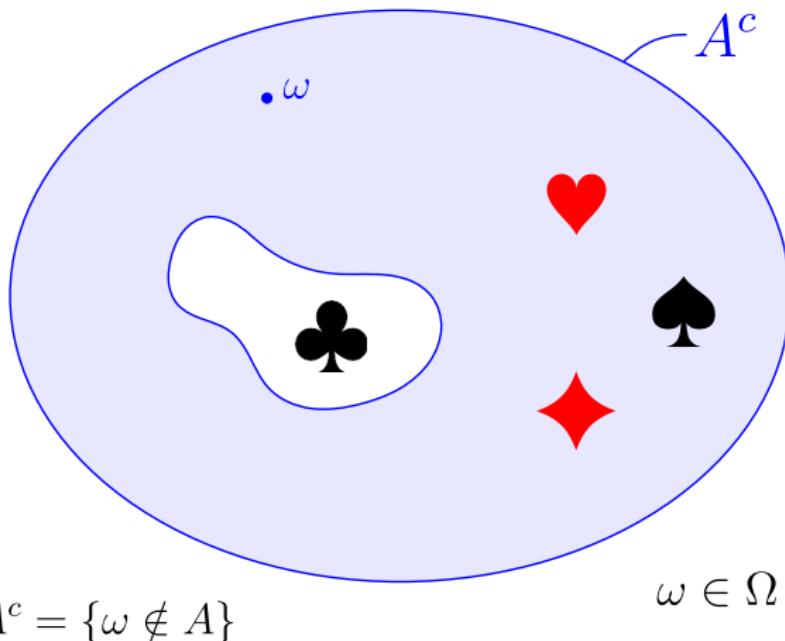
$A \cup B$: au moins l'un des deux évènements A ou B est réalisé.

Vocabulaire probabiliste



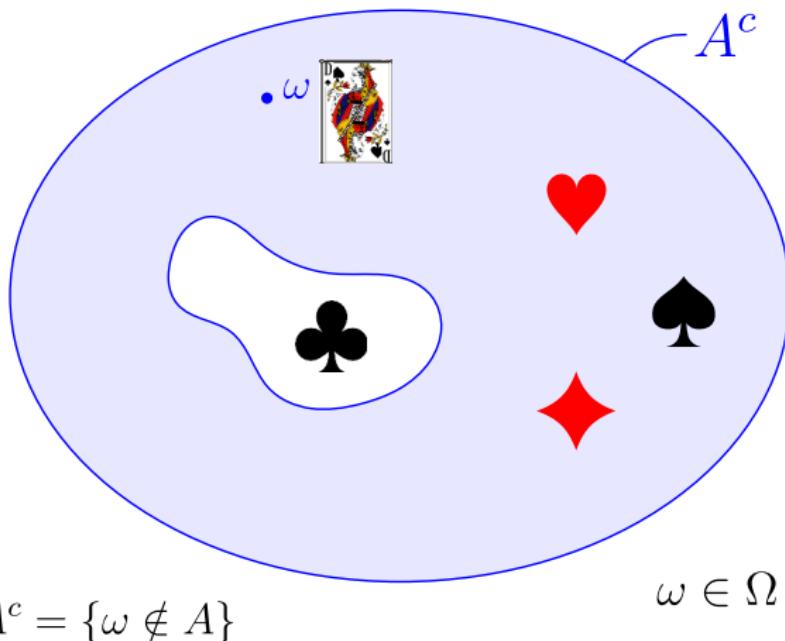
A^c : si $\omega \notin A$ alors, l'évènement A n'est pas réalisé.

Vocabulaire probabiliste



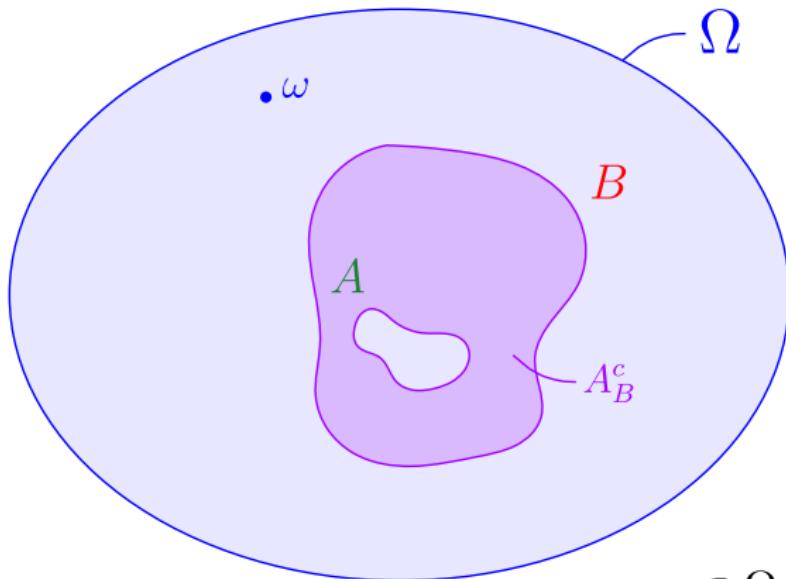
A^c : si $\omega \notin A$ alors, l'évènement A n'est pas réalisé.

Vocabulaire probabiliste



A^c : si $\omega \notin A$ alors, l'évènement A n'est pas réalisé.

Vocabulaire probabiliste

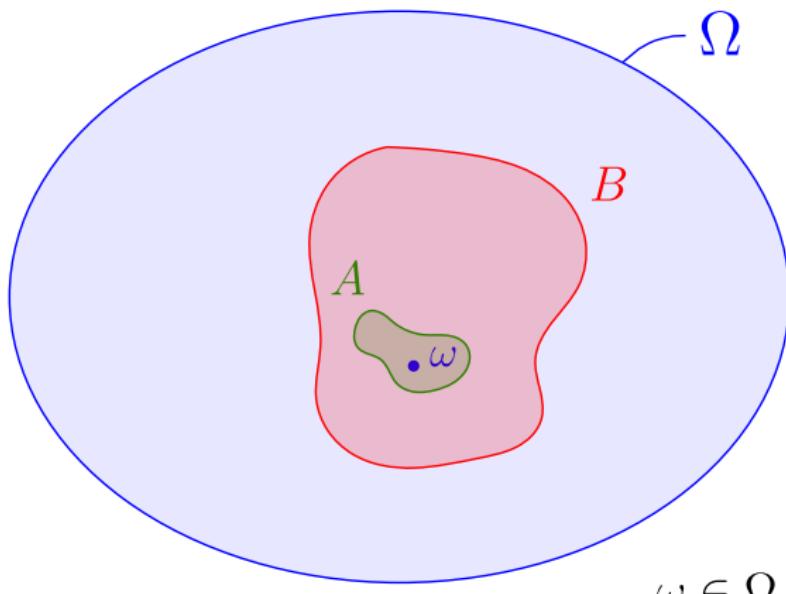


$$\omega \in \Omega$$

$$A_B^c = \{\omega \in B \mid \omega \notin A\}$$

$A_B^c = A^c \cap B$: l'évènement B est réalisé sans l'évènement A .

Vocabulaire probabiliste

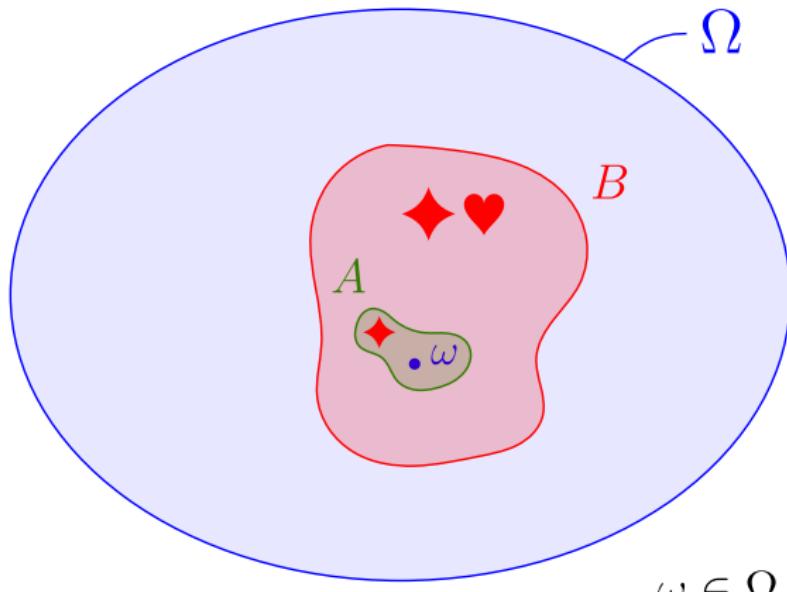


$$\omega \in \Omega$$

$$A \subset B : \omega \in A \Rightarrow \omega \in B$$

$A \subset B$: l'évènement A **implique** l'évènement B .

Vocabulaire probabiliste

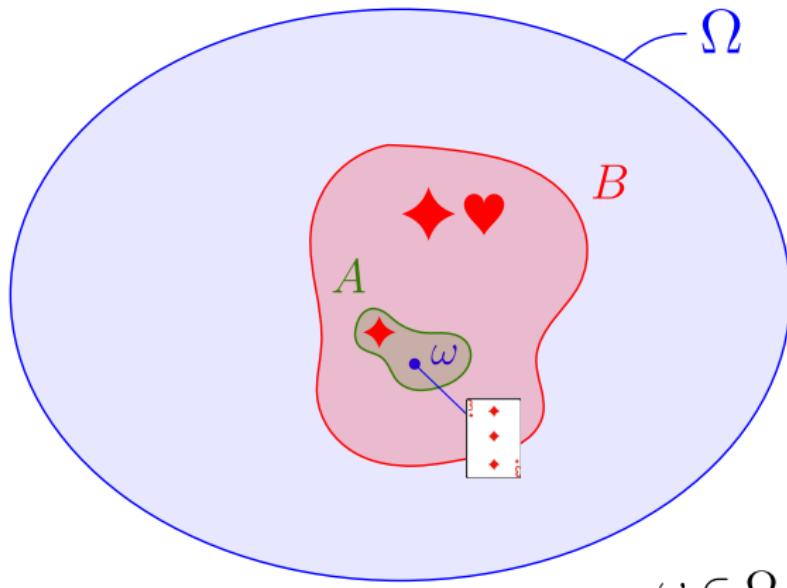


$$A \subset B : \omega \in A \Rightarrow \omega \in B$$

$$\omega \in \Omega$$

$A \subset B$: l'évènement A **implique** l'évènement B .

Vocabulaire probabiliste

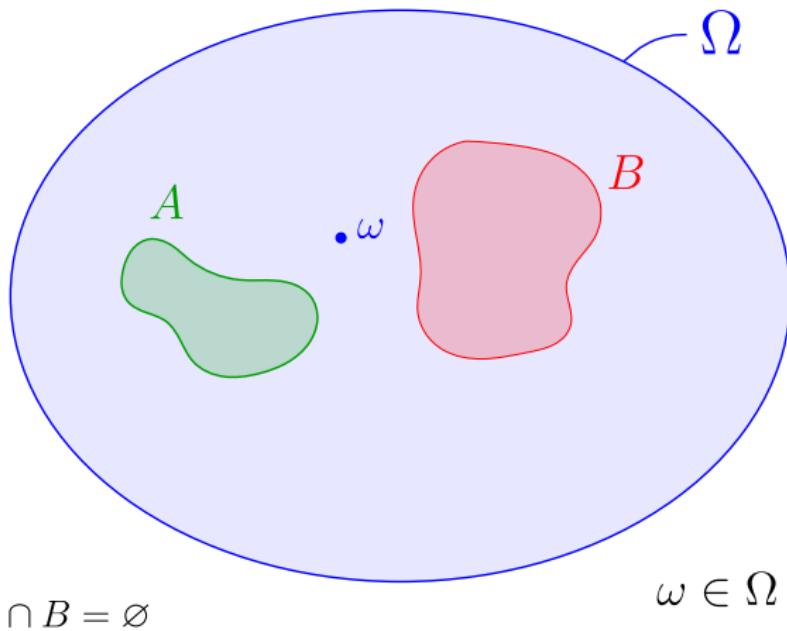


$$\omega \in \Omega$$

$$A \subset B : \omega \in A \Rightarrow \omega \in B$$

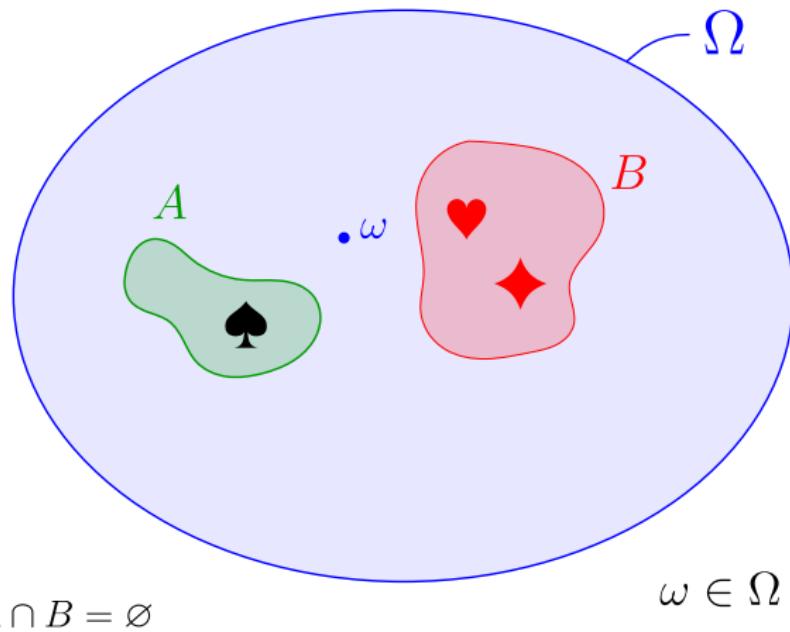
$A \subset B$: l'évènement A **implique** l'évènement B .

Vocabulaire probabiliste



$A \cap B = \emptyset$: les évènements A et B sont **incompatibles**.

Vocabulaire probabiliste



$A \cap B = \emptyset$: les évènements A et B sont **incompatibles**.

Quelques propriétés de la mesure de probabilité

- $A \in \mathcal{A}$

Quelques propriétés de la mesure de probabilité

- $A \in \mathcal{A} : \mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$

Quelques propriétés de la mesure de probabilité

- $A \in \mathcal{A} : \mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A) \quad \mathbb{P}(\spadesuit \clubsuit) = 1 - \mathbb{P}(\heartsuit \diamondsuit)$

Quelques propriétés de la mesure de probabilité

- $A \in \mathcal{A} : \mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A) \quad \mathbb{P}(\spadesuit \clubsuit) = 1 - \mathbb{P}(\heartsuit \diamondsuit)$
- $A, B \in \mathcal{A}, A \subseteq B$

Quelques propriétés de la mesure de probabilité

- $A \in \mathcal{A} : \mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A) \quad \mathbb{P}(\spadesuit \clubsuit) = 1 - \mathbb{P}(\heartsuit \diamondsuit)$
- $A, B \in \mathcal{A}, A \subseteq B : \mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$

Quelques propriétés de la mesure de probabilité

- $A \in \mathcal{A} : \mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A) \quad \mathbb{P}(\spadesuit \clubsuit) = 1 - \mathbb{P}(\heartsuit \diamondsuit)$
- $A, B \in \mathcal{A}, A \subseteq B : \mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B) \quad \mathbb{P}(\spadesuit) \leq \mathbb{P}(\spadesuit \clubsuit)$

Quelques propriétés de la mesure de probabilité

- $A \in \mathcal{A}$: $\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$ $\mathbb{P}(\spadesuit \clubsuit) = 1 - \mathbb{P}(\heartsuit \diamondsuit)$
- $A, B \in \mathcal{A}, A \subseteq B$: $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$ $\mathbb{P}(\spadesuit) \leq \mathbb{P}(\spadesuit \clubsuit)$
- $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{A}$ quelconques

Quelques propriétés de la mesure de probabilité

- $A \in \mathcal{A}$: $\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$ $\mathbb{P}(\spadesuit \clubsuit) = 1 - \mathbb{P}(\heartsuit \diamondsuit)$
- $A, B \in \mathcal{A}, A \subseteq B$: $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$ $\mathbb{P}(\spadesuit) \leq \mathbb{P}(\spadesuit \clubsuit)$
- $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{A}$ quelconques :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n)$$

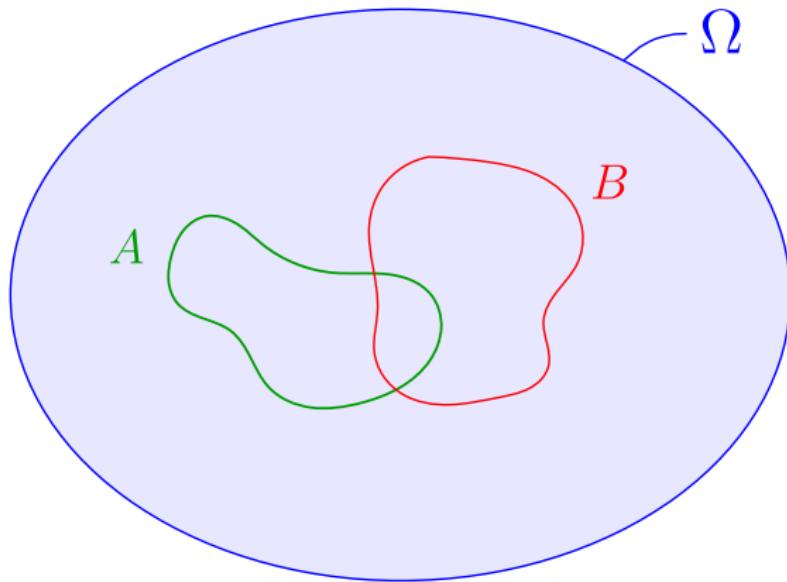
Quelques propriétés de la mesure de probabilité

- $A \in \mathcal{A}$: $\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$ $\mathbb{P}(\spadesuit \clubsuit) = 1 - \mathbb{P}(\heartsuit \diamondsuit)$
- $A, B \in \mathcal{A}, A \subseteq B$: $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$ $\mathbb{P}(\spadesuit) \leq \mathbb{P}(\spadesuit \clubsuit)$
- $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{A}$ quelconques :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n)$$

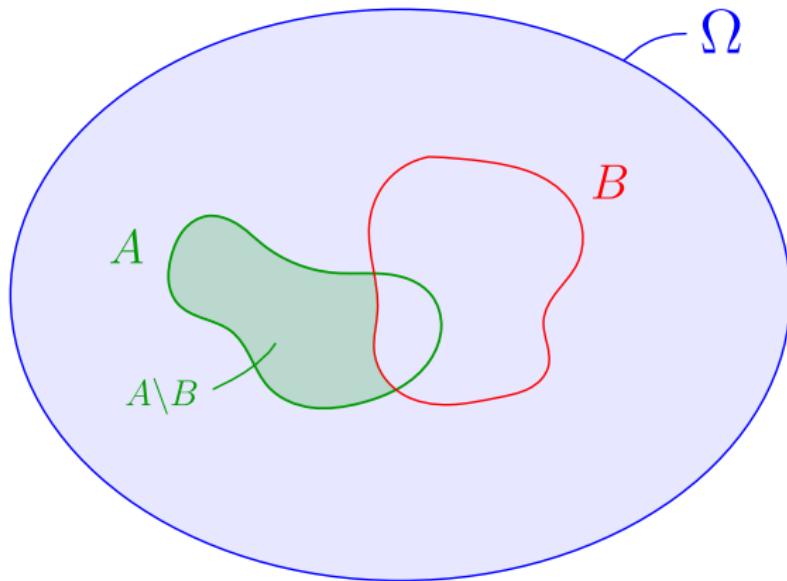
- $A, B \in \mathcal{A}$: $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$

Quelques propriétés de la mesure de probabilité



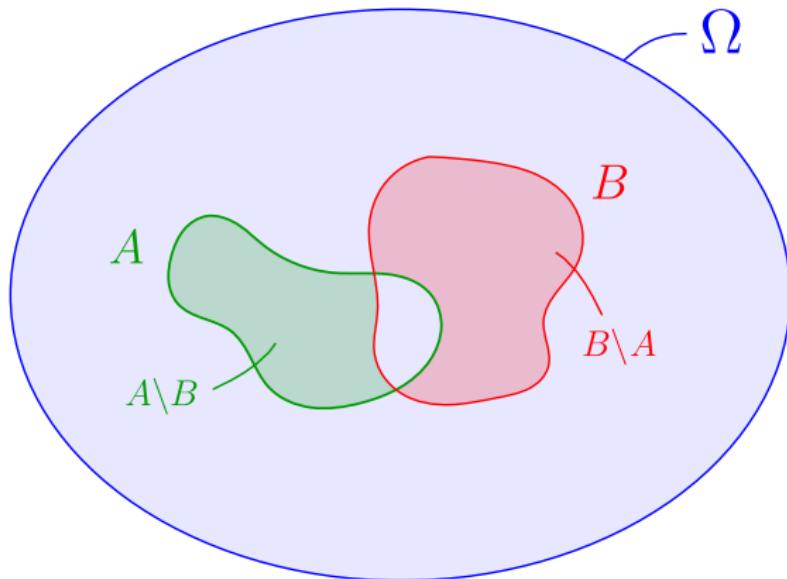
$$A \cup B =$$

Quelques propriétés de la mesure de probabilité



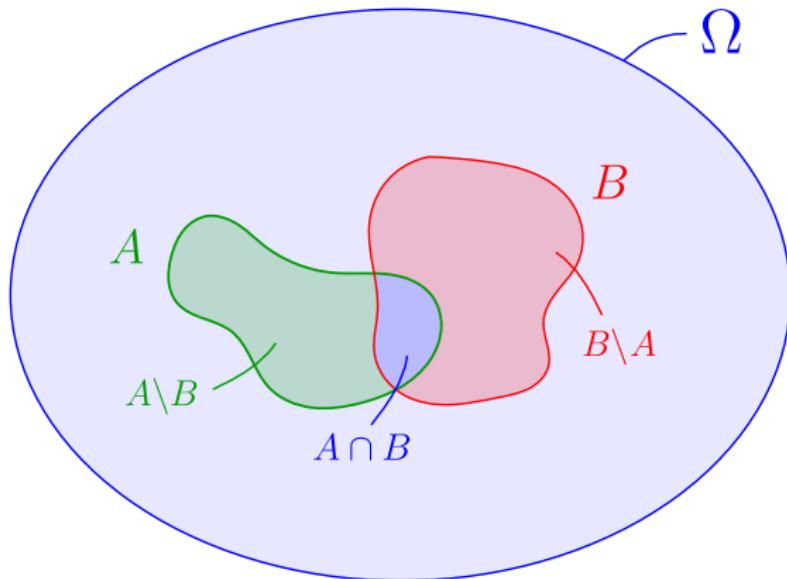
$$A \cup B = A \cup (A \setminus B) \cup$$

Quelques propriétés de la mesure de probabilité



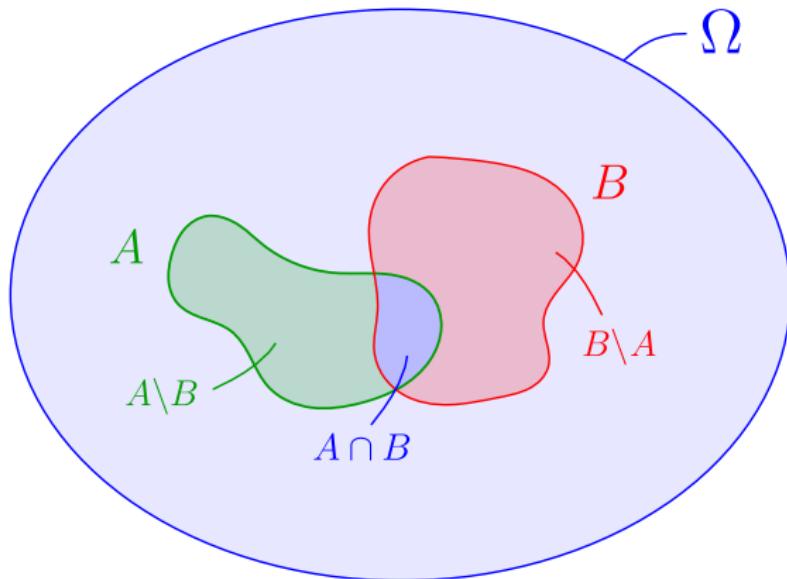
$$A \cup B = A \setminus B \cup B \setminus A \cup$$

Quelques propriétés de la mesure de probabilité



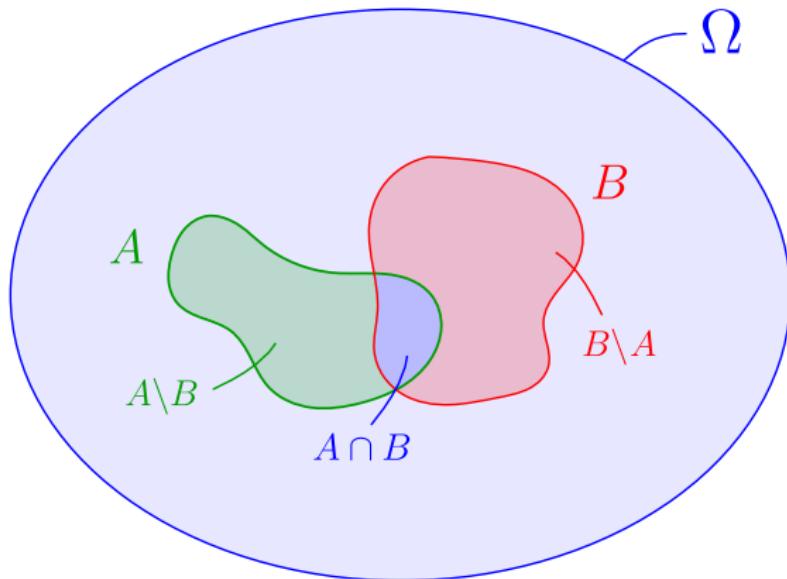
$$A \cup B = A \setminus B \cup B \setminus A \cup A \cap B$$

Quelques propriétés de la mesure de probabilité



$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A \setminus B) + \mathbb{P}(B \setminus A) + \mathbb{P}(A \cap B)$$

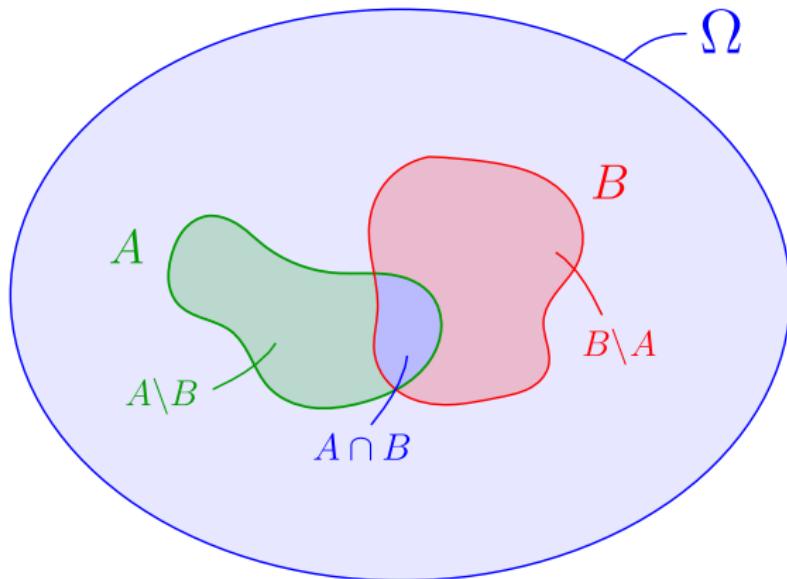
Quelques propriétés de la mesure de probabilité



$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A \setminus B) + \mathbb{P}(B \setminus A) + \mathbb{P}(A \cap B)$$

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(B \cap A) + \mathbb{P}(A \cap B)$$

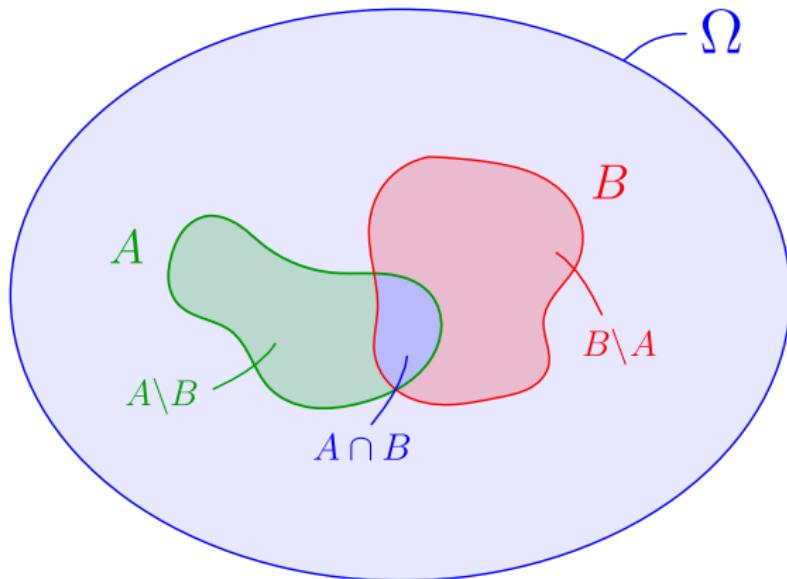
Quelques propriétés de la mesure de probabilité



$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A \setminus B) + \mathbb{P}(B \setminus A) + \mathbb{P}(A \cap B)$$

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$$

Quelques propriétés de la mesure de probabilité



$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(A_i) - \sum_{i < j} \mathbb{P}(A_i \cap A_j) + \dots + (-1)^{n+1} \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right)$$

Quelques propriétés de la mesure de probabilité

- $A \in \mathcal{A} : \mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A) \quad \mathbb{P}(\spadesuit \clubsuit) = 1 - \mathbb{P}(\heartsuit \diamondsuit)$
- $A, B \in \mathcal{A}, A \subseteq B : \mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B) \quad \mathbb{P}(\spadesuit) \leq \mathbb{P}(\spadesuit \clubsuit)$
- $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{A}$ quelconques :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n)$$

- $A, B \in \mathcal{A} : \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$

Quelques propriétés de la mesure de probabilité

- $A \in \mathcal{A}$: $\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$ $\mathbb{P}(\spadesuit \clubsuit) = 1 - \mathbb{P}(\heartsuit \diamondsuit)$
- $A, B \in \mathcal{A}, A \subseteq B$: $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$ $\mathbb{P}(\spadesuit) \leq \mathbb{P}(\spadesuit \clubsuit)$
- $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{A}$ quelconques :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n)$$

- $\mathbf{K} = \text{Roi}$: $\mathbb{P}(\mathbf{K} \cup \diamondsuit) = \mathbb{P}(\mathbf{K}) + \mathbb{P}(\diamondsuit) - \mathbb{P}(\mathbf{K} \diamondsuit)$

Quelques propriétés de la mesure de probabilité

- $A \in \mathcal{A}$: $\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$ $\mathbb{P}(\spadesuit \clubsuit) = 1 - \mathbb{P}(\heartsuit \diamondsuit)$
- $A, B \in \mathcal{A}, A \subseteq B$: $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$ $\mathbb{P}(\spadesuit) \leq \mathbb{P}(\spadesuit \clubsuit)$
- $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{A}$ quelconques :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n)$$

- $\mathbf{K} = \text{Roi}$: $\mathbb{P}(\mathbf{K} \cup \diamond) = \mathbb{P}(\mathbf{K}) + \mathbb{P}(\diamond) - \mathbb{P}(\mathbf{K} \diamond)$
- Pour la mesure de comptage sur un ensemble Ω fini :

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)}$$

Quelques propriétés de la mesure de probabilité

- $A \in \mathcal{A}$: $\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$ $\mathbb{P}(\spadesuit \clubsuit) = 1 - \mathbb{P}(\heartsuit \diamondsuit)$
- $A, B \in \mathcal{A}, A \subseteq B$: $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$ $\mathbb{P}(\spadesuit) \leq \mathbb{P}(\spadesuit \clubsuit)$
- $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{A}$ quelconques :

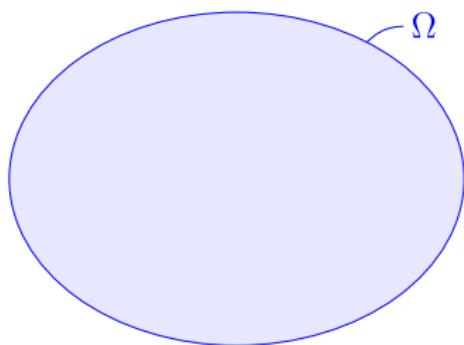
$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n)$$

- $\mathbf{K} = \text{Roi}$: $\mathbb{P}(\mathbf{K} \cup \diamond) = \mathbb{P}(\mathbf{K}) + \mathbb{P}(\diamond) - \mathbb{P}(\mathbf{K} \diamond)$
- Pour la mesure de comptage sur un ensemble Ω fini :

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas total}}$$

Quelques propriétés de la mesure de probabilité

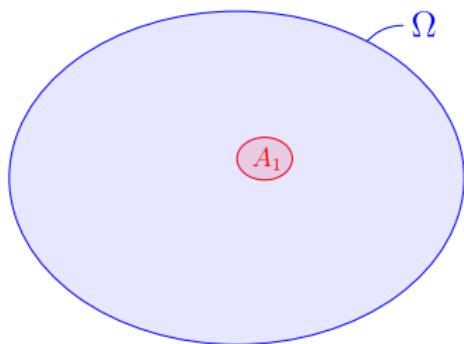
Propriété de la continuité monotone (poupées russes)



Quelques propriétés de la mesure de probabilité

Propriété de la continuité monotone (poupées russes)

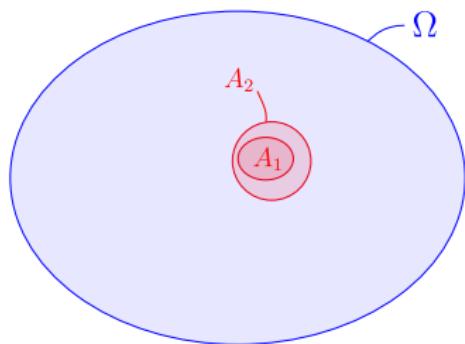
A_1



Quelques propriétés de la mesure de probabilité

Propriété de la continuité monotone (poupées russes)

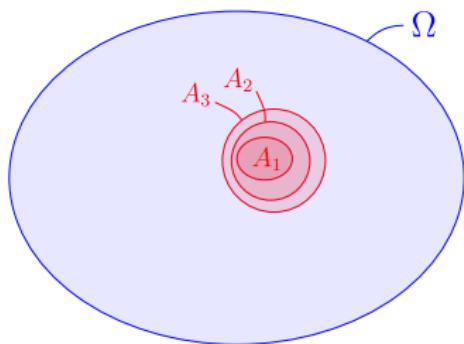
$$A_1 \subset A_2$$



Quelques propriétés de la mesure de probabilité

Propriété de la continuité monotone (poupées russes)

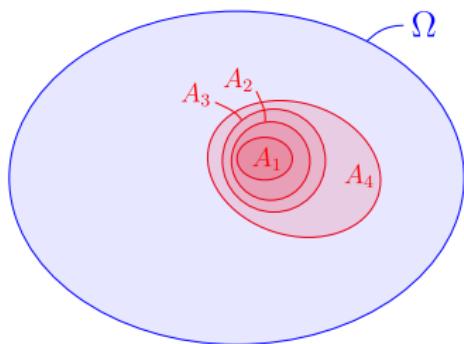
$$A_1 \subset A_2$$



Quelques propriétés de la mesure de probabilité

Propriété de la continuité monotone (poupées russes)

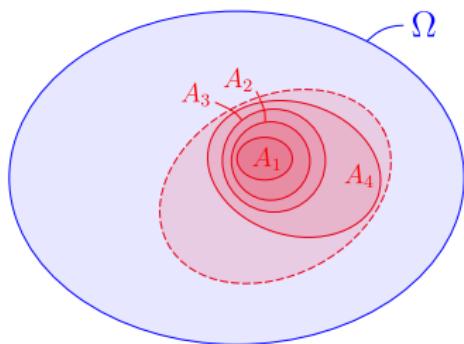
$$A_1 \subset A_2$$



Quelques propriétés de la mesure de probabilité

Propriété de la continuité monotone (poupées russes)

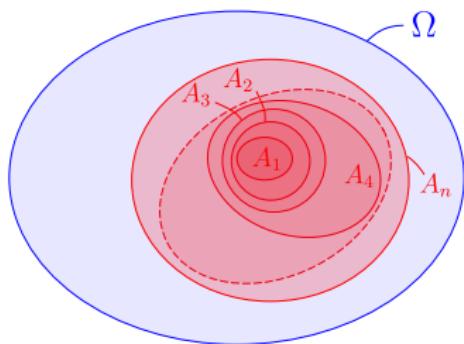
$$A_1 \subset A_2 \subset \dots$$



Quelques propriétés de la mesure de probabilité

Propriété de la continuité monotone (poupées russes)

$$A_1 \subset A_2 \subset \dots \subset A_n \dots$$

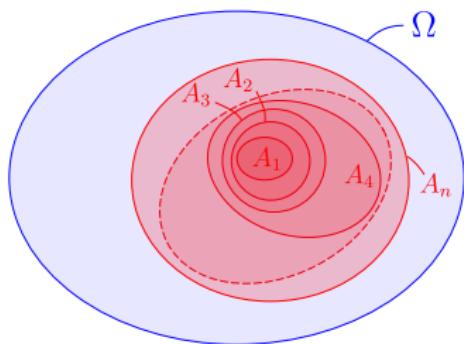


Quelques propriétés de la mesure de probabilité

Propriété de la continuité monotone (poupées russes)

$$A_1 \subset A_2 \subset \dots \subset A_n \dots$$

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \lim_n \mathbb{P}(A_n)$$

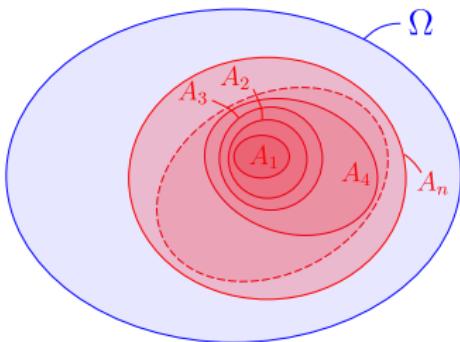


Quelques propriétés de la mesure de probabilité

Propriété de la continuité monotone (poupées russes)

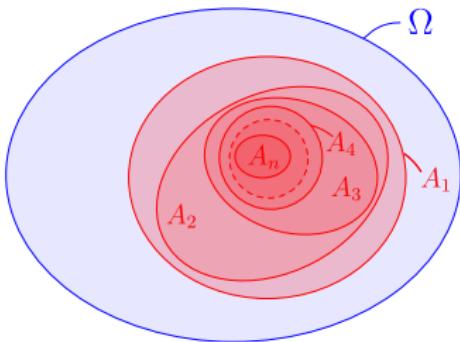
$$A_1 \subset A_2 \subset \dots \subset A_n \dots$$

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \lim_n \mathbb{P}(A_n)$$



$$A_1 \supset A_2 \supset \dots \supset A_n \dots$$

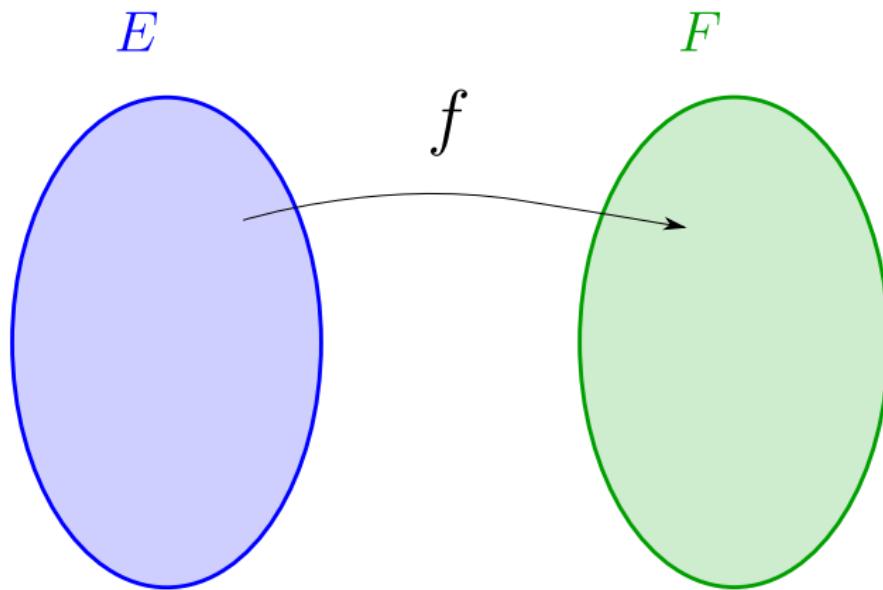
$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \lim_n \mathbb{P}(A_n)$$



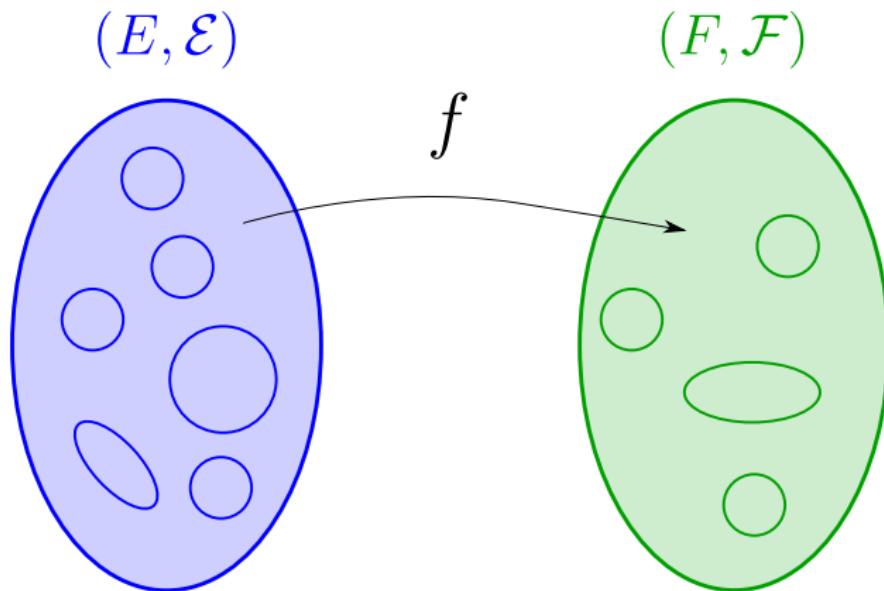
Variables aléatoires

- *Définition*
- *Exemple de lois discrètes*
- *Propriétés*

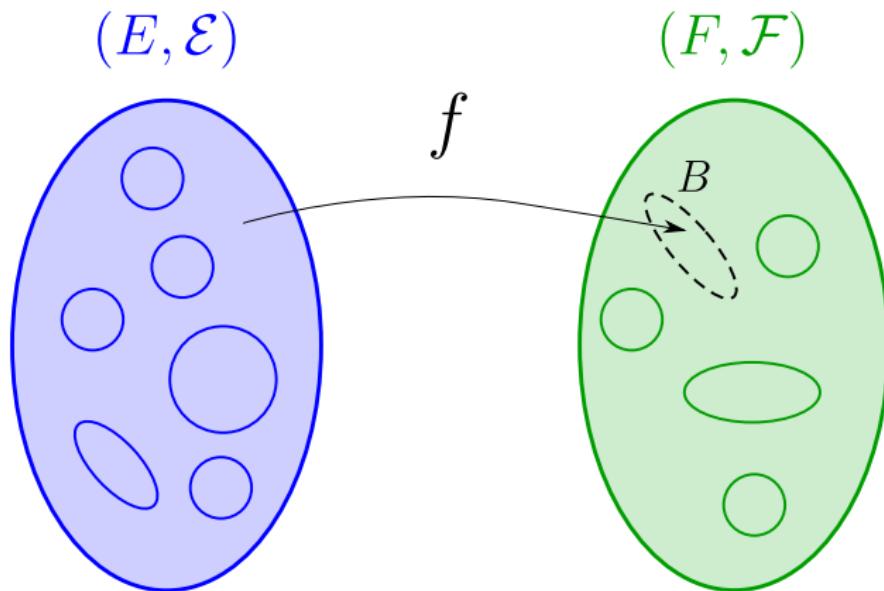
Variable aléatoire



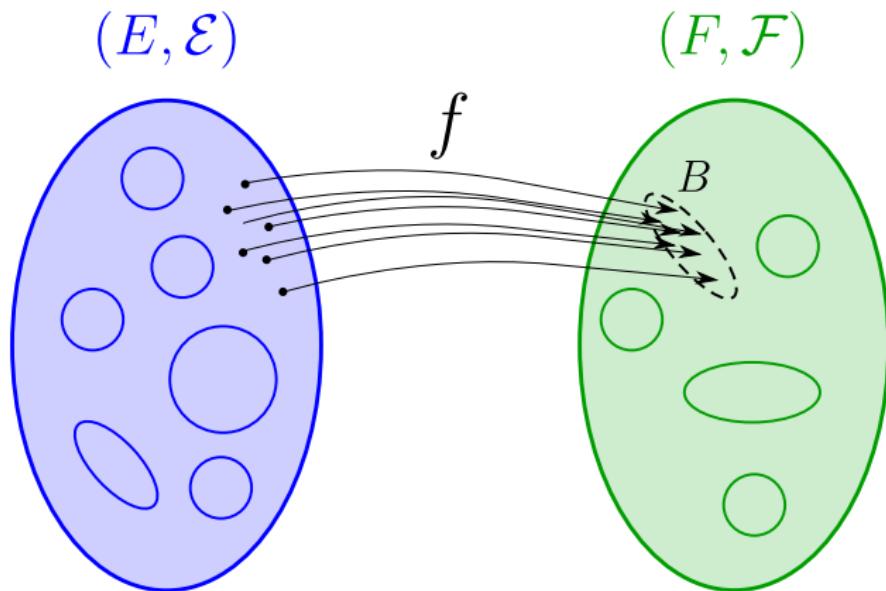
Variable aléatoire



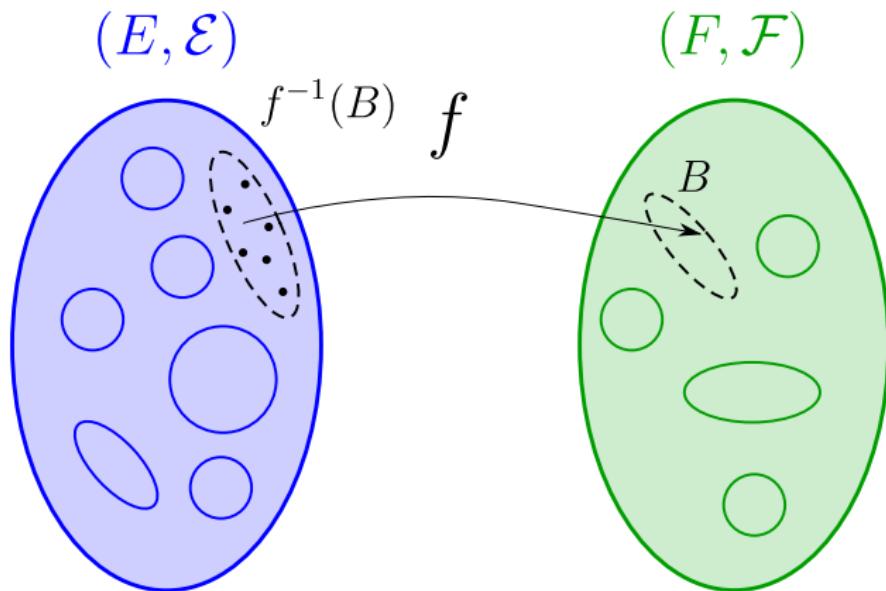
Variable aléatoire



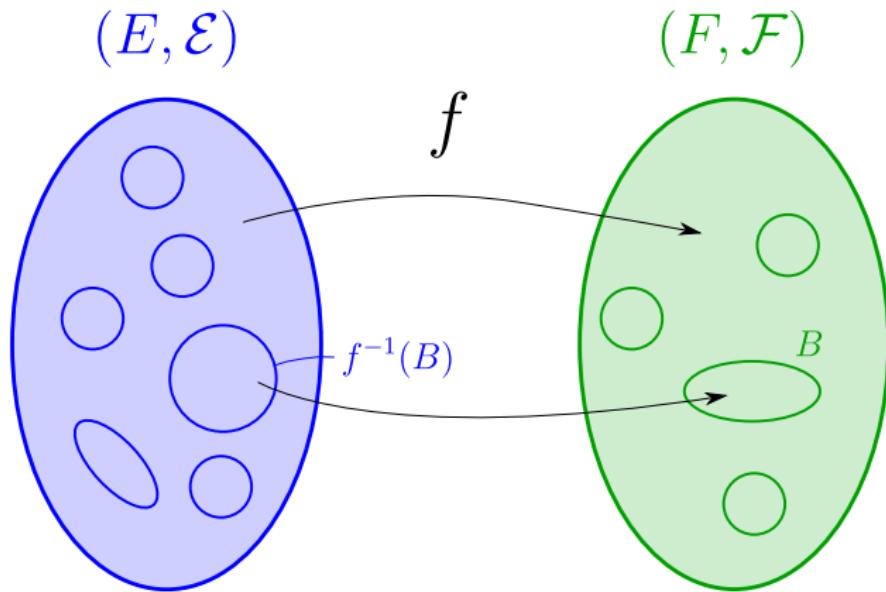
Variable aléatoire



Variable aléatoire

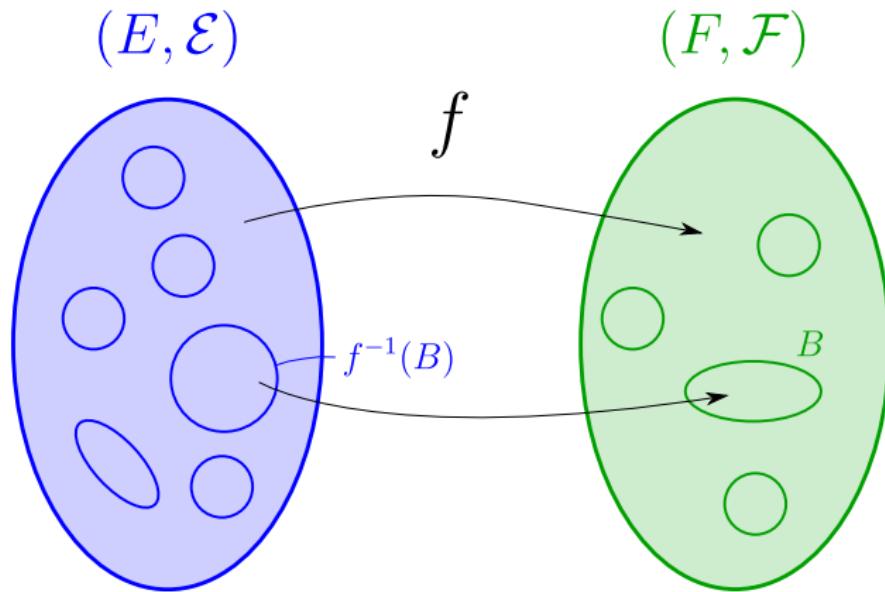


Variable aléatoire



f $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ -mesurable $B \in \mathcal{F}$ $f^{-1}(B) \in \mathcal{E}$

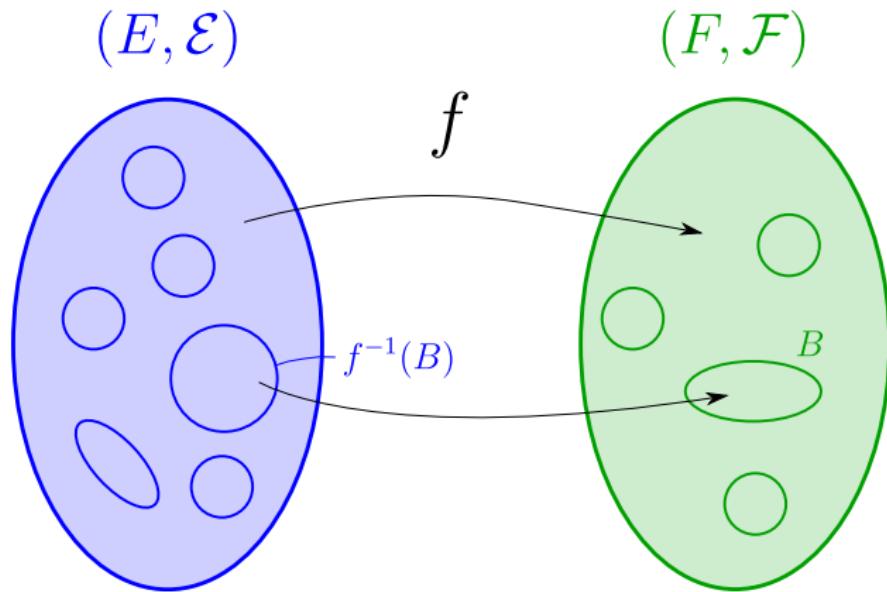
Variable aléatoire



f mesurable

$B \in \mathcal{F}$ $f^{-1}(B) \in \mathcal{E}$

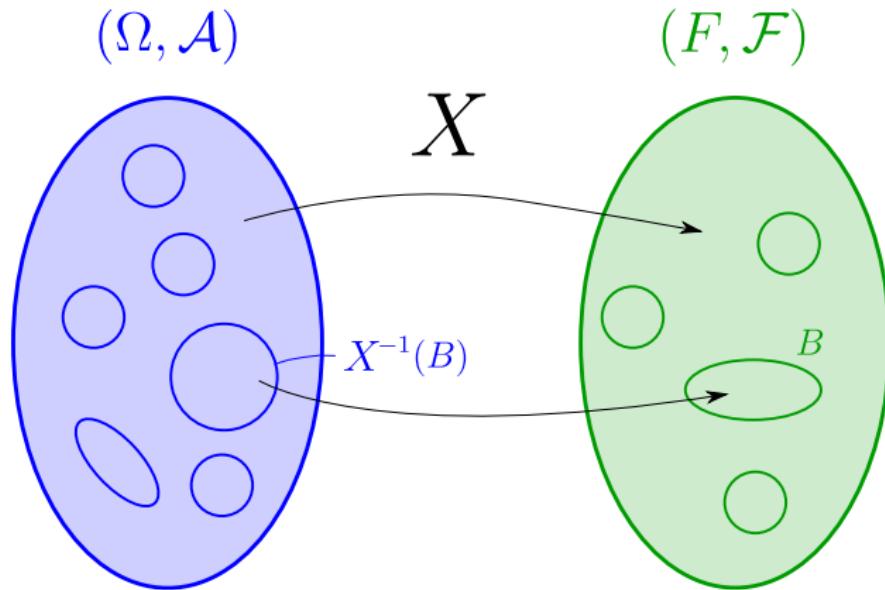
Variable aléatoire



f mesurable

$$B \in \mathcal{F} \quad f^{-1}(B) \in \mathcal{E}$$

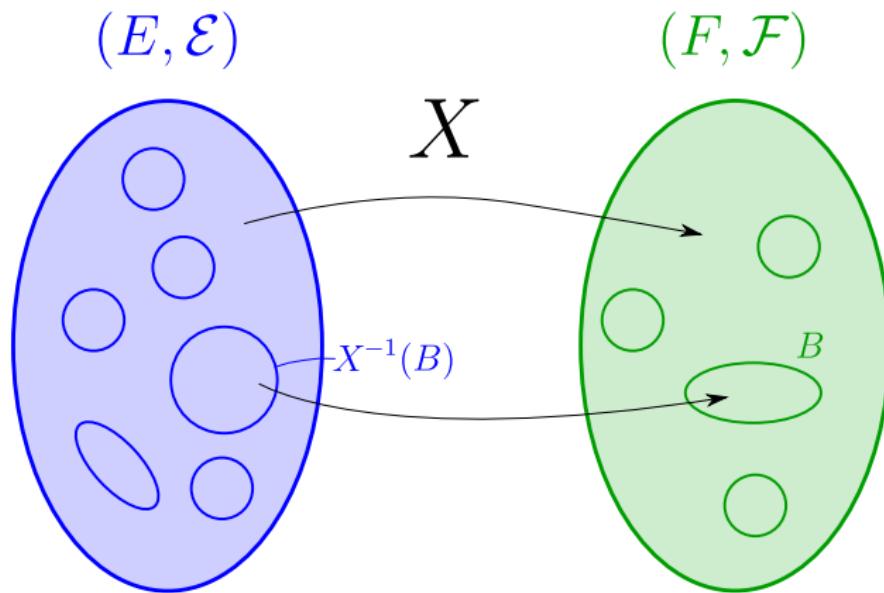
Variable aléatoire



X mesurable

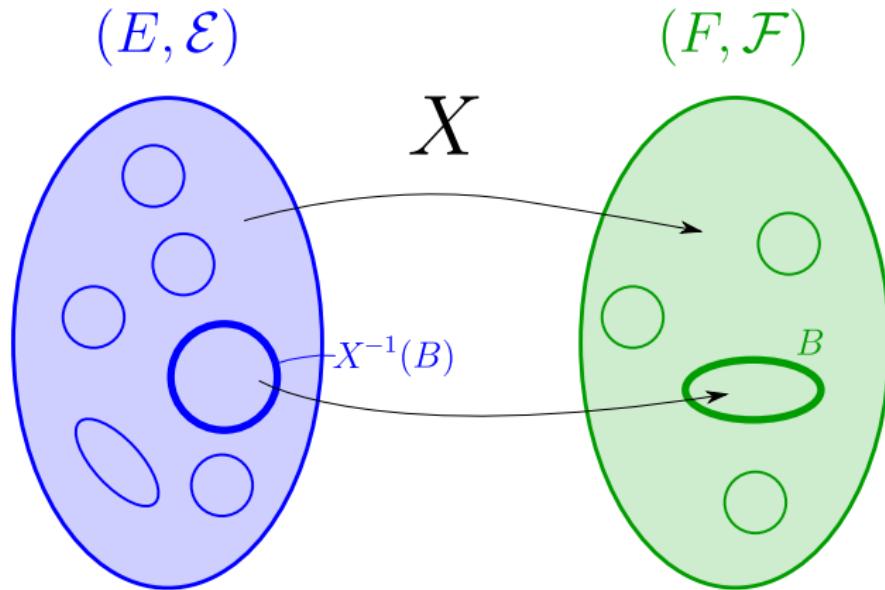
$B \in \mathcal{F} \quad X^{-1}(B) \in \mathcal{E}$

Variable aléatoire



$$B \subseteq \mathcal{F} \quad P_X(B) = \mathbb{P}(X(\omega) \in B) = \mathbb{P}(X^{-1}(B))$$

Variable aléatoire



$$B \subseteq \mathcal{F} \quad P_X(B) = \mathbb{P}(X(\omega) \in B) = \mathbb{P}(X^{-1}(B))$$

Exemple de variable aléatoire discrète : Loto

Un joueur choisit 5 numéros dans une grille de nombres allant de 1 à 49. Les gains varient de la manière suivante : 4€ (2 num), 21€ (3 num), 490€ (4 num) et 95 200€ (5 num).

Exemple de variable aléatoire discrète : Loto

Un joueur choisit 5 numéros dans une grille de nombres allant de 1 à 49. Les gains varient de la manière suivante : 4€ (2 num), 21€ (3 num), 490€ (4 num) et 95 200€ (5 num).

$$\Omega = \{1, 2, \dots, 49\}^5$$

Exemple de variable aléatoire discrète : Loto

Un joueur choisit 5 numéros dans une grille de nombres allant de 1 à 49. Les gains varient de la manière suivante : 4€ (2 num), 21€ (3 num), 490€ (4 num) et 95 200€ (5 num).

$$\Omega = \{1, 2, \dots, 49\}^5 \text{ muni de la tribu } \mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$$

Exemple de variable aléatoire discrète : Loto

Un joueur choisit 5 numéros dans une grille de nombres allant de 1 à 49. Les gains varient de la manière suivante : 4€ (2 num), 21€ (3 num), 490€ (4 num) et 95 200€ (5 num).

$$\Omega = \{1, 2, \dots, 49\}^5 \text{ muni de la tribu } \mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega) \quad |\mathcal{P}(\Omega)| =$$

Exemple de variable aléatoire discrète : Loto

Un joueur choisit 5 numéros dans une grille de nombres allant de 1 à 49. Les gains varient de la manière suivante : 4€ (2 num), 21€ (3 num), 490€ (4 num) et 95 200€ (5 num).

$$\Omega = \{1, 2, \dots, 49\}^5 \text{ muni de la tribu } \mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega) \quad |\mathcal{P}(\Omega)| = 2^{49^5}$$

Exemple de variable aléatoire discrète : Loto

Un joueur choisit 5 numéros dans une grille de nombres allant de 1 à 49. Les gains varient de la manière suivante : 4€ (2 num), 21€ (3 num), 490€ (4 num) et 95 200€ (5 num).

$$\Omega = \{1, 2, \dots, 49\}^5 \text{ muni de la tribu } \mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega) \quad |\mathcal{P}(\Omega)| = 2^{49^5}$$

A_k : le tirage contient exactement k numéros du joueur

Exemple de variable aléatoire discrète : Loto

Un joueur choisit 5 numéros dans une grille de nombres allant de 1 à 49. Les gains varient de la manière suivante : 4€ (2 num), 21€ (3 num), 490€ (4 num) et 95 200€ (5 num).

$$\Omega = \{1, 2, \dots, 49\}^5 \text{ muni de la tribu } \mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega) \quad |\mathcal{P}(\Omega)| = 2^{49^5}$$

A_k : le tirage contient exactement k numéros du joueur

$$X(\omega) = \begin{cases} 4 & \text{si } \omega \in A_2 \\ 21 & \text{si } \omega \in A_3 \\ 490 & \text{si } \omega \in A_4 \\ 95200 & \text{si } \omega \in A_5 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Exemple de variable aléatoire discrète : Loto

Un joueur choisit 5 numéros dans une grille de nombres allant de 1 à 49. Les gains varient de la manière suivante : 4€ (2 num), 21€ (3 num), 490€ (4 num) et 95 200€ (5 num).

$$\Omega = \{1, 2, \dots, 49\}^5 \text{ muni de la tribu } \mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega) \quad |\mathcal{P}(\Omega)| = 2^{49^5}$$

A_k : le tirage contient exactement k numéros du joueur

$$X(\omega) = \begin{cases} 4 & \text{si } \omega \in A_2 \\ 21 & \text{si } \omega \in A_3 \\ 490 & \text{si } \omega \in A_4 \\ 95200 & \text{si } \omega \in A_5 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Si la sélection du joueur est : (37, 5, 48, 15, 29).

Exemple de variable aléatoire discrète : Loto

Un joueur choisit 5 numéros dans une grille de nombres allant de 1 à 49. Les gains varient de la manière suivante : 4€ (2 num), 21€ (3 num), 490€ (4 num) et 95 200€ (5 num).

$$\Omega = \{1, 2, \dots, 49\}^5 \text{ muni de la tribu } \mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega) \quad |\mathcal{P}(\Omega)| = 2^{49^5}$$

A_k : le tirage contient exactement k numéros du joueur

$$X(\omega) = \begin{cases} 4 & \text{si } \omega \in A_2 \\ 21 & \text{si } \omega \in A_3 \\ 490 & \text{si } \omega \in A_4 \\ 95200 & \text{si } \omega \in A_5 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Si la sélection du joueur est : (37, 5, 48, 15, 29). Alors, la réalisation $\omega = (5, 42, 2, 29, 37)$ produira la variable $x = X(\omega) = ?$

Exemple de variable aléatoire discrète : Loto

Un joueur choisit 5 numéros dans une grille de nombres allant de 1 à 49. Les gains varient de la manière suivante : 4€ (2 num), 21€ (3 num), 490€ (4 num) et 95 200€ (5 num).

$$\Omega = \{1, 2, \dots, 49\}^5 \text{ muni de la tribu } \mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega) \quad |\mathcal{P}(\Omega)| = 2^{49^5}$$

A_k : le tirage contient exactement k numéros du joueur

$$X(\omega) = \begin{cases} 4 & \text{si } \omega \in A_2 \\ 21 & \text{si } \omega \in A_3 \\ 490 & \text{si } \omega \in A_4 \\ 95200 & \text{si } \omega \in A_5 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Si la sélection du joueur est : (37, 5, 48, 15, 29). Alors, la réalisation $\omega = (5, 42, 2, 29, 37)$ produira la variable $x = X(\omega) = 21$

Exemple de variable aléatoire discrète : Loto

Un joueur choisit 5 numéros dans une grille de nombres allant de 1 à 49. Les gains varient de la manière suivante : 4€ (2 num), 21€ (3 num), 490€ (4 num) et 95 200€ (5 num).

$$\Omega = \{1, 2, \dots, 49\}^5 \text{ muni de la tribu } \mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega) \quad |\mathcal{P}(\Omega)| = 2^{49^5}$$

A_k : le tirage contient exactement k numéros du joueur

$$X(\omega) = \begin{cases} 4 & \text{si } \omega \in A_2 \\ 21 & \text{si } \omega \in A_3 \\ 490 & \text{si } \omega \in A_4 \\ 95200 & \text{si } \omega \in A_5 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Si la sélection du joueur est : (37, 5, 48, 15, 29). Alors, la réalisation $\omega = (5, 42, 2, 29, 37)$ produira la variable $x = X(\omega) = 21$ ($\omega \in A_3$)

Loi de probabilité discrète ($X : \Omega \rightarrow \mathbb{N}$)

Mesure de probabilité **discrète** : mesure sur tout ou partie de \mathbb{N}

Mesure de probabilité **discrète** : mesure sur tout ou partie de \mathbb{N}

Loi de probabilité

Une **loi de probabilité** associée à une variable aléatoire X discrète est donnée par la mesure \mathbb{P} de tout singleton $\{k\}$ de \mathbb{N} :

$$P_X(k) = \mathbb{P}(\{k\}) = \mathbb{P}(X = k)$$

Mesure de probabilité **discrète** : mesure sur tout ou partie de \mathbb{N}

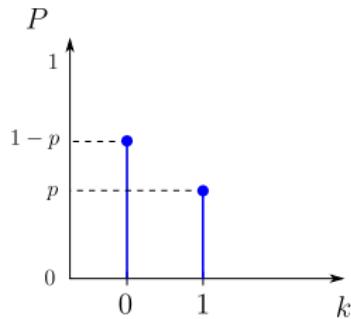
Loi de probabilité

Une **loi de probabilité** associée à une variable aléatoire X discrète est donnée par la mesure \mathbb{P} de tout singleton $\{k\}$ de \mathbb{N} :

$$P_X(k) = \mathbb{P}(\{k\}) = \mathbb{P}(X = k)$$

- Loi de Bernoulli
- Loi binomiale
- Loi de Poisson
- Loi géométrique
- Hypergéométrique, binomiale négative, Zipf, multinomiale...

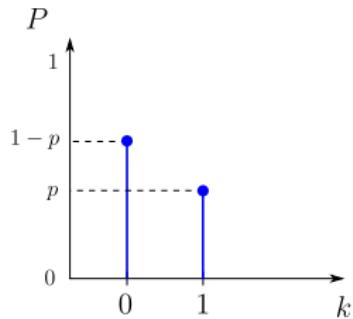
Loi de Bernoulli



$$P_X(X = k) = \begin{cases} p & \text{si } k = 1 \\ 1 - p & \text{si } k = 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$



Loi de Bernoulli



$$P_X(X = k) = \begin{cases} p & \text{si } k = 1 \\ 1 - p & \text{si } k = 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

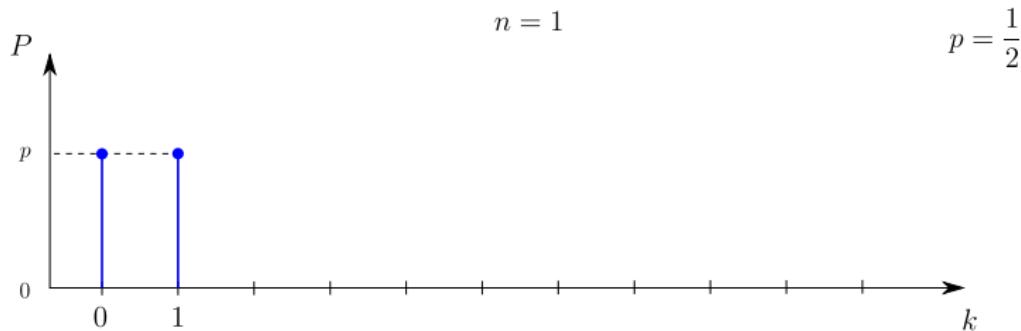


$$\Omega = \mathbb{N} = \{\color{red}0\} \cup \{\color{green}1\} \cup \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$$

$$\mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}(\{\color{red}0\}) + \mathbb{P}(\{\color{green}1\}) + \mathbb{P}(\mathbb{N} \setminus \{0, 1\}) = \color{red}1 - p + p = 1$$

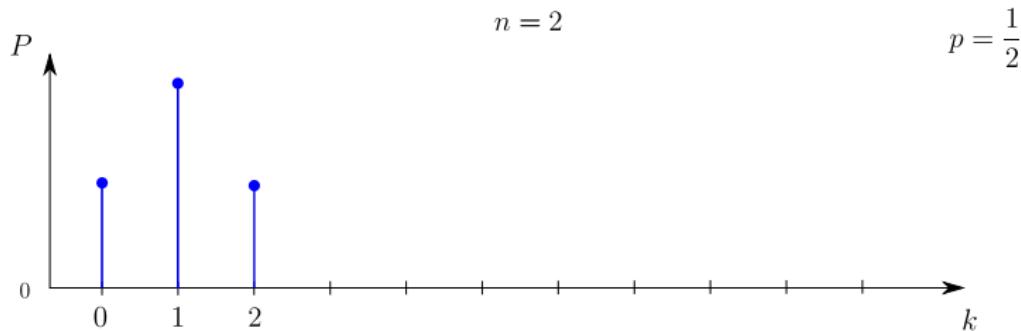
Loi binomiale

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et X_1, X_2, \dots, X_n une suite (finie) de variables aléatoires distribuées suivant une **loi de Bernoulli** de paramètre p . Alors, la variable $X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ suit une **loi binomiale** de paramètre n .



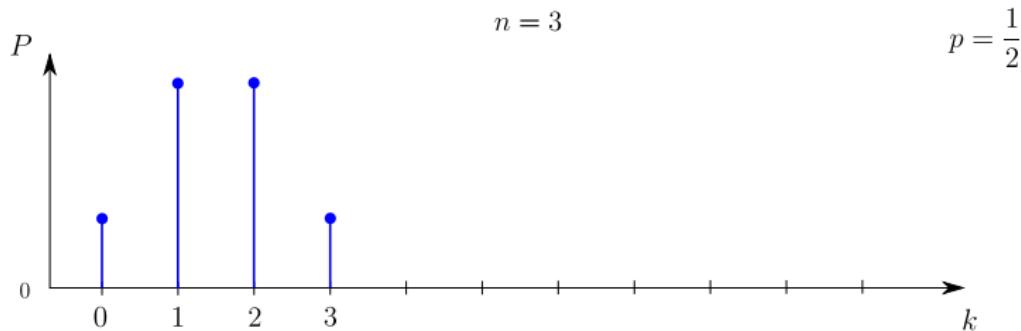
Loi binomiale

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et X_1, X_2, \dots, X_n une suite (finie) de variables aléatoires distribuées suivant une **loi de Bernoulli** de paramètre p . Alors, la variable $X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ suit une **loi binomiale** de paramètre n .



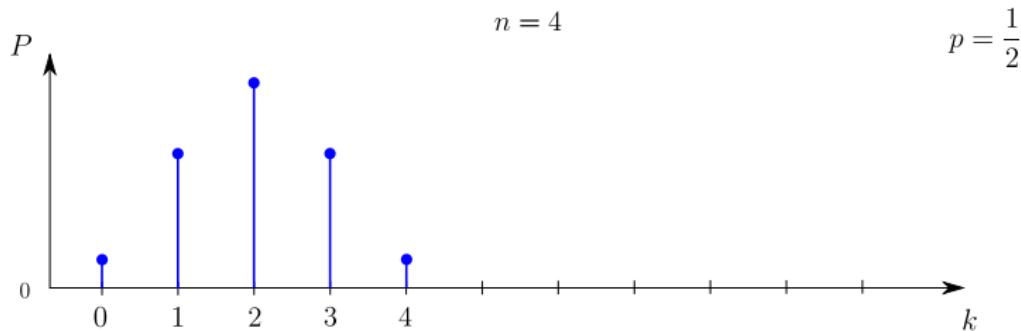
Loi binomiale

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et X_1, X_2, \dots, X_n une suite (finie) de variables aléatoires distribuées suivant une **loi de Bernoulli** de paramètre p . Alors, la variable $X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ suit une **loi binomiale** de paramètre n .



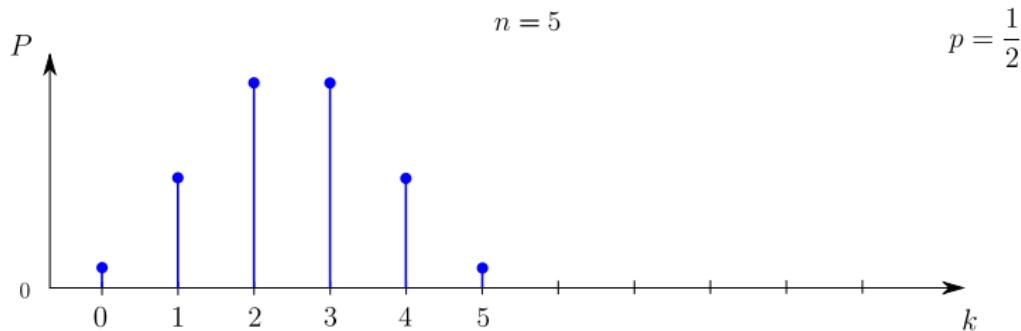
Loi binomiale

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et X_1, X_2, \dots, X_n une suite (finie) de variables aléatoires distribuées suivant une **loi de Bernoulli** de paramètre p . Alors, la variable $X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ suit une **loi binomiale** de paramètre n .



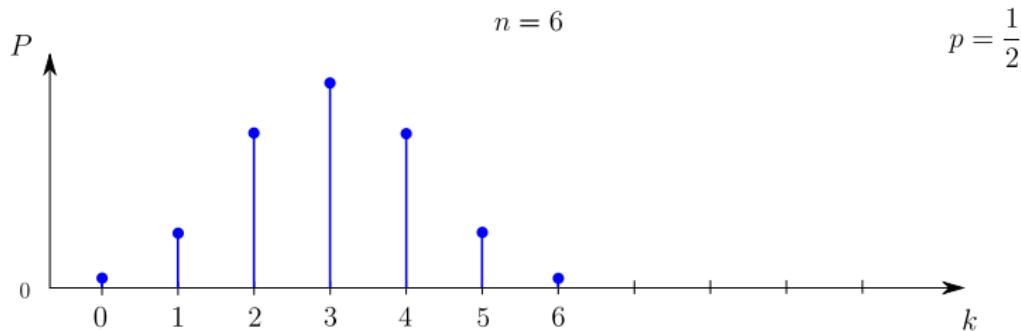
Loi binomiale

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et X_1, X_2, \dots, X_n une suite (finie) de variables aléatoires distribuées suivant une **loi de Bernoulli** de paramètre p . Alors, la variable $X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ suit une **loi binomiale** de paramètre n .



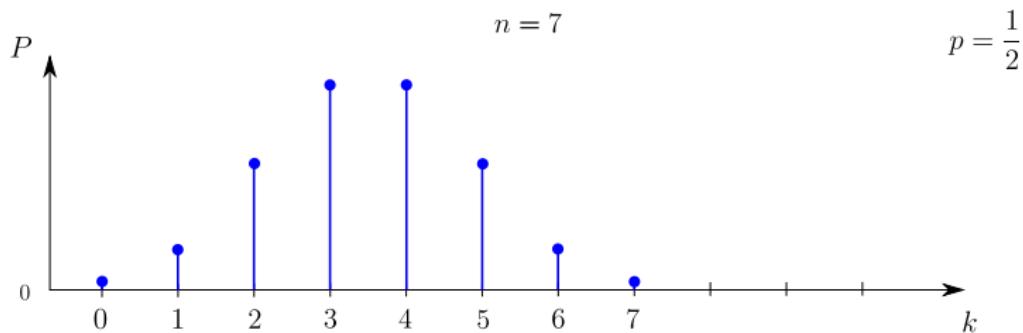
Loi binomiale

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et X_1, X_2, \dots, X_n une suite (finie) de variables aléatoires distribuées suivant une **loi de Bernoulli** de paramètre p . Alors, la variable $X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ suit une **loi binomiale** de paramètre n .



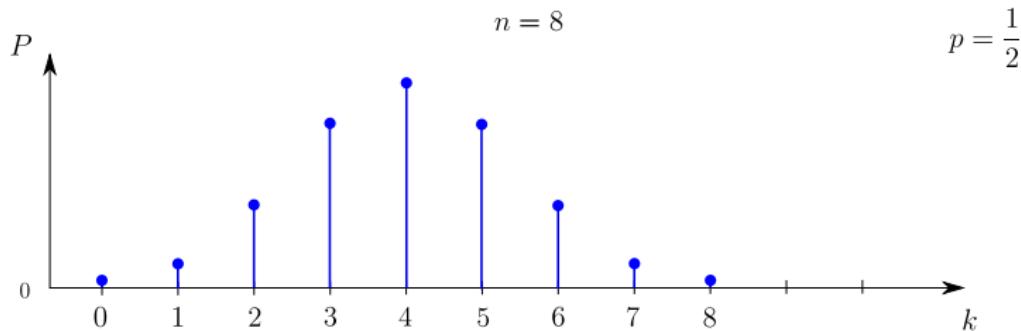
Loi binomiale

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et X_1, X_2, \dots, X_n une suite (finie) de variables aléatoires distribuées suivant une **loi de Bernoulli** de paramètre p . Alors, la variable $X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ suit une **loi binomiale** de paramètre n .



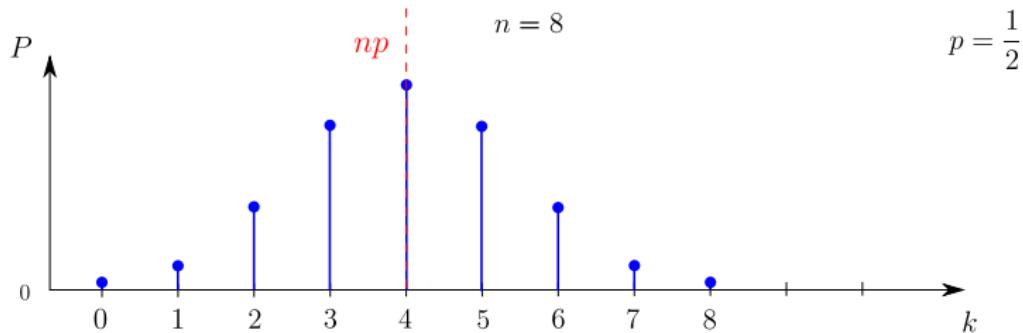
Loi binomiale

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et X_1, X_2, \dots, X_n une suite (finie) de variables aléatoires distribuées suivant une **loi de Bernoulli** de paramètre p . Alors, la variable $X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ suit une **loi binomiale** de paramètre n .



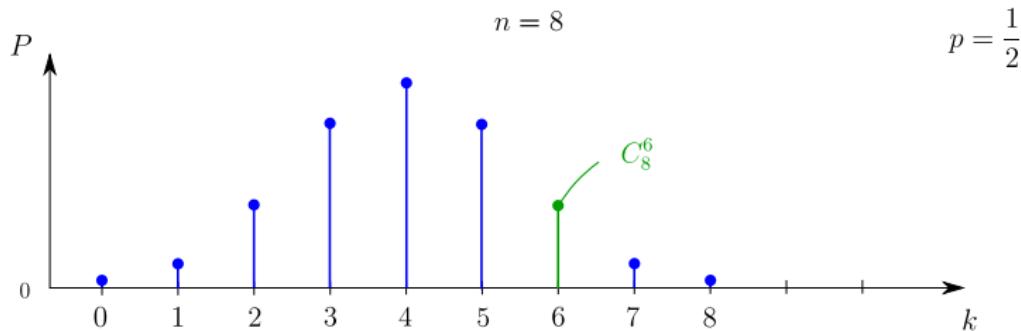
Loi binomiale

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et X_1, X_2, \dots, X_n une suite (finie) de variables aléatoires distribuées suivant une **loi de Bernoulli** de paramètre p . Alors, la variable $X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ suit une **loi binomiale** de paramètre n .



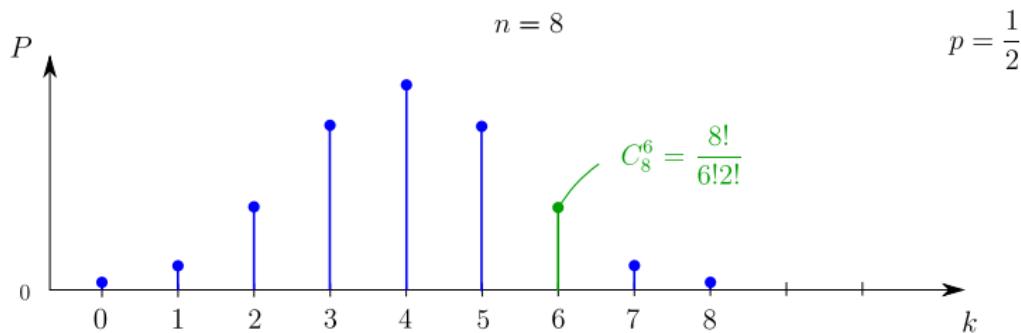
Loi binomiale

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et X_1, X_2, \dots, X_n une suite (finie) de variables aléatoires distribuées suivant une **loi de Bernoulli** de paramètre p . Alors, la variable $X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ suit une **loi binomiale** de paramètre n .



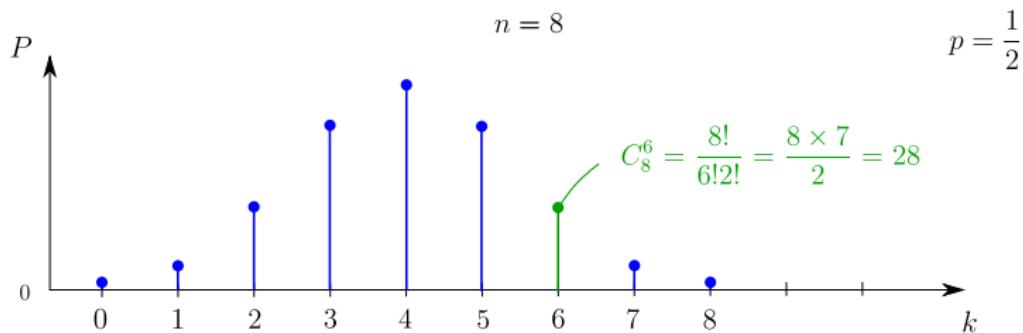
Loi binomiale

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et X_1, X_2, \dots, X_n une suite (finie) de variables aléatoires distribuées suivant une **loi de Bernoulli** de paramètre p . Alors, la variable $X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ suit une **loi binomiale** de paramètre n .



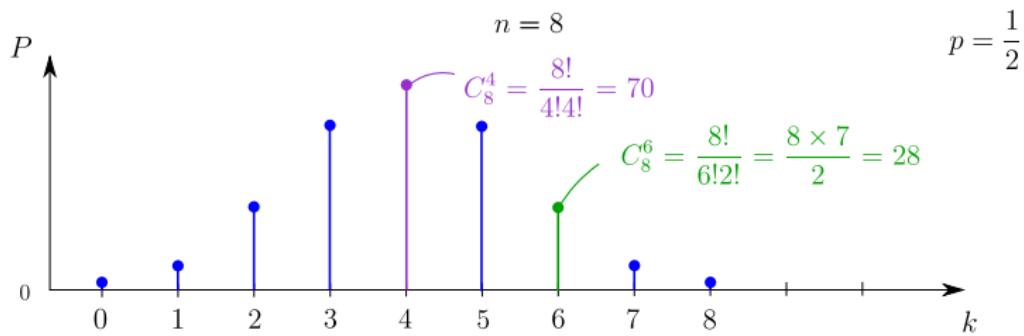
Loi binomiale

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et X_1, X_2, \dots, X_n une suite (finie) de variables aléatoires distribuées suivant une **loi de Bernoulli** de paramètre p . Alors, la variable $X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ suit une **loi binomiale** de paramètre n .



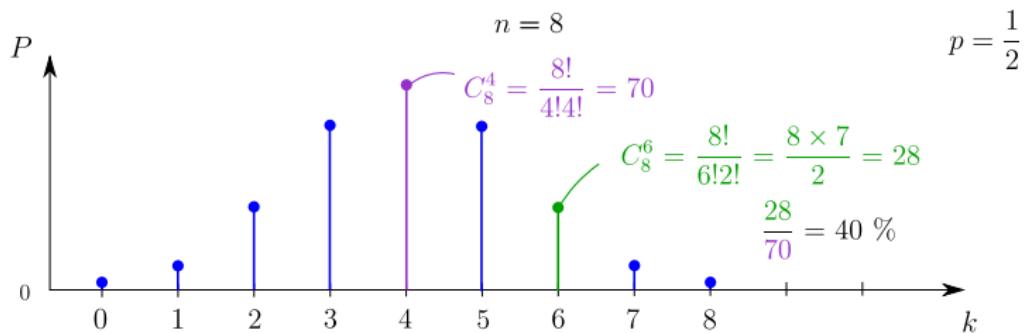
Loi binomiale

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et X_1, X_2, \dots, X_n une suite (finie) de variables aléatoires distribuées suivant une **loi de Bernoulli** de paramètre p . Alors, la variable $X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ suit une **loi binomiale** de paramètre n .



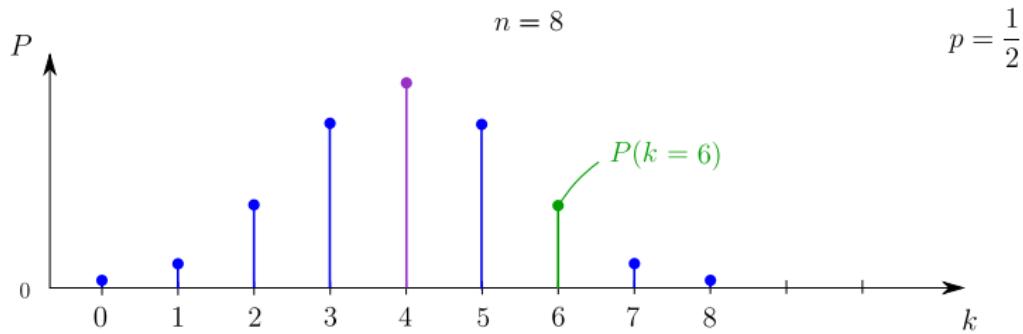
Loi binomiale

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et X_1, X_2, \dots, X_n une suite (finie) de variables aléatoires distribuées suivant une **loi de Bernoulli** de paramètre p . Alors, la variable $X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ suit une **loi binomiale** de paramètre n .



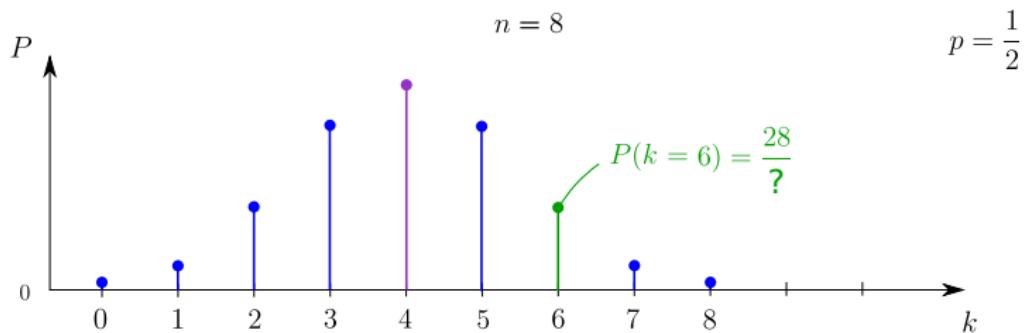
Loi binomiale

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et X_1, X_2, \dots, X_n une suite (finie) de variables aléatoires distribuées suivant une **loi de Bernoulli** de paramètre p . Alors, la variable $X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ suit une **loi binomiale** de paramètre n .



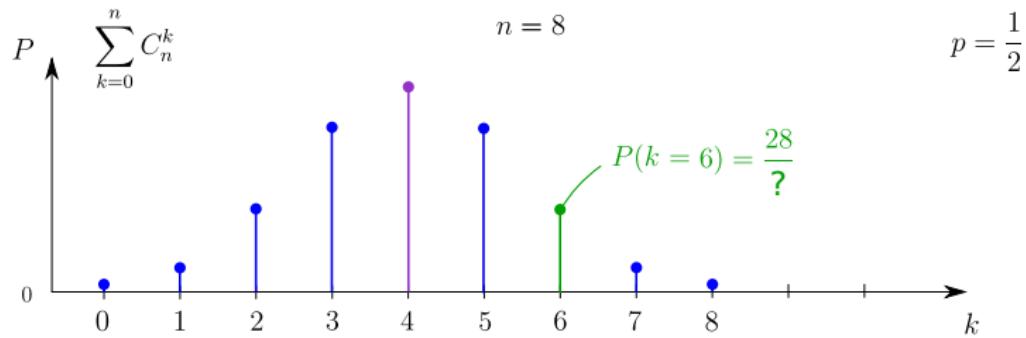
Loi binomiale

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et X_1, X_2, \dots, X_n une suite (finie) de variables aléatoires distribuées suivant une **loi de Bernoulli** de paramètre p . Alors, la variable $X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ suit une **loi binomiale** de paramètre n .



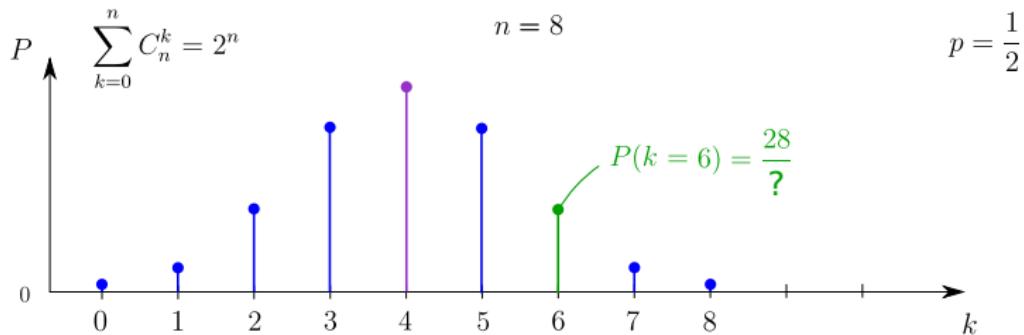
Loi binomiale

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et X_1, X_2, \dots, X_n une suite (finie) de variables aléatoires distribuées suivant une **loi de Bernoulli** de paramètre p . Alors, la variable $X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ suit une **loi binomiale** de paramètre n .



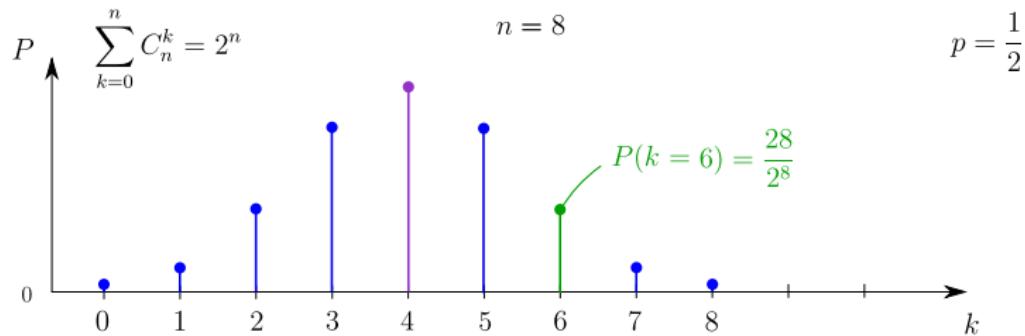
Loi binomiale

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et X_1, X_2, \dots, X_n une suite (finie) de variables aléatoires distribuées suivant une **loi de Bernoulli** de paramètre p . Alors, la variable $X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ suit une **loi binomiale** de paramètre n .



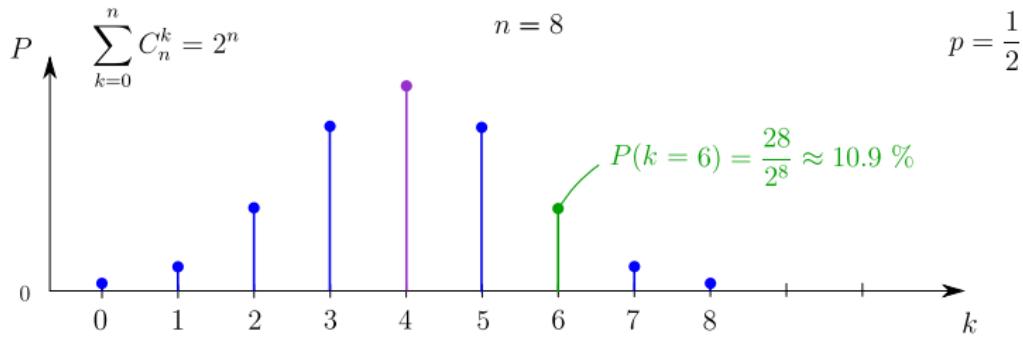
Loi binomiale

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et X_1, X_2, \dots, X_n une suite (finie) de variables aléatoires distribuées suivant une **loi de Bernoulli** de paramètre p . Alors, la variable $X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ suit une **loi binomiale** de paramètre n .



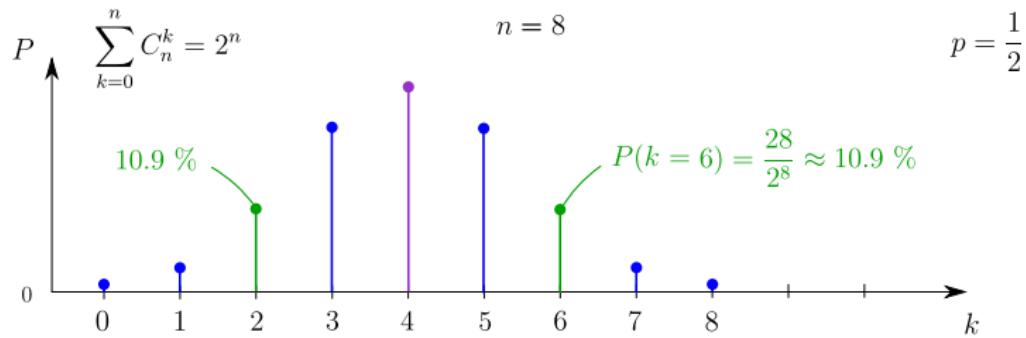
Loi binomiale

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et X_1, X_2, \dots, X_n une suite (finie) de variables aléatoires distribuées suivant une **loi de Bernoulli** de paramètre p . Alors, la variable $X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ suit une **loi binomiale** de paramètre n .



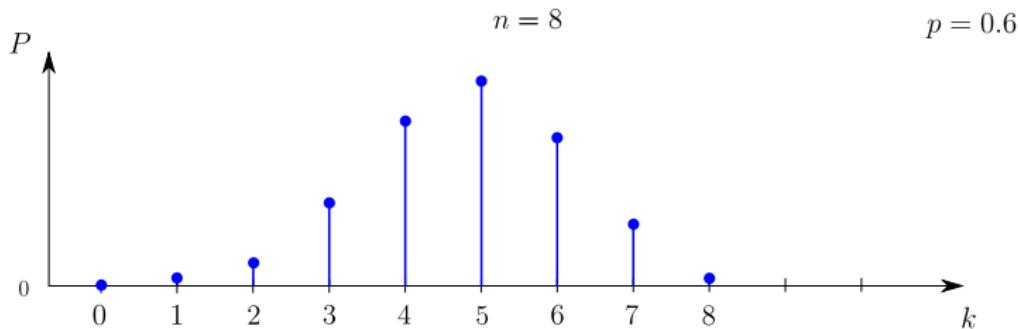
Loi binomiale

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et X_1, X_2, \dots, X_n une suite (finie) de variables aléatoires distribuées suivant une **loi de Bernoulli** de paramètre p . Alors, la variable $X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ suit une **loi binomiale** de paramètre n .



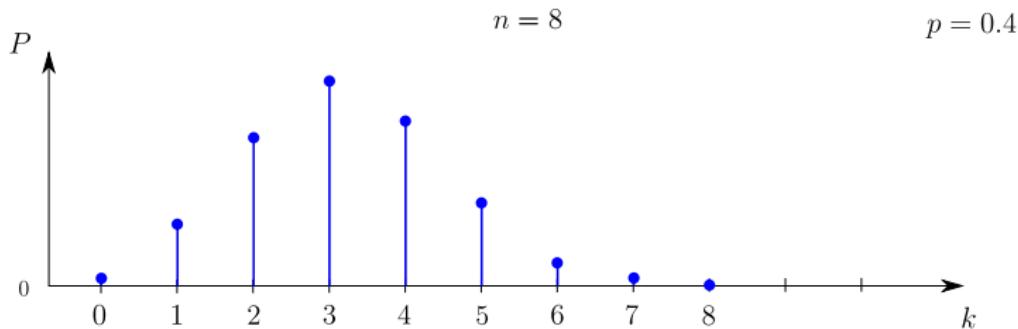
Loi binomiale

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et X_1, X_2, \dots, X_n une suite (finie) de variables aléatoires distribuées suivant une **loi de Bernoulli** de paramètre p . Alors, la variable $X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ suit une **loi binomiale** de paramètre n .



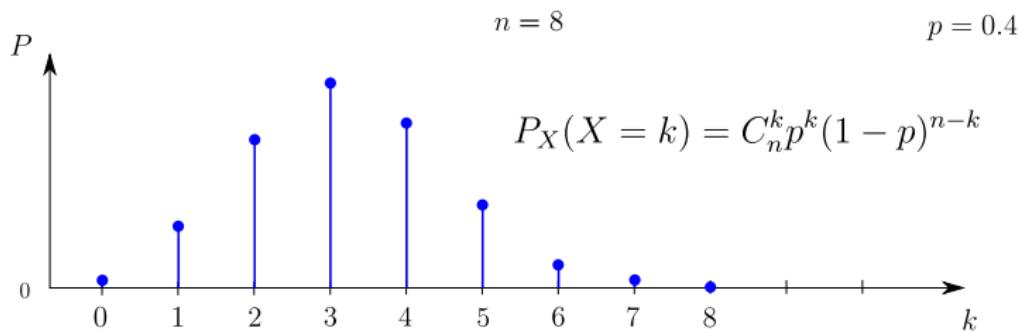
Loi binomiale

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et X_1, X_2, \dots, X_n une suite (finie) de variables aléatoires distribuées suivant une **loi de Bernoulli** de paramètre p . Alors, la variable $X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ suit une **loi binomiale** de paramètre n .



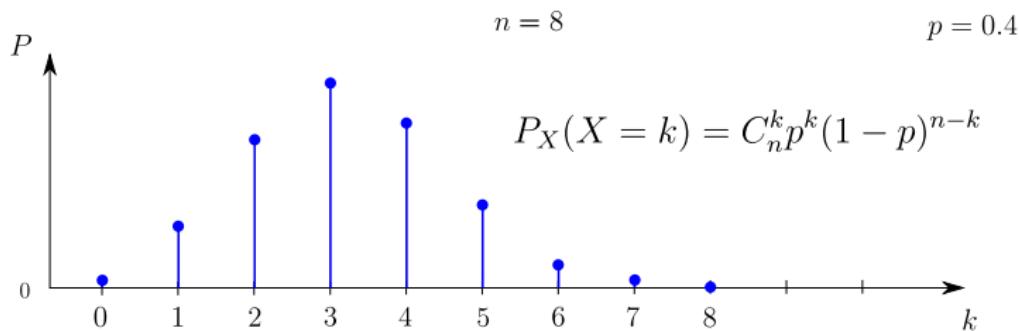
Loi binomiale

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et X_1, X_2, \dots, X_n une suite (finie) de variables aléatoires distribuées suivant une **loi de Bernoulli** de paramètre p . Alors, la variable $X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ suit une **loi binomiale** de paramètre n .



Loi binomiale

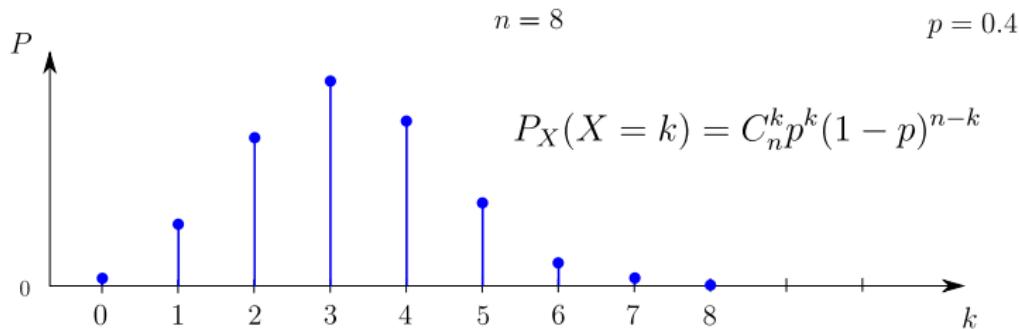
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et X_1, X_2, \dots, X_n une suite (finie) de variables aléatoires distribuées suivant une **loi de Bernoulli** de paramètre p . Alors, la variable $X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ suit une **loi binomiale** de paramètre n .



$$\mathbb{P}(\Omega) = \sum_{k=0}^n C_n^k p^k (1 - p)^{n-k}$$

Loi binomiale

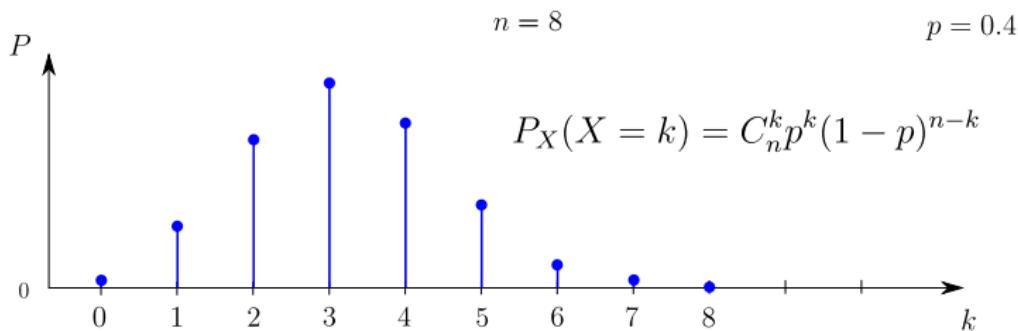
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et X_1, X_2, \dots, X_n une suite (finie) de variables aléatoires distribuées suivant une **loi de Bernoulli** de paramètre p . Alors, la variable $X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ suit une **loi binomiale** de paramètre n .



$$\mathbb{P}(\Omega) = \sum_{k=0}^n C_n^k p^k (1 - p)^{n-k}$$

Loi binomiale

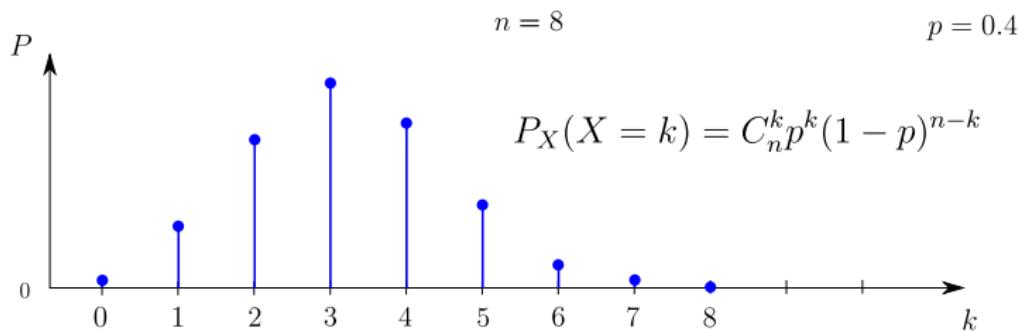
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et X_1, X_2, \dots, X_n une suite (finie) de variables aléatoires distribuées suivant une **loi de Bernoulli** de paramètre p . Alors, la variable $X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ suit une **loi binomiale** de paramètre n .



$$\mathbb{P}(\Omega) = \sum_{k=0}^n C_n^k p^k (1 - p)^{n-k} = (p + 1 - p)^n$$

Loi binomiale

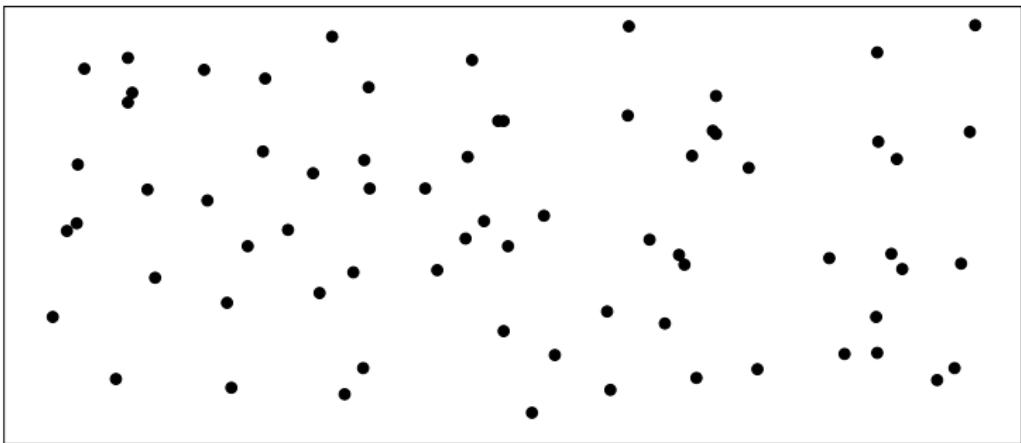
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et X_1, X_2, \dots, X_n une suite (finie) de variables aléatoires distribuées suivant une **loi de Bernoulli** de paramètre p . Alors, la variable $X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ suit une **loi binomiale** de paramètre n .



$$\mathbb{P}(\Omega) = \sum_{k=0}^n C_n^k p^k (1 - p)^{n-k} = (p + 1 - p)^n = 1$$

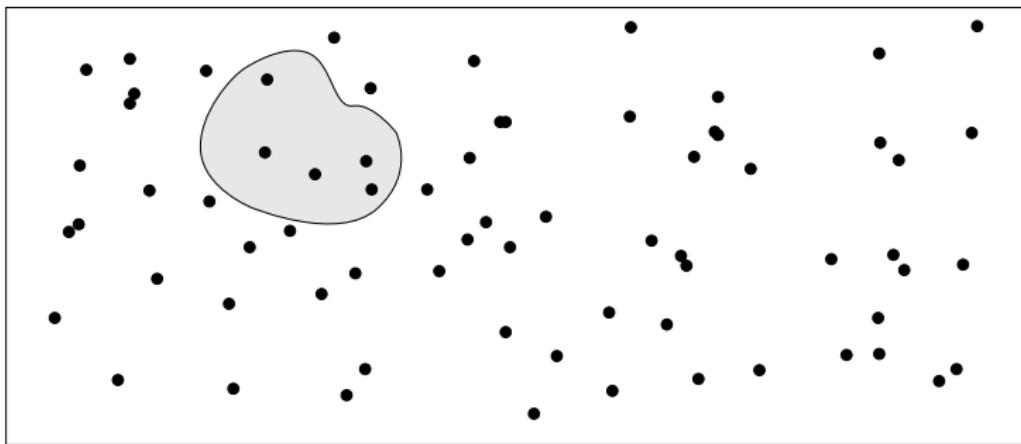
Loi de Poisson

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et X_1, X_2, \dots, X_n une suite (finie) de variables aléatoires distribuées suivant une **loi de Bernoulli** de paramètre p . On suppose $n \gg 1$ et p *relativement petit*. Alors, la variable $X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ suit une **loi de Poisson** de paramètre $\lambda = np$.



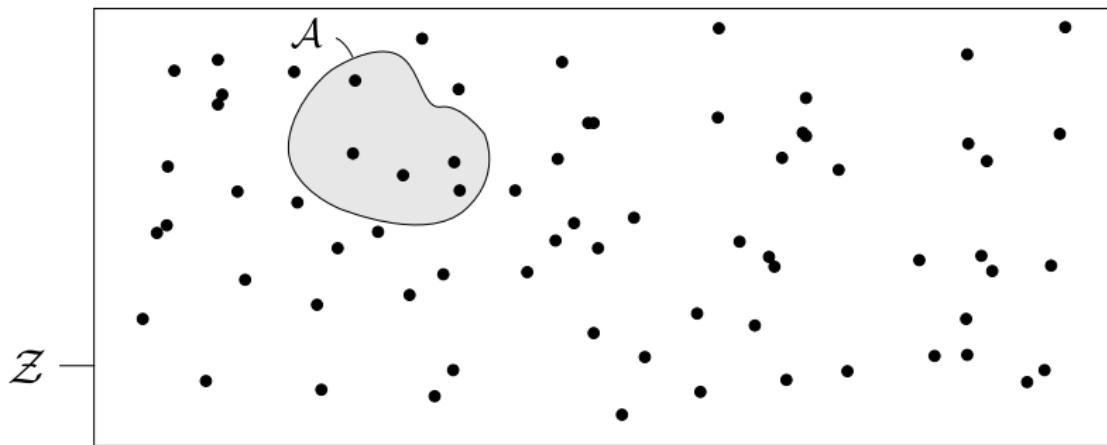
Loi de Poisson

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et X_1, X_2, \dots, X_n une suite (finie) de variables aléatoires distribuées suivant une **loi de Bernoulli** de paramètre p . On suppose $n \gg 1$ et p *relativement petit*. Alors, la variable $X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ suit une **loi de Poisson** de paramètre $\lambda = np$.



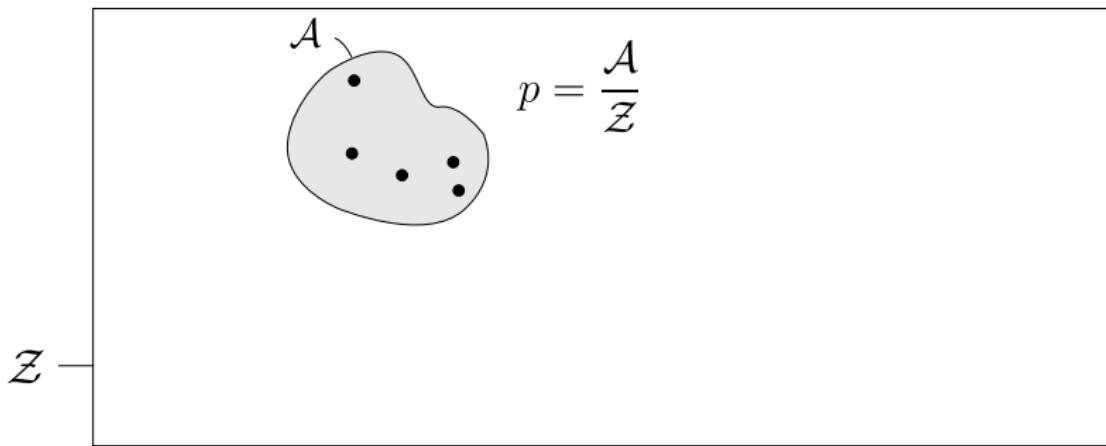
Loi de Poisson

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et X_1, X_2, \dots, X_n une suite (finie) de variables aléatoires distribuées suivant une **loi de Bernoulli** de paramètre p . On suppose $n \gg 1$ et p *relativement petit*. Alors, la variable $X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ suit une **loi de Poisson** de paramètre $\lambda = np$.



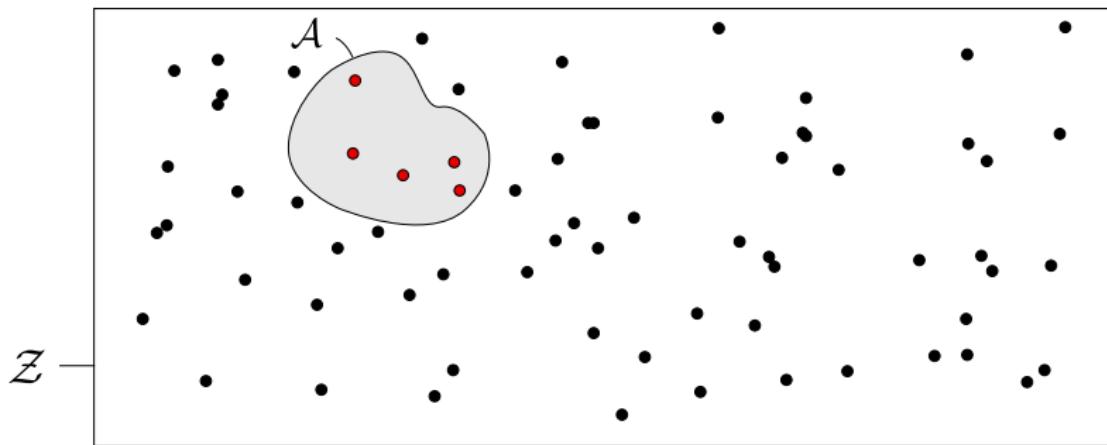
Loi de Poisson

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et X_1, X_2, \dots, X_n une suite (finie) de variables aléatoires distribuées suivant une **loi de Bernoulli** de paramètre p . On suppose $n \gg 1$ et p *relativement petit*. Alors, la variable $X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ suit une **loi de Poisson** de paramètre $\lambda = np$.



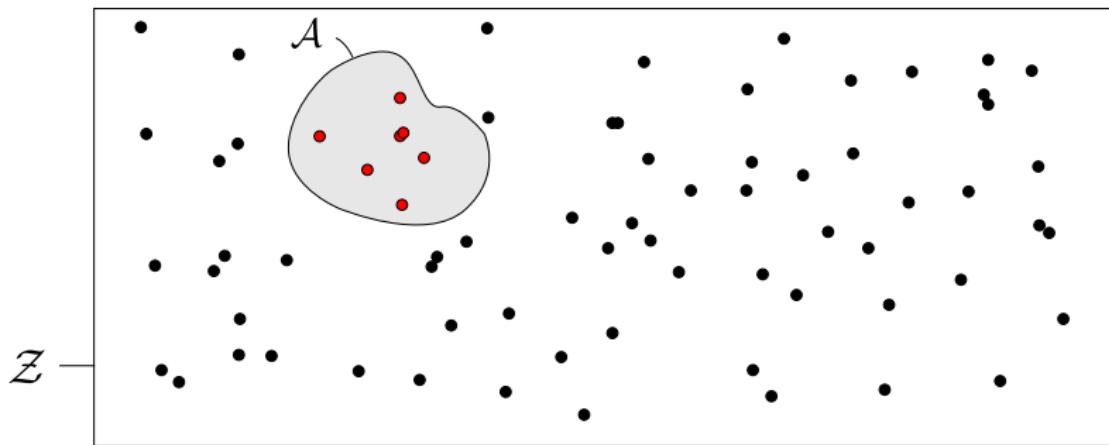
Loi de Poisson

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et X_1, X_2, \dots, X_n une suite (finie) de variables aléatoires distribuées suivant une **loi de Bernoulli** de paramètre p . On suppose $n \gg 1$ et p *relativement petit*. Alors, la variable $X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ suit une **loi de Poisson** de paramètre $\lambda = np$.



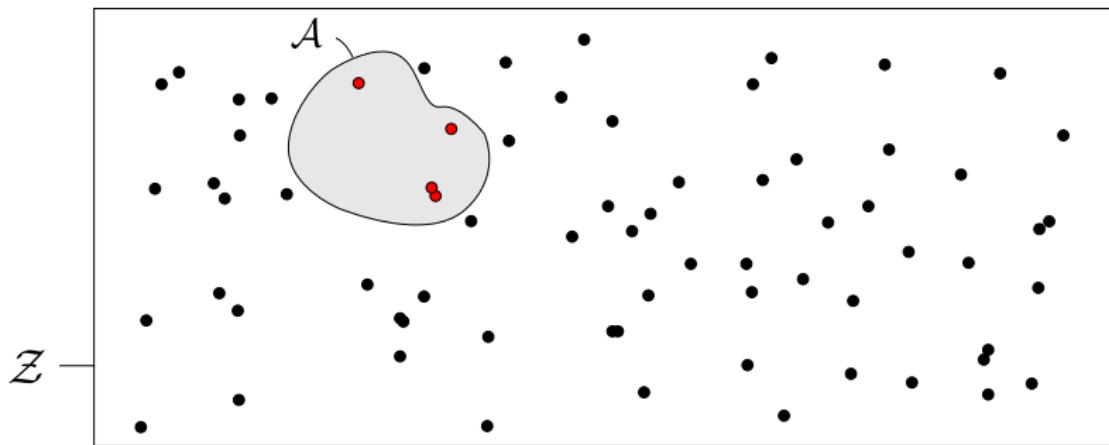
Loi de Poisson

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et X_1, X_2, \dots, X_n une suite (finie) de variables aléatoires distribuées suivant une **loi de Bernoulli** de paramètre p . On suppose $n \gg 1$ et p *relativement petit*. Alors, la variable $X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ suit une **loi de Poisson** de paramètre $\lambda = np$.



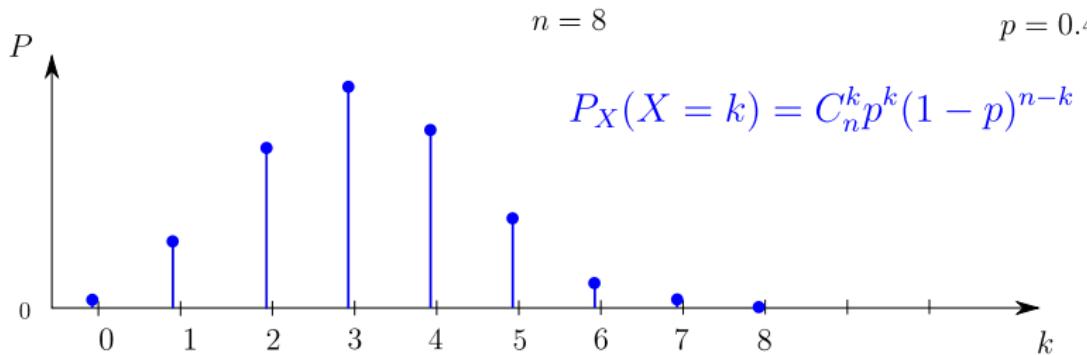
Loi de Poisson

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et X_1, X_2, \dots, X_n une suite (finie) de variables aléatoires distribuées suivant une **loi de Bernoulli** de paramètre p . On suppose $n \gg 1$ et p *relativement petit*. Alors, la variable $X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ suit une **loi de Poisson** de paramètre $\lambda = np$.



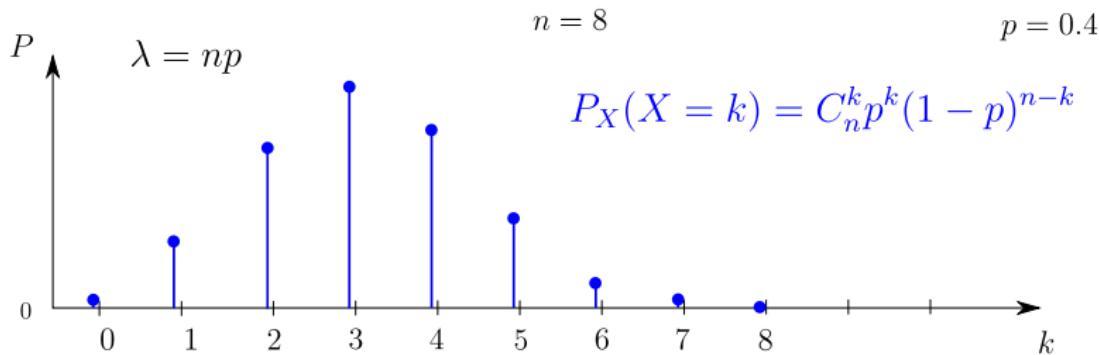
Loi de Poisson

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et X_1, X_2, \dots, X_n une suite (finie) de variables aléatoires distribuées suivant une **loi de Bernoulli** de paramètre p . On suppose $n \gg 1$ et p relativement petit. Alors, la variable $X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ suit une **loi de Poisson** de paramètre $\lambda = np$.



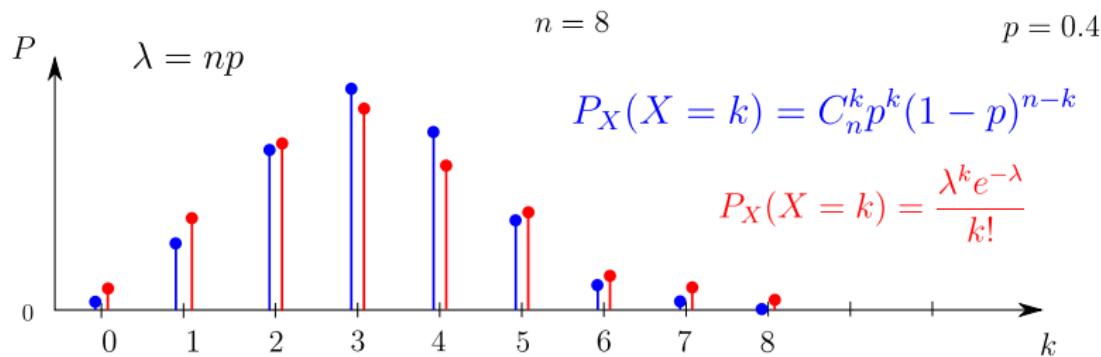
Loi de Poisson

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et X_1, X_2, \dots, X_n une suite (finie) de variables aléatoires distribuées suivant une **loi de Bernoulli** de paramètre p . On suppose $n \gg 1$ et p relativement petit. Alors, la variable $X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ suit une **loi de Poisson** de paramètre $\lambda = np$.



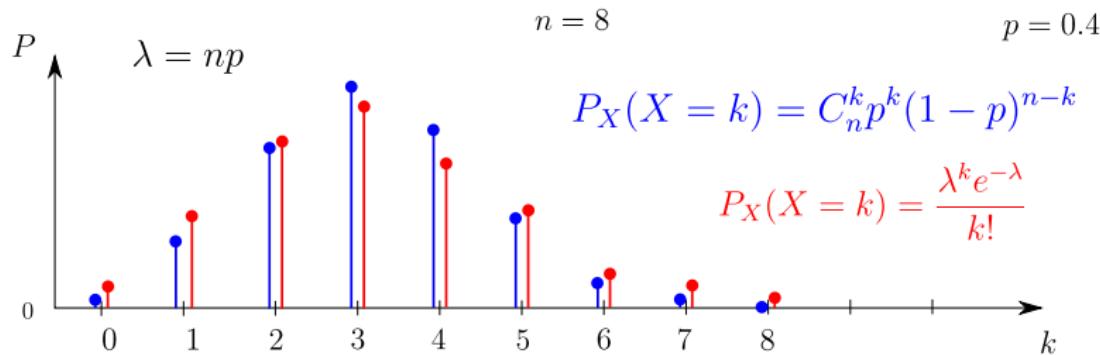
Loi de Poisson

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et X_1, X_2, \dots, X_n une suite (finie) de variables aléatoires distribuées suivant une **loi de Bernoulli** de paramètre p . On suppose $n \gg 1$ et p relativement petit. Alors, la variable $X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ suit une **loi de Poisson** de paramètre $\lambda = np$.



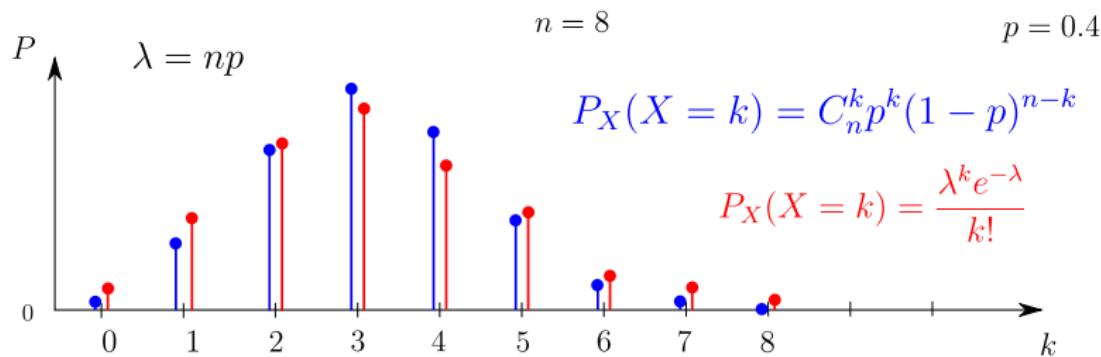
Loi de Poisson

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et X_1, X_2, \dots, X_n une suite (finie) de variables aléatoires distribuées suivant une **loi de Bernoulli** de paramètre p . On suppose $n \gg 1$ et p relativement petit. Alors, la variable $X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ suit une **loi de Poisson** de paramètre $\lambda = np$.



Loi de Poisson

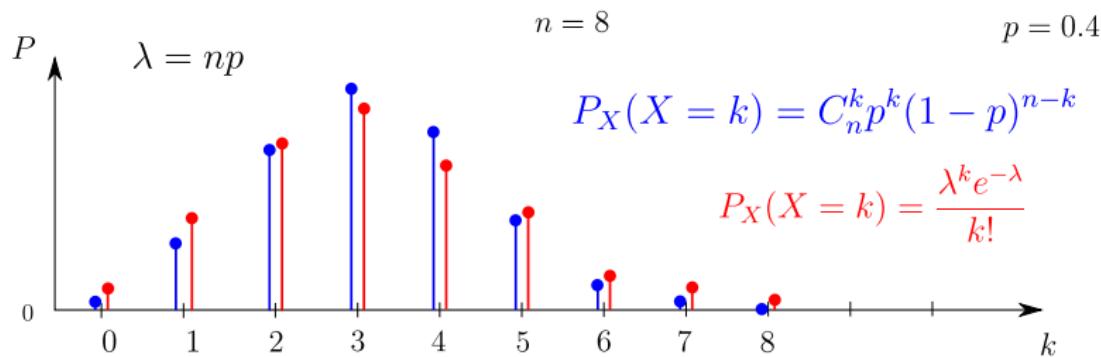
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et X_1, X_2, \dots, X_n une suite (finie) de variables aléatoires distribuées suivant une **loi de Bernoulli** de paramètre p . On suppose $n \gg 1$ et p relativement petit. Alors, la variable $X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ suit une **loi de Poisson** de paramètre $\lambda = np$.



$$\mathbb{P}(\Omega) = \sum_{k \in \mathbb{N}} P_X(X = k) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}$$

Loi de Poisson

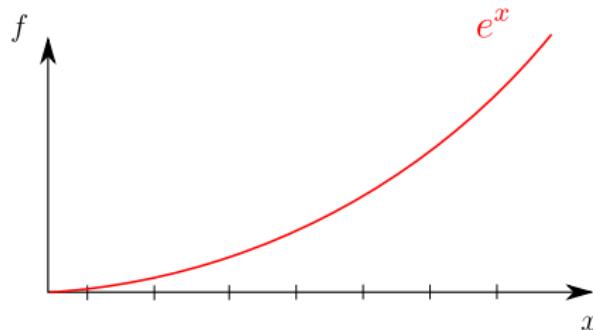
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et X_1, X_2, \dots, X_n une suite (finie) de variables aléatoires distribuées suivant une **loi de Bernoulli** de paramètre p . On suppose $n \gg 1$ et p relativement petit. Alors, la variable $X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ suit une **loi de Poisson** de paramètre $\lambda = np$.



$$\mathbb{P}(\Omega) = \sum_{k \in \mathbb{N}} P_X(X = k) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{\lambda^k}{k!}$$

Loi de Poisson

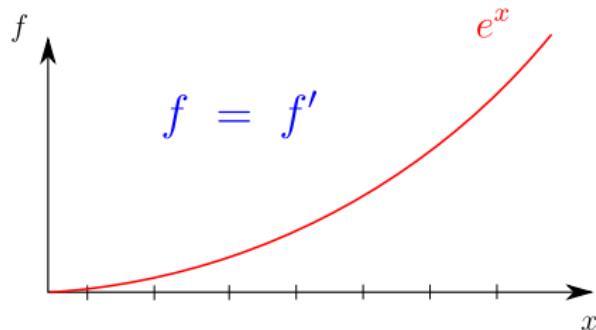
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et X_1, X_2, \dots, X_n une suite (finie) de variables aléatoires distribuées suivant une **loi de Bernoulli** de paramètre p . On suppose $n \gg 1$ et p relativement petit. Alors, la variable $X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ suit une **loi de Poisson** de paramètre $\lambda = np$.



$$\mathbb{P}(\Omega) = \sum_{k \in \mathbb{N}} P_X(X = k) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \underbrace{\sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{\lambda^k}{k!}}_{\exp(\lambda)}$$

Loi de Poisson

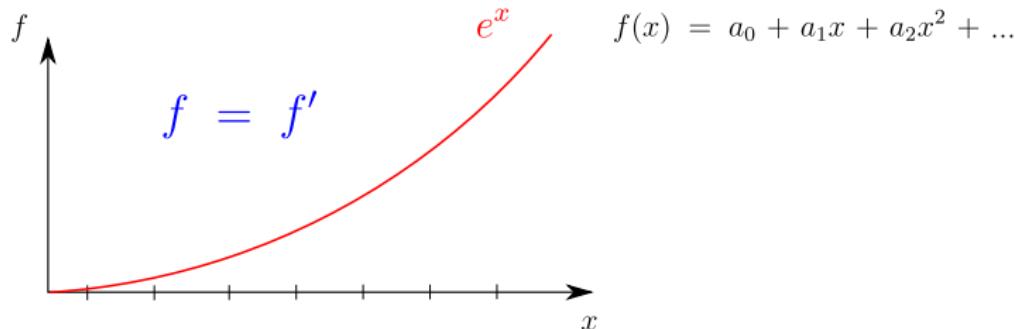
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et X_1, X_2, \dots, X_n une suite (finie) de variables aléatoires distribuées suivant une **loi de Bernoulli** de paramètre p . On suppose $n \gg 1$ et p relativement petit. Alors, la variable $X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ suit une **loi de Poisson** de paramètre $\lambda = np$.



$$\mathbb{P}(\Omega) = \sum_{k \in \mathbb{N}} P_X(X = k) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \underbrace{\sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{\lambda^k}{k!}}_{\exp(\lambda)}$$

Loi de Poisson

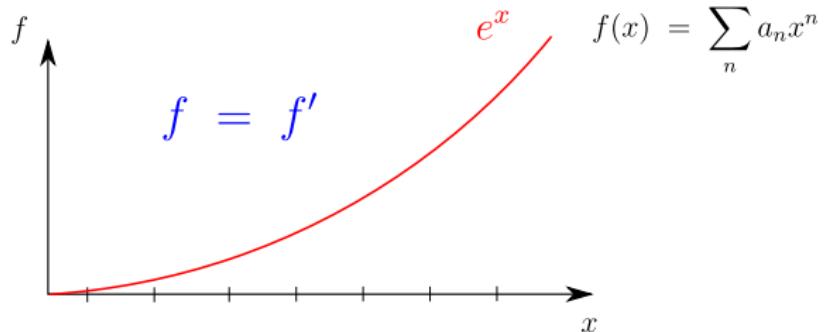
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et X_1, X_2, \dots, X_n une suite (finie) de variables aléatoires distribuées suivant une **loi de Bernoulli** de paramètre p . On suppose $n \gg 1$ et p relativement petit. Alors, la variable $X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ suit une **loi de Poisson** de paramètre $\lambda = np$.



$$\mathbb{P}(\Omega) = \sum_{k \in \mathbb{N}} P_X(X = k) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \underbrace{\sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{\lambda^k}{k!}}_{\exp(\lambda)}$$

Loi de Poisson

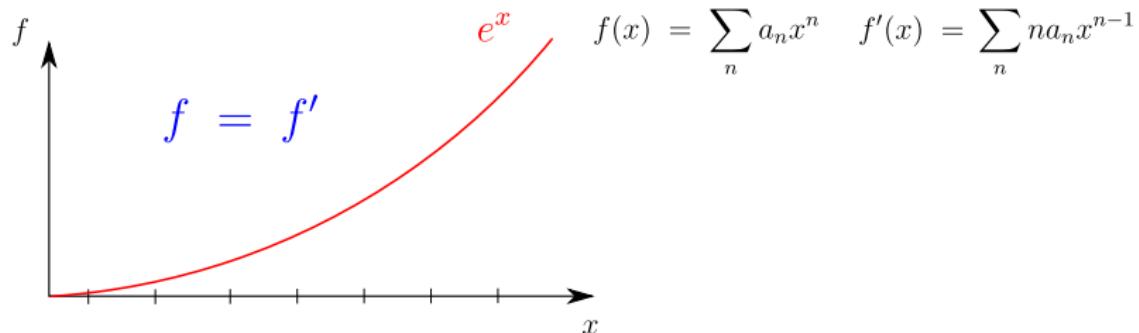
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et X_1, X_2, \dots, X_n une suite (finie) de variables aléatoires distribuées suivant une **loi de Bernoulli** de paramètre p . On suppose $n \gg 1$ et p relativement petit. Alors, la variable $X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ suit une **loi de Poisson** de paramètre $\lambda = np$.



$$\mathbb{P}(\Omega) = \sum_{k \in \mathbb{N}} P_X(X = k) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \underbrace{\sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{\lambda^k}{k!}}_{\exp(\lambda)}$$

Loi de Poisson

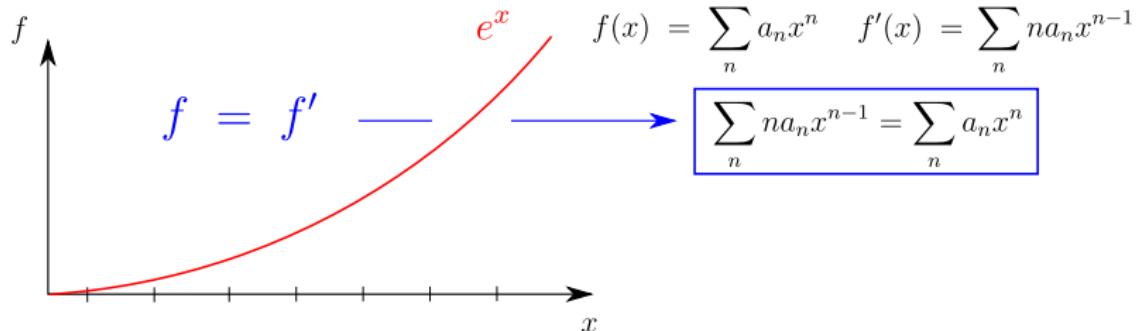
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et X_1, X_2, \dots, X_n une suite (finie) de variables aléatoires distribuées suivant une **loi de Bernoulli** de paramètre p . On suppose $n \gg 1$ et p relativement petit. Alors, la variable $X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ suit une **loi de Poisson** de paramètre $\lambda = np$.



$$\mathbb{P}(\Omega) = \sum_{k \in \mathbb{N}} P_X(X = k) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \underbrace{\sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{\lambda^k}{k!}}_{\exp(\lambda)}$$

Loi de Poisson

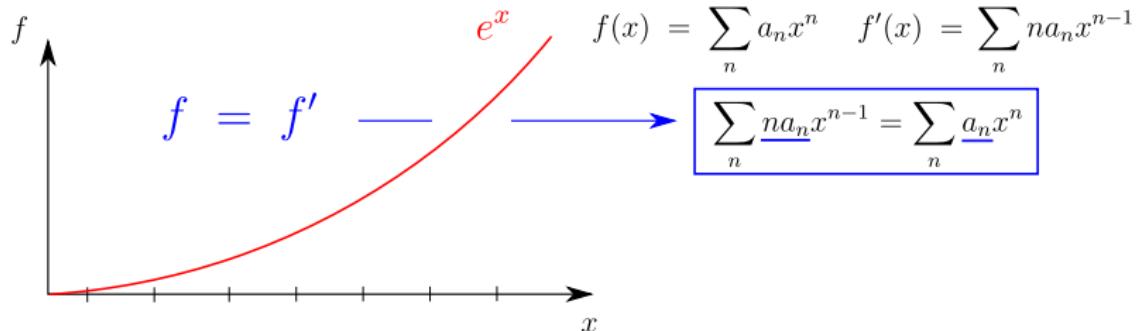
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et X_1, X_2, \dots, X_n une suite (finie) de variables aléatoires distribuées suivant une **loi de Bernoulli** de paramètre p . On suppose $n \gg 1$ et p relativement petit. Alors, la variable $X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ suit une **loi de Poisson** de paramètre $\lambda = np$.



$$\mathbb{P}(\Omega) = \sum_{k \in \mathbb{N}} P_X(X = k) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \underbrace{\sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{\lambda^k}{k!}}_{\exp(\lambda)}$$

Loi de Poisson

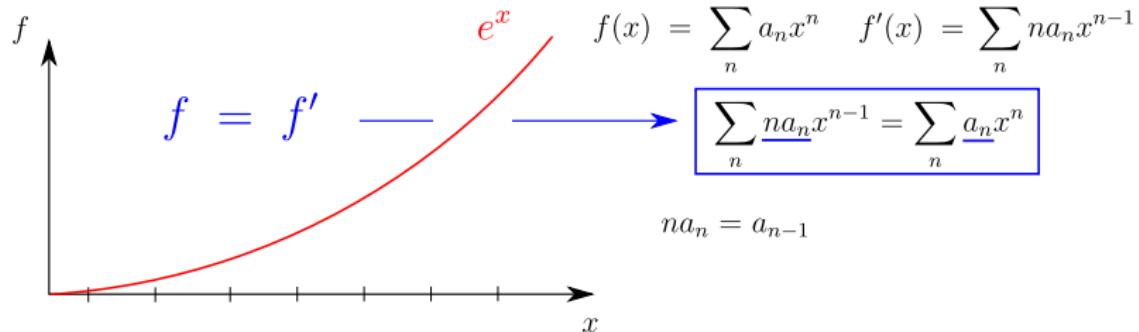
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et X_1, X_2, \dots, X_n une suite (finie) de variables aléatoires distribuées suivant une **loi de Bernoulli** de paramètre p . On suppose $n \gg 1$ et p relativement petit. Alors, la variable $X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ suit une **loi de Poisson** de paramètre $\lambda = np$.



$$\mathbb{P}(\Omega) = \sum_{k \in \mathbb{N}} P_X(X = k) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \underbrace{\sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{\lambda^k}{k!}}_{\exp(\lambda)}$$

Loi de Poisson

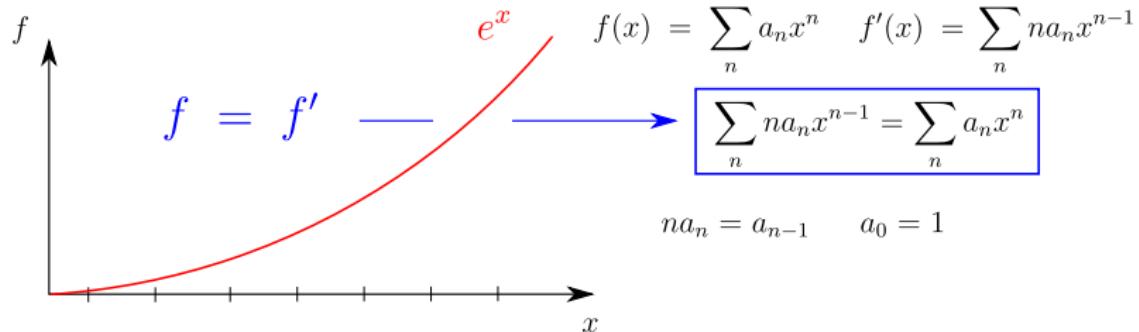
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et X_1, X_2, \dots, X_n une suite (finie) de variables aléatoires distribuées suivant une **loi de Bernoulli** de paramètre p . On suppose $n \gg 1$ et p relativement petit. Alors, la variable $X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ suit une **loi de Poisson** de paramètre $\lambda = np$.



$$\mathbb{P}(\Omega) = \sum_{k \in \mathbb{N}} P_X(X = k) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \underbrace{\sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{\lambda^k}{k!}}_{\exp(\lambda)}$$

Loi de Poisson

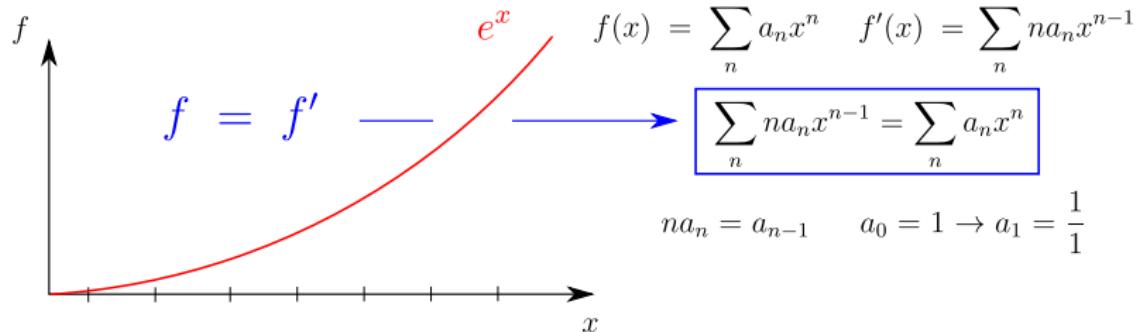
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et X_1, X_2, \dots, X_n une suite (finie) de variables aléatoires distribuées suivant une **loi de Bernoulli** de paramètre p . On suppose $n \gg 1$ et p relativement petit. Alors, la variable $X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ suit une **loi de Poisson** de paramètre $\lambda = np$.



$$\mathbb{P}(\Omega) = \sum_{k \in \mathbb{N}} P_X(X = k) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \underbrace{\sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{\lambda^k}{k!}}_{\exp(\lambda)}$$

Loi de Poisson

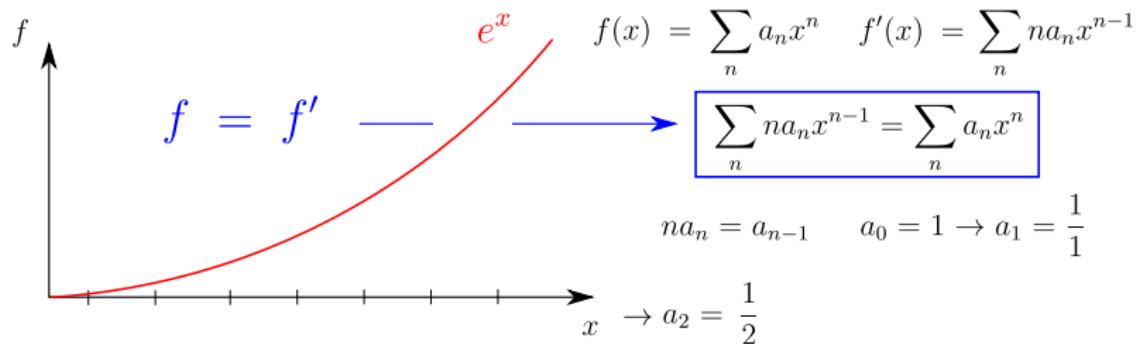
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et X_1, X_2, \dots, X_n une suite (finie) de variables aléatoires distribuées suivant une **loi de Bernoulli** de paramètre p . On suppose $n \gg 1$ et p relativement petit. Alors, la variable $X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ suit une **loi de Poisson** de paramètre $\lambda = np$.



$$\mathbb{P}(\Omega) = \sum_{k \in \mathbb{N}} P_X(X = k) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \underbrace{\sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{\lambda^k}{k!}}_{\exp(\lambda)}$$

Loi de Poisson

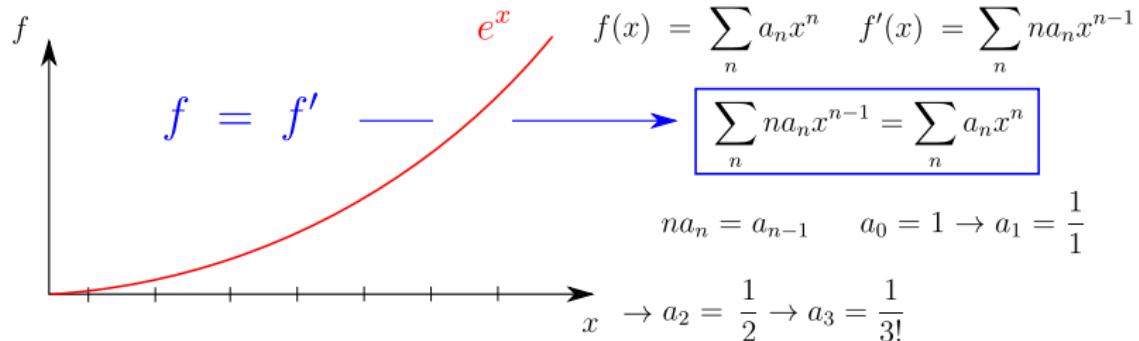
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et X_1, X_2, \dots, X_n une suite (finie) de variables aléatoires distribuées suivant une **loi de Bernoulli** de paramètre p . On suppose $n \gg 1$ et p relativement petit. Alors, la variable $X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ suit une **loi de Poisson** de paramètre $\lambda = np$.



$$\mathbb{P}(\Omega) = \sum_{k \in \mathbb{N}} P_X(X = k) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \underbrace{\sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{\lambda^k}{k!}}_{\exp(\lambda)}$$

Loi de Poisson

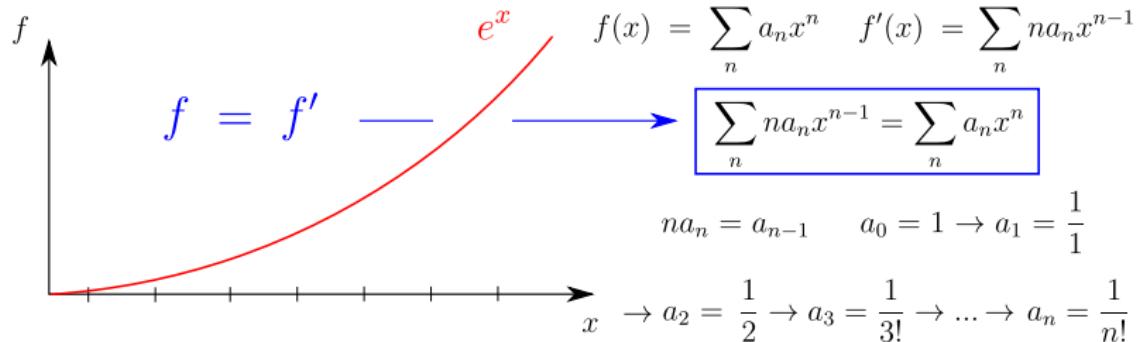
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et X_1, X_2, \dots, X_n une suite (finie) de variables aléatoires distribuées suivant une **loi de Bernoulli** de paramètre p . On suppose $n \gg 1$ et p relativement petit. Alors, la variable $X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ suit une **loi de Poisson** de paramètre $\lambda = np$.



$$\mathbb{P}(\Omega) = \sum_{k \in \mathbb{N}} P_X(X = k) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \underbrace{\sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{\lambda^k}{k!}}_{\exp(\lambda)}$$

Loi de Poisson

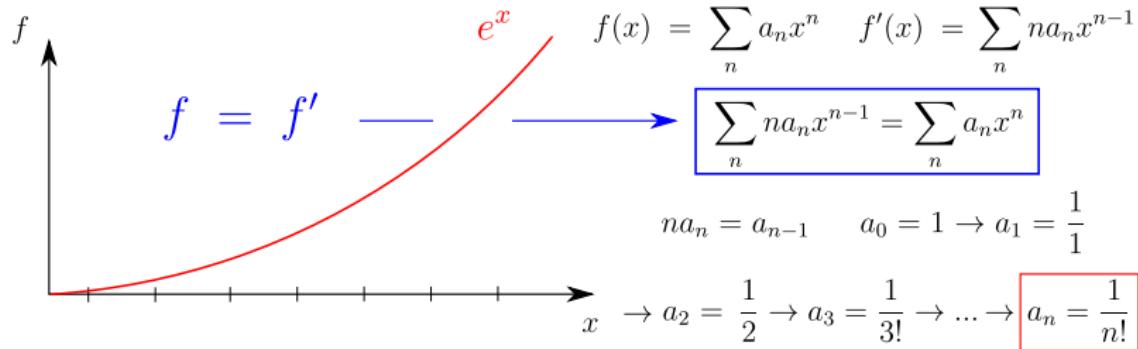
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et X_1, X_2, \dots, X_n une suite (finie) de variables aléatoires distribuées suivant une **loi de Bernoulli** de paramètre p . On suppose $n \gg 1$ et p relativement petit. Alors, la variable $X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ suit une **loi de Poisson** de paramètre $\lambda = np$.



$$\mathbb{P}(\Omega) = \sum_{k \in \mathbb{N}} P_X(X = k) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \underbrace{\sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{\lambda^k}{k!}}_{\exp(\lambda)}$$

Loi de Poisson

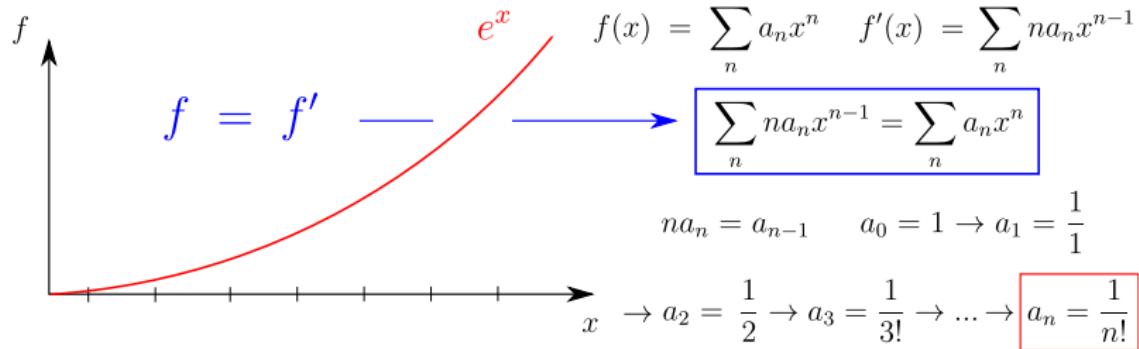
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et X_1, X_2, \dots, X_n une suite (finie) de variables aléatoires distribuées suivant une **loi de Bernoulli** de paramètre p . On suppose $n \gg 1$ et p relativement petit. Alors, la variable $X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ suit une **loi de Poisson** de paramètre $\lambda = np$.



$$\mathbb{P}(\Omega) = \sum_{k \in \mathbb{N}} P_X(X = k) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \underbrace{\sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{\lambda^k}{k!}}_{\exp(\lambda)}$$

Loi de Poisson

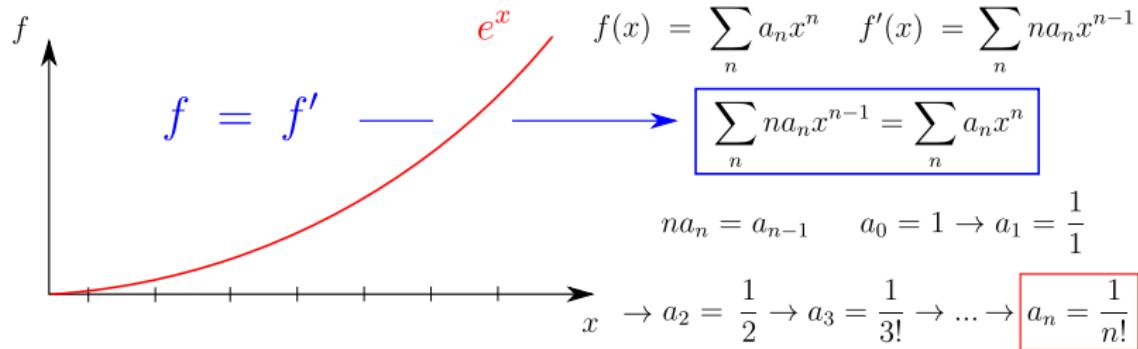
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et X_1, X_2, \dots, X_n une suite (finie) de variables aléatoires distribuées suivant une **loi de Bernoulli** de paramètre p . On suppose $n \gg 1$ et p relativement petit. Alors, la variable $X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ suit une **loi de Poisson** de paramètre $\lambda = np$.



$$\mathbb{P}(\Omega) = \sum_{k \in \mathbb{N}} P_X(X = k) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \underbrace{\sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{\lambda^k}{k!}}_{\exp(\lambda)}$$

Loi de Poisson

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et X_1, X_2, \dots, X_n une suite (finie) de variables aléatoires distribuées suivant une **loi de Bernoulli** de paramètre p . On suppose $n \gg 1$ et p relativement petit. Alors, la variable $X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ suit une **loi de Poisson** de paramètre $\lambda = np$.



$$\mathbb{P}(\Omega) = \sum_{k \in \mathbb{N}} P_X(X = k) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \underbrace{\sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{\lambda^k}{k!}}_{\exp(\lambda)}$$

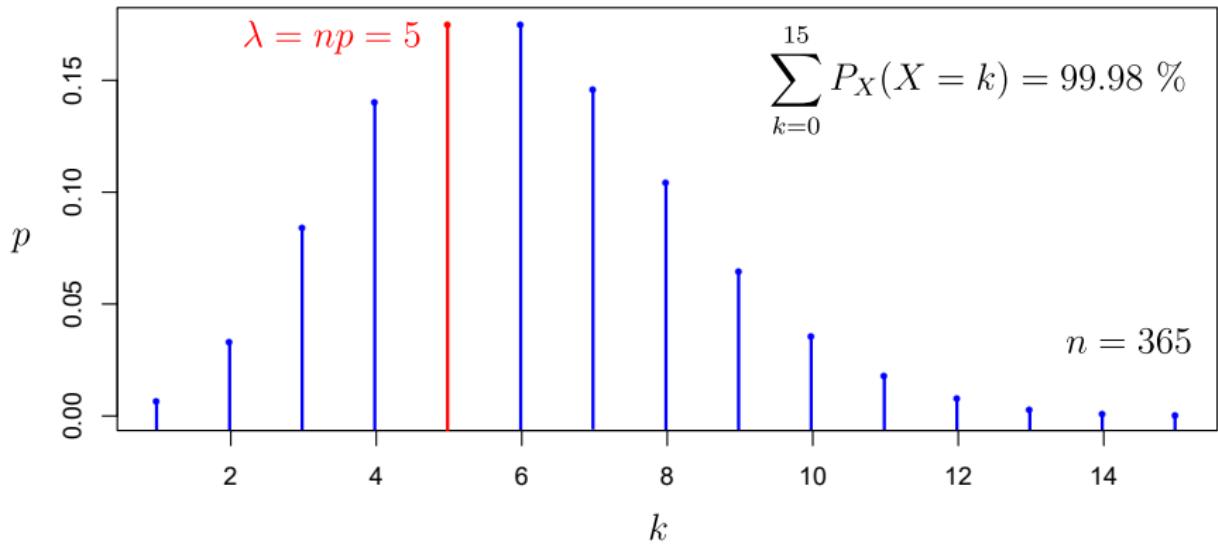
Loi de Poisson

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et X_1, X_2, \dots, X_n une suite (finie) de variables aléatoires distribuées suivant une **loi de Bernoulli** de paramètre p . On suppose $n \gg 1$ et p *relativement petit*. Alors, la variable $X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ suit une **loi de Poisson** de paramètre $\lambda = np$.

$$\mathbb{P}(\Omega) = \sum_{k \in \mathbb{N}} P_X(X = k) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \underbrace{\sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{\lambda^k}{k!}}_{\exp(\lambda)} = e^{-\lambda} \times e^\lambda = 1$$

Loi de Poisson

Exemple : nombre de retards de plus de 30 min sur une ligne de train



$\lambda = 5$ retards/an en moyenne

$n = 365$ jours

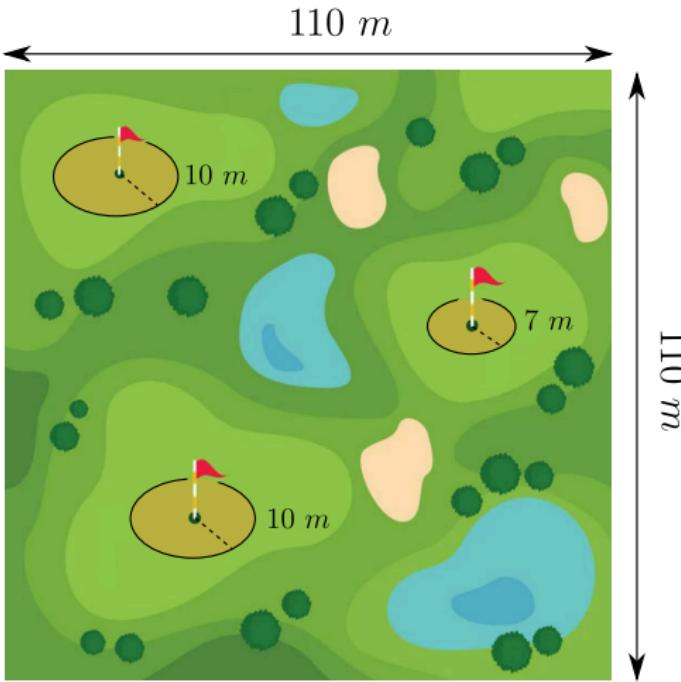
$p = 1.37\%$

Exercice : entretien d'un terrain de golf

Le gérant, qui possède 2000 € de trésorerie, doit reboucher tous les trous de taupes présents sur le green pour organiser une compétition planifiée le lendemain.

Le prix de l'entretien est de 1000 € par équipe de travail, pour 8h d'intervention, à raison de 1 trou /heure/équipe.

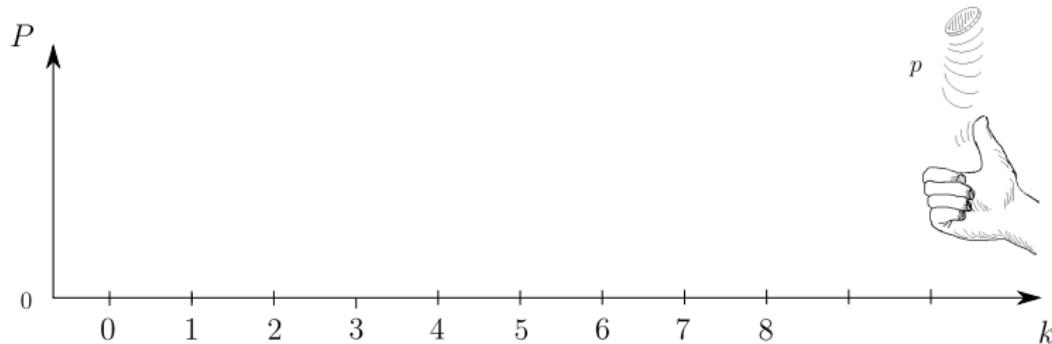
$$\lambda = 115 \text{ trous/ha}$$



- Quelle est la probabilité que la compétition puisse être maintenue ?
- Quel est le coût moyen engagé par le gérant ?

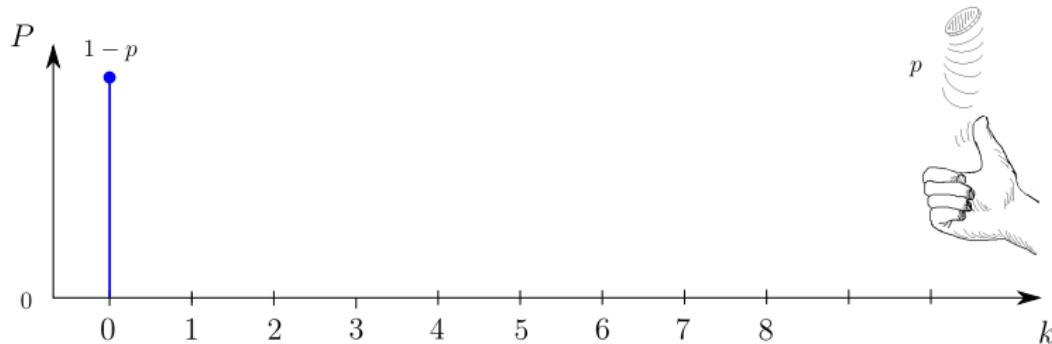
Loi géométrique

On considère $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite infinie de variables aléatoires distribuées suivant une loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0; 1[$. La variable aléatoire $X = \min \{k \mid X_k = 0\} - 1$ suit une loi géométrique de paramètre p : $X \sim \mathcal{G}(p)$.



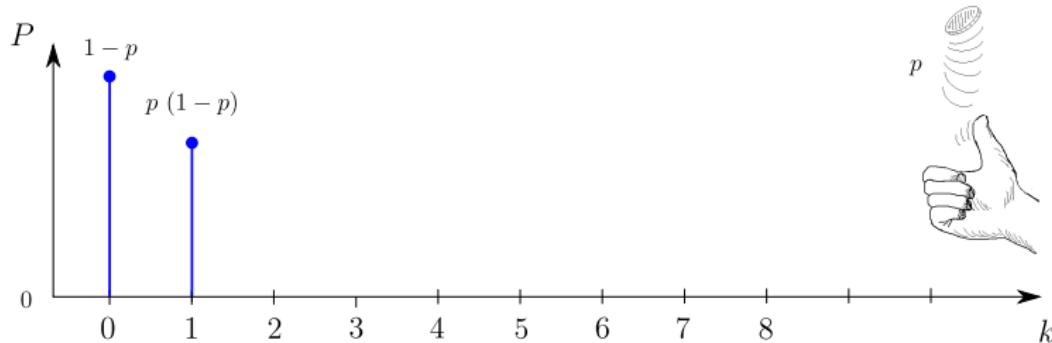
Loi géométrique

On considère $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite infinie de variables aléatoires distribuées suivant une loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0; 1[$. La variable aléatoire $X = \min \{k \mid X_k = 0\} - 1$ suit une loi géométrique de paramètre p : $X \sim \mathcal{G}(p)$.



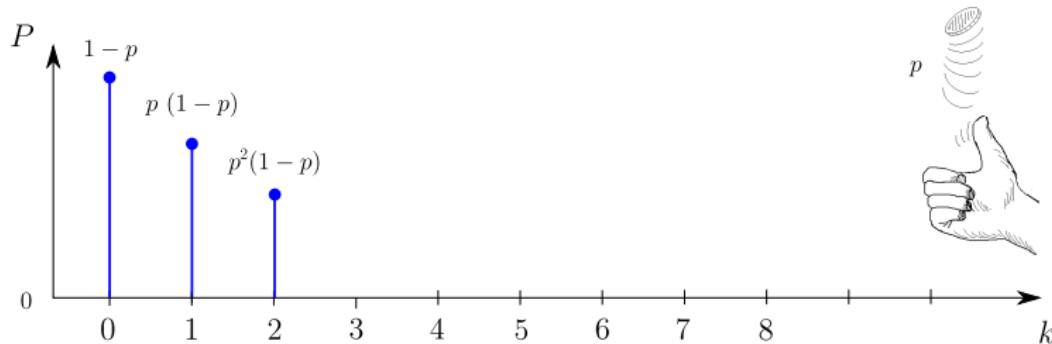
Loi géométrique

On considère $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite infinie de variables aléatoires distribuées suivant une loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0; 1[$. La variable aléatoire $X = \min \{k \mid X_k = 0\} - 1$ suit une loi géométrique de paramètre p : $X \sim \mathcal{G}(p)$.



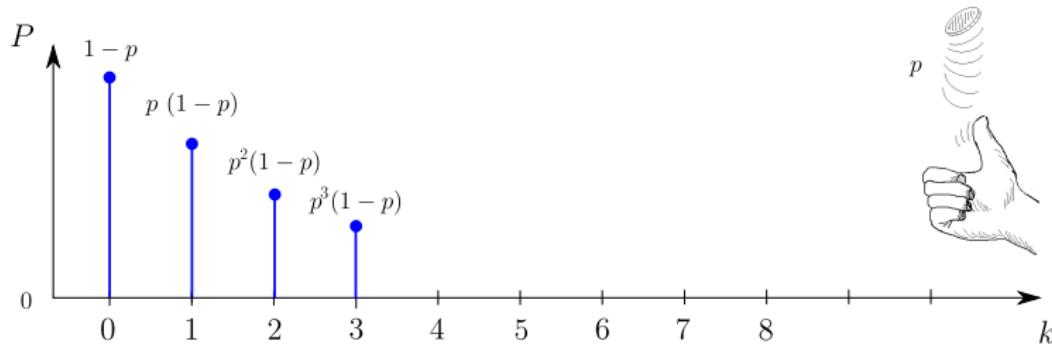
Loi géométrique

On considère $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite infinie de variables aléatoires distribuées suivant une loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0; 1[$. La variable aléatoire $X = \min \{k \mid X_k = 0\} - 1$ suit une loi géométrique de paramètre p : $X \sim \mathcal{G}(p)$.



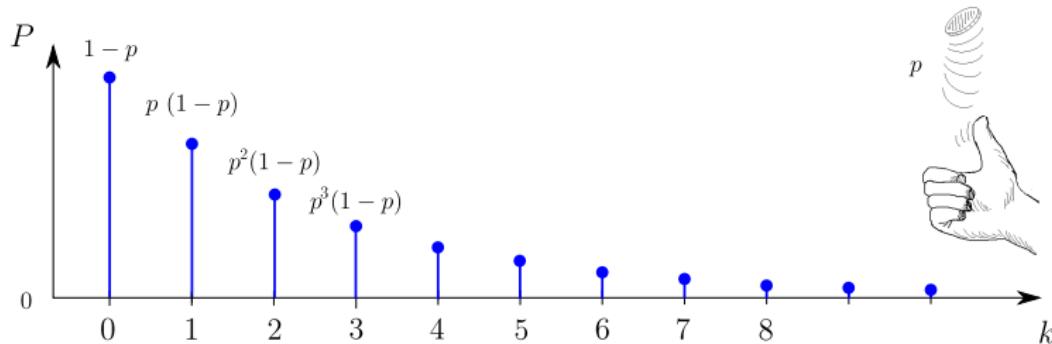
Loi géométrique

On considère $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite infinie de variables aléatoires distribuées suivant une loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0; 1[$. La variable aléatoire $X = \min \{k \mid X_k = 0\} - 1$ suit une loi géométrique de paramètre p : $X \sim \mathcal{G}(p)$.



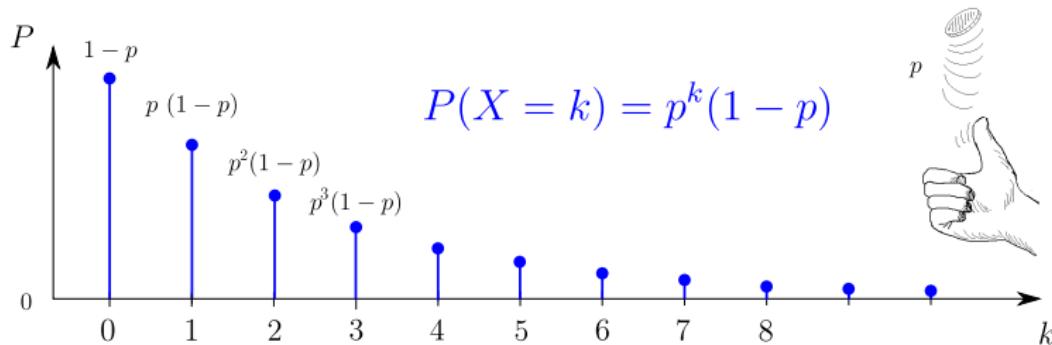
Loi géométrique

On considère $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite infinie de variables aléatoires distribuées suivant une loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0; 1[$. La variable aléatoire $X = \min \{k \mid X_k = 0\} - 1$ suit une loi géométrique de paramètre p : $X \sim \mathcal{G}(p)$.



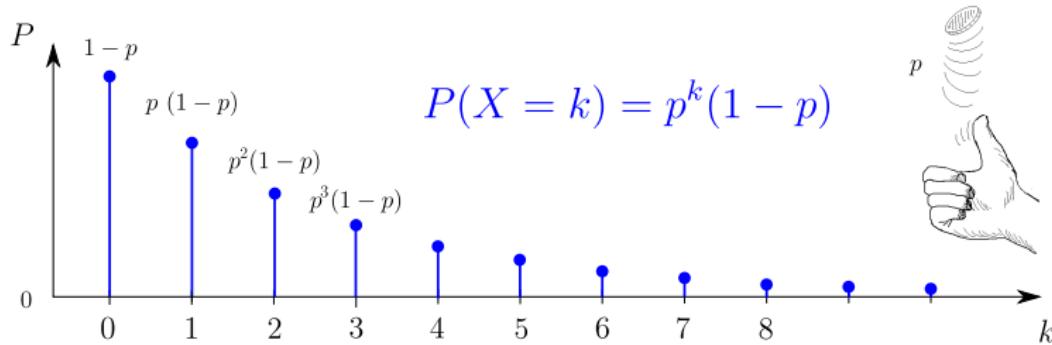
Loi géométrique

On considère $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite infinie de variables aléatoires distribuées suivant une loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0; 1[$. La variable aléatoire $X = \min \{k \mid X_k = 0\} - 1$ suit une loi géométrique de paramètre p : $X \sim \mathcal{G}(p)$.



Loi géométrique

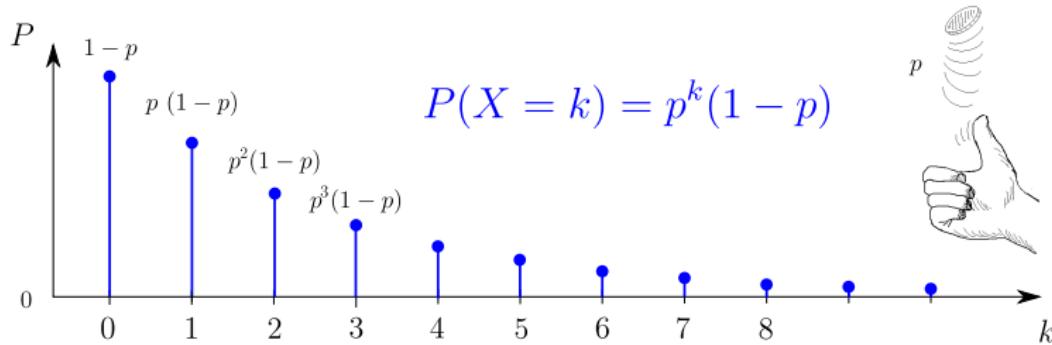
On considère $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite infinie de variables aléatoires distribuées suivant une loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0; 1[$. La variable aléatoire $X = \min \{k \mid X_k = 0\} - 1$ suit une loi géométrique de paramètre p : $X \sim \mathcal{G}(p)$.



$$\mathbb{P}(\Omega) =$$

Loi géométrique

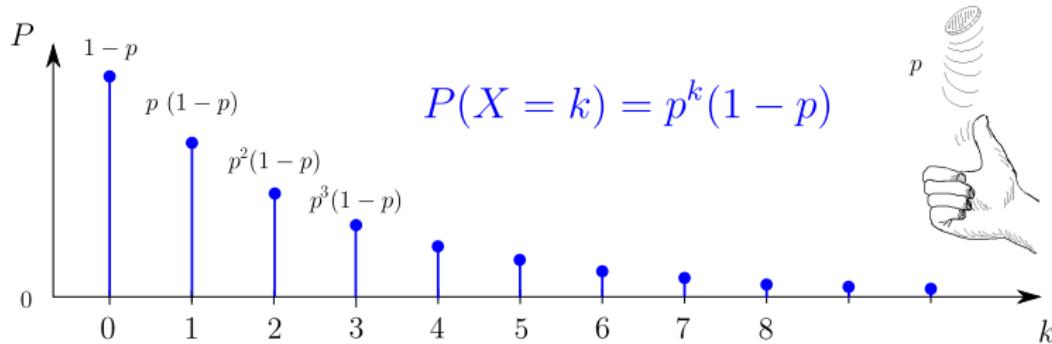
On considère $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite infinie de variables aléatoires distribuées suivant une loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0; 1[$. La variable aléatoire $X = \min \{k \mid X_k = 0\} - 1$ suit une loi géométrique de paramètre p : $X \sim \mathcal{G}(p)$.



$$\mathbb{P}(\Omega) = \sum_{k \in \mathbb{N}} p^k(1 - p) =$$

Loi géométrique

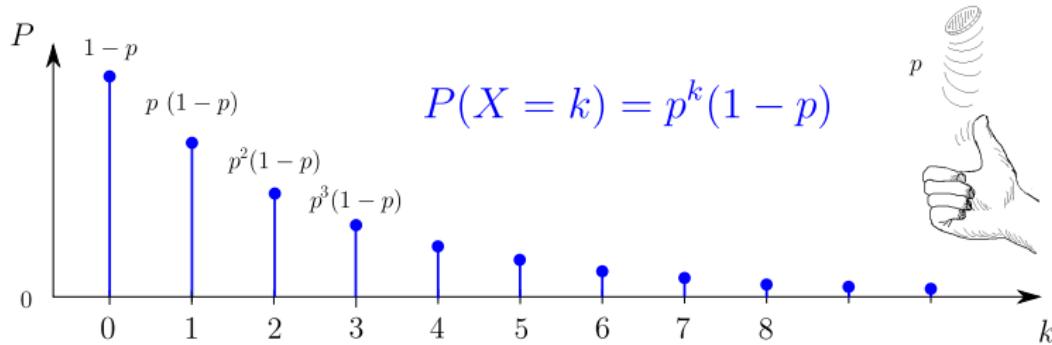
On considère $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite infinie de variables aléatoires distribuées suivant une loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0; 1[$. La variable aléatoire $X = \min \{k \mid X_k = 0\} - 1$ suit une loi géométrique de paramètre p : $X \sim \mathcal{G}(p)$.



$$\mathbb{P}(\Omega) = \sum_{k \in \mathbb{N}} p^k(1 - p) = (1 - p) \sum_{k \in \mathbb{N}} p^k =$$

Loi géométrique

On considère $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite infinie de variables aléatoires distribuées suivant une loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0; 1[$. La variable aléatoire $X = \min \{k \mid X_k = 0\} - 1$ suit une loi géométrique de paramètre p : $X \sim \mathcal{G}(p)$.

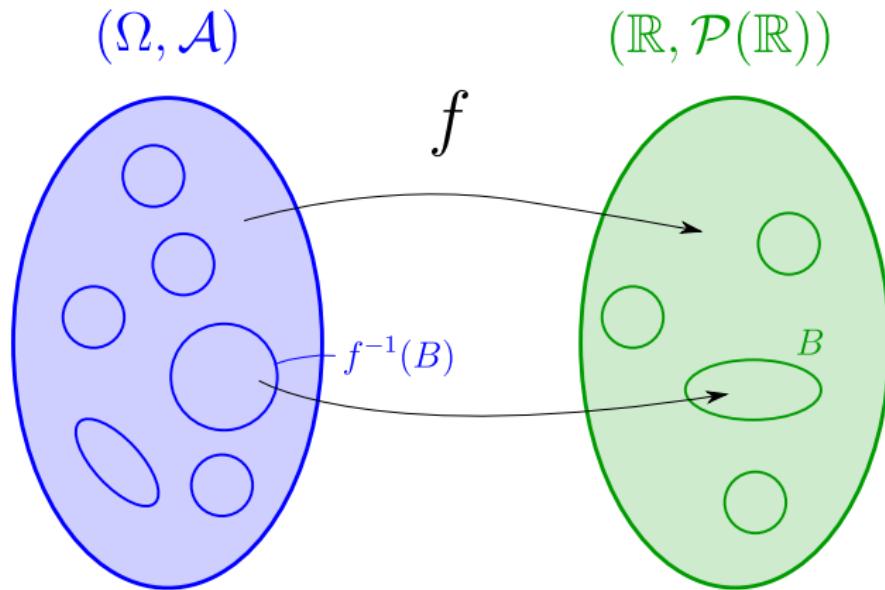


$$\mathbb{P}(\Omega) = \sum_{k \in \mathbb{N}} p^k(1-p) = (1-p) \sum_{k \in \mathbb{N}} p^k = (1-p) \times \frac{1}{1-p} = 1$$

Variables aléatoires II

- *Définition cas continu*
- *Fonction de répartition*
- *Densité de probabilité*
- *(Contre) exemples*

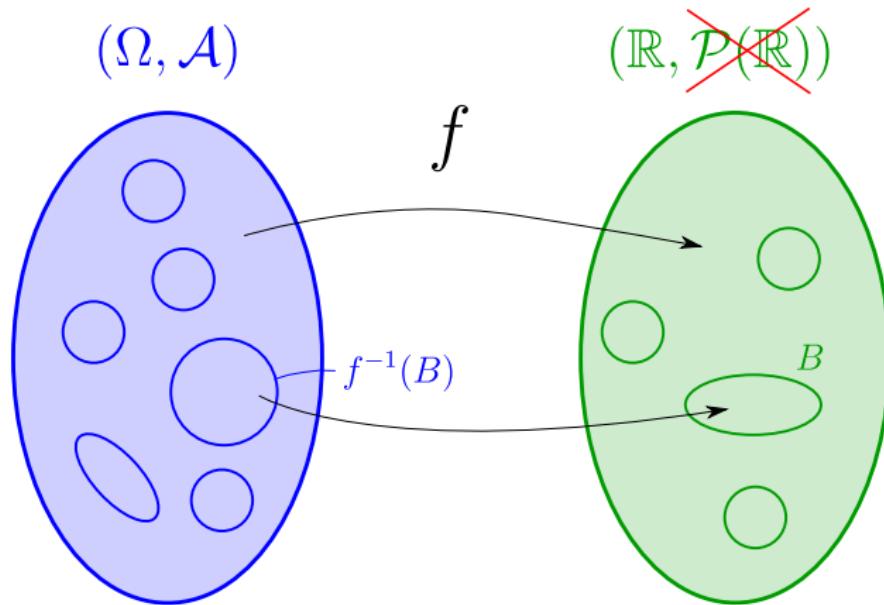
Variable aléatoire continue



X measurable

$$B \in \mathcal{F} \quad X^{-1}(B) \in \mathcal{E}$$

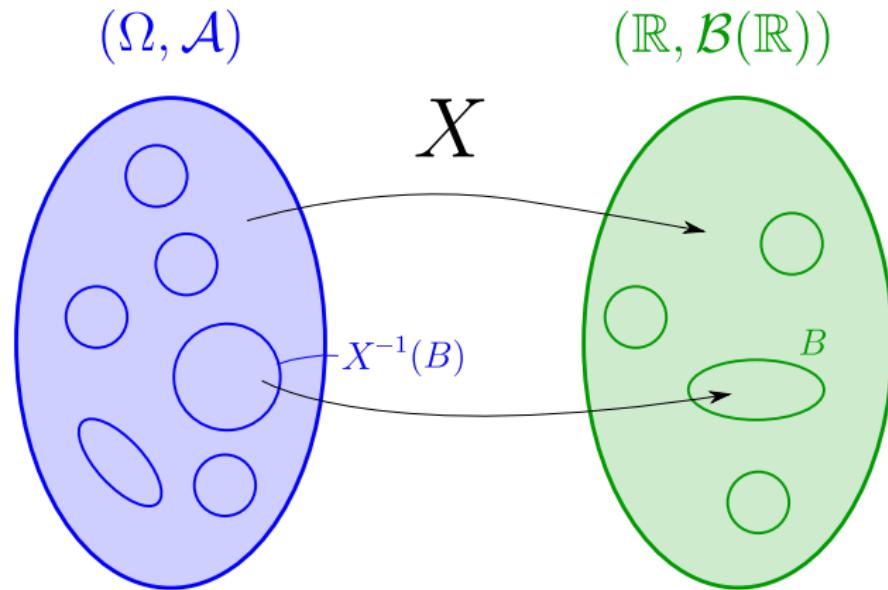
Variable aléatoire continue



X mesurable

$$B \in \mathcal{F} \quad X^{-1}(B) \in \mathcal{E}$$

Variable aléatoire continue



X measurable

$B \in \mathcal{F} \quad X^{-1}(B) \in \mathcal{E}$

Variable aléatoire continue



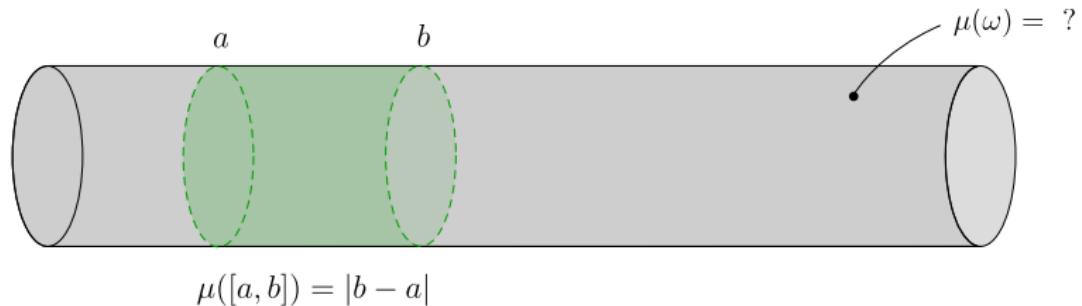
Variable aléatoire continue



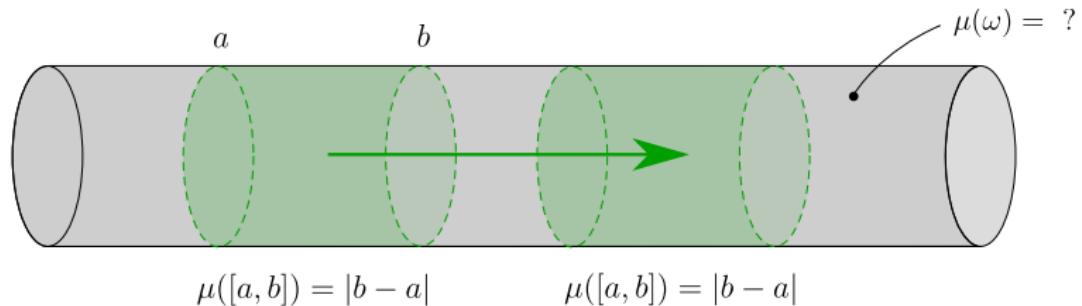
Variable aléatoire continue



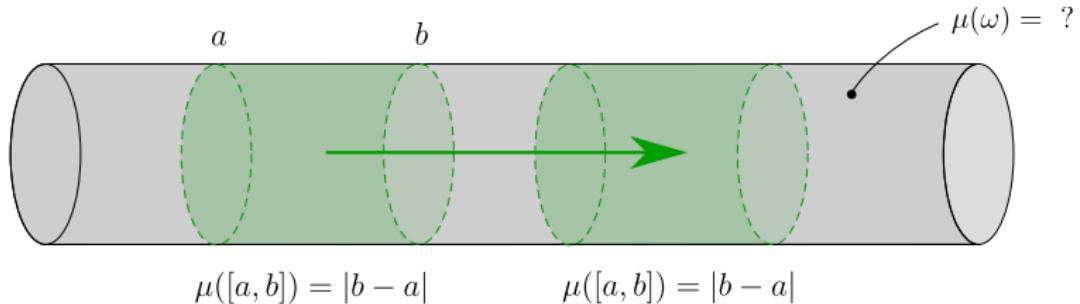
Variable aléatoire continue



Variable aléatoire continue

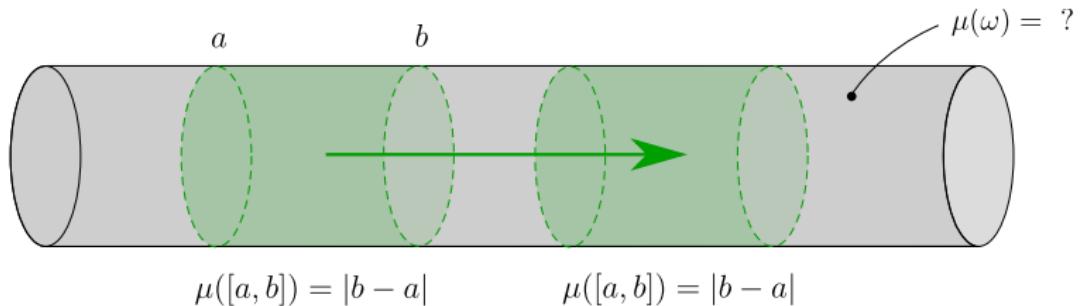


Variable aléatoire continue



Pas de mesure μ sur $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ qui soit :

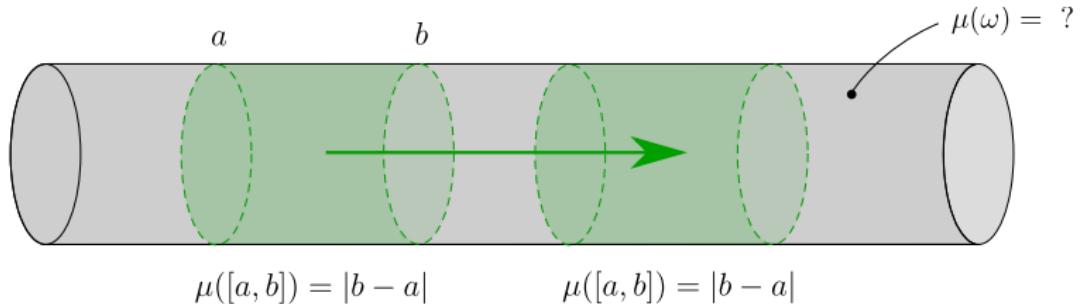
Variable aléatoire continue



Pas de mesure μ sur $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ qui soit :

→ invariante par translation

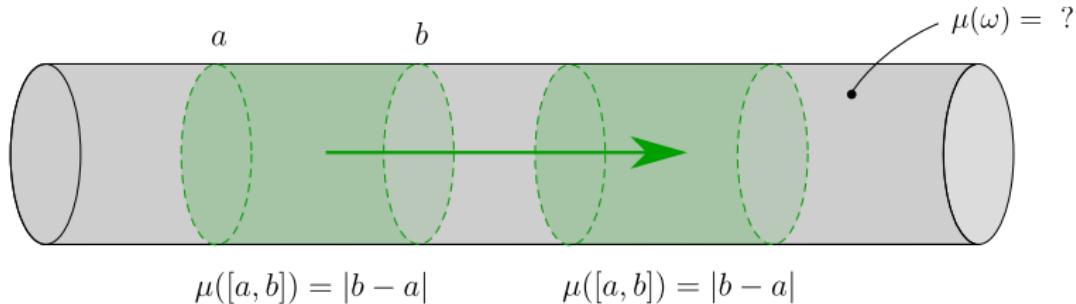
Variable aléatoire continue



Pas de mesure μ sur $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ qui soit :

- invariante par translation
- telle que : $\mu([a, b]) = |b - a|$

Variable aléatoire continue

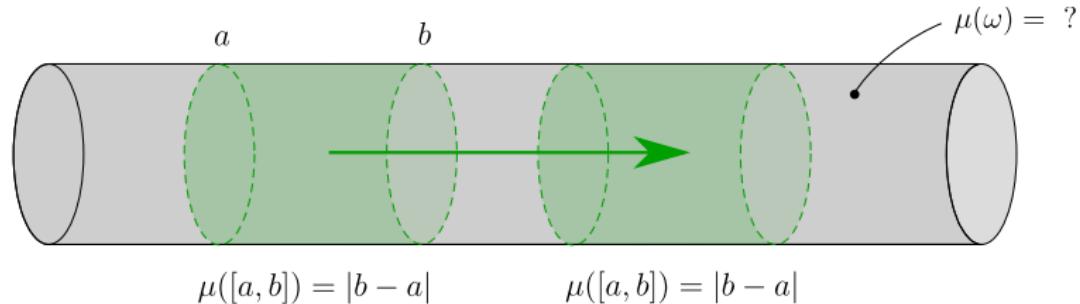


Pas de mesure μ sur $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ qui soit :

- invariante par translation
- telle que : $\mu([a, b] = |b - a|$



Variable aléatoire continue



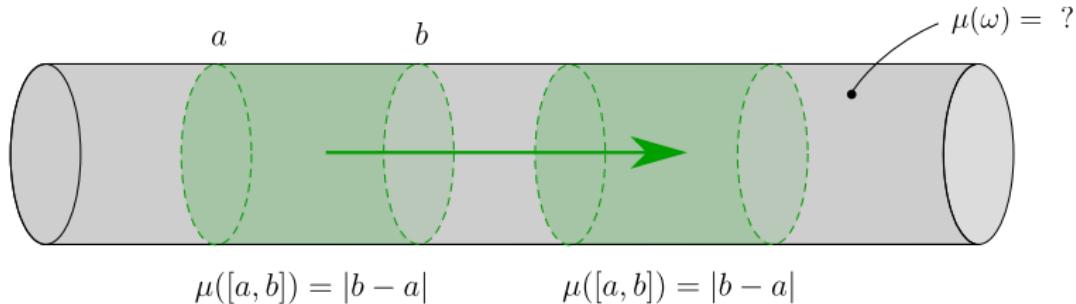
Pas de mesure μ sur $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ qui soit :

- invariante par translation
- telle que : $\mu([a, b] = |b - a|$



Solution : tribu borélienne $\mathcal{B}(\mathbb{R})$

Variable aléatoire continue



Pas de mesure μ sur $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ qui soit :

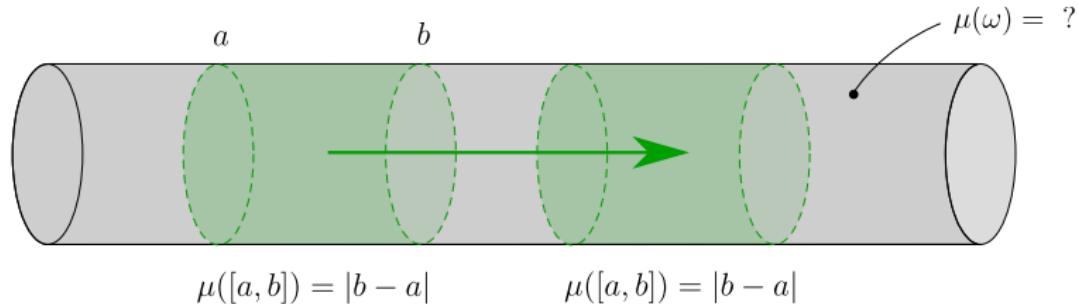
- invariante par translation
- telle que : $\mu([a, b] = |b - a|$



Solution : tribu borélienne $\mathcal{B}(\mathbb{R})$

→ tribu engendrée par les segments ouverts $]a, b[$

Variable aléatoire continue



Pas de mesure μ sur $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ qui soit :

- invariante par translation
- telle que : $\mu([a, b] = |b - a|$

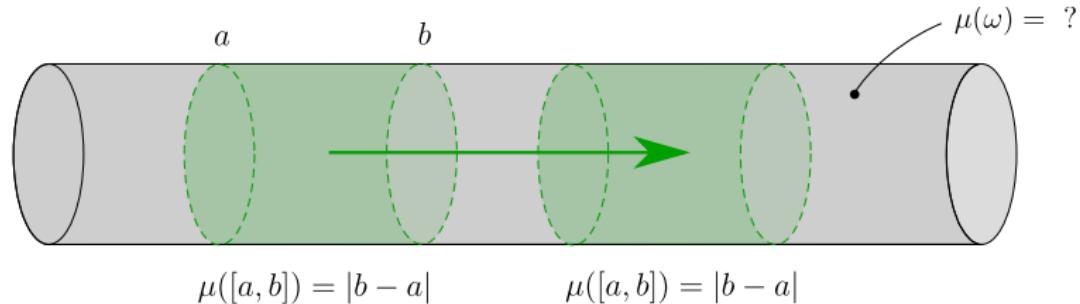


Solution : tribu borélienne $\mathcal{B}(\mathbb{R})$

→ tribu engendrée par les segments ouverts $]a, b[$

$\{x\}$?

Variable aléatoire continue



Pas de mesure μ sur $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ qui soit :

- invariante par translation
- telle que : $\mu([a, b] = |b - a|$

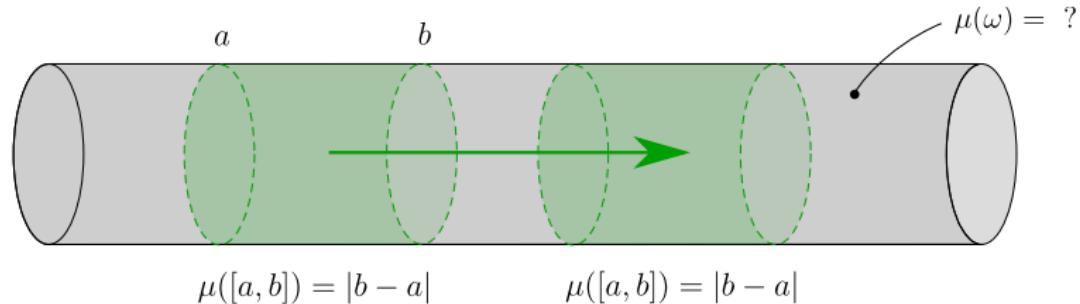


Solution : tribu borélienne $\mathcal{B}(\mathbb{R})$

→ tribu engendrée par les segments ouverts $]a, b[$

$$\{x\} \rightarrow \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left]x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}\right[$$

Variable aléatoire continue



Pas de mesure μ sur $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ qui soit :

- invariante par translation
- telle que : $\mu([a, b] = |b - a|$

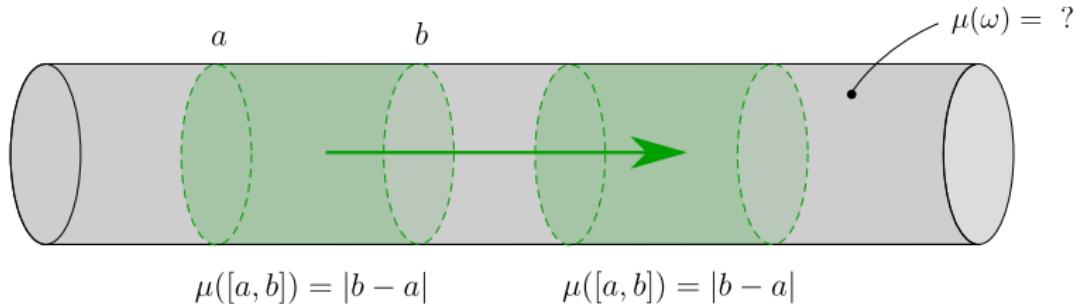


Solution : tribu borélienne $\mathcal{B}(\mathbb{R})$

→ tribu engendrée par les segments ouverts $]a, b[$

$$[a, b] \text{ ?}$$

Variable aléatoire continue



Pas de mesure μ sur $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ qui soit :

- invariante par translation
- telle que : $\mu([a, b] = |b - a|$

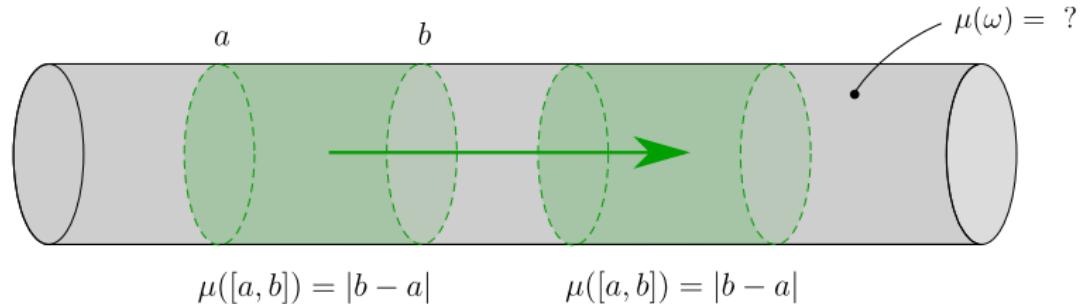


Solution : tribu borélienne $\mathcal{B}(\mathbb{R})$

→ tribu engendrée par les segments ouverts $]a, b[$

$$[a, b] \rightarrow \{a\} \cup]a, b[\cup \{b\}$$

Variable aléatoire continue



Pas de mesure μ sur $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ qui soit :

- invariante par translation
- telle que : $\mu([a, b] = |b - a|$

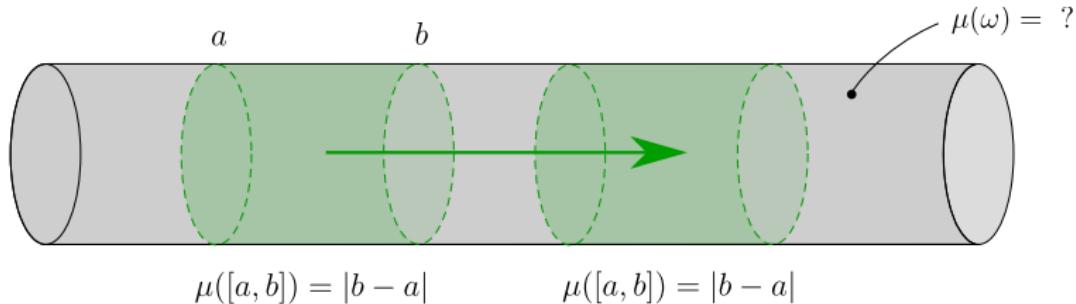


Solution : tribu borélienne $\mathcal{B}(\mathbb{R})$

→ tribu engendrée par les segments ouverts $]a, b[$

$]-\infty, x]$?

Variable aléatoire continue



Pas de mesure μ sur $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ qui soit :

- invariante par translation
- telle que : $\mu([a, b] = |b - a|$

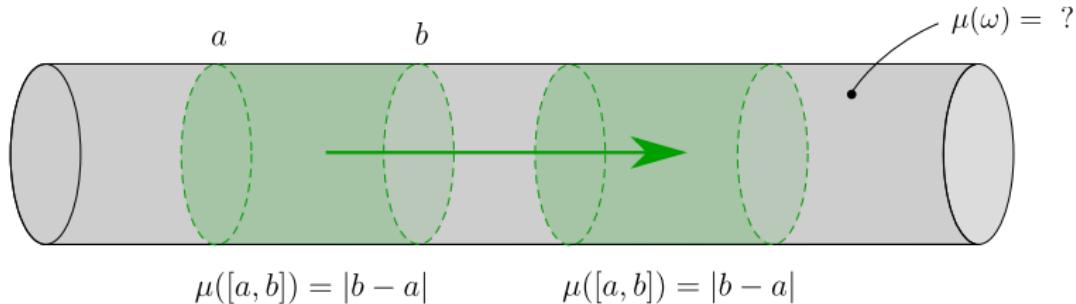


Solution : tribu borélienne $\mathcal{B}(\mathbb{R})$

→ tribu engendrée par les segments ouverts $]a, b[$

$$]-\infty, x] \rightarrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [-n, x]$$

Variable aléatoire continue



Pas de mesure μ sur $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ qui soit :

- invariante par translation
- telle que : $\mu([a, b] = |b - a|$

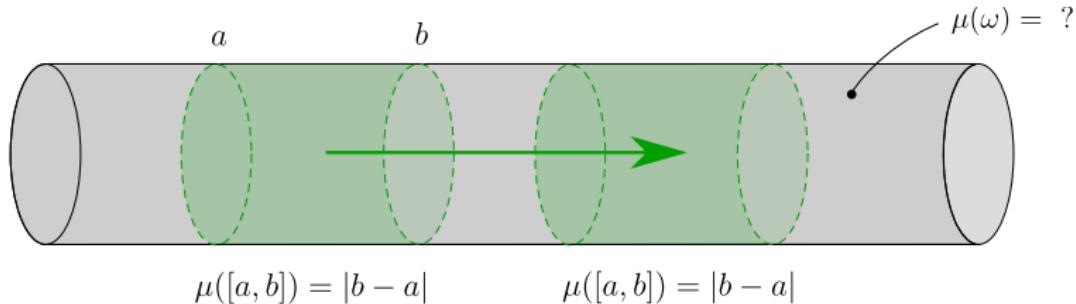


Solution : tribu borélienne $\mathcal{B}(\mathbb{R})$

→ tribu engendrée par les segments ouverts $]a, b[$

Q ?

Variable aléatoire continue



Pas de mesure μ sur $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ qui soit :

- invariante par translation
- telle que : $\mu([a, b] = |b - a|$



Solution : tribu borélienne $\mathcal{B}(\mathbb{R})$

→ tribu engendrée par les segments ouverts $]a, b[$

$$\mathbb{Q} \rightarrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{q_n\}, q_n \in \mathbb{Q}$$

Contre-exemple : ensemble de Vitali

Une partie A de \mathbb{R} qui ne soit pas un borélien ?

Contre-exemple : ensemble de Vitali

Une partie A de \mathbb{R} qui ne soit pas un borélien ?

Soit une mesure μ , telle que $\mu(A + t) = \mu(A)$ et $\mu([a, b]) = |b - a|$

Contre-exemple : ensemble de Vitali

Une partie A de \mathbb{R} qui ne soit pas un borélien ?

Soit une mesure μ , telle que $\underline{\mu(A + t) = \mu(A)}$ et $\underline{\mu([a, b]) = |b - a|}$

Contre-exemple : ensemble de Vitali

Une partie A de \mathbb{R} qui ne soit pas un borélien ?

Soit une mesure μ , telle que $\underline{\mu(A+t) = \mu(A)}$ et $\underline{\mu([a,b]) = |b-a|}$

Construisons $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ t.q. $\mu(A)$ n'est pas définie

Contre-exemple : ensemble de Vitali

Une partie A de \mathbb{R} qui ne soit pas un borélien ?

Soit une mesure μ , telle que $\underline{\mu(A+t) = \mu(A)}$ et $\underline{\mu([a,b]) = |b-a|}$

Construisons $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ t.q. $\mu(A)$ n'est pas définie

Relation d'équivalence \mathcal{R} : $x \mathcal{R} y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}$

Contre-exemple : ensemble de Vitali

Une partie A de \mathbb{R} qui ne soit pas un borélien ?

Soit une mesure μ , telle que $\underline{\mu(A+t) = \mu(A)}$ et $\underline{\mu([a,b]) = |b-a|}$

Construisons $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ t.q. $\mu(A)$ n'est pas définie

Relation d'équivalence \mathcal{R} : $x \mathcal{R} y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}$

Contre-exemple : ensemble de Vitali

Une partie A de \mathbb{R} qui ne soit pas un borélien ?

Soit une mesure μ , telle que $\underline{\mu(A+t) = \mu(A)}$ et $\underline{\mu([a,b]) = |b-a|}$

Construisons $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ t.q. $\mu(A)$ n'est pas définie

Relation d'équivalence \mathcal{R} : $x \mathcal{R} y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}$

$$\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in [0,1] \text{ t.q. } x \mathcal{R} y$$

Contre-exemple : ensemble de Vitali

Une partie A de \mathbb{R} qui ne soit pas un borélien ?

Soit une mesure μ , telle que $\underline{\mu(A+t) = \mu(A)}$ et $\underline{\mu([a,b]) = |b-a|}$

Construisons $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ t.q. $\mu(A)$ n'est pas définie

Relation d'équivalence \mathcal{R} : $x \mathcal{R} y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}$

$\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in [0,1] \text{ t.q. } x \mathcal{R} y$

Contre-exemple : ensemble de Vitali

Une partie A de \mathbb{R} qui ne soit pas un borélien ?

Soit une mesure μ , telle que $\underline{\mu(A+t) = \mu(A)}$ et $\underline{\mu([a,b]) = |b-a|}$

Construisons $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ t.q. $\mu(A)$ n'est pas définie

Relation d'équivalence \mathcal{R} : $x \mathcal{R} y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}$

$$\underline{\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in [0,1] \text{ t.q. } x \mathcal{R} y}$$

Notons V l'ensemble des représentants x de $y \in \mathbb{R}$ sans doublons

Contre-exemple : ensemble de Vitali

Une partie A de \mathbb{R} qui ne soit pas un borélien ?

Soit une mesure μ , telle que $\underline{\mu(A+t) = \mu(A)}$ et $\underline{\mu([a,b]) = |b-a|}$

Construisons $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ t.q. $\mu(A)$ n'est pas définie

Relation d'équivalence \mathcal{R} : $x \mathcal{R} y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}$

$$\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in [0,1] \text{ t.q. } x \mathcal{R} y$$

Notons V l'ensemble des représentants x de $y \in \mathbb{R}$ sans doublons

$$A = \bigcup V + r$$

Contre-exemple : ensemble de Vitali

Une partie A de \mathbb{R} qui ne soit pas un borélien ?

Soit une mesure μ , telle que $\underline{\mu(A+t) = \mu(A)}$ et $\underline{\mu([a,b]) = |b-a|}$

Construisons $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ t.q. $\mu(A)$ n'est pas définie

Relation d'équivalence \mathcal{R} : $x \mathcal{R} y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}$

$$\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in [0,1] \text{ t.q. } x \mathcal{R} y$$

Notons V l'ensemble des représentants x de $y \in \mathbb{R}$ sans doublons

$$A = \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} V + r$$

Contre-exemple : ensemble de Vitali

Une partie A de \mathbb{R} qui ne soit pas un borélien ?

Soit une mesure μ , telle que $\underline{\mu(A+t) = \mu(A)}$ et $\underline{\mu([a,b]) = |b-a|}$

Construisons $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ t.q. $\mu(A)$ n'est pas définie

Relation d'équivalence \mathcal{R} : $x \mathcal{R} y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}$

$$\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in [0,1] \text{ t.q. } x \mathcal{R} y$$

Notons V l'ensemble des représentants x de $y \in \mathbb{R}$ sans doublons

$$A = \bigcup_{\substack{r \in \mathbb{Q} \\ -1 \leq r \leq 1}} V + r$$

Contre-exemple : ensemble de Vitali

Une partie A de \mathbb{R} qui ne soit pas un borélien ?

Soit une mesure μ , telle que $\underline{\mu(A+t) = \mu(A)}$ et $\underline{\mu([a,b]) = |b-a|}$

Construisons $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ t.q. $\mu(A)$ n'est pas définie

Relation d'équivalence \mathcal{R} : $x \mathcal{R} y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}$

$$\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in [0,1] \text{ t.q. } x \mathcal{R} y$$

Notons V l'ensemble des représentants x de $y \in \mathbb{R}$ sans doublons

$$A = \bigcup_{\substack{r \in \mathbb{Q} \\ -1 \leq r \leq 1}} V + r$$

Contre-exemple : ensemble de Vitali

$$x \mathcal{R} y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}$$

$$A = \bigcup_{\substack{r \in \mathbb{Q} \\ -1 \leq r \leq 1}} V + r$$

$$\mu(A + t) = \mu(A)$$

$$\mu([a, b]) = |b - a|$$

Contre-exemple : ensemble de Vitali

$$x \mathcal{R} y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}$$

$$A = \bigcup_{\substack{r \in \mathbb{Q} \\ -1 \leq r \leq 1}} V + r$$

$$\mu(A + t) = \mu(A)$$

$$\mu([a, b]) = |b - a|$$

- $V \subset [0, 1] \Rightarrow A \subset [-1, 2]$

Contre-exemple : ensemble de Vitali

$$x \mathcal{R} y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}$$

$$A = \bigcup_{\substack{r \in \mathbb{Q} \\ -1 \leq r \leq 1}} V + r$$

$$\mu(A + t) = \mu(A)$$

$$\mu([a, b]) = |b - a|$$

- $V \subset [0, 1] \Rightarrow A \subset [-1, 2]$, donc $\mu(A) \leq \mu([-1, 2]) = 3$

Contre-exemple : ensemble de Vitali

$$x \mathcal{R} y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}$$

$$A = \bigcup_{\substack{r \in \mathbb{Q} \\ -1 \leq r \leq 1}} V + r$$

$$\mu(A + t) = \mu(A)$$

$$\mu([a, b]) = |b - a|$$

- $V \subset [0, 1] \Rightarrow A \subset [-1, 2]$, donc $\mu(A) \leq \mu([-1, 2]) = 3$

Contre-exemple : ensemble de Vitali

$$x \mathcal{R} y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}$$

$$A = \bigcup_{\substack{r \in \mathbb{Q} \\ -1 \leq r \leq 1}} V + r$$

$$\mu(A + t) = \mu(A)$$

$$\mu([a, b]) = |b - a|$$

- $V \subset [0, 1] \Rightarrow A \subset [-1, 2]$, donc $\mu(A) \leq \mu([-1, 2]) = 3$
- Par ailleurs, $[0, 1] \subset A$.

Contre-exemple : ensemble de Vitali

$$x \mathcal{R} y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}$$

$$A = \bigcup_{\substack{r \in \mathbb{Q} \\ -1 \leq r \leq 1}} V + r$$

$$\mu(A + t) = \mu(A)$$

$$\mu([a, b]) = |b - a|$$

- $V \subset [0, 1] \Rightarrow A \subset [-1, 2]$, donc $\mu(A) \leq \mu([-1, 2]) = 3$
- Par ailleurs, $[0, 1] \subset A$. En effet, $\forall x \in [0, 1], \exists y \in V$ t.q.

Contre-exemple : ensemble de Vitali

$$x \mathcal{R} y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}$$

$$A = \bigcup_{\substack{r \in \mathbb{Q} \\ -1 \leq r \leq 1}} V + r$$

$$\mu(A + t) = \mu(A)$$

$$\mu([a, b]) = |b - a|$$

- $V \subset [0, 1] \Rightarrow A \subset [-1, 2]$, donc $\mu(A) \leq \mu([-1, 2]) = 3$
- Par ailleurs, $[0, 1] \subset A$. En effet, $\forall x \in [0, 1], \exists y \in V$ t.q.

$$x \mathcal{R} y \Rightarrow x - y = r \in \mathbb{Q}.$$

Contre-exemple : ensemble de Vitali

$$x \mathcal{R} y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}$$

$$A = \bigcup_{\substack{r \in \mathbb{Q} \\ -1 \leq r \leq 1}} V + r$$

$$\mu(A + t) = \mu(A)$$

$$\mu([a, b]) = |b - a|$$

- $V \subset [0, 1] \Rightarrow A \subset [-1, 2]$, donc $\mu(A) \leq \mu([-1, 2]) = 3$
- Par ailleurs, $[0, 1] \subset A$. En effet, $\forall x \in [0, 1], \exists y \in V$ t.q.

$$x \mathcal{R} y \Rightarrow x - y = r \in \mathbb{Q}.$$

De plus, $x, y \in [0, 1] \Rightarrow r \in [-1, 1]$. Donc $x \in V + r \Rightarrow x \in A$

Contre-exemple : ensemble de Vitali

$$x \mathcal{R} y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}$$

$$A = \bigcup_{\substack{r \in \mathbb{Q} \\ -1 \leq r \leq 1}} V + r$$

$$\mu(A + t) = \mu(A)$$

$$\mu([a, b]) = |b - a|$$

- $V \subset [0, 1] \Rightarrow A \subset [-1, 2]$, donc $\mu(A) \leq \mu([-1, 2]) = 3$
- Par ailleurs, $[0, 1] \subset A$. En effet, $\forall x \in [0, 1], \exists y \in V$ t.q.

$$x \mathcal{R} y \Rightarrow x - y = r \in \mathbb{Q}.$$

De plus, $x, y \in [0, 1] \Rightarrow r \in [-1, 1]$. Donc $x \in V + r \Rightarrow x \in A$

Donc $\mu(A) \geq \mu([0, 1]) = 1$

Contre-exemple : ensemble de Vitali

$$x \mathcal{R} y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}$$

$$A = \bigcup_{\substack{r \in \mathbb{Q} \\ -1 \leq r \leq 1}} V + r$$

$$\mu(A + t) = \mu(A)$$

$$\mu([a, b]) = |b - a|$$

- $V \subset [0, 1] \Rightarrow A \subset [-1, 2]$, donc $\mu(A) \leq \mu([-1, 2]) = 3$
- Par ailleurs, $[0, 1] \subset A$. En effet, $\forall x \in [0, 1], \exists y \in V$ t.q.

$$x \mathcal{R} y \Rightarrow x - y = r \in \mathbb{Q}.$$

De plus, $x, y \in [0, 1] \Rightarrow r \in [-1, 1]$. Donc $x \in V + r \Rightarrow x \in A$

Donc $\mu(A) \geq \mu([0, 1]) = 1$

Contre-exemple : ensemble de Vitali

$$x \mathcal{R} y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}$$

$$A = \bigcup_{\substack{r \in \mathbb{Q} \\ -1 \leq r \leq 1}} V + r$$

$$\mu(A + t) = \mu(A)$$

$$\mu([a, b]) = |b - a|$$

○ $V \subset [0, 1] \Rightarrow A \subset [-1, 2]$, donc $\mu(A) \leq \mu([-1, 2]) = 3$

○ Par ailleurs, $[0, 1] \subset A$. En effet, $\forall x \in [0, 1], \exists y \in V$ t.q.

$$x \mathcal{R} y \Rightarrow x - y = r \in \mathbb{Q}.$$

De plus, $x, y \in [0, 1] \Rightarrow r \in [-1, 1]$. Donc $x \in V + r \Rightarrow x \in A$

Donc $\mu(A) \geq \mu([0, 1]) = 1$

$$1 \leq \mu(A) \leq 3$$

Contre-exemple : ensemble de Vitali

Contre-exemple : ensemble de Vitali

$$x \mathcal{R} y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}$$

$$1 \leq \mu(A) \leq 3$$

$$A = \bigcup_{\substack{r \in \mathbb{Q} \\ -1 \leq r \leq 1}} V + r$$

$$\begin{aligned}\mu(A + t) &= \mu(A) \\ \mu([a, b]) &= |b - a|\end{aligned}$$

Contre-exemple : ensemble de Vitali

$$x \mathcal{R} y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}$$

$$1 \leq \mu(A) \leq 3$$

$$A = \bigcup_{\substack{r \in \mathbb{Q} \\ -1 \leq r \leq 1}} V + r$$

$$\mu(A + t) = \mu(A)$$

$$\mu([a, b]) = |b - a|$$

Enfin, $V + r$ et $V + r'$ sont disjoints.

Contre-exemple : ensemble de Vitali

$$x \mathcal{R} y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}$$

$$1 \leq \mu(A) \leq 3$$

$$A = \bigcup_{\substack{r \in \mathbb{Q} \\ -1 \leq r \leq 1}} V + r$$

$$\begin{aligned}\mu(A + t) &= \mu(A) \\ \mu([a, b]) &= |b - a|\end{aligned}$$

Enfin, $V + r$ et $V + r'$ sont disjoints.

$$x \in V + r$$

$$x \in V + r'$$

Contre-exemple : ensemble de Vitali

$$x \mathcal{R} y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}$$

$$1 \leq \mu(A) \leq 3$$

$$A = \bigcup_{\substack{r \in \mathbb{Q} \\ -1 \leq r \leq 1}} V + r$$

$$\begin{aligned}\mu(A + t) &= \mu(A) \\ \mu([a, b]) &= |b - a|\end{aligned}$$

Enfin, $V + r$ et $V + r'$ sont disjoints.

$$x \in V + r$$

$$x \in V + r'$$

$$x = y + r \quad (y \in V)$$

$$x = y' + r' \quad (y' \in V)$$

Contre-exemple : ensemble de Vitali

$$x \mathcal{R} y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}$$

$$1 \leq \mu(A) \leq 3$$

$$A = \bigcup_{\substack{r \in \mathbb{Q} \\ -1 \leq r \leq 1}} V + r$$

$$\begin{aligned}\mu(A + t) &= \mu(A) \\ \mu([a, b]) &= |b - a|\end{aligned}$$

Enfin, $V + r$ et $V + r'$ sont disjoints.

$$\begin{array}{lcl} x \in V + r & & x = y + r \quad (y \in V) \\ x \in V + r' & & x = y' + r' \quad (y' \in V) \\ \hline & & y' - y = r - r' \in \mathbb{Q} \end{array}$$

Contre-exemple : ensemble de Vitali

$$x \mathcal{R} y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}$$

$$1 \leq \mu(A) \leq 3$$

$$A = \bigcup_{\substack{r \in \mathbb{Q} \\ -1 \leq r \leq 1}} V + r$$

$$\begin{aligned}\mu(A + t) &= \mu(A) \\ \mu([a, b]) &= |b - a|\end{aligned}$$

Enfin, $V + r$ et $V + r'$ sont disjoints.

$$x \in V + r$$

$$x \in V + r'$$

$$x = y + r \quad (y \in V)$$

$$x = y' + r' \quad (y' \in V)$$

$$\frac{}{y' - y = r - r' \in \mathbb{Q}} \Rightarrow y \mathcal{R} y'$$

Contre-exemple : ensemble de Vitali

$$x \mathcal{R} y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}$$

$$1 \leq \mu(A) \leq 3$$

$$A = \bigcup_{\substack{r \in \mathbb{Q} \\ -1 \leq r \leq 1}} V + r$$

$$\begin{aligned}\mu(A + t) &= \mu(A) \\ \mu([a, b]) &= |b - a|\end{aligned}$$

Enfin, $V + r$ et $V + r'$ sont disjoints.

$$\begin{array}{lcl} x \in V + r & & x = y + r \quad (y \in V) \\ x \in V + r' & & x = y' + r' \quad (y' \in V) \\ \hline & & y' - y = r - r' \in \mathbb{Q} \Rightarrow y \mathcal{R} y' \end{array}$$

Or, $y, y' \in V$

Contre-exemple : ensemble de Vitali

$$x \mathcal{R} y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}$$

$$1 \leq \mu(A) \leq 3$$

$$A = \bigcup_{\substack{r \in \mathbb{Q} \\ -1 \leq r \leq 1}} V + r$$

$$\begin{aligned}\mu(A + t) &= \mu(A) \\ \mu([a, b]) &= |b - a|\end{aligned}$$

Enfin, $V + r$ et $V + r'$ sont disjoints.

$$\begin{array}{lcl} x \in V + r & & x = y + r \quad (y \in V) \\ x \in V + r' & & x = y' + r' \quad (y' \in V) \\ \hline & & y' - y = r - r' \in \mathbb{Q} \Rightarrow y \mathcal{R} y' \end{array}$$

$$\text{Or, } y, y' \in V \Rightarrow y = y' \Rightarrow r = r'$$

Contre-exemple : ensemble de Vitali

$$x \mathcal{R} y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}$$

$$1 \leq \mu(A) \leq 3$$

$$A = \bigcup_{\substack{r \in \mathbb{Q} \\ -1 \leq r \leq 1}} V + r$$

$$\begin{aligned}\mu(A + t) &= \mu(A) \\ \mu([a, b]) &= |b - a|\end{aligned}$$

Enfin, $V + r$ et $V + r'$ sont disjoints.

$$\begin{array}{lcl} x \in V + r & & x = y + r \quad (y \in V) \\ x \in V + r' & & x = y' + r' \quad (y' \in V) \\ \hline & & y' - y = r - r' \in \mathbb{Q} \Rightarrow y \mathcal{R} y' \end{array}$$

$$\text{Or, } y, y' \in V \Rightarrow y = y' \Rightarrow \underline{r = r'}$$

Contre-exemple : ensemble de Vitali

$$x \mathcal{R} y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}$$

$$1 \leq \mu(A) \leq 3$$

$$A = \bigcup_{\substack{r \in \mathbb{Q} \\ -1 \leq r \leq 1}} V + r$$

$$\begin{aligned}\mu(A + t) &= \mu(A) \\ \mu([a, b]) &= |b - a|\end{aligned}$$

Les parties $V + r$ sont disjointes

Contre-exemple : ensemble de Vitali

$$x \mathcal{R} y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}$$

$$1 \leq \mu(A) \leq 3$$

$$A = \bigcup_{\substack{r \in \mathbb{Q} \\ -1 \leq r \leq 1}} V + r$$

$$\begin{aligned}\underline{\mu(A+t) = \mu(A)} \\ \underline{\mu([a,b]) = |b-a|}\end{aligned}$$

Les parties $V + r$ sont disjointes

$$\mu\left(\bigcup_{\substack{r \in \mathbb{Q} \\ -1 \leq r \leq 1}} V + r\right) =$$

Contre-exemple : ensemble de Vitali

$$x \mathcal{R} y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}$$

$$1 \leq \mu(A) \leq 3$$

$$A = \bigcup_{\substack{r \in \mathbb{Q} \\ -1 \leq r \leq 1}} V + r$$

$$\begin{aligned}\mu(A + t) &= \mu(A) \\ \mu([a, b]) &= |b - a|\end{aligned}$$

Les parties $V + r$ sont disjointes

$$\mu\left(\bigcup_{\substack{r \in \mathbb{Q} \\ -1 \leq r \leq 1}} V + r\right) = \sum_{\substack{r \in \mathbb{Q} \\ -1 \leq r \leq 1}} \mu(V + r)$$

Contre-exemple : ensemble de Vitali

$$x \mathcal{R} y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}$$

$$1 \leq \mu(A) \leq 3$$

$$A = \bigcup_{\substack{r \in \mathbb{Q} \\ -1 \leq r \leq 1}} V + r$$

$$\begin{aligned}\mu(A + t) &= \mu(A) \\ \mu([a, b]) &= |b - a|\end{aligned}$$

Les parties $V + r$ sont disjointes

$$\mu\left(\bigcup_{\substack{r \in \mathbb{Q} \\ -1 \leq r \leq 1}} V + r\right) = \sum_{\substack{r \in \mathbb{Q} \\ -1 \leq r \leq 1}} \mu(V + r) = \sum_{\substack{r \in \mathbb{Q} \\ -1 \leq r \leq 1}} \mu(V)$$

Contre-exemple : ensemble de Vitali

$$x \mathcal{R} y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}$$

$$1 \leq \mu(A) \leq 3$$

$$A = \bigcup_{\substack{r \in \mathbb{Q} \\ -1 \leq r \leq 1}} V + r$$

$$\begin{aligned}\mu(A + t) &= \mu(A) \\ \mu([a, b]) &= |b - a|\end{aligned}$$

Les parties $V + r$ sont disjointes

$$\mu\left(\bigcup_{\substack{r \in \mathbb{Q} \\ -1 \leq r \leq 1}} V + r\right) = \sum_{\substack{r \in \mathbb{Q} \\ -1 \leq r \leq 1}} \mu(V + r) = \sum_{\substack{r \in \mathbb{Q} \\ -1 \leq r \leq 1}} \mu(V)$$

Contradiction :

Contre-exemple : ensemble de Vitali

$$x \mathcal{R} y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}$$

$$1 \leq \mu(A) \leq 3$$

$$A = \bigcup_{\substack{r \in \mathbb{Q} \\ -1 \leq r \leq 1}} V + r$$

$$\begin{aligned}\mu(A + t) &= \mu(A) \\ \mu([a, b]) &= |b - a|\end{aligned}$$

Les parties $V + r$ sont disjointes

$$\mu\left(\bigcup_{\substack{r \in \mathbb{Q} \\ -1 \leq r \leq 1}} V + r\right) = \sum_{\substack{r \in \mathbb{Q} \\ -1 \leq r \leq 1}} \mu(V + r) = \sum_{\substack{r \in \mathbb{Q} \\ -1 \leq r \leq 1}} \mu(V)$$

Contradiction :

- $\mu(V) = 0$ et $\mu(A) = 0$

Contre-exemple : ensemble de Vitali

$$x \mathcal{R} y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}$$

$$1 \leq \mu(A) \leq 3$$

$$A = \bigcup_{\substack{r \in \mathbb{Q} \\ -1 \leq r \leq 1}} V + r$$

$$\begin{aligned}\mu(A + t) &= \mu(A) \\ \mu([a, b]) &= |b - a|\end{aligned}$$

Les parties $V + r$ sont disjointes

$$\mu\left(\bigcup_{\substack{r \in \mathbb{Q} \\ -1 \leq r \leq 1}} V + r\right) = \sum_{\substack{r \in \mathbb{Q} \\ -1 \leq r \leq 1}} \mu(V + r) = \sum_{\substack{r \in \mathbb{Q} \\ -1 \leq r \leq 1}} \mu(V)$$

Contradiction :

- $\mu(V) = 0$ et $\mu(A) = 0$
- $\mu(V) > 0$ et $\mu(A) = \infty$

Contre-exemple : ensemble de Vitali

$$x \mathcal{R} y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}$$

$$1 \leq \mu(A) \leq 3$$

$$A = \bigcup_{\substack{r \in \mathbb{Q} \\ -1 \leq r \leq 1}} V + r$$

$$\begin{aligned}\mu(A + t) &= \mu(A) \\ \mu([a, b]) &= |b - a|\end{aligned}$$

Les parties $V + r$ sont disjointes

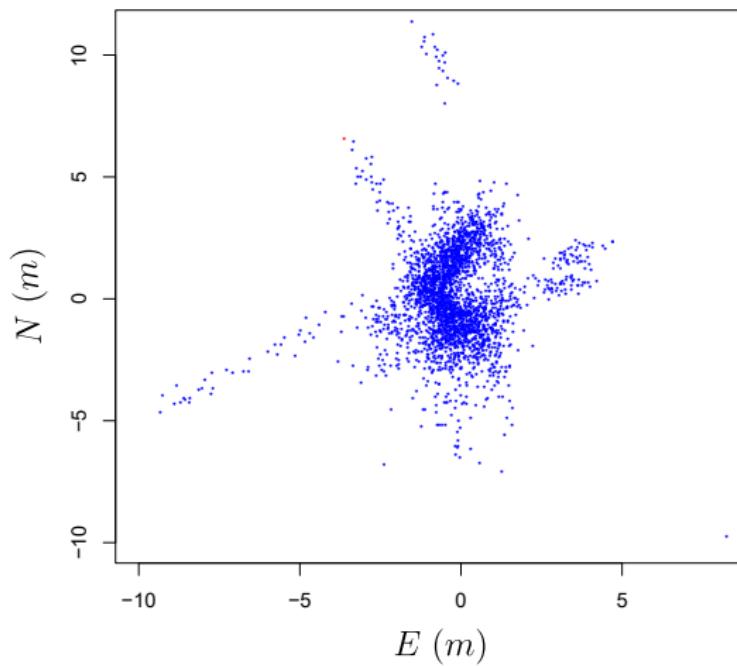
$$\mu\left(\bigcup_{\substack{r \in \mathbb{Q} \\ -1 \leq r \leq 1}} V + r\right) = \sum_{\substack{r \in \mathbb{Q} \\ -1 \leq r \leq 1}} \mu(V + r) = \sum_{\substack{r \in \mathbb{Q} \\ -1 \leq r \leq 1}} \mu(V)$$

Contradiction :

- $\mu(V) = 0$ et $\mu(A) = 0$ $\Rightarrow A$ n'est pas mesurable !
- $\mu(V) > 0$ et $\mu(A) = \infty$

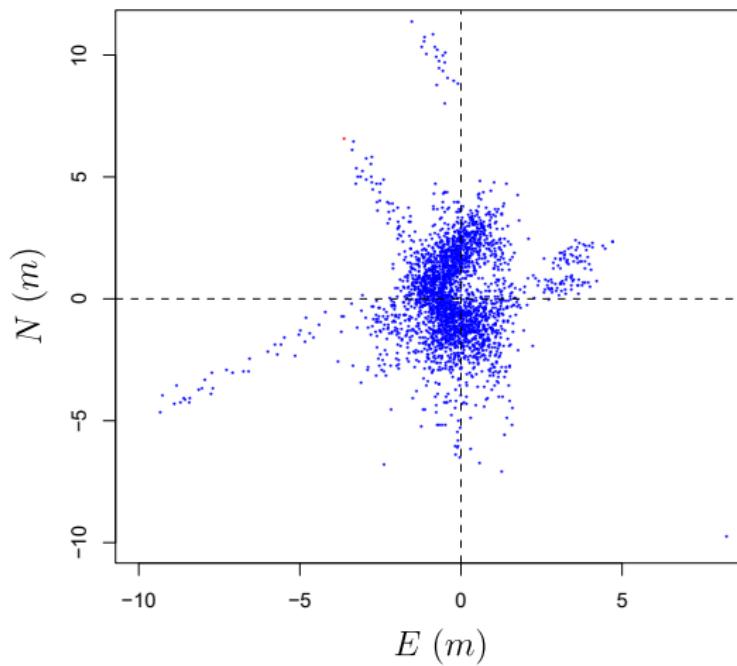
Loi de probabilité continue

Observation GPS code station MITAKA - 14/11/2005 (24h)



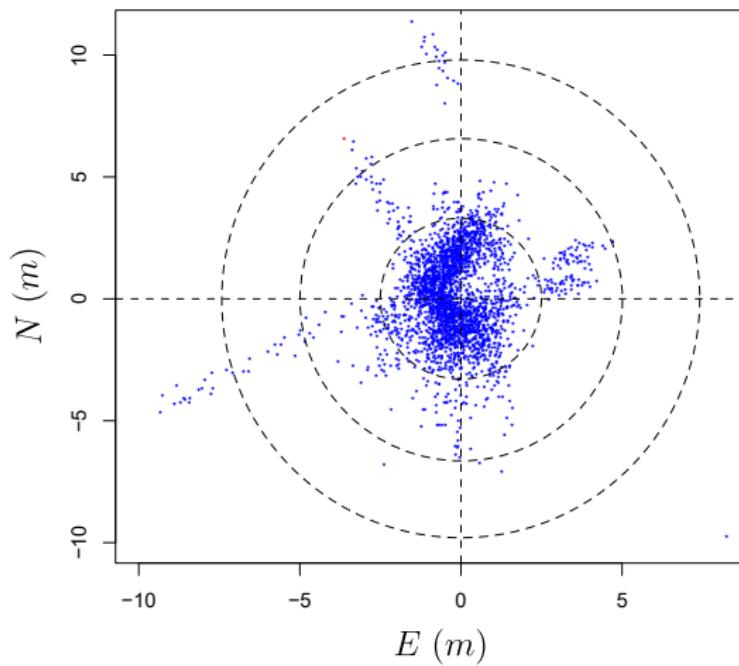
Loi de probabilité continue

Observation GPS code station MITAKA - 14/11/2005 (24h)



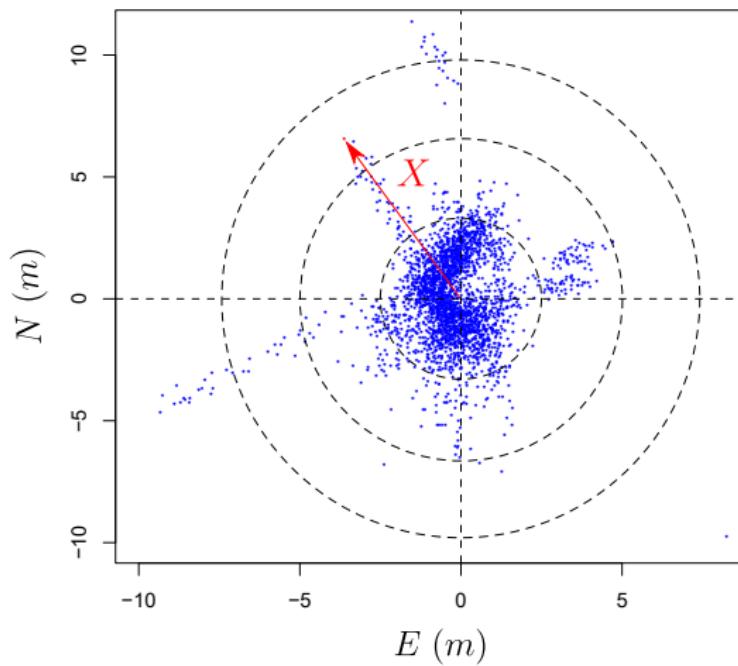
Loi de probabilité continue

Observation GPS code station MITAKA - 14/11/2005 (24h)



Loi de probabilité continue

Observation GPS code station MITAKA - 14/11/2005 (24h)



X variable aléatoire : $X(\omega) \in \mathbb{R}_+$

Fonction de répartition

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, et $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une variable aléatoire réelle (discrète ou continue). On appelle **fonction de répartition** de X , la fonction $F_X : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ définie par :

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \in]-\infty, x]) = \mathbb{P}(X \leq x)$$

Fonction de répartition

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, et $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une variable aléatoire réelle (discrète ou continue). On appelle **fonction de répartition** de X , la fonction $F_X : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ définie par :

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \in]-\infty, x]) = \mathbb{P}(X \leq x)$$

Propriétés

- F_X est croissante et à valeurs dans $[0, 1]$
- $\forall a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$: $\mathbb{P}(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} F_X(x) = 1$

Fonction de répartition

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, et $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une variable aléatoire réelle (discrète ou continue). On appelle **fonction de répartition** de X , la fonction $F_X : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ définie par :

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \in]-\infty, x]) = \mathbb{P}(X \leq x)$$

Propriétés

- F_X est croissante et à valeurs dans $[0, 1]$
- $\forall a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$: $\mathbb{P}(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} F_X(x) = 1$

Fonction de répartition

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, et $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une variable aléatoire réelle (discrète ou continue). On appelle **fonction de répartition** de X , la fonction $F_X : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ définie par :

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \in]-\infty, x]) = \mathbb{P}(X \leq x)$$

Propriétés

- F_X est croissante et à valeurs dans $[0, 1]$
- $\forall a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$: $\mathbb{P}(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} F_X(x) = 1$

Fonction de répartition

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, et $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une variable aléatoire réelle (discrète ou continue). On appelle **fonction de répartition** de X , la fonction $F_X : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ définie par :

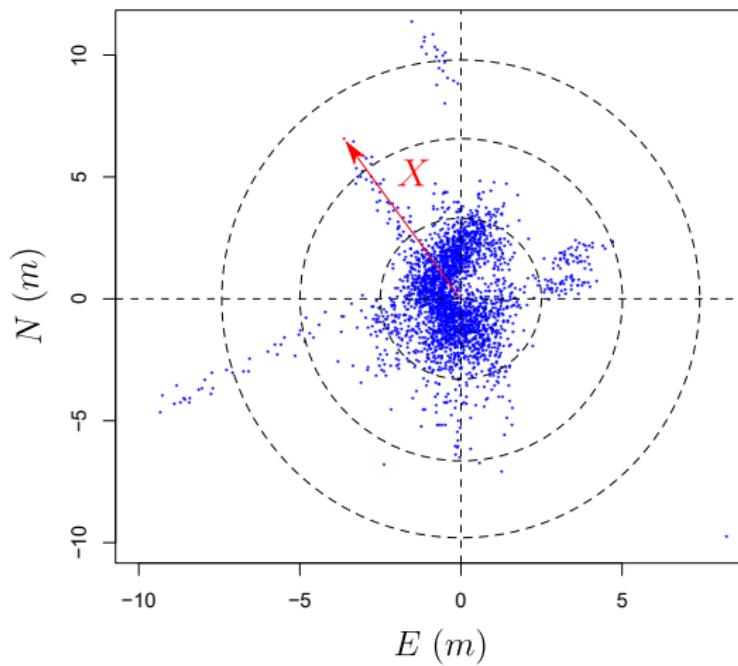
$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \in]-\infty, x]) = \mathbb{P}(X \leq x)$$

Propriétés

- F_X est croissante et à valeurs dans $[0, 1]$
- $\forall a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$: $\mathbb{P}(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} F_X(x) = 1$

Loi de probabilité continue

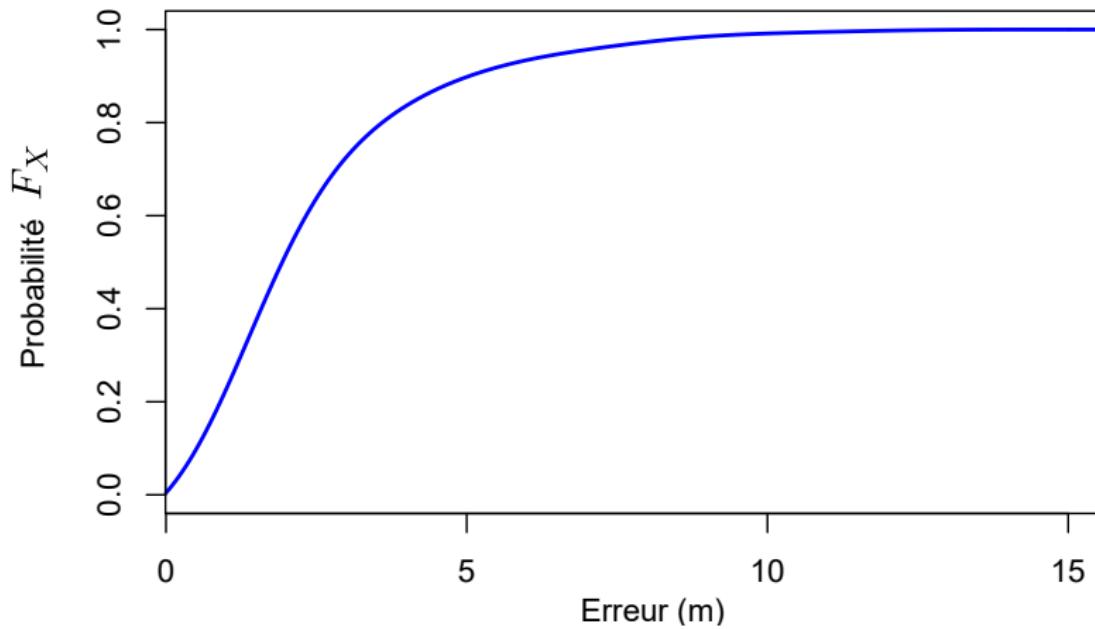
Observation GPS code station MITAKA - 14/11/2005 (24h)



X variable aléatoire : $X(\omega) \in \mathbb{R}_+$

Loi de probabilité continue

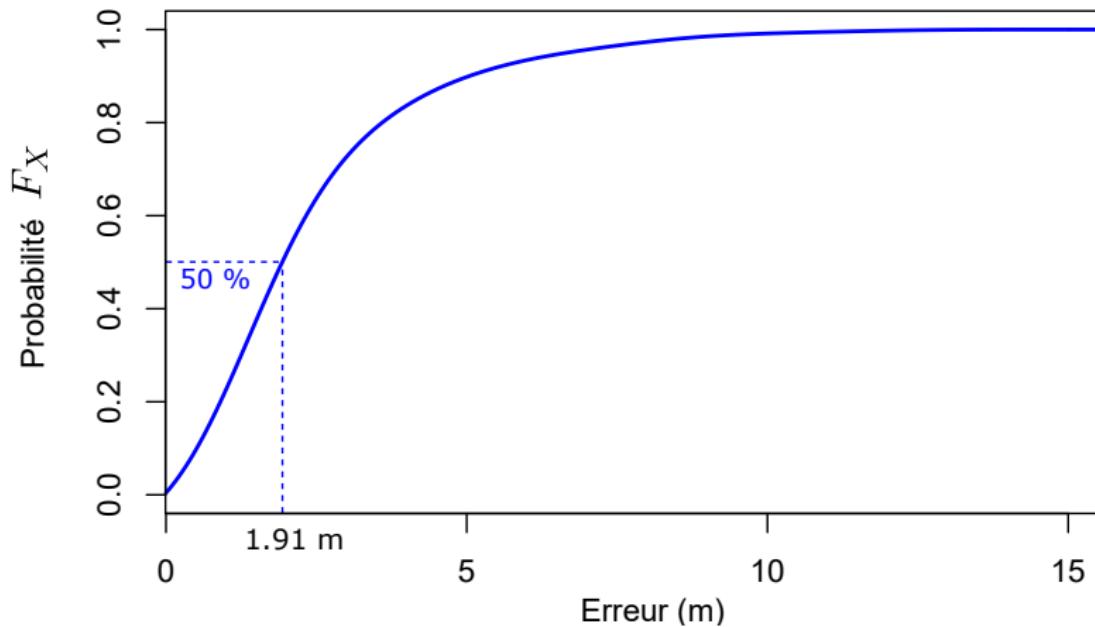
Observation GPS code station MITAKA - 14/11/2005 (24h)



X variable aléatoire : $X(\omega) \in \mathbb{R}_+$

Loi de probabilité continue

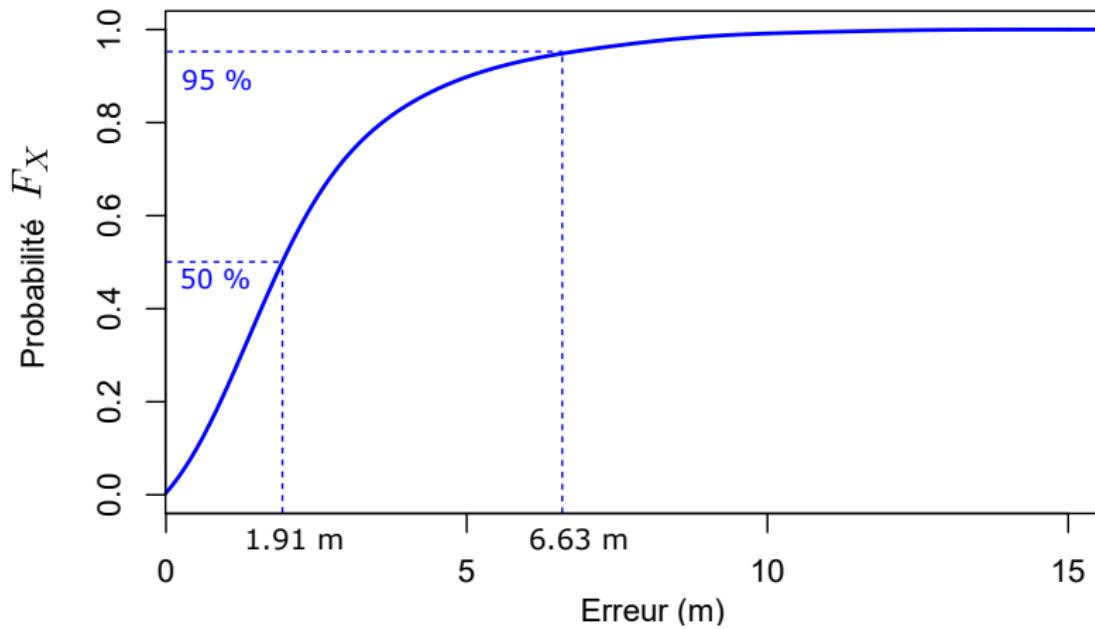
Observation GPS code station MITAKA - 14/11/2005 (24h)



$$\mathbb{P}(X < 1.91) = 0.50 \text{ (médiane)}$$

Loi de probabilité continue

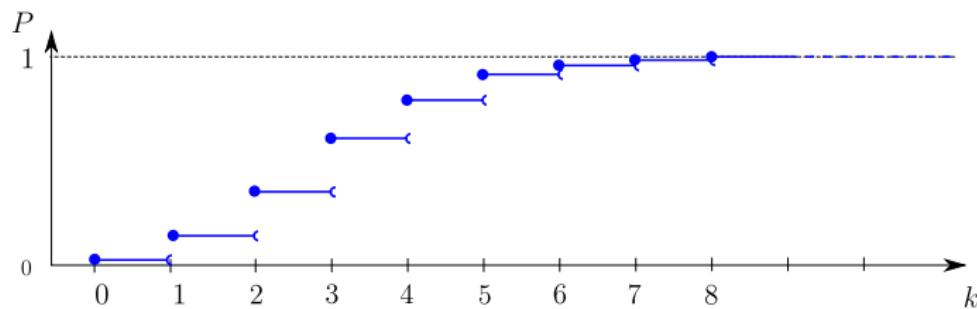
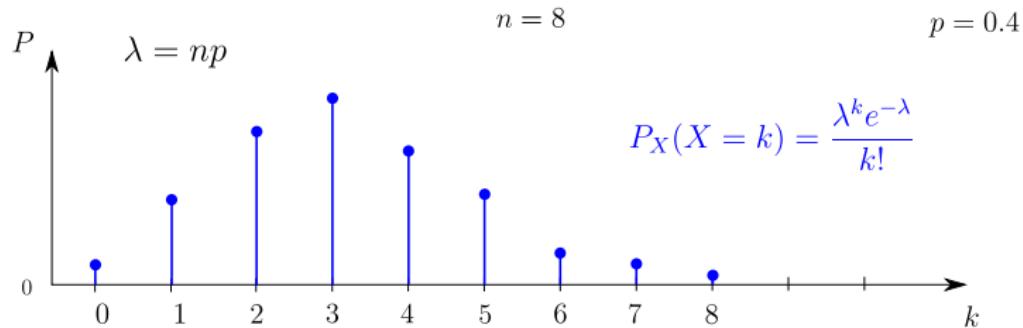
Observation GPS code station MITAKA - 14/11/2005 (24h)



$$\mathbb{P}(X < 6.63) = 0.95 \text{ (bande de confiance à 95 %)}$$

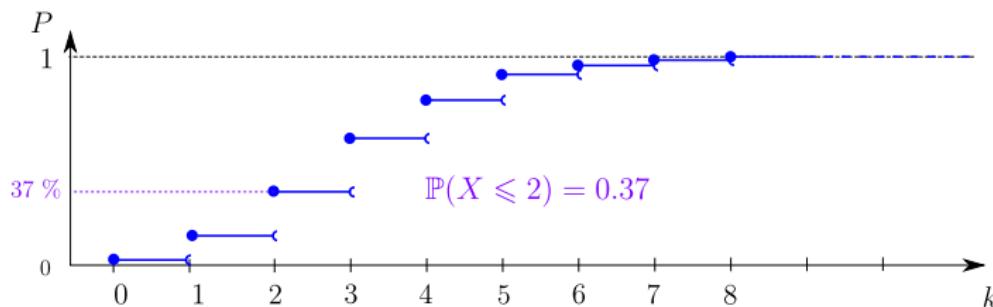
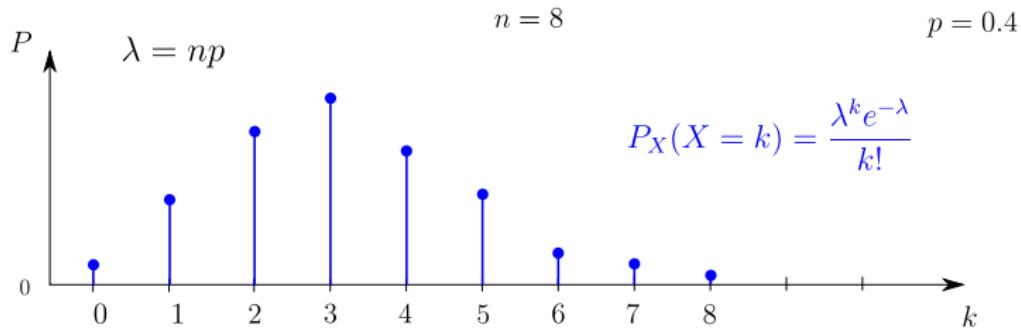
Cas discret

E.g. Fonction de répartition de la loi de Poisson



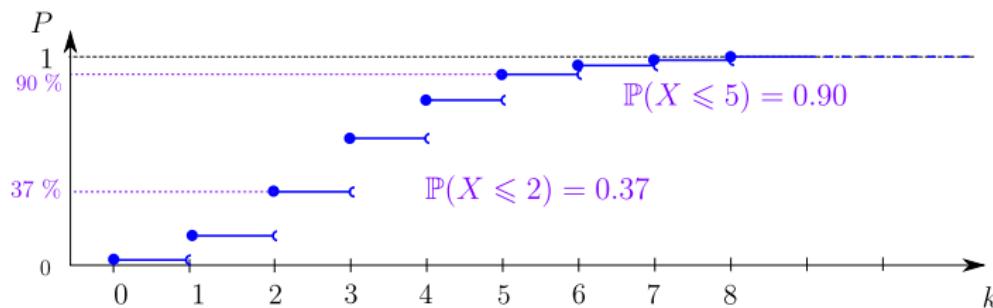
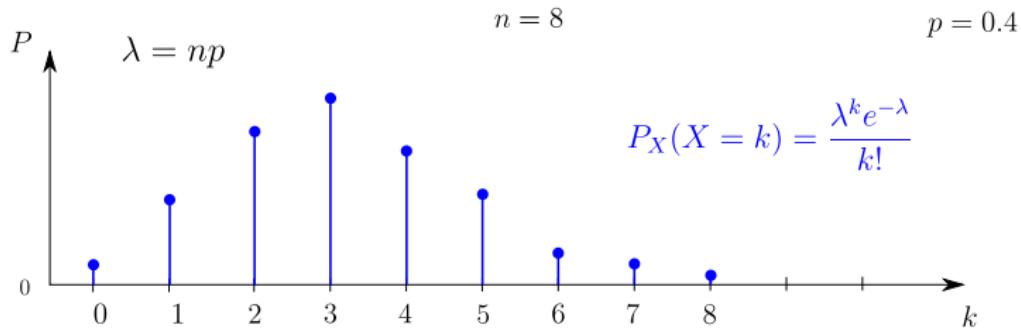
Cas discret

E.g. Fonction de répartition de la loi de Poisson



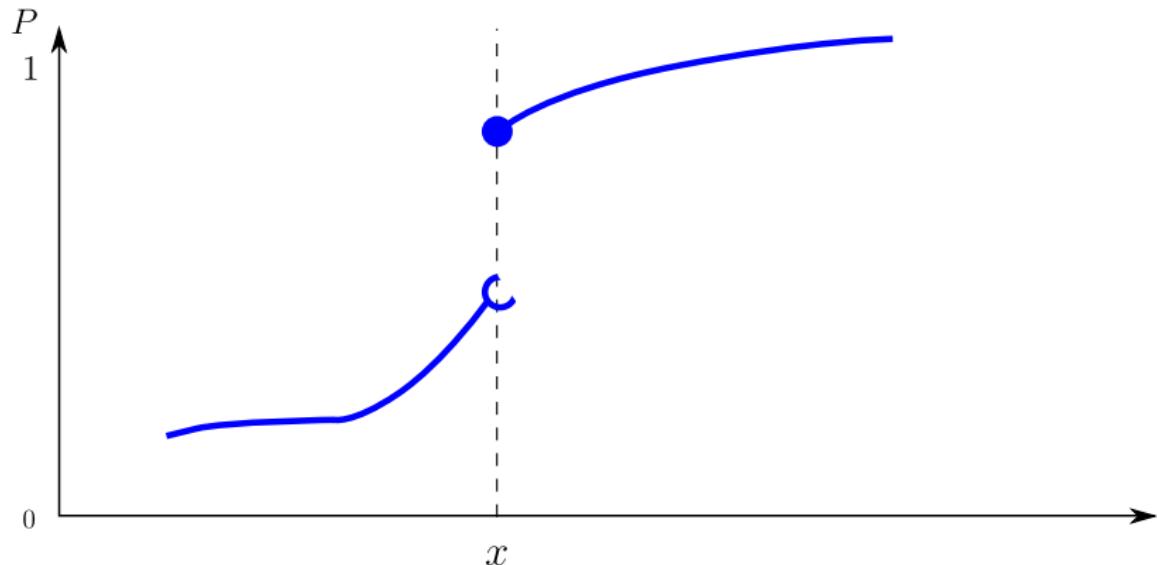
Cas discret

E.g. Fonction de répartition de la loi de Poisson



Continuité de la fonction de répartition ?

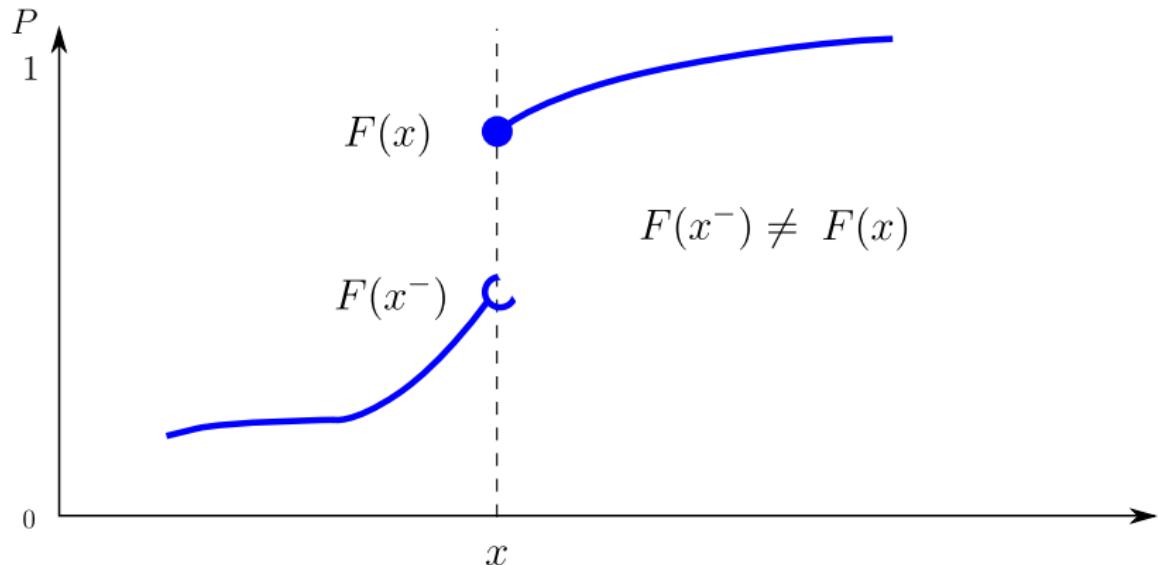
Fonction de répartition : $F(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$



La fonction de répartition F est continue à droite.

Continuité de la fonction de répartition ?

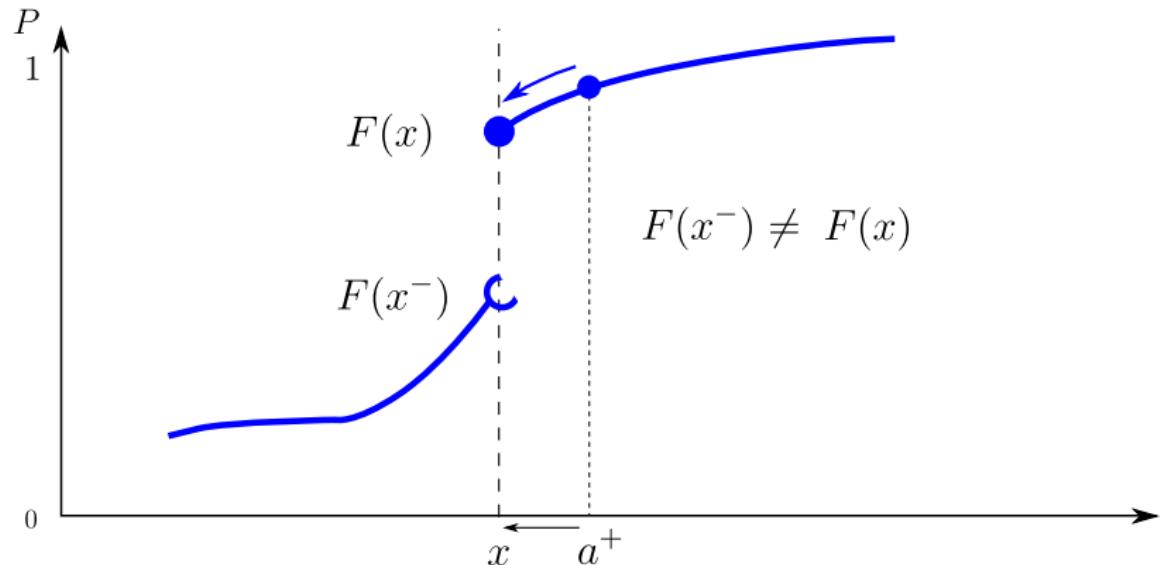
Fonction de répartition : $F(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$



La fonction de répartition F est continue à droite.

Continuité de la fonction de répartition ?

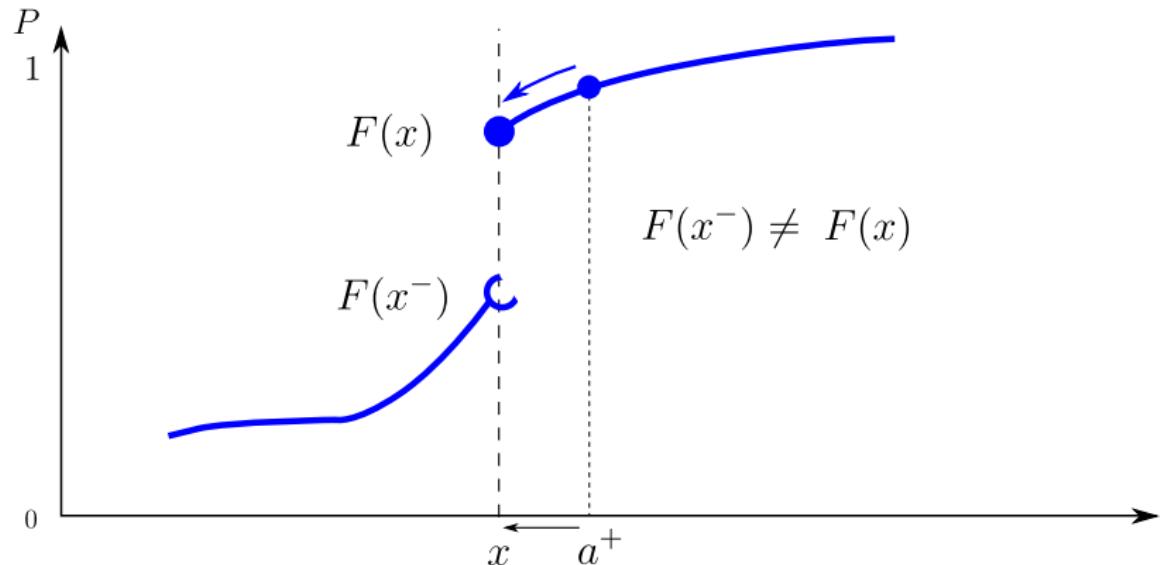
Fonction de répartition : $F(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$



$$\lim_{a^+ \rightarrow x} F(a^+)$$

Continuité de la fonction de répartition ?

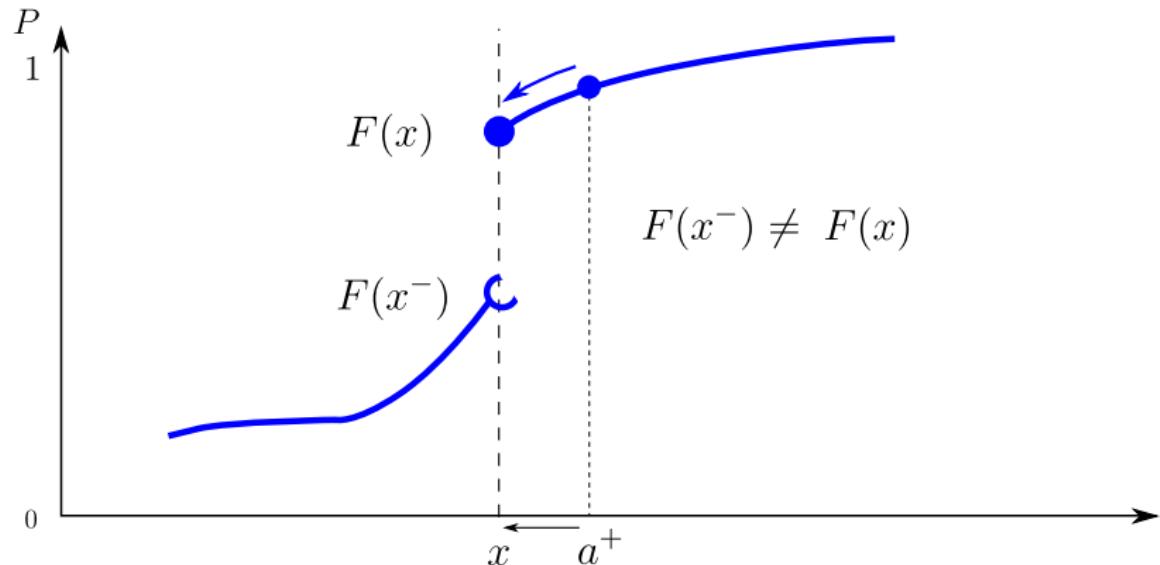
Fonction de répartition : $F(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$



$$\lim_{a^+ \rightarrow x} \mathbb{P}(-\infty; a^+]$$

Continuité de la fonction de répartition ?

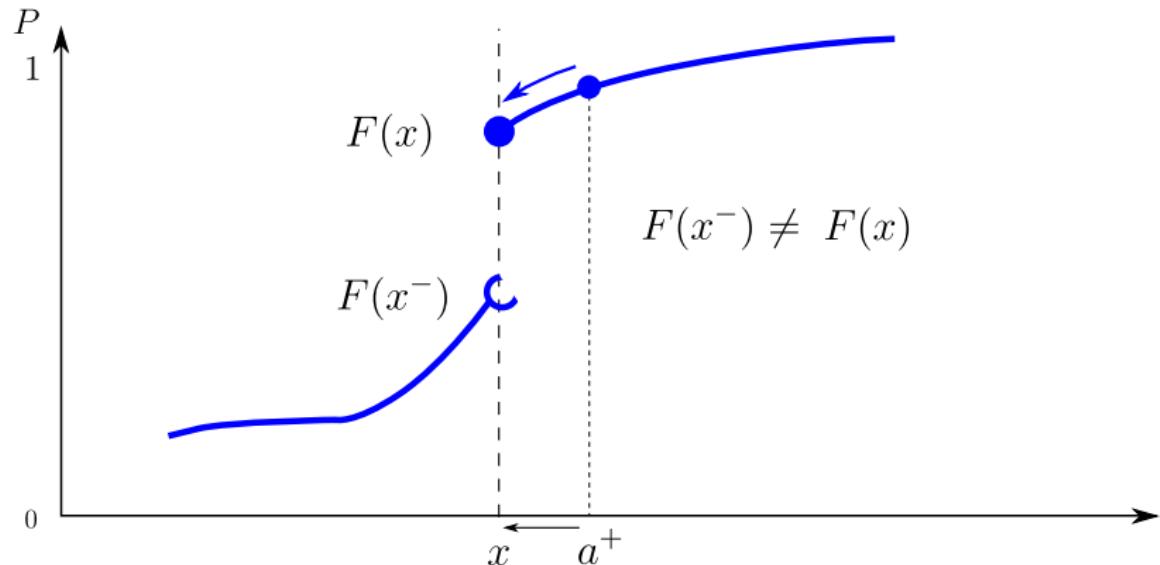
Fonction de répartition : $F(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$



$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(-\infty; x + \frac{1}{n}])$$

Continuité de la fonction de répartition ?

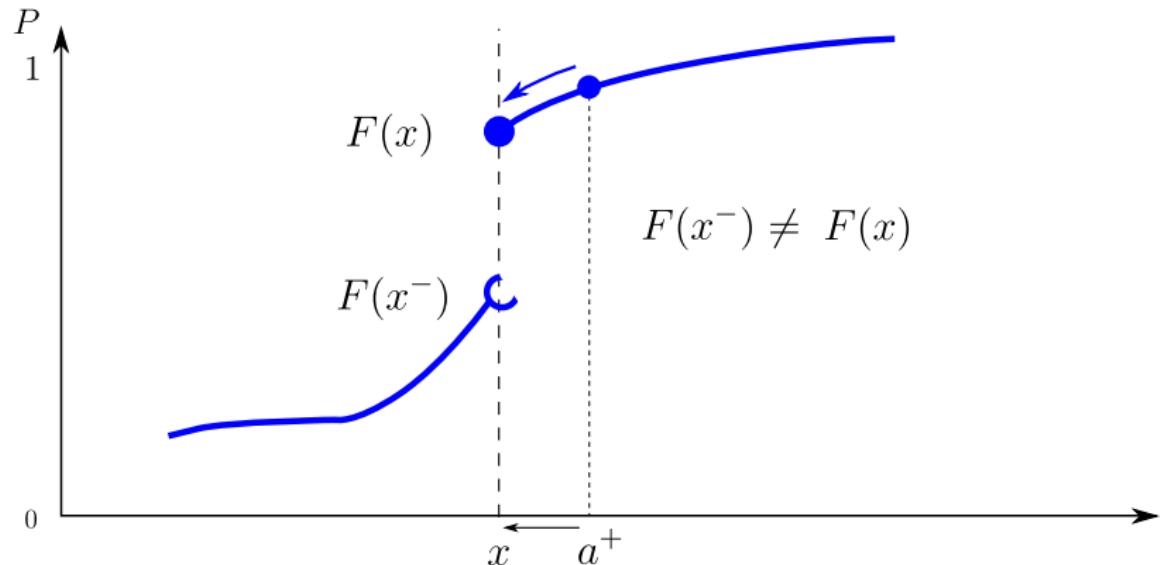
Fonction de répartition : $F(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$



$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(-\infty; x + \frac{1}{n}] = \mathbb{P}(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} -\infty; x + \frac{1}{n}])$$

Continuité de la fonction de répartition ?

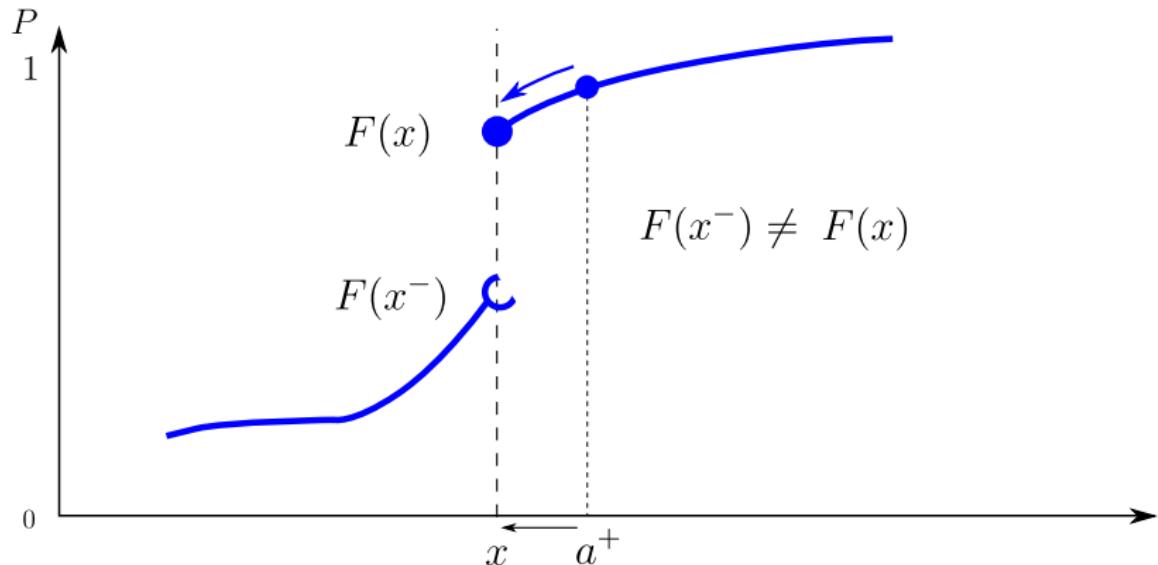
Fonction de répartition : $F(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$



$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(-\infty; x + \frac{1}{n}] = \mathbb{P}(-\infty; x])$$

Continuité de la fonction de répartition ?

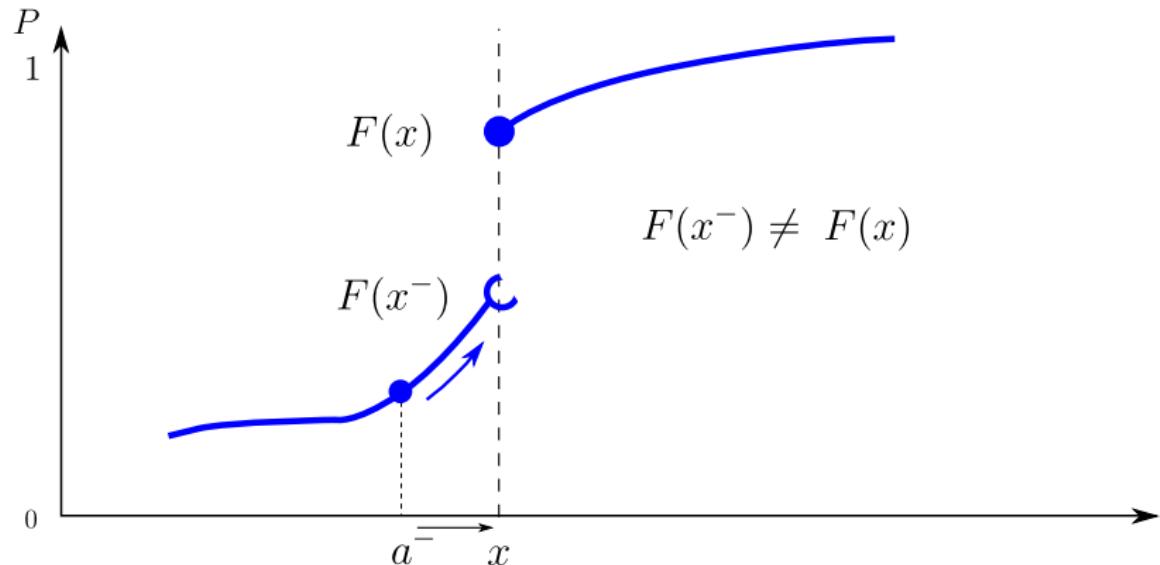
Fonction de répartition : $F(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$



$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(-\infty; x + \frac{1}{n}] = \mathbb{P}(-\infty; x] = F(x)$$

Continuité de la fonction de répartition ?

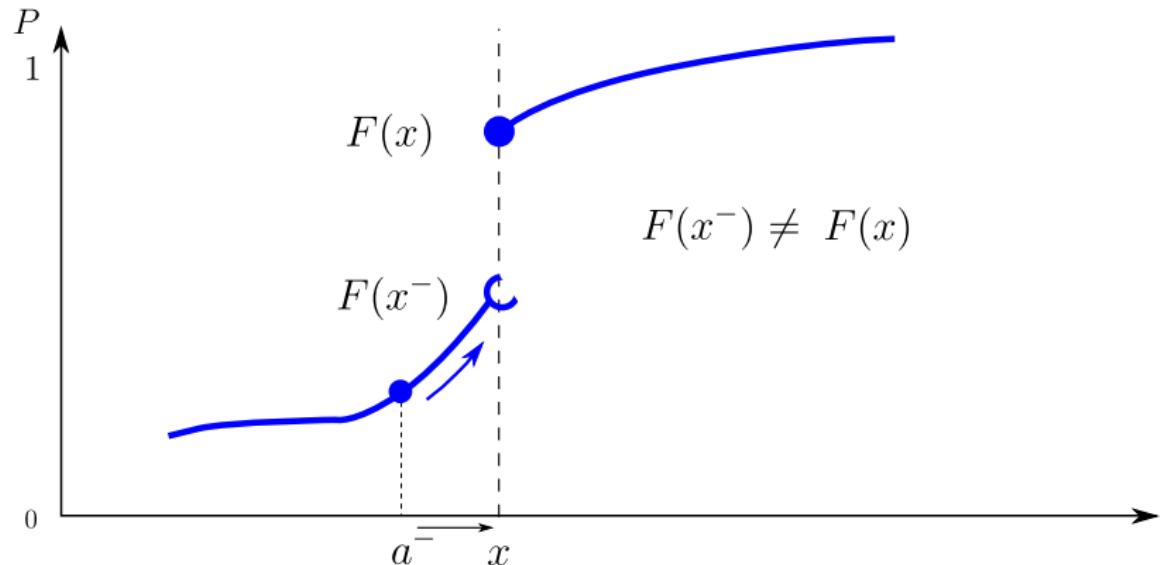
Fonction de répartition : $F(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$



$$\lim_{a^- \rightarrow x} F(a^-)$$

Continuité de la fonction de répartition ?

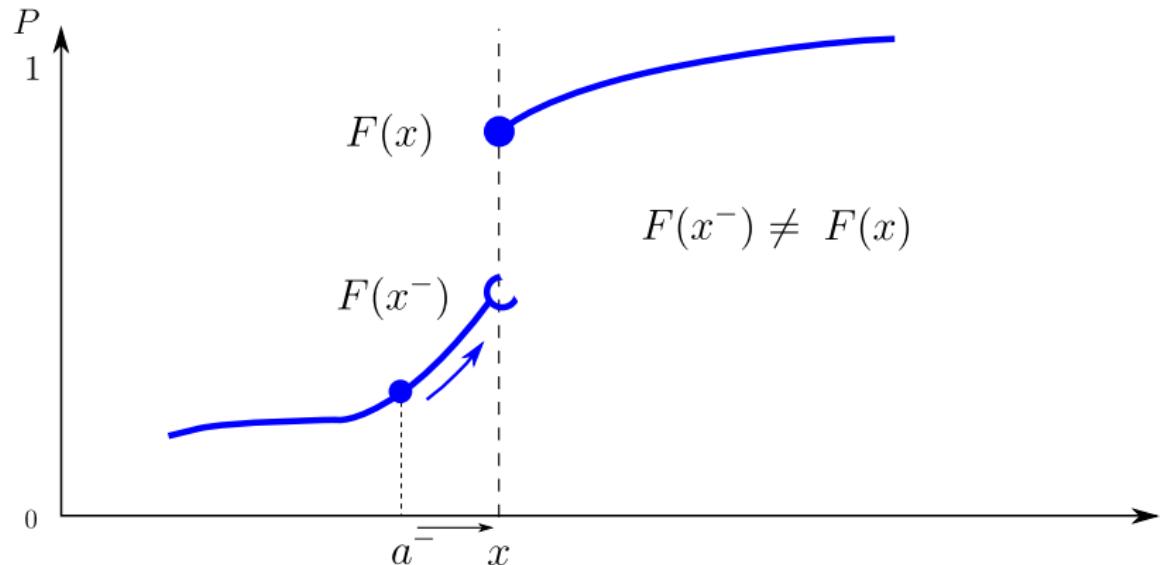
Fonction de répartition : $F(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$



$$\lim_{a^- \rightarrow x} \mathbb{P}(-\infty; a^-])$$

Continuité de la fonction de répartition ?

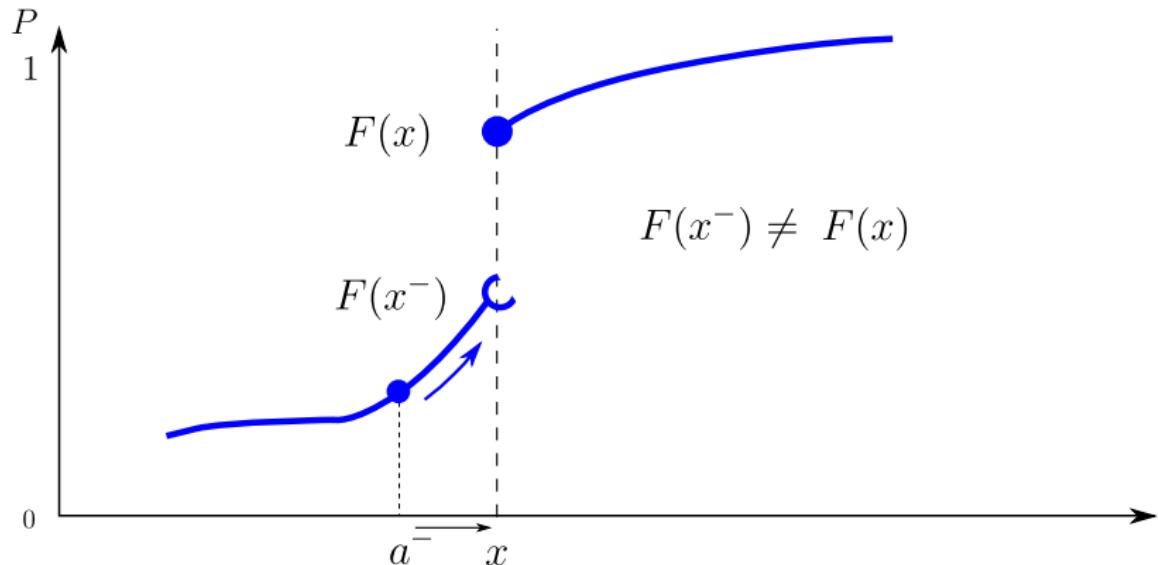
Fonction de répartition : $F(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$



$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(-\infty; x - \frac{1}{n}])$$

Continuité de la fonction de répartition ?

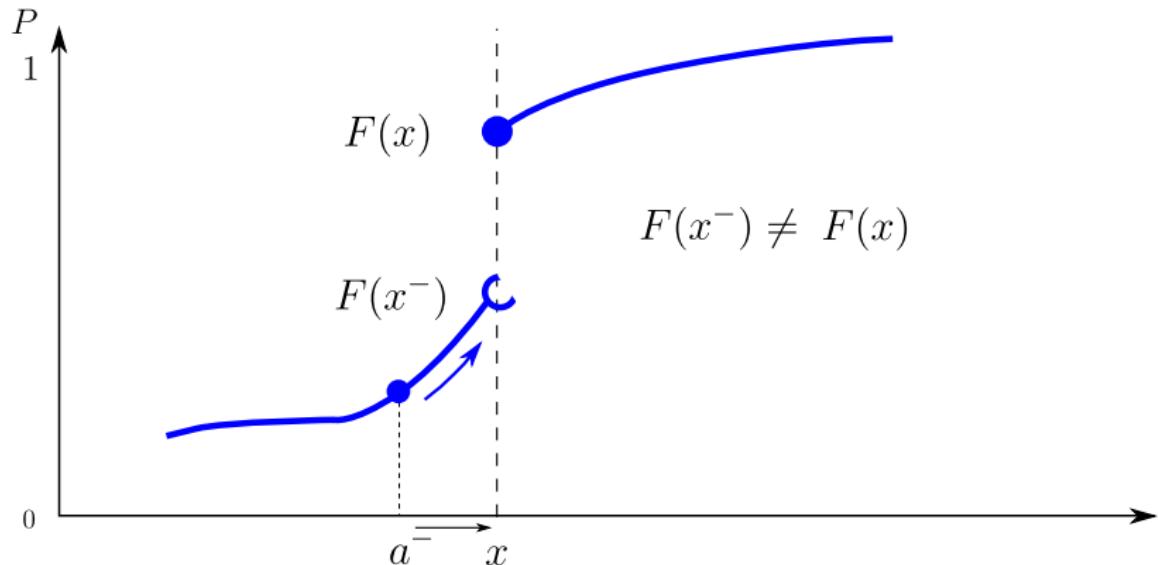
Fonction de répartition : $F(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$



$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(-\infty; x - \frac{1}{n}] = \mathbb{P}(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (-\infty; x - \frac{1}{n}])$$

Continuité de la fonction de répartition ?

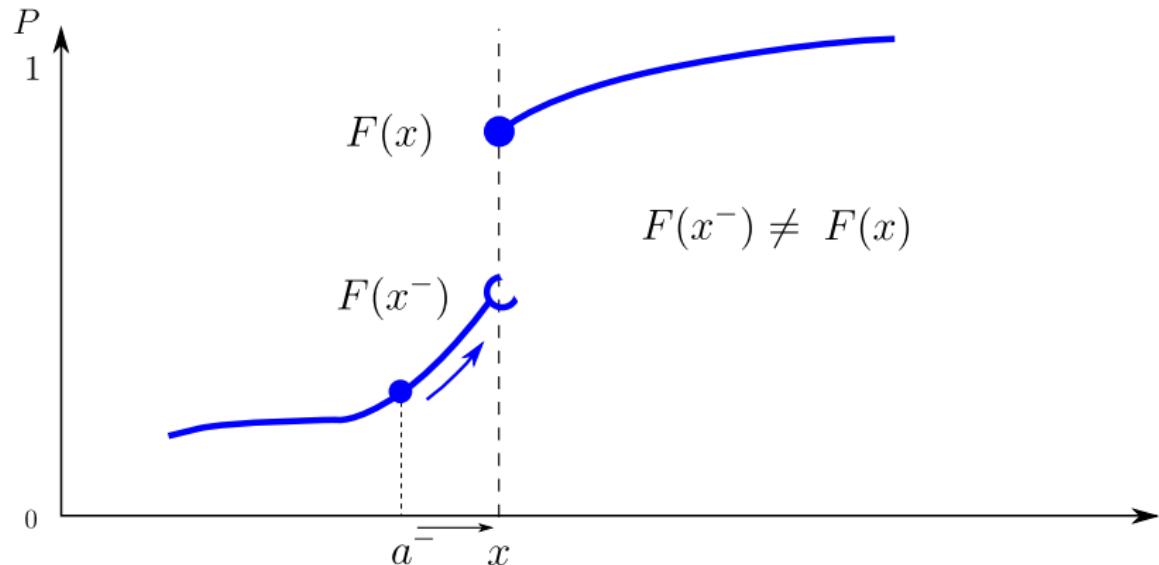
Fonction de répartition : $F(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$



$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(-\infty; x - \frac{1}{n}] = \mathbb{P}(-\infty; x[)$$

Continuité de la fonction de répartition ?

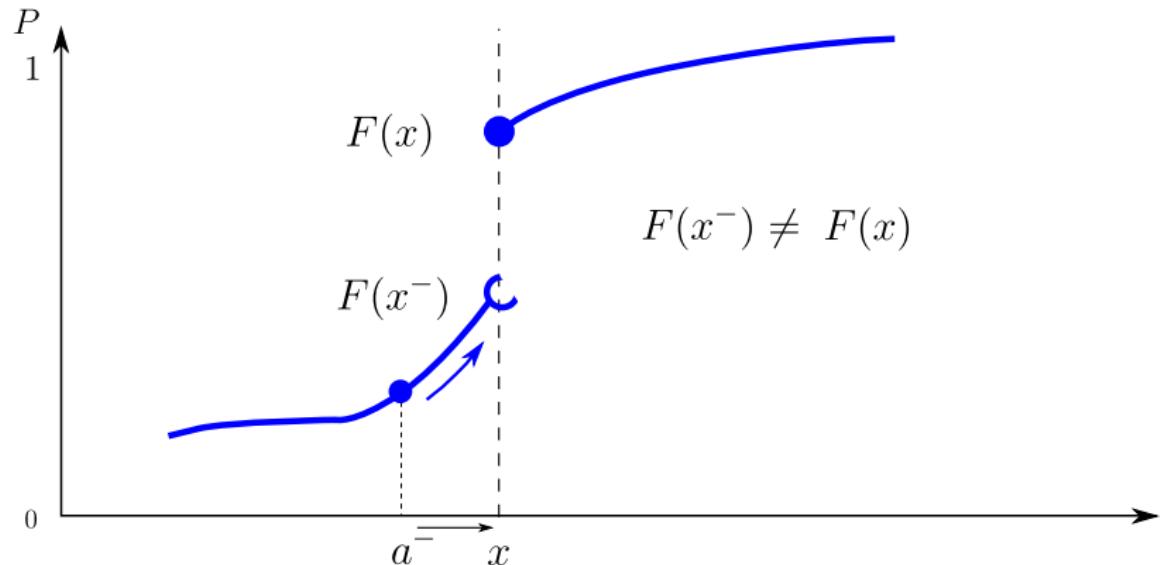
Fonction de répartition : $F(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$



$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(-\infty; x - \frac{1}{n}] = \mathbb{P}(-\infty; x[) \neq F(x)$$

Continuité de la fonction de répartition ?

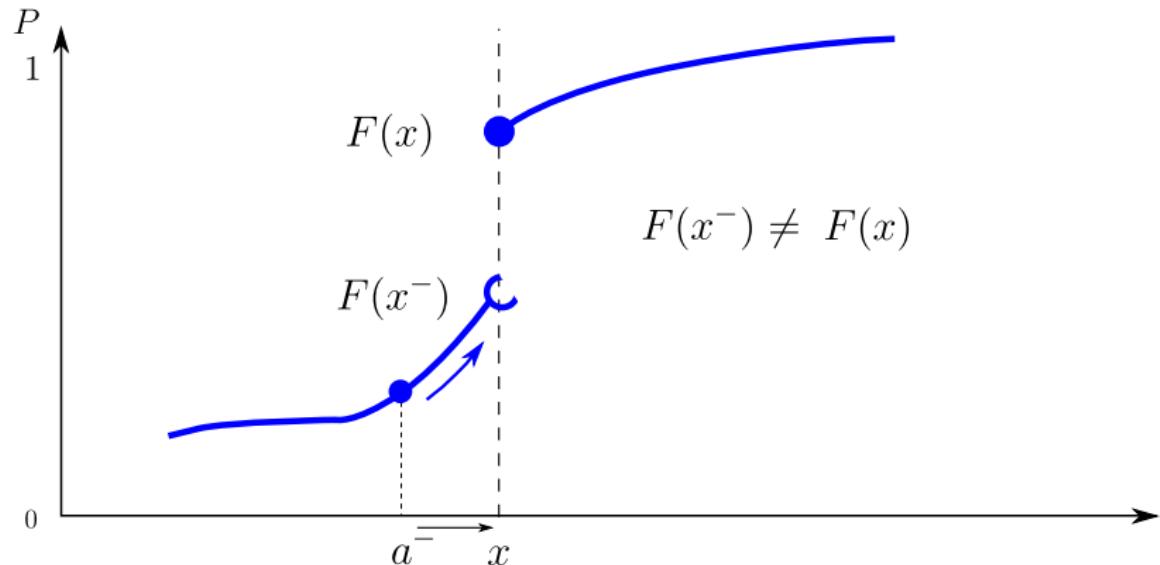
Fonction de répartition : $F(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$



$$\mathbb{P}([-\infty; x[)$$

Continuité de la fonction de répartition ?

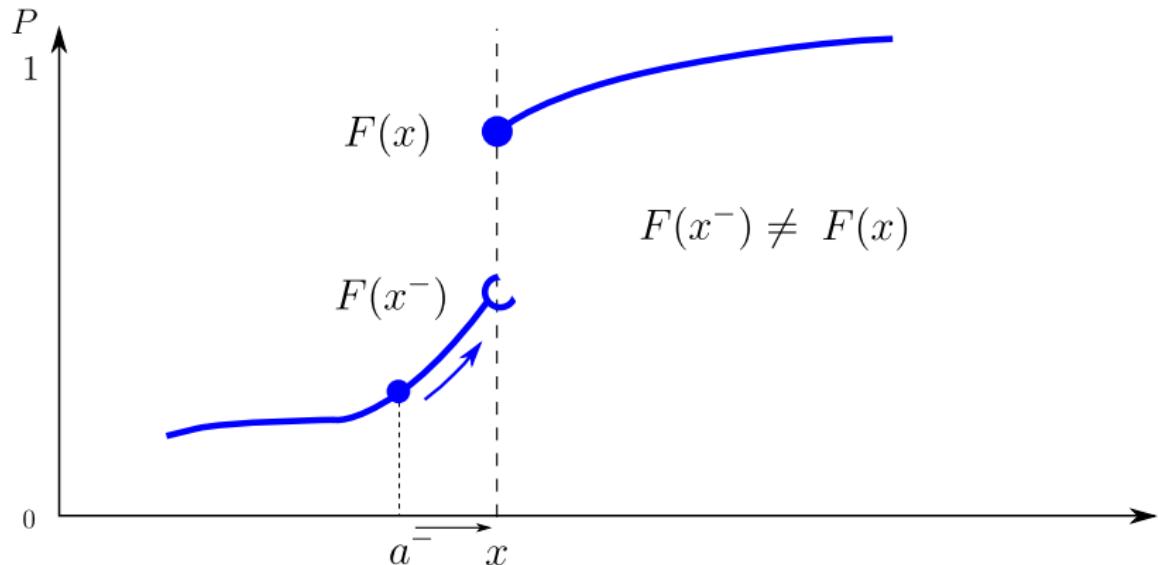
Fonction de répartition : $F(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$



$$\mathbb{P}([-\infty; x[) + \mathbb{P}(\{x\})$$

Continuité de la fonction de répartition ?

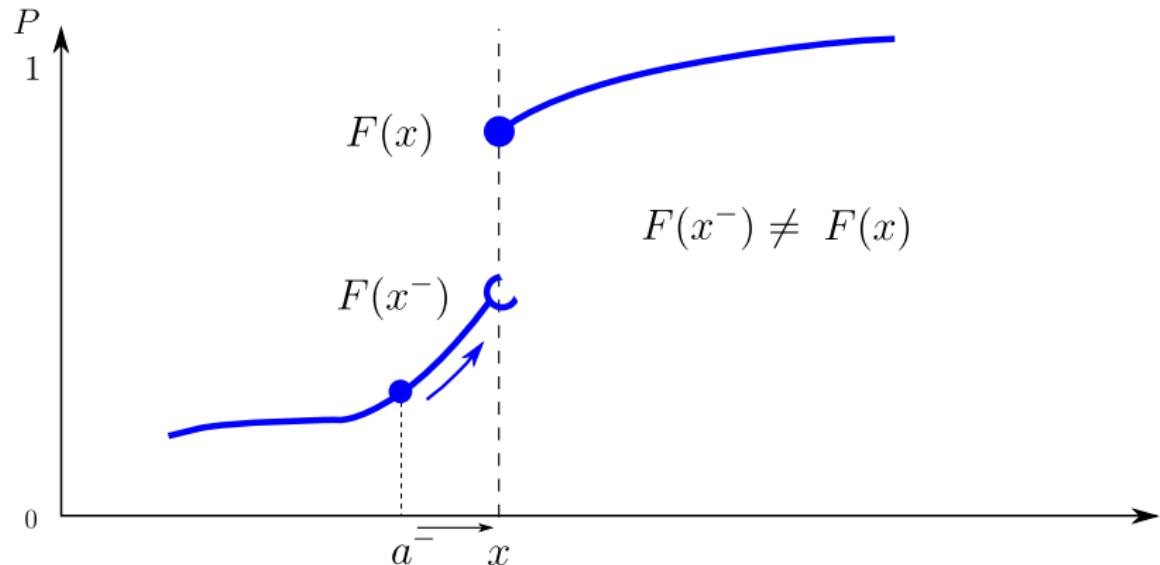
Fonction de répartition : $F(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$



$$\mathbb{P}(-\infty; x] + \mathbb{P}(\{x\}) = \mathbb{P}(-\infty; x])$$

Continuité de la fonction de répartition ?

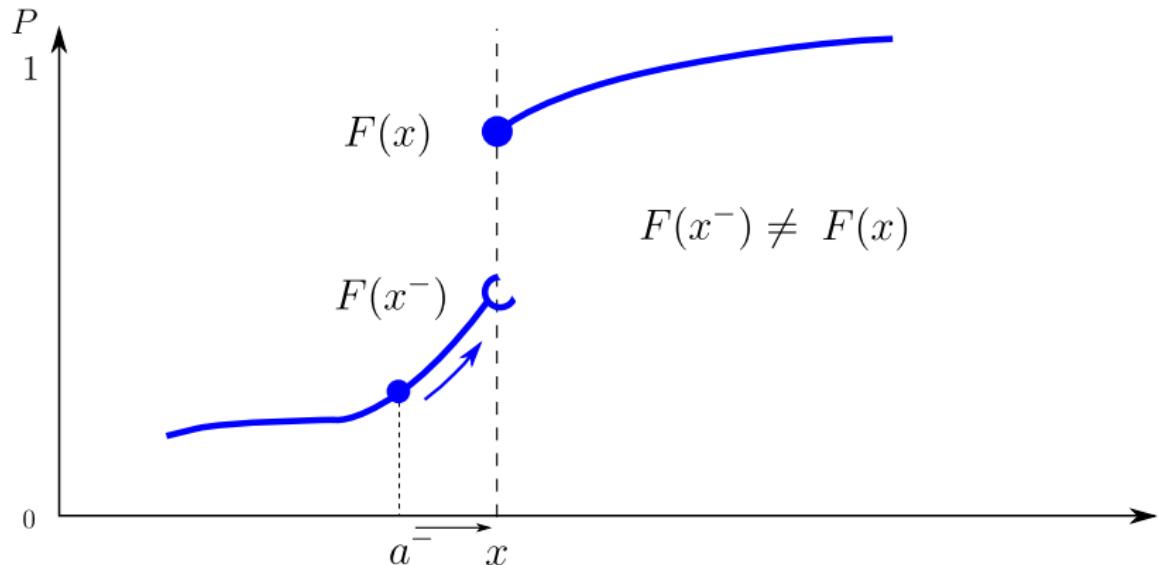
Fonction de répartition : $F(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$



$$\mathbb{P}(-\infty; x] + \mathbb{P}(\{x\}) = F(x)$$

Continuité de la fonction de répartition ?

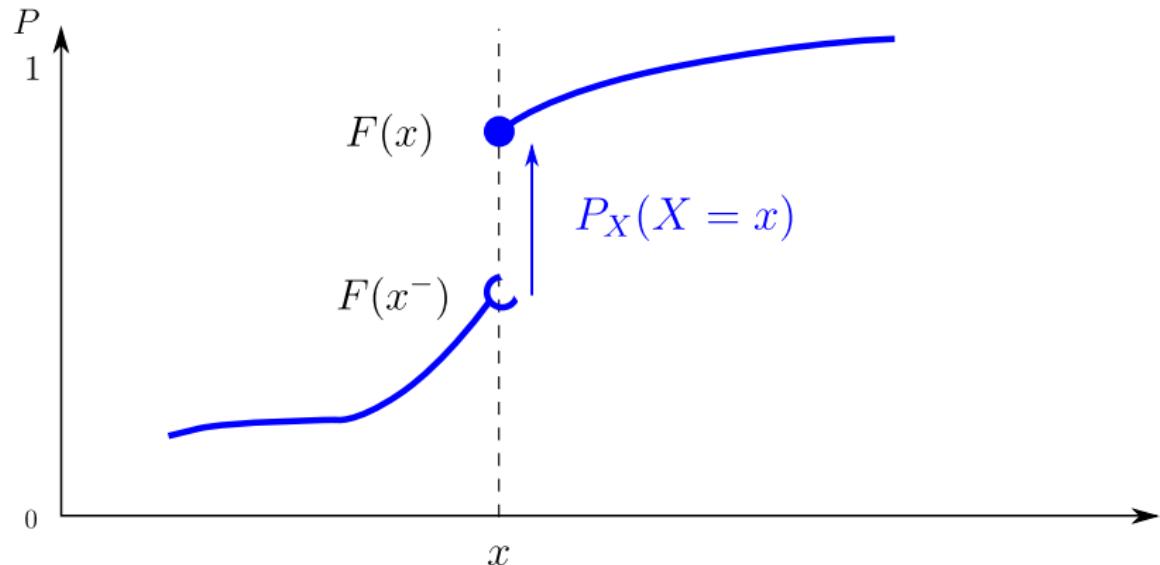
Fonction de répartition : $F(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$



$$\lim_{a^- \rightarrow x} F(a^-) + \mathbb{P}(\{x\}) = F(x)$$

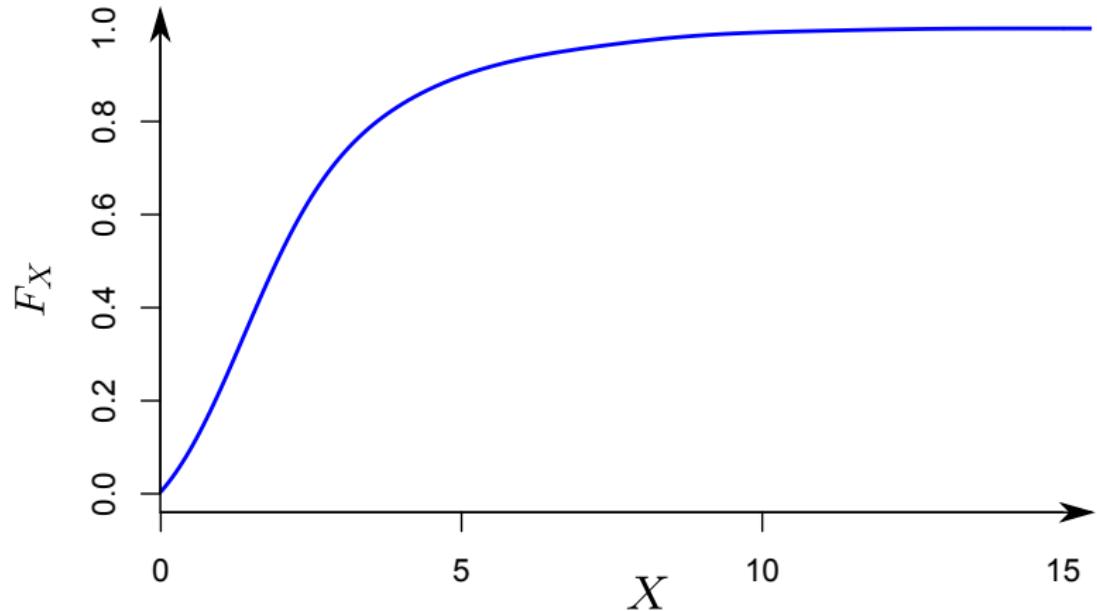
Continuité de la fonction de répartition ?

Fonction de répartition : $F(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$

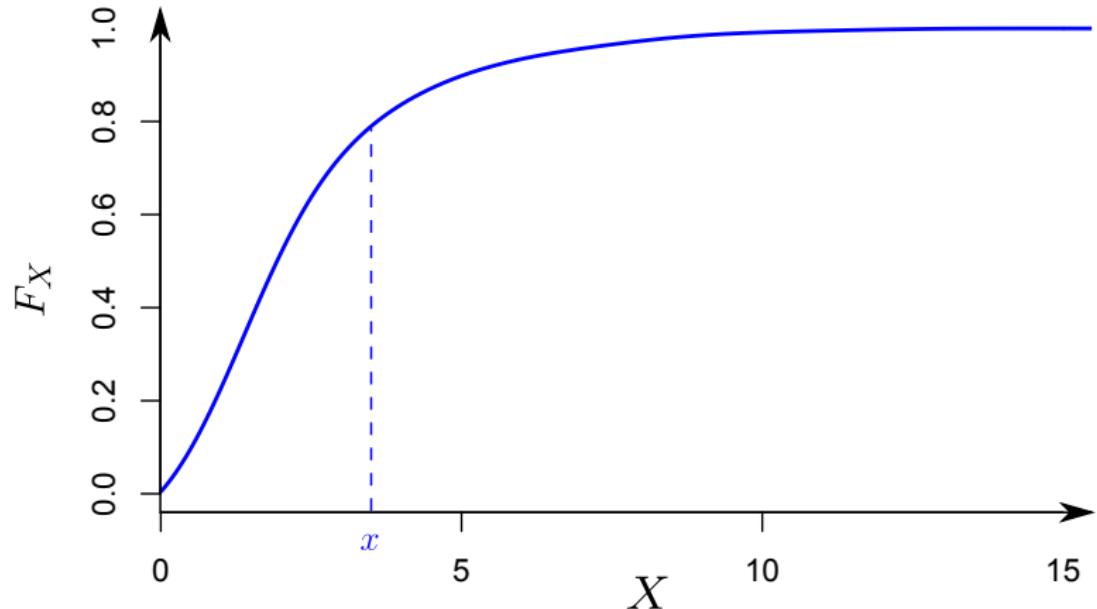


$$F(x^-) + \mathbb{P}(\{x\}) = F(x)$$

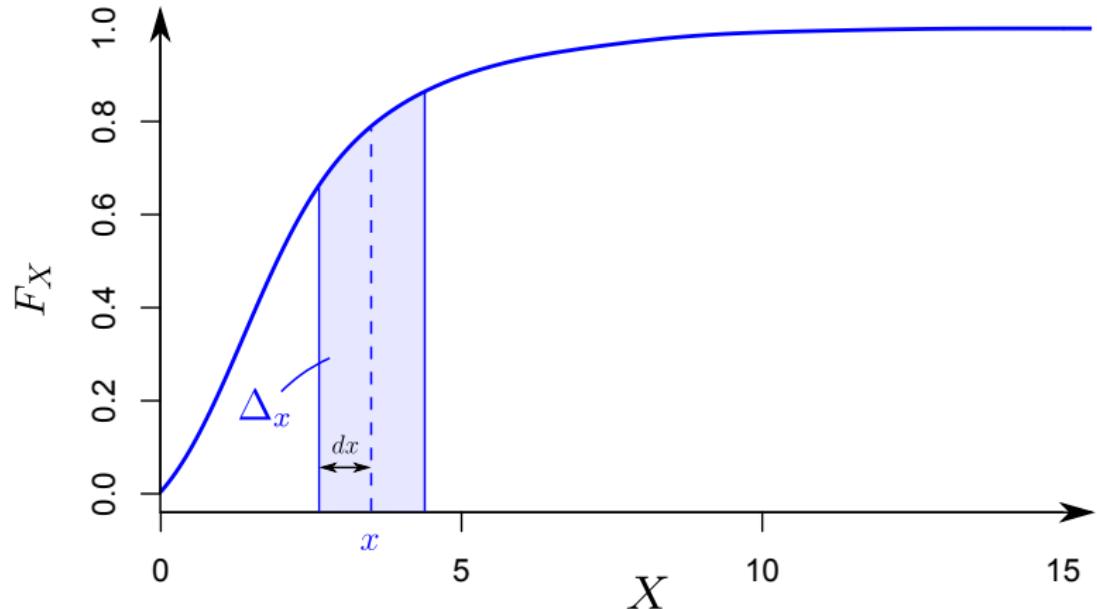
Densité de probabilité



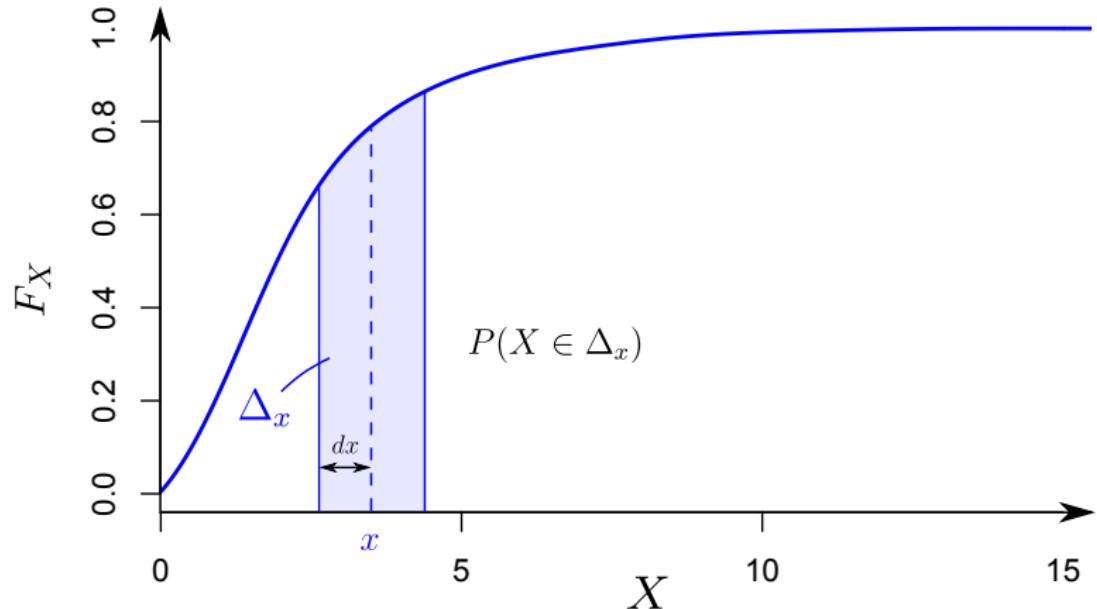
Densité de probabilité



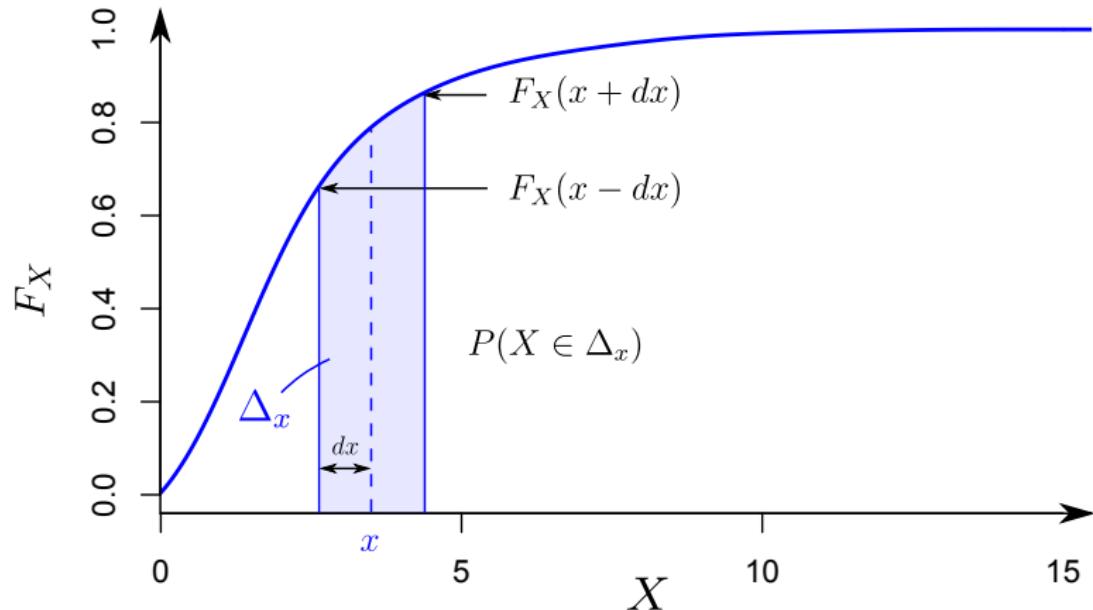
Densité de probabilité



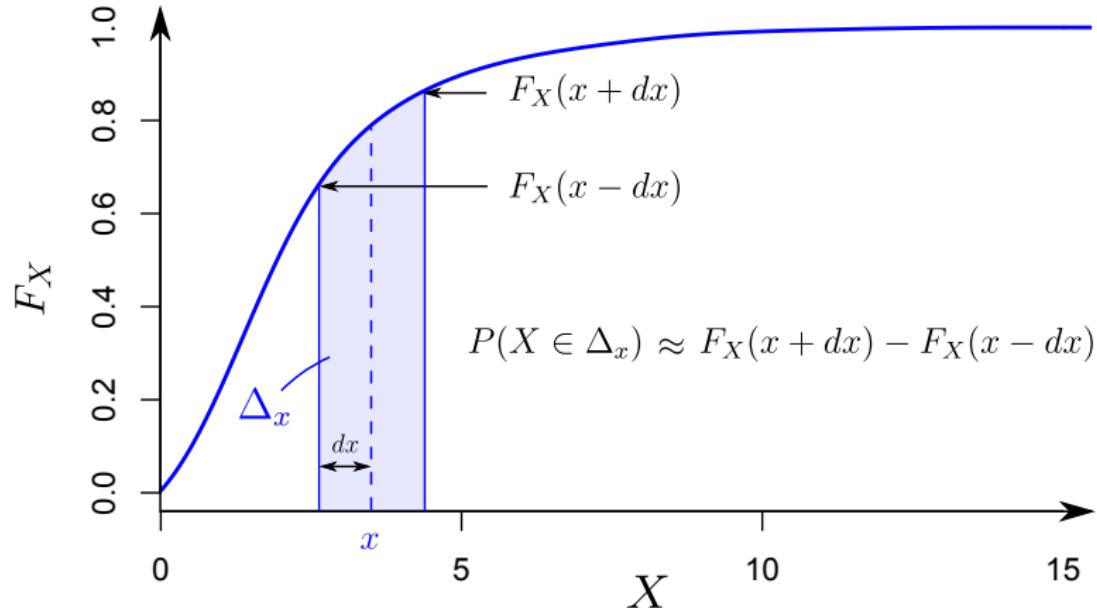
Densité de probabilité



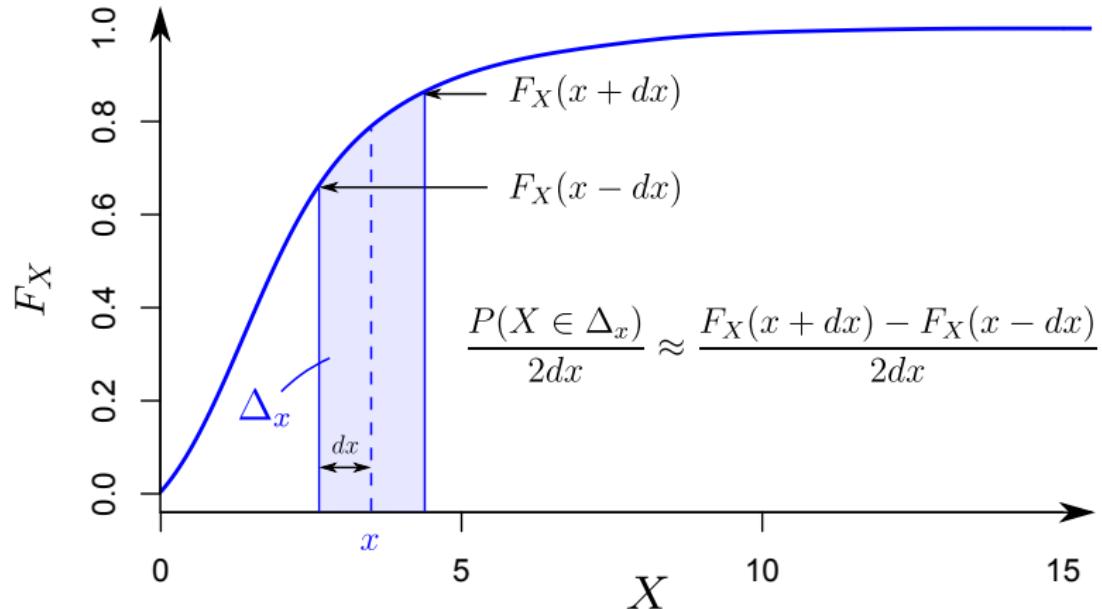
Densité de probabilité



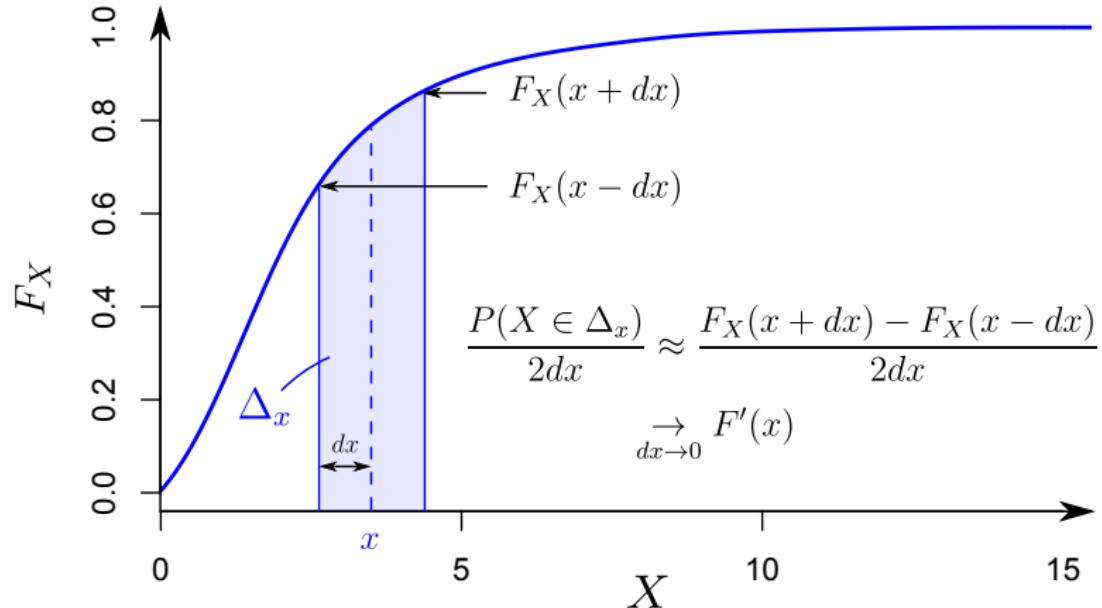
Densité de probabilité



Densité de probabilité



Densité de probabilité



Densité de probabilité

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, et $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une variable aléatoire réelle (absolument) continue de fonction de répartition F_X . On appelle **densité de probabilité** de X , la fonction $\pi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ définie par :

$$\pi(x) = \frac{dF_X}{dx}(x)$$

Densité de probabilité

Densité de probabilité

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, et $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une variable aléatoire réelle (absolument) continue de fonction de répartition F_X . On appelle **densité de probabilité** de X , la fonction $\pi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ définie par :

$$\pi(x) = \frac{dF_X}{dx}(x)$$

Remarque : inversement, connaissant la densité π d'une variable aléatoire X , on peut en déduire sa fonction de répartition F_X :

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x \pi(t) dt$$

Propriétés

- $\forall x \in \mathbb{R} \quad \pi(x) \geq 0$
- $\forall a, b \in \mathbb{R} \quad \int_a^b \pi(x)dx = \mathbb{P}(X \in [a, b])$
- $\int_{\mathbb{R}} \pi(x)dx = 1$

Propriétés

- $\forall x \in \mathbb{R} \quad \pi(x) \geq 0$
- $\forall a, b \in \mathbb{R} \quad \int_a^b \pi(x)dx = \mathbb{P}(X \in [a, b])$
- $\int_{\mathbb{R}} \pi(x)dx = 1$

Théorème fondamental de l'analyse : $f = F'$

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Propriétés

- $\forall x \in \mathbb{R} \quad \pi(x) \geq 0$
- $\forall a, b \in \mathbb{R} \quad \int_a^b \pi(x)dx = \mathbb{P}(X \in [a, b])$
- $\int_{\mathbb{R}} \pi(x)dx = 1$

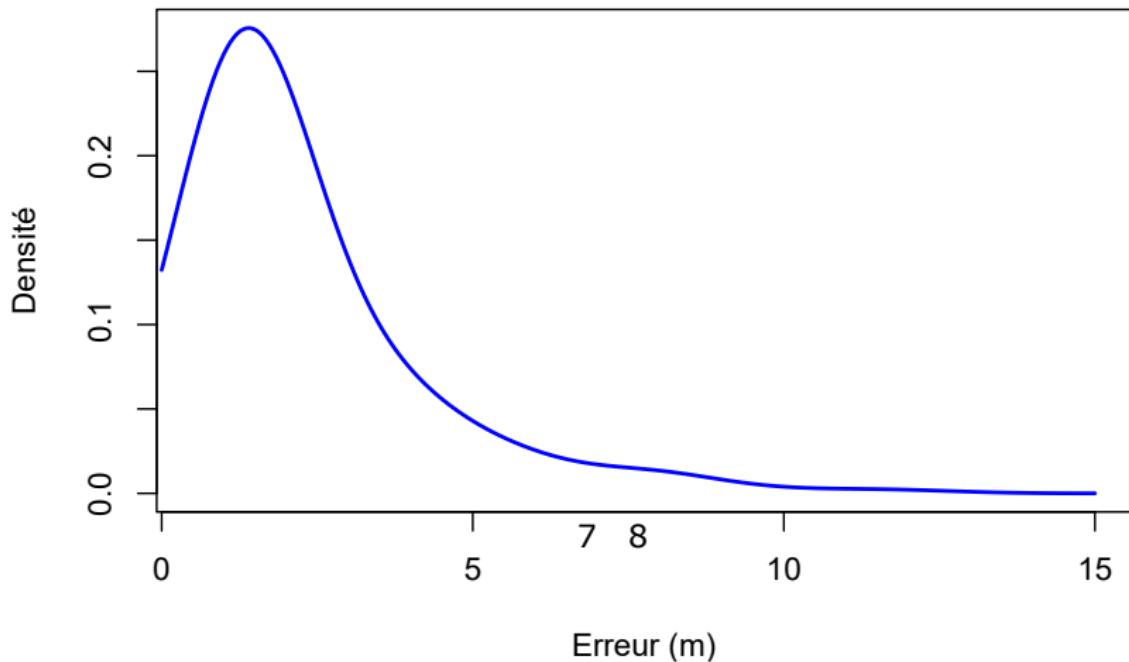
Théorème fondamental de l'analyse : $f = F'$

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Attention : lorsqu'elle existe, π est positive et son aire sous la courbe vaut 1, mais $\pi(x)$ n'est pas une probabilité. En particulier, on peut avoir $\pi(x) > 1$. Pour obtenir une probabilité, on doit intégrer π .

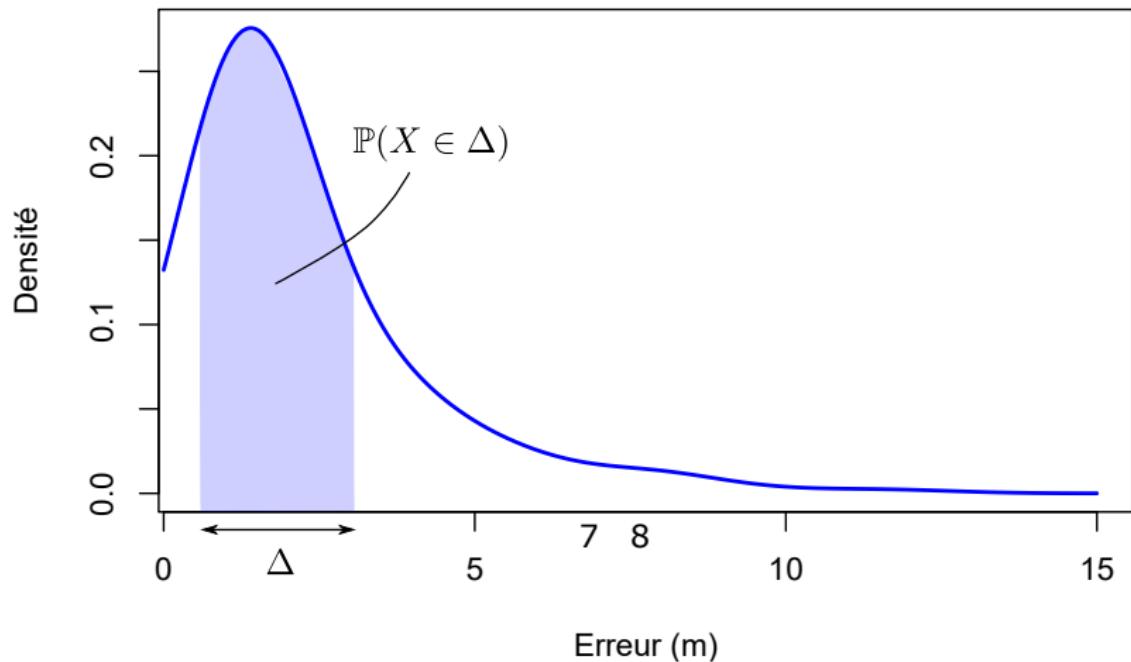
Densité de probabilité

Observation GPS code station MITAKA - 14/11/2005 (24h)



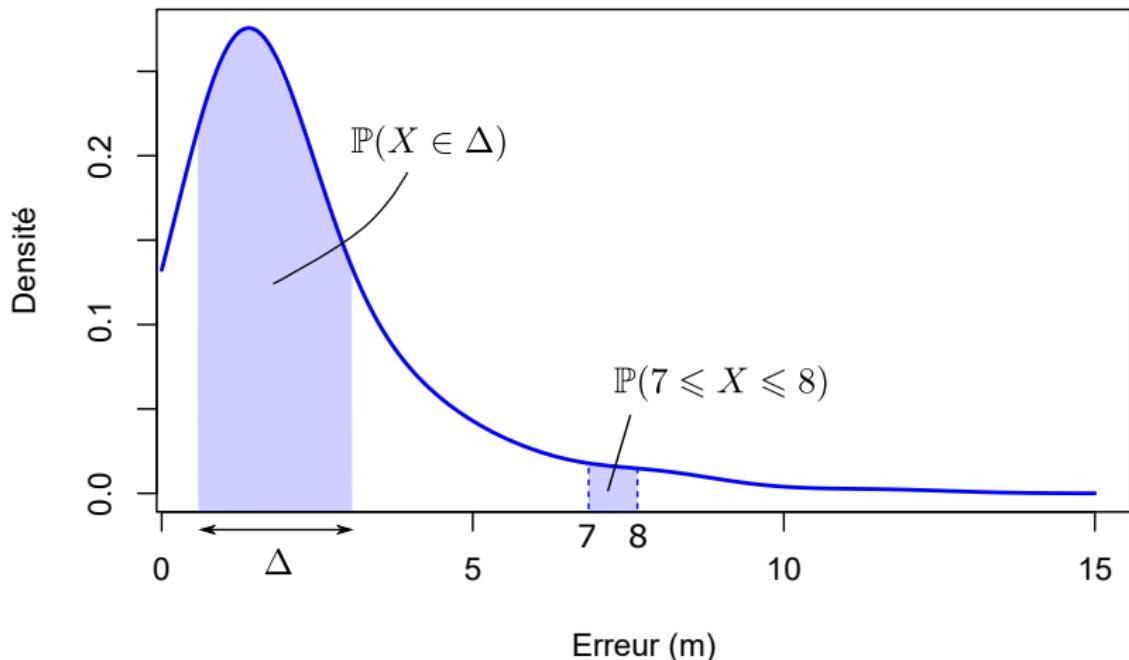
Densité de probabilité

Observation GPS code station MITAKA - 14/11/2005 (24h)



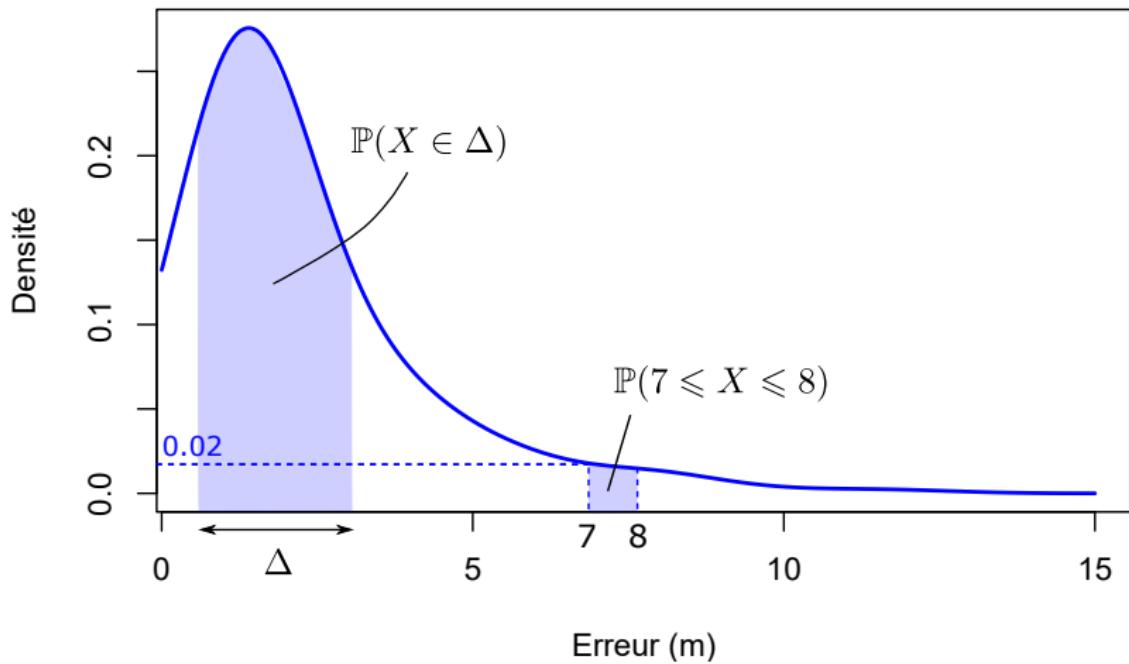
Densité de probabilité

Observation GPS code station MITAKA - 14/11/2005 (24h)



Densité de probabilité

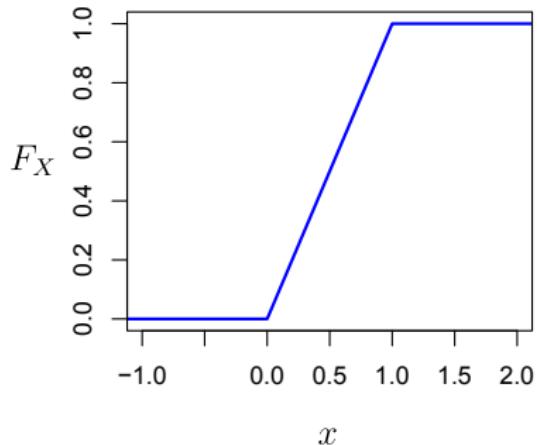
Observation GPS code station MITAKA - 14/11/2005 (24h)



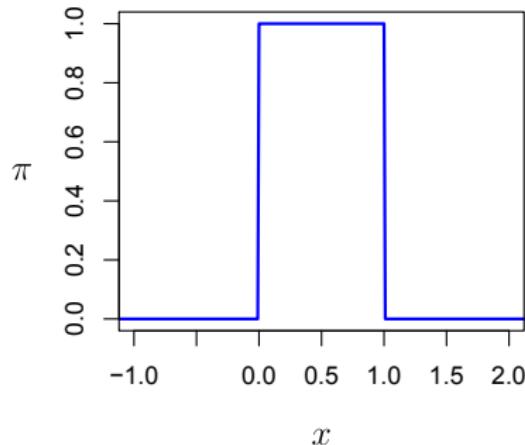
Quelques exemples de lois continues

Loi uniforme

$$X \sim \mathcal{U}([0, 1])$$



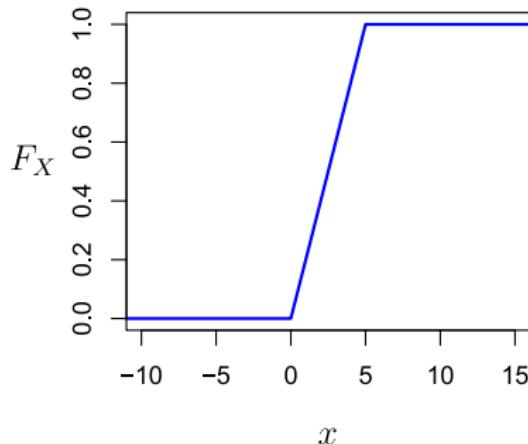
$$F_X(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in [0, 1] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$



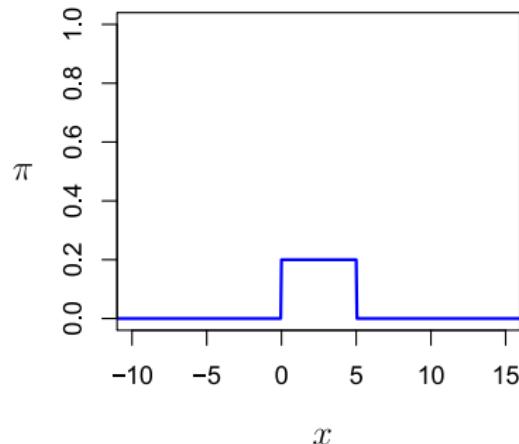
$$\pi(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0, 1] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Loi uniforme

$$X \sim \mathcal{U}([a, b])$$



$$F_X(x) = \begin{cases} \frac{x}{(b-a)} & \text{si } x \in [a, b] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

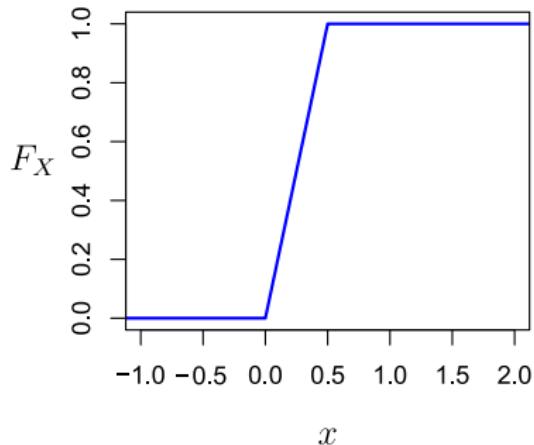


$$\pi(x) = \begin{cases} \frac{1}{(b-a)} & \text{si } x \in [0, 5] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

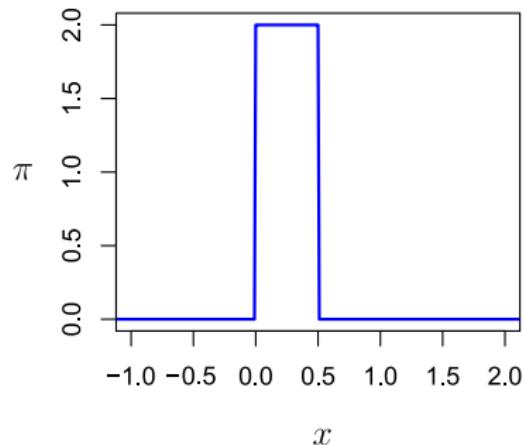
Quelques exemples de lois continues

Loi uniforme

$$X \sim \mathcal{U}([a, b])$$

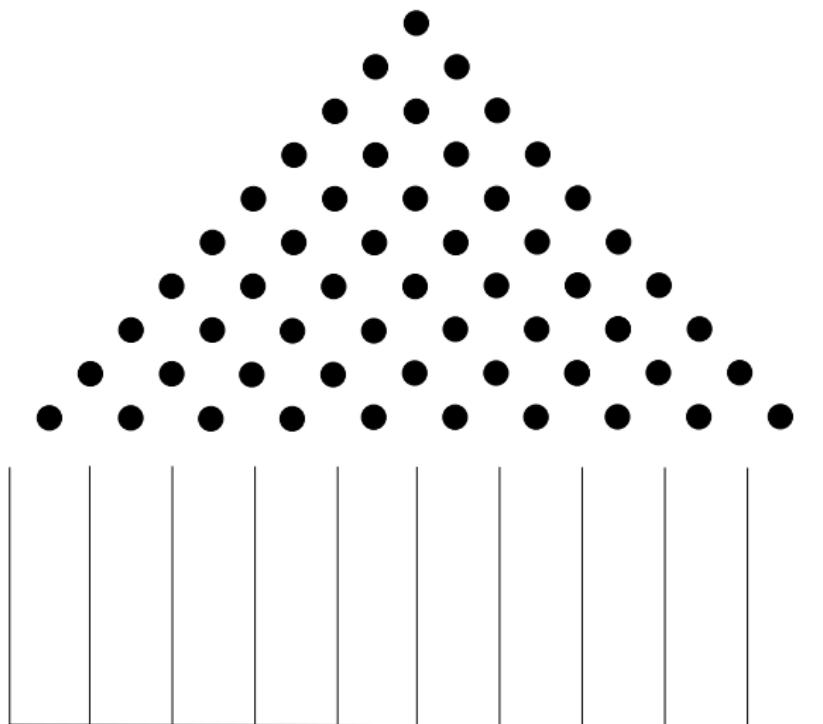


$$F_X(x) = \begin{cases} \frac{x}{(b-a)} & \text{si } x \in [a, b] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

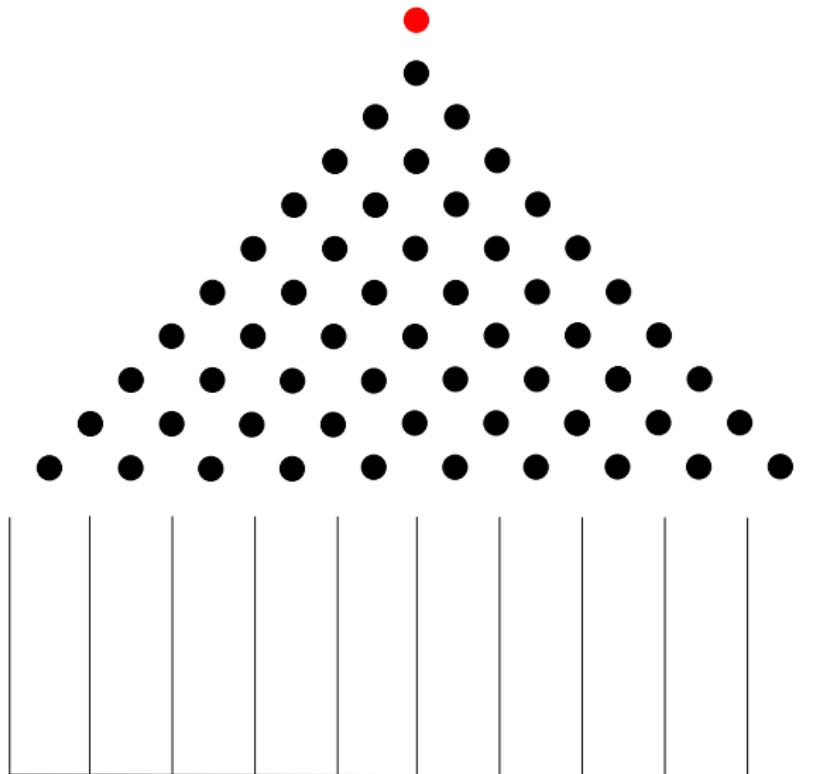


$$\pi(x) = \begin{cases} \frac{1}{(b-a)} & \text{si } x \in [0, 1] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

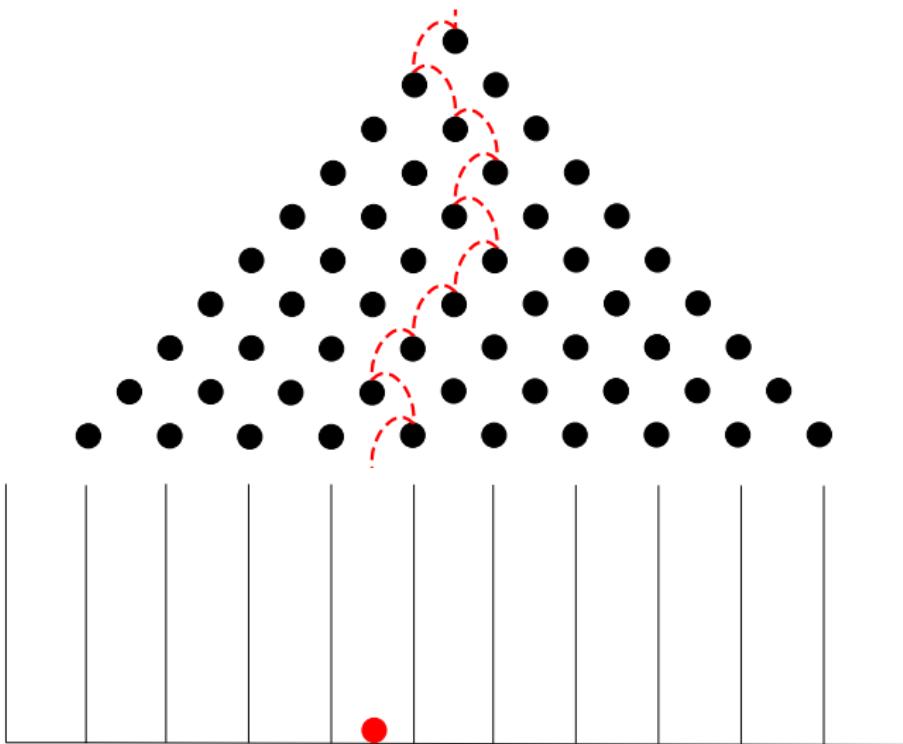
Quelques exemples de lois continues



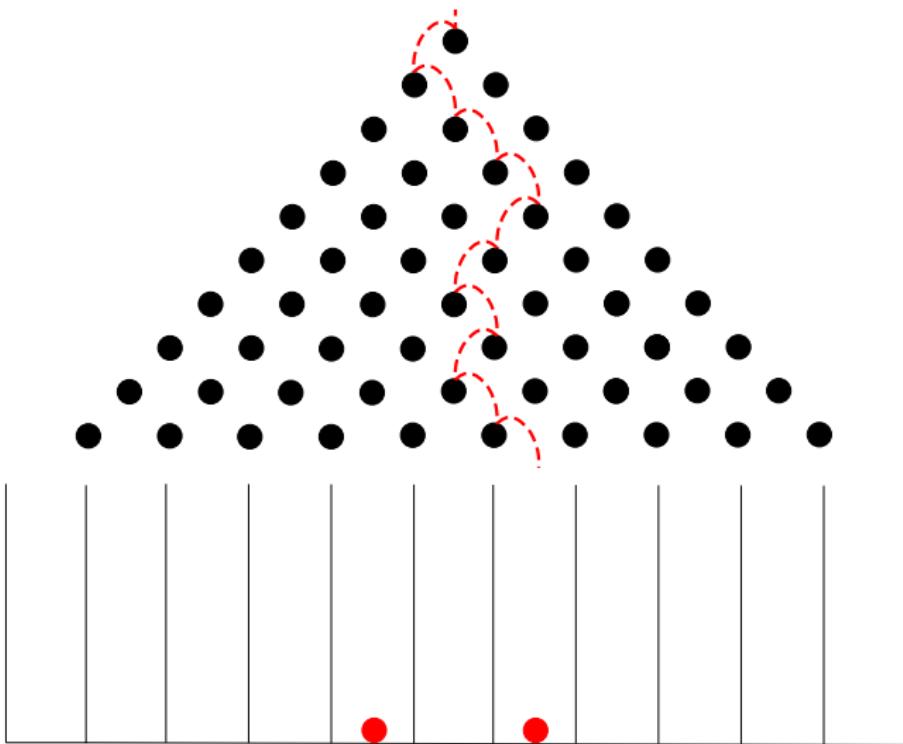
Quelques exemples de lois continues



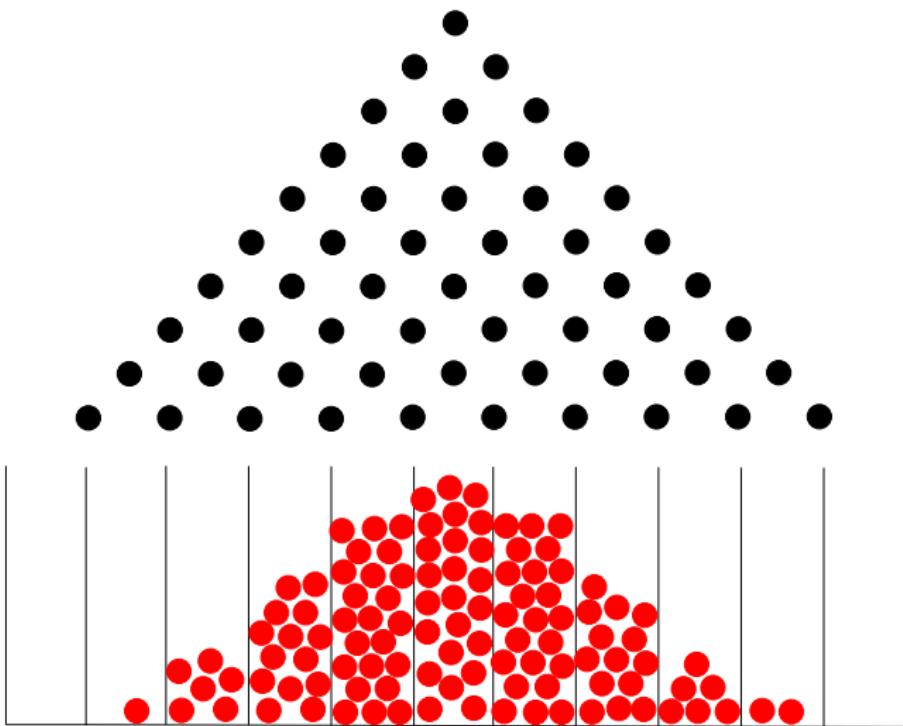
Quelques exemples de lois continues



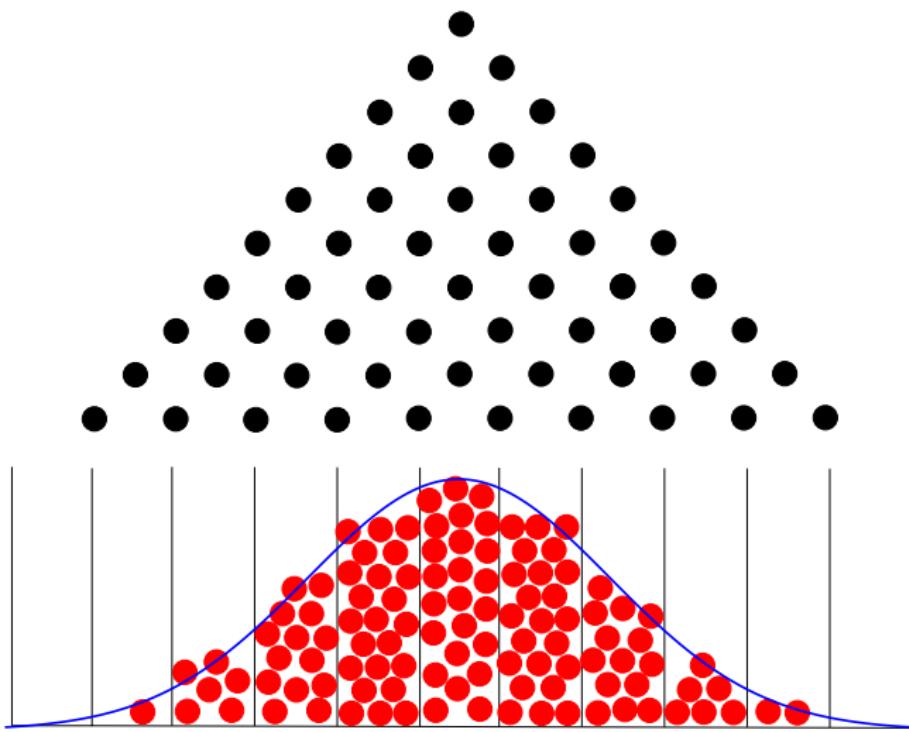
Quelques exemples de lois continues



Quelques exemples de lois continues



Quelques exemples de lois continues

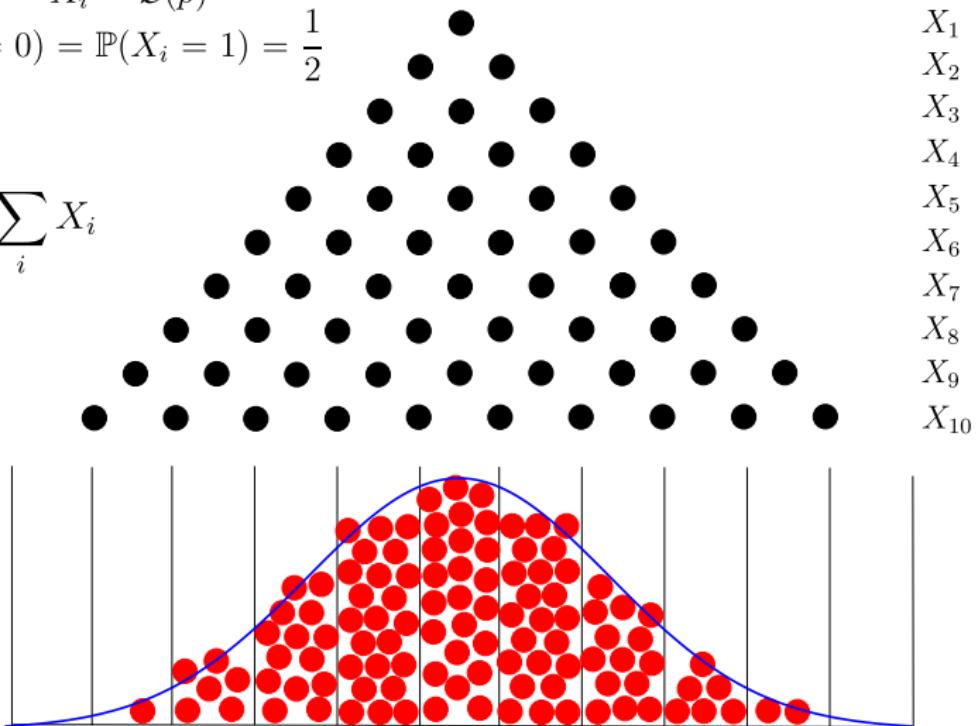


Quelques exemples de lois continues

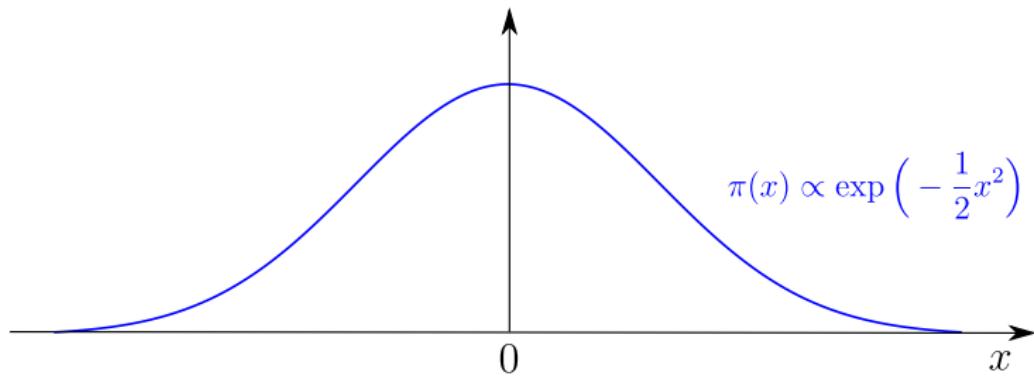
$$X_i \sim \mathcal{B}(p)$$

$$\mathbb{P}(X_i = 0) = \mathbb{P}(X_i = 1) = \frac{1}{2}$$

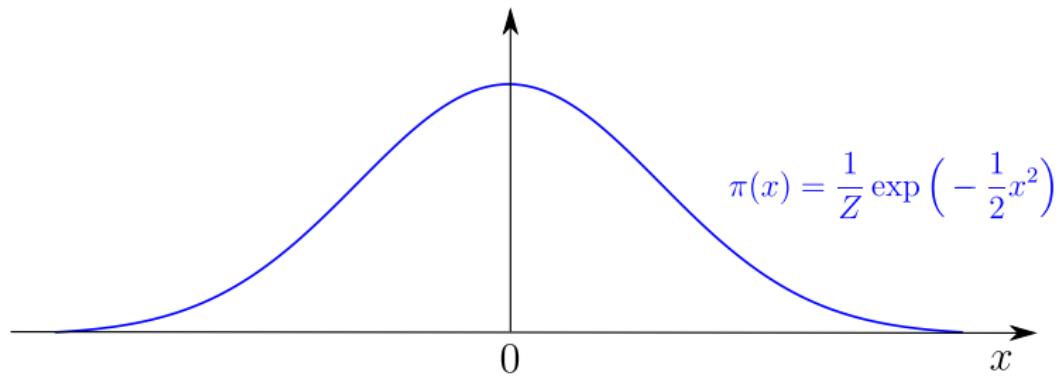
$$Y = \sum_i X_i$$



Quelques exemples de lois continues

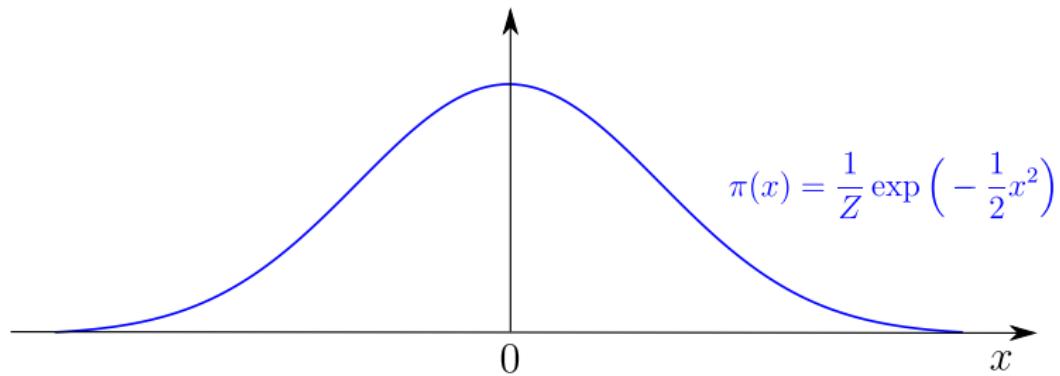


Quelques exemples de lois continues



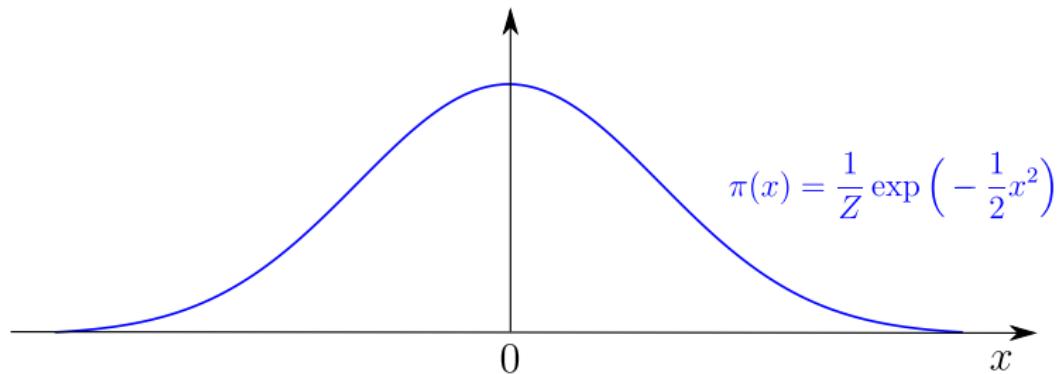
Quelques exemples de lois continues

$$Z = \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right) dx$$



Quelques exemples de lois continues

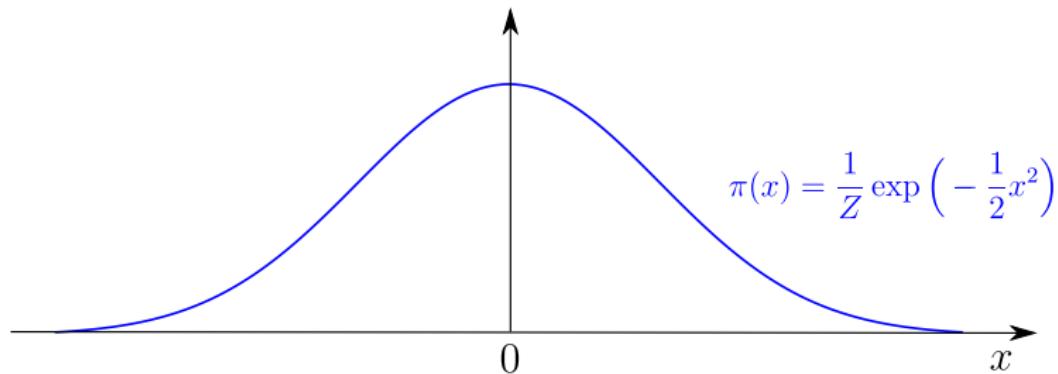
$$Z = \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right) dx \quad \rightarrow \quad \text{Intégrale de Gauss}$$



Quelques exemples de lois continues

$$Z = \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right) dx \quad \rightarrow \quad \text{Intégrale de Gauss}$$

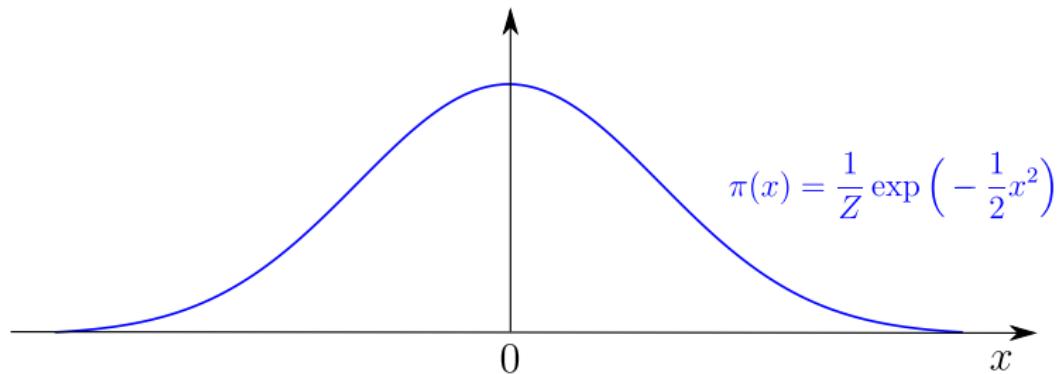
$$Z^2 = \left(\int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right) dx \right)^2$$



Quelques exemples de lois continues

$$Z = \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right) dx \quad \rightarrow \quad \text{Intégrale de Gauss}$$

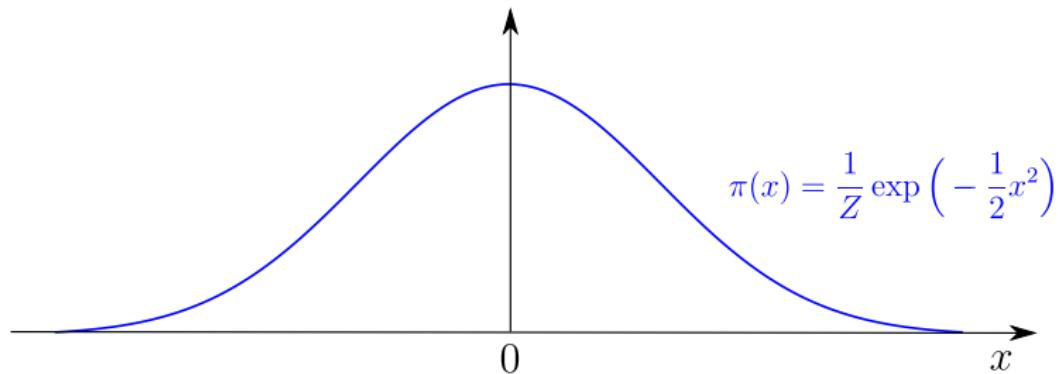
$$Z^2 = \left(\int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right) dx \right)^2 = \left(\int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right) dx \right) \left(\int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{1}{2}y^2\right) dy \right)$$



Quelques exemples de lois continues

$$Z = \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right) dx \quad \rightarrow \quad \text{Intégrale de Gauss}$$

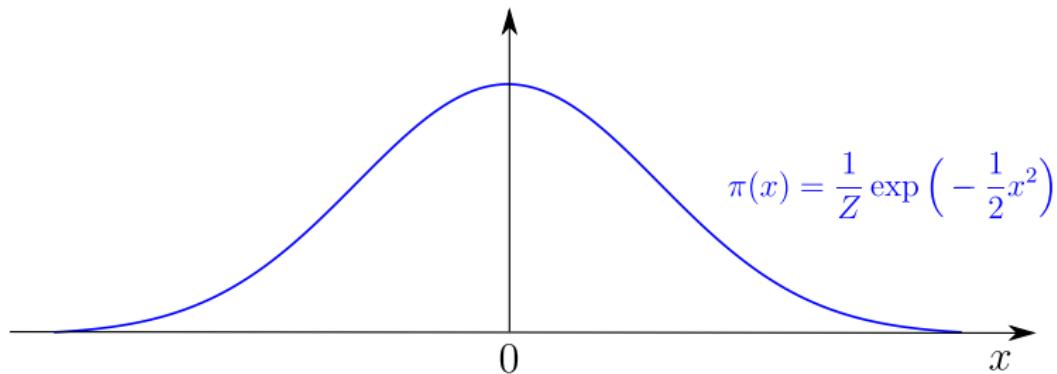
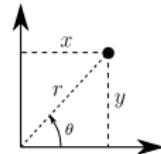
$$\begin{aligned} Z^2 &= \left(\int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right) dx \right)^2 = \left(\int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right) dx \right) \left(\int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{1}{2}y^2\right) dy \right) \\ &= \iint_{\mathbb{R}^2} \exp\left(-\frac{1}{2}(x^2 + y^2)\right) dx dy \end{aligned}$$



Quelques exemples de lois continues

$$Z = \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right) dx \quad \rightarrow \quad \text{Intégrale de Gauss}$$

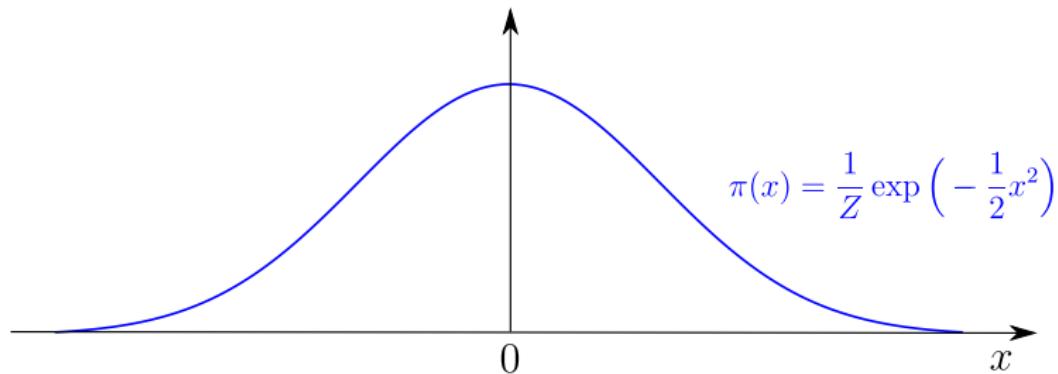
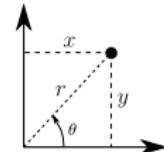
$$\begin{aligned} Z^2 &= \left(\int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right) dx \right)^2 = \left(\int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right) dx \right) \left(\int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{1}{2}y^2\right) dy \right) \\ &= \iint_{\mathbb{R}^2} \exp\left(-\frac{1}{2}(x^2 + y^2)\right) dx dy \end{aligned}$$



Quelques exemples de lois continues

$$Z = \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right) dx \quad \rightarrow \quad \text{Intégrale de Gauss}$$

$$\begin{aligned} Z^2 &= \left(\int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right) dx \right)^2 = \left(\int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right) dx \right) \left(\int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{1}{2}y^2\right) dy \right) \\ &= \iint_{\mathbb{R}^2} \exp\left(-\frac{1}{2}(x^2 + y^2)\right) dx dy = \iint_{\mathbb{R}^2} \exp\left(-\frac{1}{2}r^2\right) r dr d\theta \end{aligned}$$

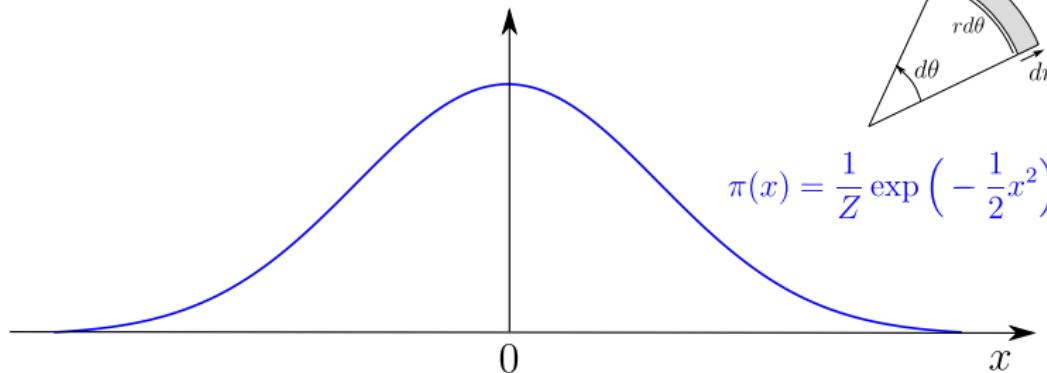
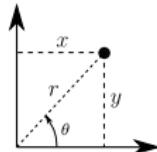


Quelques exemples de lois continues

$$Z = \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right) dx \quad \rightarrow \quad \text{Intégrale de Gauss}$$

$$Z^2 = \left(\int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right) dx \right)^2 = \left(\int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right) dx \right) \left(\int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{1}{2}y^2\right) dy \right)$$

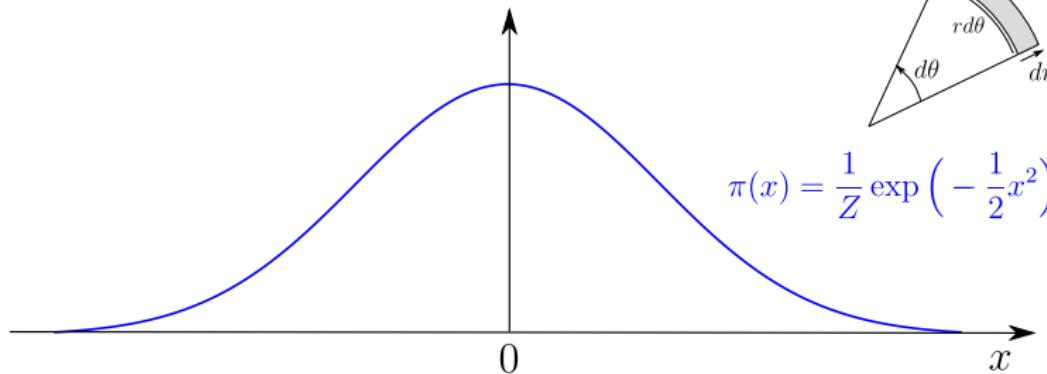
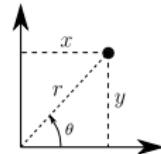
$$= \iint_{\mathbb{R}^2} \exp\left(-\frac{1}{2}(x^2 + y^2)\right) dx dy = \iint_{\mathbb{R}^2} \exp\left(-\frac{1}{2}r^2\right) r dr d\theta$$



Quelques exemples de lois continues

$$Z = \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right) dx \quad \rightarrow \quad \text{Intégrale de Gauss}$$

$$\begin{aligned} Z^2 &= \left(\int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right) dx \right)^2 = \left(\int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right) dx \right) \left(\int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{1}{2}y^2\right) dy \right) \\ &= \iint_{\mathbb{R}^2} \exp\left(-\frac{1}{2}(x^2 + y^2)\right) dx dy = \iint_{\mathbb{R}^2} \exp\left(-\frac{1}{2}r^2\right) r dr d\theta \\ &= \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{+\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}r^2\right) r dr d\theta \end{aligned}$$

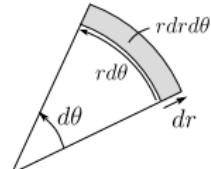
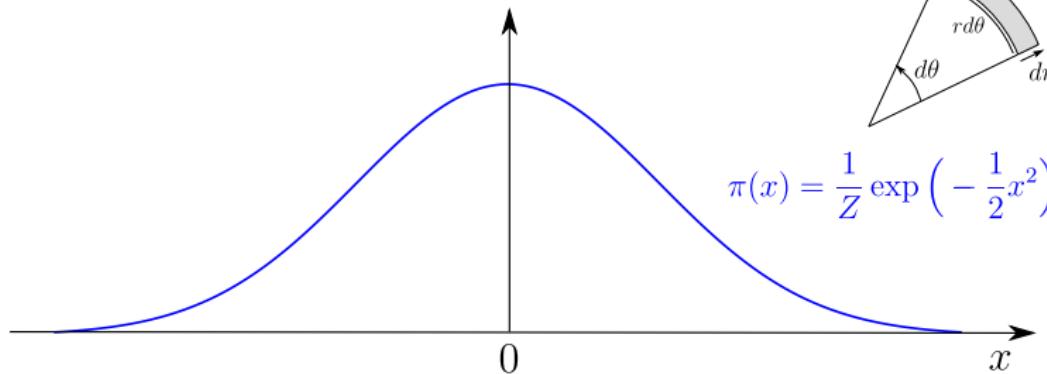
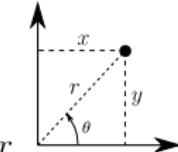


$$\pi(x) = \frac{1}{Z} \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right)$$

Quelques exemples de lois continues

$$Z = \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right) dx \quad \rightarrow \quad \text{Intégrale de Gauss}$$

$$\begin{aligned} Z^2 &= \left(\int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right) dx \right)^2 = \left(\int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right) dx \right) \left(\int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{1}{2}y^2\right) dy \right) \\ &= \iint_{\mathbb{R}^2} \exp\left(-\frac{1}{2}(x^2 + y^2)\right) dx dy = \iint_{\mathbb{R}^2} \exp\left(-\frac{1}{2}r^2\right) r dr d\theta \\ &= \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{+\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}r^2\right) r dr d\theta = 2\pi \int_{r=0}^{+\infty} r \exp\left(-\frac{1}{2}r^2\right) dr \end{aligned}$$



Quelques exemples de lois continues

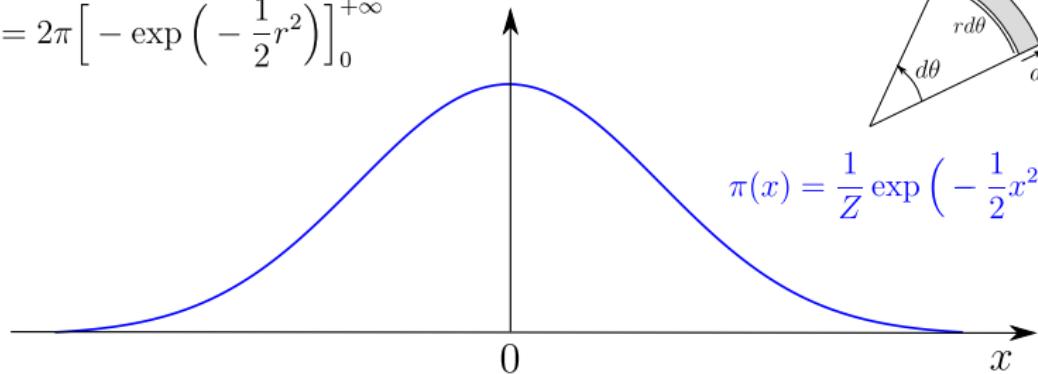
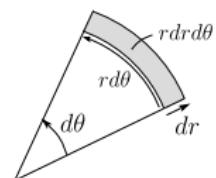
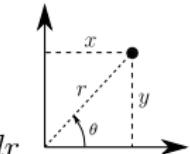
$$Z = \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right) dx \quad \rightarrow \quad \text{Intégrale de Gauss}$$

$$Z^2 = \left(\int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right) dx \right)^2 = \left(\int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right) dx \right) \left(\int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{1}{2}y^2\right) dy \right)$$

$$= \iint_{\mathbb{R}^2} \exp\left(-\frac{1}{2}(x^2 + y^2)\right) dx dy = \iint_{\mathbb{R}^2} \exp\left(-\frac{1}{2}r^2\right) r dr d\theta$$

$$= \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{+\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}r^2\right) r dr d\theta = 2\pi \int_{r=0}^{+\infty} r \exp\left(-\frac{1}{2}r^2\right) dr$$

$$= 2\pi \left[-\exp\left(-\frac{1}{2}r^2\right) \right]_0^{+\infty}$$



$$\pi(x) = \frac{1}{Z} \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right)$$

Quelques exemples de lois continues

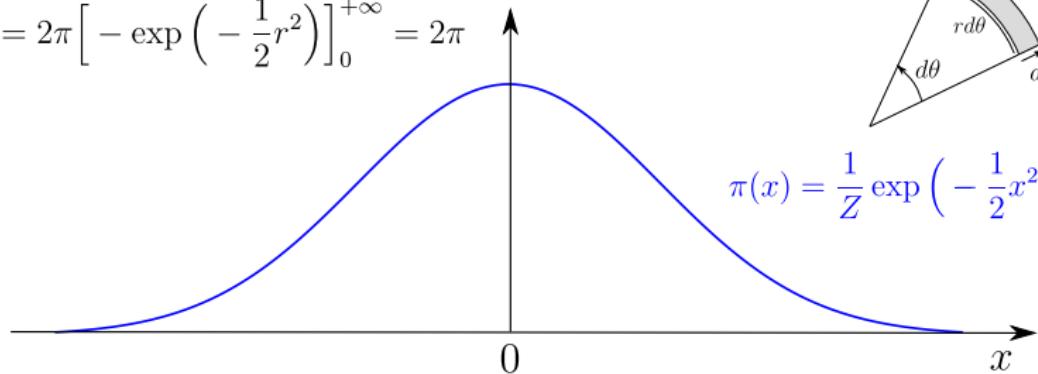
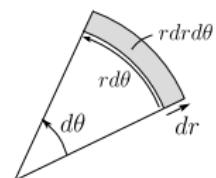
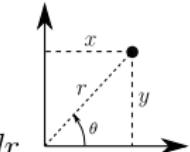
$$Z = \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right) dx \quad \rightarrow \quad \text{Intégrale de Gauss}$$

$$Z^2 = \left(\int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right) dx \right)^2 = \left(\int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right) dx \right) \left(\int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{1}{2}y^2\right) dy \right)$$

$$= \iint_{\mathbb{R}^2} \exp\left(-\frac{1}{2}(x^2 + y^2)\right) dx dy = \iint_{\mathbb{R}^2} \exp\left(-\frac{1}{2}r^2\right) r dr d\theta$$

$$= \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{+\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}r^2\right) r dr d\theta = 2\pi \int_{r=0}^{+\infty} r \exp\left(-\frac{1}{2}r^2\right) dr$$

$$= 2\pi \left[-\exp\left(-\frac{1}{2}r^2\right) \right]_0^{+\infty} = 2\pi$$



$$\pi(x) = \frac{1}{Z} \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right)$$

Quelques exemples de lois continues

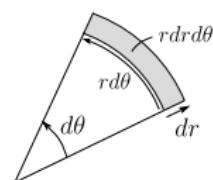
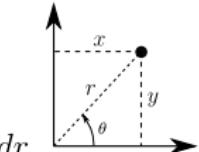
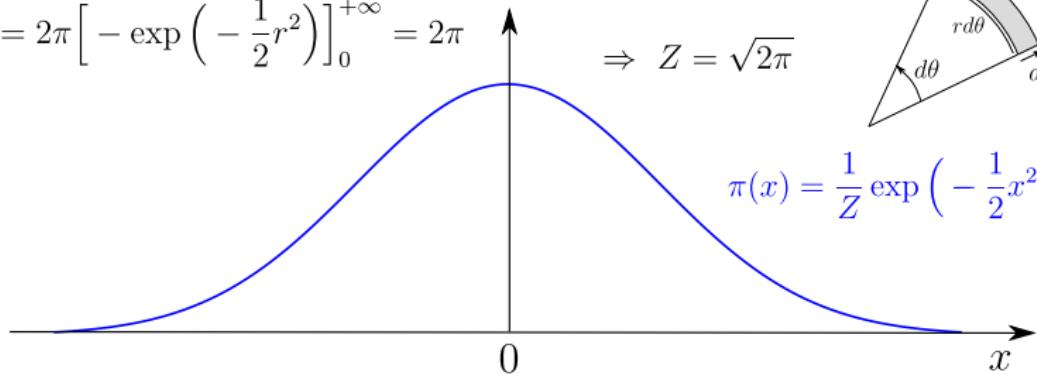
$$Z = \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right) dx \quad \rightarrow \quad \text{Intégrale de Gauss}$$

$$Z^2 = \left(\int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right) dx \right)^2 = \left(\int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right) dx \right) \left(\int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{1}{2}y^2\right) dy \right)$$

$$= \iint_{\mathbb{R}^2} \exp\left(-\frac{1}{2}(x^2 + y^2)\right) dx dy = \iint_{\mathbb{R}^2} \exp\left(-\frac{1}{2}r^2\right) r dr d\theta$$

$$= \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{+\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}r^2\right) r dr d\theta = 2\pi \int_{r=0}^{+\infty} r \exp\left(-\frac{1}{2}r^2\right) dr$$

$$= 2\pi \left[-\exp\left(-\frac{1}{2}r^2\right) \right]_0^{+\infty} = 2\pi \Rightarrow Z = \sqrt{2\pi}$$



$$\pi(x) = \frac{1}{Z} \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right)$$

Quelques exemples de lois continues

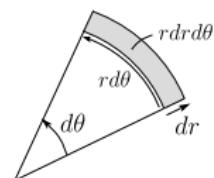
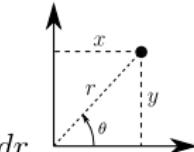
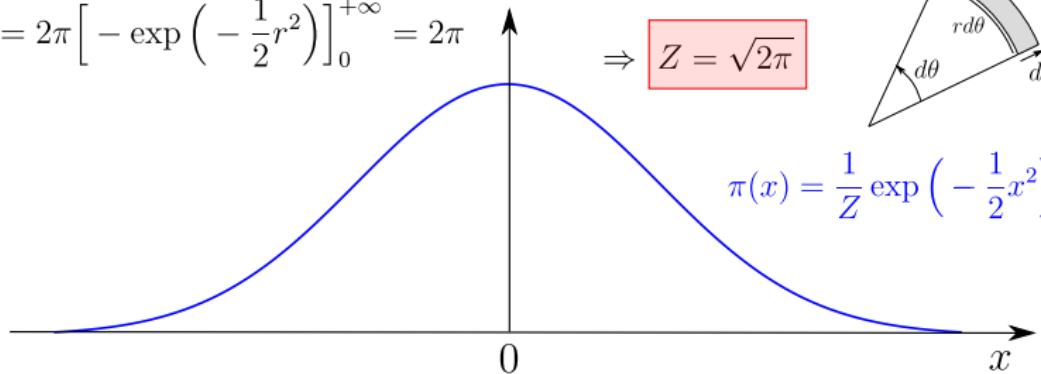
$$Z = \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right) dx \rightarrow \text{Intégrale de Gauss}$$

$$Z^2 = \left(\int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right) dx \right)^2 = \left(\int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right) dx \right) \left(\int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{1}{2}y^2\right) dy \right)$$

$$= \iint_{\mathbb{R}^2} \exp\left(-\frac{1}{2}(x^2 + y^2)\right) dx dy = \iint_{\mathbb{R}^2} \exp\left(-\frac{1}{2}r^2\right) r dr d\theta$$

$$= \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{+\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}r^2\right) r dr d\theta = 2\pi \int_{r=0}^{+\infty} r \exp\left(-\frac{1}{2}r^2\right) dr$$

$$= 2\pi \left[-\exp\left(-\frac{1}{2}r^2\right) \right]_0^{+\infty} = 2\pi \Rightarrow Z = \sqrt{2\pi}$$



$$\pi(x) = \frac{1}{Z} \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right)$$

Quelques exemples de lois continues

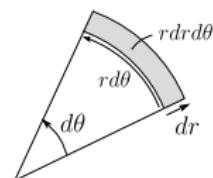
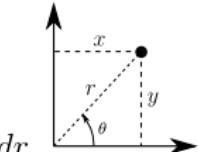
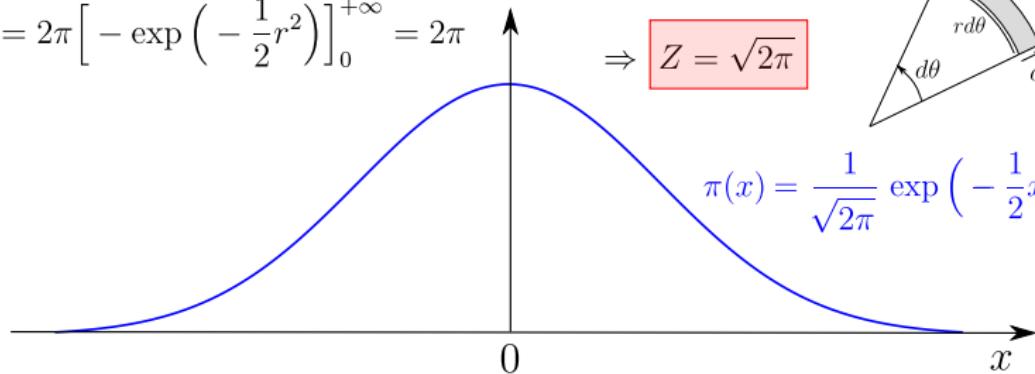
$$Z = \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right) dx \rightarrow \text{Intégrale de Gauss}$$

$$Z^2 = \left(\int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right) dx \right)^2 = \left(\int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right) dx \right) \left(\int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{1}{2}y^2\right) dy \right)$$

$$= \iint_{\mathbb{R}^2} \exp\left(-\frac{1}{2}(x^2 + y^2)\right) dx dy = \iint_{\mathbb{R}^2} \exp\left(-\frac{1}{2}r^2\right) r dr d\theta$$

$$= \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{+\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}r^2\right) r dr d\theta = 2\pi \int_{r=0}^{+\infty} r \exp\left(-\frac{1}{2}r^2\right) dr$$

$$= 2\pi \left[-\exp\left(-\frac{1}{2}r^2\right) \right]_0^{+\infty} = 2\pi \Rightarrow Z = \sqrt{2\pi}$$

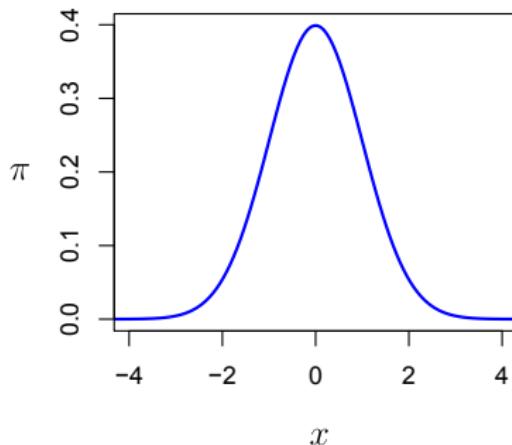


$$\pi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right)$$

Quelques exemples de lois continues

Loi normale (standard)

$$X \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

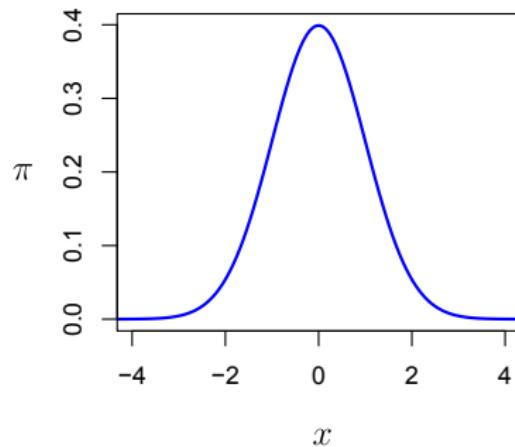
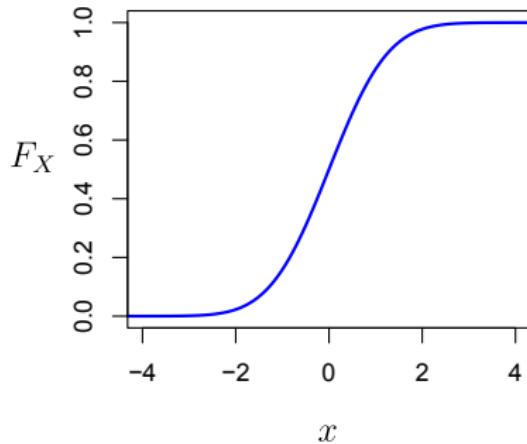


$$\pi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$$

Quelques exemples de lois continues

Loi normale (standard)

$$X \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

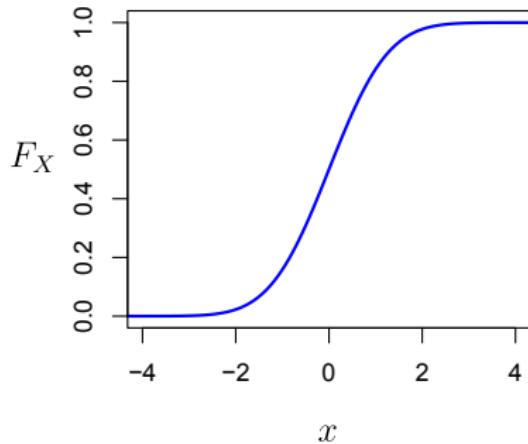


$$\pi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$$

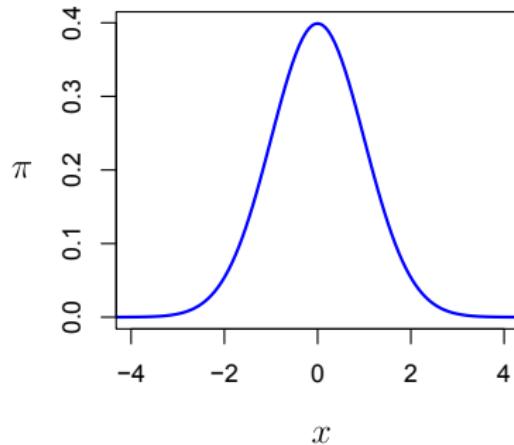
Quelques exemples de lois continues

Loi normale (standard)

$$X \sim \mathcal{N}(0, 1)$$



$$F_X(x) = \textcolor{red}{?}$$

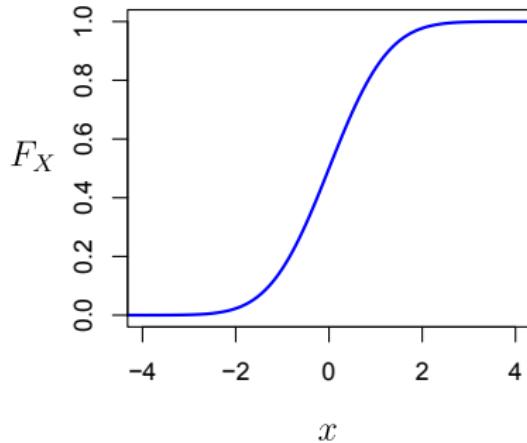


$$\pi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$$

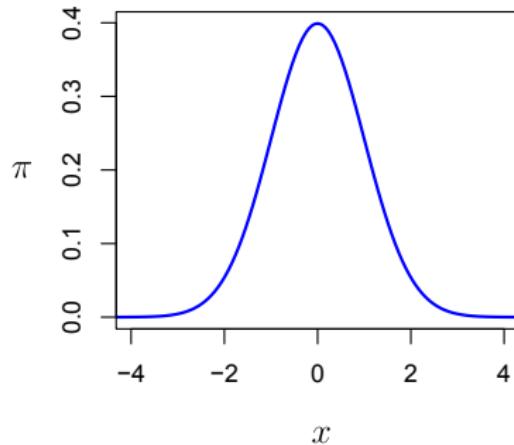
Quelques exemples de lois continues

Loi normale (standard)

$$X \sim \mathcal{N}(0, 1)$$



$$F_X(x) = \text{erf}(x)$$

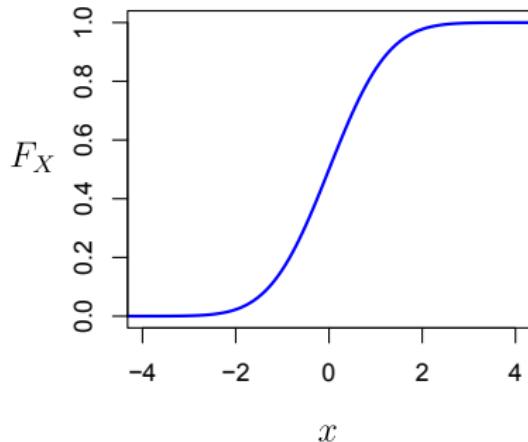


$$\pi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$$

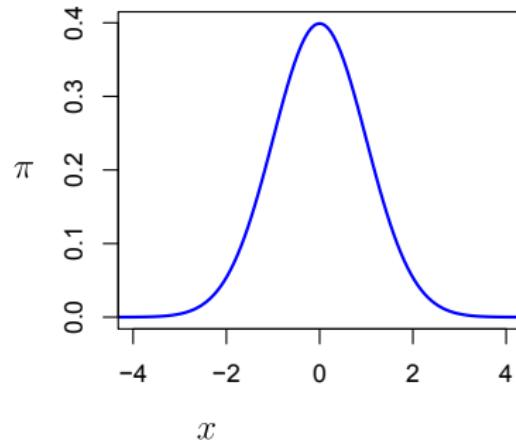
Quelques exemples de lois continues

Loi normale (standard)

$$X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$$



$$F_X(x) = \text{erf}(x, m, \sigma^2)$$

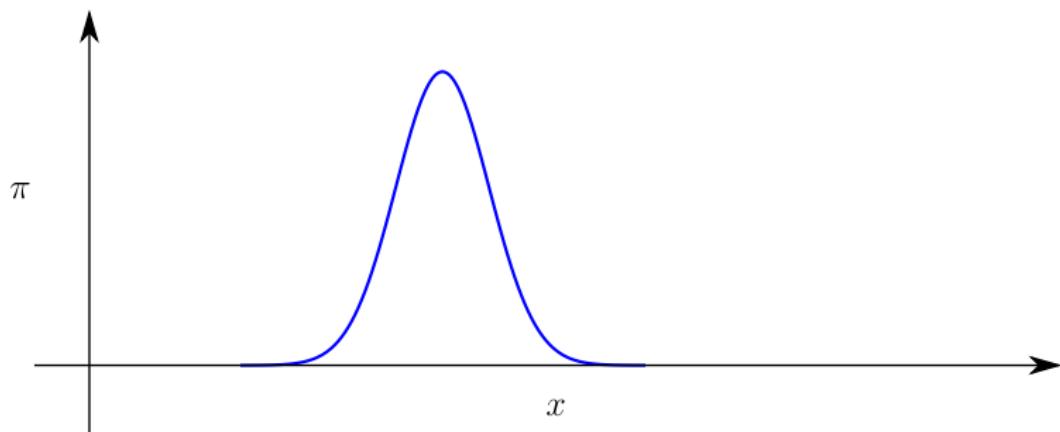


$$\pi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right)$$

Quelques exemples de lois continues

Loi normale (standard)

$$X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$$

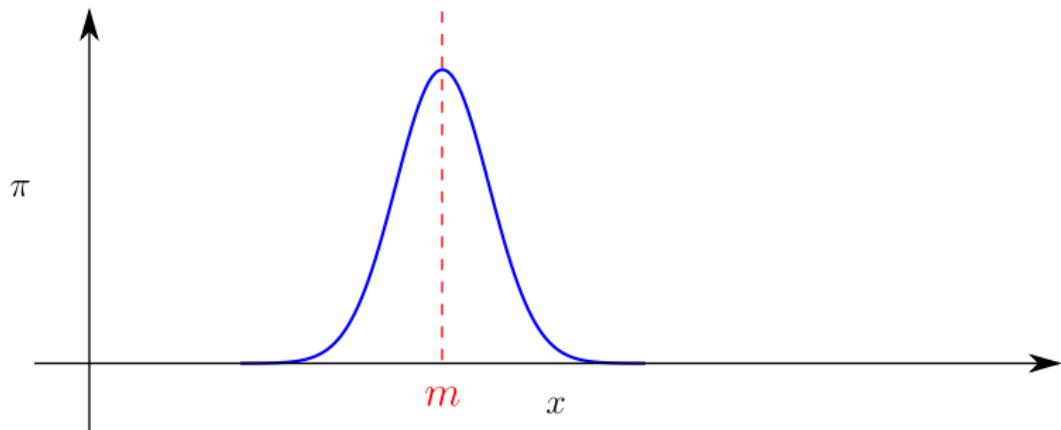


$$F_X(x) = \text{erf}\left(\frac{x-m}{\sigma\sqrt{2}}\right) \quad \pi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right)$$

Quelques exemples de lois continues

Loi normale (standard)

$$X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$$

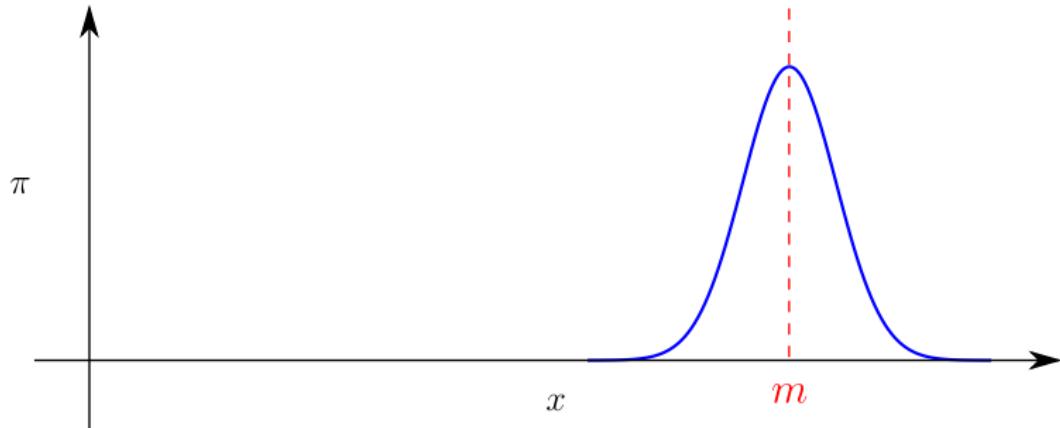


$$F_X(x) = \text{erf}\left(\frac{x-m}{\sigma\sqrt{2}}\right) \quad \pi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right)$$

Quelques exemples de lois continues

Loi normale (standard)

$$X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$$

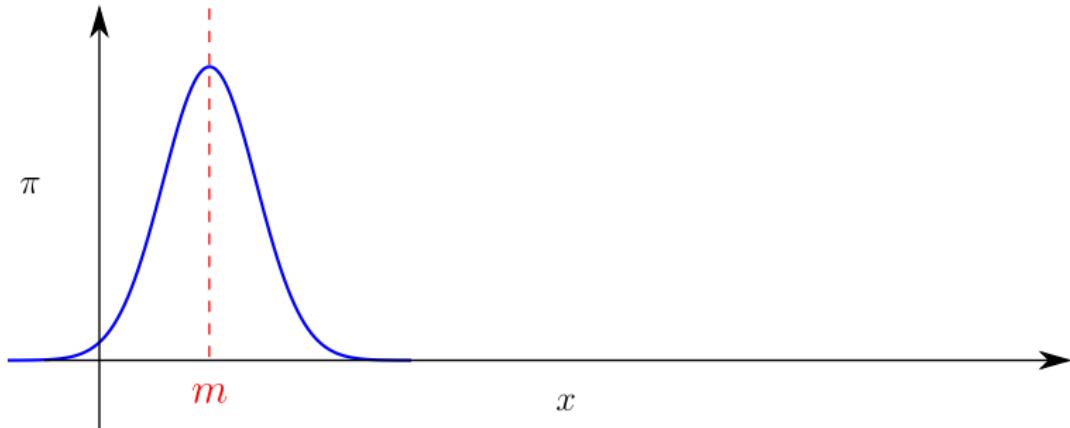


$$F_X(x) = \text{erf}(x, m, \sigma^2) \quad \pi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x - m)^2}{2\sigma^2}\right)$$

Quelques exemples de lois continues

Loi normale (standard)

$$X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$$

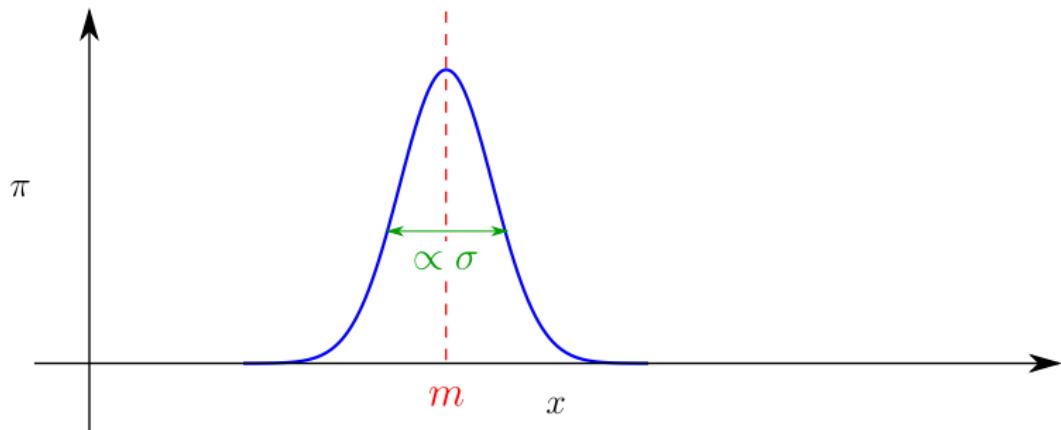


$$F_X(x) = \text{erf}\left(\frac{x-m}{\sigma\sqrt{2}}\right) \quad \pi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right)$$

Quelques exemples de lois continues

Loi normale (standard)

$$X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$$



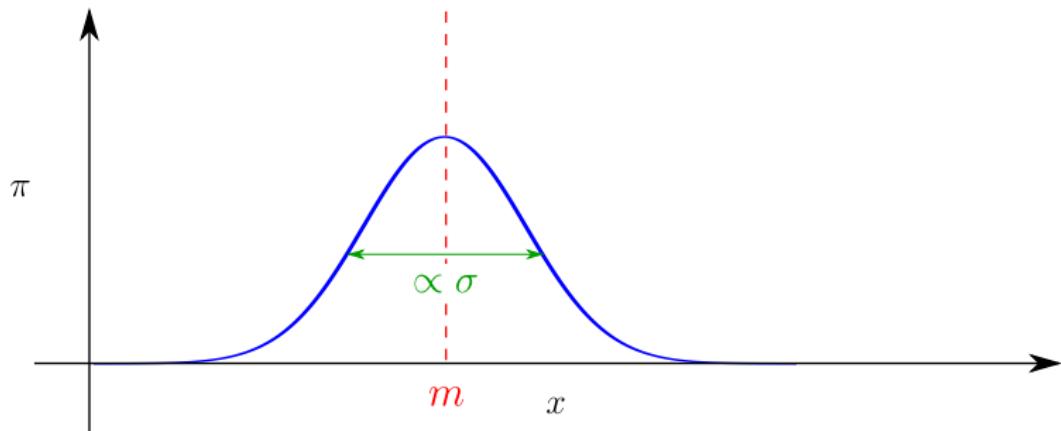
$$F_X(x) = \text{erf}(x, m, \sigma^2)$$

$$\pi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x - m)^2}{2\sigma^2}\right)$$

Quelques exemples de lois continues

Loi normale (standard)

$$X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$$

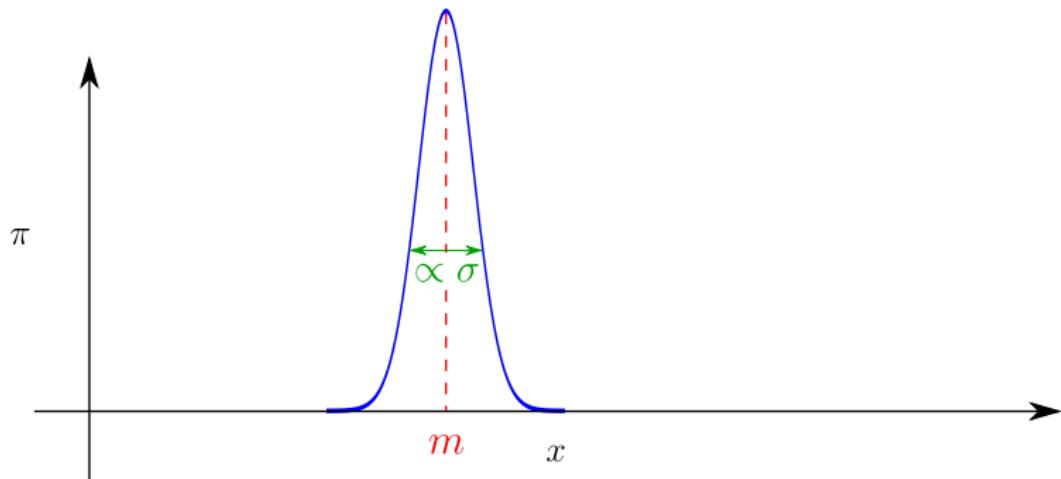


$$F_X(x) = \text{erf}\left(\frac{x-m}{\sigma\sqrt{2}}\right) \quad \pi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right)$$

Quelques exemples de lois continues

Loi normale (standard)

$$X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$$

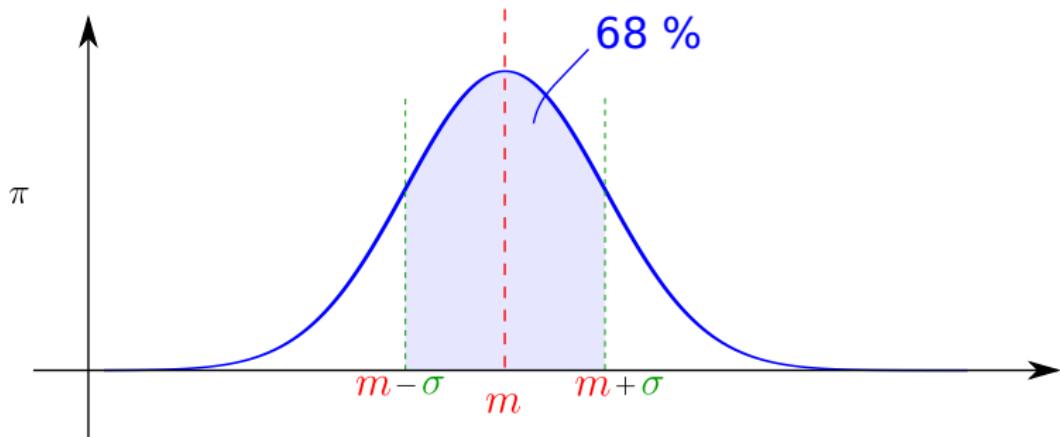


$$F_X(x) = \text{erf}\left(\frac{x-m}{\sigma\sqrt{2}}\right) \quad \pi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right)$$

Quelques exemples de lois continues

Loi normale (standard)

$$X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$$

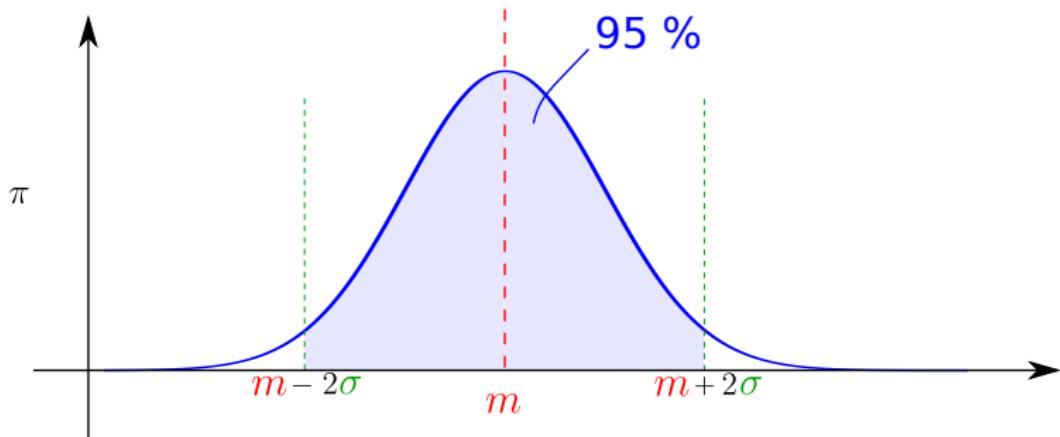


$$F_X(x) = \text{erf}\left(\frac{x-m}{\sigma\sqrt{2}}\right) \quad \pi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right)$$

Quelques exemples de lois continues

Loi normale (standard)

$$X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$$



$$F_X(x) = \text{erf}\left(\frac{x - m}{\sigma\sqrt{2}}\right)$$

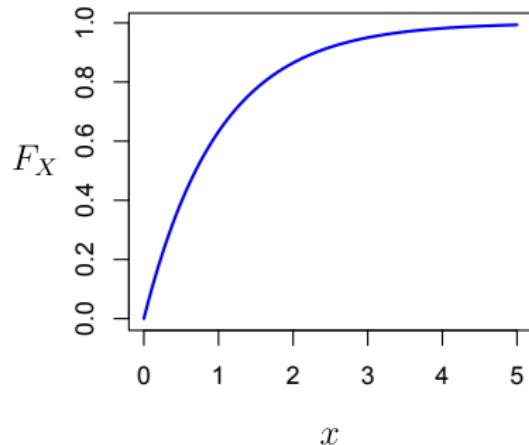
$$\pi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x - m)^2}{2\sigma^2}\right)$$

Quelques exemples de lois continues

Loi exponentielle

$$\lambda \in \mathbb{R}_+$$

$$X \sim \mathcal{E}(\lambda)$$



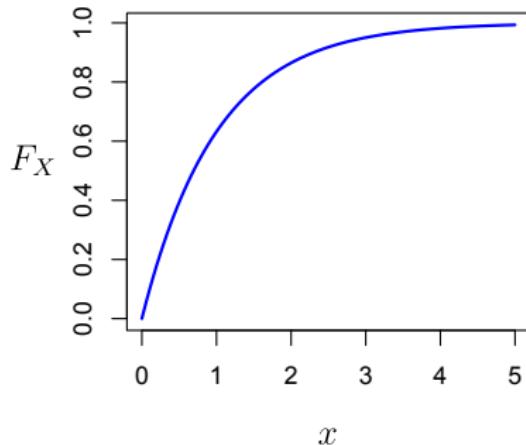
$$F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x}$$

Quelques exemples de lois continues

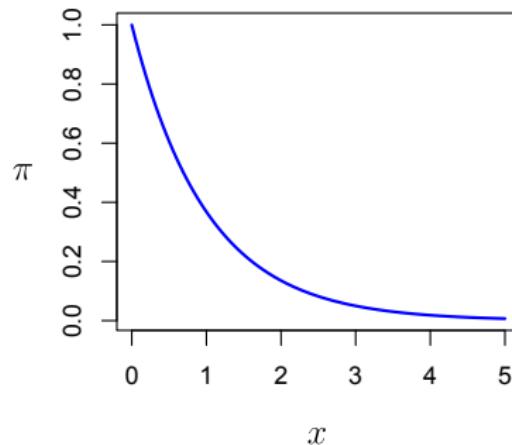
Loi exponentielle

$\lambda \in \mathbb{R}_+$

$X \sim \mathcal{E}(\lambda)$



$$F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x}$$



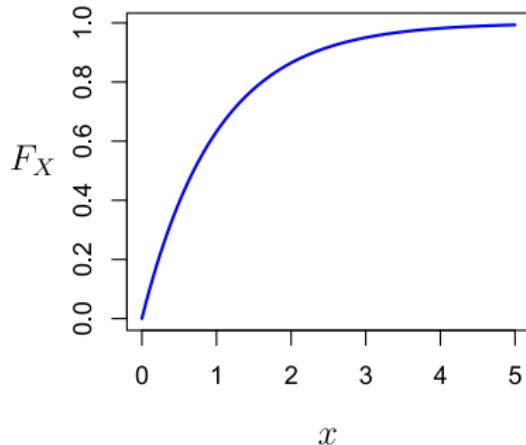
$$\pi(x) = \lambda e^{-\lambda x}$$

Quelques exemples de lois continues

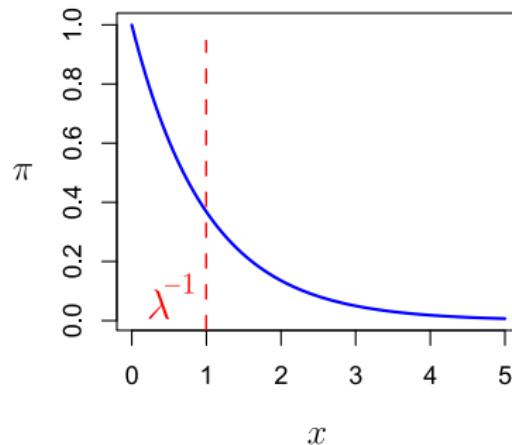
Loi exponentielle

$\lambda \in \mathbb{R}_+$

$X \sim \mathcal{E}(\lambda)$



$$F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x}$$



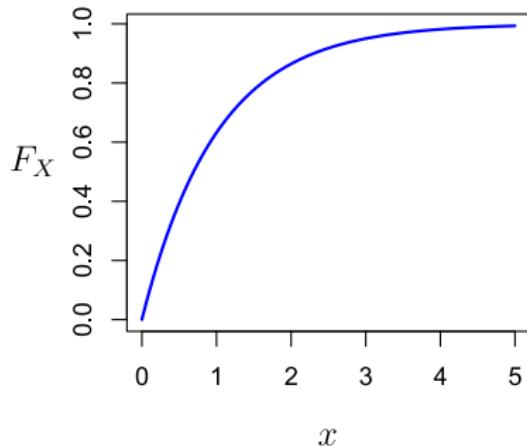
$$\pi(x) = \lambda e^{-\lambda x}$$

Quelques exemples de lois continues

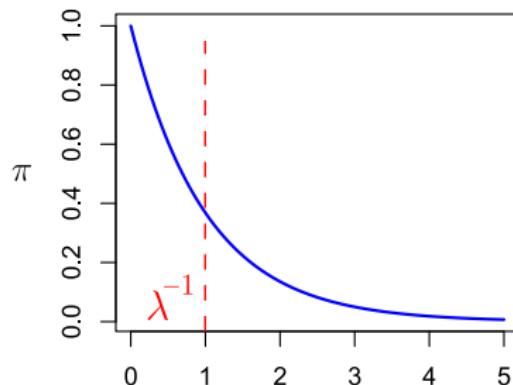
Loi exponentielle

$\lambda \in \mathbb{R}_+$

$X \sim \mathcal{E}(\lambda)$



$$\mathbb{P}(\Omega)$$

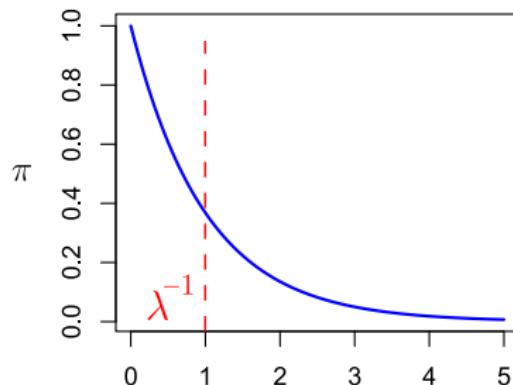
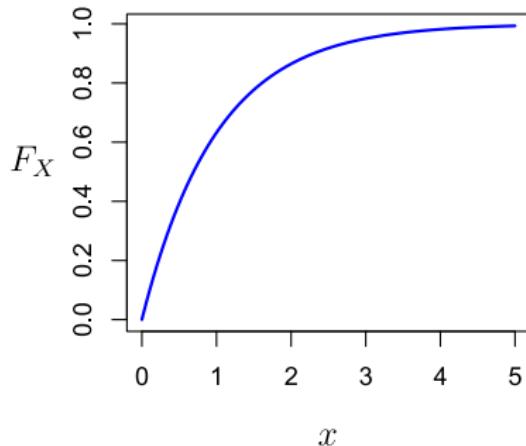


Quelques exemples de lois continues

Loi exponentielle

$$\lambda \in \mathbb{R}_+$$

$$X \sim \mathcal{E}(\lambda)$$



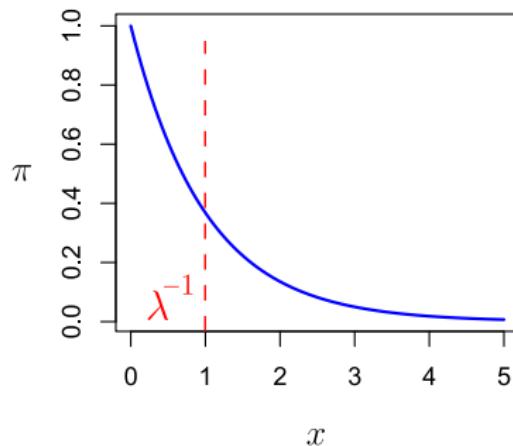
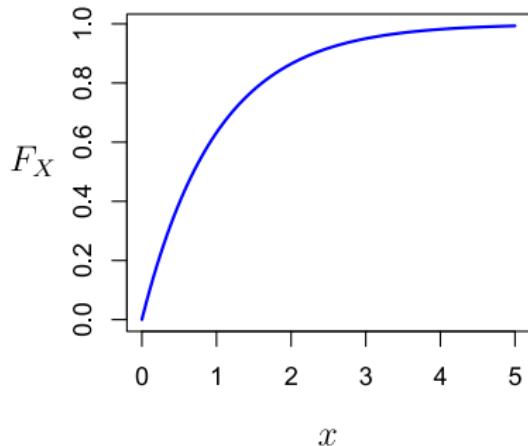
$$\mathbb{P}(\Omega) = \int_{\mathbb{R}} \pi(x) dx$$

Quelques exemples de lois continues

Loi exponentielle

$\lambda \in \mathbb{R}_+$

$X \sim \mathcal{E}(\lambda)$



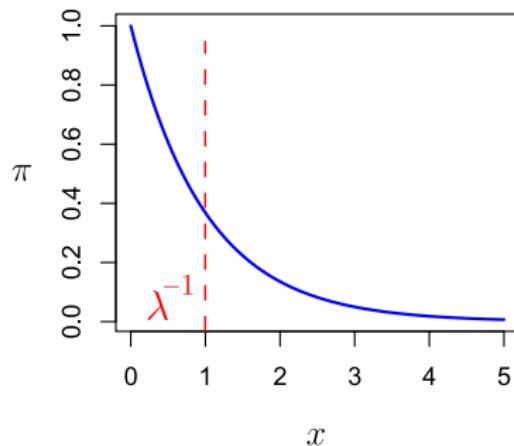
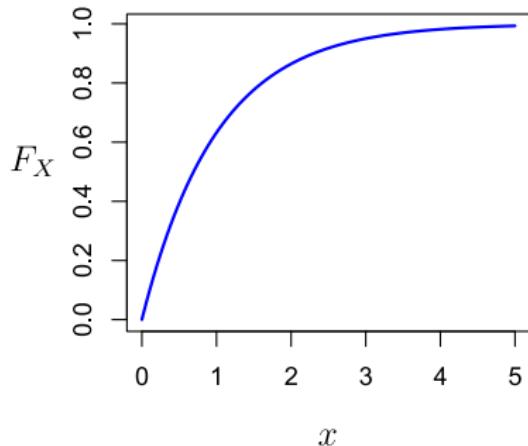
$$\mathbb{P}(\Omega) = \int_{\mathbb{R}} \pi(x) dx = \int_{\mathbb{R}_+} \lambda e^{-\lambda x} dx$$

Quelques exemples de lois continues

Loi exponentielle

$\lambda \in \mathbb{R}_+$

$X \sim \mathcal{E}(\lambda)$



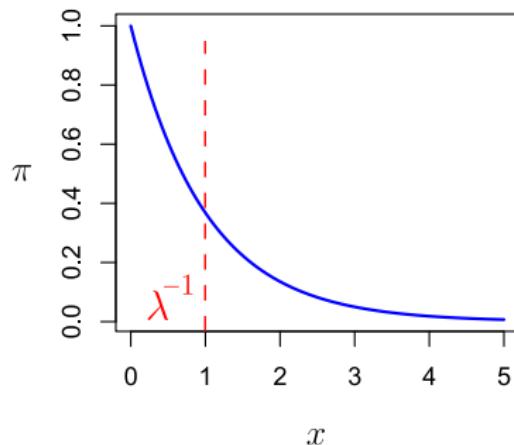
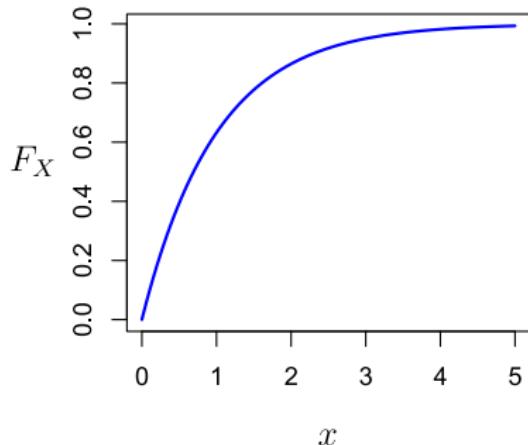
$$\mathbb{P}(\Omega) = \int_{\mathbb{R}} \pi(x) dx = \int_{\mathbb{R}_+} \lambda e^{-\lambda x} dx = [-e^{-\lambda x}]_0^{+\infty}$$

Quelques exemples de lois continues

Loi exponentielle

$\lambda \in \mathbb{R}_+$

$X \sim \mathcal{E}(\lambda)$



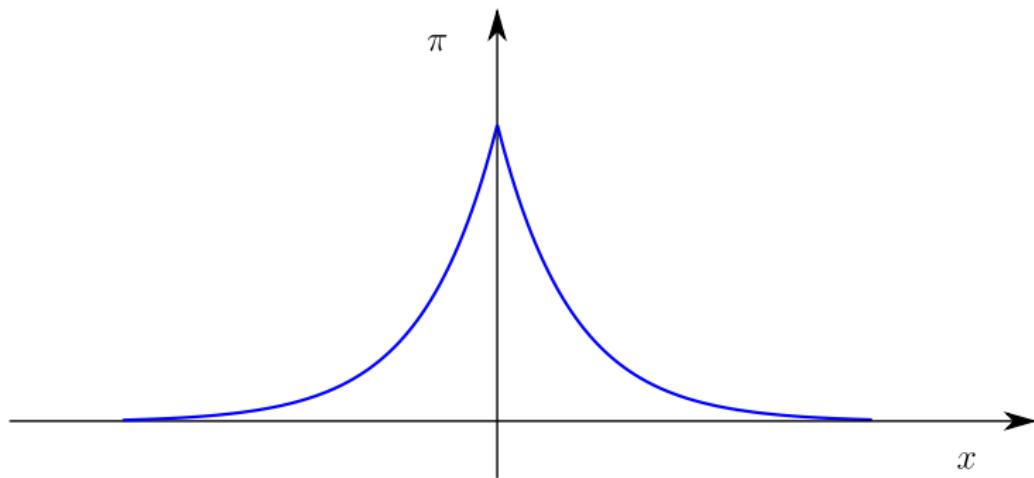
$$\mathbb{P}(\Omega) = \int_{\mathbb{R}} \pi(x) dx = \int_{\mathbb{R}_+} \lambda e^{-\lambda x} dx = \left[-e^{-\lambda x} \right]_0^{+\infty} = 1$$

Quelques exemples de lois continues

Loi de Laplace

$$\lambda \in \mathbb{R}_+$$

$$X \sim \mathcal{L}(\lambda)$$



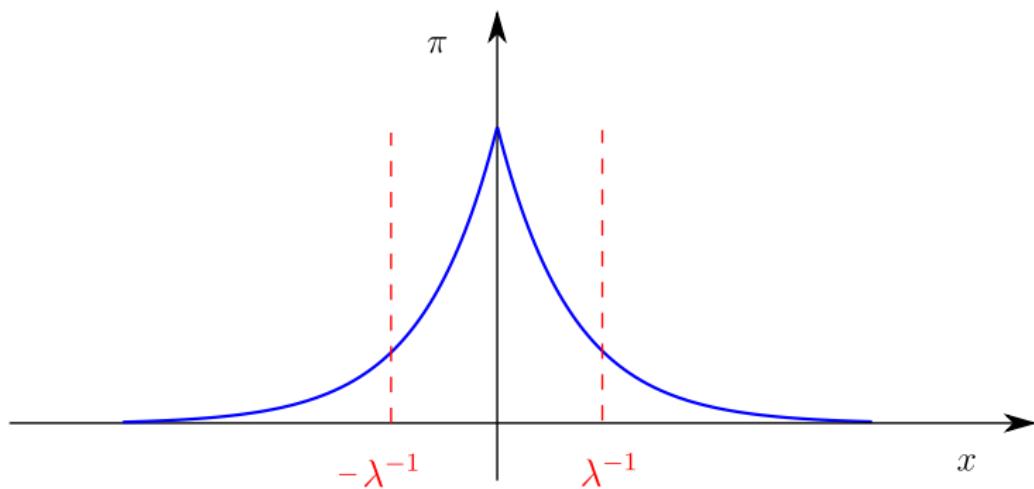
$$\pi(x) = \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|x|}$$

Quelques exemples de lois continues

Loi de Laplace

$$\lambda \in \mathbb{R}_+$$

$$X \sim \mathcal{L}(\lambda)$$



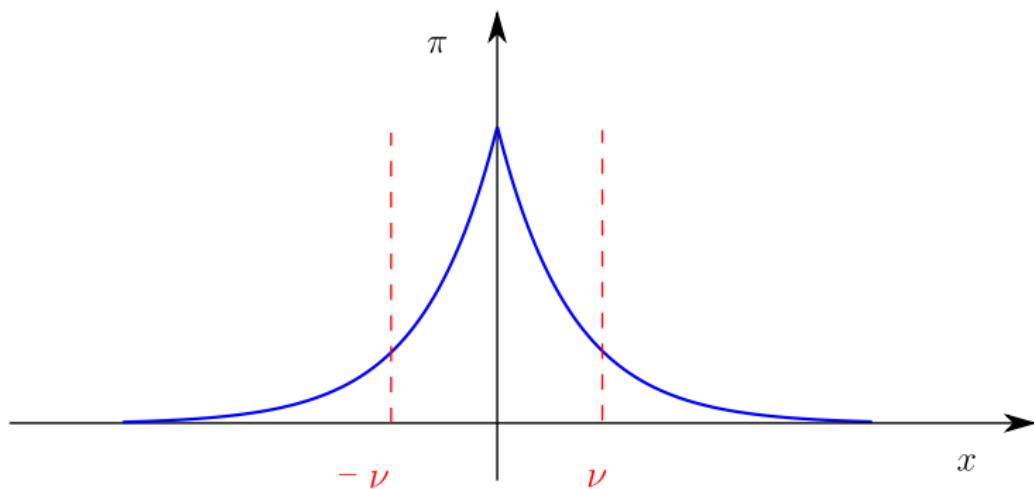
$$\pi(x) = \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|x|}$$

Quelques exemples de lois continues

Loi de Laplace

$$\lambda \in \mathbb{R}_+$$

$$X \sim \mathcal{L}(\lambda)$$



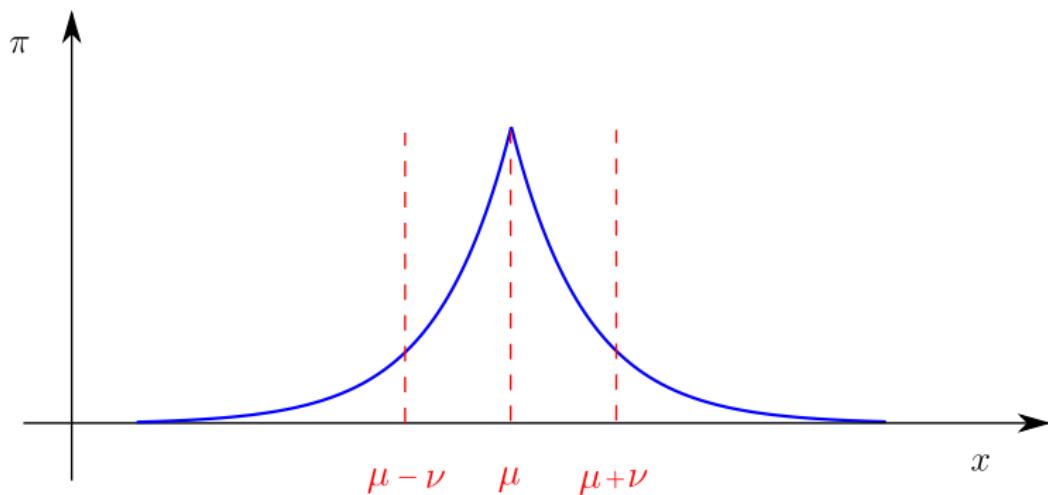
$$\pi(x) = \frac{1}{2\nu} e^{-\frac{|x|}{\nu}}$$

Quelques exemples de lois continues

Loi de Laplace

$$\lambda \in \mathbb{R}_+$$

$$X \sim \mathcal{L}(\lambda)$$



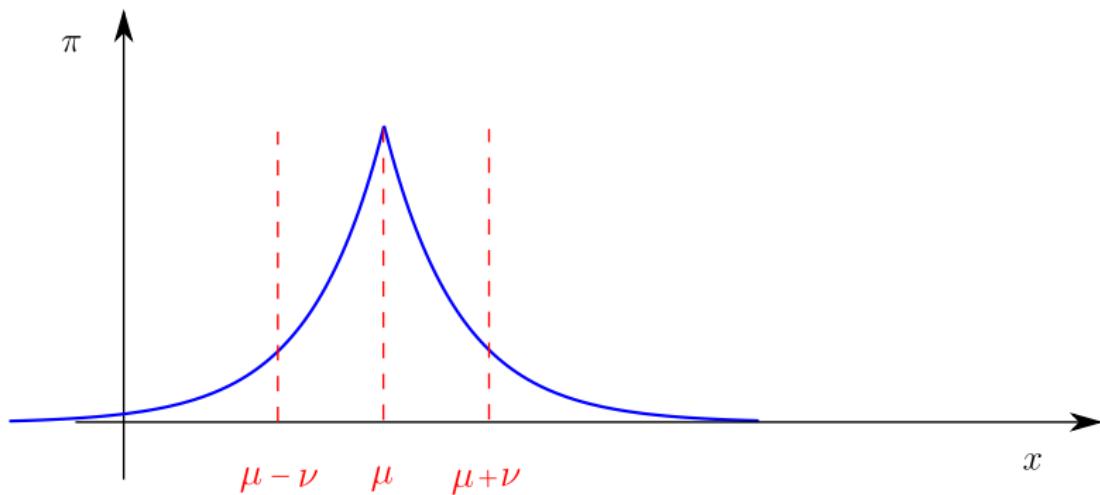
$$\pi(x) = \frac{1}{2\nu} \exp\left(-\frac{|x - \mu|}{\nu}\right)$$

Quelques exemples de lois continues

Loi de Laplace

$$\lambda \in \mathbb{R}_+$$

$$X \sim \mathcal{L}(\lambda)$$



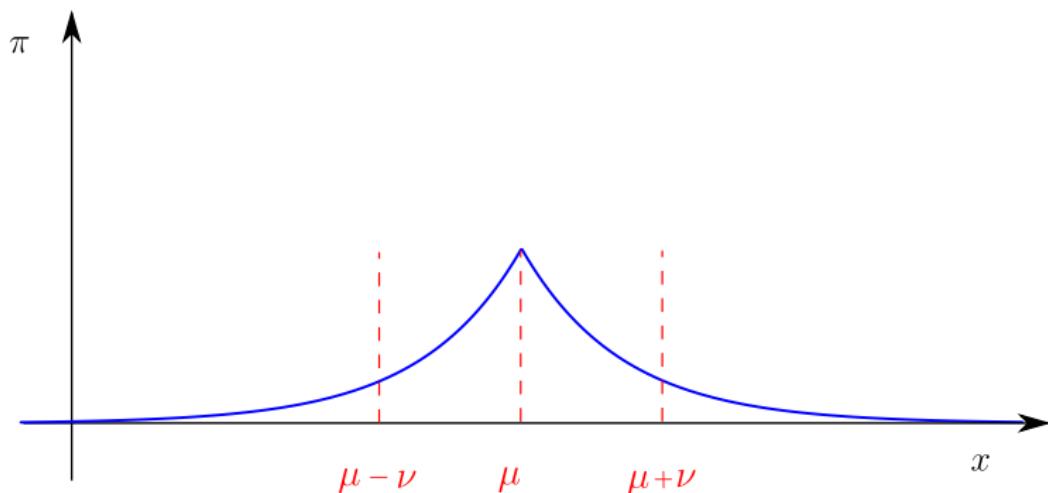
$$\pi(x) = \frac{1}{2\nu} \exp\left(-\frac{|x - \mu|}{\nu}\right)$$

Quelques exemples de lois continues

Loi de Laplace

$$\lambda \in \mathbb{R}_+$$

$$X \sim \mathcal{L}(\lambda)$$



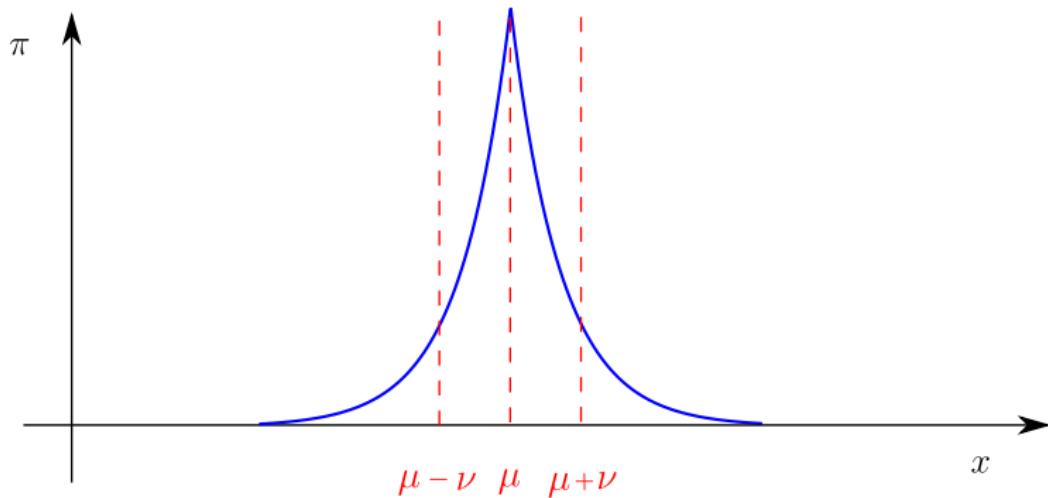
$$\pi(x) = \frac{1}{2\nu} \exp\left(-\frac{|x - \mu|}{\nu}\right)$$

Quelques exemples de lois continues

Loi de Laplace

$$\lambda \in \mathbb{R}_+$$

$$X \sim \mathcal{L}(\lambda)$$



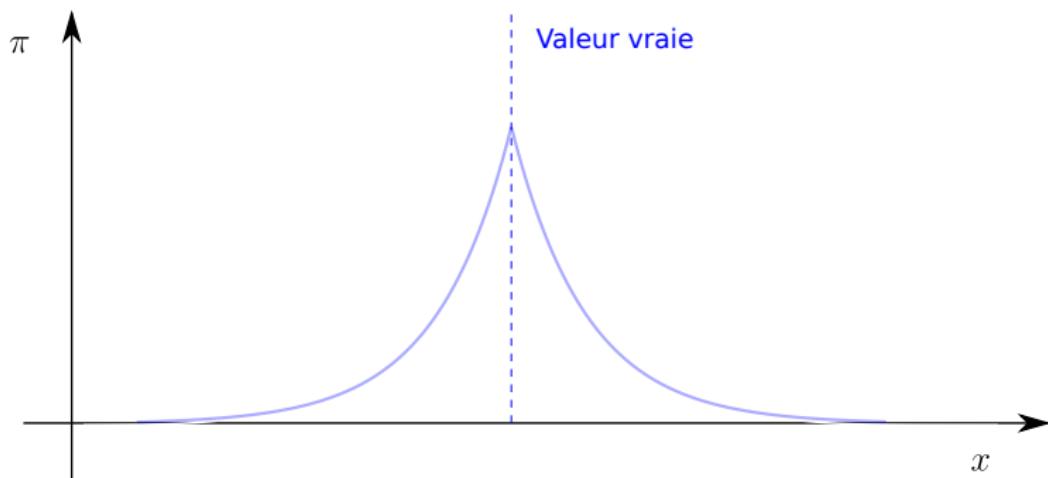
$$\pi(x) = \frac{1}{2\nu} \exp\left(-\frac{|x - \mu|}{\nu}\right)$$

Quelques exemples de lois continues

Loi de Laplace

$$\lambda \in \mathbb{R}_+$$

$$X \sim \mathcal{L}(\lambda)$$

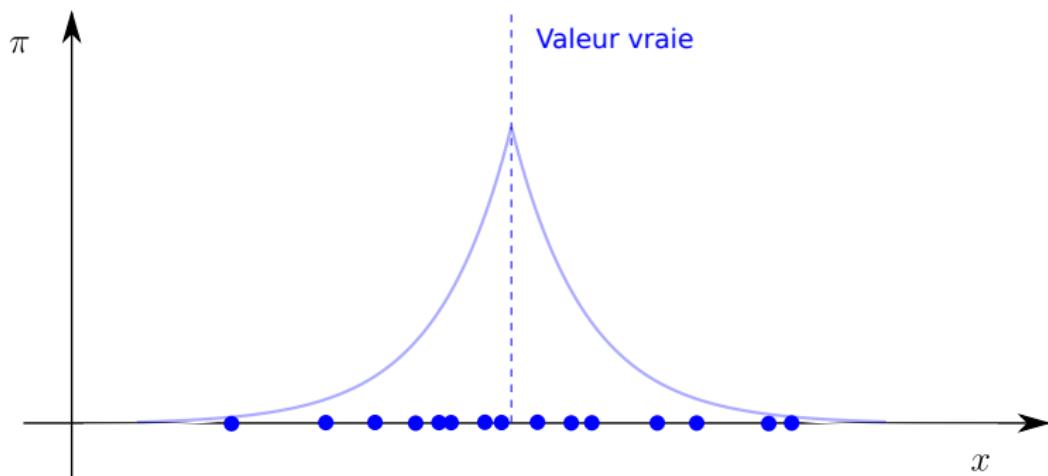


Quelques exemples de lois continues

Loi de Laplace

$$\lambda \in \mathbb{R}_+$$

$$X \sim \mathcal{L}(\lambda)$$

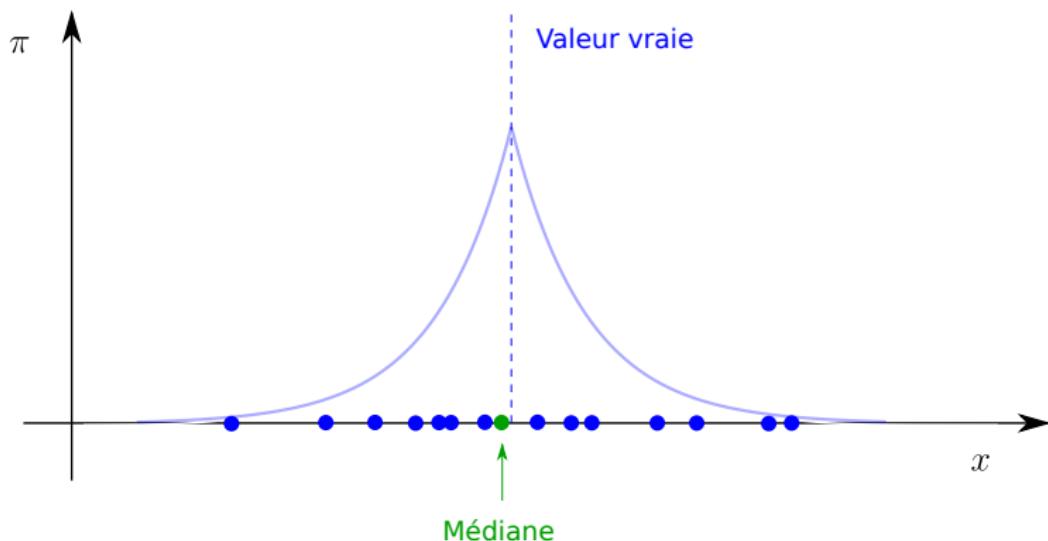


Quelques exemples de lois continues

Loi de Laplace

$$\lambda \in \mathbb{R}_+$$

$$X \sim \mathcal{L}(\lambda)$$

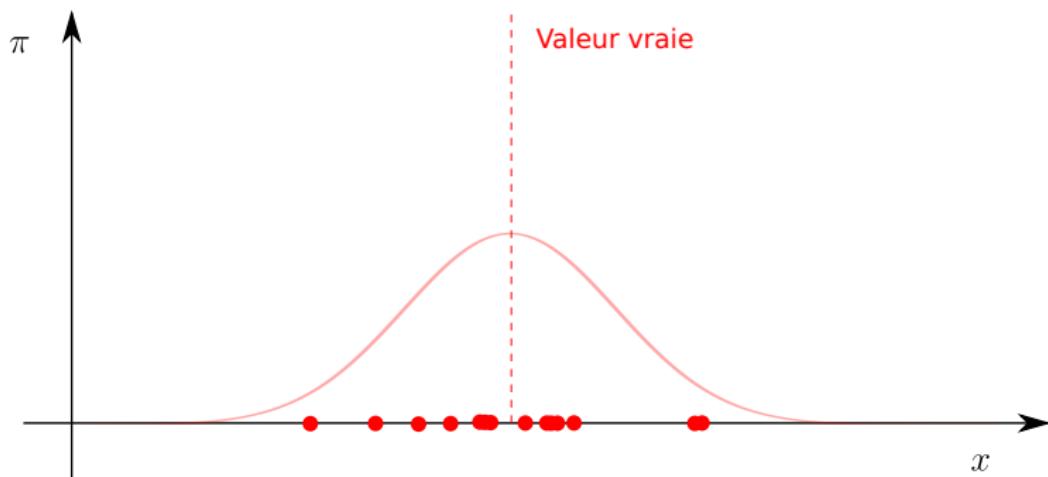


Quelques exemples de lois continues

Loi de Laplace

$$\lambda \in \mathbb{R}_+$$

$$X \sim \mathcal{L}(\lambda)$$

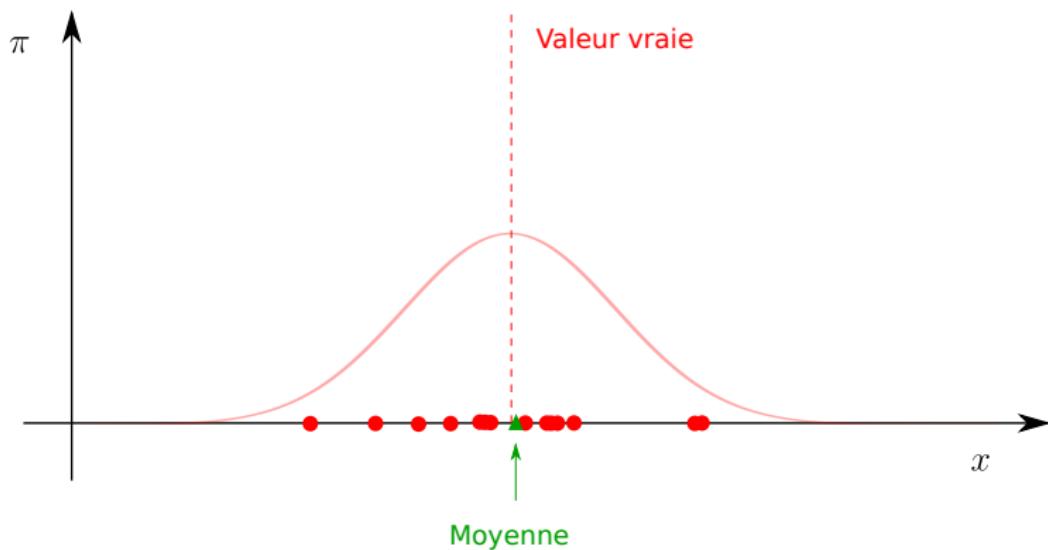


Quelques exemples de lois continues

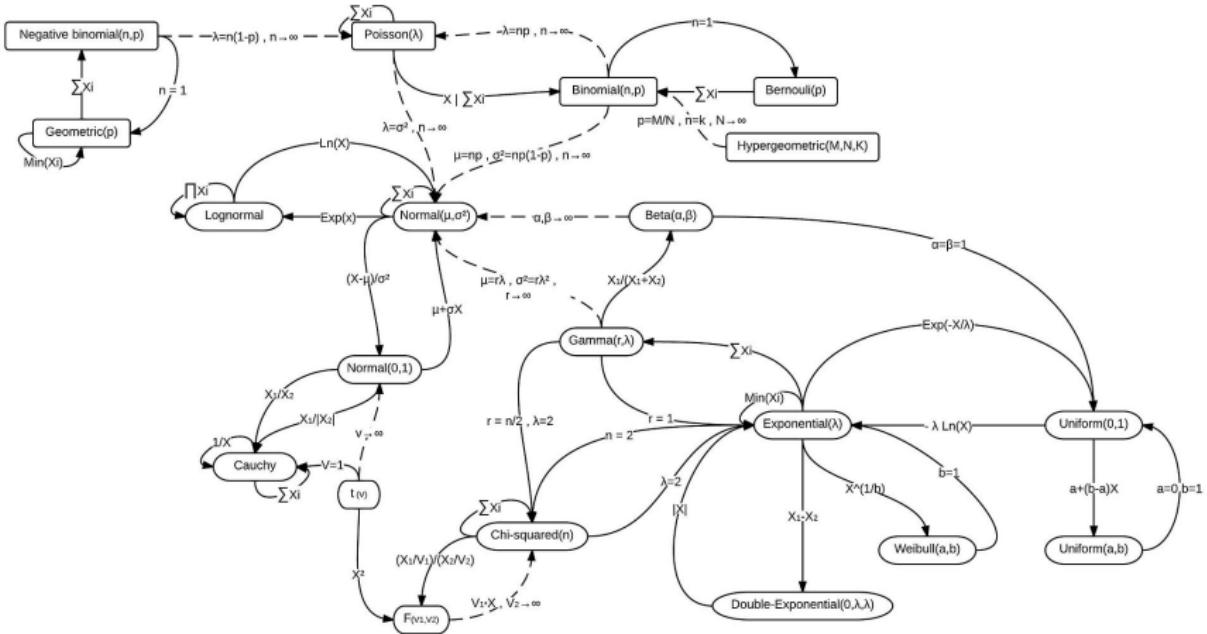
Loi de Laplace

$$\lambda \in \mathbb{R}_+$$

$$X \sim \mathcal{L}(\lambda)$$

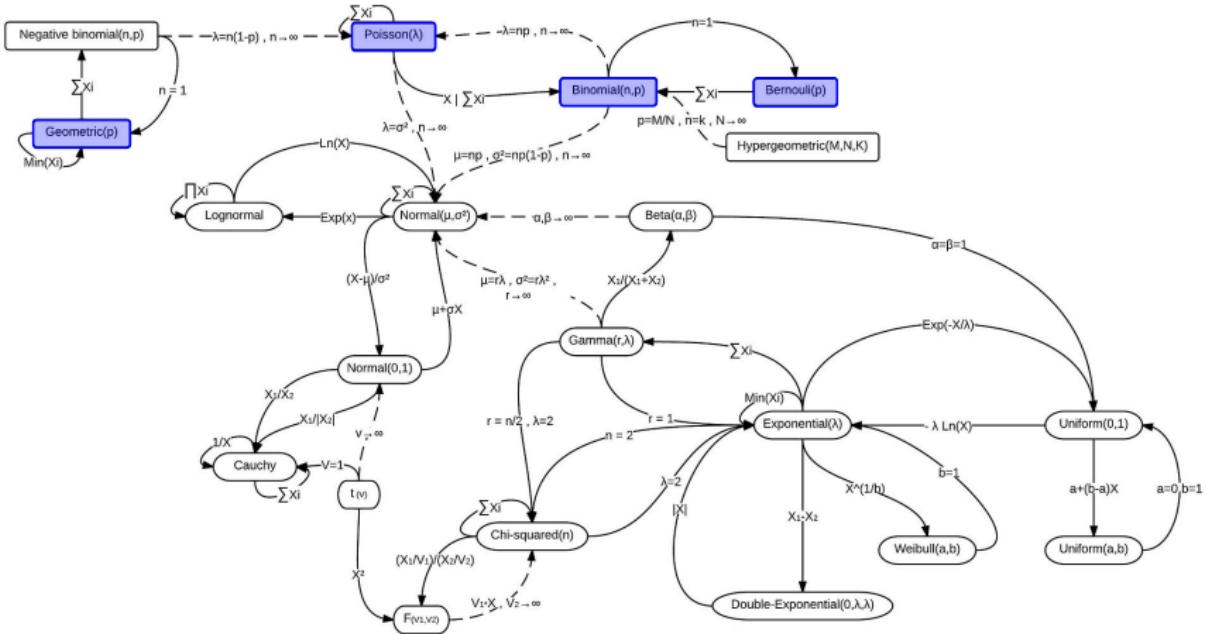


Et bien d'autres encore...



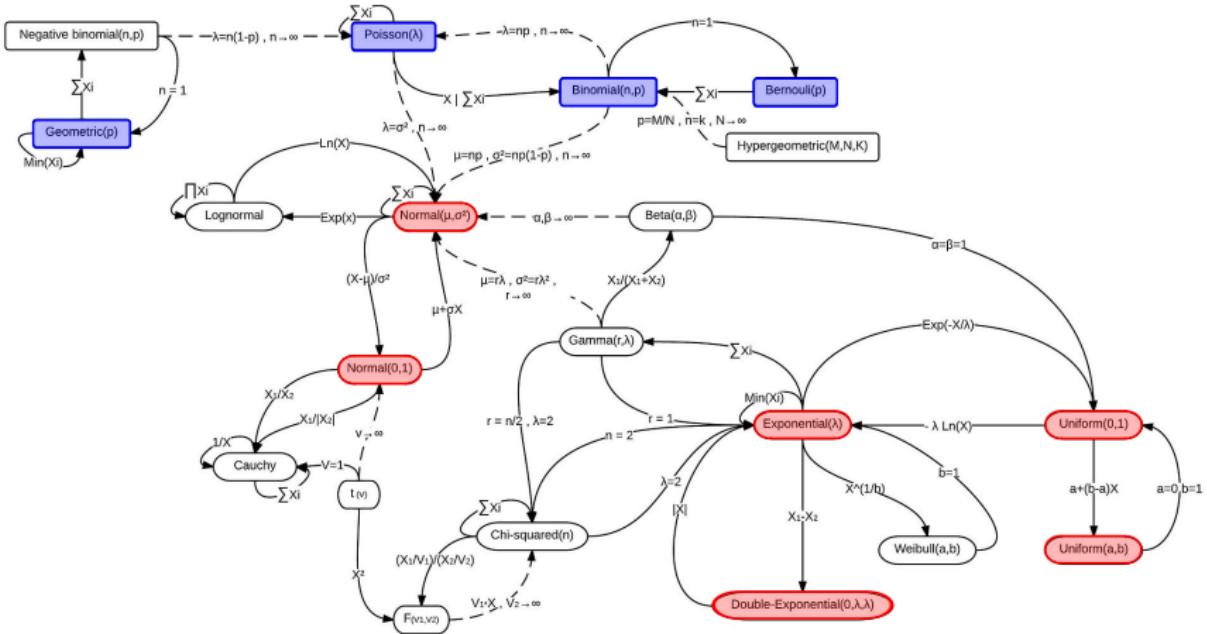
Source : https://en.wikipedia.org/wiki/Relationships_among_probability_distributions

Et bien d'autres encore...



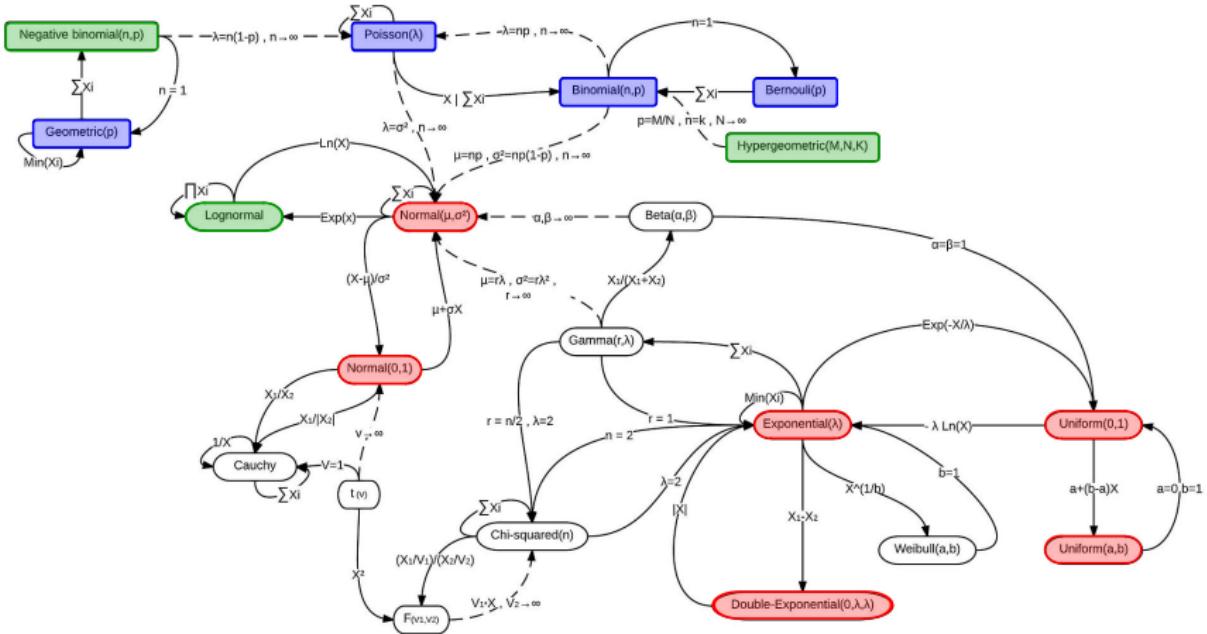
Source : https://en.wikipedia.org/wiki/Relationships_among_probability_distributions

Et bien d'autres encore...



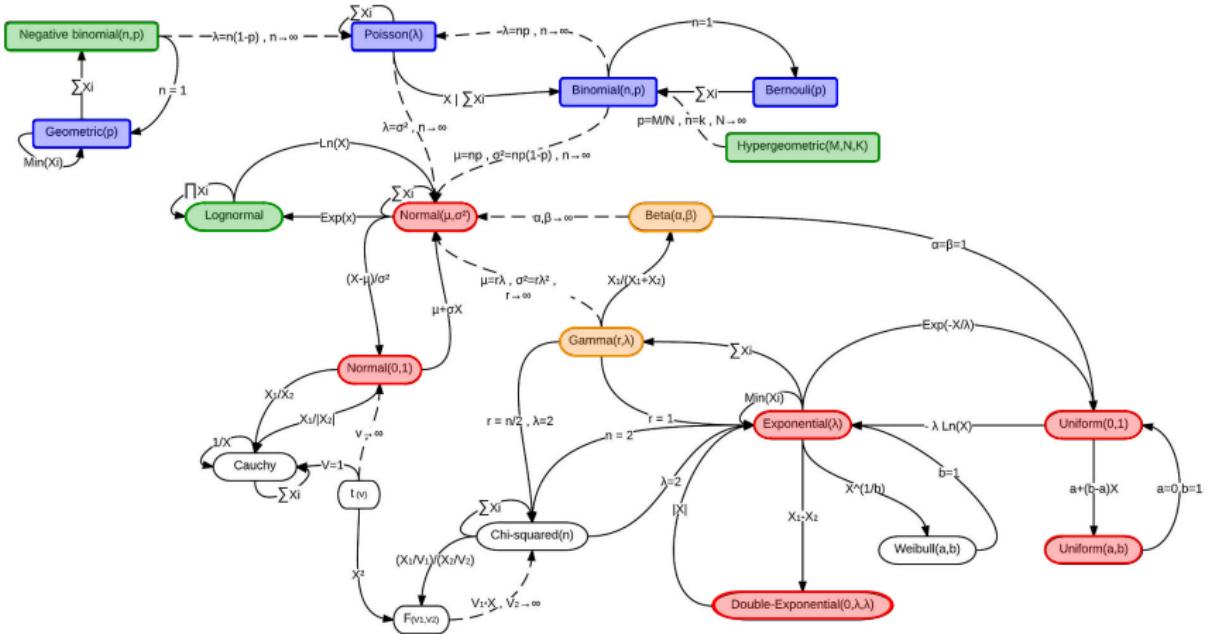
Source : https://en.wikipedia.org/wiki/Relationships_among_probability_distributions

Et bien d'autres encore...



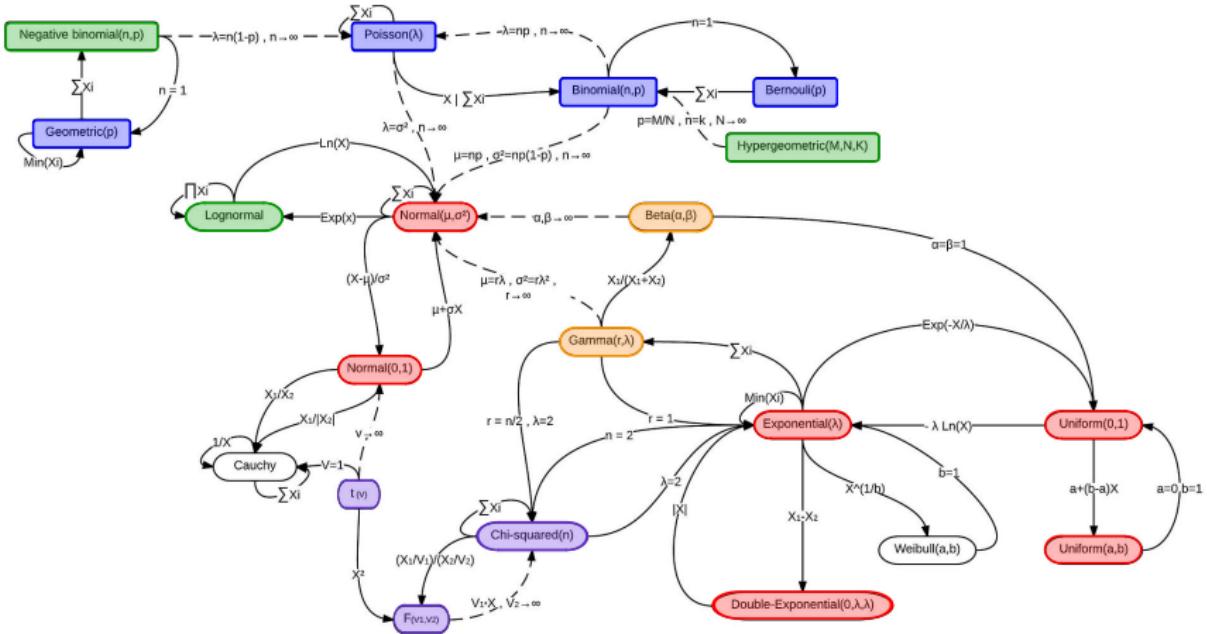
Source : https://en.wikipedia.org/wiki/Relationships_among_probability_distributions

Et bien d'autres encore...



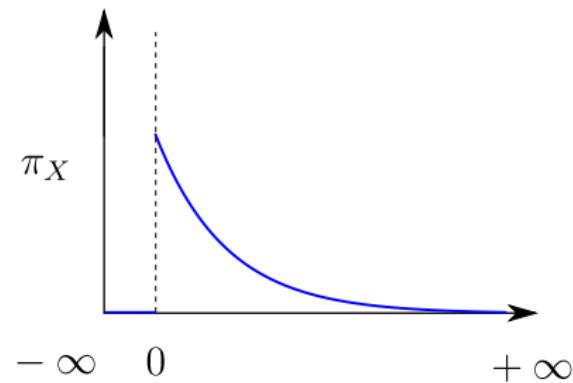
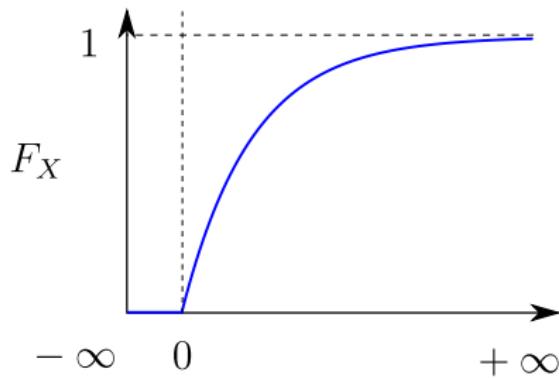
Source : https://en.wikipedia.org/wiki/Relationships_among_probability_distributions

Et bien d'autres encore...

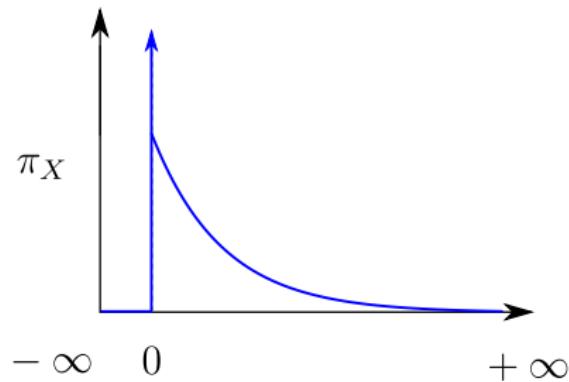
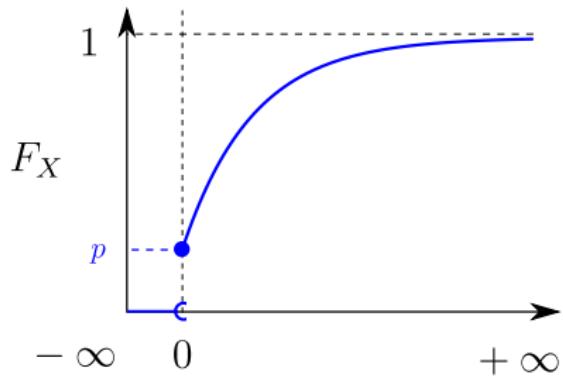


Source : https://en.wikipedia.org/wiki/Relationships_among_probability_distributions

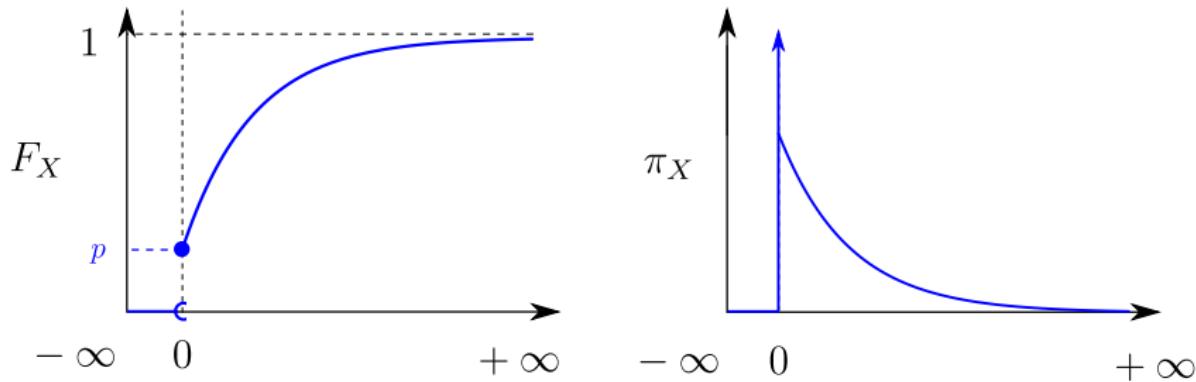
Durée de vie d'une ampoule



Durée de vie d'une ampoule
ayant une probabilité p de griller au premier allumage



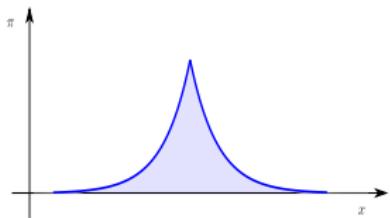
Durée de vie d'une ampoule
ayant une probabilité p de griller au premier allumage



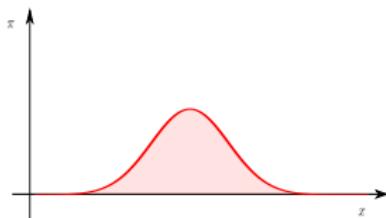
La loi de X est discrète en $x = 0$ et continue sur \mathbb{R}^{+*} .

Mélange de lois

Loi de Laplace $\mathcal{L}(\mu, \nu)$

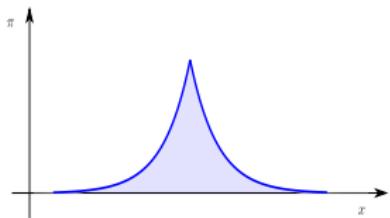


Loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$

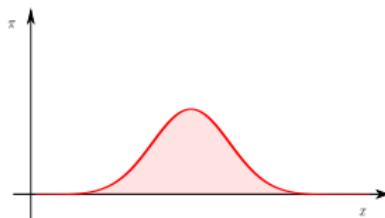


Mélange de lois

Loi de Laplace $\mathcal{L}(\mu, \nu)$



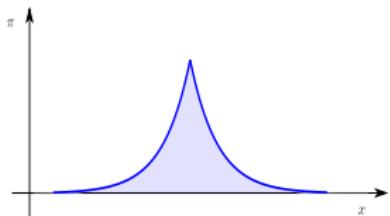
Loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$



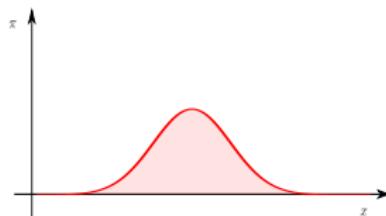
$$\Theta \in [0, 1]$$

Mélange de lois

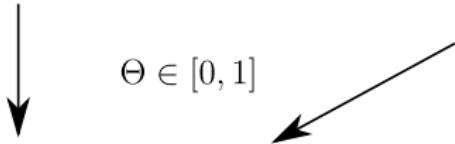
Loi de Laplace $\mathcal{L}(\mu, \nu)$



Loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$

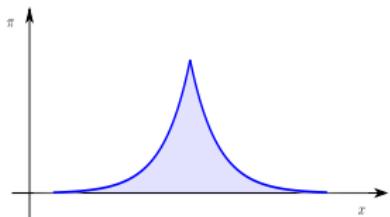


$$\Theta \in [0, 1]$$

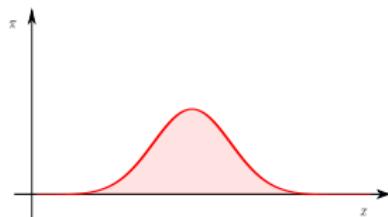


Mélange de lois

Loi de Laplace $\mathcal{L}(\mu, \nu)$



Loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$



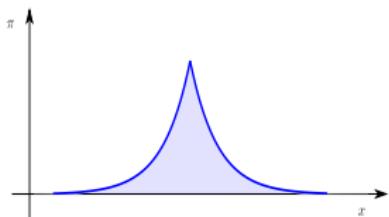
$$\Theta \in [0, 1]$$

Loi GES :

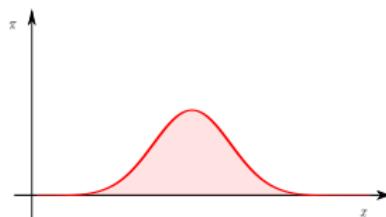
$$\Theta \times \mathcal{L}(\mu, \nu) + (1 - \Theta) \times \mathcal{N}(m, \sigma^2)$$

Mélange de lois

Loi de Laplace $\mathcal{L}(\mu, \nu)$



Loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$



$$\Theta \in [0, 1]$$

Loi GES :

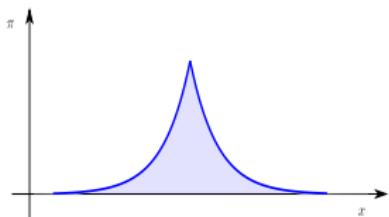
$$\Theta \times \mathcal{L}(\mu, \nu) + (1 - \Theta) \times \mathcal{N}(m, \sigma^2)$$

(Vauglin, 1997)

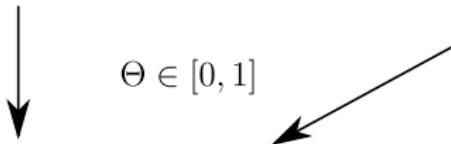
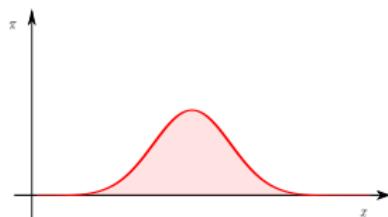
GES : Gaussienne - Exponentielle Symétrique

Mélange de lois

Loi de Laplace $\mathcal{L}(\mu, \nu)$



Loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$



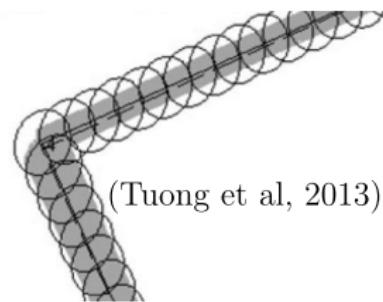
$$\Theta \in [0, 1]$$

Loi GES :

$$\Theta \times \mathcal{L}(\mu, \nu) + (1 - \Theta) \times \mathcal{N}(m, \sigma^2)$$

(Vauglin, 1997)

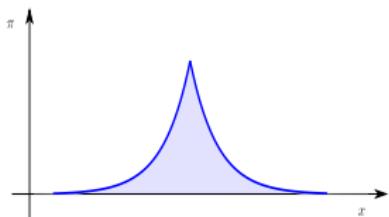
GES : Gaussienne - Exponentielle Symétrique



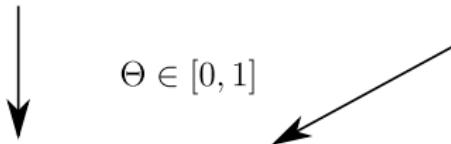
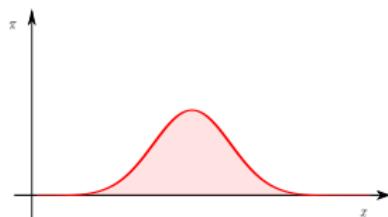
(Tuong et al, 2013)

Mélange de lois

Loi de Laplace $\mathcal{L}(\mu, \nu)$



Loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$



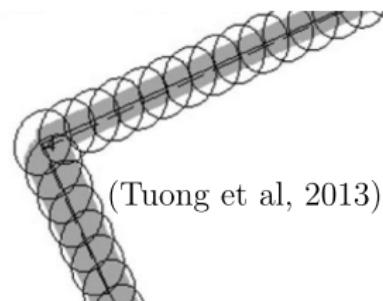
$$\Theta \in [0, 1]$$

Loi GES :

$$\Theta \times \mathcal{L}(\mu, \nu) + (1 - \Theta) \times \mathcal{N}(m, \sigma^2)$$

(Vauglin, 1997)

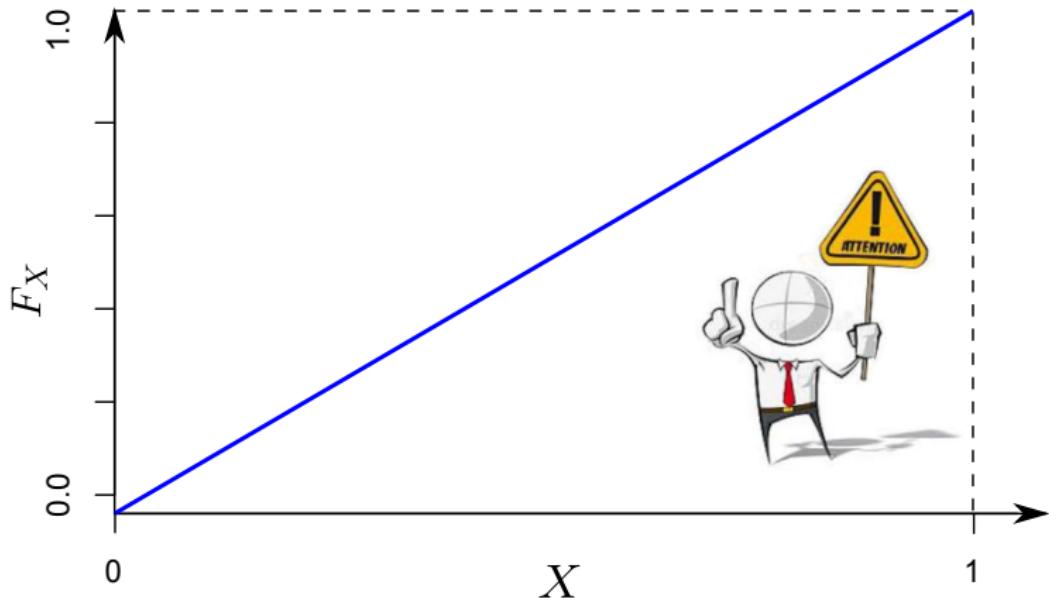
GES : Gaussienne - Exponentielle Symétrique



(Tuong et al, 2013)

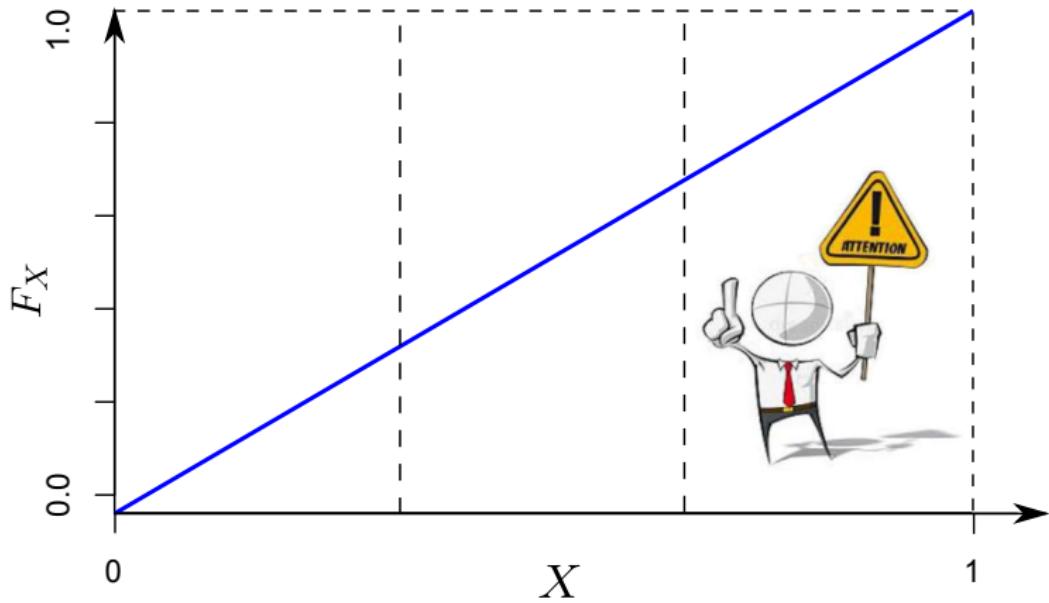
Existence de la densité de probabilité

Contre-exemple : loi de Cantor



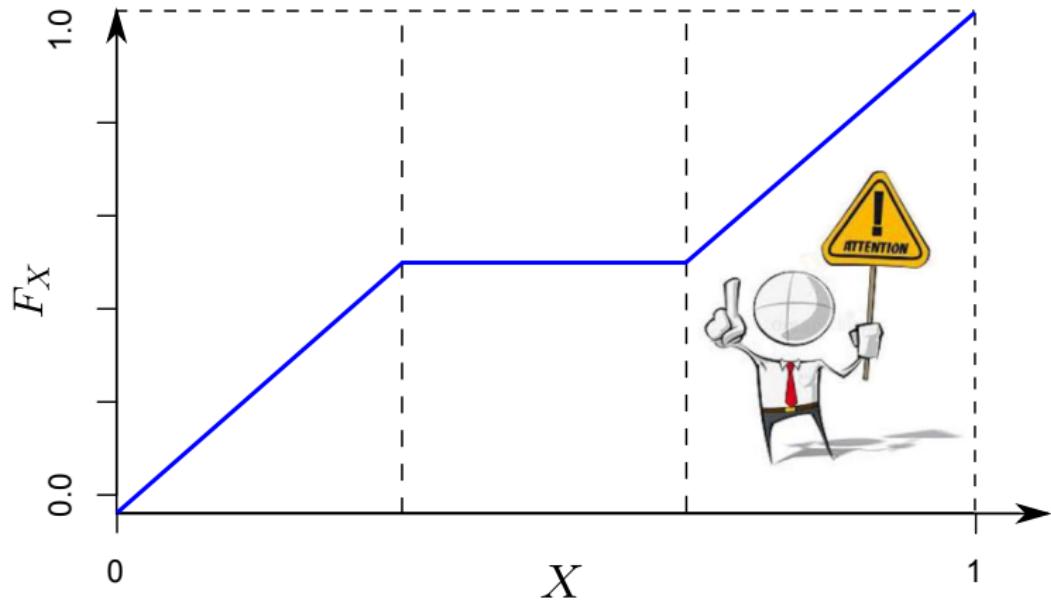
Existence de la densité de probabilité

Contre-exemple : loi de Cantor



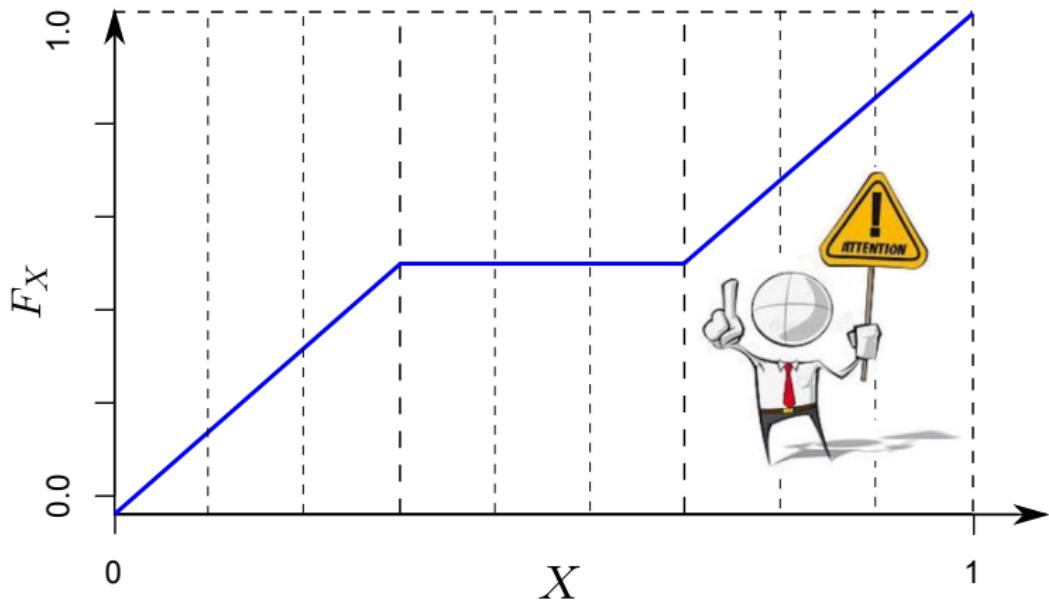
Existence de la densité de probabilité

Contre-exemple : loi de Cantor



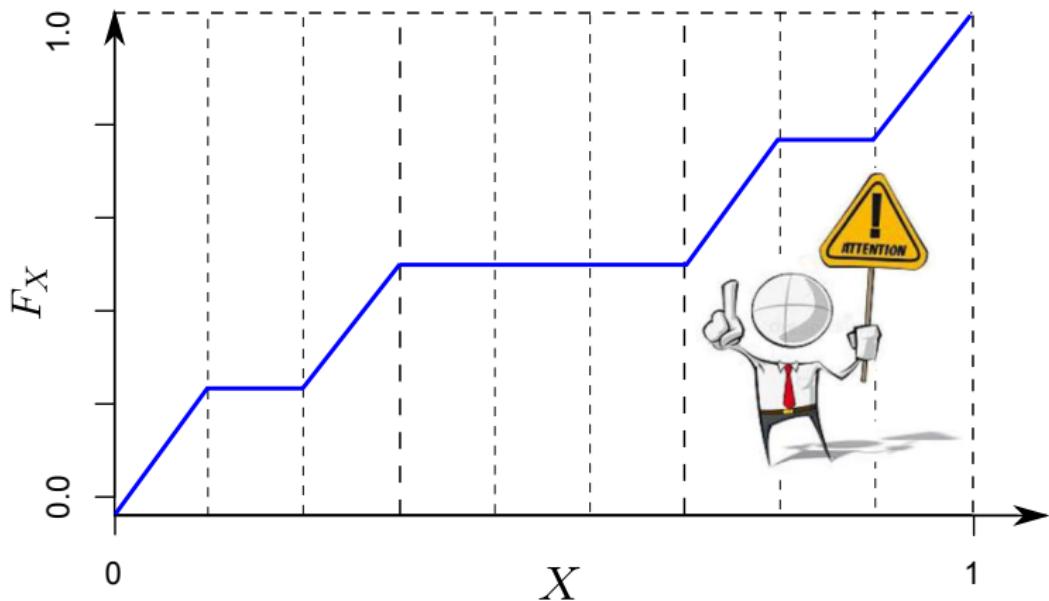
Existence de la densité de probabilité

Contre-exemple : loi de Cantor



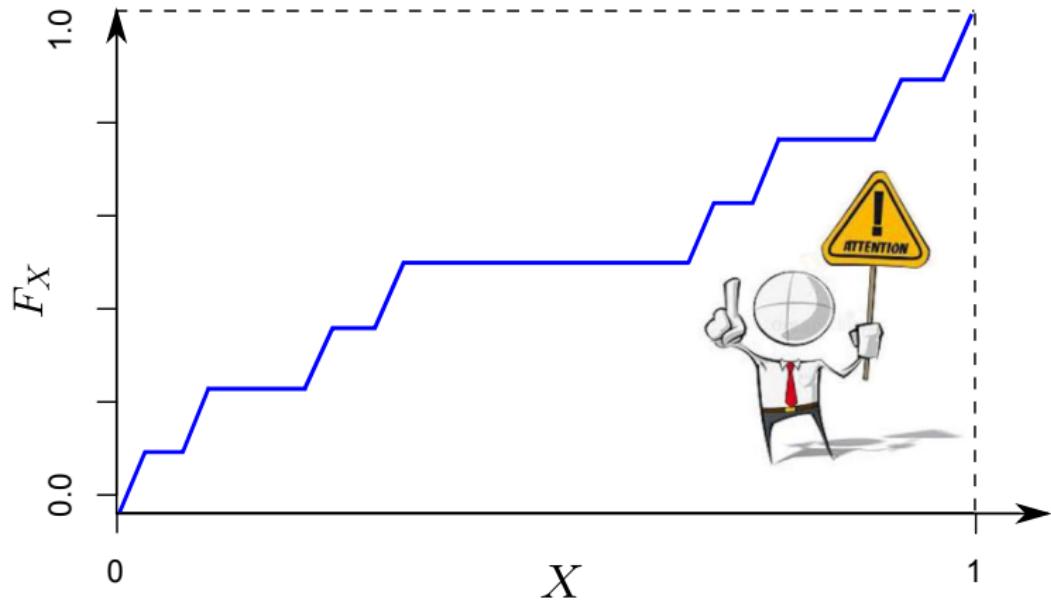
Existence de la densité de probabilité

Contre-exemple : loi de Cantor



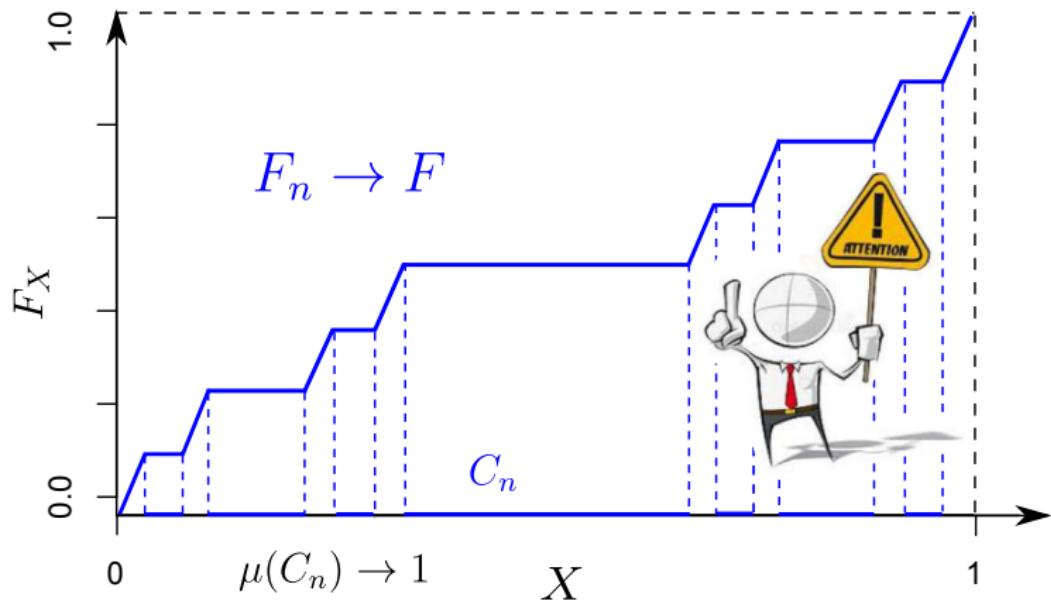
Existence de la densité de probabilité

Contre-exemple : loi de Cantor



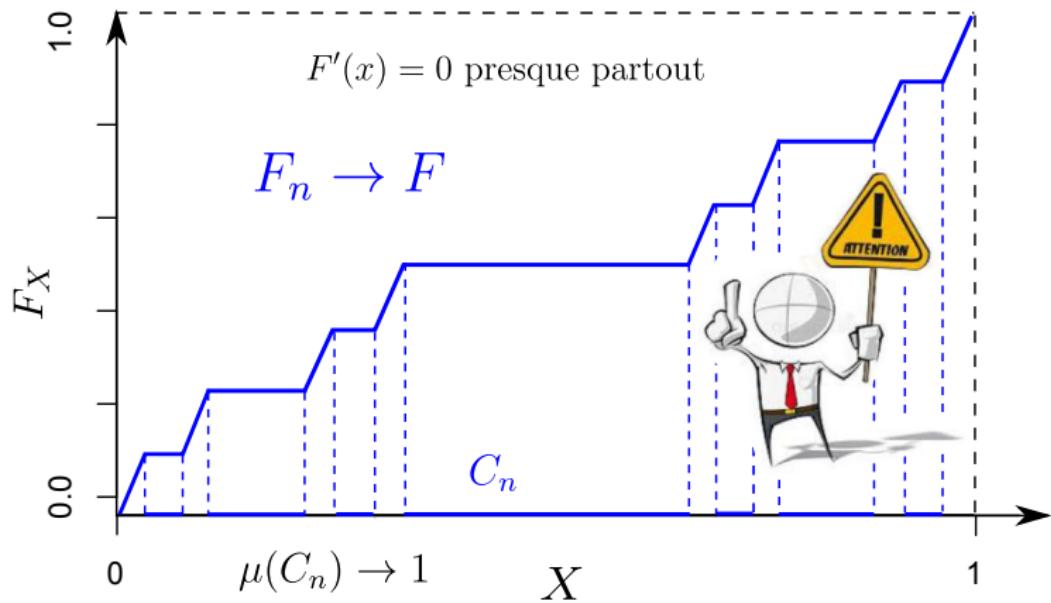
Existence de la densité de probabilité

Contre-exemple : loi de Cantor



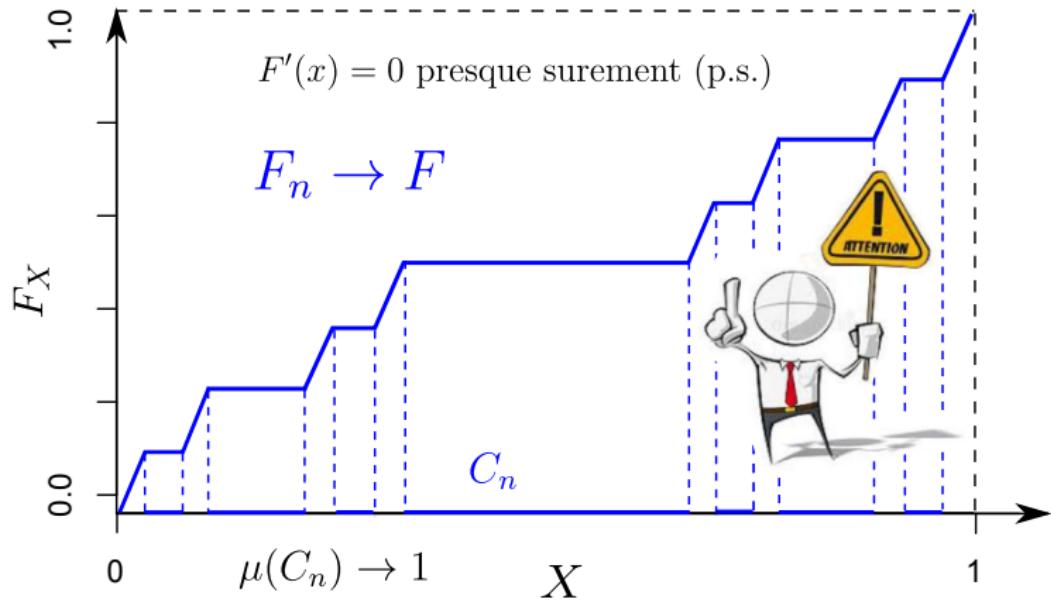
Existence de la densité de probabilité

Contre-exemple : loi de Cantor



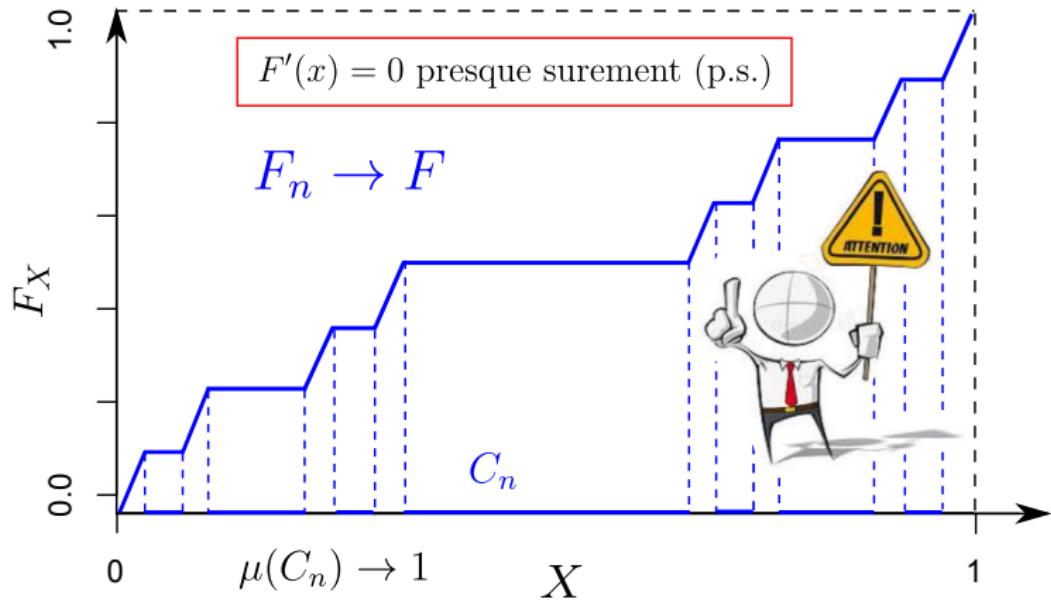
Existence de la densité de probabilité

Contre-exemple : loi de Cantor



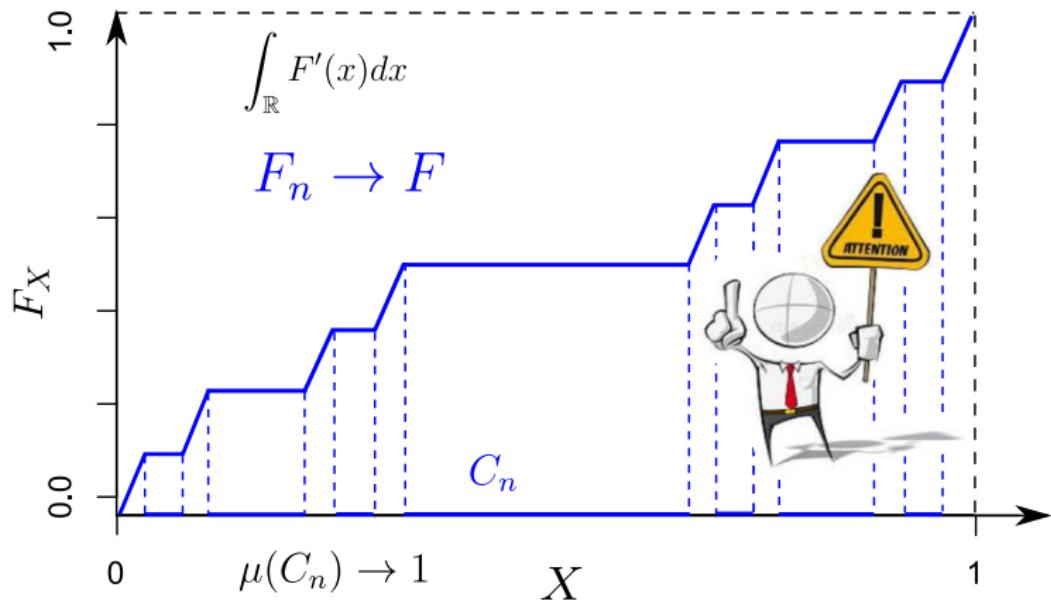
Existence de la densité de probabilité

Contre-exemple : loi de Cantor



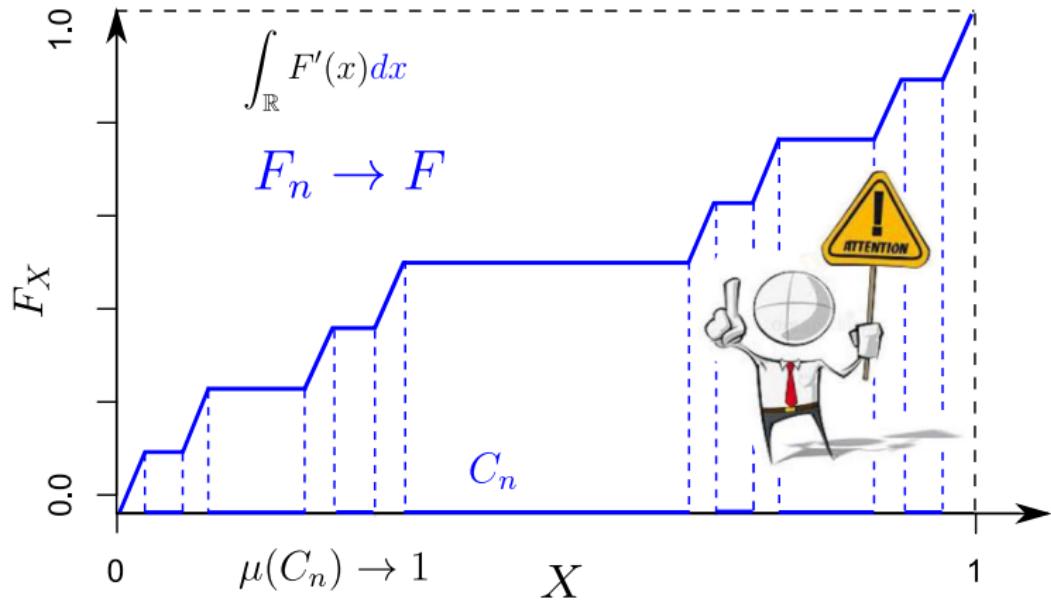
Existence de la densité de probabilité

Contre-exemple : loi de Cantor



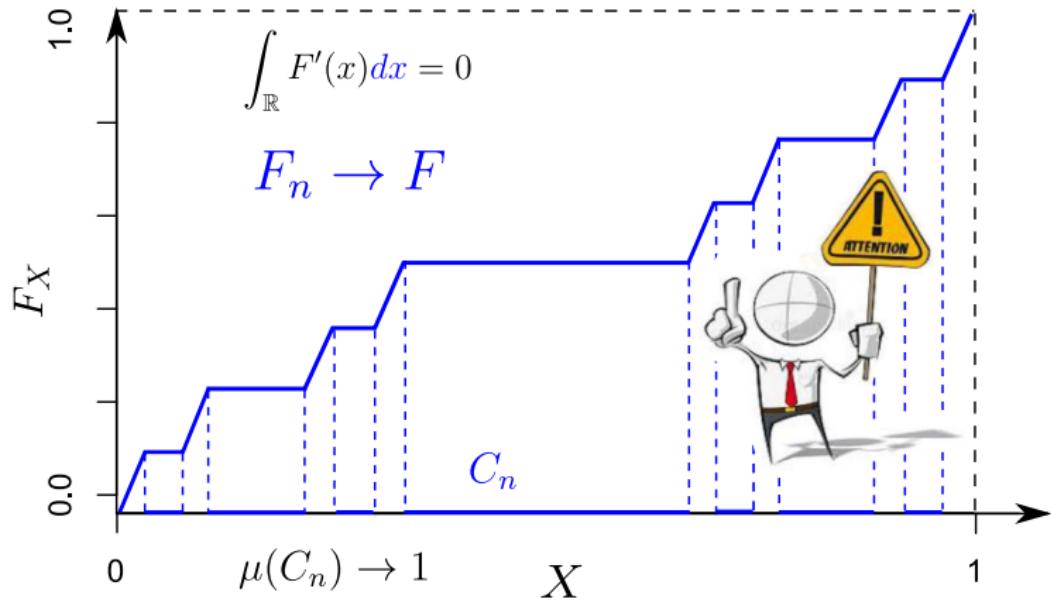
Existence de la densité de probabilité

Contre-exemple : loi de Cantor



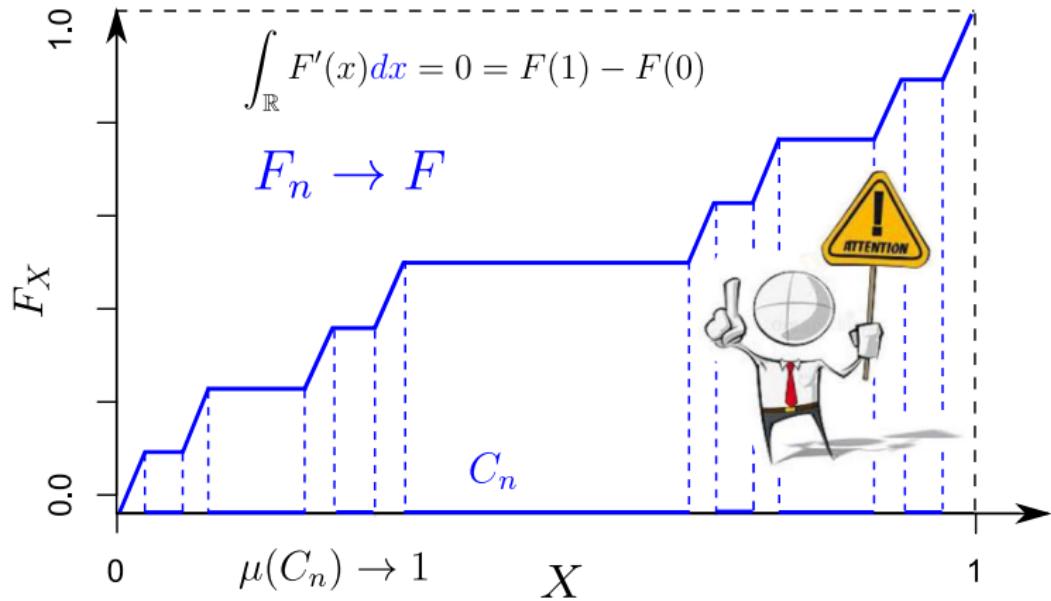
Existence de la densité de probabilité

Contre-exemple : loi de Cantor



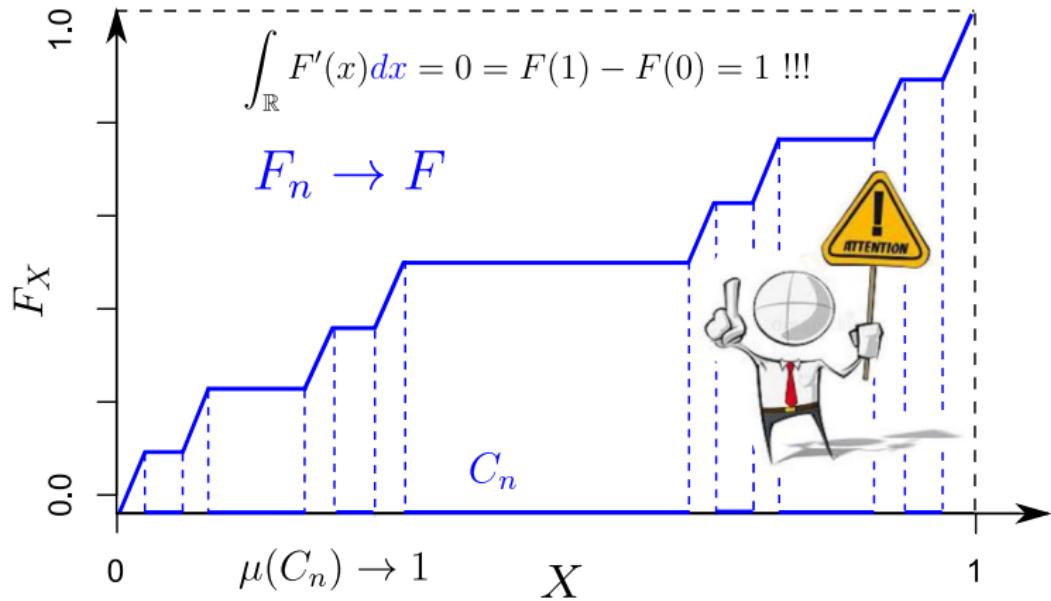
Existence de la densité de probabilité

Contre-exemple : loi de Cantor



Existence de la densité de probabilité

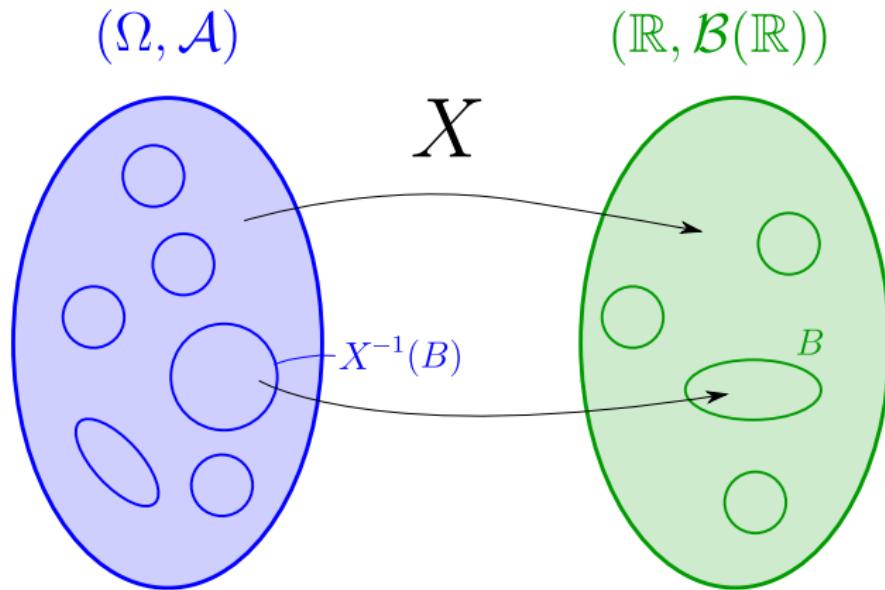
Contre-exemple : loi de Cantor



Un peu de multivarié...

- *Définition*
- *Marginalisation*
- *Conditionnement*
- *Indépendance*
- *Théorie de Bayes*

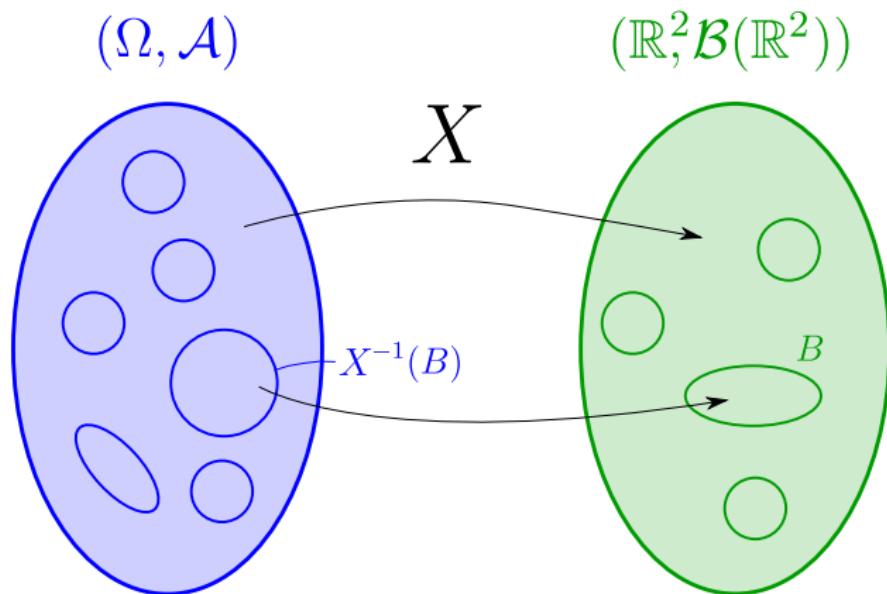
Un peu de multivarié...



X measurable

$B \in \mathcal{F} \quad X^{-1}(B) \in \mathcal{E}$

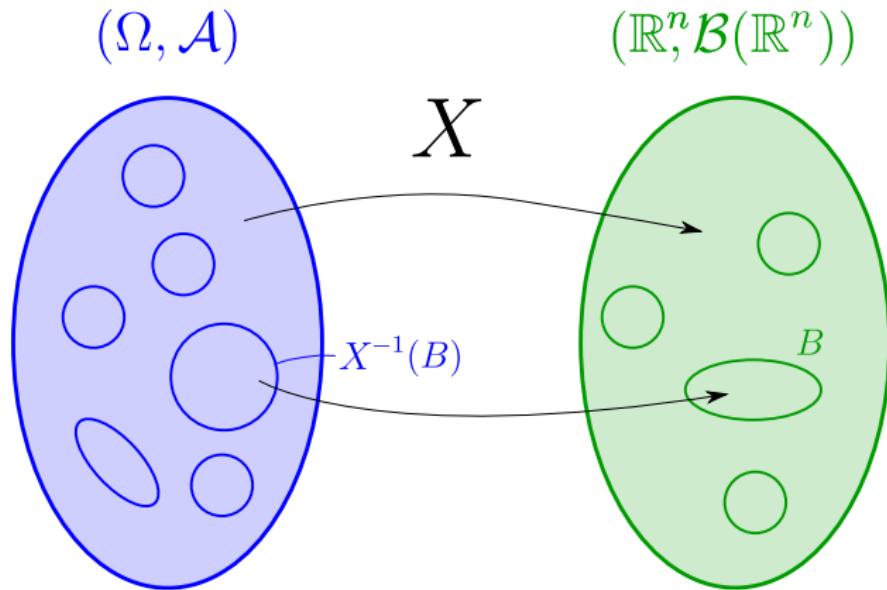
Un peu de multivarié...



X measurable

$B \in \mathcal{F} \quad X^{-1}(B) \in \mathcal{E}$

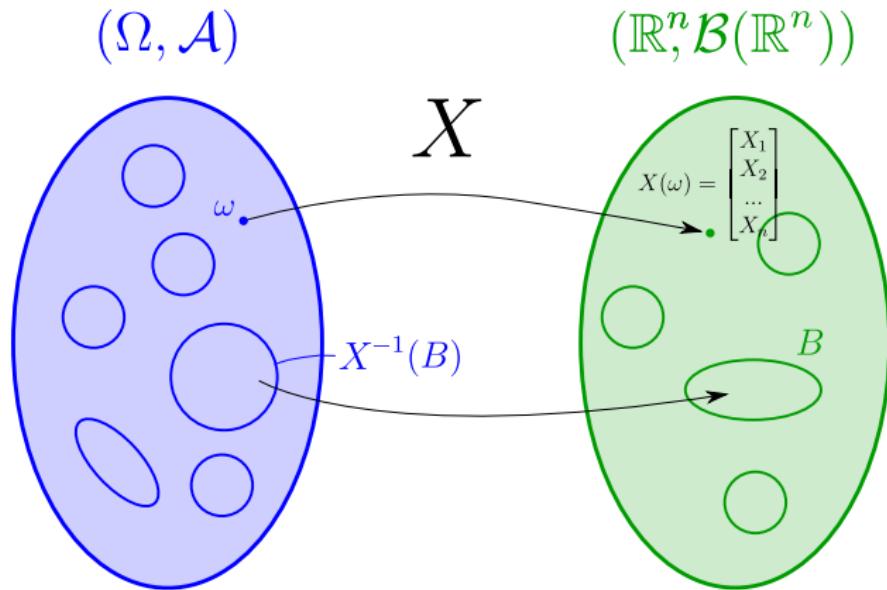
Un peu de multivarié...



X measurable

$B \in \mathcal{F} \quad X^{-1}(B) \in \mathcal{E}$

Un peu de multivarié...



X measurable

$$B \in \mathcal{F} \quad X^{-1}(B) \in \mathcal{E}$$

Un peu de multivarié...

Soit $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ un vecteur de n variables aléatoires réelles.

Fonction de répartition d'une loi multivariée

La *fonction de répartition* de \mathbf{X} la fonction $F_{\mathbf{X}} : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1]$:

$$F_{\mathbf{X}}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \mathbb{P}(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, \dots, X_n \leq x_n)$$

Un peu de multivarié...

Soit $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ un vecteur de n variables aléatoires réelles.

Fonction de répartition d'une loi multivariée

La *fonction de répartition* de \mathbf{X} la fonction $F_{\mathbf{X}} : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1]$:

$$F_{\mathbf{X}}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \mathbb{P}(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, \dots, X_n \leq x_n)$$

Remarque : pour un point $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $F_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$ est donc la probabilité de tirer un point dans le pavé délimité par $(-\infty, -\infty, \dots, -\infty)$ et \mathbf{x} .

Un peu de multivarié...

Soit $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ un vecteur de n variables aléatoires réelles.

Fonction de répartition d'une loi multivariée

La *fonction de répartition* de \mathbf{X} la fonction $F_{\mathbf{X}} : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1]$:

$$F_{\mathbf{X}}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \mathbb{P}(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, \dots, X_n \leq x_n)$$

Remarque : pour un point $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $F_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$ est donc la probabilité de tirer un point dans le pavé délimité par $(-\infty, -\infty, \dots, -\infty)$ et \mathbf{x} .

Densité de probabilité d'une loi multivariée

Lorsqu'elle existe, la densité de probabilité de \mathbf{X} est la fonction de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}_+ :

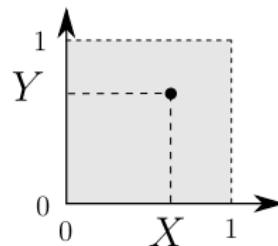
$$\pi_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \frac{\partial^n F_{\mathbf{X}}}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_n}(\mathbf{x})$$

Un peu de multivarié...

Exemple : loi uniforme sur $[0, 1] \times [0, 1]$

(X, Y) est un couple de variables aléatoires

$$(X, Y) \sim \mathcal{U}([0, 1]^2)$$



Un peu de multivarié...

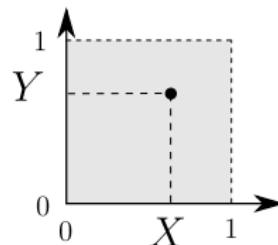
Exemple : loi uniforme sur $[0, 1] \times [0, 1]$

(X, Y) est un couple de variables aléatoires

$$(X, Y) \sim \mathcal{U}([0, 1]^2)$$

Fonction de répartition :

$$F(x, y) = \mathbb{P}(X \leq x, Y \leq y)$$



Un peu de multivarié...

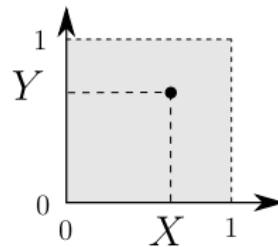
Exemple : loi uniforme sur $[0, 1] \times [0, 1]$

(X, Y) est un couple de variables aléatoires

$$(X, Y) \sim \mathcal{U}([0, 1]^2)$$

Fonction de répartition :

$$F(x, y) = \mathbb{P}(X \leq x, Y \leq y) = xy$$



Un peu de multivarié...

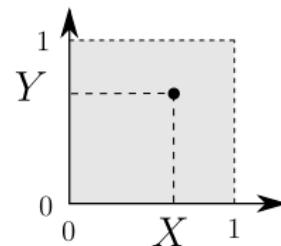
Exemple : loi uniforme sur $[0, 1] \times [0, 1]$

(X, Y) est un couple de variables aléatoires

$$(X, Y) \sim \mathcal{U}([0, 1]^2)$$

Fonction de répartition :

$$F(x, y) = \mathbb{P}(X \leq x, Y \leq y) = xy$$



Densité de probabilité

$$\pi(x, y) = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(x, y)$$

Un peu de multivarié...

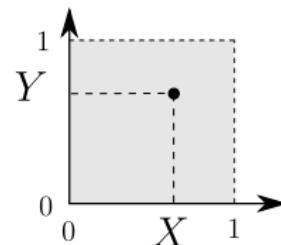
Exemple : loi uniforme sur $[0, 1] \times [0, 1]$

(X, Y) est un couple de variables aléatoires

$$(X, Y) \sim \mathcal{U}([0, 1]^2)$$

Fonction de répartition :

$$F(x, y) = \mathbb{P}(X \leq x, Y \leq y) = xy$$



Densité de probabilité

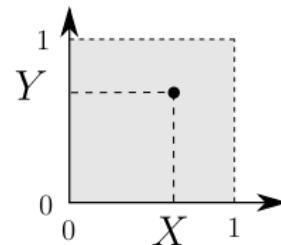
$$\pi(x, y) = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(x, y) = 1$$

Un peu de multivarié...

Exemple : loi uniforme sur $[0, 1] \times [0, 1]$

(X, Y) est un couple de variables aléatoires

$$(X, Y) \sim \mathcal{U}([0, 1]^2)$$

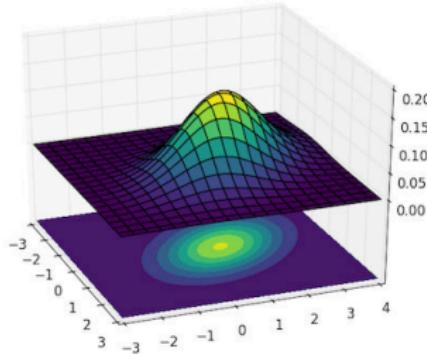


Fonction de répartition :

$$F(x, y) = \mathbb{P}(X \leq x, Y \leq y) = xy$$

Densité de probabilité

$$\pi(x, y) = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(x, y) = 1$$



Un peu de multivarié...

Exemple : loi uniforme sur $[0, 1] \times [0, 1]$

(X, Y) est un couple de variables aléatoires

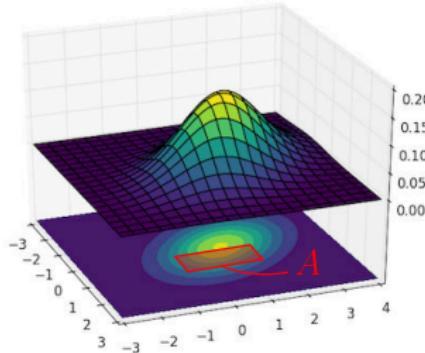
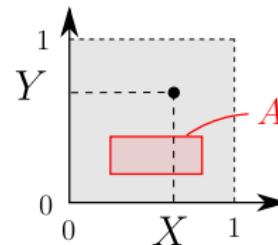
$$(X, Y) \sim \mathcal{U}([0, 1]^2)$$

Fonction de répartition :

$$F(x, y) = \mathbb{P}(X \leq x, Y \leq y) = xy$$

Densité de probabilité

$$\pi(x, y) = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(x, y) = 1$$



Un peu de multivarié...

Exemple : loi uniforme sur $[0, 1] \times [0, 1]$

(X, Y) est un couple de variables aléatoires

$$(X, Y) \sim \mathcal{U}([0, 1]^2)$$

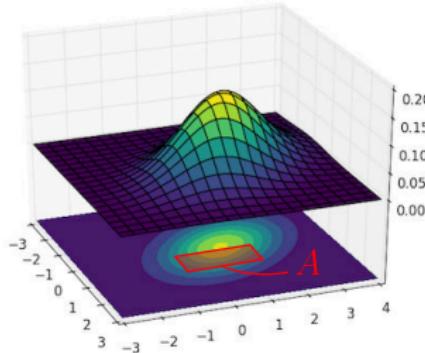
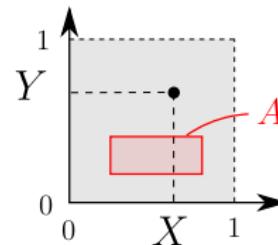
Fonction de répartition :

$$F(x, y) = \mathbb{P}(X \leq x, Y \leq y) = xy$$

Densité de probabilité

$$\pi(x, y) = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(x, y) = 1$$

$$\mathbb{P}((X, Y) \in A) = \iint_A \pi(x, y) dx dy$$



Un peu de multivarié...

Exemple : loi uniforme sur $[0, 1] \times [0, 1]$

(X, Y) est un couple de variables aléatoires

$$(X, Y) \sim \mathcal{U}([0, 1]^2)$$

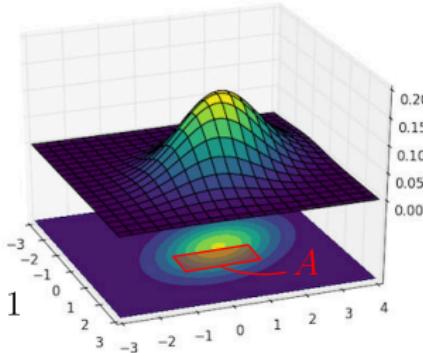
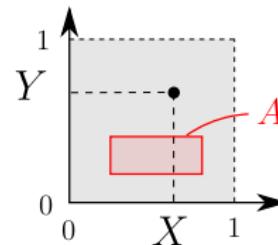
Fonction de répartition :

$$F(x, y) = \mathbb{P}(X \leq x, Y \leq y) = xy$$

Densité de probabilité

$$\pi(x, y) = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(x, y) = 1$$

$$\mathbb{P}\left((X, Y) \in [0, 1]^2\right) = \mathbb{P}(\Omega) = \int_0^1 \int_0^1 1.dxdy = 1$$



Marginalisation

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires discrètes de loi P_{XY} .

La **loi marginale** P_X de la variable X est :

$$P_X(x) = \sum_y P_{XY}(x, y)$$

Marginalisation

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires de densité π_{XY} . La densité π_X de la **loi marginale** de X est :

$$\pi_X(x) = \int_{\mathbb{R}} \pi_{XY}(x, y) dy$$

Marginalisation

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires de densité π_{XY} . La densité π_X de la **loi marginale** de X est :

$$\pi_X(x) = \int_{\mathbb{R}} \pi_{XY}(x, y) dy$$

$X \backslash Y$						

Marginalisation

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires de densité π_{XY} . La densité π_X de la **loi marginale** de X est :

$$\pi_X(x) = \int_{\mathbb{R}} \pi_{XY}(x, y) dy$$

$X \backslash Y$						
♀						
♂						

Marginalisation

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires de densité π_{XY} . La densité π_X de la **loi marginale** de X est :

$$\pi_X(x) = \int_{\mathbb{R}} \pi_{XY}(x, y) dy$$

$X \setminus Y$	< 150 cm	> 150 cm < 160 cm	> 160 cm < 170 cm	> 170 cm < 180 cm	> 180 cm < 190 cm	> 190 cm
♀						
♂						

Marginalisation

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires de densité π_{XY} . La densité π_X de la **loi marginale** de X est :

$$\pi_X(x) = \int_{\mathbb{R}} \pi_{XY}(x, y) dy$$

$X \setminus Y$	< 150 cm	> 150 cm < 160 cm	> 160 cm < 170 cm	> 170 cm < 180 cm	> 180 cm < 190 cm	> 190 cm
♀						
♂						

Marginalisation

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires de densité π_{XY} . La densité π_X de la **loi marginale** de X est :

$$\pi_X(x) = \int_{\mathbb{R}} \pi_{XY}(x, y) dy$$

$X \setminus Y$	< 150 cm	> 150 cm < 160 cm	> 160 cm < 170 cm	> 170 cm < 180 cm	> 180 cm < 190 cm	> 190 cm
♀	20	48	49	37	16	5
♂	4	25	45	61	44	25

Marginalisation

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires de densité π_{XY} . La densité π_X de la **loi marginale** de X est :

$$\pi_X(x) = \int_{\mathbb{R}} \pi_{XY}(x, y) dy$$

$X \setminus Y$	< 150 cm	> 150 cm < 160 cm	> 160 cm < 170 cm	> 170 cm < 180 cm	> 180 cm < 190 cm	> 190 cm
♀	20	48	49	37	16	5
♂	4	25	45	61	44	25

Y	24	73	94	98	60	30
-----	----	----	----	----	----	----

Marginalisation

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires de densité π_{XY} . La densité π_X de la **loi marginale** de X est :

$$\pi_X(x) = \int_{\mathbb{R}} \pi_{XY}(x, y) dy$$

$X \setminus Y$	< 150 cm	> 150 cm < 160 cm	> 160 cm < 170 cm	> 170 cm < 180 cm	> 180 cm < 190 cm	> 190 cm	X
♀	20	48	49	37	16	5	175
♂	4	25	45	61	44	25	204
Y	24	73	94	98	60	30	

Marginalisation

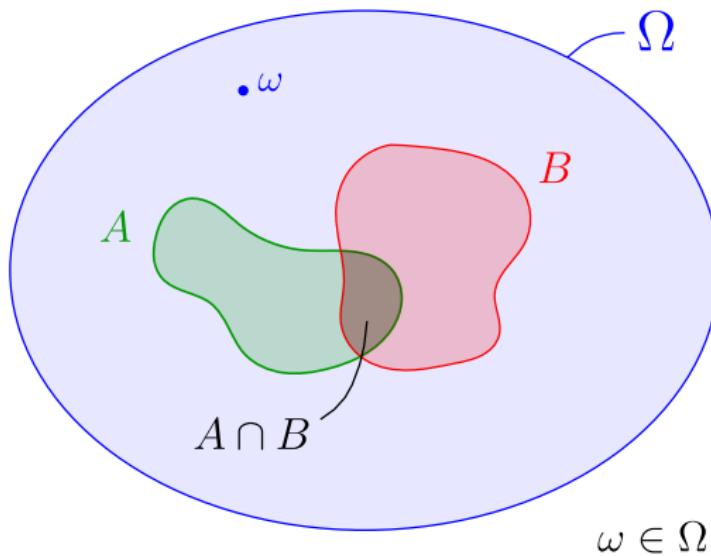
Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires de densité π_{XY} . La densité π_X de la **loi marginale** de X est :

$$\pi_X(x) = \int_{\mathbb{R}} \pi_{XY}(x, y) dy$$

$X \setminus Y$	< 150 cm	> 150 cm < 160 cm	> 160 cm < 170 cm	> 170 cm < 180 cm	> 180 cm < 190 cm	> 190 cm	X
♀	20	48	49	37	16	5	175
♂	4	25	45	61	44	25	204
Y	24	73	94	98	60	30	379

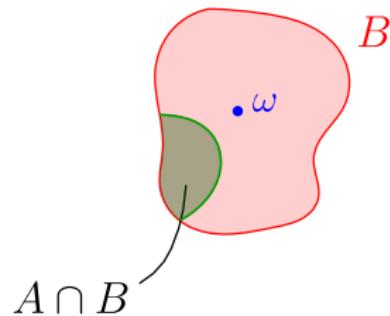
Un peu de multivarié...

Pour deux événements $A, B \subset \Omega$, sachant que la réalisation de B a été observée, quelle est la probabilité de A ?



Un peu de multivarié...

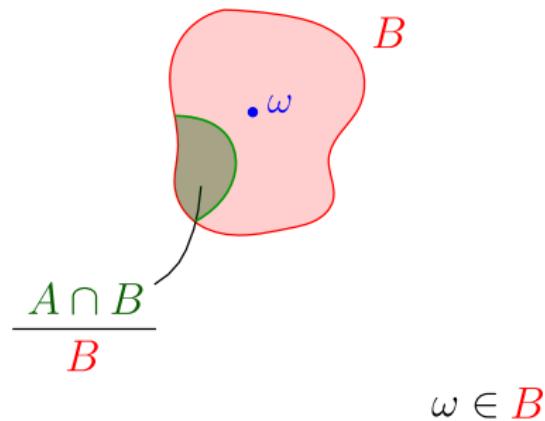
Pour deux événements $A, B \subset \Omega$, sachant que la réalisation de B a été observée, quelle est la probabilité de A ?



$$\omega \in B$$

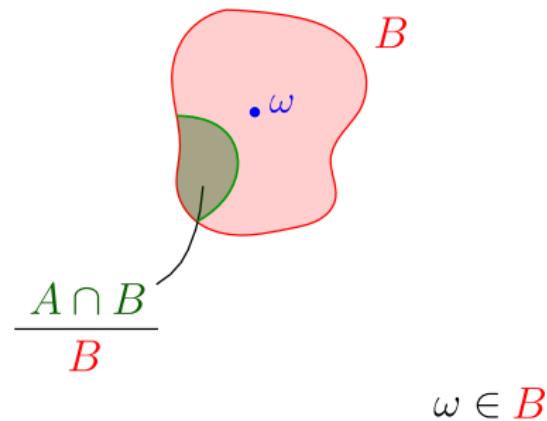
Un peu de multivarié...

Pour deux événements $A, B \subset \Omega$, sachant que la réalisation de B a été observée, quelle est la probabilité de A ?



Un peu de multivarié...

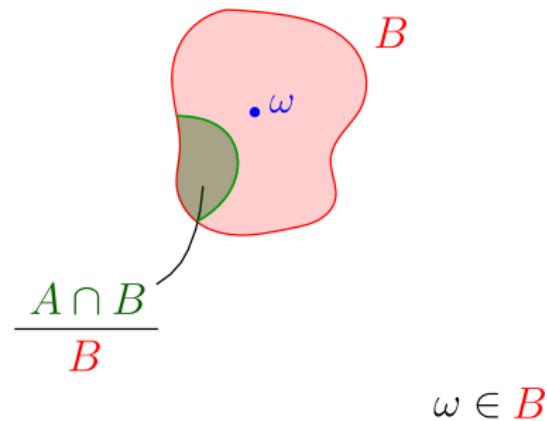
Pour deux évènements $A, B \subset \Omega$, sachant que la réalisation de B a été observée, quelle est la probabilité de A ?



$$\mathbb{P}(A \mid B)$$

Un peu de multivarié...

Pour deux évènements $A, B \subset \Omega$, sachant que la réalisation de B a été observée, quelle est la probabilité de A ?



$$\mathbb{P}(A \mid B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

Conditionnement

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires discrètes de loi P_{XY} .

La **loi conditionnelle** $P_{X|Y=y}$ de X conditionnée à $Y = y$ est :

$$P_{X|Y=y}(x) = \mathbb{P}(X = x | Y = y) = \frac{\mathbb{P}(X = x \cap Y = y)}{\mathbb{P}(Y = y)}$$

Conditionnement

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires discrètes de loi P_{XY} .

La **loi conditionnelle** $P_{X|Y=y}$ de X conditionnée à $Y = y$ est :

$$P_{X|Y=y}(x) = \mathbb{P}(X = x | Y = y) = \frac{\mathbb{P}(X = x, Y = y)}{\mathbb{P}(Y = y)}$$

Conditionnement

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires discrètes de loi P_{XY} .

La **loi conditionnelle** $P_{X|Y=y}$ de X conditionnée à $Y = y$ est :

$$P_{X|Y} = \frac{\mathbb{P}(X, Y)}{\mathbb{P}(Y)}$$

Conditionnement

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires de densité jointe π_{XY} et de lois marginales π_X et π_Y . La densité de la **loi conditionnelle** $\pi_{X|Y=y}$ de X conditionnée à $Y = y$ est :

$$\pi_{X|Y=y}(x) = \frac{\pi_{XY}(x, y)}{\pi_Y(y)}$$

Conditionnement

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires de densité jointe π_{XY} et de lois marginales π_X et π_Y . La densité de la **loi conditionnelle** $\pi_{X|Y=y}$ de X conditionnée à $Y = y$ est :

$$\pi_{X|Y=\textcolor{blue}{y}}(\textcolor{green}{x}) = \frac{\pi_{XY}(\textcolor{green}{x}, \textcolor{blue}{y})}{\pi_Y(\textcolor{blue}{y})}$$

Conditionnement

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires de densité jointe π_{XY} et de lois marginales π_X et π_Y . La densité de la **loi conditionnelle** $\pi_{X|Y=y}$ de X conditionnée à $Y = y$ est :

$$\pi_{X|Y=\textcolor{blue}{y}}(\textcolor{green}{x}) = \frac{\pi_{XY}(\textcolor{green}{x}, \textcolor{blue}{y})}{\pi_Y(\textcolor{blue}{y})}$$

$X \setminus Y$	< 150 cm	> 150 cm < 160 cm	> 160 cm < 170 cm	> 170 cm < 180 cm	> 180 cm < 190 cm	> 190 cm
♀	20	48	49	37	16	5
♂	4	25	45	61	44	25

$$150 < Y < 160$$

Conditionnement

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires de densité jointe π_{XY} et de lois marginales π_X et π_Y . La densité de la **loi conditionnelle** $\pi_{X|Y=y}$ de X conditionnée à $Y = y$ est :

$$\pi_{X|Y=\textcolor{blue}{y}}(\textcolor{green}{x}) = \frac{\pi_{XY}(\textcolor{green}{x}, \textcolor{blue}{y})}{\pi_Y(\textcolor{blue}{y})}$$

$X \setminus Y$	< 150 cm	> 150 cm < 160 cm	> 160 cm < 170 cm	> 170 cm < 180 cm	> 180 cm < 190 cm	> 190 cm
♀	20	48	49	37	16	5
♂	4	25	45	61	44	25

$$150 < Y < 160$$

Conditionnement

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires de densité jointe π_{XY} et de lois marginales π_X et π_Y . La densité de la **loi conditionnelle** $\pi_{X|Y=y}$ de X conditionnée à $Y = y$ est :

$$\pi_{X|Y=\textcolor{blue}{y}}(\textcolor{green}{x}) = \frac{\pi_{XY}(\textcolor{green}{x}, \textcolor{blue}{y})}{\pi_Y(\textcolor{blue}{y})}$$

$X \setminus Y$	< 150 cm	> 150 cm < 160 cm	> 160 cm < 170 cm	> 170 cm < 180 cm	> 180 cm < 190 cm	> 190 cm
♀		48				
♂		25				

$$150 < Y < 160$$

Conditionnement

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires de densité jointe π_{XY} et de lois marginales π_X et π_Y . La densité de la **loi conditionnelle** $\pi_{X|Y=y}$ de X conditionnée à $Y = y$ est :

$$\pi_{X|Y=\textcolor{blue}{y}}(\textcolor{green}{x}) = \frac{\pi_{XY}(\textcolor{green}{x}, \textcolor{blue}{y})}{\pi_Y(\textcolor{blue}{y})}$$

$X \setminus Y$	< 150 cm	> 150 cm < 160 cm	> 160 cm < 170 cm	> 170 cm < 180 cm	> 180 cm < 190 cm	> 190 cm
♀		66%				
♂		34%				

$$P_{X|Y} \quad 150 < Y < 160$$

Conditionnement

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires de densité jointe π_{XY} et de lois marginales π_X et π_Y . La densité de la **loi conditionnelle** $\pi_{X|Y=y}$ de X conditionnée à $Y = y$ est :

$$\pi_{X|Y=\textcolor{blue}{y}}(\textcolor{green}{x}) = \frac{\pi_{XY}(\textcolor{green}{x}, \textcolor{blue}{y})}{\pi_Y(\textcolor{blue}{y})}$$

$X \setminus Y$	< 150 cm	> 150 cm < 160 cm	> 160 cm < 170 cm	> 170 cm < 180 cm	> 180 cm < 190 cm	> 190 cm
♀	20	48	49	37	16	5
♂	4	25	45	61	44	25

$$X = \textcolor{blue}{\circlearrowleft}$$

Conditionnement

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires de densité jointe π_{XY} et de lois marginales π_X et π_Y . La densité de la **loi conditionnelle** $\pi_{X|Y=y}$ de X conditionnée à $Y = y$ est :

$$\pi_{X|Y=\textcolor{blue}{y}}(\textcolor{green}{x}) = \frac{\pi_{XY}(\textcolor{green}{x}, \textcolor{blue}{y})}{\pi_Y(\textcolor{blue}{y})}$$

$X \setminus Y$	< 150 cm	> 150 cm < 160 cm	> 160 cm < 170 cm	> 170 cm < 180 cm	> 180 cm < 190 cm	> 190 cm
♀	20	48	49	37	16	5
♂	4	25	45	61	44	25

$$X = \textcircled{O}$$

Conditionnement

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires de densité jointe π_{XY} et de lois marginales π_X et π_Y . La densité de la **loi conditionnelle** $\pi_{X|Y=y}$ de X conditionnée à $Y = y$ est :

$$\pi_{X|Y=\textcolor{blue}{y}}(\textcolor{green}{x}) = \frac{\pi_{XY}(\textcolor{green}{x}, \textcolor{blue}{y})}{\pi_Y(\textcolor{blue}{y})}$$

$X \setminus Y$	< 150 cm	> 150 cm < 160 cm	> 160 cm < 170 cm	> 170 cm < 180 cm	> 180 cm < 190 cm	> 190 cm
♀						
♂	4	25	45	61	44	25

$$X = \textcolor{blue}{\circlearrowleft}$$

Conditionnement

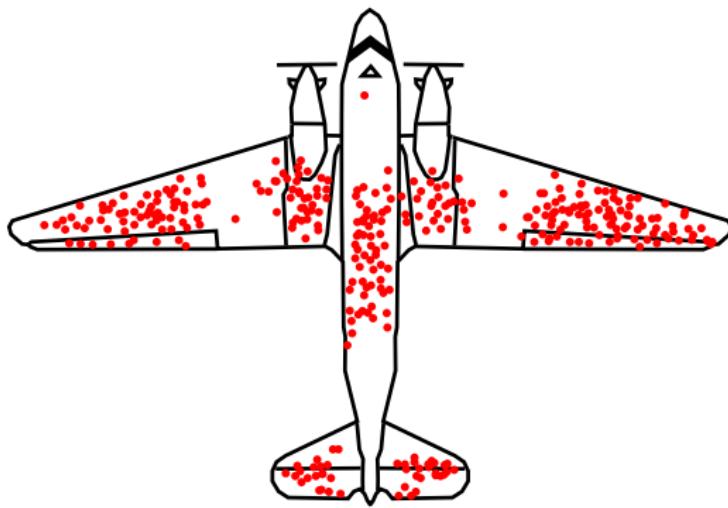
Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires de densité jointe π_{XY} et de lois marginales π_X et π_Y . La densité de la **loi conditionnelle** $\pi_{X|Y=y}$ de X conditionnée à $Y = y$ est :

$$\pi_{X|Y=\textcolor{blue}{y}}(\textcolor{green}{x}) = \frac{\pi_{XY}(\textcolor{green}{x}, \textcolor{blue}{y})}{\pi_Y(\textcolor{blue}{y})}$$

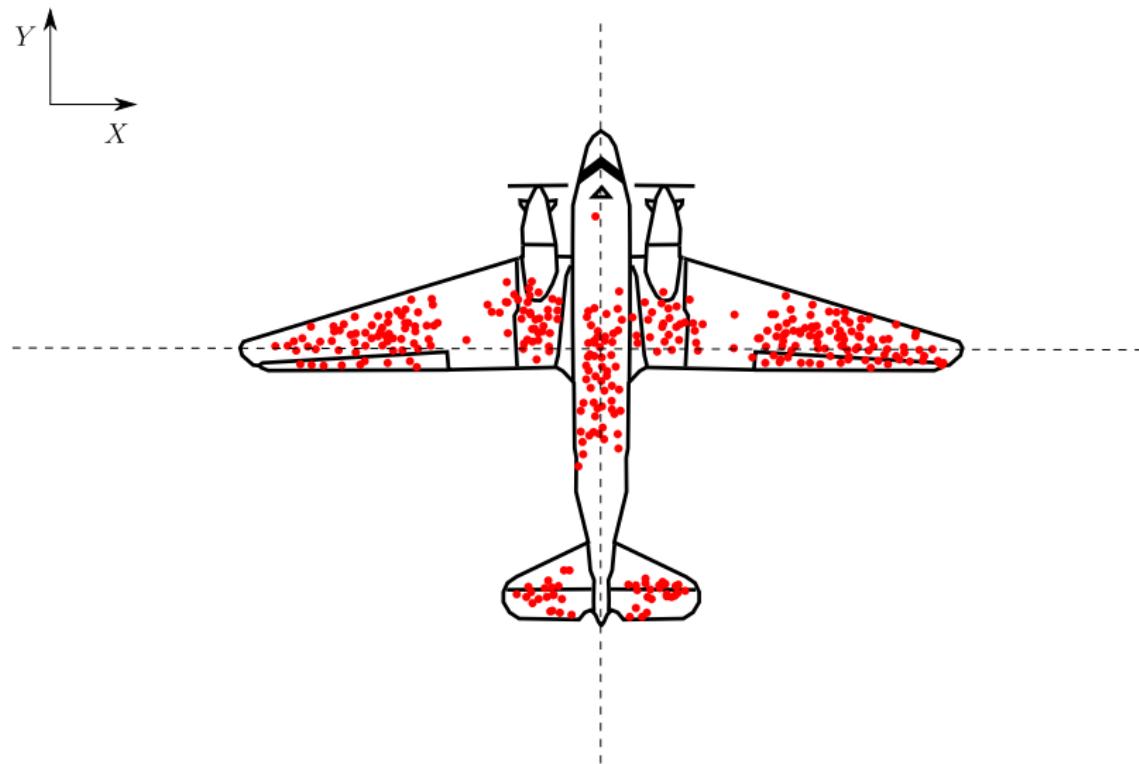
$X \setminus Y$	< 150 cm	> 150 cm < 160 cm	> 160 cm < 170 cm	> 170 cm < 180 cm	> 180 cm < 190 cm	> 190 cm
♀						
♂	2%	12%	22%	30%	22%	12%

$$X = \textcolor{blue}{\circlearrowleft} \qquad P_{Y|X}$$

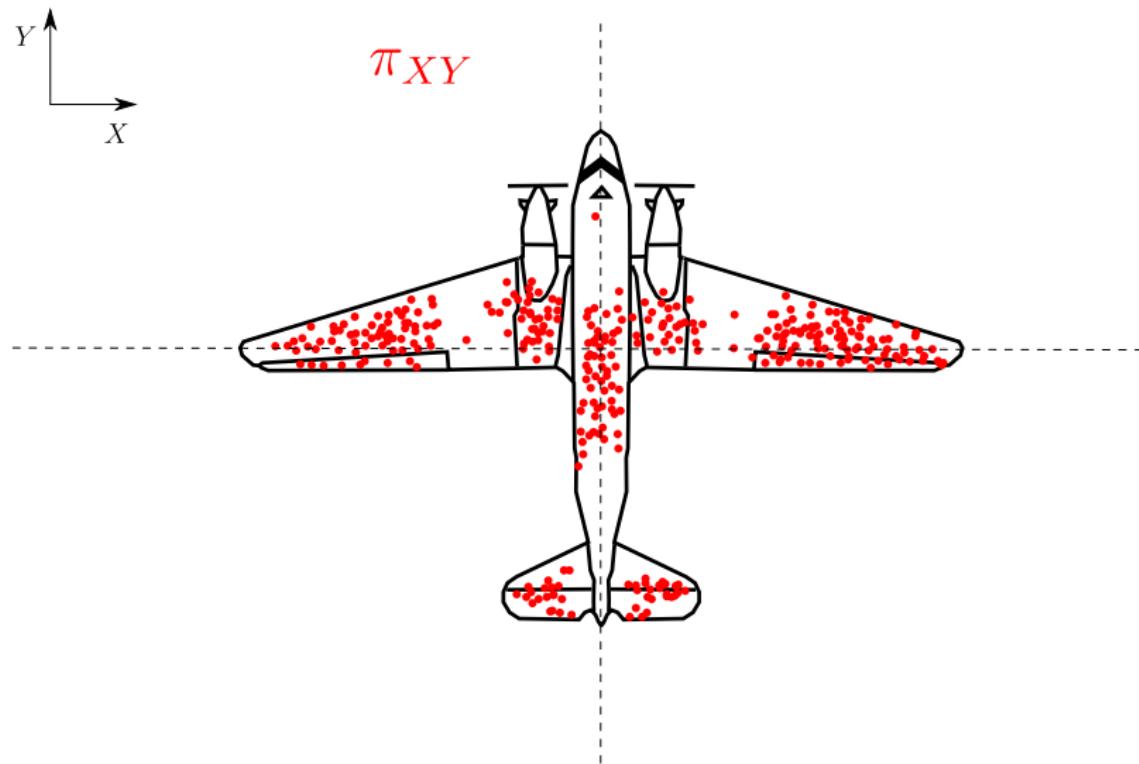
Un peu de multivarié...



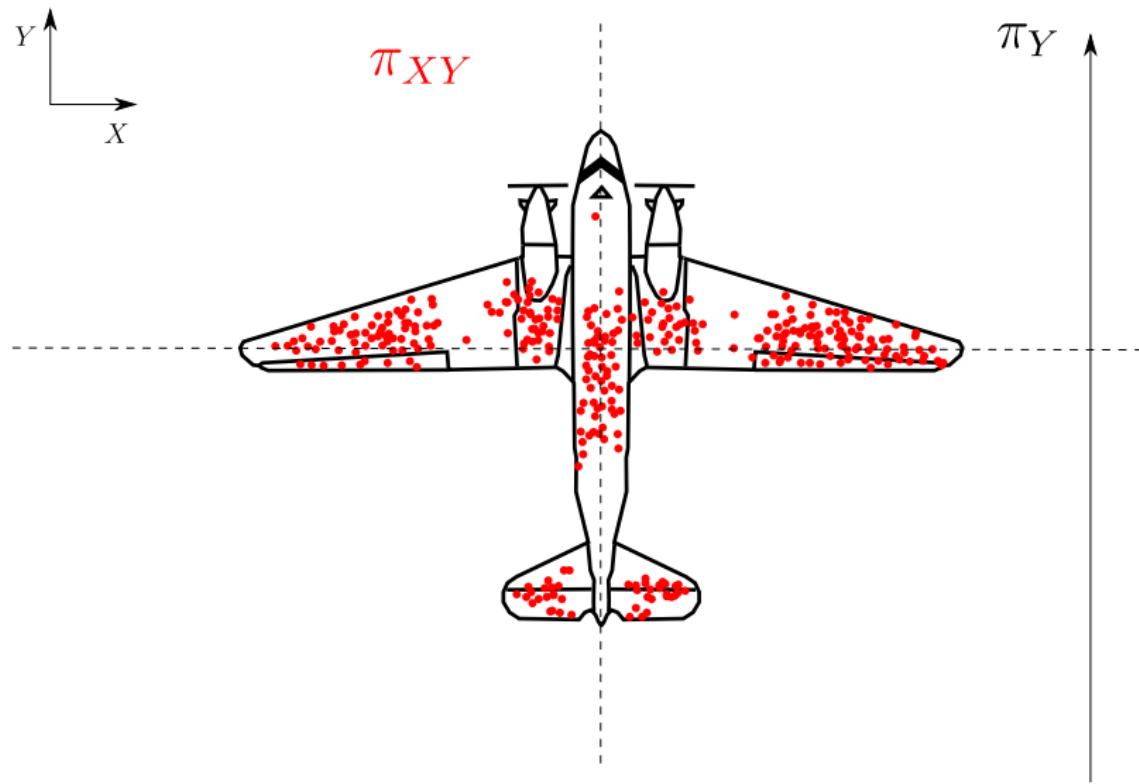
Un peu de multivarié...



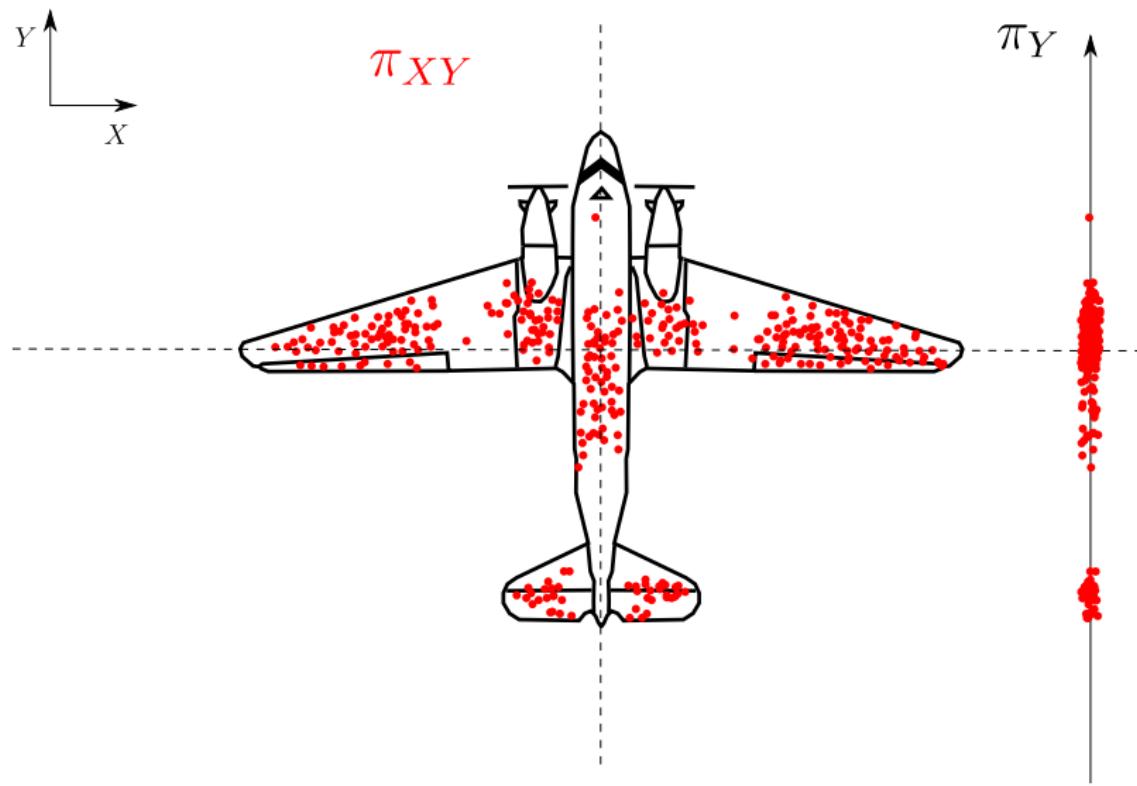
Un peu de multivarié...



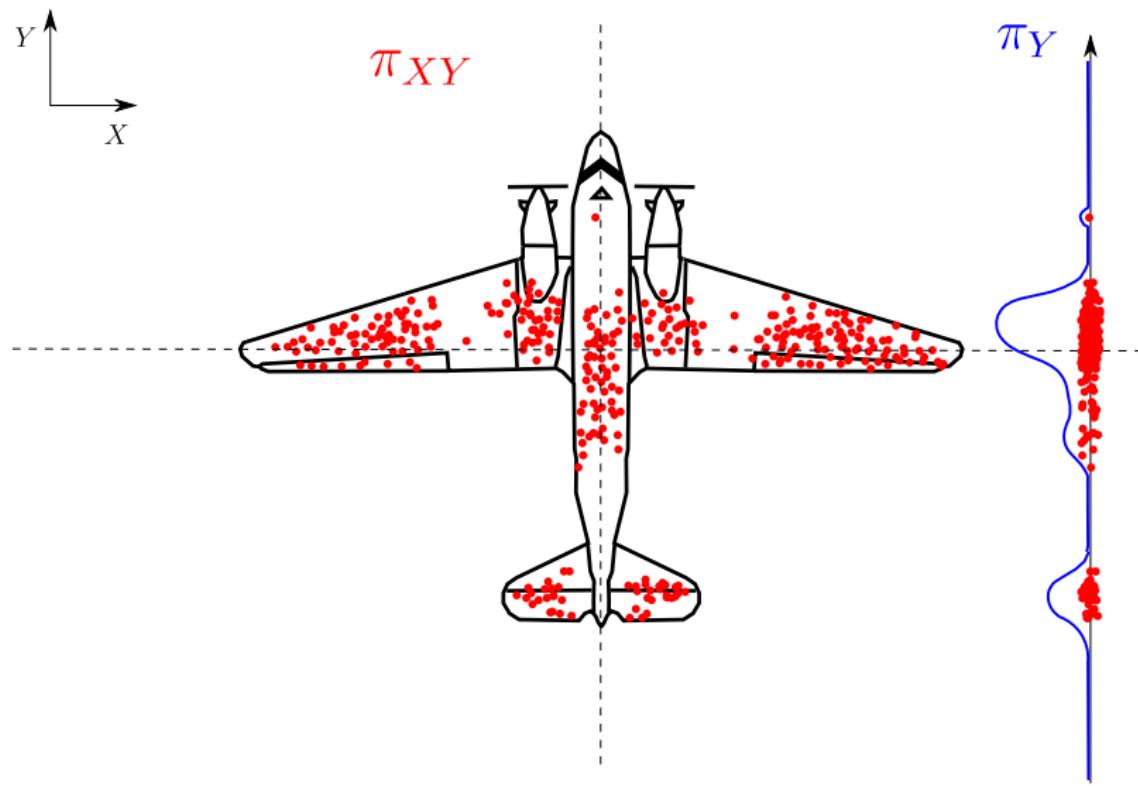
Un peu de multivarié...



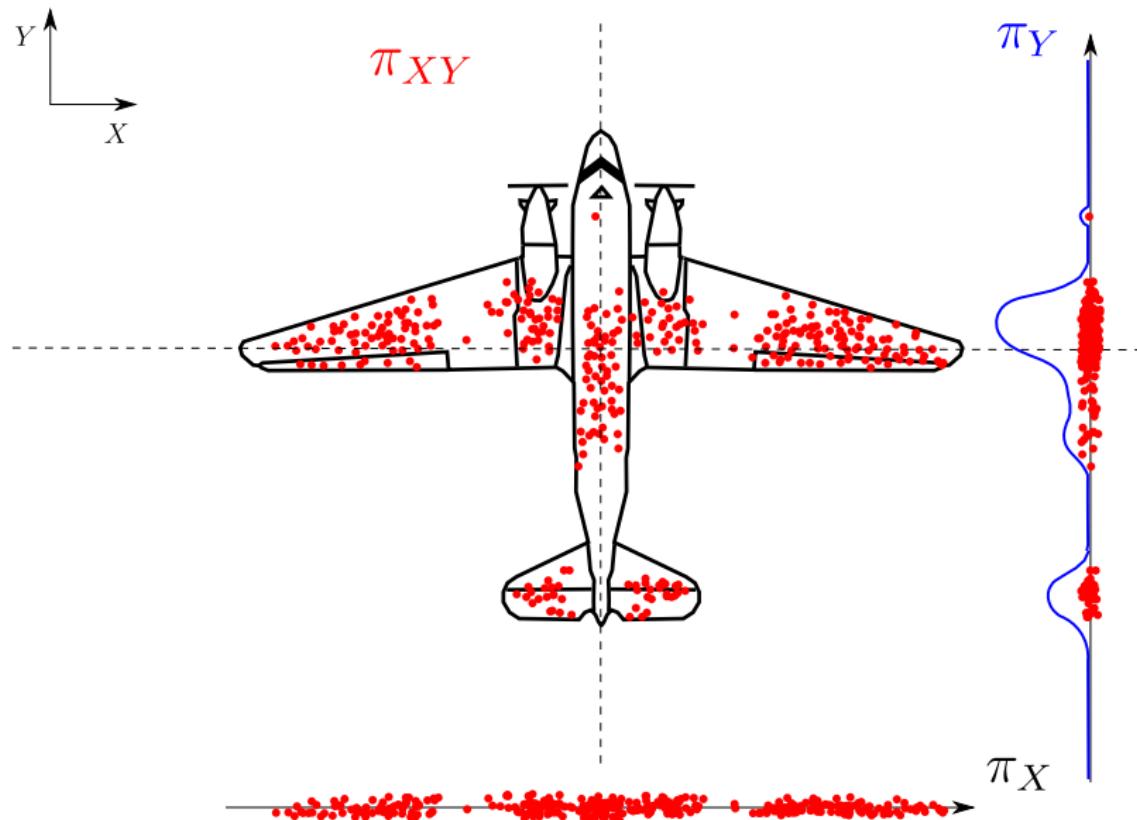
Un peu de multivarié...



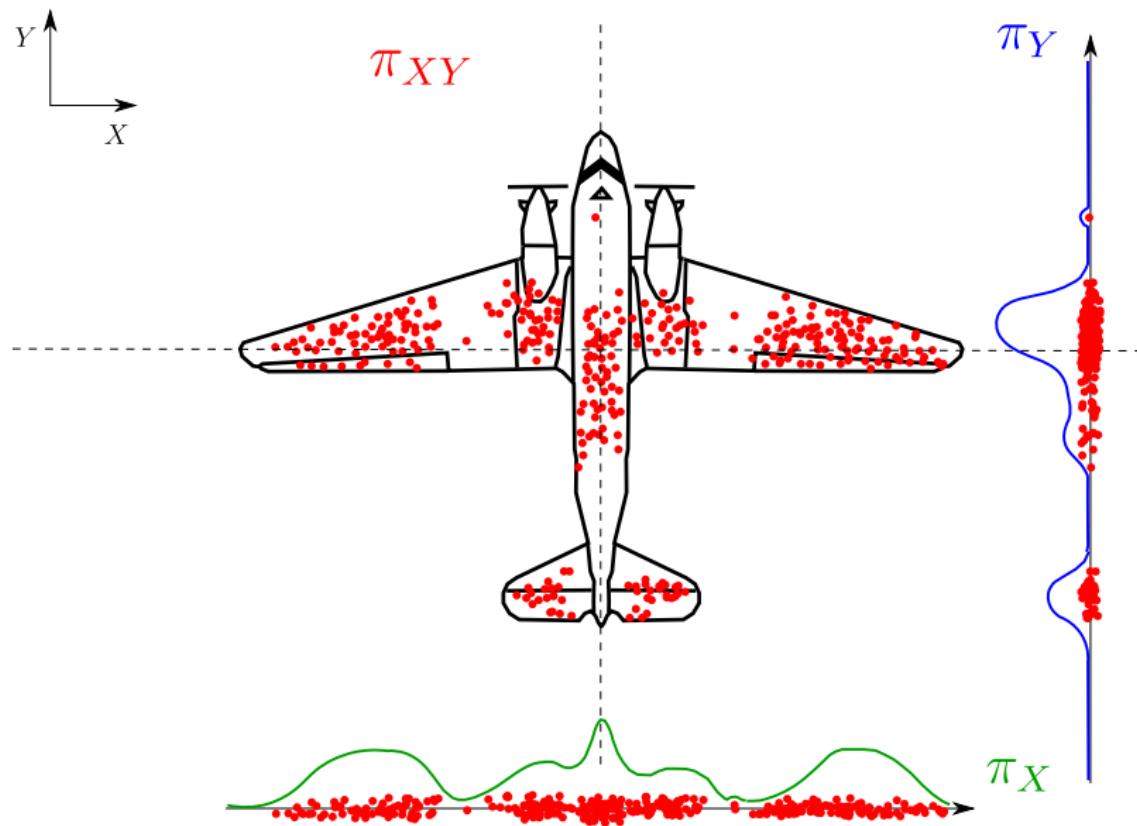
Un peu de multivarié...



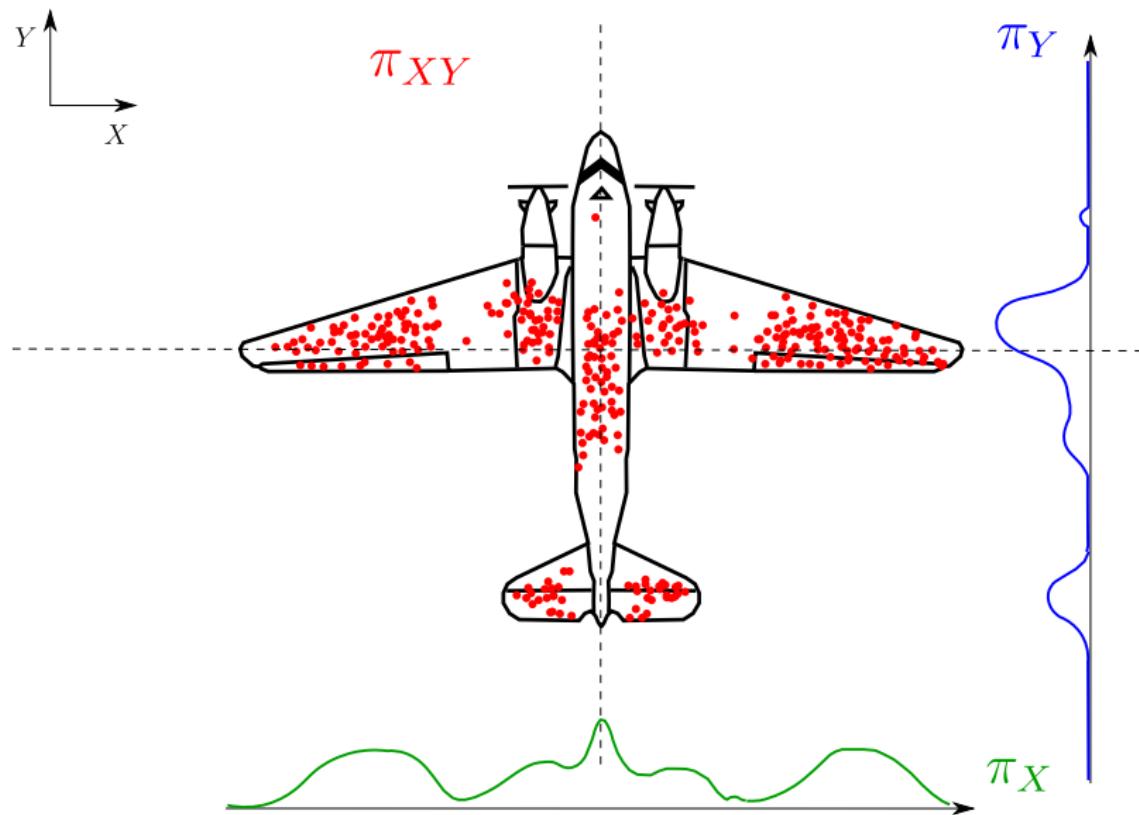
Un peu de multivarié...



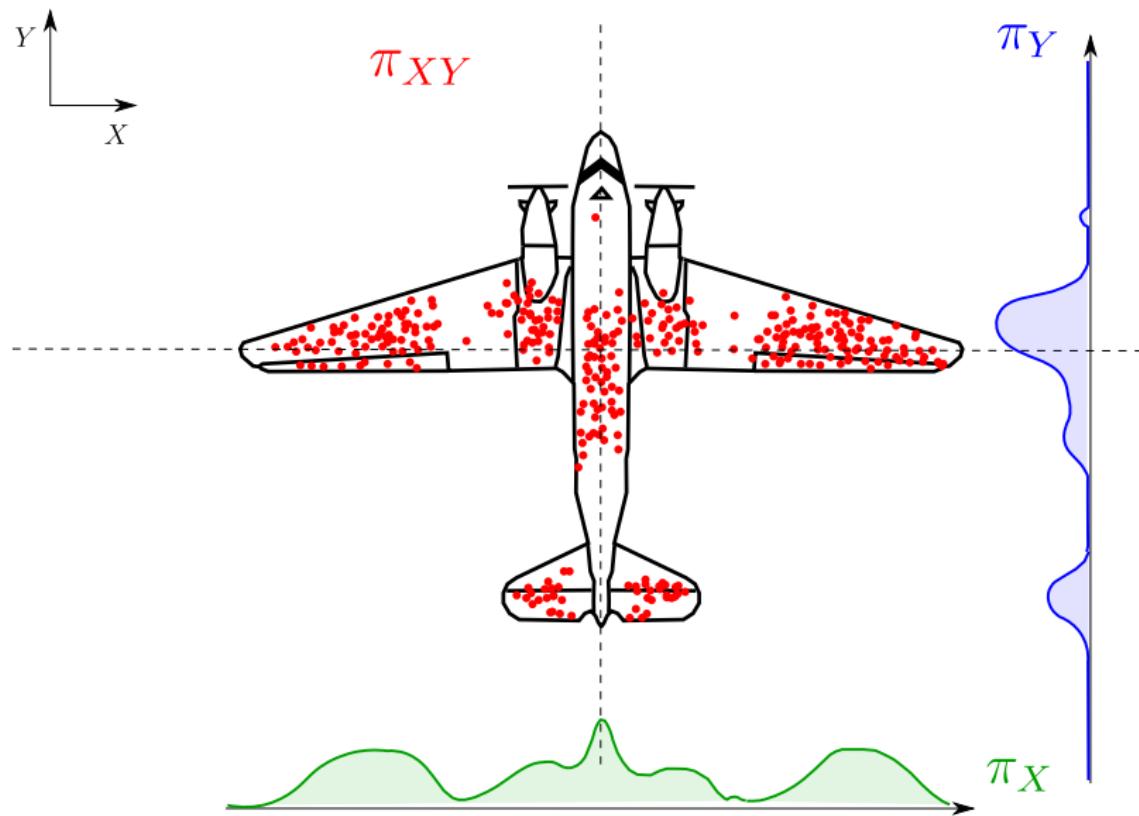
Un peu de multivarié...



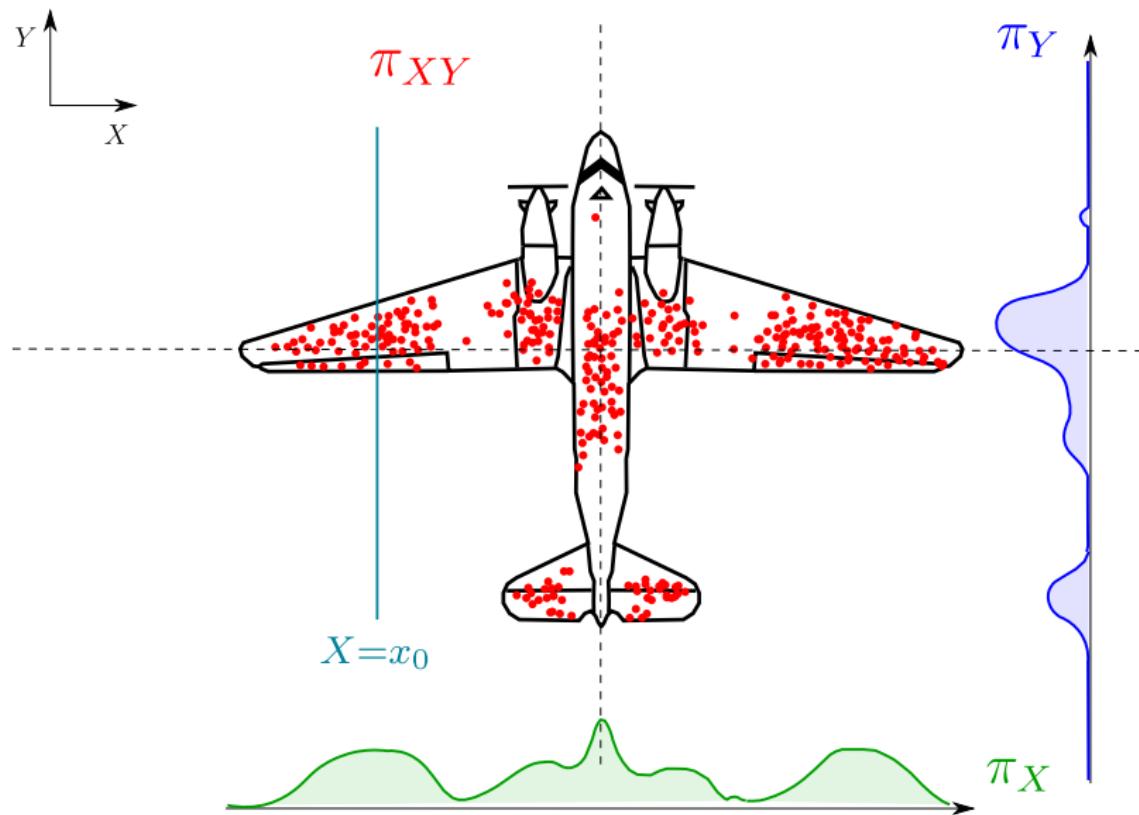
Un peu de multivarié...



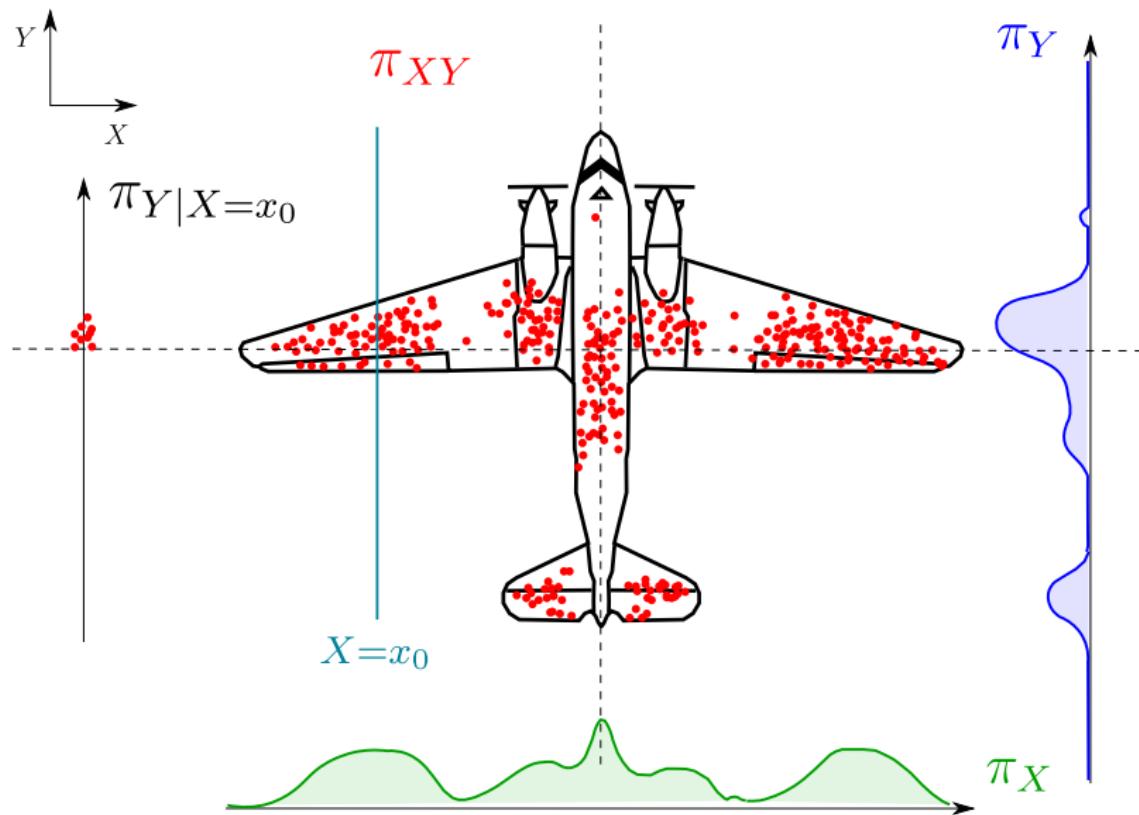
Un peu de multivarié...



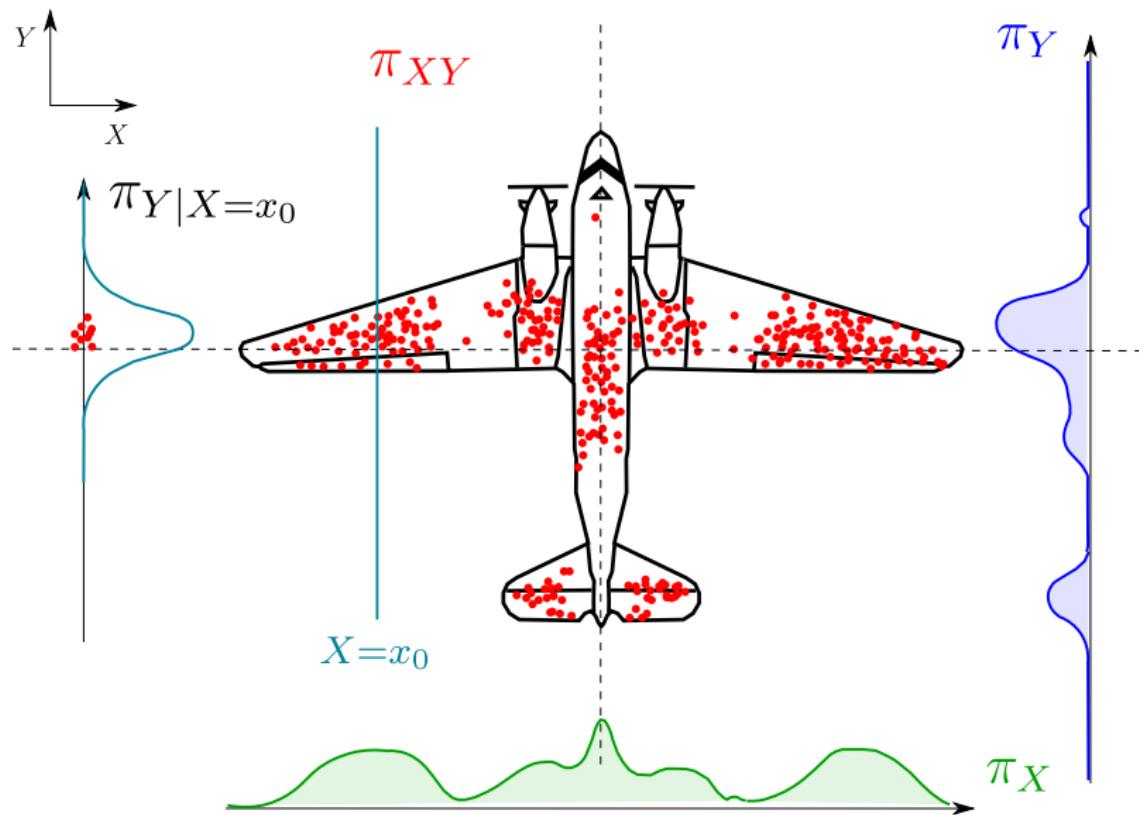
Un peu de multivarié...



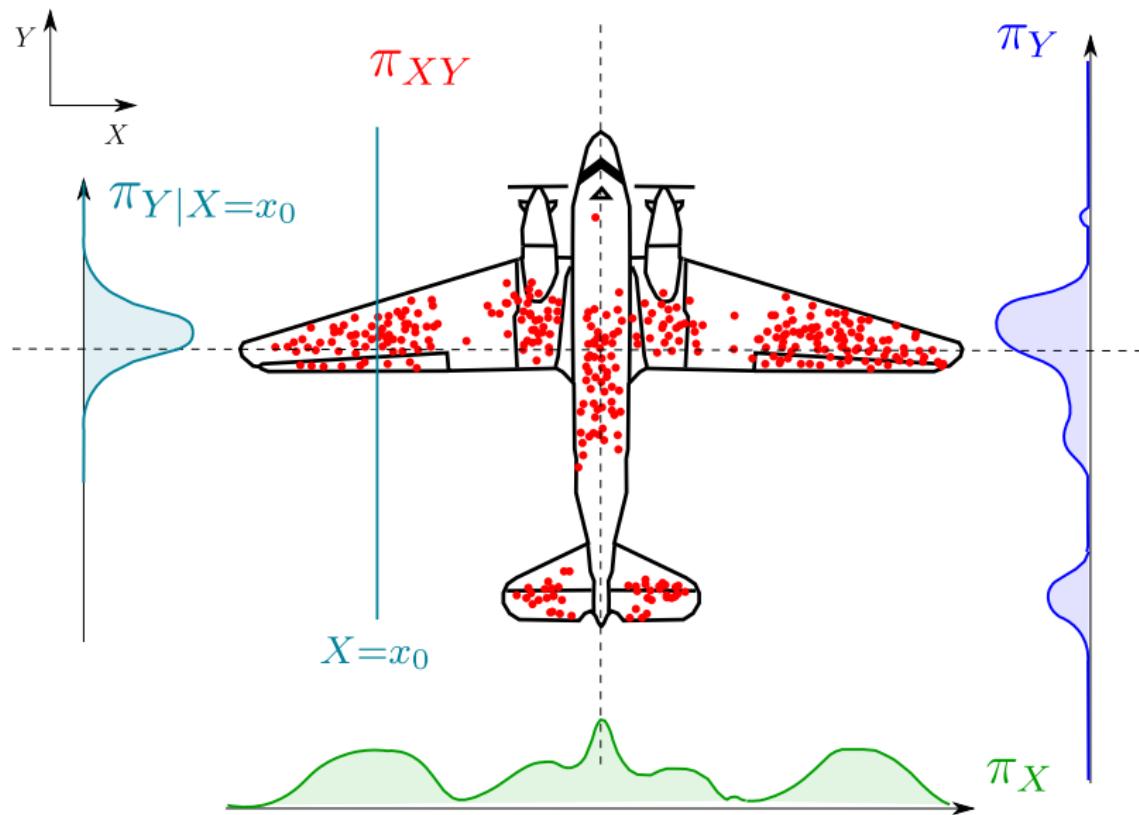
Un peu de multivarié...



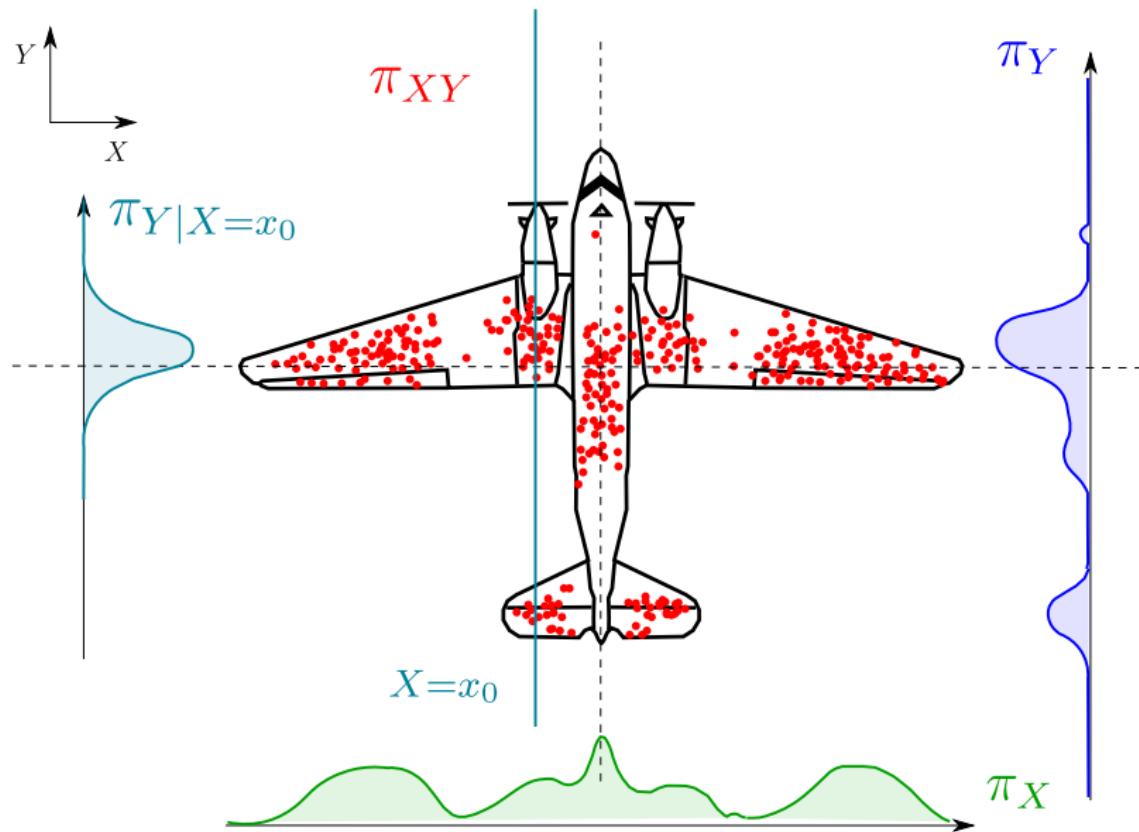
Un peu de multivarié...



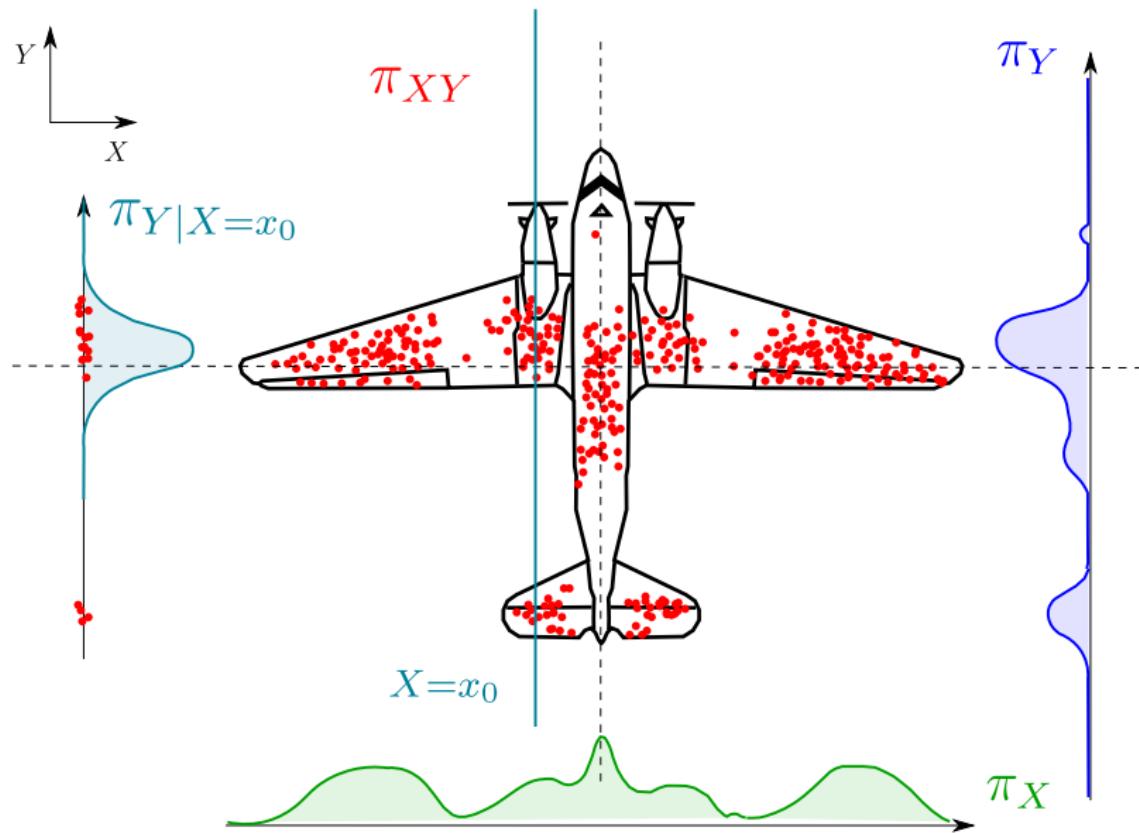
Un peu de multivarié...



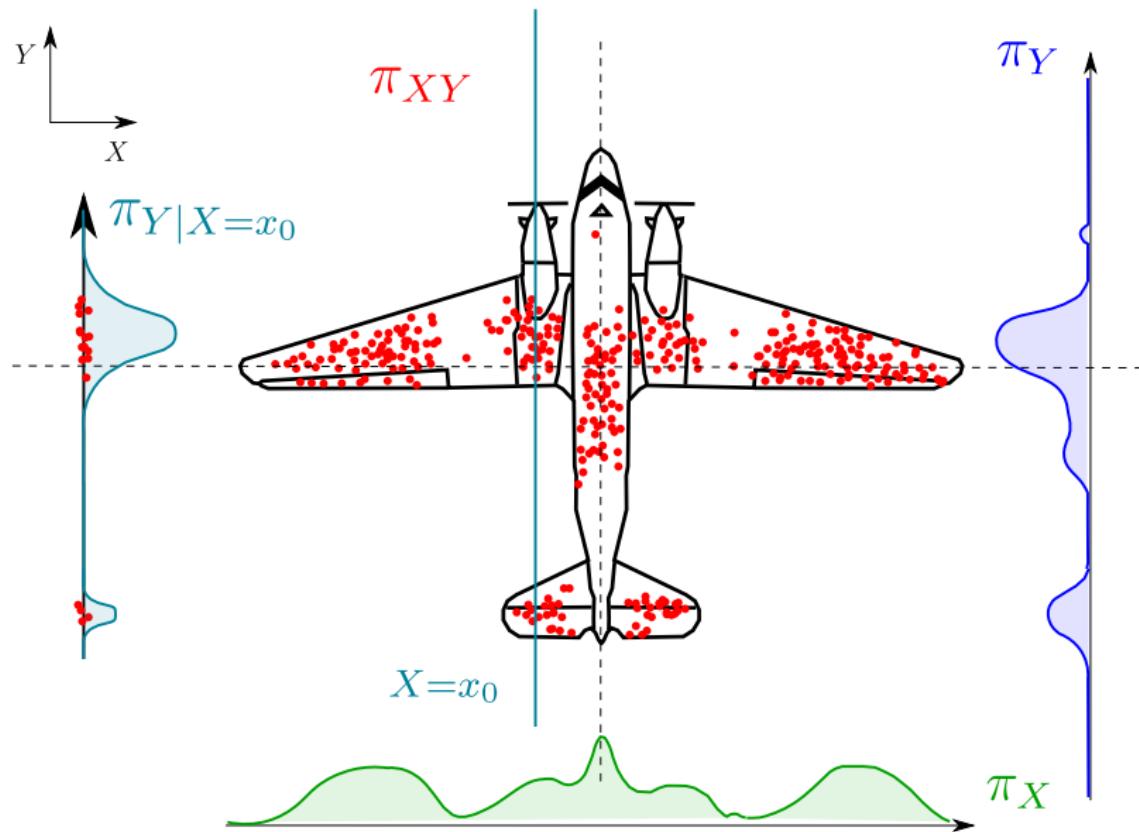
Un peu de multivarié...



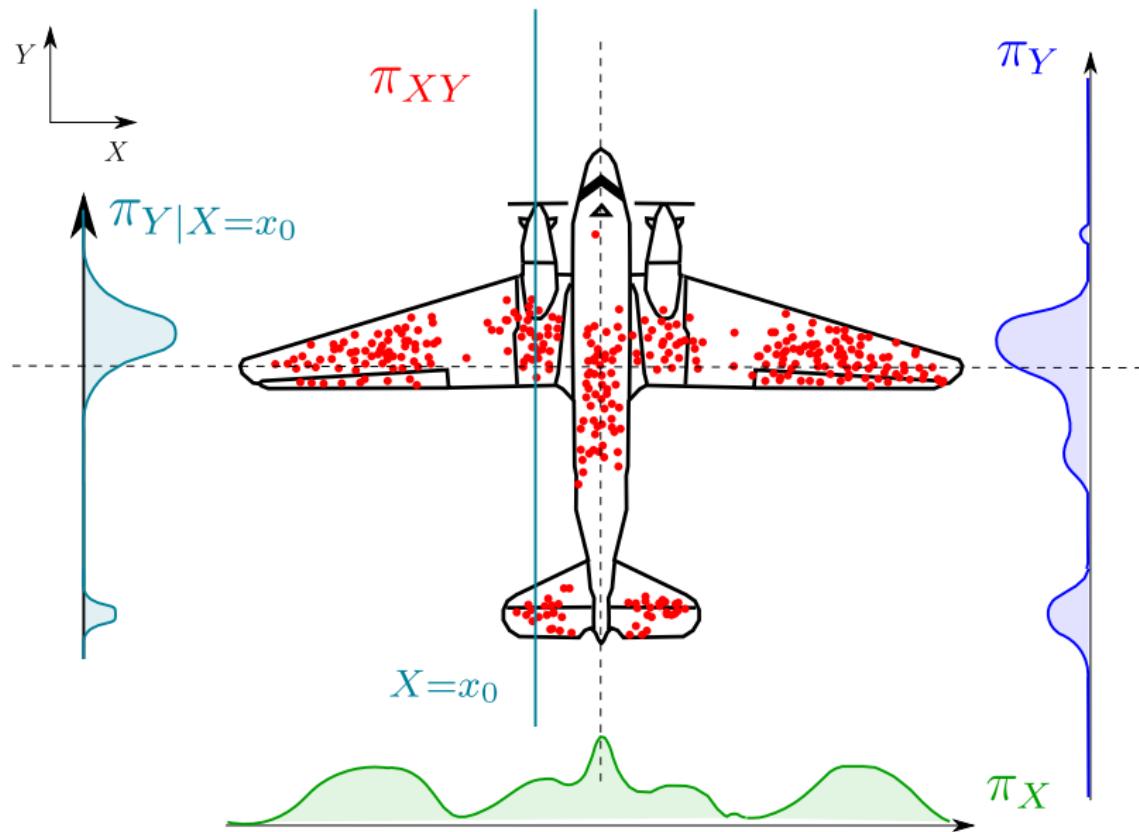
Un peu de multivarié...



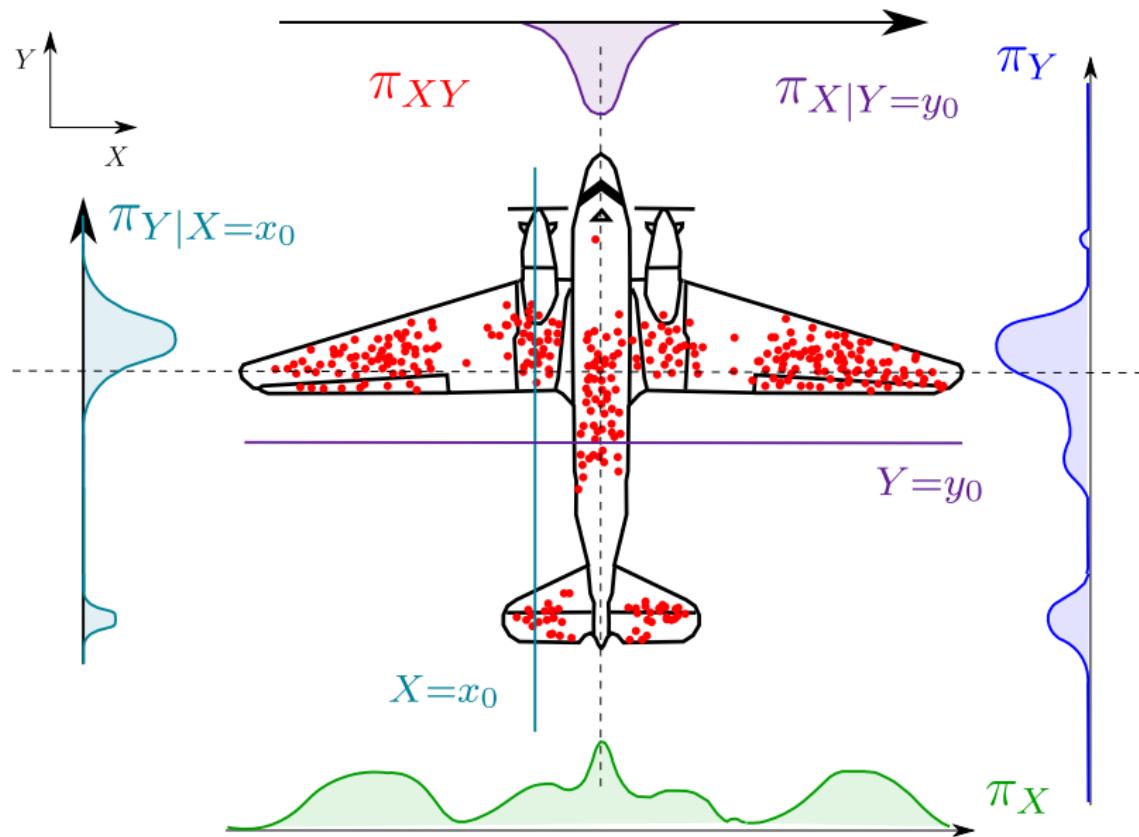
Un peu de multivarié...



Un peu de multivarié...



Un peu de multivarié...

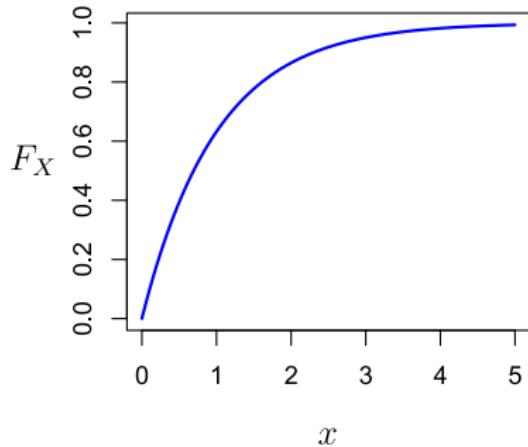


Retour sur la loi exponentielle

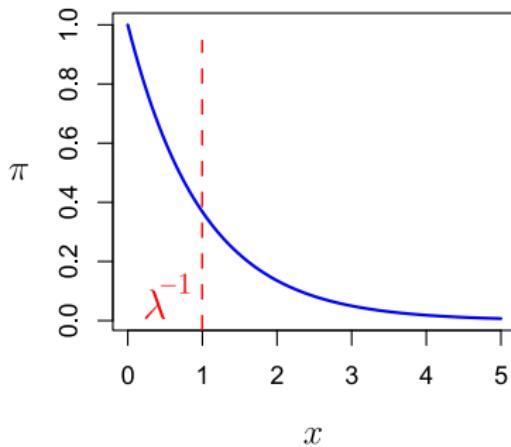
Loi exponentielle

$\lambda \in \mathbb{R}_+$

$X \sim \mathcal{E}(\lambda)$

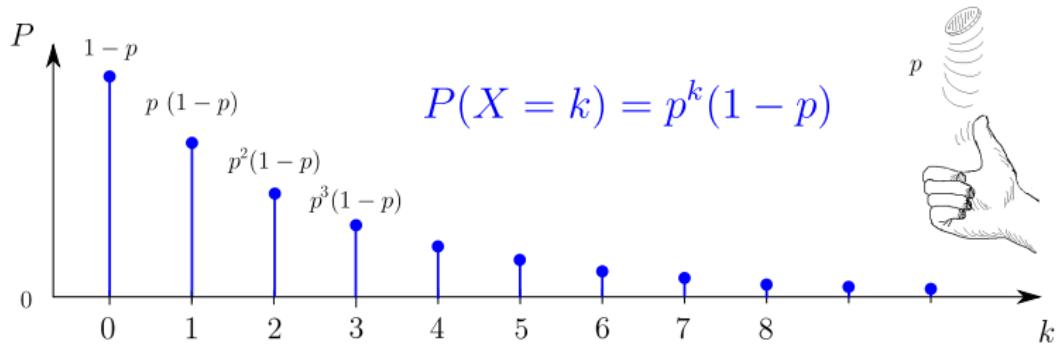


$$F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x}$$



$$\pi(x) = \lambda e^{-\lambda x}$$

Retour sur la loi exponentielle



Retour sur la loi exponentielle

La variable $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$ représente la durée de vie d'un composant.

Retour sur la loi exponentielle

La variable $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$ représente la durée de vie d'un composant.

Propriété

La loi de X est **sans mémoire** : la probabilité que le composant résiste sur une durée $t + \Delta t$ sachant qu'il est déjà agé de t est égale à celle d'une durée Δt en *sortie d'usine*.

Retour sur la loi exponentielle

La variable $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$ représente la durée de vie d'un composant.

Propriété

La loi de X est **sans mémoire** : la probabilité que le composant résiste sur une durée $t + \Delta t$ sachant qu'il est déjà agé de t est égale à celle d'une durée Δt en *sortie d'usine*.

$$\mathbb{P}(X \geq t + \Delta t \mid X \geq t)$$

Retour sur la loi exponentielle

La variable $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$ représente la durée de vie d'un composant.

Propriété

La loi de X est **sans mémoire** : la probabilité que le composant résiste sur une durée $t + \Delta t$ sachant qu'il est déjà agé de t est égale à celle d'une durée Δt en *sortie d'usine*.

$$\mathbb{P}(X \geq t + \Delta t \mid X \geq t) = \frac{\mathbb{P}(X \geq t + \Delta t, X \geq t)}{\mathbb{P}(X \geq t)} = \frac{\mathbb{P}(X \geq t + \Delta t)}{\mathbb{P}(X \geq t)}$$

Retour sur la loi exponentielle

La variable $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$ représente la durée de vie d'un composant.

Propriété

La loi de X est **sans mémoire** : la probabilité que le composant résiste sur une durée $t + \Delta t$ sachant qu'il est déjà agé de t est égale à celle d'une durée Δt en *sortie d'usine*.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X \geq t + \Delta t \mid X \geq t) &= \frac{\mathbb{P}(X \geq t + \Delta t, X \geq t)}{\mathbb{P}(X \geq t)} = \frac{\mathbb{P}(X \geq t + \Delta t)}{\mathbb{P}(X \geq t)} \\ &= \frac{1 - F_X(t + \Delta t)}{1 - F_X(t)} = \frac{e^{-\lambda(t + \Delta t)}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda \Delta t} = 1 - F_X(\Delta t) = \mathbb{P}(X \geq \Delta t)\end{aligned}$$

Retour sur la loi exponentielle

La variable $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$ représente la durée de vie d'un composant.

Propriété

La loi de X est **sans mémoire** : la probabilité que le composant résiste sur une durée $t + \Delta t$ sachant qu'il est déjà agé de t est égale à celle d'une durée Δt en *sortie d'usine*.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X \geq t + \Delta t \mid X \geq t) &= \frac{\mathbb{P}(X \geq t + \Delta t, X \geq t)}{\mathbb{P}(X \geq t)} = \frac{\mathbb{P}(X \geq t + \Delta t)}{\mathbb{P}(X \geq t)} \\ &= \frac{1 - F_X(t + \Delta t)}{1 - F_X(t)} = \frac{e^{-\lambda(t+\Delta t)}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda \Delta t} = 1 - F_X(\Delta t) = \mathbb{P}(X \geq \Delta t) \\ \mathbb{P}(X \geq t + \Delta t \mid X \geq t) &= \mathbb{P}(X \geq \Delta t)\end{aligned}$$

Retour sur la loi exponentielle

La variable $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$ représente la durée de vie d'un composant.

Propriété

La loi de X est **sans mémoire** : la probabilité que le composant résiste sur une durée $t + \Delta t$ sachant qu'il est déjà agé de t est égale à celle d'une durée Δt en *sortie d'usine*.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X \geq t + \Delta t \mid X \geq t) &= \frac{\mathbb{P}(X \geq t + \Delta t, X \geq t)}{\mathbb{P}(X \geq t)} = \frac{\mathbb{P}(X \geq t + \Delta t)}{\mathbb{P}(X \geq t)} \\ &= \frac{1 - F_X(t + \Delta t)}{1 - F_X(t)} = \frac{e^{-\lambda(t+\Delta t)}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda \Delta t} = 1 - F_X(\Delta t) = \mathbb{P}(X \geq \Delta t) \\ \mathbb{P}(X \geq t + \Delta t \mid X \geq t) &= \mathbb{P}(X \geq \Delta t) \quad \blacksquare\end{aligned}$$

Retour sur la loi exponentielle

La variable $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$ représente la durée de vie d'un composant.

Propriété

La loi de X est **sans mémoire** : la probabilité que le composant résiste sur une durée $t + \Delta t$ sachant qu'il est déjà agé de t est égale à celle d'une durée Δt en *sortie d'usine*.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X \geq t + \Delta t \mid X \geq t) &= \frac{\mathbb{P}(X \geq t + \Delta t, X \geq t)}{\mathbb{P}(X \geq t)} = \frac{\mathbb{P}(X \geq t + \Delta t)}{\mathbb{P}(X \geq t)} \\ &= \frac{1 - F_X(t + \Delta t)}{1 - F_X(t)} = \frac{e^{-\lambda(t+\Delta t)}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda \Delta t} = 1 - F_X(\Delta t) = \mathbb{P}(X \geq \Delta t) \\ \mathbb{P}(X \geq t + \Delta t \mid X \geq t) &= \mathbb{P}(X \geq \Delta t) \quad \blacksquare\end{aligned}$$

On dit que \mathcal{E} est la loi d'un processus **sans vieillissement**.

Un peu de multivarié...

Dans certains cas, X et Y peuvent être traitées séparément.

Dans certains cas, X et Y peuvent être traitées séparément.

Indépendance

Deux variables aléatoires X et Y sont **indépendantes** si, et seulement si, l'observation de l'une d'entre elles n'apporte aucune information sur la loi de l'autre :

$$\mathbb{P}(X|Y) = \mathbb{P}(X)$$

Dans certains cas, X et Y peuvent être traitées séparément.

Indépendance

Deux variables aléatoires X et Y sont **indépendantes** si, et seulement si, l'observation de l'une d'entre elles n'apporte aucune information sur la loi de l'autre :

$$\mathbb{P}(X|Y) = \mathbb{P}(X)$$

Dans certains cas, X et Y peuvent être traitées séparément.

Indépendance

Deux variables aléatoires X et Y sont **indépendantes** si, et seulement si, l'observation de l'une d'entre elles n'apporte aucune information sur la loi de l'autre :

$$\mathbb{P}(Y|X) = \mathbb{P}(Y)$$

Dans certains cas, X et Y peuvent être traitées séparément.

Indépendance

Deux variables aléatoires X et Y sont **indépendantes** si, et seulement si, l'observation de l'une d'entre elles n'apporte aucune information sur la loi de l'autre :

$$\mathbb{P}(X|Y) = \mathbb{P}(X) \Leftrightarrow \mathbb{P}(Y|X) = \mathbb{P}(Y)$$

Dans certains cas, X et Y peuvent être traitées séparément.

Indépendance

Deux variables aléatoires X et Y sont **indépendantes** si, et seulement si, l'observation de l'une d'entre elles n'apporte aucune information sur la loi de l'autre :

$$\mathbb{P}(X|Y) = \mathbb{P}(X) \Leftrightarrow \mathbb{P}(Y|X) = \mathbb{P}(Y)$$

Conséquence :

Dans certains cas, X et Y peuvent être traitées séparément.

Indépendance

Deux variables aléatoires X et Y sont **indépendantes** si, et seulement si, l'observation de l'une d'entre elles n'apporte aucune information sur la loi de l'autre :

$$\mathbb{P}(X|Y) = \mathbb{P}(X) \Leftrightarrow \mathbb{P}(Y|X) = \mathbb{P}(Y)$$

Conséquence :

$$\overbrace{\mathbb{P}(X,Y)}^{\text{Chain rule}} = \mathbb{P}(X|Y) \times \mathbb{P}(Y)$$

Dans certains cas, X et Y peuvent être traitées séparément.

Indépendance

Deux variables aléatoires X et Y sont **indépendantes** si, et seulement si, l'observation de l'une d'entre elles n'apporte aucune information sur la loi de l'autre :

$$\mathbb{P}(X|Y) = \mathbb{P}(X) \Leftrightarrow \mathbb{P}(Y|X) = \mathbb{P}(Y)$$

Conséquence :

$$\overbrace{\mathbb{P}(X, Y)}^{\text{Chain rule}} = \mathbb{P}(X|Y) \times \mathbb{P}(Y) = \mathbb{P}(X) \times \mathbb{P}(Y)$$

Dans certains cas, X et Y peuvent être traitées séparément.

Indépendance

Deux variables aléatoires X et Y sont indépendantes si, et seulement si, l'observation de l'une d'entre elles n'apporte aucune information sur la loi de l'autre :

$$\mathbb{P}(X|Y) = \mathbb{P}(X) \Leftrightarrow \mathbb{P}(Y|X) = \mathbb{P}(Y)$$

Conséquence :

$$\overbrace{\mathbb{P}(X, Y) = \mathbb{P}(X|Y) \times \mathbb{P}(Y)}^{\text{Chain rule}} = \mathbb{P}(X) \times \mathbb{P}(Y)$$

E.g : $\mathbb{P}(\text{mardi, Joseph}) = \mathbb{P}(\text{mardi}) \times \mathbb{P}(\text{Joseph})$

Dans certains cas, X et Y peuvent être traitées séparément.

Indépendance

Deux variables aléatoires X et Y sont **indépendantes** si, et seulement si, l'observation de l'une d'entre elles n'apporte aucune information sur la loi de l'autre :

$$\mathbb{P}(X|Y) = \mathbb{P}(X) \Leftrightarrow \mathbb{P}(Y|X) = \mathbb{P}(Y)$$

Conséquence :

$$\underbrace{\mathbb{P}(X, Y) = \mathbb{P}(X|Y) \times \mathbb{P}(Y)}_{\text{Chain rule}} = \mathbb{P}(X) \times \mathbb{P}(Y)$$

E.g : 0.042% = 14% \times 0.3%

Dans certains cas, X et Y peuvent être traitées séparément.

Indépendance

Deux variables aléatoires X et Y sont indépendantes si, et seulement si, l'observation de l'une d'entre elles n'apporte aucune information sur la loi de l'autre :

$$\mathbb{P}(X|Y) = \mathbb{P}(X) \Leftrightarrow \mathbb{P}(Y|X) = \mathbb{P}(Y)$$

Conséquence :

$$\overbrace{\mathbb{P}(X, Y) = \mathbb{P}(X|Y) \times \mathbb{P}(Y)}^{\text{Chain rule}} = \mathbb{P}(X) \times \mathbb{P}(Y)$$

E.g : $\mathbb{P}(\text{lunettes, retraite}) \neq \mathbb{P}(\text{lunettes}) \times \mathbb{P}(\text{retraite})$

Dans certains cas, X et Y peuvent être traitées séparément.

Indépendance

Deux variables aléatoires X et Y sont **indépendantes** si, et seulement si, l'observation de l'une d'entre elles n'apporte aucune information sur la loi de l'autre :

$$\mathbb{P}(X|Y) = \mathbb{P}(X) \Leftrightarrow \mathbb{P}(Y|X) = \mathbb{P}(Y)$$

Conséquence :

$$\underbrace{\mathbb{P}(X, Y) = \mathbb{P}(X|Y) \times \mathbb{P}(Y)}_{\text{Chain rule}} = \mathbb{P}(X) \times \mathbb{P}(Y)$$

E.g : $\mathbb{P}(\text{lunettes, retraite}) \neq 76\% \times 26\%$

Dans certains cas, X et Y peuvent être traitées séparément.

Indépendance

Deux variables aléatoires X et Y sont indépendantes si, et seulement si, l'observation de l'une d'entre elles n'apporte aucune information sur la loi de l'autre :

$$\mathbb{P}(X|Y) = \mathbb{P}(X) \Leftrightarrow \mathbb{P}(Y|X) = \mathbb{P}(Y)$$

Conséquence :

$$\underbrace{\mathbb{P}(X, Y) = \mathbb{P}(X|Y) \times \mathbb{P}(Y)}_{\text{Chain rule}} = \mathbb{P}(X) \times \mathbb{P}(Y)$$

E.g : $\mathbb{P}(\text{lunettes, retraite}) \neq 76\% \times 26\% = 19\%$

Dans certains cas, X et Y peuvent être traitées séparément.

Indépendance

Deux variables aléatoires X et Y sont indépendantes si, et seulement si, l'observation de l'une d'entre elles n'apporte aucune information sur la loi de l'autre :

$$\mathbb{P}(X|Y) = \mathbb{P}(X) \Leftrightarrow \mathbb{P}(Y|X) = \mathbb{P}(Y)$$

Conséquence :

$$\overbrace{\mathbb{P}(X, Y) = \mathbb{P}(X|Y) \times \mathbb{P}(Y)}^{\text{Chain rule}} = \mathbb{P}(X) \times \mathbb{P}(Y)$$

E.g : $\mathbb{P}(\text{lunettes, retraite}) = \mathbb{P}(\text{retraite}) \times \mathbb{P}(\text{lunettes} | \text{retraite})$

Dans certains cas, X et Y peuvent être traitées séparément.

Indépendance

Deux variables aléatoires X et Y sont indépendantes si, et seulement si, l'observation de l'une d'entre elles n'apporte aucune information sur la loi de l'autre :

$$\mathbb{P}(X|Y) = \mathbb{P}(X) \Leftrightarrow \mathbb{P}(Y|X) = \mathbb{P}(Y)$$

Conséquence :

$$\underbrace{\mathbb{P}(X, Y)}_{\text{Chain rule}} = \mathbb{P}(X|Y) \times \mathbb{P}(Y) = \mathbb{P}(X) \times \mathbb{P}(Y)$$

E.g : $\mathbb{P}(\text{lunettes, retraite}) = 26\% \times \mathbb{P}(\text{lunettes} | \text{retraite})$

Dans certains cas, X et Y peuvent être traitées séparément.

Indépendance

Deux variables aléatoires X et Y sont **indépendantes** si, et seulement si, l'observation de l'une d'entre elles n'apporte aucune information sur la loi de l'autre :

$$\mathbb{P}(X|Y) = \mathbb{P}(X) \Leftrightarrow \mathbb{P}(Y|X) = \mathbb{P}(Y)$$

Conséquence :

$$\underbrace{\mathbb{P}(X, Y)}_{\text{Chain rule}} = \mathbb{P}(X|Y) \times \mathbb{P}(Y) = \mathbb{P}(X) \times \mathbb{P}(Y)$$

E.g : $\mathbb{P}(\text{lunettes, retraite}) \approx 26\% \times 100\%$

Dans certains cas, X et Y peuvent être traitées séparément.

Indépendance

Deux variables aléatoires X et Y sont indépendantes si, et seulement si, l'observation de l'une d'entre elles n'apporte aucune information sur la loi de l'autre :

$$\mathbb{P}(X|Y) = \mathbb{P}(X) \Leftrightarrow \mathbb{P}(Y|X) = \mathbb{P}(Y)$$

Conséquence :

$$\underbrace{\mathbb{P}(X, Y) = \mathbb{P}(X|Y) \times \mathbb{P}(Y)}_{\text{Chain rule}} = \mathbb{P}(X) \times \mathbb{P}(Y)$$

E.g : $\mathbb{P}(\text{lunettes, retraite}) \approx 26\% \times 100\% = 26\%$

Un peu de multivarié...

Règle de chaînage des probabilités (chain rule) :

$$P(X, Y) = P(X|Y)P(Y)$$

Un peu de multivarié...

Règle de chaînage des probabilités (chain rule) :

$$\overbrace{P(X, Y)}^{\text{Jointe}} = \overbrace{P(X|Y)}^{\text{Conditionnelle}} \times \overbrace{P(Y)}^{\text{Marginale}}$$

Un peu de multivarié...

Règle de chaînage des probabilités (chain rule) :

$$\overbrace{P(X, Y)}^{\text{Jointe}} = \overbrace{P(X|Y)}^{\text{Conditionnelle}} \times \overbrace{P(Y)}^{\text{Marginale}}$$

E.g. $P(\textcolor{red}{A}, \textcolor{green}{B}, \textcolor{blue}{C}, \textcolor{teal}{D})$

Règle de chaînage des probabilités (chain rule) :

$$\overbrace{P(X, Y)}^{\text{Jointe}} = \overbrace{P(X|Y)}^{\text{Conditionnelle}} \times \overbrace{P(Y)}^{\text{Marginale}}$$

E.g. $P(\textcolor{red}{A}, \textcolor{green}{B}, \textcolor{blue}{C}, \textcolor{teal}{D}) = P(\textcolor{red}{A}, \textcolor{green}{B}, \textcolor{blue}{C}|\textcolor{teal}{D})P(\textcolor{teal}{D})$

Un peu de multivarié...

Règle de chaînage des probabilités (chain rule) :

$$\overbrace{P(X, Y)}^{\text{Jointe}} = \overbrace{P(X|Y)}^{\text{Conditionnelle}} \times \overbrace{P(Y)}^{\text{Marginale}}$$

E.g. $P(\textcolor{red}{A}, \textcolor{green}{B}, \textcolor{blue}{C}, \textcolor{teal}{D}) = P(\textcolor{red}{A}, \textcolor{green}{B}|\textcolor{blue}{C}, \textcolor{teal}{D})P(\textcolor{blue}{C}|\textcolor{teal}{D})P(\textcolor{teal}{D})$

Règle de chaînage des probabilités (chain rule) :

$$\overbrace{P(X, Y)}^{\text{Jointe}} = \overbrace{P(X|Y)}^{\text{Conditionnelle}} \times \overbrace{P(Y)}^{\text{Marginale}}$$

E.g. $P(\textcolor{red}{A}, \textcolor{green}{B}, \textcolor{blue}{C}, \textcolor{teal}{D}) = P(\textcolor{red}{A}|\textcolor{green}{B}, \textcolor{blue}{C}, \textcolor{teal}{D})P(\textcolor{green}{B}|\textcolor{blue}{C}, \textcolor{teal}{D})P(\textcolor{blue}{C}|\textcolor{teal}{D})P(\textcolor{teal}{D})$

Règle de chaînage des probabilités (chain rule) :

$$\overbrace{P(X, Y)}^{\text{Jointe}} = \overbrace{P(X|Y)}^{\text{Conditionnelle}} \times \overbrace{P(Y)}^{\text{Marginale}}$$

E.g. $P(\textcolor{red}{A}, \textcolor{green}{B}, \textcolor{blue}{C}, \textcolor{teal}{D}) = P(\textcolor{red}{A}|\textcolor{green}{B}, \textcolor{blue}{C}, \textcolor{teal}{D})P(\textcolor{green}{B}|\textcolor{blue}{C}, \textcolor{teal}{D})P(\textcolor{blue}{C}|\textcolor{teal}{D})P(\textcolor{teal}{D})$

Règle de chaînage

Soient A_1, A_2, \dots, A_n une suite de variables aléatoires quelconques.
Alors, la loi jointe des A_k s'exprime par :

$$P(A_1, A_2, \dots, A_n) = \prod_{i=1}^n P(A_i \mid \{A_k\}_{k < i})$$

avec la convention que $P(A_i | \emptyset) = P(A_i)$

Théorie bayésienne des probabilités

Théorème de Bayes

Soient X et Y deux variables aléatoires. Alors :

$$P(X|Y) = \frac{P(Y|X)P(X)}{P(Y)}$$

Théorie bayésienne des probabilités

Théorème de Bayes

Soient X et Y deux variables aléatoires. Alors :

$$P(X|Y) = \frac{P(Y|X)P(X)}{P(Y)}$$

Preuve : $P(X|Y) = \frac{P(X,Y)}{P(Y)} \Rightarrow P(X,Y) = P(X|Y)P(Y) = P(Y|X)P(X) \Rightarrow P(X|Y) = \frac{P(Y|X)P(X)}{P(Y)}$

Théorie bayésienne des probabilités

Théorème de Bayes

Soient X et Y deux variables aléatoires. Alors :

$$P(X|Y) = \frac{P(Y|X)P(X)}{P(Y)}$$

Preuve : $P(X|Y) = \frac{P(X,Y)}{P(Y)} \Rightarrow P(X,Y) = P(X|Y)P(Y) = P(Y|X)P(X) \Rightarrow P(X|Y) = \frac{P(Y|X)P(X)}{P(Y)}$

Probabilités des causes : soit \mathcal{D} un ensemble de données observées et θ un jeu de causes (inconnues) ayant potentiellement généré \mathcal{D} .

$$P(\theta|\mathcal{D}) = \frac{P(\mathcal{D}|\theta)P(\theta)}{P(\mathcal{D})}$$

Théorie bayésienne des probabilités

Théorème de Bayes

Soient X et Y deux variables aléatoires. Alors :

$$P(X|Y) = \frac{P(Y|X)P(X)}{P(Y)}$$

Preuve : $P(X|Y) = \frac{P(X,Y)}{P(Y)} \Rightarrow P(X,Y) = P(X|Y)P(Y) = P(Y|X)P(X) \Rightarrow P(X|Y) = \frac{P(Y|X)P(X)}{P(Y)}$

Probabilités des causes : soit \mathcal{D} un ensemble de données observées et θ un jeu de causes (inconnues) ayant potentiellement généré \mathcal{D} .

$$\hat{\theta} = \operatorname{argmax}_{\theta \in \Theta} \frac{P(\mathcal{D}|\theta)P(\theta)}{P(\mathcal{D})}$$

Théorie bayésienne des probabilités

Théorème de Bayes

Soient X et Y deux variables aléatoires. Alors :

$$P(X|Y) = \frac{P(Y|X)P(X)}{P(Y)}$$

Preuve : $P(X|Y) = \frac{P(X,Y)}{P(Y)} \Rightarrow P(X,Y) = P(X|Y)P(Y) = P(Y|X)P(X) \Rightarrow P(X|Y) = \frac{P(Y|X)P(X)}{P(Y)}$

Probabilités des causes : soit \mathcal{D} un ensemble de données observées et θ un jeu de causes (inconnues) ayant potentiellement généré \mathcal{D} .

$$\hat{\theta} = \operatorname{argmax}_{\theta \in \Theta} \frac{P(\mathcal{D}|\theta)P(\theta)}{\sum_{\theta \in \Theta} P(\mathcal{D}, \theta)}$$

Théorie bayésienne des probabilités

Théorème de Bayes

Soient X et Y deux variables aléatoires. Alors :

$$P(X|Y) = \frac{P(Y|X)P(X)}{P(Y)}$$

Preuve : $P(X|Y) = \frac{P(X,Y)}{P(Y)} \Rightarrow P(X,Y) = P(X|Y)P(Y) = P(Y|X)P(X) \Rightarrow P(X|Y) = \frac{P(Y|X)P(X)}{P(Y)}$

Probabilités des causes : soit \mathcal{D} un ensemble de données observées et θ un jeu de causes (inconnues) ayant potentiellement généré \mathcal{D} .

$$\hat{\theta} = \operatorname{argmax}_{\theta \in \Theta} \frac{P(\mathcal{D}|\theta)P(\theta)}{\sum_{\theta \in \Theta} P(\mathcal{D}|\theta)P(\theta)}$$

Théorie bayésienne des probabilités

Théorème de Bayes

Soient X et Y deux variables aléatoires. Alors :

$$P(X|Y) = \frac{P(Y|X)P(X)}{P(Y)}$$

Preuve : $P(X|Y) = \frac{P(X,Y)}{P(Y)} \Rightarrow P(X,Y) = P(X|Y)P(Y) = P(Y|X)P(X) \Rightarrow P(X|Y) = \frac{P(Y|X)P(X)}{P(Y)}$

Probabilités des causes : soit \mathcal{D} un ensemble de données observées et θ un jeu de causes (inconnues) ayant potentiellement généré \mathcal{D} .

$$\hat{\theta} = \operatorname{argmax}_{\theta \in \Theta} \frac{1}{Z} P(\mathcal{D}|\theta)P(\theta)$$

Théorie bayésienne des probabilités

Théorème de Bayes

Soient X et Y deux variables aléatoires. Alors :

$$P(X|Y) = \frac{P(Y|X)P(X)}{P(Y)}$$

Preuve : $P(X|Y) = \frac{P(X,Y)}{P(Y)} \Rightarrow P(X,Y) = P(X|Y)P(Y) = P(Y|X)P(X) \Rightarrow P(X|Y) = \frac{P(Y|X)P(X)}{P(Y)}$

Probabilités des causes : soit \mathcal{D} un ensemble de données observées et θ un jeu de causes (inconnues) ayant potentiellement généré \mathcal{D} .

$$\hat{\theta} = \operatorname{argmax}_{\theta \in \Theta} P(\mathcal{D}|\theta)P(\theta)$$

Théorie bayésienne des probabilités

Théorème de Bayes

Soient X et Y deux variables aléatoires. Alors :

$$P(X|Y) = \frac{P(Y|X)P(X)}{P(Y)}$$

Preuve : $P(X|Y) = \frac{P(X,Y)}{P(Y)} \Rightarrow P(X,Y) = P(X|Y)P(Y) = P(Y|X)P(X) \Rightarrow P(X|Y) = \frac{P(Y|X)P(X)}{P(Y)}$

Probabilités des causes : soit \mathcal{D} un ensemble de données observées et θ un jeu de causes (inconnues) ayant potentiellement généré \mathcal{D} .

$$\hat{\theta} = \operatorname{argmax}_{\theta \in \Theta} P(\mathcal{D}|\theta)$$

Un peu de multivarié...

$$\frac{14}{20} = 0.7$$



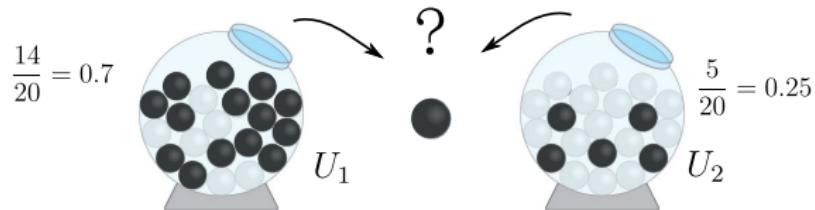
U_1

$$\frac{5}{20} = 0.25$$

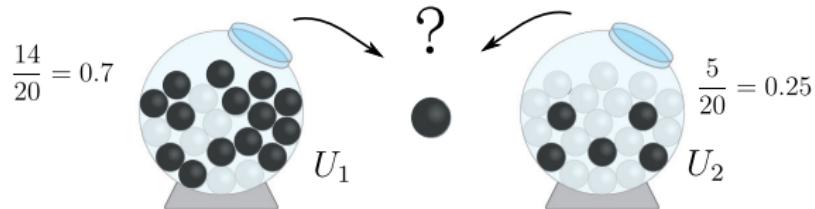


U_2

Un peu de multivarié...

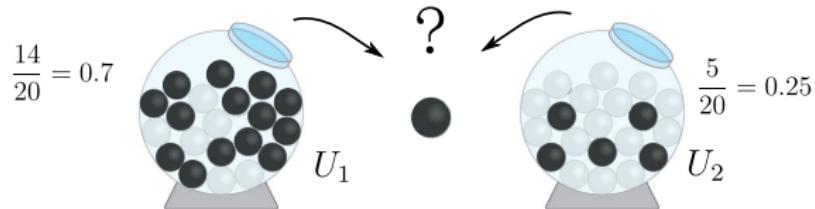


Un peu de multivarié...



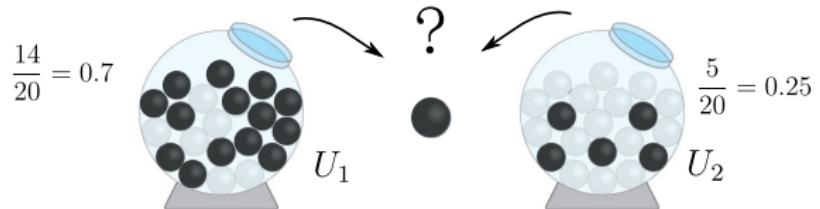
$$\mathbb{P}(U_1 | \bullet)$$

Un peu de multivarié...



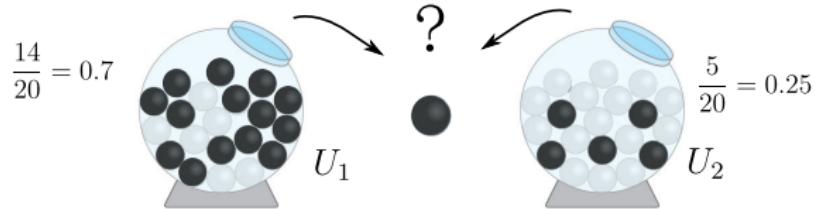
$$\mathbb{P}(U_1 | \bullet) = \frac{\mathbb{P}(\bullet | U_1) \mathbb{P}(U_1)}{\mathbb{P}(\bullet)}$$

Un peu de multivarié...



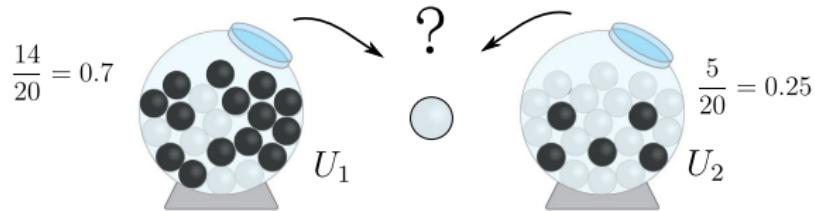
$$\mathbb{P}(U_1 | \bullet) = \frac{\mathbb{P}(\bullet | U_1)\mathbb{P}(U_1)}{\mathbb{P}(\bullet)} = \frac{\mathbb{P}(\bullet | U_1)\mathbb{P}(U_1)}{\mathbb{P}(\bullet | U_1)\mathbb{P}(U_1) + \mathbb{P}(\bullet | U_2)\mathbb{P}(U_2)}$$

Un peu de multivarié...



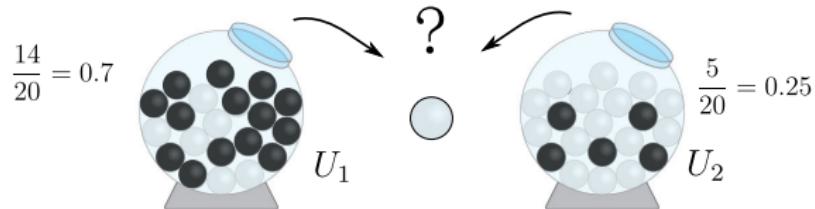
$$\begin{aligned}\mathbb{P}(U_1 | \bullet) &= \frac{\mathbb{P}(\bullet | U_1)\mathbb{P}(U_1)}{\mathbb{P}(\bullet)} = \frac{\mathbb{P}(\bullet | U_1)\mathbb{P}(U_1)}{\mathbb{P}(\bullet | U_1)\mathbb{P}(U_1) + \mathbb{P}(\bullet | U_2)\mathbb{P}(U_2)} \\ &= \frac{\mathbb{P}(\bullet | U_1)}{\mathbb{P}(\bullet | U_1) + \mathbb{P}(\bullet | U_2)} = \frac{0.7}{0.7 + 0.25} = 0.74\end{aligned}$$

Un peu de multivarié...

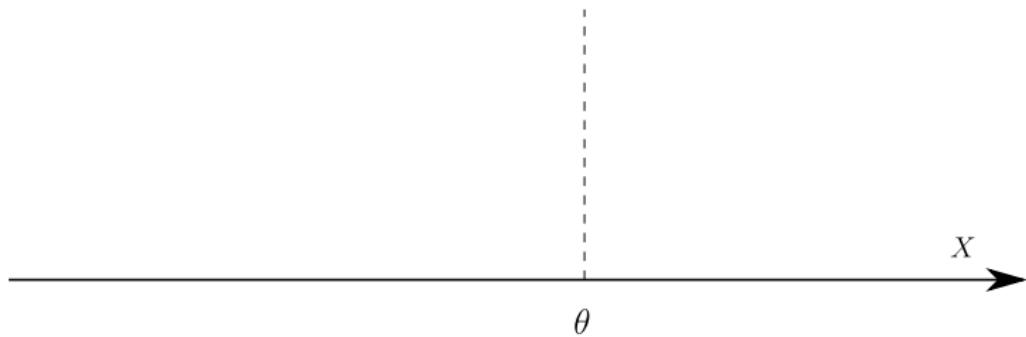


$$\begin{aligned}\mathbb{P}(U_1|\circlearrowleft) &= \frac{\mathbb{P}(\circlearrowleft|U_1)\mathbb{P}(U_1)}{\mathbb{P}(\circlearrowleft)} = \frac{\mathbb{P}(\circlearrowleft|U_1)\mathbb{P}(U_1)}{\mathbb{P}(\circlearrowleft|U_1)\mathbb{P}(U_1) + \mathbb{P}(\circlearrowleft|U_2)\mathbb{P}(U_2)} \\ &= \frac{\mathbb{P}(\circlearrowleft|U_1)}{\mathbb{P}(\circlearrowleft|U_1) + \mathbb{P}(\circlearrowleft|U_2)} = \frac{0.3}{0.3 + 0.75} = 0.29\end{aligned}$$

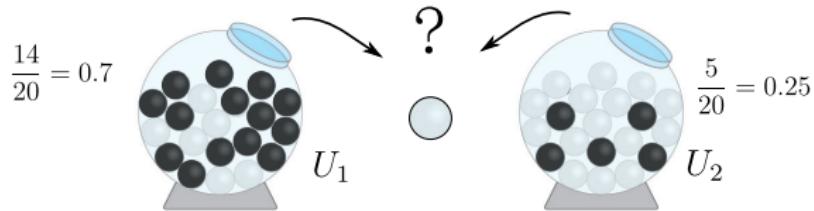
Un peu de multivarié...



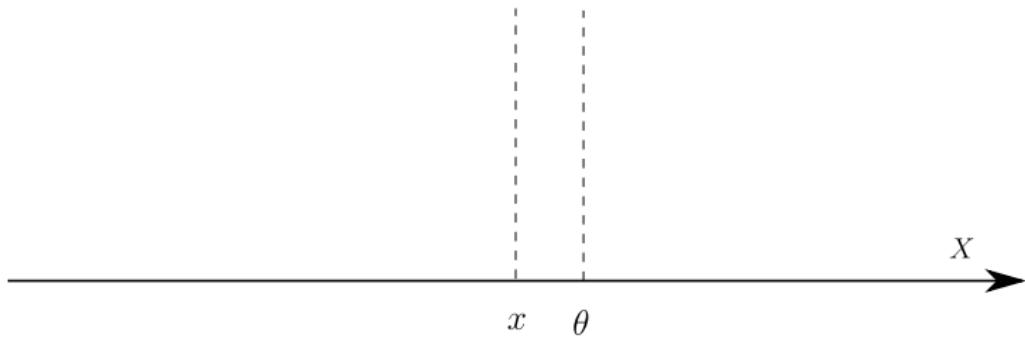
$$\begin{aligned}\mathbb{P}(U_1|\circlearrowleft) &= \frac{\mathbb{P}(\circlearrowleft|U_1)\mathbb{P}(U_1)}{\mathbb{P}(\circlearrowleft)} = \frac{\mathbb{P}(\circlearrowleft|U_1)\mathbb{P}(U_1)}{\mathbb{P}(\circlearrowleft|U_1)\mathbb{P}(U_1) + \mathbb{P}(\circlearrowleft|U_2)\mathbb{P}(U_2)} \\ &= \frac{\mathbb{P}(\circlearrowleft|U_1)}{\mathbb{P}(\circlearrowleft|U_1) + \mathbb{P}(\circlearrowleft|U_2)} = \frac{0.3}{0.3 + 0.75} = 0.29\end{aligned}$$



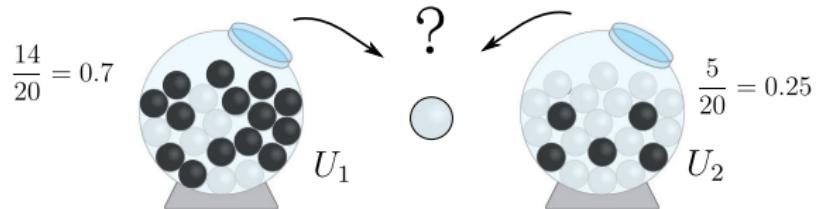
Un peu de multivarié...



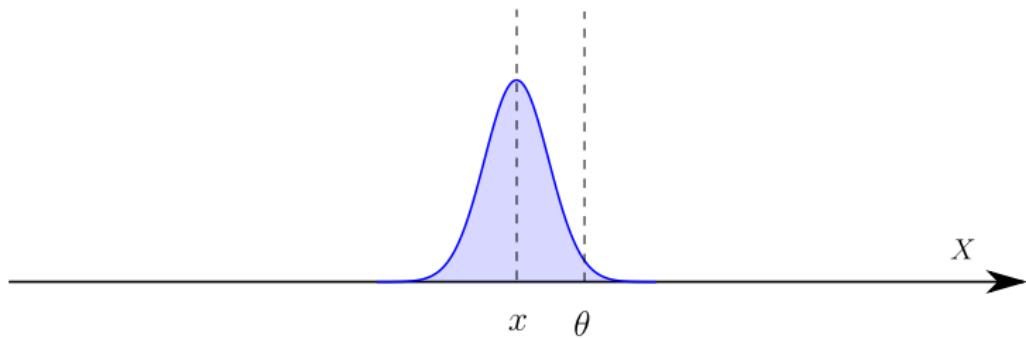
$$\begin{aligned}\mathbb{P}(U_1|\circlearrowleft) &= \frac{\mathbb{P}(\circlearrowleft|U_1)\mathbb{P}(U_1)}{\mathbb{P}(\circlearrowleft)} = \frac{\mathbb{P}(\circlearrowleft|U_1)\mathbb{P}(U_1)}{\mathbb{P}(\circlearrowleft|U_1)\mathbb{P}(U_1) + \mathbb{P}(\circlearrowleft|U_2)\mathbb{P}(U_2)} \\ &= \frac{\mathbb{P}(\circlearrowleft|U_1)}{\mathbb{P}(\circlearrowleft|U_1) + \mathbb{P}(\circlearrowleft|U_2)} = \frac{0.3}{0.3 + 0.75} = 0.29\end{aligned}$$



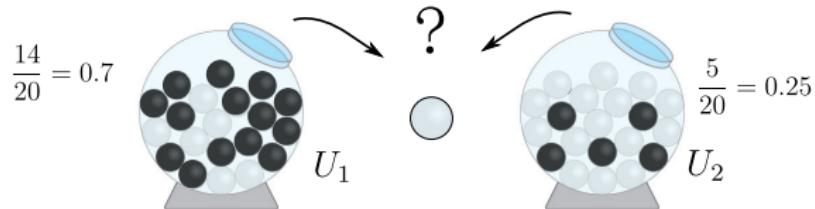
Un peu de multivarié...



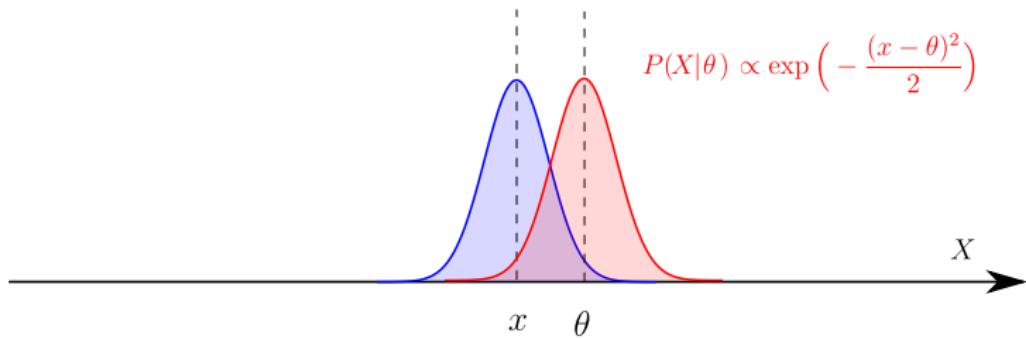
$$\begin{aligned}\mathbb{P}(U_1|\circlearrowleft) &= \frac{\mathbb{P}(\circlearrowleft|U_1)\mathbb{P}(U_1)}{\mathbb{P}(\circlearrowleft)} = \frac{\mathbb{P}(\circlearrowleft|U_1)\mathbb{P}(U_1)}{\mathbb{P}(\circlearrowleft|U_1)\mathbb{P}(U_1) + \mathbb{P}(\circlearrowleft|U_2)\mathbb{P}(U_2)} \\ &= \frac{\mathbb{P}(\circlearrowleft|U_1)}{\mathbb{P}(\circlearrowleft|U_1) + \mathbb{P}(\circlearrowleft|U_2)} = \frac{0.3}{0.3 + 0.75} = 0.29\end{aligned}$$



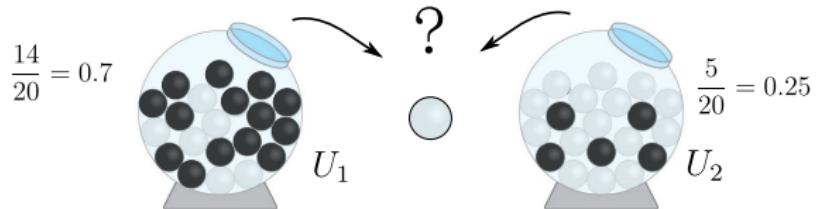
Un peu de multivarié...



$$\begin{aligned}\mathbb{P}(U_1|\circlearrowleft) &= \frac{\mathbb{P}(\circlearrowleft|U_1)\mathbb{P}(U_1)}{\mathbb{P}(\circlearrowleft)} = \frac{\mathbb{P}(\circlearrowleft|U_1)\mathbb{P}(U_1)}{\mathbb{P}(\circlearrowleft|U_1)\mathbb{P}(U_1) + \mathbb{P}(\circlearrowleft|U_2)\mathbb{P}(U_2)} \\ &= \frac{\mathbb{P}(\circlearrowleft|U_1)}{\mathbb{P}(\circlearrowleft|U_1) + \mathbb{P}(\circlearrowleft|U_2)} = \frac{0.3}{0.3 + 0.75} = 0.29\end{aligned}$$



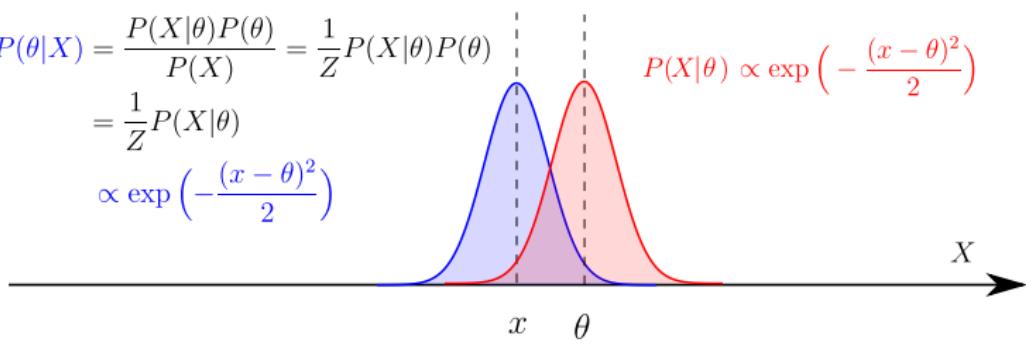
Un peu de multivarié...



$$\mathbb{P}(U_1 | \bigcirc) = \frac{\mathbb{P}(\bigcirc | U_1) \mathbb{P}(U_1)}{\mathbb{P}(\bigcirc)} = \frac{\mathbb{P}(\bigcirc | U_1) \mathbb{P}(U_1)}{\mathbb{P}(\bigcirc | U_1) \mathbb{P}(U_1) + \mathbb{P}(\bigcirc | U_2) \mathbb{P}(U_2)}$$

$$= \frac{\mathbb{P}(\bigcirc | U_1)}{\mathbb{P}(\bigcirc | U_1) + \mathbb{P}(\bigcirc | U_2)} = \frac{0.3}{0.3 + 0.75} = 0.29$$

$$\begin{aligned} P(\theta | X) &= \frac{P(X|\theta)P(\theta)}{P(X)} = \frac{1}{Z}P(X|\theta)P(\theta) \\ &= \frac{1}{Z}P(X|\theta) \\ &\propto \exp\left(-\frac{(x-\theta)^2}{2}\right) \end{aligned}$$



Exercices : Bayes

Joseph a 2 enfants.

Joseph a 2 enfants.

- L'un est une fille. \mathbb{P} que l'autre soit une fille ?

Joseph a 2 enfants.

- L'un est une fille. \mathbb{P} que l'autre soit une fille ?
- L'ainée est une fille. \mathbb{P} que l'autre soit une fille ?

Joseph a 2 enfants.

- L'un est une fille. \mathbb{P} que l'autre soit une fille ?
- L'ainée est une fille. \mathbb{P} que l'autre soit une fille ?
- L'un est une fille née un mardi. \mathbb{P} que l'autre soit une fille ?

Joseph a 2 enfants.

- L'un est une fille. \mathbb{P} que l'autre soit une fille ?
- L'ainée est une fille. \mathbb{P} que l'autre soit une fille ?
- L'un est une fille née un mardi. \mathbb{P} que l'autre soit une fille ?
- Problème de *Monty Hall* :



Joseph a 2 enfants.

- L'un est une fille. \mathbb{P} que l'autre soit une fille ?
- L'ainée est une fille. \mathbb{P} que l'autre soit une fille ?
- L'un est une fille née un mardi. \mathbb{P} que l'autre soit une fille ?
- Problème de *Monty Hall* :



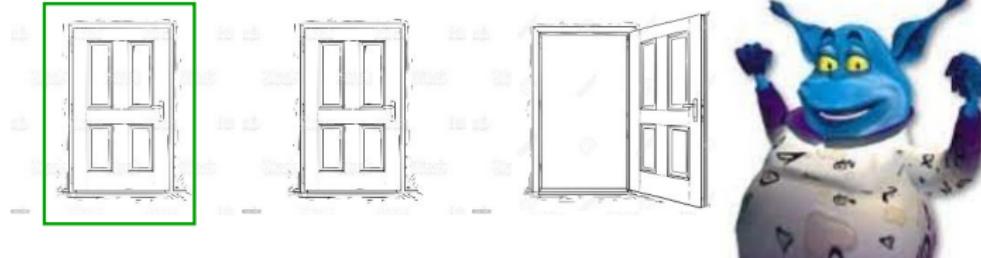
Joseph a 2 enfants.

- L'un est une fille. \mathbb{P} que l'autre soit une fille ?
- L'ainée est une fille. \mathbb{P} que l'autre soit une fille ?
- L'un est une fille née un mardi. \mathbb{P} que l'autre soit une fille ?
- Problème de *Monty Hall* :



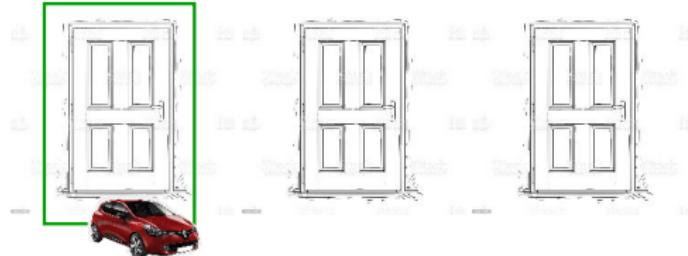
Joseph a 2 enfants.

- L'un est une fille. \mathbb{P} que l'autre soit une fille ?
- L'ainée est une fille. \mathbb{P} que l'autre soit une fille ?
- L'un est une fille née un mardi. \mathbb{P} que l'autre soit une fille ?
- Problème de *Monty Hall* :



Joseph a 2 enfants.

- L'un est une fille. \mathbb{P} que l'autre soit une fille ?
- L'ainée est une fille. \mathbb{P} que l'autre soit une fille ?
- L'un est une fille née un mardi. \mathbb{P} que l'autre soit une fille ?
- Problème de *Monty Hall* :



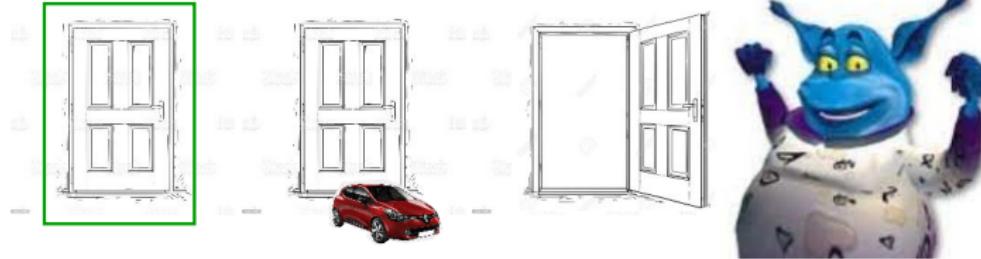
Joseph a 2 enfants.

- L'un est une fille. \mathbb{P} que l'autre soit une fille ?
- L'ainée est une fille. \mathbb{P} que l'autre soit une fille ?
- L'un est une fille née un mardi. \mathbb{P} que l'autre soit une fille ?
- Problème de *Monty Hall* :



Joseph a 2 enfants.

- L'un est une fille. \mathbb{P} que l'autre soit une fille ?
- L'ainée est une fille. \mathbb{P} que l'autre soit une fille ?
- L'un est une fille née un mardi. \mathbb{P} que l'autre soit une fille ?
- Problème de *Monty Hall* :



Exercices : Bayes (correction)

F_1 : Joseph a (au moins) une fille F_2 : Joseph a deux filles

F_A : L'ainée de Joseph est une filles



$$\mathbb{P}(F_2|F_1) = \frac{\mathbb{P}(F_1|F_2)\mathbb{P}(F_2)}{\mathbb{P}(F_1)} = \frac{1 \times \frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3}$$

Exercices : Bayes (correction)

F_1 : Joseph a (au moins) une fille F_2 : Joseph a deux filles

F_A : L'ainée de Joseph est une filles



$$\mathbb{P}(F_2|F_1) = \frac{\mathbb{P}(F_1|F_2)\mathbb{P}(F_2)}{\mathbb{P}(F_1)} = \frac{1 \times \frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3}$$

$$\mathbb{P}(F_1) = \mathbb{P}(F_1|F_2)\mathbb{P}(F_2) + \mathbb{P}(F_1|F_2^c)\mathbb{P}(F_2^c) = 1 \times \frac{1}{4} + \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{4}$$

Exercices : Bayes (correction)

F_1 : Joseph a (au moins) une fille F_2 : Joseph a deux filles

F_A : L'ainée de Joseph est une filles



$$\mathbb{P}(F_2|F_1) = \frac{\mathbb{P}(F_1|F_2)\mathbb{P}(F_2)}{\mathbb{P}(F_1)} = \frac{1 \times \frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3}$$

$$\mathbb{P}(F_1) = \mathbb{P}(F_1|F_2)\mathbb{P}(F_2) + \mathbb{P}(F_1|F_2^c)\mathbb{P}(F_2^c) = 1 \times \frac{1}{4} + \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{4}$$



$$\mathbb{P}(F_2|F_A) = \frac{\mathbb{P}(F_A|F_2)\mathbb{P}(F_2)}{\mathbb{P}(F_A)} = \frac{1 \times \frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

Exercices : Bayes (correction)

F_1 : Joseph a (au moins) une fille F_2 : Joseph a deux filles

F_A : L'ainée de Joseph est une filles



$$\mathbb{P}(F_2|F_1) = \frac{\mathbb{P}(F_1|F_2)\mathbb{P}(F_2)}{\mathbb{P}(F_1)} = \frac{1 \times \frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3}$$

$$\mathbb{P}(F_1) = \mathbb{P}(F_1|F_2)\mathbb{P}(F_2) + \mathbb{P}(F_1|F_2^c)\mathbb{P}(F_2^c) = 1 \times \frac{1}{4} + \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{4}$$



$$\mathbb{P}(F_2|F_A) = \frac{\mathbb{P}(F_A|F_2)\mathbb{P}(F_2)}{\mathbb{P}(F_A)} = \frac{1 \times \frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

- F_{1M} : Joseph a (au moins) une fille née un mardi

Exercices : Bayes (correction)

F_1 : Joseph a (au moins) une fille F_2 : Joseph a deux filles

F_A : L'ainée de Joseph est une filles



$$\mathbb{P}(F_2|F_1) = \frac{\mathbb{P}(F_1|F_2)\mathbb{P}(F_2)}{\mathbb{P}(F_1)} = \frac{1 \times \frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3}$$

$$\mathbb{P}(F_1) = \mathbb{P}(F_1|F_2)\mathbb{P}(F_2) + \mathbb{P}(F_1|F_2^c)\mathbb{P}(F_2^c) = 1 \times \frac{1}{4} + \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{4}$$



$$\mathbb{P}(F_2|F_A) = \frac{\mathbb{P}(F_A|F_2)\mathbb{P}(F_2)}{\mathbb{P}(F_A)} = \frac{1 \times \frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

• F_{1M} : Joseph a (au moins) une fille née un mardi

$$\mathbb{P}(F_2|F_{1M}) = \dots \text{à terminer}$$

Exercices : Bayes (correction)

- \mathcal{X} : le numéro de la porte ($\mathcal{X} \in \{1, 2, 3\}$) contenant la voiture.

Exercices : Bayes (correction)

- \mathcal{X} : le numéro de la porte ($\mathcal{X} \in \{1, 2, 3\}$) contenant la voiture.
- \mathcal{O} : le numéro de la porte ($\mathcal{O} \in \{1, 2, 3\}$) ouverte par Bill.

Exercices : Bayes (correction)

- \mathcal{X} : le numéro de la porte ($\mathcal{X} \in \{1, 2, 3\}$) contenant la voiture.
- \mathcal{O} : le numéro de la porte ($\mathcal{O} \in \{1, 2, 3\}$) ouverte par Bill.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\mathcal{X}_1 | \mathcal{O}_2) &= \frac{\mathbb{P}(\mathcal{O}_2 | \mathcal{X}_1) \mathbb{P}(\mathcal{X}_1)}{\mathbb{P}(\mathcal{O}_2)} \\ &= \frac{\mathbb{P}(\mathcal{O}_2 | \mathcal{X}_1) \mathbb{P}(\mathcal{X}_1)}{\sum_i \mathbb{P}(\mathcal{O}_2, \mathcal{X}_i)} = \frac{\mathbb{P}(\mathcal{O}_2 | \mathcal{X}_1) \mathbb{P}(\mathcal{X}_1)}{\sum_i \mathbb{P}(\mathcal{O}_2 | \mathcal{X}_i) \mathbb{P}(\mathcal{X}_i)}\end{aligned}$$

Exercices : Bayes (correction)

- \mathcal{X} : le numéro de la porte ($\mathcal{X} \in \{1, 2, 3\}$) contenant la voiture.
- \mathcal{O} : le numéro de la porte ($\mathcal{O} \in \{1, 2, 3\}$) ouverte par Bill.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\mathcal{X}_1 | \mathcal{O}_2) &= \frac{\mathbb{P}(\mathcal{O}_2 | \mathcal{X}_1) \mathbb{P}(\mathcal{X}_1)}{\mathbb{P}(\mathcal{O}_2)} \\ &= \frac{\mathbb{P}(\mathcal{O}_2 | \mathcal{X}_1) \mathbb{P}(\mathcal{X}_1)}{\sum_i \mathbb{P}(\mathcal{O}_2, \mathcal{X}_i)} = \frac{\mathbb{P}(\mathcal{O}_2 | \mathcal{X}_1) \mathbb{P}(\mathcal{X}_1)}{\sum_i \mathbb{P}(\mathcal{O}_2 | \mathcal{X}_i) \mathbb{P}(\mathcal{X}_i)} \\ &= \frac{\mathbb{P}(\mathcal{O}_2 | \mathcal{X}_1) \mathbb{P}(\mathcal{X}_1)}{\mathbb{P}(\mathcal{O}_2 | \mathcal{X}_1) \mathbb{P}(\mathcal{X}_1) + \mathbb{P}(\mathcal{O}_2 | \mathcal{X}_2) \mathbb{P}(\mathcal{X}_2) + \mathbb{P}(\mathcal{O}_2 | \mathcal{X}_3) \mathbb{P}(\mathcal{X}_3)}\end{aligned}$$

Exercices : Bayes (correction)

- \mathcal{X} : le numéro de la porte ($\mathcal{X} \in \{1, 2, 3\}$) contenant la voiture.
- \mathcal{O} : le numéro de la porte ($\mathcal{O} \in \{1, 2, 3\}$) ouverte par Bill.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\mathcal{X}_1 | \mathcal{O}_2) &= \frac{\mathbb{P}(\mathcal{O}_2 | \mathcal{X}_1) \mathbb{P}(\mathcal{X}_1)}{\mathbb{P}(\mathcal{O}_2)} \\&= \frac{\mathbb{P}(\mathcal{O}_2 | \mathcal{X}_1) \mathbb{P}(\mathcal{X}_1)}{\sum_i \mathbb{P}(\mathcal{O}_2, \mathcal{X}_i)} = \frac{\mathbb{P}(\mathcal{O}_2 | \mathcal{X}_1) \mathbb{P}(\mathcal{X}_1)}{\sum_i \mathbb{P}(\mathcal{O}_2 | \mathcal{X}_i) \mathbb{P}(\mathcal{X}_i)} \\&= \frac{\mathbb{P}(\mathcal{O}_2 | \mathcal{X}_1) \mathbb{P}(\mathcal{X}_1)}{\mathbb{P}(\mathcal{O}_2 | \mathcal{X}_1) \mathbb{P}(\mathcal{X}_1) + \mathbb{P}(\mathcal{O}_2 | \mathcal{X}_2) \mathbb{P}(\mathcal{X}_2) + \mathbb{P}(\mathcal{O}_2 | \mathcal{X}_3) \mathbb{P}(\mathcal{X}_3)} \\&= \frac{\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}}{\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + 0 \times \frac{1}{3} + 1 \times \frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2} + 0 + 1} = \frac{1}{3}\end{aligned}$$

Exercices : Bayes (correction)

- \mathcal{X} : le numéro de la porte ($\mathcal{X} \in \{1, 2, 3\}$) contenant la voiture.
- \mathcal{O} : le numéro de la porte ($\mathcal{O} \in \{1, 2, 3\}$) ouverte par Bill.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\mathcal{X}_1 | \mathcal{O}_2) &= \frac{\mathbb{P}(\mathcal{O}_2 | \mathcal{X}_1) \mathbb{P}(\mathcal{X}_1)}{\mathbb{P}(\mathcal{O}_2)} \\&= \frac{\mathbb{P}(\mathcal{O}_2 | \mathcal{X}_1) \mathbb{P}(\mathcal{X}_1)}{\sum_i \mathbb{P}(\mathcal{O}_2, \mathcal{X}_i)} = \frac{\mathbb{P}(\mathcal{O}_2 | \mathcal{X}_1) \mathbb{P}(\mathcal{X}_1)}{\sum_i \mathbb{P}(\mathcal{O}_2 | \mathcal{X}_i) \mathbb{P}(\mathcal{X}_i)} \\&= \frac{\mathbb{P}(\mathcal{O}_2 | \mathcal{X}_1) \mathbb{P}(\mathcal{X}_1)}{\mathbb{P}(\mathcal{O}_2 | \mathcal{X}_1) \mathbb{P}(\mathcal{X}_1) + \mathbb{P}(\mathcal{O}_2 | \mathcal{X}_2) \mathbb{P}(\mathcal{X}_2) + \mathbb{P}(\mathcal{O}_2 | \mathcal{X}_3) \mathbb{P}(\mathcal{X}_3)} \\&= \frac{\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}}{\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + 0 \times \frac{1}{3} + 1 \times \frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2} + 0 + 1} = \frac{1}{3}\end{aligned}$$

$\mathbb{P}(\mathcal{X}_2 | \mathcal{O}_2) = 0 \Rightarrow \mathbb{P}(\mathcal{X}_3 | \mathcal{O}_2) = \frac{2}{3}$: il faut changer de porte !

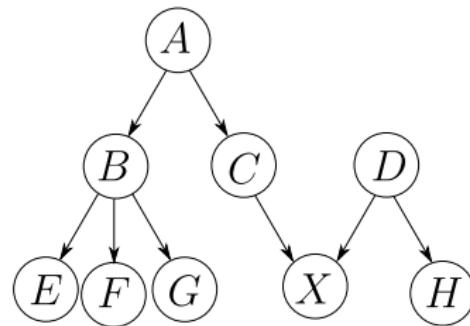
Exercices : Bayes (correction)

- \mathcal{X} : le numéro de la porte ($\mathcal{X} \in \{1, 2, 3\}$) contenant la voiture.
- \mathcal{O} : le numéro de la porte ($\mathcal{O} \in \{1, 2, 3\}$) ouverte par Bill.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\mathcal{X}_1 | \mathcal{O}_2) &= \frac{\mathbb{P}(\mathcal{O}_2 | \mathcal{X}_1) \mathbb{P}(\mathcal{X}_1)}{\mathbb{P}(\mathcal{O}_2)} \\&= \frac{\mathbb{P}(\mathcal{O}_2 | \mathcal{X}_1) \mathbb{P}(\mathcal{X}_1)}{\sum_i \mathbb{P}(\mathcal{O}_2, \mathcal{X}_i)} = \frac{\mathbb{P}(\mathcal{O}_2 | \mathcal{X}_1) \mathbb{P}(\mathcal{X}_1)}{\sum_i \mathbb{P}(\mathcal{O}_2 | \mathcal{X}_i) \mathbb{P}(\mathcal{X}_i)} \\&= \frac{\mathbb{P}(\mathcal{O}_2 | \mathcal{X}_1) \mathbb{P}(\mathcal{X}_1)}{\mathbb{P}(\mathcal{O}_2 | \mathcal{X}_1) \mathbb{P}(\mathcal{X}_1) + \mathbb{P}(\mathcal{O}_2 | \mathcal{X}_2) \mathbb{P}(\mathcal{X}_2) + \mathbb{P}(\mathcal{O}_2 | \mathcal{X}_3) \mathbb{P}(\mathcal{X}_3)} \\&= \frac{\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}}{\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + 0 \times \frac{1}{3} + 1 \times \frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2} + 0 + 1} = \frac{1}{3}\end{aligned}$$

$\mathbb{P}(\mathcal{X}_2 | \mathcal{O}_2) = 0 \Rightarrow \mathbb{P}(\mathcal{X}_3 | \mathcal{O}_2) = \frac{2}{3}$: il faut changer de porte !

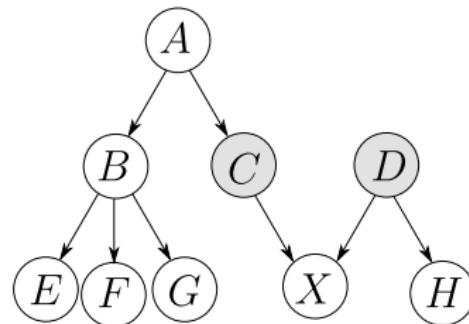
Réseau bayesien (Bayesian Network) : simplification des dépendances



Soit $G(V, E)$ un graphe. Pour un noeud $X \in V$, on note Pa_X l'ensemble des parents de X .

$$P(X_1, X_2, \dots, X_n) = \prod_{X_i \in V} P(X_i | \text{Pa}_{X_i})$$

Réseau bayesien (Bayesian Network) : simplification des dépendances



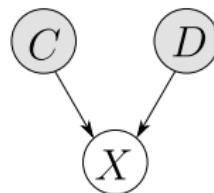
Soit $G(V, E)$ un graphe. Pour un noeud $X \in V$, on note Pa_X l'ensemble des parents de X .

$$P(X_1, X_2, \dots, X_n) = \prod_{X_i \in V} P(X_i | \text{Pa}_{X_i})$$

Sachant ses parents C et D , la variable X est indépendante de tous ses non-descendants.

Un peu de multivarié...

Réseau bayesien (Bayesian Network) : simplification des dépendances

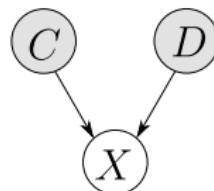


Soit $G(V, E)$ un graphe. Pour un noeud $X \in V$, on note Pa_X l'ensemble des parents de X .

$$P(X_1, X_2, \dots, X_n) = \prod_{X_i \in V} P(X_i | \text{Pa}_{X_i})$$

Sachant ses parents C et D, la variable X est indépendante de tous ses non-descendants.

Réseau bayesien (Bayesian Network) : simplification des dépendances

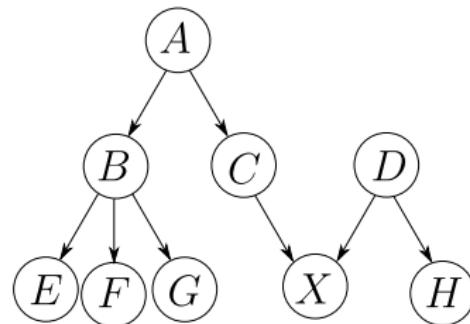


Soit $G(V, E)$ un graphe. Pour un noeud $X \in V$, on note Pa_X l'ensemble des parents de X .

$$P(X_1, X_2, \dots, X_n) = \prod_{X_i \in V} P(X_i | \text{Pa}_{X_i})$$

$$P(X|A, B, C, D, E, F, G, H) = P(X|C, D)$$

Réseau bayesien (Bayesian Network) : simplification des dépendances



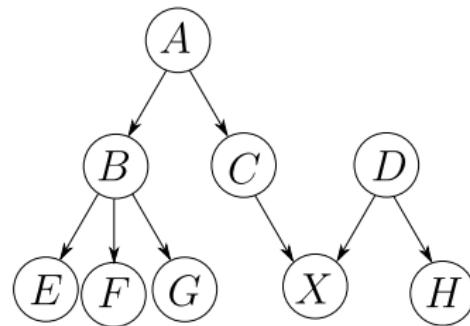
Soit $G(V, E)$ un graphe. Pour un noeud $X \in V$, on note Pa_X l'ensemble des parents de X .

$$P(X_1, X_2, \dots, X_n) = \prod_{X_i \in V} P(X_i | \text{Pa}_{X_i})$$

Loi jointe :

Un peu de multivarié...

Réseau bayesien (Bayesian Network) : simplification des dépendances



Soit $G(V, E)$ un graphe. Pour un noeud $X \in V$, on note Pa_X l'ensemble des parents de X .

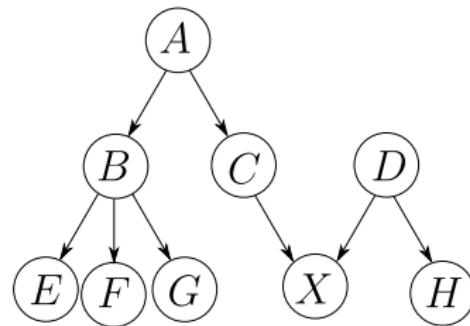
$$P(X_1, X_2, \dots, X_n) = \prod_{X_i \in V} P(X_i | \text{Pa}_{X_i})$$

Loi jointe :

$$P(A)$$

Un peu de multivarié...

Réseau bayesien (Bayesian Network) : simplification des dépendances



Soit $G(V, E)$ un graphe. Pour un noeud $X \in V$, on note Pa_X l'ensemble des parents de X .

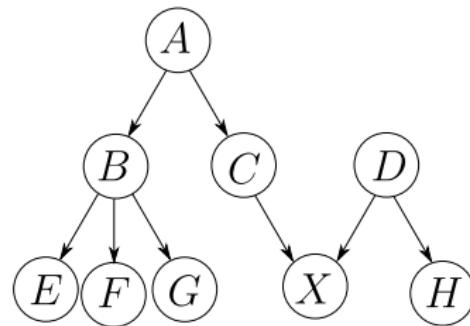
$$P(X_1, X_2, \dots, X_n) = \prod_{X_i \in V} P(X_i | \text{Pa}_{X_i})$$

Loi jointe :

$$P(A)P(D)$$

Un peu de multivarié...

Réseau bayesien (Bayesian Network) : simplification des dépendances



Soit $G(V, E)$ un graphe. Pour un noeud $X \in V$, on note Pa_X l'ensemble des parents de X .

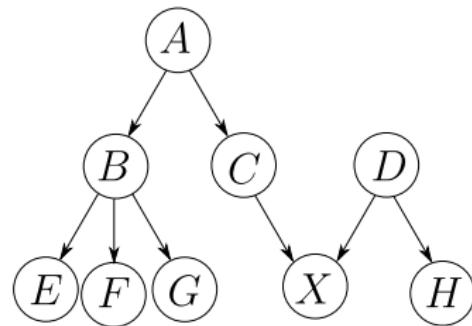
$$P(X_1, X_2, \dots, X_n) = \prod_{X_i \in V} P(X_i | \text{Pa}_{X_i})$$

Loi jointe :

$$P(A)P(D)P(B|A)$$

Un peu de multivarié...

Réseau bayesien (Bayesian Network) : simplification des dépendances



Soit $G(V, E)$ un graphe. Pour un noeud $X \in V$, on note Pa_X l'ensemble des parents de X .

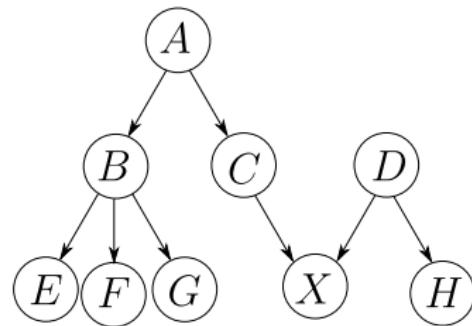
$$P(X_1, X_2, \dots, X_n) = \prod_{X_i \in V} P(X_i | \text{Pa}_{X_i})$$

Loi jointe :

$$P(A)P(D)P(B|A)(C|A)$$

Un peu de multivarié...

Réseau bayesien (Bayesian Network) : simplification des dépendances



Soit $G(V, E)$ un graphe. Pour un noeud $X \in V$, on note Pa_X l'ensemble des parents de X .

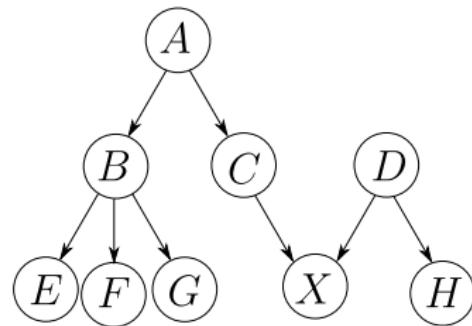
$$P(X_1, X_2, \dots, X_n) = \prod_{X_i \in V} P(X_i | \text{Pa}_{X_i})$$

Loi jointe :

$$P(A)P(D)P(B|A)(C|A)P(E|B)$$

Un peu de multivarié...

Réseau bayesien (Bayesian Network) : simplification des dépendances



Soit $G(V, E)$ un graphe. Pour un noeud $X \in V$, on note Pa_X l'ensemble des parents de X .

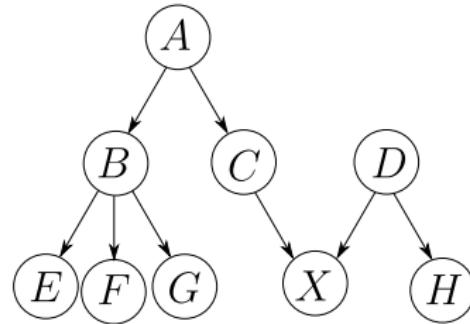
$$P(X_1, X_2, \dots, X_n) = \prod_{X_i \in V} P(X_i | \text{Pa}_{X_i})$$

Loi jointe :

$$P(A)P(D)P(B|A)(C|A)P(E|B)P(F|B)$$

Un peu de multivarié...

Réseau bayesien (Bayesian Network) : simplification des dépendances



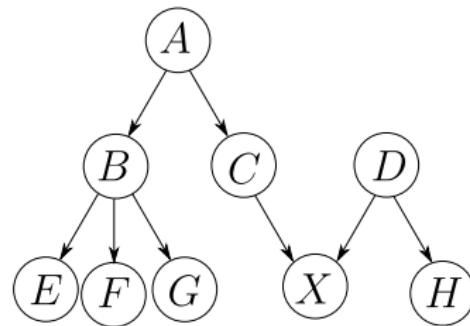
Soit $G(V, E)$ un graphe. Pour un noeud $X \in V$, on note Pa_X l'ensemble des parents de X .

$$P(X_1, X_2, \dots, X_n) = \prod_{X_i \in V} P(X_i | \text{Pa}_{X_i})$$

Loi jointe :

$$P(A)P(D)P(B|A)(C|A)P(E|B)P(F|B)P(G|B)$$

Réseau bayesien (Bayesian Network) : simplification des dépendances



Soit $G(V, E)$ un graphe. Pour un noeud $X \in V$, on note Pa_X l'ensemble des parents de X .

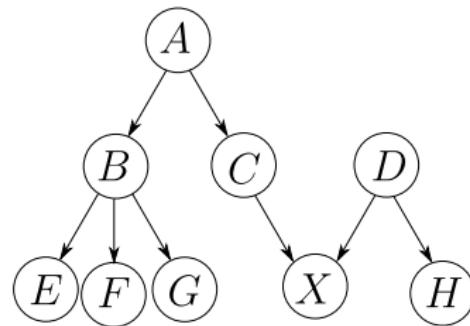
$$P(X_1, X_2, \dots, X_n) = \prod_{X_i \in V} P(X_i | \text{Pa}_{X_i})$$

Loi jointe :

$$P(A)P(D)P(B|A)P(C|A)P(E|B)P(F|B)P(G|B)P(X|C, D)$$

Un peu de multivarié...

Réseau bayesien (Bayesian Network) : simplification des dépendances



Soit $G(V, E)$ un graphe. Pour un noeud $X \in V$, on note Pa_X l'ensemble des parents de X .

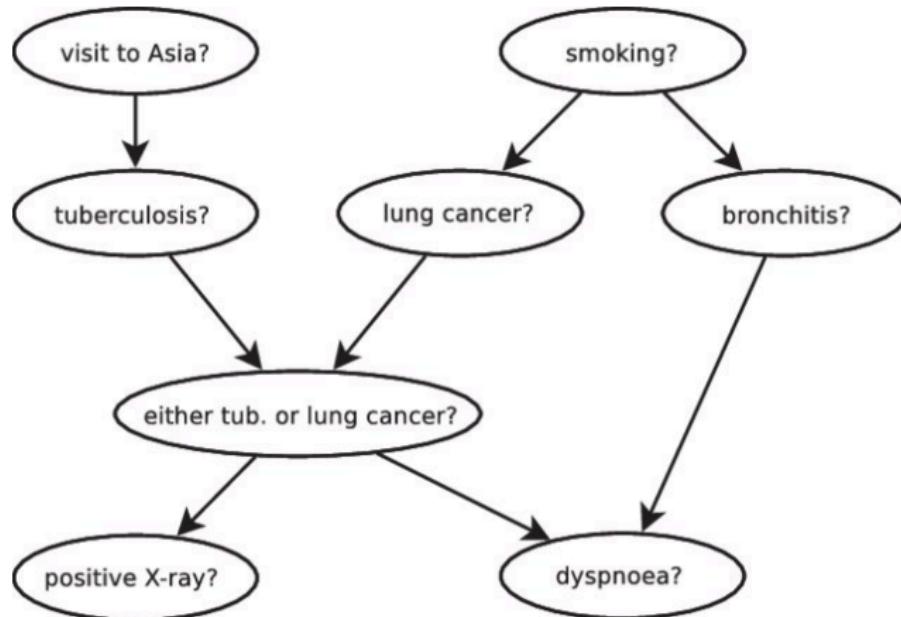
$$P(X_1, X_2, \dots, X_n) = \prod_{X_i \in V} P(X_i | \text{Pa}_{X_i})$$

Loi jointe :

$$P(A)P(D)P(B|A)P(C|A)P(E|B)P(F|B)P(G|B)P(X|C, D)P(H|D)$$

Un peu de multivarié...

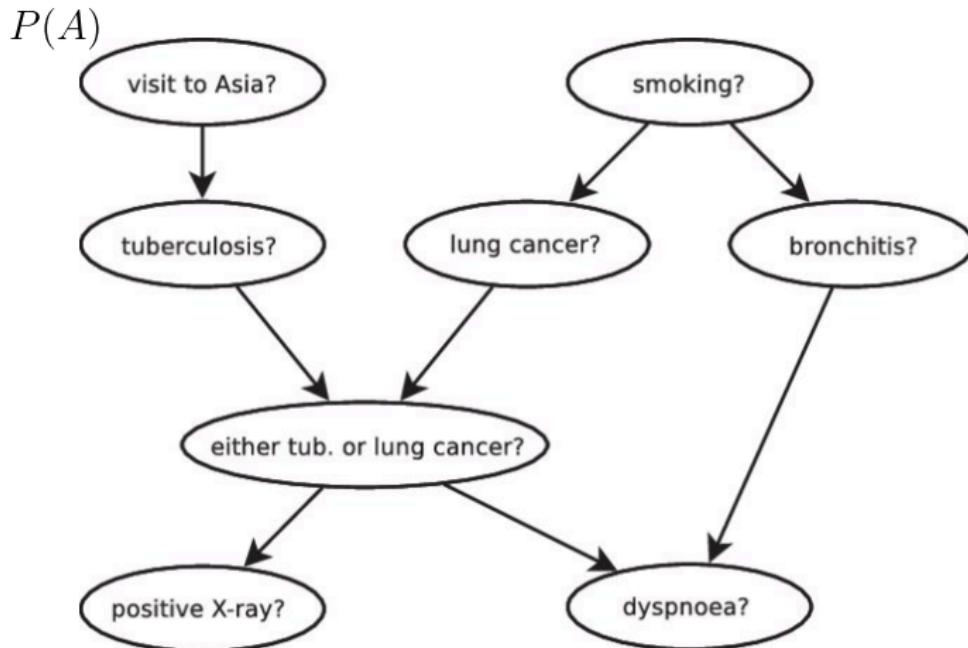
Réseau bayesien (Bayesian Network)



Exemple inspiré de Daly et al, 2011

Un peu de multivarié...

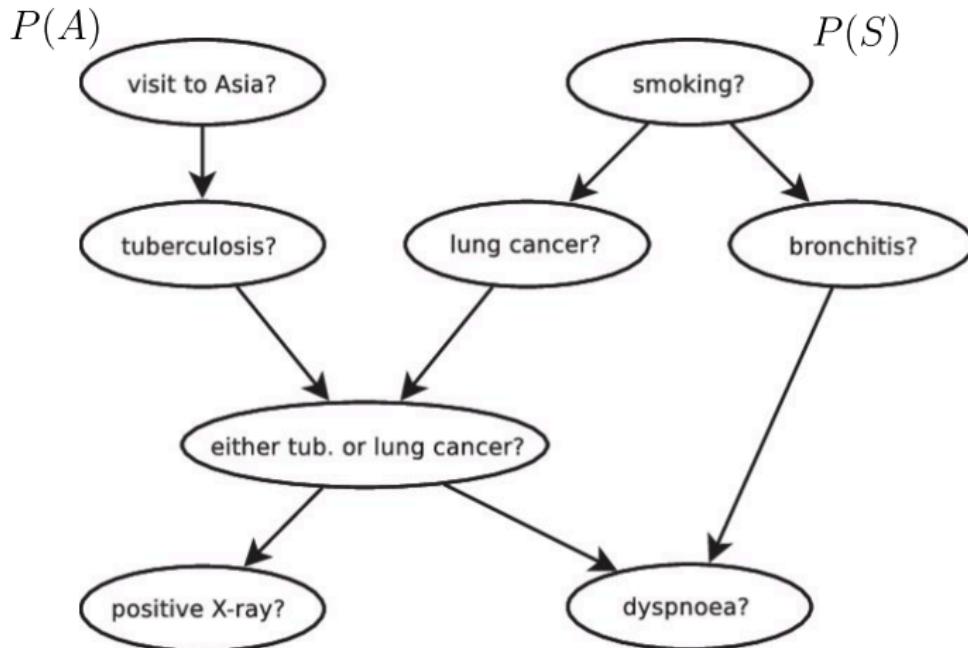
Réseau bayesien (Bayesian Network)



Exemple inspiré de Daly et al, 2011

Un peu de multivarié...

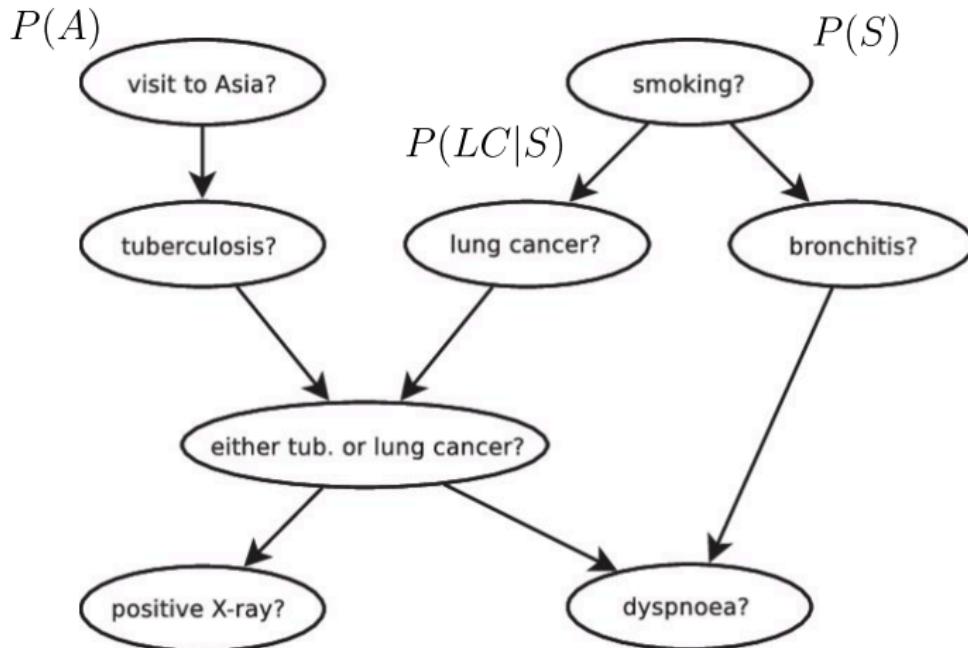
Réseau bayesien (Bayesian Network)



Exemple inspiré de Daly et al, 2011

Un peu de multivarié...

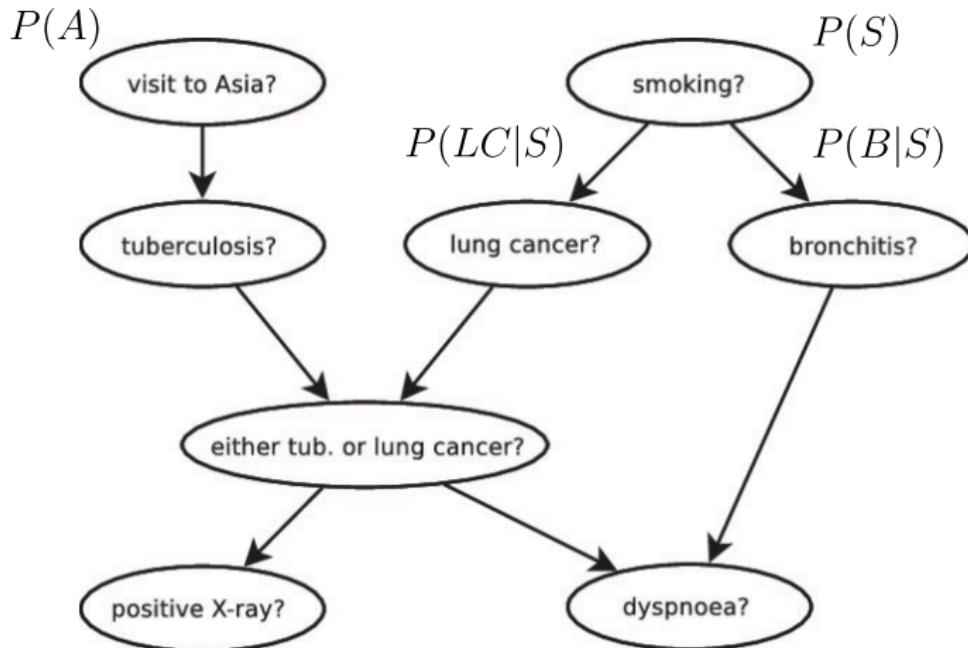
Réseau bayesien (Bayesian Network)



Exemple inspiré de Daly et al, 2011

Un peu de multivarié...

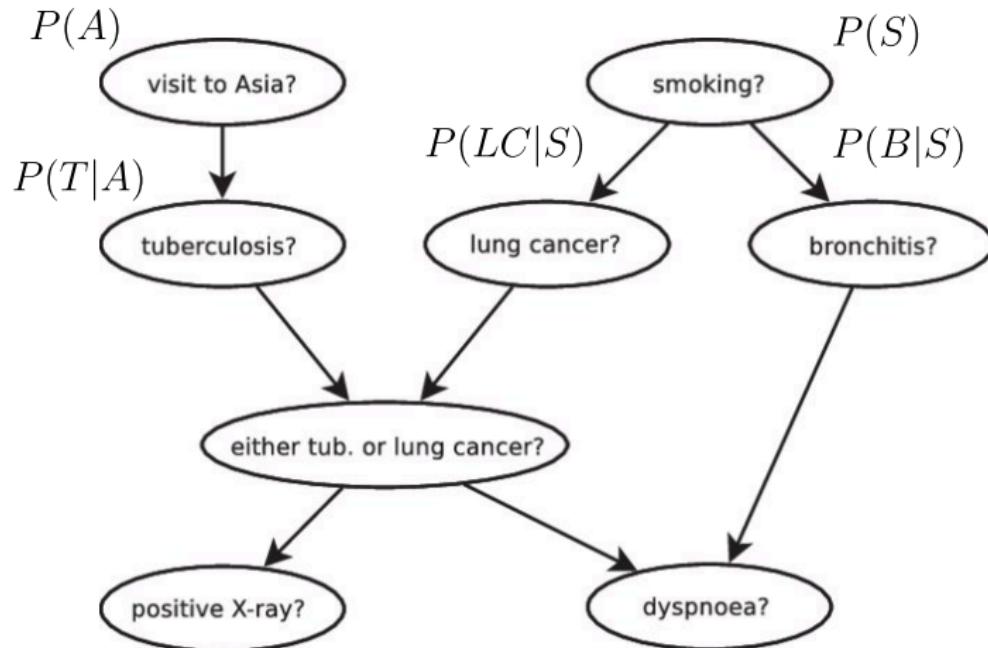
Réseau bayesien (Bayesian Network)



Exemple inspiré de Daly et al, 2011

Un peu de multivarié...

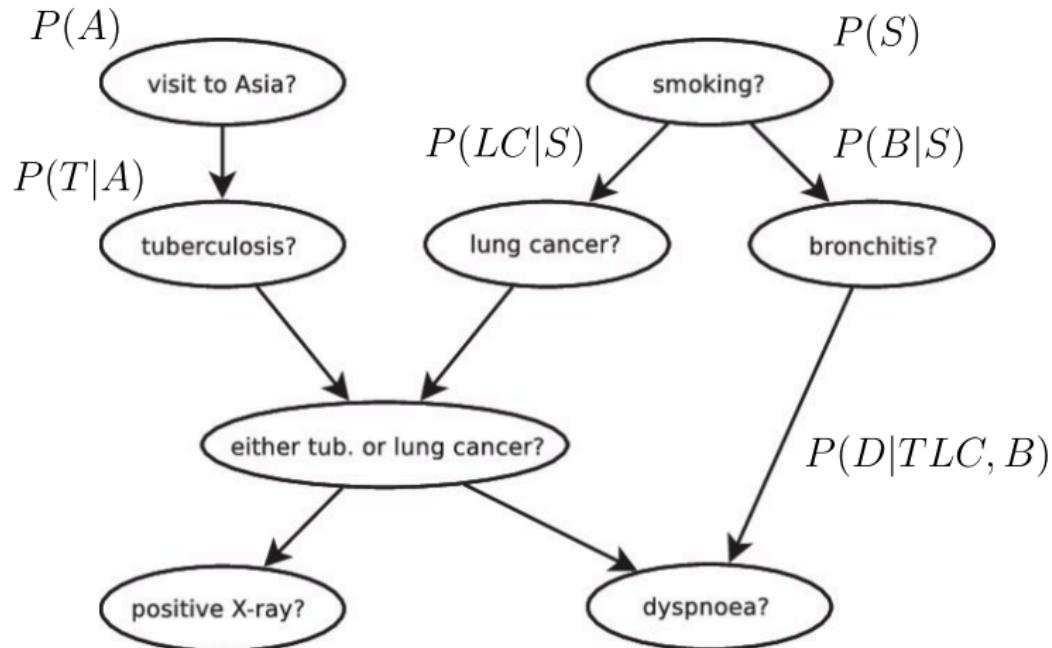
Réseau bayesien (Bayesian Network)



Exemple inspiré de Daly et al, 2011

Un peu de multivarié...

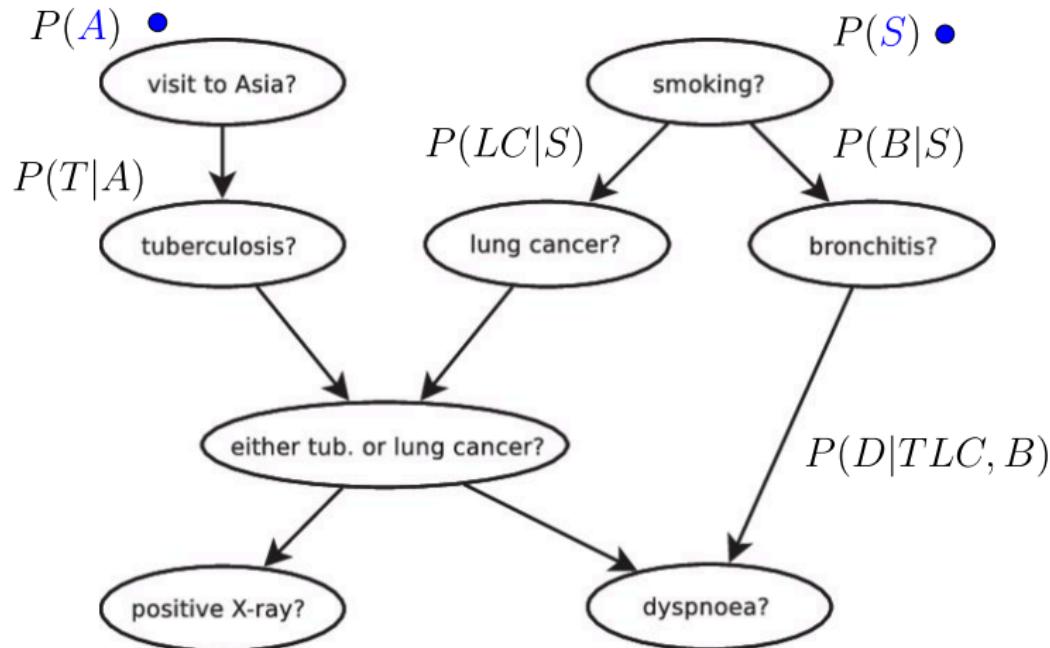
Réseau bayesien (Bayesian Network)



Exemple inspiré de Daly et al, 2011

Un peu de multivarié...

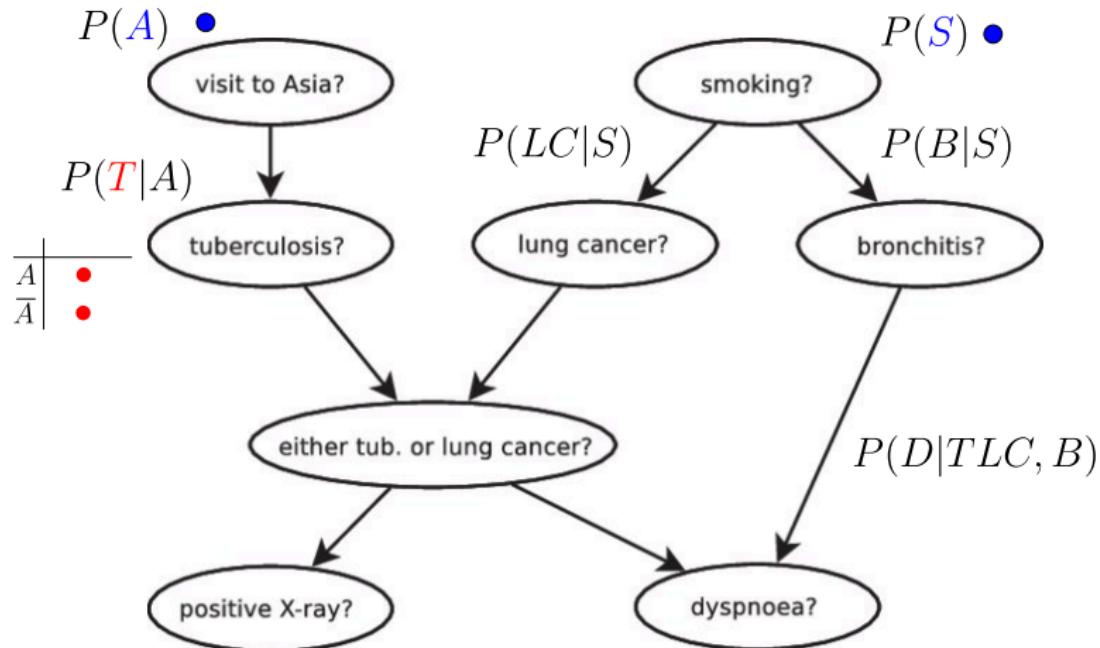
Réseau bayesien (Bayesian Network)



Exemple inspiré de Daly et al, 2011

Un peu de multivarié...

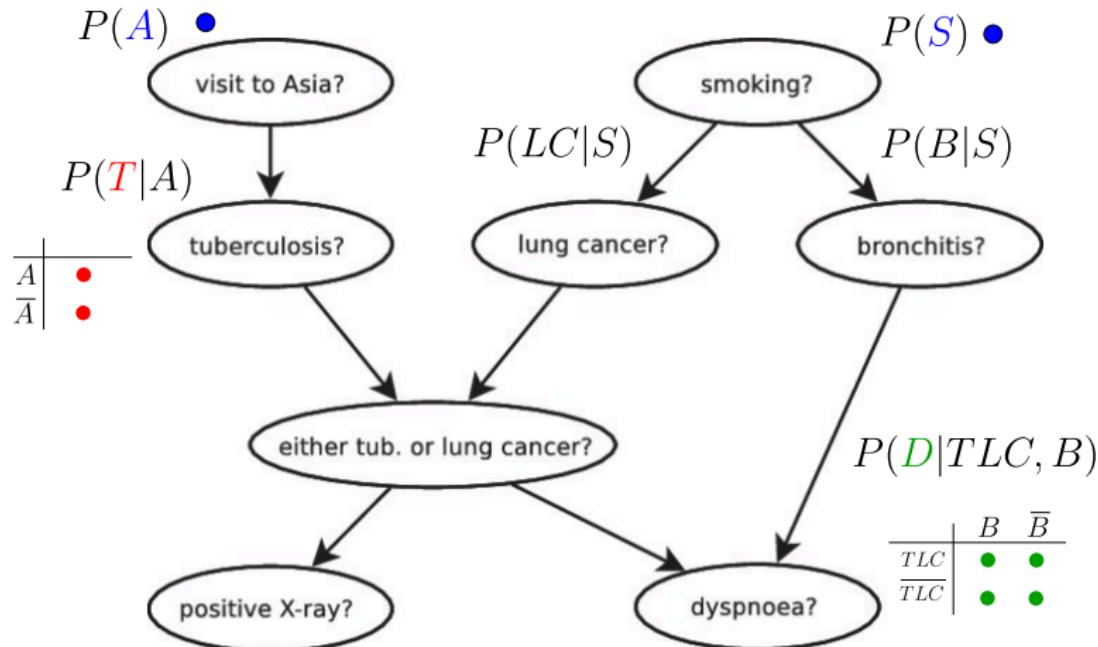
Réseau bayesien (Bayesian Network)



Exemple inspiré de Daly et al, 2011

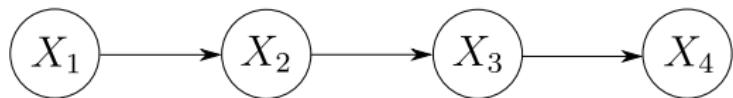
Un peu de multivarié...

Réseau bayesien (Bayesian Network)



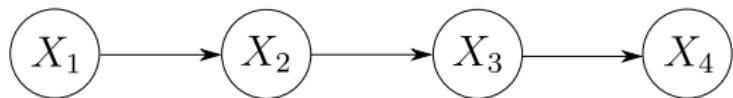
Exemple inspiré de Daly et al, 2011

Chaîne de Markov



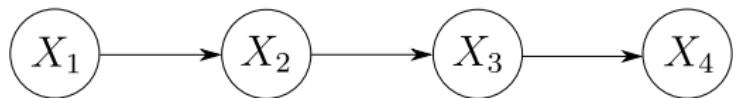
Chaîne de Markov

$$X_1, X_2, X_3, X_4 \sim \mathcal{G}$$



Chaîne de Markov

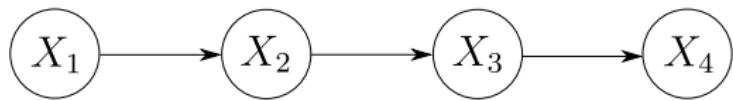
$$X_1, X_2, X_3, X_4 \sim \mathcal{G}$$



$$P(X_1, X_2, X_3, X_4) =$$

Chaîne de Markov

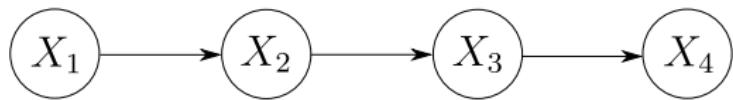
$X_1, X_2, X_3, X_4 \sim \mathcal{G}$



$$P(X_1, X_2, X_3, X_4) = P(X_4|X_1, X_2, X_3)P(X_1, X_2, X_3)$$

Chaîne de Markov

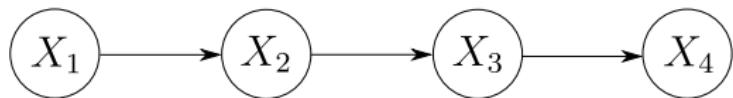
$$X_1, X_2, X_3, X_4 \sim \mathcal{G}$$



$$P(X_1, X_2, X_3, X_4) = P(X_4|X_1, X_2, X_3)P(X_1, X_2, X_3)$$

Chaîne de Markov

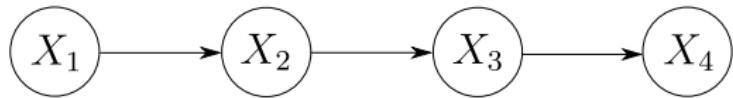
$X_1, X_2, X_3, X_4 \sim \mathcal{G}$



$$\begin{aligned} P(X_1, X_2, X_3, X_4) &= P(X_4 | X_1, X_2, X_3)P(X_1, X_2, X_3) \\ &= P(X_4 | X_3)P(X_1, X_2, X_3) \end{aligned}$$

Chaîne de Markov

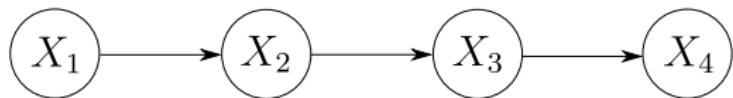
$X_1, X_2, X_3, X_4 \sim \mathcal{G}$



$$\begin{aligned} P(X_1, X_2, X_3, X_4) &= P(X_4|X_1, X_2, X_3)P(X_1, X_2, X_3) \\ &= P(X_4|X_3)P(X_1, X_2, X_3) \\ &= P(X_4|X_3)P(X_3|X_1, X_2)P(X_1, X_2) \end{aligned}$$

Chaîne de Markov

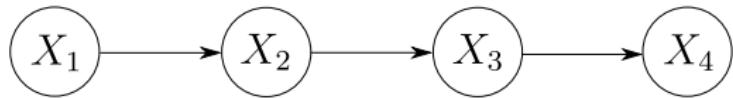
$X_1, X_2, X_3, X_4 \sim \mathcal{G}$



$$\begin{aligned} P(X_1, X_2, X_3, X_4) &= P(X_4 | X_1, X_2, X_3)P(X_1, X_2, X_3) \\ &= P(X_4 | X_3)P(X_1, X_2, X_3) \\ &= P(X_4 | X_3)P(X_3 | X_1, X_2)P(X_1, X_2) \end{aligned}$$

Chaîne de Markov

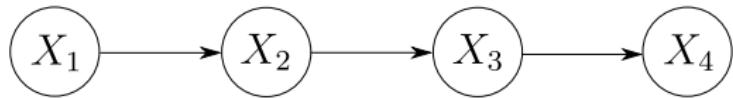
$$X_1, X_2, X_3, X_4 \sim \mathcal{G}$$



$$\begin{aligned} P(X_1, X_2, X_3, X_4) &= P(X_4|X_1, X_2, X_3)P(X_1, X_2, X_3) \\ &= P(X_4|X_3)P(X_1, X_2, X_3) \\ &= P(X_4|X_3)P(X_3|X_1, X_2)P(X_1, X_2) \\ &= P(X_4|X_3)P(X_3|X_2)P(X_1, X_2) \end{aligned}$$

Chaîne de Markov

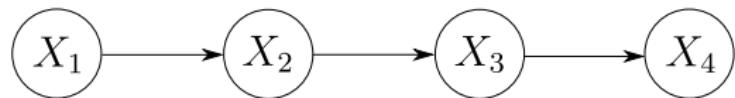
$X_1, X_2, X_3, X_4 \sim \mathcal{G}$



$$\begin{aligned}P(X_1, X_2, X_3, X_4) &= P(X_4|X_1, X_2, X_3)P(X_1, X_2, X_3) \\&= P(X_4|X_3)P(X_1, X_2, X_3) \\&= P(X_4|X_3)P(X_3|X_1, X_2)P(X_1, X_2) \\&= P(X_4|X_3)P(X_3|X_2)P(X_1, X_2) \\&= P(X_4|X_3)P(X_3|X_2)P(X_2|X_1)P(X_1)\end{aligned}$$

Chaîne de Markov

$X_1, X_2, X_3, X_4 \sim \mathcal{G}$

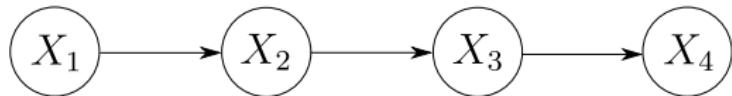


$$\begin{aligned} P(X_1, X_2, X_3, X_4) &= P(X_4|X_1, X_2, X_3)P(X_1, X_2, X_3) \\ &= P(X_4|X_3)P(X_1, X_2, X_3) \\ &= P(X_4|X_3)P(X_3|X_1, X_2)P(X_1, X_2) \\ &= P(X_4|X_3)P(X_3|X_2)P(X_1, X_2) \\ &= P(X_4|X_3)P(X_3|X_2)P(X_2|X_1)P(X_1) \end{aligned}$$

$$P(X_1, X_2, X_3, X_4) = P(X_1) P(X_2|X_1) P(X_3|X_2) P(X_4|X_3)$$

Chaîne de Markov

$X_1, X_2, X_3, X_4 \sim \mathcal{G}$

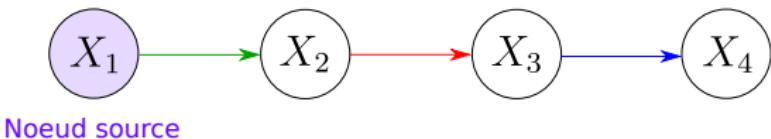


$$\begin{aligned} P(X_1, X_2, X_3, X_4) &= P(X_4|X_1, X_2, X_3)P(X_1, X_2, X_3) \\ &= P(X_4|X_3)P(X_1, X_2, X_3) \\ &= P(X_4|X_3)P(X_3|X_1, X_2)P(X_1, X_2) \\ &= P(X_4|X_3)P(X_3|X_2)P(X_1, X_2) \\ &= P(X_4|X_3)P(X_3|X_2)P(X_2|X_1)P(X_1) \end{aligned}$$

$$P(X_1, X_2, X_3, X_4) = P(X_1) P(X_2|X_1) P(X_3|X_2) P(X_4|X_3)$$

Chaîne de Markov

$X_1, X_2, X_3, X_4 \sim \mathcal{G}$

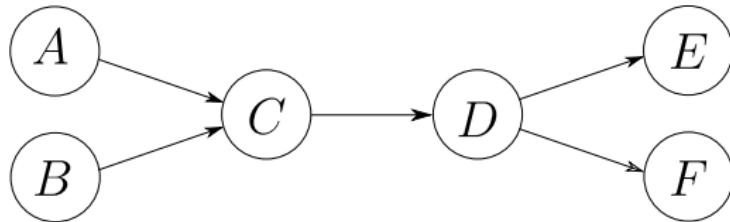


$$\begin{aligned}P(X_1, X_2, X_3, X_4) &= P(X_4|X_1, X_2, X_3)P(X_1, X_2, X_3) \\&= P(X_4|X_3)P(X_1, X_2, X_3) \\&= P(X_4|X_3)P(X_3|X_1, X_2)P(X_1, X_2) \\&= P(X_4|X_3)P(X_3|X_2)P(X_1, X_2) \\&= P(X_4|X_3)P(X_3|X_2)P(X_2|X_1)P(X_1)\end{aligned}$$

$$P(X_1, X_2, X_3, X_4) = P(X_1) P(X_2|X_1) P(X_3|X_2) P(X_4|X_3)$$

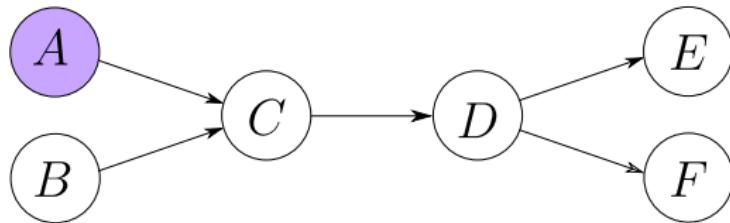
Cas général

$$A, B, C, D, E, F \sim \mathcal{G}$$



Cas général

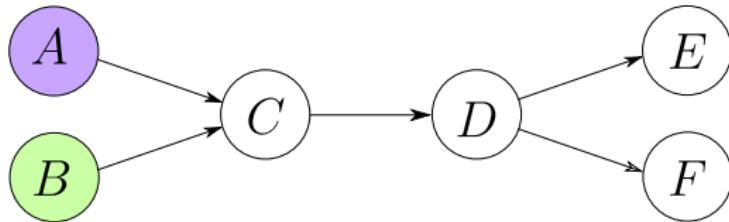
$$A, B, C, D, E, F \sim \mathcal{G}$$



$P(A)$...

Cas général

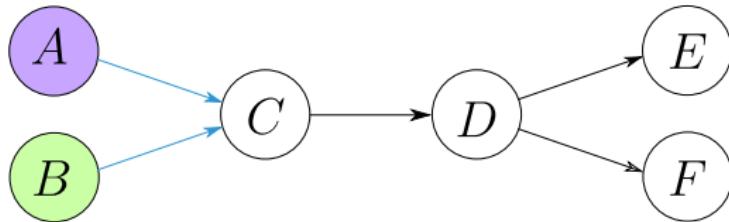
$A, B, C, D, E, F \sim \mathcal{G}$



$P(A) \times P(B) \dots$

Cas général

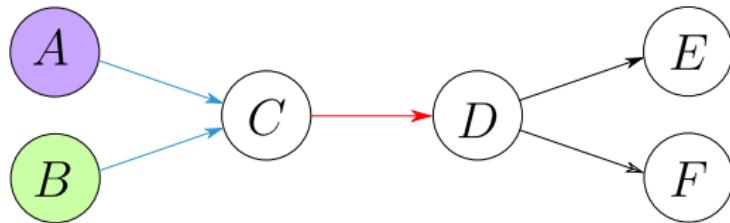
$A, B, C, D, E, F \sim \mathcal{G}$



$$P(A) \times P(B) \times P(C|A, B) \dots$$

Cas général

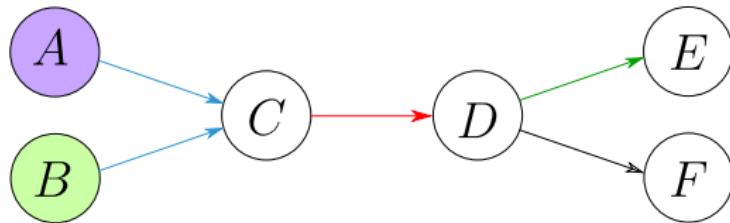
$$A, B, C, D, E, F \sim \mathcal{G}$$



$$P(A) \times P(B) \times P(C|A, B) \times P(D|C) \dots$$

Cas général

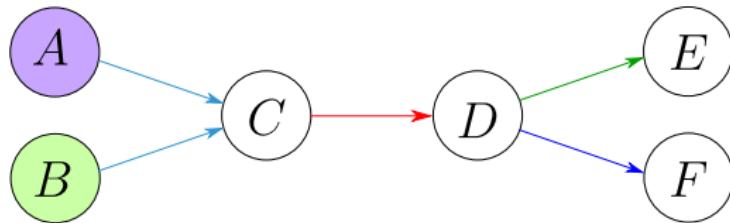
$$A, B, C, D, E, F \sim \mathcal{G}$$



$$P(A) \times P(B) \times P(C|A, B) \times P(D|C) \times P(E|D) \dots$$

Cas général

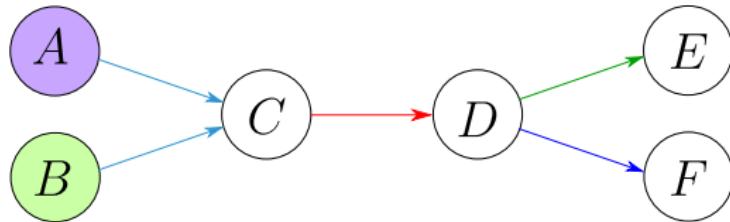
$$A, B, C, D, E, F \sim \mathcal{G}$$



$$P(A) \times P(B) \times P(C|A, B) \times P(D|C) \times P(E|D) \times P(F|D)$$

Cas général

$$A, B, C, D, E, F \sim \mathcal{G}$$

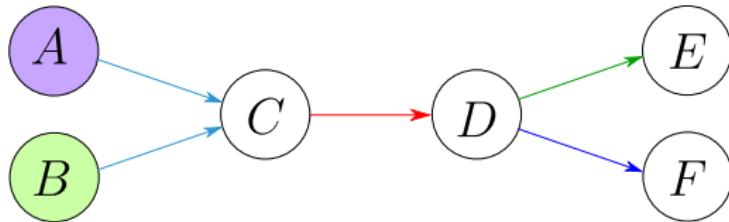


$$P(A) \times P(B) \times P(C|A, B) \times P(D|C) \times P(E|D) \times P(F|D)$$

$$= P(A, B) \times P(C|A, B) \times P(D|C) \times P(E|D) \times P(F|D)$$

Cas général

$$A, B, C, D, E, F \sim \mathcal{G}$$



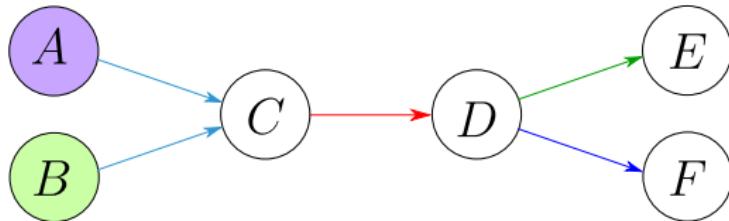
$$P(A) \times P(B) \times P(C|A, B) \times P(D|C) \times P(E|D) \times P(F|D)$$

$$= P(A, B) \times P(C|A, B) \times P(D|C) \times P(E|D) \times P(F|D)$$

$$= P(A, B, C) \times P(D|C) \times P(E|D) \times P(F|D)$$

Cas général

$$A, B, C, D, E, F \sim \mathcal{G}$$



$$P(A) \times P(B) \times P(C|A, B) \times P(D|C) \times P(E|D) \times P(F|D)$$

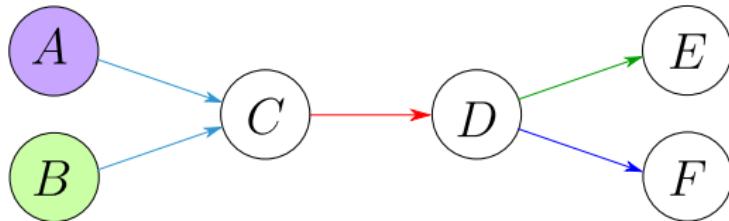
$$= P(A, B) \times P(C|A, B) \times P(D|C) \times P(E|D) \times P(F|D)$$

$$= P(A, B, C) \times P(D|C) \times P(E|D) \times P(F|D)$$

$$= P(A, B, C) \times P(D|A, B, C) \times P(E|D) \times P(F|D)$$

Cas général

$$A, B, C, D, E, F \sim \mathcal{G}$$



$$P(A) \times P(B) \times P(C|A, B) \times P(D|C) \times P(E|D) \times P(F|D)$$

$$= P(A, B) \times P(C|A, B) \times P(D|C) \times P(E|D) \times P(F|D)$$

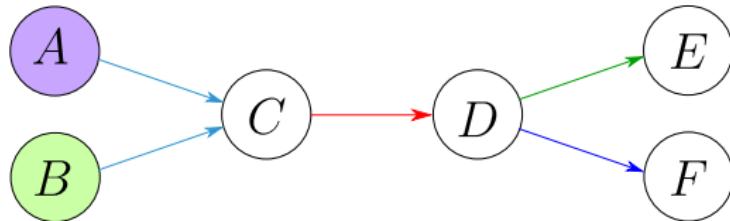
$$= P(A, B, C) \times P(D|C) \times P(E|D) \times P(F|D)$$

$$= P(A, B, C) \times P(D|A, B, C) \times P(E|D) \times P(F|D)$$

$$= P(A, B, C, D) \times P(E|D) \times P(F|D)$$

Cas général

$$A, B, C, D, E, F \sim \mathcal{G}$$



$$P(A) \times P(B) \times P(C|A, B) \times P(D|C) \times P(E|D) \times P(F|D)$$

$$= P(A, B) \times P(C|A, B) \times P(D|C) \times P(E|D) \times P(F|D)$$

$$= P(A, B, C) \times P(D|C) \times P(E|D) \times P(F|D)$$

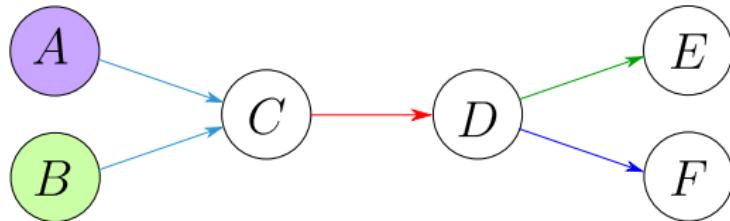
$$= P(A, B, C) \times P(D|A, B, C) \times P(E|D) \times P(F|D)$$

$$= P(A, B, C, D) \times P(E|D) \times P(F|D)$$

$$= P(A, B, C, D) \times P(E|A, B, C, D) \times P(F|D)$$

Cas général

$$A, B, C, D, E, F \sim \mathcal{G}$$



$$P(A) \times P(B) \times P(C|A, B) \times P(D|C) \times P(E|D) \times P(F|D)$$

$$= P(A, B) \times P(C|A, B) \times P(D|C) \times P(E|D) \times P(F|D)$$

$$= P(A, B, C) \times P(D|C) \times P(E|D) \times P(F|D)$$

$$= P(A, B, C) \times P(D|A, B, C) \times P(E|D) \times P(F|D)$$

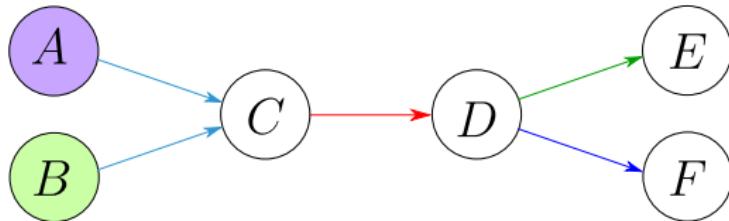
$$= P(A, B, C, D) \times P(E|D) \times P(F|D)$$

$$= P(A, B, C, D) \times P(E|A, B, C, D) \times P(F|D)$$

$$= P(A, B, C, D, E) \times P(F|D)$$

Cas général

$$A, B, C, D, E, F \sim \mathcal{G}$$



$$P(A) \times P(B) \times P(C|A, B) \times P(D|C) \times P(E|D) \times P(F|D)$$

$$= P(A, B) \times P(C|A, B) \times P(D|C) \times P(E|D) \times P(F|D)$$

$$= P(A, B, C) \times P(D|C) \times P(E|D) \times P(F|D)$$

$$= P(A, B, C) \times P(D|A, B, C) \times P(E|D) \times P(F|D)$$

$$= P(A, B, C, D) \times P(E|D) \times P(F|D)$$

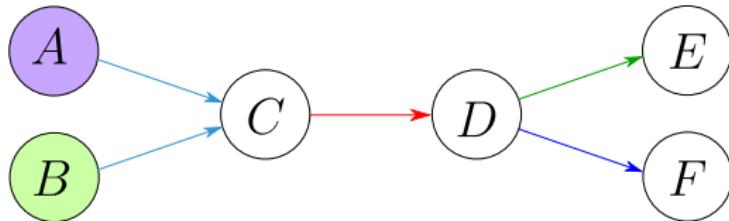
$$= P(A, B, C, D) \times P(E|A, B, C, D) \times P(F|D)$$

$$= P(A, B, C, D, E) \times P(F|D)$$

$$= P(A, B, C, D, E) \times P(F|A, B, C, D, E)$$

Cas général

$$A, B, C, D, E, F \sim \mathcal{G}$$



$$P(A) \times P(B) \times P(C|A, B) \times P(D|C) \times P(E|D) \times P(F|D)$$

$$= P(A, B) \times P(C|A, B) \times P(D|C) \times P(E|D) \times P(F|D)$$

$$= P(A, B, C) \times P(D|C) \times P(E|D) \times P(F|D)$$

$$= P(A, B, C) \times P(D|A, B, C) \times P(E|D) \times P(F|D)$$

$$= P(A, B, C, D) \times P(E|D) \times P(F|D)$$

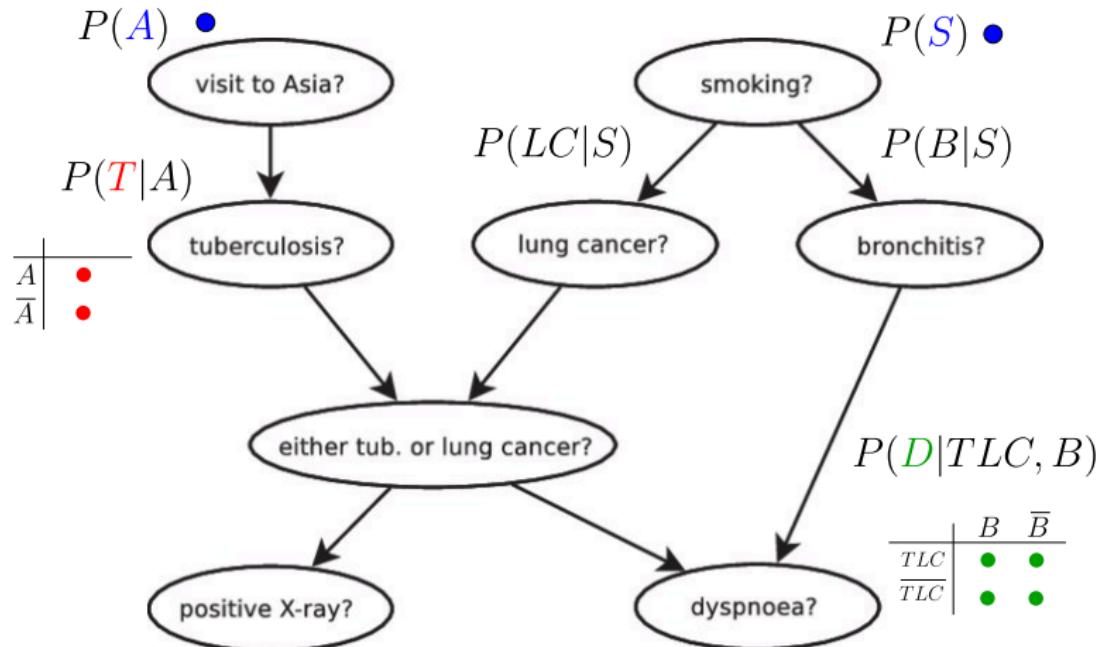
$$= P(A, B, C, D) \times P(E|A, B, C, D) \times P(F|D)$$

$$= P(A, B, C, D, E) \times P(F|D)$$

$$= P(A, B, C, D, E) \times P(F|A, B, C, D, E) = P(A, B, C, D, E, F) \blacksquare$$

Un peu de multivarié...

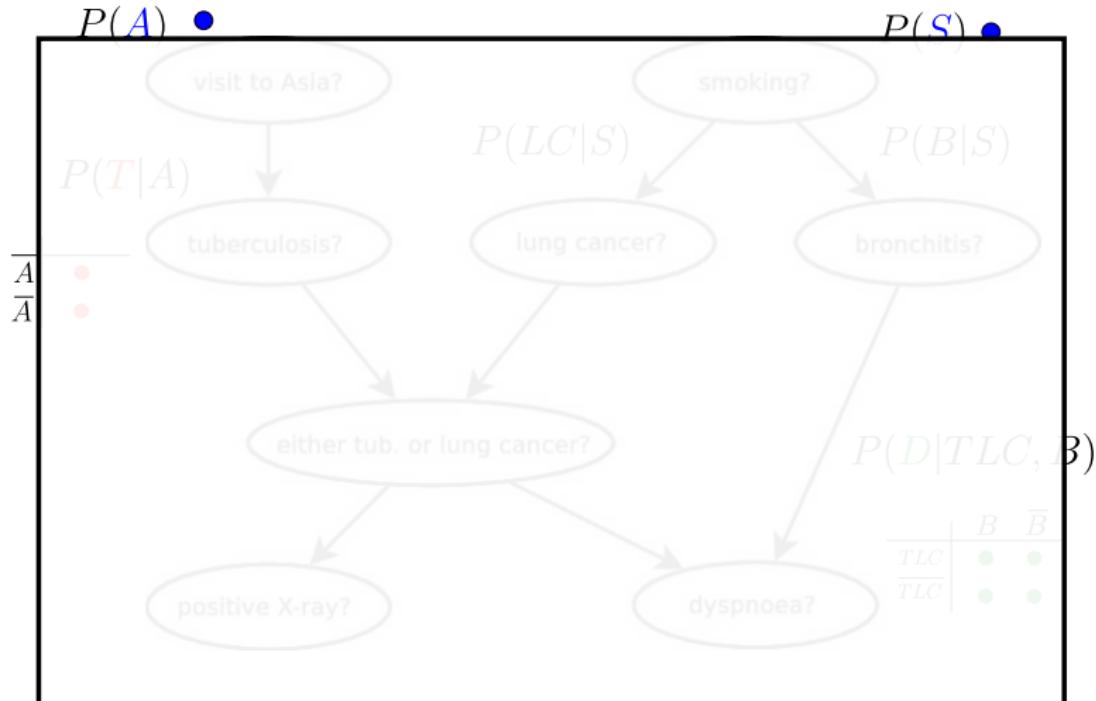
Réseau bayesien (Bayesian Network)



Exemple inspiré de Daly et al, 2011

Un peu de multivarié...

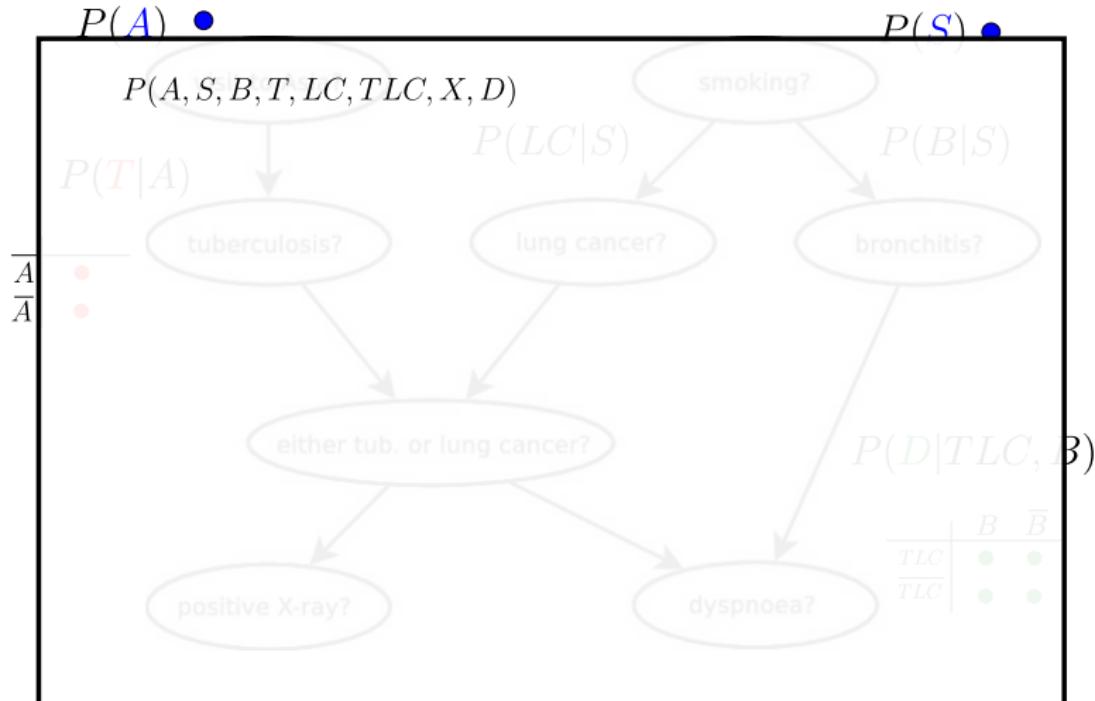
Réseau bayesien (Bayesian Network)



Exemple inspiré de Daly et al, 2011

Un peu de multivarié...

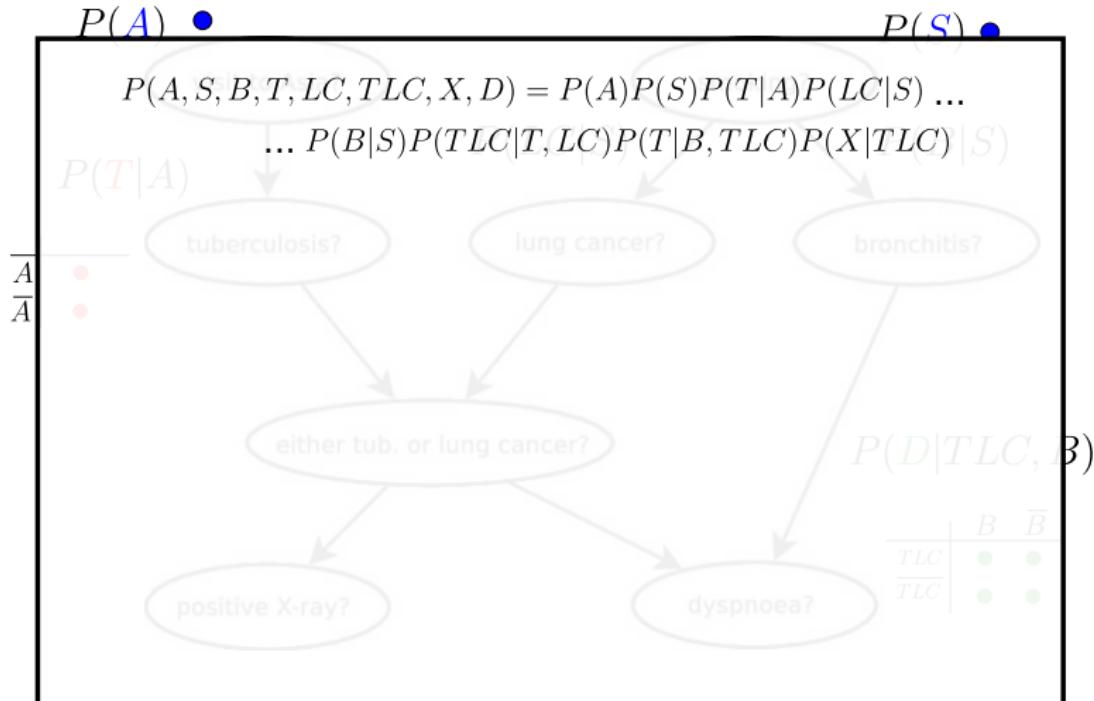
Réseau bayesien (Bayesian Network)



Exemple inspiré de Daly et al, 2011

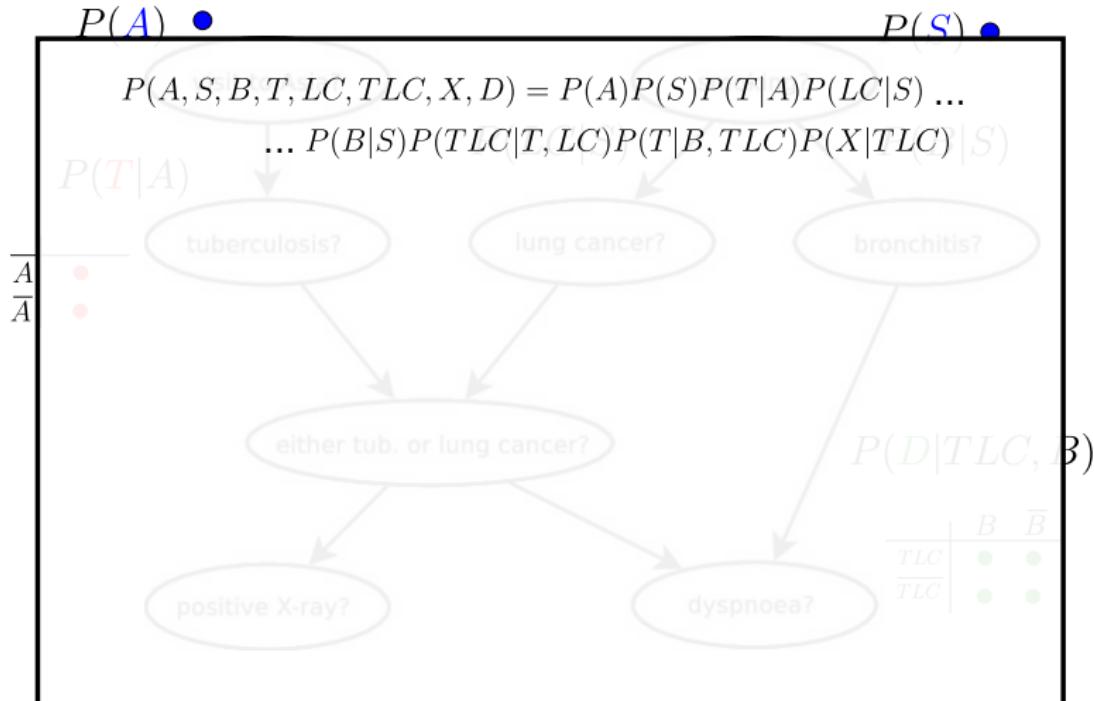
Un peu de multivarié...

Réseau bayesien (Bayesian Network)



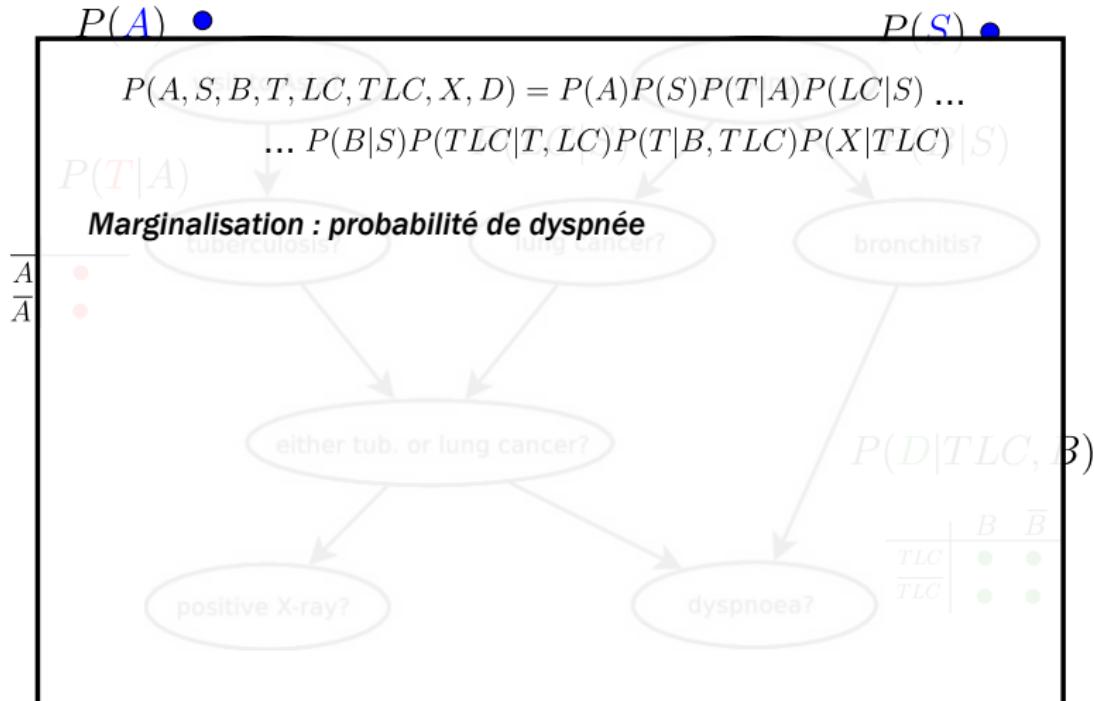
Un peu de multivarié...

Réseau bayesien (Bayesian Network)



Un peu de multivarié...

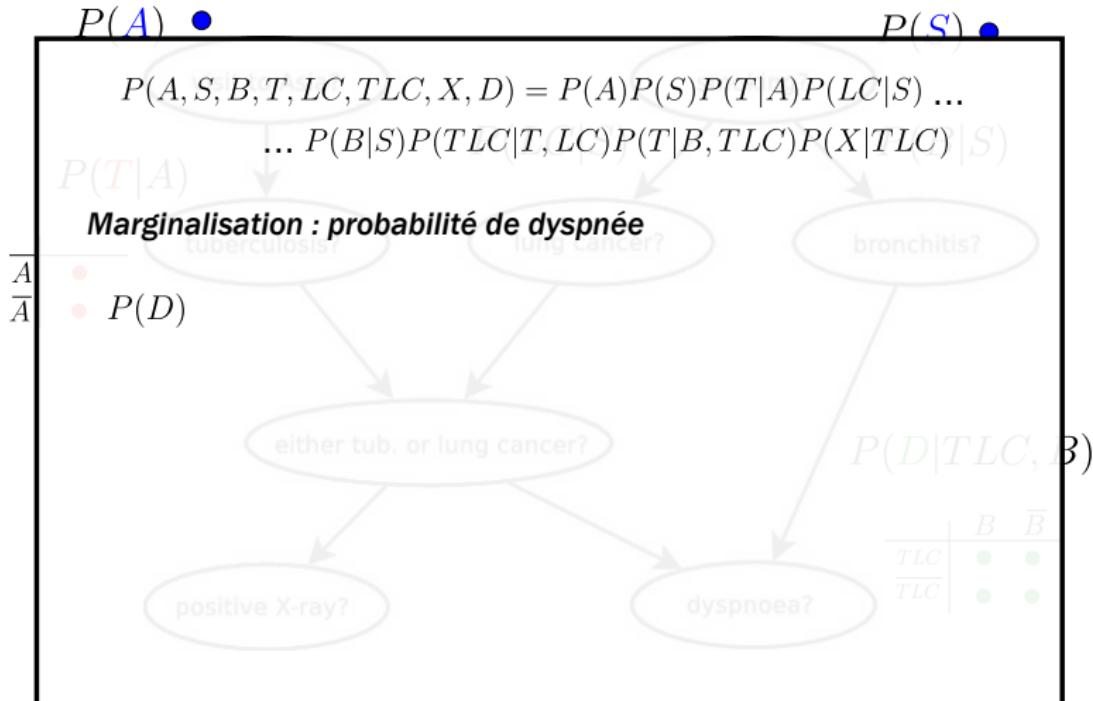
Réseau bayesien (Bayesian Network)



Exemple inspiré de Daly et al, 2011

Un peu de multivarié...

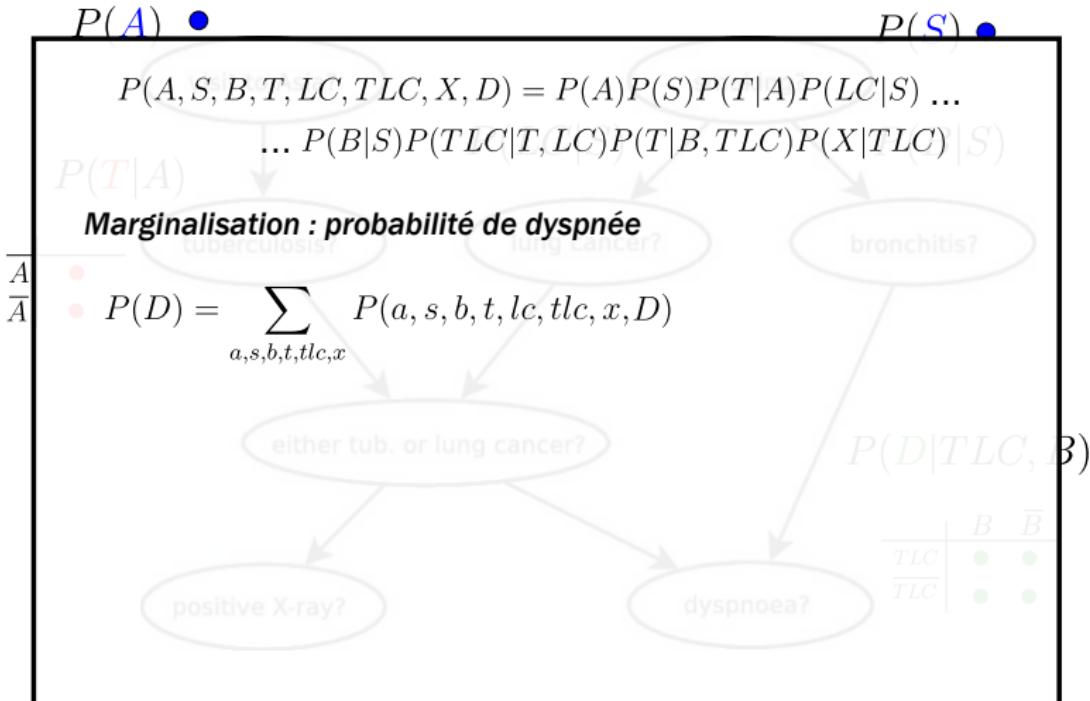
Réseau bayesien (Bayesian Network)



Exemple inspiré de Daly et al, 2011

Un peu de multivarié...

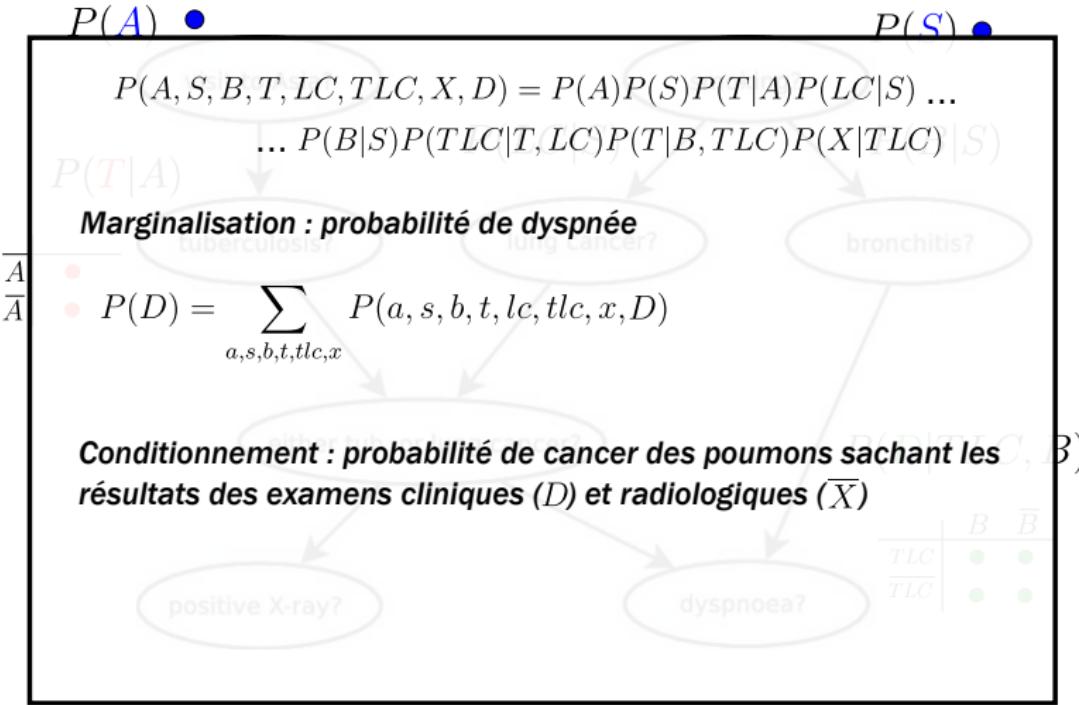
Réseau bayesien (Bayesian Network)



Exemple inspiré de Daly et al, 2011

Un peu de multivarié...

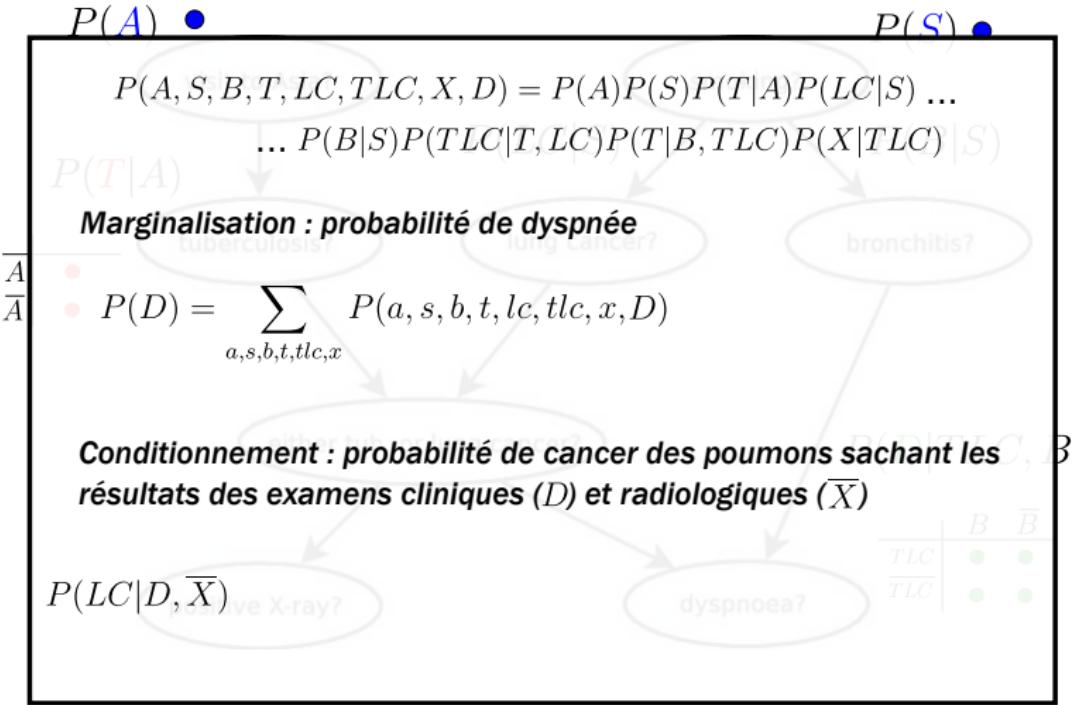
Réseau bayesien (Bayesian Network)



Exemple inspiré de Daly et al, 2011

Un peu de multivarié...

Réseau bayesien (Bayesian Network)



Exemple inspiré de Daly et al, 2011

Un peu de multivarié...

Réseau bayesien (Bayesian Network)

$P(A) \bullet$

$P(S) \bullet$

$$P(A, S, B, T, LC, TLC, X, D) = P(A)P(S)P(T|A)P(LC|S) \dots \\ \dots P(B|S)P(TLC|T, LC)P(T|B, TLC)P(X|TLC)$$

$P(T|A)$

Marginalisation : probabilité de dyspnée

\overline{A}



$$\bullet P(D) = \sum_{a,s,b,t,lc,x} P(a, s, b, t, lc, tlc, x, D)$$

Conditionnement : probabilité de cancer des poumons sachant les résultats des examens cliniques (D) et radiologiques (\overline{X})

$$P(LC|D, \overline{X}) = \frac{P(LC, D, \overline{X})}{P(D, \overline{X})}$$

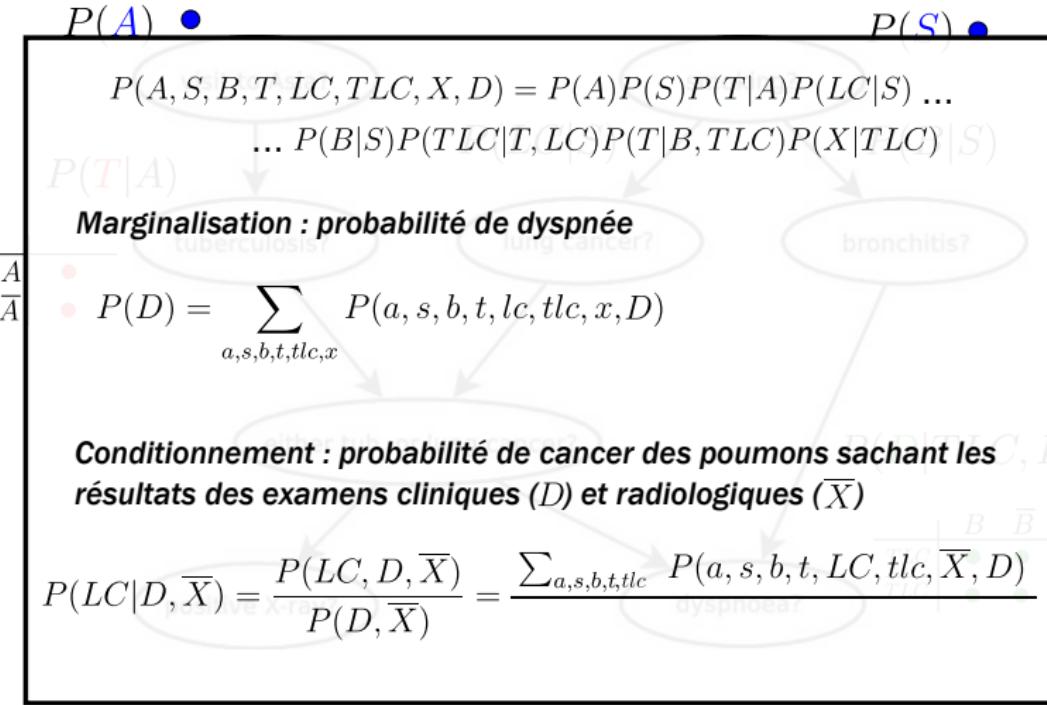
	B	\overline{B}
TLC	●	●
\overline{TLC}	●	●

dyspnoea?

Exemple inspiré de Daly et al, 2011

Un peu de multivarié...

Réseau bayesien (Bayesian Network)



Exemple inspiré de Daly et al, 2011

Un peu de multivarié...

Réseau bayesien (Bayesian Network)

$P(A) \bullet$

$P(S) \bullet$

$$P(A, S, B, T, LC, TLC, X, D) = P(A)P(S)P(T|A)P(LC|S) \dots \\ \dots P(B|S)P(TLC|T, LC)P(T|B, TLC)P(X|TLC)$$

$P(T|A)$

Marginalisation : probabilité de dyspnée

\overline{A}

•

•

$$P(D) = \sum_{a,s,b,t,lc,x} P(a, s, b, t, lc, tlc, x, D)$$

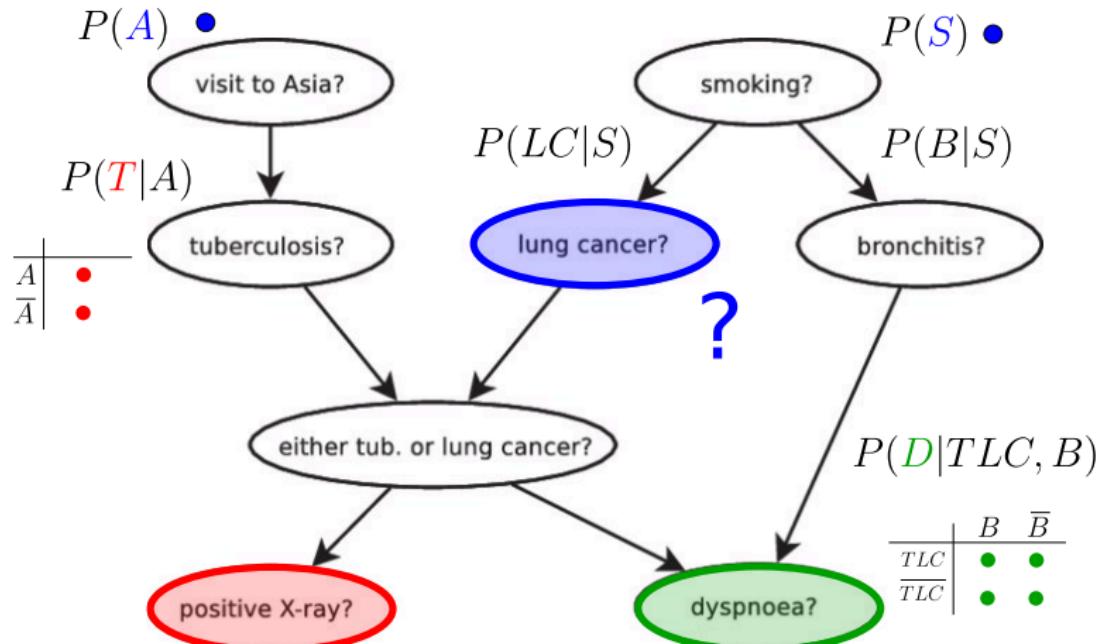
Conditionnement : probabilité de cancer des poumons sachant les résultats des examens cliniques (D) et radiologiques (\overline{X})

$$P(LC|D, \overline{X}) = \frac{P(LC, D, \overline{X})}{P(D, \overline{X})} = \frac{\sum_{a,s,b,t,lc} P(a, s, b, t, LC, tlc, \overline{X}, D)}{\sum_{a,s,b,t,lc,lc} P(a, s, b, t, lc, tlc, \overline{X}, D)}$$

Exemple inspiré de Daly et al, 2011

Un peu de multivarié...

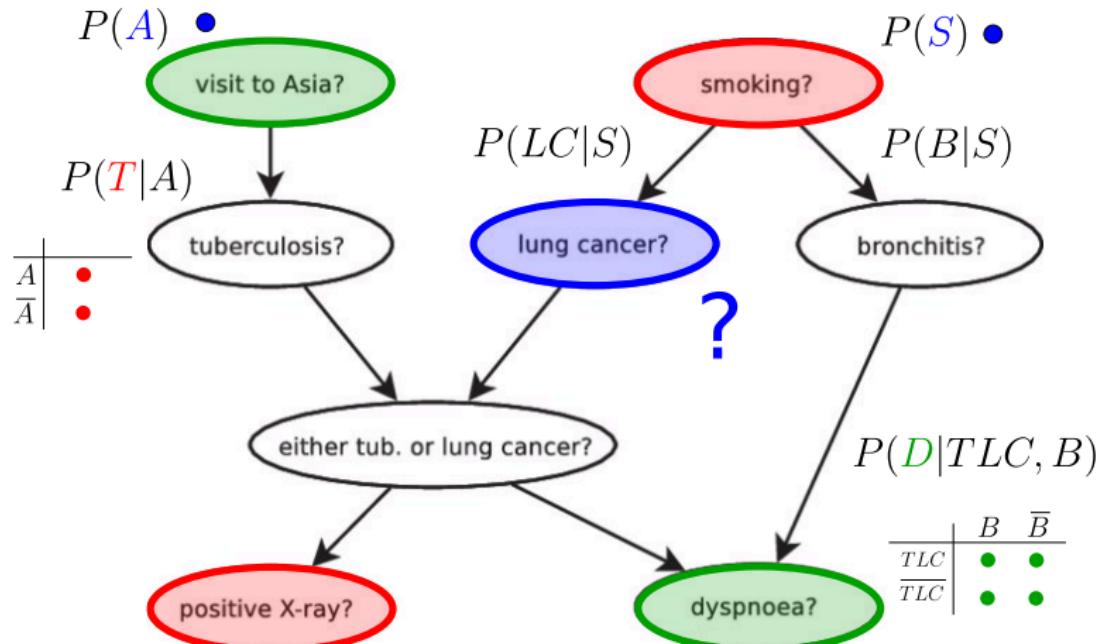
Réseau bayesien (Bayesian Network)



Exemple inspiré de Daly et al, 2011

Un peu de multivarié...

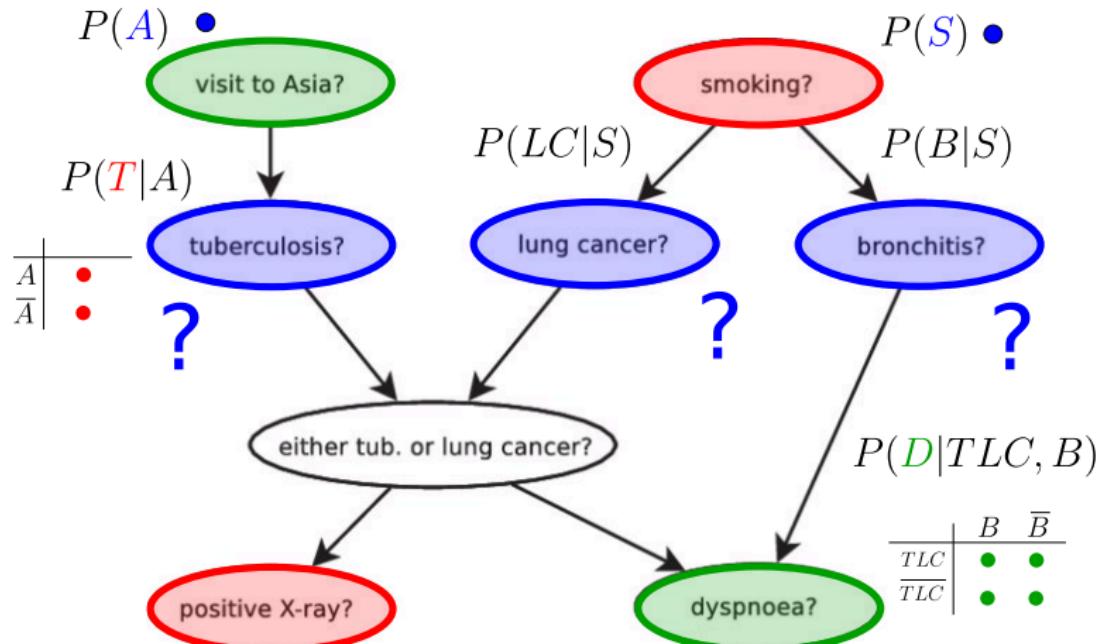
Réseau bayesien (Bayesian Network)



Exemple inspiré de Daly et al, 2011

Un peu de multivarié...

Réseau bayesien (Bayesian Network)



Exemple inspiré de Daly et al, 2011

Des fractures ont été constatées sur un site (habité) à fort relief. On cherche à savoir si ces fractures peuvent être le signe précurseur d'un glissement de terrain.

Le MNT nous dit que le terrain est à risque ($p \geq 7^\circ$).

Cependant, ces fractures peuvent aussi avoir été causées par le phénomène de *retrait-gonflement des argiles*, d'autant que les mois précédents ont été témoin d'une forte pluviométrie.

Doit-on faire évacuer la zone ?

Travaux pratiques

Argiles
(retrait/gonflement)

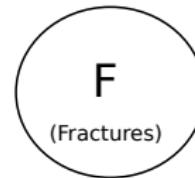
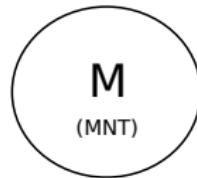
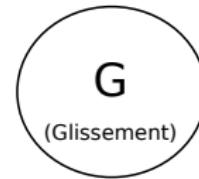
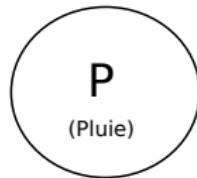
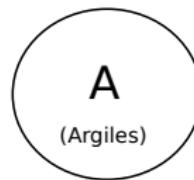
Pluie

Glissement

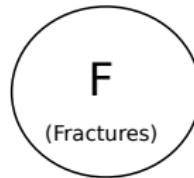
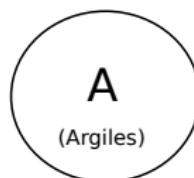
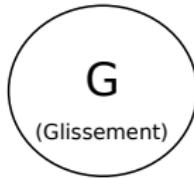
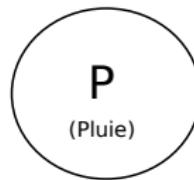
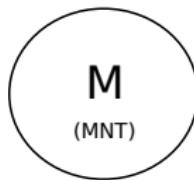
MNT

Fractures

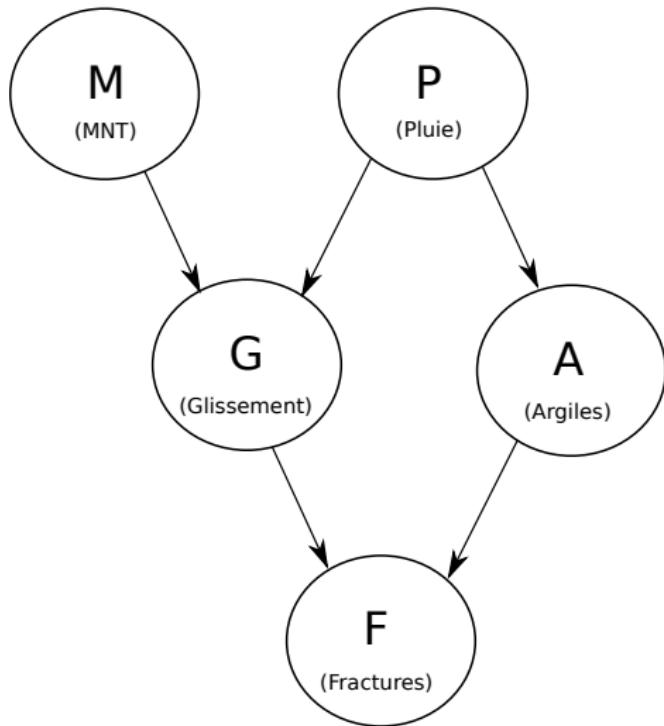
Travaux pratiques



Travaux pratiques



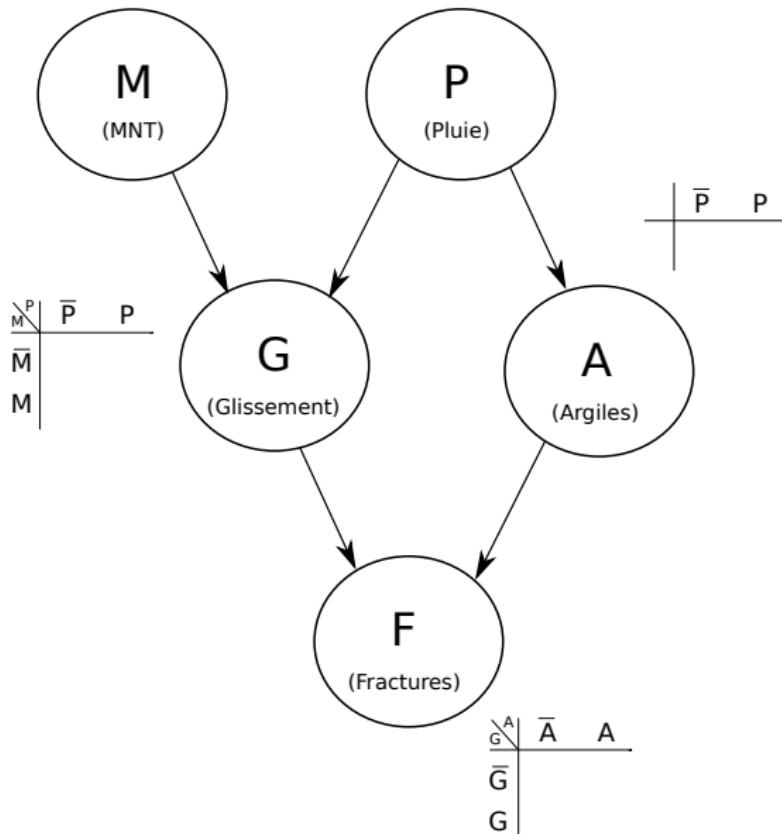
Travaux pratiques



Travaux pratiques

$$P(M) =$$

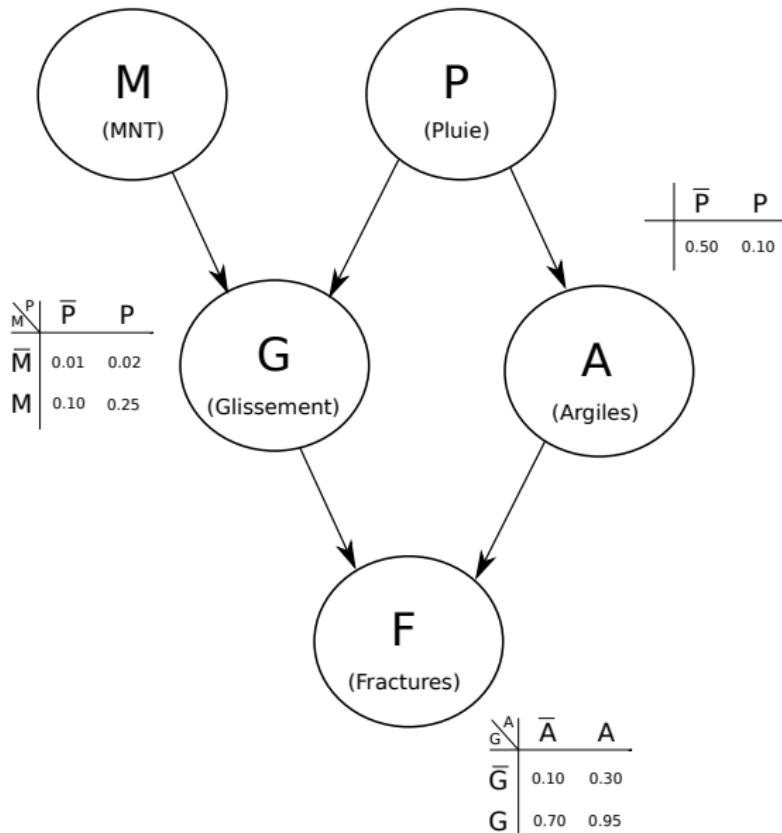
$$P(P) =$$



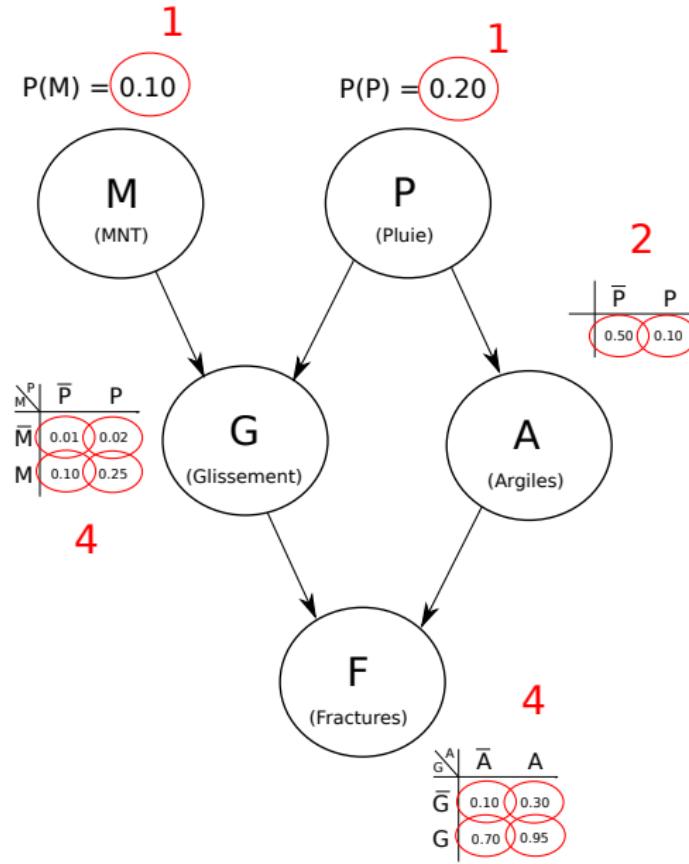
Travaux pratiques

$$P(M) = 0.10$$

$$P(P) = 0.20$$



Travaux pratiques



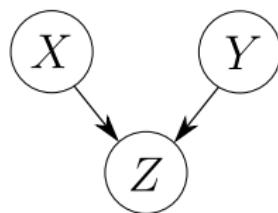
Indépendance : attention aux pièges !

Indépendance : attention aux pièges !

Indépendances conditionnelles

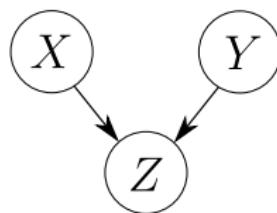
Indépendance : attention aux pièges !

Indépendances conditionnelles



Indépendance : attention aux pièges !

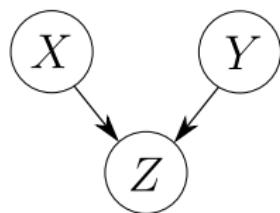
Indépendances conditionnelles



$$P(X|Y)$$

Indépendance : attention aux pièges !

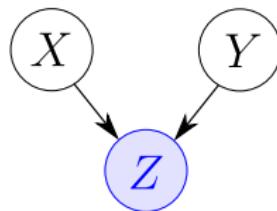
Indépendances conditionnelles



$$P(X|Y) = P(X)$$

Indépendance : attention aux pièges !

Indépendances conditionnelles

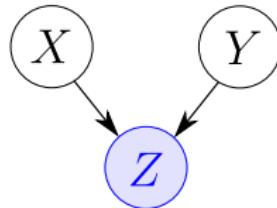


$$P(X|Y) = P(X)$$
$$P(X|Y, \textcolor{blue}{Z}) \neq P(X|\textcolor{blue}{Z})$$

Indépendance : attention aux pièges !

Indépendances conditionnelles

Explaining away

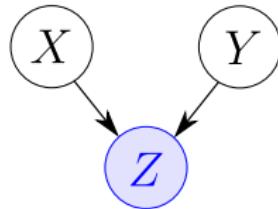


$$P(X|Y) = P(X)$$
$$P(X|Y, \textcolor{blue}{Z}) \neq P(X|\textcolor{blue}{Z})$$

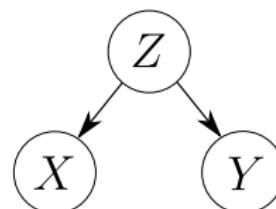
Indépendance : attention aux pièges !

Indépendances conditionnelles

Explaining away



Cause commune



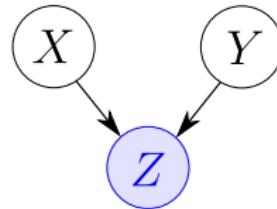
$$P(X|Y) = P(X)$$

$$P(X|Y, \textcolor{blue}{Z}) \neq P(X|\textcolor{blue}{Z})$$

Indépendance : attention aux pièges !

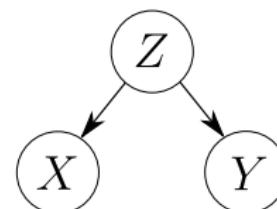
Indépendances conditionnelles

Explaining away



$$P(X|Y) = P(X)$$
$$P(X|Y, \textcolor{blue}{Z}) \neq P(X|\textcolor{blue}{Z})$$

Cause commune

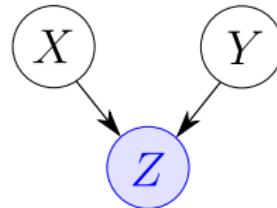


$$P(X|Y)$$

Indépendance : attention aux pièges !

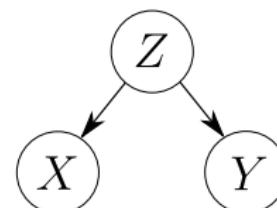
Indépendances conditionnelles

Explaining away



$$P(X|Y) = P(X)$$
$$P(X|Y, \textcolor{blue}{Z}) \neq P(X|\textcolor{blue}{Z})$$

Cause commune

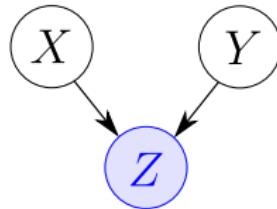


$$P(X|Y) \neq P(X)$$

Indépendance : attention aux pièges !

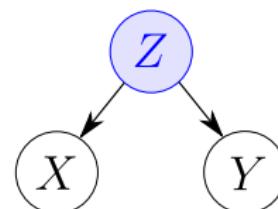
Indépendances conditionnelles

Explaining away



$$P(X|Y) = P(X)$$
$$P(X|Y, \textcolor{blue}{Z}) \neq P(X|\textcolor{blue}{Z})$$

Cause commune

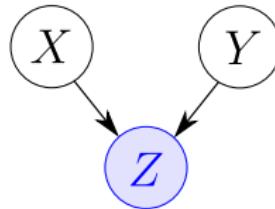


$$P(X|Y) \neq P(X)$$
$$P(X|Y, \textcolor{blue}{Z}) = P(X|\textcolor{blue}{Z})$$

Indépendance : attention aux pièges !

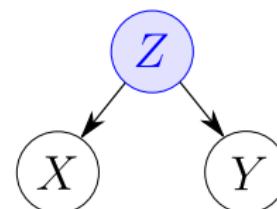
Indépendances conditionnelles

Explaining away



$$P(X|Y) = P(X)$$
$$P(X|Y, \textcolor{blue}{Z}) \neq P(X|\textcolor{blue}{Z})$$

Cause commune



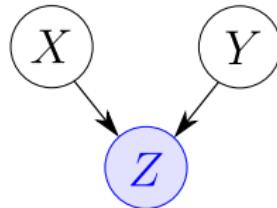
$$P(X|Y) \neq P(X)$$
$$P(X|Y, \textcolor{blue}{Z}) = P(X|\textcolor{blue}{Z})$$

Indépendances mutuelles

Indépendance : attention aux pièges !

Indépendances conditionnelles

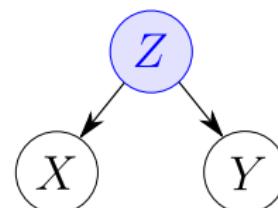
Explaining away



$$P(X|Y) = P(X)$$

$$P(X|Y, \textcolor{blue}{Z}) \neq P(X|\textcolor{blue}{Z})$$

Cause commune



$$P(X|Y) \neq P(X)$$

$$P(X|Y, \textcolor{blue}{Z}) = P(X|\textcolor{blue}{Z})$$

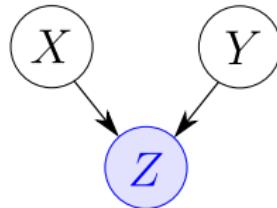
Indépendances mutuelles



Indépendance : attention aux pièges !

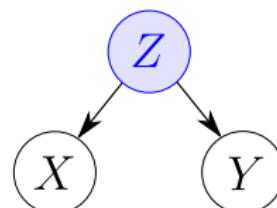
Indépendances conditionnelles

Explaining away



$$P(X|Y) = P(X)$$
$$P(X|Y, \textcolor{blue}{Z}) \neq P(X|\textcolor{blue}{Z})$$

Cause commune



$$P(X|Y) \neq P(X)$$
$$P(X|Y, \textcolor{blue}{Z}) = P(X|\textcolor{blue}{Z})$$

Indépendances mutuelles

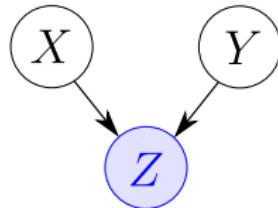


$$\Omega = \{1, 2, 3, 4\} \quad A_{12} = \{1, 2\}, \quad A_{23} = \{2, 3\}, \quad A_{13} = \{1, 3\}$$

Indépendance : attention aux pièges !

Indépendances conditionnelles

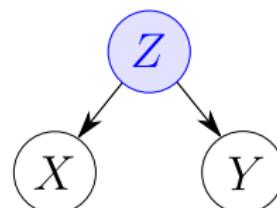
Explaining away



$$P(X|Y) = P(X)$$

$$P(X|Y, \textcolor{blue}{Z}) \neq P(X|\textcolor{blue}{Z})$$

Cause commune



$$P(X|Y) \neq P(X)$$

$$P(X|Y, \textcolor{blue}{Z}) = P(X|\textcolor{blue}{Z})$$

Indépendances mutuelles



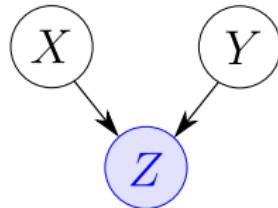
$$\Omega = \{1, 2, 3, 4\} \quad A_{12} = \{1, 2\}, \quad A_{23} = \{2, 3\}, \quad A_{13} = \{1, 3\}$$

$$P(\textcolor{red}{A}_{12}|A_{23})$$

Indépendance : attention aux pièges !

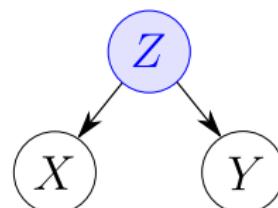
Indépendances conditionnelles

Explaining away



$$P(X|Y) = P(X)$$
$$P(X|Y, \textcolor{blue}{Z}) \neq P(X|\textcolor{blue}{Z})$$

Cause commune



$$P(X|Y) \neq P(X)$$
$$P(X|Y, \textcolor{blue}{Z}) = P(X|\textcolor{blue}{Z})$$

Indépendances mutuelles



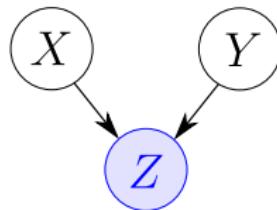
$$\Omega = \{1, 2, 3, 4\} \quad A_{12} = \{1, 2\}, \quad A_{23} = \{2, 3\}, \quad A_{13} = \{1, 3\}$$

$$P(\textcolor{red}{A}_{12}|A_{23}) = \frac{P(\textcolor{red}{A}_{12}, \textcolor{green}{A}_{23})}{P(\textcolor{green}{A}_{23})}$$

Indépendance : attention aux pièges !

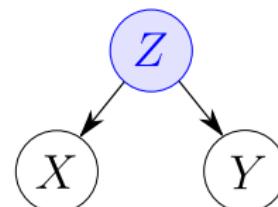
Indépendances conditionnelles

Explaining away



$$P(X|Y) = P(X)$$
$$P(X|Y, \textcolor{blue}{Z}) \neq P(X|\textcolor{blue}{Z})$$

Cause commune



$$P(X|Y) \neq P(X)$$
$$P(X|Y, \textcolor{blue}{Z}) = P(X|\textcolor{blue}{Z})$$

Indépendances mutuelles



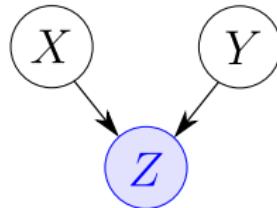
$$\Omega = \{1, 2, 3, 4\} \quad A_{12} = \{1, 2\}, \quad A_{23} = \{2, 3\}, \quad A_{13} = \{1, 3\}$$

$$P(\textcolor{red}{A}_{12}|A_{23}) = \frac{P(\textcolor{red}{A}_{12}, \textcolor{green}{A}_{23})}{P(A_{23})} = \frac{P(\{2\})}{P(A_{23})}$$

Indépendance : attention aux pièges !

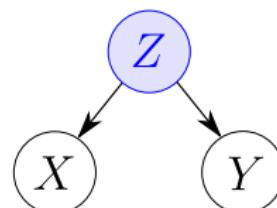
Indépendances conditionnelles

Explaining away



$$P(X|Y) = P(X)$$
$$P(X|Y, \textcolor{blue}{Z}) \neq P(X|\textcolor{blue}{Z})$$

Cause commune



$$P(X|Y) \neq P(X)$$
$$P(X|Y, \textcolor{blue}{Z}) = P(X|\textcolor{blue}{Z})$$

Indépendances mutuelles



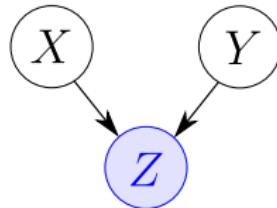
$$\Omega = \{1, 2, 3, 4\} \quad A_{12} = \{1, 2\}, \quad A_{23} = \{2, 3\}, \quad A_{13} = \{1, 3\}$$

$$P(\textcolor{red}{A}_{12}|A_{23}) = \frac{P(\textcolor{red}{A}_{12}, \textcolor{green}{A}_{23})}{P(A_{23})} = \frac{P(\{2\})}{P(A_{23})} = \frac{1/4}{2/4}$$

Indépendance : attention aux pièges !

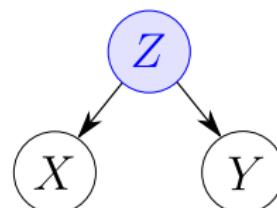
Indépendances conditionnelles

Explaining away



$$P(X|Y) = P(X)$$
$$P(X|Y, \textcolor{blue}{Z}) \neq P(X|\textcolor{blue}{Z})$$

Cause commune



$$P(X|Y) \neq P(X)$$
$$P(X|Y, \textcolor{blue}{Z}) = P(X|\textcolor{blue}{Z})$$

Indépendances mutuelles



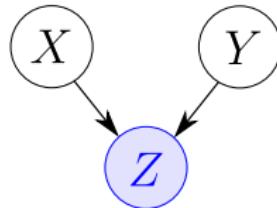
$$\Omega = \{1, 2, 3, 4\} \quad A_{12} = \{1, 2\}, \quad A_{23} = \{2, 3\}, \quad A_{13} = \{1, 3\}$$

$$P(\textcolor{red}{A}_{12}|A_{23}) = \frac{P(\textcolor{red}{A}_{12}, \textcolor{green}{A}_{23})}{P(A_{23})} = \frac{P(\{2\})}{P(A_{23})} = \frac{1/4}{2/4} = \frac{1}{2}$$

Indépendance : attention aux pièges !

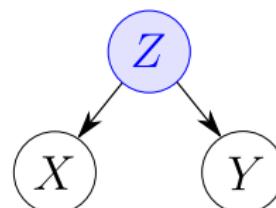
Indépendances conditionnelles

Explaining away



$$P(X|Y) = P(X)$$
$$P(X|Y, \textcolor{blue}{Z}) \neq P(X|\textcolor{blue}{Z})$$

Cause commune



$$P(X|Y) \neq P(X)$$
$$P(X|Y, \textcolor{blue}{Z}) = P(X|\textcolor{blue}{Z})$$

Indépendances mutuelles



$$\Omega = \{1, 2, 3, 4\} \quad A_{12} = \{1, 2\}, \quad A_{23} = \{2, 3\}, \quad A_{13} = \{1, 3\}$$

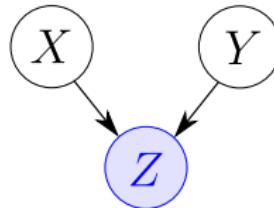
$$P(\textcolor{red}{A}_{12}|A_{23}) = \frac{P(\textcolor{red}{A}_{12}, \textcolor{green}{A}_{23})}{P(A_{23})} = \frac{P(\{2\})}{P(A_{23})} = \frac{1/4}{2/4} = \frac{1}{2}$$

$$A_{12} \text{ et } A_{23} \Rightarrow \overline{A_{13}}$$

Indépendance : attention aux pièges !

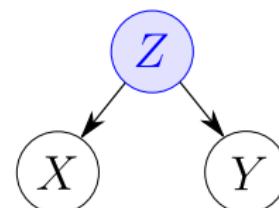
Indépendances conditionnelles

Explaining away



$$P(X|Y) = P(X)$$
$$P(X|Y, \textcolor{blue}{Z}) \neq P(X|\textcolor{blue}{Z})$$

Cause commune



$$P(X|Y) \neq P(X)$$
$$P(X|Y, \textcolor{blue}{Z}) = P(X|\textcolor{blue}{Z})$$

Indépendances mutuelles



$$\Omega = \{1, 2, 3, 4\} \quad A_{12} = \{1, 2\}, \quad A_{23} = \{2, 3\}, \quad A_{13} = \{1, 3\}$$

$$P(\textcolor{red}{A}_{12}|A_{23}) = \frac{P(\textcolor{red}{A}_{12}, \textcolor{green}{A}_{23})}{P(A_{23})} = \frac{P(\{2\})}{P(A_{23})} = \frac{1/4}{2/4} = \frac{1}{2}$$

$$A_{12} \text{ et } A_{23} \Rightarrow \overline{A_{13}} \quad P(\textcolor{blue}{A}_{13}) = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad P(\textcolor{blue}{A}_{13}|\textcolor{red}{A}_{12}, \textcolor{green}{A}_{23}) = 0$$

Moments

- *Espérance*
- *Variance et écart-type*
- *Covariance*
- *Corrélation*
- *Propagation d'erreurs*

Espérance d'une variable aléatoire

Intuitivement, l'espérance de la variable aléatoire X est la valeur moyenne que l'on peut obtenir sur un grand nombre de réalisations de X (loi des grands nombres).

A_k : le tirage contient exactement k numéros du joueur

$$X(\omega) = \begin{cases} 4 & \text{si } \omega \in A_2 \\ 21 & \text{si } \omega \in A_3 \\ 490 & \text{si } \omega \in A_4 \\ 95200 & \text{si } \omega \in A_5 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$\mathbb{E}[X] = 4 \times \mathbb{P}(A_2) + 21 \times \mathbb{P}(A_3) + 490 \times \mathbb{P}(A_4) + 95200 \times \mathbb{P}(A_5)$$

Espérance d'une variable aléatoire

Intuitivement, l'espérance de la variable aléatoire X est la valeur moyenne que l'on peut obtenir sur un grand nombre de réalisations de X (loi des grands nombres).

A_k : le tirage contient exactement k numéros du joueur

$$X(\omega) = \begin{cases} 4 & \text{si } \omega \in A_2 \\ 21 & \text{si } \omega \in A_3 \\ 490 & \text{si } \omega \in A_4 \\ 95200 & \text{si } \omega \in A_5 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$\mathbb{P}(A_k) = \frac{C_5^k \times C_{44}^{5-k}}{C_{49}^5}$$

Espérance d'une variable aléatoire

Intuitivement, l'espérance de la variable aléatoire X est la valeur moyenne que l'on peut obtenir sur un grand nombre de réalisations de X (loi des grands nombres).

A_k : le tirage contient exactement k numéros du joueur

$$X(\omega) = \begin{cases} 4 & \text{si } \omega \in A_2 \\ 21 & \text{si } \omega \in A_3 \\ 490 & \text{si } \omega \in A_4 \\ 95200 & \text{si } \omega \in A_5 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$\mathbb{E}[X] = 4 \times \mathbb{P}(A_2) + 21 \times \mathbb{P}(A_3) + 490 \times \mathbb{P}(A_4) + 95200 \times \mathbb{P}(A_5)$$

Espérance d'une variable aléatoire

Intuitivement, l'espérance de la variable aléatoire X est la valeur moyenne que l'on peut obtenir sur un grand nombre de réalisations de X (loi des grands nombres).

A_k : le tirage contient exactement k numéros du joueur

$$X(\omega) = \begin{cases} 4 & \text{si } \omega \in A_2 \\ 21 & \text{si } \omega \in A_3 \\ 490 & \text{si } \omega \in A_4 \\ 95200 & \text{si } \omega \in A_5 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$\mathbb{E}[X] = 4 \times \frac{132440}{1906884} + 21 \times \frac{9460}{1906884} + 490 \times \frac{440}{1906884} + 95200 \times \frac{10}{1906884}$$

Espérance d'une variable aléatoire

Intuitivement, l'espérance de la variable aléatoire X est la valeur moyenne que l'on peut obtenir sur un grand nombre de réalisations de X (loi des grands nombres).

A_k : le tirage contient exactement k numéros du joueur

$$X(\omega) = \begin{cases} 4 & \text{si } \omega \in A_2 \\ 21 & \text{si } \omega \in A_3 \\ 490 & \text{si } \omega \in A_4 \\ 95200 & \text{si } \omega \in A_5 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$\mathbb{E}[X] \approx 4 \times 0.069 + 21 \times 0.00496 + 490 \times 2.3 \times 10^{-4} + 95200 \times 5.24 \times 10^{-6}$$

Espérance d'une variable aléatoire

Intuitivement, l'espérance de la variable aléatoire X est la valeur moyenne que l'on peut obtenir sur un grand nombre de réalisations de X (loi des grands nombres).

A_k : le tirage contient exactement k numéros du joueur

$$X(\omega) = \begin{cases} 4 & \text{si } \omega \in A_2 \\ 21 & \text{si } \omega \in A_3 \\ 490 & \text{si } \omega \in A_4 \\ 95200 & \text{si } \omega \in A_5 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$\mathbb{E}[X] \approx 0.99$$

Espérance d'une variable aléatoire

Intuitivement, l'espérance de la variable aléatoire X est la valeur moyenne que l'on peut obtenir sur un grand nombre de réalisations de X (loi des grands nombres).

A_k : le tirage contient exactement k numéros du joueur

$$X(\omega) = \begin{cases} 4 & \text{si } \omega \in A_2 \\ 21 & \text{si } \omega \in A_3 \\ 490 & \text{si } \omega \in A_4 \\ 95200 & \text{si } \omega \in A_5 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$\mathbb{E}[X] \approx 0.99 \quad (\text{moins le prix du ticket})$$

Définition générale

L'**espérance** de X , définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ est :

$$\mathbb{E}[X] = \int_{\Omega} X(\omega) d\mathbb{P}(\omega)$$

Définition générale

L'espérance de X , définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ est :

$$\mathbb{E}[X] = \int_{\Omega} X(\omega) d\mathbb{P}(\omega)$$

- Cas discret de loi P_X

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{k \in \mathbb{N}} k P_X(k)$$

Définition générale

L'espérance de X , définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ est :

$$\mathbb{E}[X] = \int_{\Omega} X(\omega) d\mathbb{P}(\omega)$$

- Cas discret de loi P_X

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{k \in \mathbb{N}} k P_X(k)$$

- Cas continu de densité π_X

$$\mathbb{E}[X] = \int_{\mathbb{R}} x \pi_X(x) dx$$

Définition générale

L'espérance de X , définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ est :

$$\mathbb{E}[X] = \int_{\Omega} X(\omega) d\mathbb{P}(\omega)$$

- Cas discret de loi P_X

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{k \in \mathbb{N}} k P_X(k)$$

- Cas continu de densité π_X

$$\mathbb{E}[X] = \int_{\mathbb{R}} x \pi_X(x) dx$$

Sous réserve que $k P_X(k)$ (resp. $x \pi_X(x)$) soit sommable (resp. intégrable).

Exercice : espérance

La v.a. X suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\forall k \in \mathbb{N} : P_X(k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

Exercice : espérance

La v.a. X suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\forall k \in \mathbb{N} : P_X(k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

La v.a. X suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\pi_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}$$

Exercice : espérance

La v.a. X suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\forall k \in \mathbb{N} : P_X(k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

La v.a. X suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\pi_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}$$

Pour chacune des deux lois ci-dessus, calculer $\mathbb{E}[X]$.

Propriétés

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles quelconques et $a \in \mathbb{R}$ une constante (déterministe) :

- $\mathbb{E}[a] = a$
- $\mathbb{E}[aX + Y] = a\mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y]$

Propriétés

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles quelconques et $a \in \mathbb{R}$ une constante (déterministe) :

- $\mathbb{E}[a] = a$
- $\mathbb{E}[aX + Y] = a\mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y]$

Preuve : immédiat par linéarité des symboles \sum et \int .

Propriétés

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles quelconques et $a \in \mathbb{R}$ une constante (déterministe) :

- $\mathbb{E}[a] = a$
- $\mathbb{E}[aX + Y] = a\mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y]$

Preuve : immédiat par linéarité des symboles \sum et \int .

Remarque : l'espérance est un **opérateur linéaire**, donc en général, pour une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ quelconque, $\mathbb{E}[f(X)]$ n'est pas égale à $f(\mathbb{E}[X])$ (sauf en particulier quand f est linéaire).

En particulier, $\mathbb{E}[X^2] \neq \mathbb{E}[X]^2$ et $\mathbb{E}[XY] \neq \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$.

Espérance - cas concret : problème des chars allemands



Trouver θ tel que $X_i \sim \mathcal{U}([0, \theta])$

Espérance - cas concret : problème des chars allemands



Trouver θ tel que $X_i \sim \mathcal{U}([0, \theta]) \longrightarrow \mathbb{E}[\theta | X]$

Espérance - cas concret : problème des chars allemands



Trouver θ tel que $X_i \sim \mathcal{U}([0, \theta]) \longrightarrow \mathbb{E}[\theta | X]$

Bayes : $\pi(\theta | \mathbf{x})$

Espérance - cas concret : problème des chars allemands



Trouver θ tel que $X_i \sim \mathcal{U}([0, \theta]) \longrightarrow \mathbb{E}[\theta | X]$

$$\text{Bayes : } \pi(\theta | \mathbf{x}) = \frac{\pi(\mathbf{x} | \theta) \pi(\theta)}{\pi(\mathbf{x})}$$

Espérance - cas concret : problème des chars allemands



Trouver θ tel que $X_i \sim \mathcal{U}([0, \theta]) \longrightarrow \mathbb{E}[\theta | X]$

$$\text{Bayes : } \pi(\theta | \mathbf{x}) = \frac{\pi(\mathbf{x}|\theta)\pi(\theta)}{\pi(\mathbf{x})} = \frac{\pi(\mathbf{x}|\theta)\pi(\theta)}{\int_{\Theta} \pi(\mathbf{x}|\theta)\pi(\theta)d\theta}$$

Espérance - cas concret : problème des chars allemands



Trouver θ tel que $X_i \sim \mathcal{U}([0, \theta]) \longrightarrow \mathbb{E}[\theta | X]$

$$\text{Bayes : } \pi(\theta | \mathbf{x}) = \frac{\pi(\mathbf{x}|\theta)\pi(\theta)}{\pi(\mathbf{x})} = \frac{\pi(\mathbf{x}|\theta)\pi(\theta)}{\int_{\Theta} \pi(\mathbf{x}|\theta)\pi(\theta)d\theta} = \frac{1}{Z}\pi(\mathbf{x}|\theta)\pi(\theta)$$

Espérance - cas concret : problème des chars allemands



Trouver θ tel que $X_i \sim \mathcal{U}([0, \theta]) \longrightarrow \mathbb{E}[\theta | X]$

$$\text{Bayes : } \pi(\theta|\mathbf{x}) = \frac{\pi(\mathbf{x}|\theta)\pi(\theta)}{\pi(\mathbf{x})} = \frac{\pi(\mathbf{x}|\theta)\pi(\theta)}{\int_{\Theta} \pi(\mathbf{x}|\theta)\pi(\theta)d\theta} = \frac{1}{Z}\pi(\mathbf{x}|\theta)\pi(\theta)$$

$$\propto \pi(\mathbf{x}|\theta)\pi(\theta)$$

Espérance - cas concret : problème des chars allemands



Trouver θ tel que $X_i \sim \mathcal{U}([0, \theta]) \longrightarrow \mathbb{E}[\theta | X]$

$$\text{Bayes : } \pi(\theta | \mathbf{x}) = \frac{\pi(\mathbf{x}|\theta)\pi(\theta)}{\pi(\mathbf{x})} = \frac{\pi(\mathbf{x}|\theta)\pi(\theta)}{\int_{\Theta} \pi(\mathbf{x}|\theta)\pi(\theta)d\theta} = \frac{1}{Z}\pi(\mathbf{x}|\theta)\pi(\theta)$$

$$\propto \pi(\mathbf{x}|\theta)\pi(\theta) = \pi(\mathbf{x}|\theta)$$

Espérance - cas concret : problème des chars allemands



Trouver θ tel que $X_i \sim \mathcal{U}([0, \theta]) \longrightarrow \mathbb{E}[\theta | X]$

$$\text{Bayes : } \pi(\theta | \mathbf{x}) = \frac{\pi(\mathbf{x}|\theta)\pi(\theta)}{\pi(\mathbf{x})} = \frac{\pi(\mathbf{x}|\theta)\pi(\theta)}{\int_{\Theta} \pi(\mathbf{x}|\theta)\pi(\theta)d\theta} = \frac{1}{Z}\pi(\mathbf{x}|\theta)\pi(\theta)$$

$$\propto \pi(\mathbf{x}|\theta)\pi(\theta) = \pi(\mathbf{x}|\theta) = \prod_{i=1}^n \pi(x_i|\theta)$$

Espérance - cas concret : problème des chars allemands



Trouver θ tel que $X_i \sim \mathcal{U}([0, \theta]) \longrightarrow \mathbb{E}[\theta | X]$

$$\text{Bayes : } \pi(\theta | \mathbf{x}) = \frac{\pi(\mathbf{x}|\theta)\pi(\theta)}{\pi(\mathbf{x})} = \frac{\pi(\mathbf{x}|\theta)\pi(\theta)}{\int_{\Theta} \pi(\mathbf{x}|\theta)\pi(\theta)d\theta} = \frac{1}{Z}\pi(\mathbf{x}|\theta)\pi(\theta)$$

$$\propto \pi(\mathbf{x}|\theta)\pi(\theta) = \pi(\mathbf{x}|\theta) = \prod_{i=1}^n \pi(x_i|\theta) \qquad \qquad \pi(x|\theta) = \frac{\mathbf{1}_{x \leq \theta}}{\theta}$$

Espérance - cas concret : problème des chars allemands



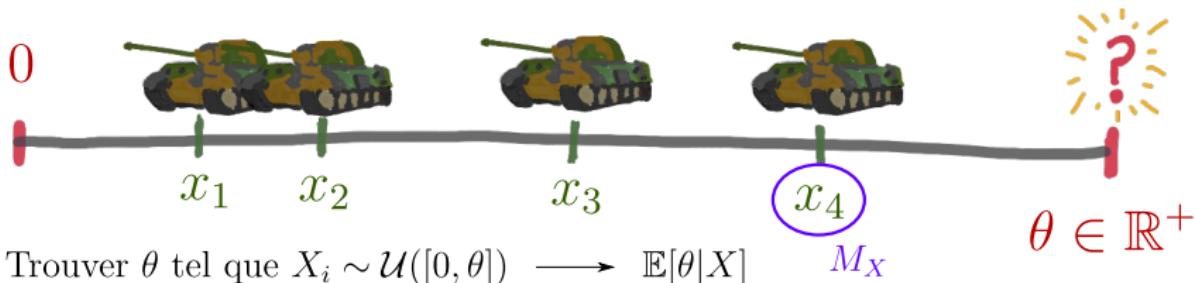
Trouver θ tel que $X_i \sim \mathcal{U}([0, \theta]) \longrightarrow \mathbb{E}[\theta | X]$

$$\text{Bayes : } \pi(\theta | \mathbf{x}) = \frac{\pi(\mathbf{x}|\theta)\pi(\theta)}{\pi(\mathbf{x})} = \frac{\pi(\mathbf{x}|\theta)\pi(\theta)}{\int_{\Theta} \pi(\mathbf{x}|\theta)\pi(\theta)d\theta} = \frac{1}{Z}\pi(\mathbf{x}|\theta)\pi(\theta)$$

$$\propto \pi(\mathbf{x}|\theta)\pi(\theta) = \pi(\mathbf{x}|\theta) = \prod_{i=1}^n \pi(x_i|\theta) \qquad \qquad \pi(x|\theta) = \frac{\mathbf{1}_{x \leq \theta}}{\theta}$$

$$M_X = \max(x_i)$$

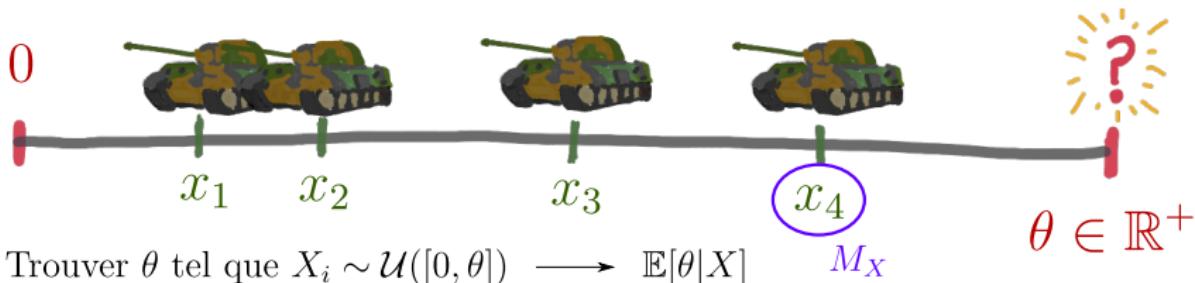
Espérance - cas concret : problème des chars allemands



$$\text{Bayes : } \pi(\theta|\mathbf{x}) = \frac{\pi(\mathbf{x}|\theta)\pi(\theta)}{\pi(\mathbf{x})} = \frac{\pi(\mathbf{x}|\theta)\pi(\theta)}{\int_{\Theta} \pi(\mathbf{x}|\theta)\pi(\theta)d\theta} = \frac{1}{Z}\pi(\mathbf{x}|\theta)\pi(\theta)$$

$$\propto \pi(\mathbf{x}|\theta)\pi(\theta) = \pi(\mathbf{x}|\theta) = \prod_{i=1}^n \pi(x_i|\theta) \qquad \qquad \pi(x|\theta) = \frac{\mathbf{1}_{x \leq \theta}}{\theta}$$
$$M_X = \max(x_i)$$

Espérance - cas concret : problème des chars allemands



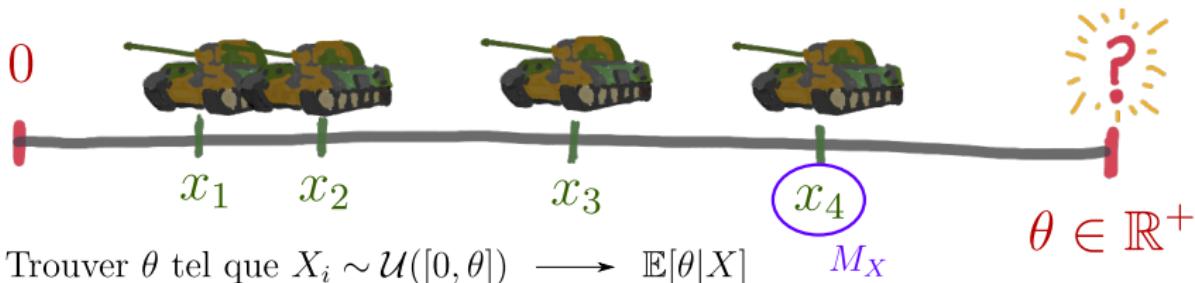
$$\text{Bayes : } \pi(\theta | \mathbf{x}) = \frac{\pi(\mathbf{x}|\theta)\pi(\theta)}{\pi(\mathbf{x})} = \frac{\pi(\mathbf{x}|\theta)\pi(\theta)}{\int_{\Theta} \pi(\mathbf{x}|\theta)\pi(\theta)d\theta} = \frac{1}{Z}\pi(\mathbf{x}|\theta)\pi(\theta)$$

$$\propto \pi(\mathbf{x}|\theta)\pi(\theta) = \pi(\mathbf{x}|\theta) = \prod_{i=1}^n \pi(x_i|\theta) \qquad \qquad \pi(x|\theta) = \frac{\mathbf{1}_{x \leq \theta}}{\theta}$$

$$M_X = \max(x_i)$$

$$\pi(\theta | \mathbf{x}) \propto \frac{\mathbf{1}_{M_X \leq \theta}}{\theta^n}$$

Espérance - cas concret : problème des chars allemands



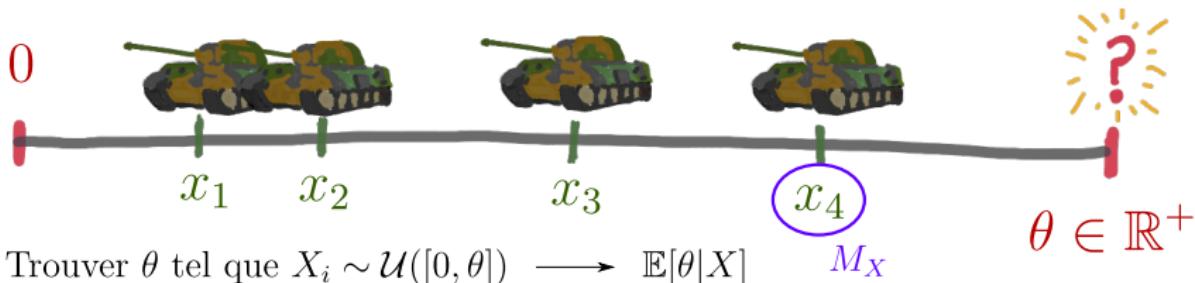
$$\text{Bayes : } \pi(\theta|\mathbf{x}) = \frac{\pi(\mathbf{x}|\theta)\pi(\theta)}{\pi(\mathbf{x})} = \frac{\pi(\mathbf{x}|\theta)\pi(\theta)}{\int_{\Theta} \pi(\mathbf{x}|\theta)\pi(\theta)d\theta} = \frac{1}{Z}\pi(\mathbf{x}|\theta)\pi(\theta)$$

$$\propto \pi(\mathbf{x}|\theta)\pi(\theta) = \pi(\mathbf{x}|\theta) = \prod_{i=1}^n \pi(x_i|\theta) \qquad \qquad \pi(x|\theta) = \frac{\mathbf{1}_{x \leq \theta}}{\theta}$$

$$M_X = \max(x_i)$$

$$\pi(\theta|\mathbf{x}) \propto \frac{\mathbf{1}_{M_X \leq \theta}}{\theta^n} \qquad Z = \int_{M_X}^{+\infty} \frac{d\theta}{\theta^n} = \frac{1}{(n+1) M_X^{n+1}}$$

Espérance - cas concret : problème des chars allemands



$$\text{Bayes : } \pi(\theta|\mathbf{x}) = \frac{\pi(\mathbf{x}|\theta)\pi(\theta)}{\pi(\mathbf{x})} = \frac{\pi(\mathbf{x}|\theta)\pi(\theta)}{\int_{\Theta} \pi(\mathbf{x}|\theta)\pi(\theta)d\theta} = \frac{1}{Z}\pi(\mathbf{x}|\theta)\pi(\theta)$$

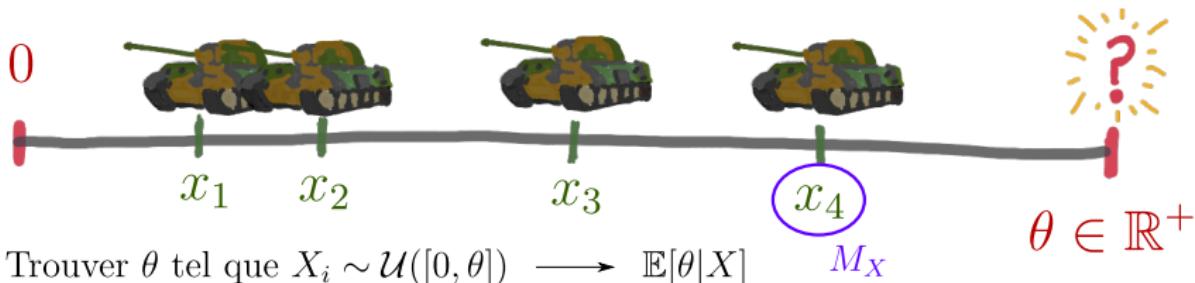
$$\propto \pi(\mathbf{x}|\theta)\pi(\theta) = \pi(\mathbf{x}|\theta) = \prod_{i=1}^n \pi(x_i|\theta) \qquad \qquad \pi(x|\theta) = \frac{\mathbf{1}_{x \leq \theta}}{\theta}$$

$$M_X = \max(x_i)$$

$$\pi(\theta|\mathbf{x}) \propto \frac{\mathbf{1}_{M_X \leq \theta}}{\theta^n} \qquad Z = \int_{M_X}^{+\infty} \frac{d\theta}{\theta^n} = \frac{1}{(n+1) M_X^{n+1}}$$

$$\mathbb{E}[\theta|X] =$$

Espérance - cas concret : problème des chars allemands



$$\text{Bayes : } \pi(\theta|\mathbf{x}) = \frac{\pi(\mathbf{x}|\theta)\pi(\theta)}{\pi(\mathbf{x})} = \frac{\pi(\mathbf{x}|\theta)\pi(\theta)}{\int_{\Theta} \pi(\mathbf{x}|\theta)\pi(\theta)d\theta} = \frac{1}{Z}\pi(\mathbf{x}|\theta)\pi(\theta)$$

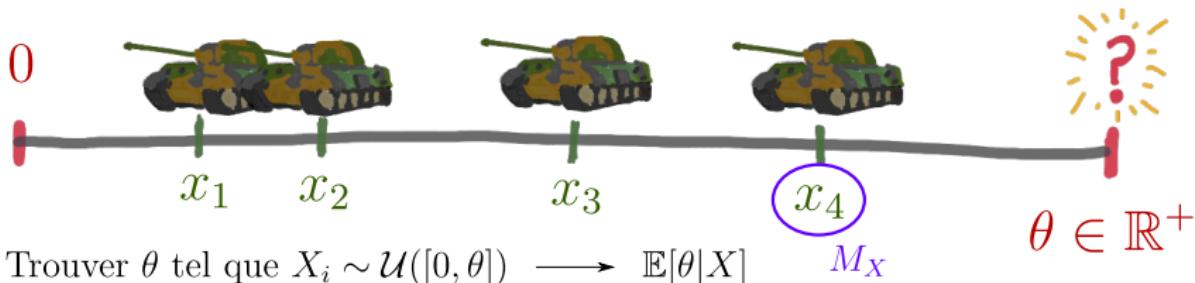
$$\propto \pi(\mathbf{x}|\theta)\pi(\theta) = \pi(\mathbf{x}|\theta) = \prod_{i=1}^n \pi(x_i|\theta) \qquad \qquad \pi(x|\theta) = \frac{\mathbf{1}_{x \leq \theta}}{\theta}$$

$$M_X = \max(x_i)$$

$$\pi(\theta|\mathbf{x}) \propto \frac{\mathbf{1}_{M_X \leq \theta}}{\theta^n} \qquad Z = \int_{M_X}^{+\infty} \frac{d\theta}{\theta^n} = \frac{1}{(n+1) M_X^{n+1}}$$

$$\mathbb{E}[\theta|X] = \frac{1}{Z} \int_{\Theta} \theta \pi(\theta|\mathbf{x}) d\theta$$

Espérance - cas concret : problème des chars allemands



$$\text{Bayes : } \pi(\theta|\mathbf{x}) = \frac{\pi(\mathbf{x}|\theta)\pi(\theta)}{\pi(\mathbf{x})} = \frac{\pi(\mathbf{x}|\theta)\pi(\theta)}{\int_{\Theta} \pi(\mathbf{x}|\theta)\pi(\theta)d\theta} = \frac{1}{Z}\pi(\mathbf{x}|\theta)\pi(\theta)$$

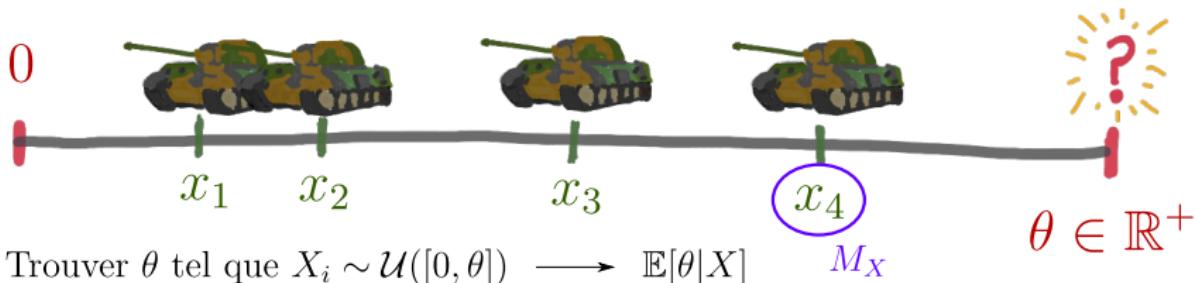
$$\propto \pi(\mathbf{x}|\theta)\pi(\theta) = \pi(\mathbf{x}|\theta) = \prod_{i=1}^n \pi(x_i|\theta) \qquad \qquad \pi(x|\theta) = \frac{\mathbf{1}_{x \leq \theta}}{\theta}$$

$$M_X = \max(x_i)$$

$$\pi(\theta|\mathbf{x}) \propto \frac{\mathbf{1}_{M_X \leq \theta}}{\theta^n} \qquad Z = \int_{M_X}^{+\infty} \frac{d\theta}{\theta^n} = \frac{1}{(n+1) M_X^{n+1}}$$

$$\mathbb{E}[\theta|X] = \frac{1}{Z} \int_{\Theta} \theta \pi(\theta|\mathbf{x}) d\theta = \frac{1}{Z} \int_{M_X}^{+\infty} \frac{d\theta}{\theta^{n-1}}$$

Espérance - cas concret : problème des chars allemands



$$\text{Bayes : } \pi(\theta|\mathbf{x}) = \frac{\pi(\mathbf{x}|\theta)\pi(\theta)}{\pi(\mathbf{x})} = \frac{\pi(\mathbf{x}|\theta)\pi(\theta)}{\int_{\Theta} \pi(\mathbf{x}|\theta)\pi(\theta)d\theta} = \frac{1}{Z}\pi(\mathbf{x}|\theta)\pi(\theta)$$

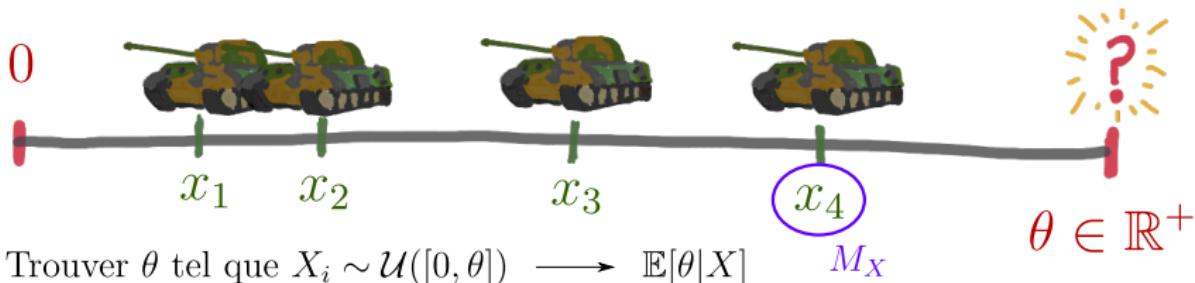
$$\propto \pi(\mathbf{x}|\theta)\pi(\theta) = \pi(\mathbf{x}|\theta) = \prod_{i=1}^n \pi(x_i|\theta) \qquad \qquad \pi(x|\theta) = \frac{\mathbf{1}_{x \leq \theta}}{\theta}$$

$$M_X = \max(x_i)$$

$$\pi(\theta|\mathbf{x}) \propto \frac{\mathbf{1}_{M_X \leq \theta}}{\theta^n} \qquad Z = \int_{M_X}^{+\infty} \frac{d\theta}{\theta^n} = \frac{1}{(n+1) M_X^{n+1}}$$

$$\mathbb{E}[\theta|X] = \frac{1}{Z} \int_{\Theta} \theta \pi(\theta|\mathbf{x}) d\theta = \frac{1}{Z} \int_{M_X}^{+\infty} \frac{d\theta}{\theta^{n-1}} = \frac{1}{Z} \frac{1}{n M_X^n}$$

Espérance - cas concret : problème des chars allemands



$$\text{Bayes : } \pi(\theta|\mathbf{x}) = \frac{\pi(\mathbf{x}|\theta)\pi(\theta)}{\pi(\mathbf{x})} = \frac{\pi(\mathbf{x}|\theta)\pi(\theta)}{\int_{\Theta} \pi(\mathbf{x}|\theta)\pi(\theta)d\theta} = \frac{1}{Z}\pi(\mathbf{x}|\theta)\pi(\theta)$$

$$\propto \pi(\mathbf{x}|\theta)\pi(\theta) = \pi(\mathbf{x}|\theta) = \prod_{i=1}^n \pi(x_i|\theta) \qquad \qquad \pi(x|\theta) = \frac{\mathbf{1}_{x \leq \theta}}{\theta}$$

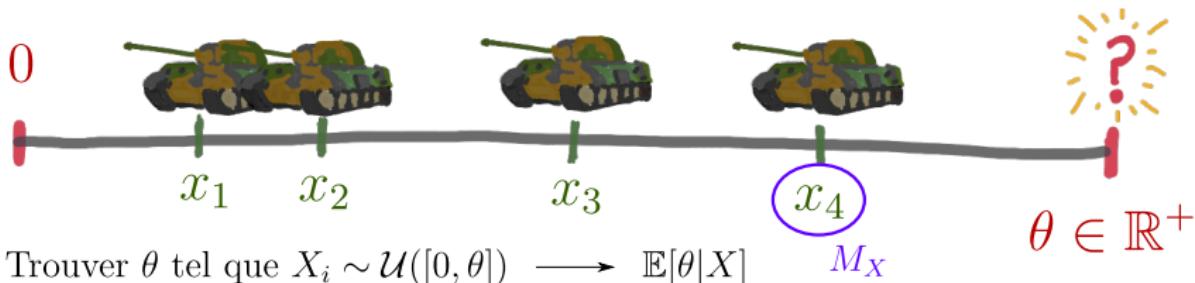
$$M_X = \max(x_i)$$

$$\pi(\theta|\mathbf{x}) \propto \frac{\mathbf{1}_{M_X \leq \theta}}{\theta^n} \qquad Z = \int_{M_X}^{+\infty} \frac{d\theta}{\theta^n} = \frac{1}{(n+1) M_X^{n+1}}$$

$$\hat{\theta} = \frac{(n+1) M_X^{n+1}}{n M_X^n}$$

$$\mathbb{E}[\theta|X] = \frac{1}{Z} \int_{\Theta} \theta \pi(\theta|\mathbf{x}) d\theta = \frac{1}{Z} \int_{M_X}^{+\infty} \frac{d\theta}{\theta^{n-1}} = \frac{1}{Z} \frac{1}{n M_X^n}$$

Espérance - cas concret : problème des chars allemands



Trouver θ tel que $X_i \sim \mathcal{U}([0, \theta]) \longrightarrow \mathbb{E}[\theta | X]$

$$\text{Bayes : } \pi(\theta | \mathbf{x}) = \frac{\pi(\mathbf{x} | \theta) \pi(\theta)}{\pi(\mathbf{x})} = \frac{\pi(\mathbf{x} | \theta) \pi(\theta)}{\int_{\Theta} \pi(\mathbf{x} | \theta) \pi(\theta) d\theta} = \frac{1}{Z} \pi(\mathbf{x} | \theta) \pi(\theta)$$

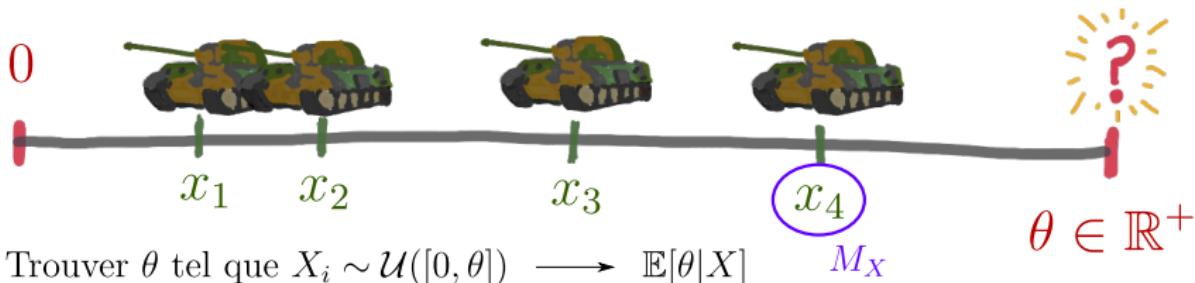
$$\propto \pi(\mathbf{x} | \theta) \pi(\theta) = \pi(\mathbf{x} | \theta) = \prod_{i=1}^n \pi(x_i | \theta) \quad \pi(x | \theta) = \frac{\mathbf{1}_{x \leq \theta}}{\theta}$$

$$M_X = \max(x_i)$$

$$\pi(\theta | \mathbf{x}) \propto \frac{\mathbf{1}_{M_X \leq \theta}}{\theta^n} \quad Z = \int_{M_X}^{+\infty} \frac{d\theta}{\theta^n} = \frac{1}{(n+1) M_X^{n+1}}$$

$$\mathbb{E}[\theta | X] = \frac{1}{Z} \int_{\Theta} \theta \pi(\theta | \mathbf{x}) d\theta = \frac{1}{Z} \int_{M_X}^{+\infty} \frac{d\theta}{\theta^{n-1}} = \frac{1}{Z} \frac{1}{n M_X^n} \quad \hat{\theta} = \frac{n+1}{n} M_X$$

Espérance - cas concret : problème des chars allemands



$$\text{Bayes : } \pi(\theta | \mathbf{x}) = \frac{\pi(\mathbf{x}|\theta)\pi(\theta)}{\pi(\mathbf{x})} = \frac{\pi(\mathbf{x}|\theta)\pi(\theta)}{\int_{\Theta} \pi(\mathbf{x}|\theta)\pi(\theta)d\theta} = \frac{1}{Z}\pi(\mathbf{x}|\theta)\pi(\theta)$$

$$\propto \pi(\mathbf{x}|\theta)\pi(\theta) = \pi(\mathbf{x}|\theta) = \prod_{i=1}^n \pi(x_i|\theta) \qquad \qquad \pi(x|\theta) = \frac{\mathbf{1}_{x \leq \theta}}{\theta}$$

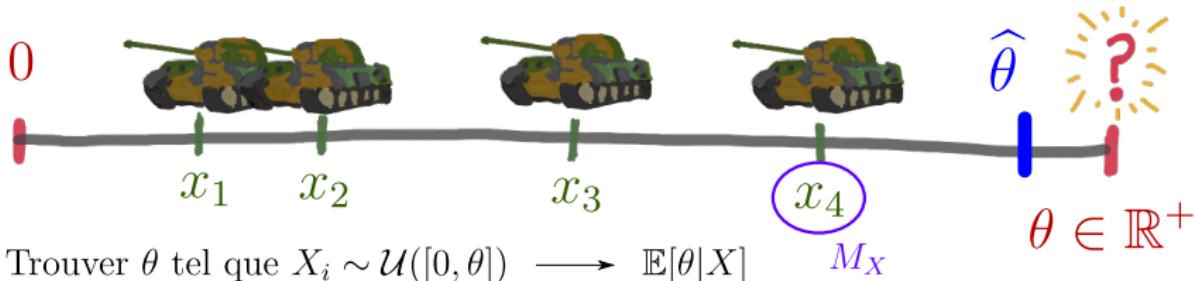
$$M_X = \max(x_i)$$

$$\pi(\theta | \mathbf{x}) \propto \frac{\mathbf{1}_{M_X \leq \theta}}{\theta^n} \qquad Z = \int_{M_X}^{+\infty} \frac{d\theta}{\theta^n} = \frac{1}{(n+1) M_X^{n+1}}$$

$$\mathbb{E}[\theta | X] = \frac{1}{Z} \int_{\Theta} \theta \pi(\theta | \mathbf{x}) d\theta = \frac{1}{Z} \int_{M_X}^{+\infty} \frac{d\theta}{\theta^{n-1}} = \frac{1}{Z} \frac{1}{n M_X^n}$$

$$\widehat{\theta} = \frac{n+1}{n} M_X$$

Espérance - cas concret : problème des chars allemands



$$\text{Bayes : } \pi(\theta | \mathbf{x}) = \frac{\pi(\mathbf{x}|\theta)\pi(\theta)}{\pi(\mathbf{x})} = \frac{\pi(\mathbf{x}|\theta)\pi(\theta)}{\int_{\Theta} \pi(\mathbf{x}|\theta)\pi(\theta)d\theta} = \frac{1}{Z}\pi(\mathbf{x}|\theta)\pi(\theta)$$

$$\propto \pi(\mathbf{x}|\theta)\pi(\theta) = \pi(\mathbf{x}|\theta) = \prod_{i=1}^n \pi(x_i|\theta) \qquad \qquad \pi(x|\theta) = \frac{\mathbf{1}_{x \leq \theta}}{\theta}$$

$$M_X = \max(x_i)$$

$$\pi(\theta | \mathbf{x}) \propto \frac{\mathbf{1}_{M_X \leq \theta}}{\theta^n} \qquad Z = \int_{M_X}^{+\infty} \frac{d\theta}{\theta^n} = \frac{1}{(n+1) M_X^{n+1}}$$

$$\mathbb{E}[\theta | X] = \frac{1}{Z} \int_{\Theta} \theta \pi(\theta | \mathbf{x}) d\theta = \frac{1}{Z} \int_{M_X}^{+\infty} \frac{d\theta}{\theta^{n-1}} = \frac{1}{Z} \frac{1}{n M_X^n}$$

$$\boxed{\hat{\theta} = \frac{n+1}{n} M_X}$$

Définition générale

Soit X une variable aléatoire (discrète ou continue) d'espérance $\mathbb{E}[X] < \infty$. On définit la **variance** de X comme la valeur moyenne (lorsqu'elle existe) du carré des écarts de X à son espérance :

$$\mathbb{V}[X] = \mathbb{E}\left[\left(X - \mathbb{E}[X]\right)^2\right]$$

Définition générale

Soit X une variable aléatoire (discrète ou continue) d'espérance $\mathbb{E}[X] < \infty$. On définit la **variance** de X comme la valeur moyenne (lorsqu'elle existe) du carré des écarts de X à son espérance :

$$\mathbb{V}[X] = \mathbb{E}\left[\left(X - \mathbb{E}[X]\right)^2\right]$$

- Cas discret de loi P_X

$$\mathbb{V}[X] = \sum_{k \in \mathbb{N}} (k - \mathbb{E}[X])^2 P_X(k)$$

Définition générale

Soit X une variable aléatoire (discrète ou continue) d'espérance $\mathbb{E}[X] < \infty$. On définit la **variance** de X comme la valeur moyenne (lorsqu'elle existe) du carré des écarts de X à son espérance :

$$\mathbb{V}[X] = \mathbb{E}\left[\left(X - \mathbb{E}[X]\right)^2\right]$$

- Cas discret de loi P_X

$$\mathbb{V}[X] = \sum_{k \in \mathbb{N}} \left(k - \mathbb{E}[X]\right)^2 P_X(k)$$

- Cas continu de densité π_X

$$\mathbb{V}[X] = \int_{\mathbb{R}} \left(x - \mathbb{E}[X]\right)^2 \pi_X(x) dx$$

Définition

On appelle **écart-type** d'une variable aléatoire X la quantité :

$$\sigma_X = \sqrt{\mathbb{V}[X]}$$

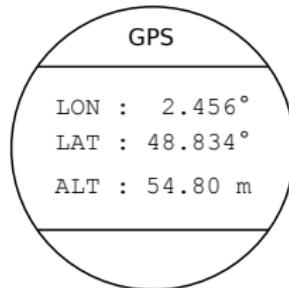
Ecart-type d'une variable aléatoire

Définition

On appelle **écart-type** d'une variable aléatoire X la quantité :

$$\sigma_X = \sqrt{\mathbb{V}[X]}$$

Exemple : un GPS de randonnée affiche les coordonnées géographiques de l'utilisateur avec 3 décimales.



Indiquer l'écart-type (en m) sur les coordonnées ($R_T = 6378$ km).

Ecart-type d'une variable aléatoire

Cas d'école : le bruit de normalisation $X \sim \mathcal{U}([a, b])$

Le bruit de normalisation intervient quand une variable prend de manière uniforme ses valeurs dans un intervalle donné (a priori le moins informatif pour une distribution à support compact). Il permet de modéliser, les erreurs d'arrondi, de rasterisation, de lecture de graduations...

Ecart-type d'une variable aléatoire

Cas d'école : le bruit de normalisation $X \sim \mathcal{U}([a, b])$

Le bruit de normalisation intervient quand une variable prend de manière uniforme ses valeurs dans un intervalle donné (a priori le moins informatif pour une distribution à support compact). Il permet de modéliser, les erreurs d'arrondi, de rasterisation, de lecture de graduations...

$$\sigma^2 = \mathbb{E}[(X - \hat{X})^2] = \int_a^b (x - \hat{x})^2 dx = (b - a)^2 \int_0^1 \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 dx$$

Ecart-type d'une variable aléatoire

Cas d'école : le bruit de normalisation $X \sim \mathcal{U}([a, b])$

Le bruit de normalisation intervient quand une variable prend de manière uniforme ses valeurs dans un intervalle donné (a priori le moins informatif pour une distribution à support compact). Il permet de modéliser, les erreurs d'arrondi, de rasterisation, de lecture de graduations...

$$\sigma^2 = \mathbb{E}[(X - \hat{X})^2] = \int_a^b (x - \hat{x})^2 dx = (b - a)^2 \int_0^1 \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 dx$$

$$\boxed{\sigma = \frac{b - a}{\sqrt{12}} \approx 0.29(b - a)}$$

Ecart-type d'une variable aléatoire

Erreur sur l'affichage des coordonnées :

Réponse :

$$\Delta_Y(1^\circ) = R_T \frac{\pi}{180} = 111 \text{ km}$$

$$\Delta_X(1^\circ) = R_T \frac{\pi}{180} \cos(\varphi) = 73 \text{ km}$$

D'où :

$$\sigma_X = \frac{\Delta_X(1^\circ)}{\sqrt{12}} 10^{-3} = 21 \text{ m}$$

$$\sigma_Y = \frac{\Delta_Y(1^\circ)}{\sqrt{12}} 10^{-3} = 32 \text{ m}$$

Forme alternative

Soit X une variable aléatoire. Si $\mathbb{E}[X^2]$ existe alors :

$$\mathbb{V}[X] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$$

Forme alternative

Soit X une variable aléatoire. Si $\mathbb{E}[X^2]$ existe alors :

$$\mathbb{V}[X] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$$

Preuve : $\mathbb{V}[X] = \mathbb{E}\left[\left(X - \mathbb{E}[X]\right)^2\right] = \mathbb{E}\left[X^2 - 2X\mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[X]^2\right] = \mathbb{E}[X^2] - 2\mathbb{E}[X\mathbb{E}[X]] + \mathbb{E}[X]^2 = \mathbb{E}[X^2] - 2\mathbb{E}[X] \times \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[X]^2 = \mathbb{E}[X^2] - 2\mathbb{E}[X]^2 + \mathbb{E}[X]^2 = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$

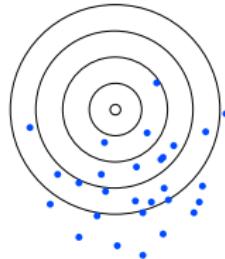
Forme alternative

Soit X une variable aléatoire. Si $\mathbb{E}[X^2]$ existe alors :

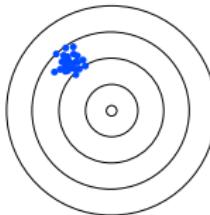
$$\mathbb{V}[X] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$$

Preuve : $\mathbb{V}[X] = \mathbb{E}\left[\left(X - \mathbb{E}[X]\right)^2\right] = \mathbb{E}\left[X^2 - 2X\mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[X]^2\right] = \mathbb{E}[X^2] - 2\mathbb{E}[X]\mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[X]^2 = \mathbb{E}[X^2] - 2\mathbb{E}[X] \times \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[X]^2 = \mathbb{E}[X^2] - 2\mathbb{E}[X]^2 + \mathbb{E}[X]^2 = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$

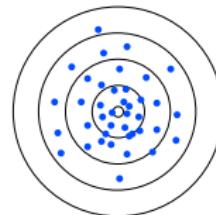
Biais élevé
Variance élevée



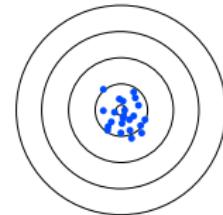
Biais élevé
Variance faible



Biais faible
Variance élevée



Biais modéré
Variance modérée



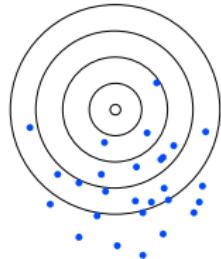
Forme alternative

Soit X une variable aléatoire. Si $\mathbb{E}[X^2]$ existe alors :

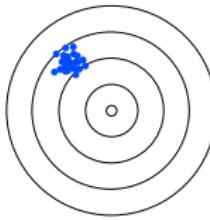
$$\mathbb{V}[X] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$$

Preuve : $\mathbb{V}[X] = \mathbb{E}\left[\left(X - \mathbb{E}[X]\right)^2\right] = \mathbb{E}\left[X^2 - 2X\mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[X]^2\right] = \mathbb{E}[X^2] - 2\mathbb{E}[X]\mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[X]^2 = \mathbb{E}[X^2] - 2\mathbb{E}[X] \times \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[X]^2 = \mathbb{E}[X^2] - 2\mathbb{E}[X]^2 + \mathbb{E}[X]^2 = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$

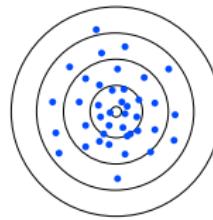
Biais élevé
Variance élevée



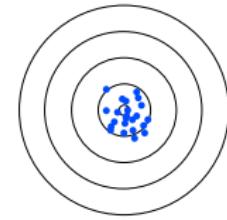
Biais élevé
Variance faible



Biais faible
Variance élevée



Biais modéré
Variance modérée



Sous-apprentissage

Sur-apprentissage

compromis optimal

Exercice : variance

La v.a. X suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda \in \mathbb{R}_{+*}$:

$$\forall k \in \mathbb{N} : P_X(k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

Exercice : variance

La v.a. X suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda \in \mathbb{R}_{+*}$:

$$\forall k \in \mathbb{N} : P_X(k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

La v.a. X suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\pi_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}$$

Exercice : variance

La v.a. X suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda \in \mathbb{R}_{+*}$:

$$\forall k \in \mathbb{N} : P_X(k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

La v.a. X suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\pi_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}$$

Pour chacune des deux lois ci-dessus, calculer $\mathbb{V}[X]$.

Exercice : variance

La v.a. X suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda \in \mathbb{R}_{+*}$:

$$\forall k \in \mathbb{N} : P_X(k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

La v.a. X suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\pi_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}$$

Pour chacune des deux lois ci-dessus, calculer $\mathbb{V}[X]$.

Indication : pour le calcul de la variance de la loi de Poisson, on pourra commencer par évaluer la quantité $\mathbb{E}[X(X - 1)]$.

Propriétés

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes et $a \in \mathbb{R}$:

- $\mathbb{V}[a] = 0$
- $\mathbb{V}[aX + Y] = a^2\mathbb{V}[X] + \mathbb{V}[Y]$

Propriétés

Soient X et Y deux variables aléatoires **indépendantes** et $a \in \mathbb{R}$:

- $\mathbb{V}[a] = 0$
- $\mathbb{V}[aX + Y] = a^2\mathbb{V}[X] + \mathbb{V}[Y]$

Preuve : immédiat par linéarité des symboles \sum et \int .

Propriétés

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes et $a \in \mathbb{R}$:

- $\mathbb{V}[a] = 0$
- $\mathbb{V}[aX + Y] = a^2\mathbb{V}[X] + \mathbb{V}[Y]$

Preuve : immédiat par linéarité des symboles \sum et \int .

Covariance

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires réelles. On définit (lorsqu'elle existe) la covariance par la quantité :

$$\text{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}\left[\left(X - \mathbb{E}[X]\right)\left(Y - \mathbb{E}[Y]\right)\right]$$

Variance - Covariances de variables aléatoires

Propriétés

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes et $a \in \mathbb{R}$:

- $\mathbb{V}[a] = 0$
- $\mathbb{V}[aX + Y] = a^2\mathbb{V}[X] + \mathbb{V}[Y]$

Preuve : immédiat par linéarité des symboles \sum et \int .

Covariance

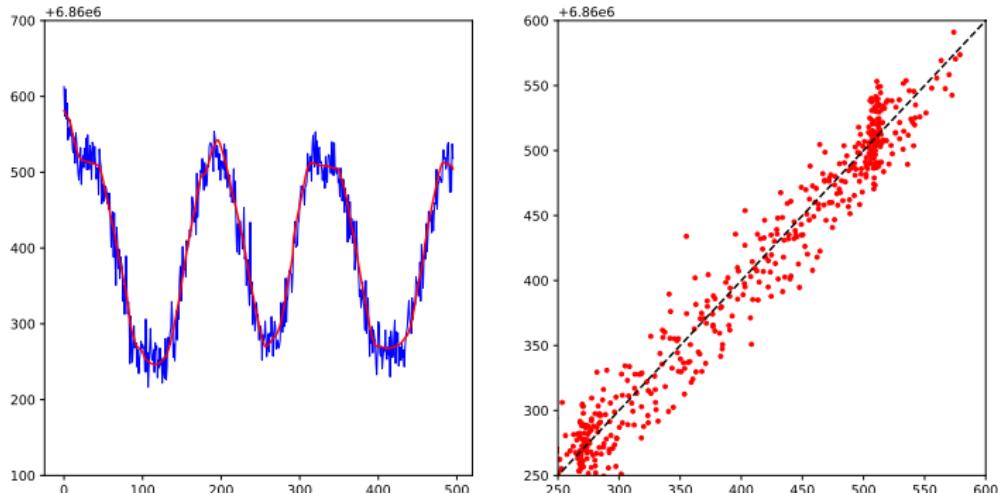
Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires réelles. On définit (lorsqu'elle existe) la covariance par la quantité :

$$\text{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}\left[\left(X - \mathbb{E}[X]\right)\left(Y - \mathbb{E}[Y]\right)\right]$$

Remarque : l'opérateur de covariance peut-être considéré comme un produit scalaire. En particulier, il est symétrique ($\text{Cov}(X, Y) = \text{Cov}(Y, X)$) et bilinéaire ($\text{Cov}(aX+Y, Z) = a\text{Cov}(X, Y) + \text{Cov}(Y, Z)$).

Covariance

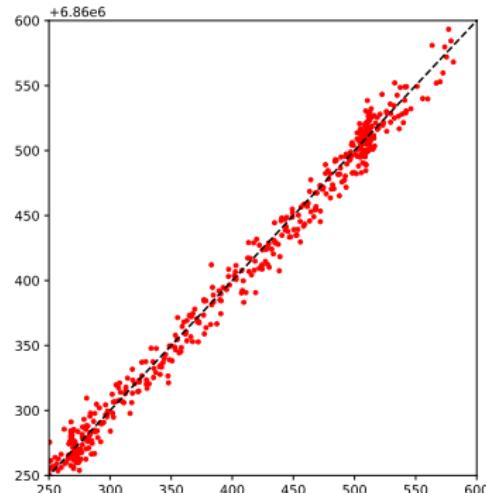
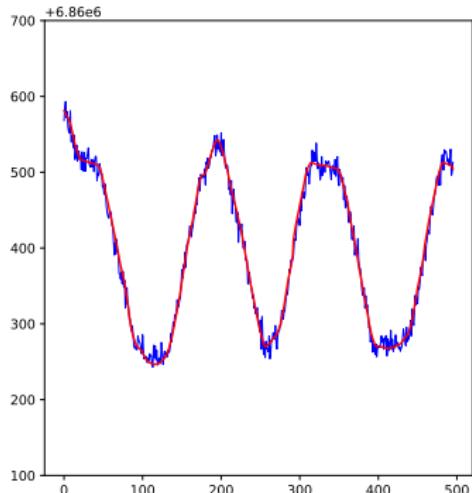
Soient X , Y deux variables aléatoires réelles.



La quantité $\text{Cov}(X, Y)$ est un nombre réel indiquant la ressemblance entre les valeurs prises par les réalisations de X et de Y . Plus elle est élevée, plus les points (x, y) sont alignés.

Covariance

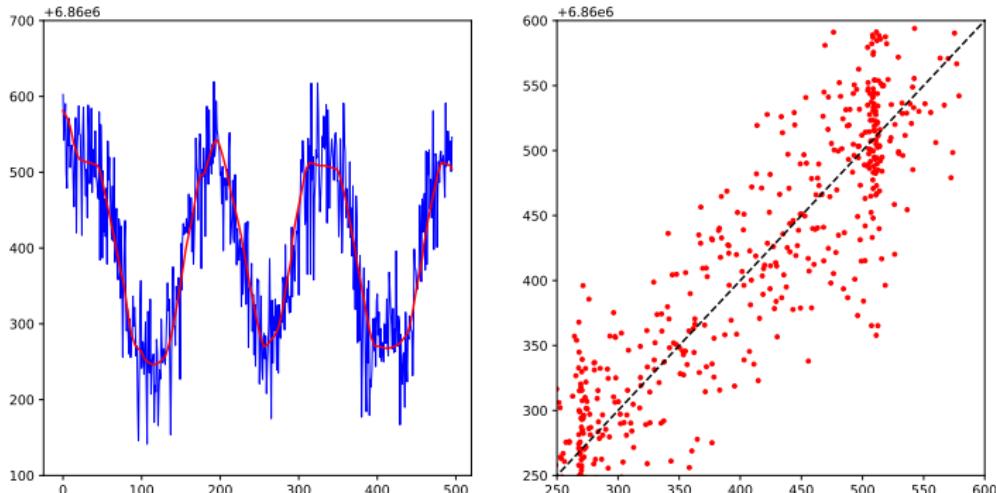
Soient X , Y deux variables aléatoires réelles.



La quantité $\text{Cov}(X, Y)$ est un nombre réel indiquant la ressemblance entre les valeurs prises par les réalisations de X et de Y . Plus elle est élevée, plus les points (x, y) sont alignés.

Covariance

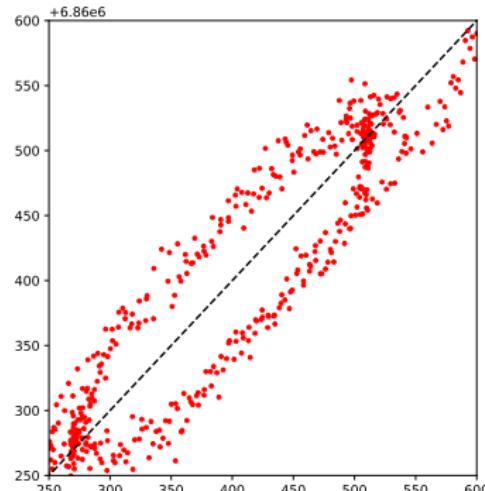
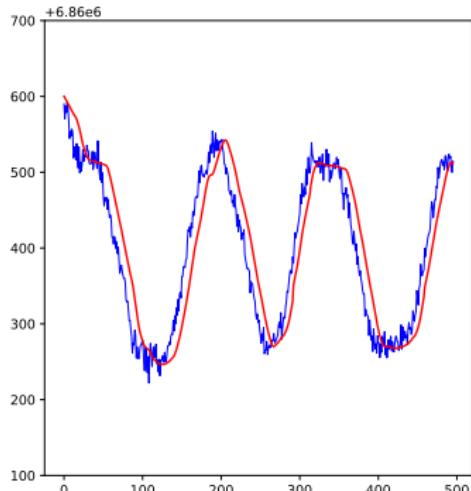
Soient X , Y deux variables aléatoires réelles.



La quantité $\text{Cov}(X, Y)$ est un nombre réel indiquant la ressemblance entre les valeurs prises par les réalisations de X et de Y . Plus elle est élevée, plus les points (x, y) sont alignés.

Covariance

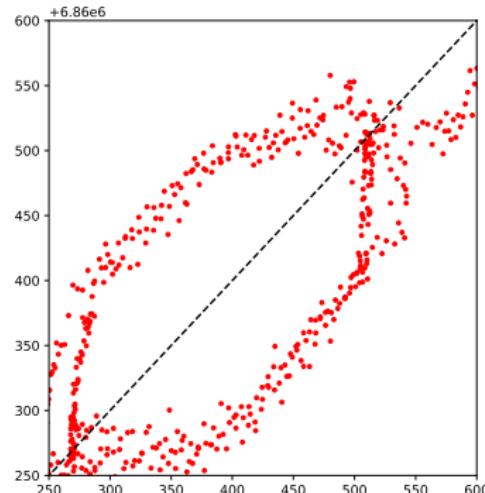
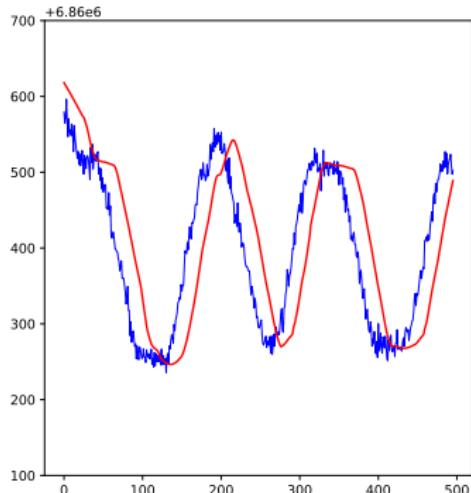
Soient X , Y deux variables aléatoires réelles.



La quantité $\text{Cov}(X, Y)$ est un nombre réel indiquant la ressemblance entre les valeurs prises par les réalisations de X et de Y . Plus elle est élevée, plus les points (x, y) sont alignés.

Covariance

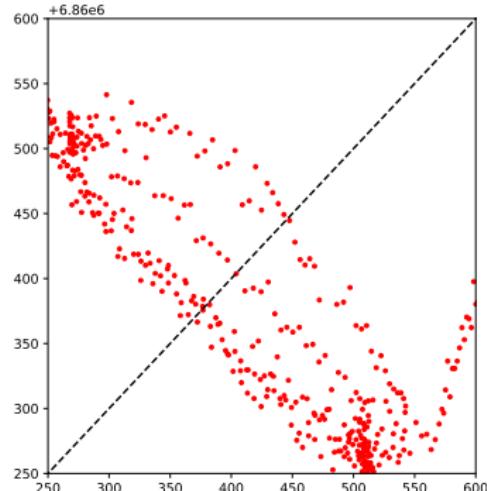
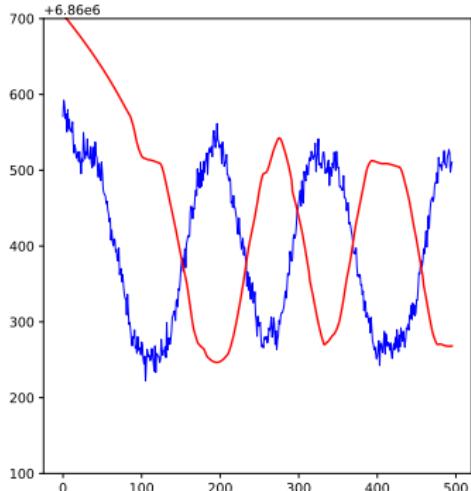
Soient X , Y deux variables aléatoires réelles.



La quantité $\text{Cov}(X, Y)$ est un nombre réel indiquant la ressemblance entre les valeurs prises par les réalisations de X et de Y . Plus elle est élevée, plus les points (x, y) sont alignés.

Covariance

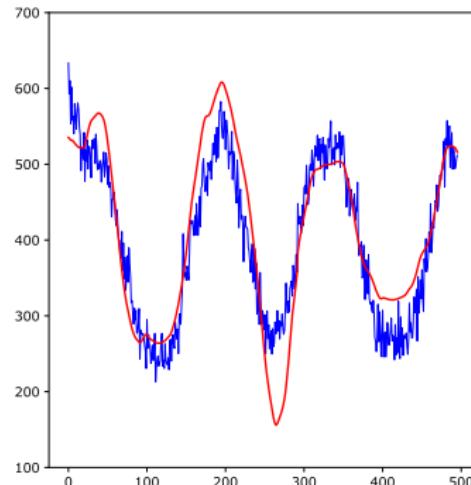
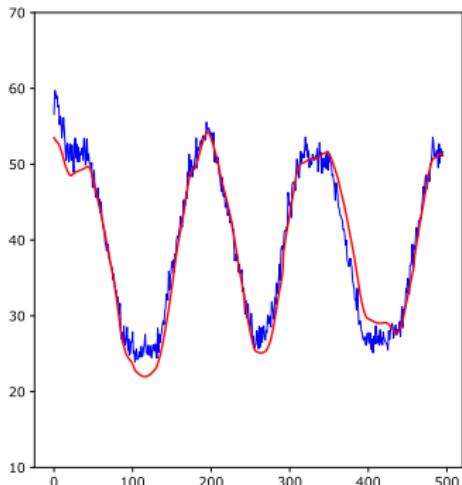
Soient X , Y deux variables aléatoires réelles.



La quantité $\text{Cov}(X, Y)$ est un nombre réel indiquant la ressemblance entre les valeurs prises par les réalisations de X et de Y . Plus elle est élevée, plus les points (x, y) sont alignés.

Covariance

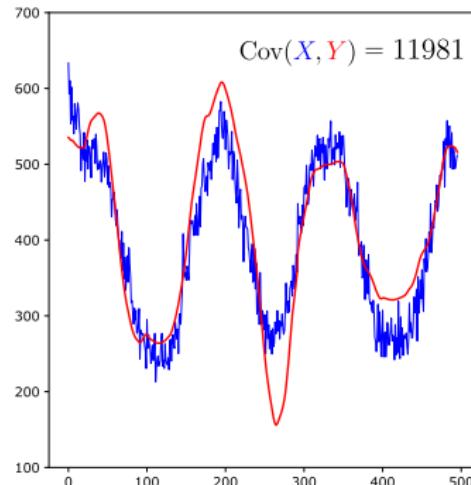
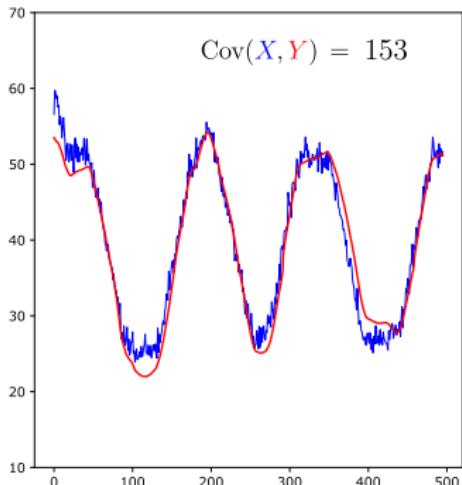
Soient X , Y deux variables aléatoires réelles.



La quantité $\text{Cov}(X, Y)$ est un nombre réel indiquant la ressemblance entre les valeurs prises par les réalisations de X et de Y . Plus elle est élevée, plus les points (x, y) sont alignés.

Covariance

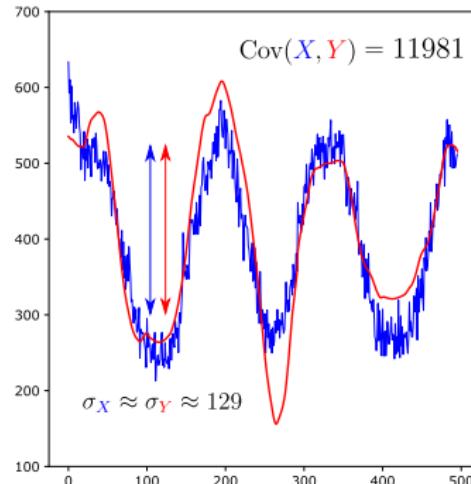
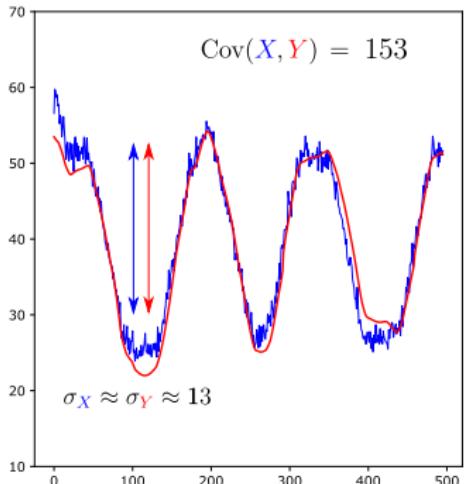
Soient X , Y deux variables aléatoires réelles.



La quantité $\text{Cov}(X, Y)$ est un nombre réel indiquant la ressemblance entre les valeurs prises par les réalisations de X et de Y . Plus elle est élevée, plus les points (x, y) sont alignés.

Covariance

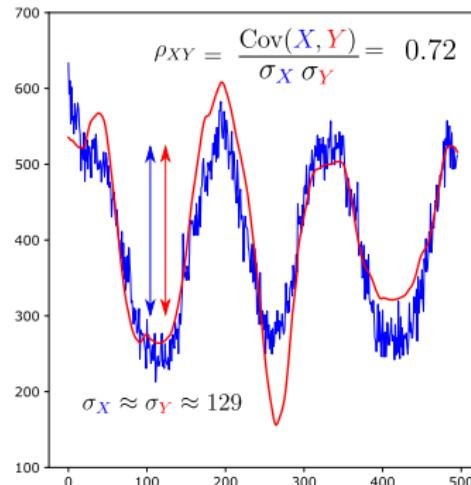
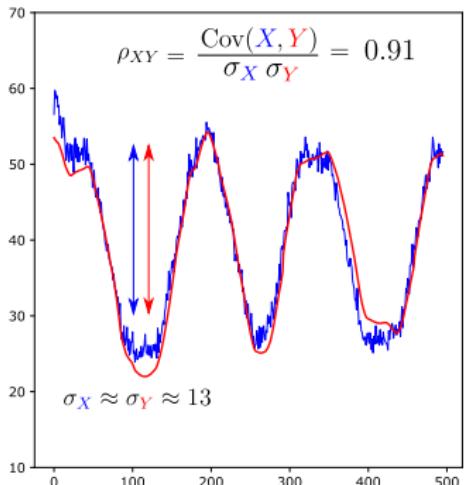
Soient X , Y deux variables aléatoires réelles.



La quantité $\text{Cov}(X, Y)$ est un nombre réel indiquant la ressemblance entre les valeurs prises par les réalisations de X et de Y . Plus elle est élevée, plus les points (x, y) sont alignés.

Covariance

Soient X , Y deux variables aléatoires réelles.



La quantité $\text{Cov}(X, Y)$ est un nombre réel indiquant la ressemblance entre les valeurs prises par les réalisations de X et de Y . Plus elle est élevée, plus les points (x, y) sont alignés.

Corrélation

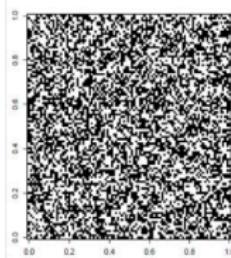
Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires réelles. On définit (lorsqu'elle existe) la **corrélation** par la quantité :

$$\rho_{XY} = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$$

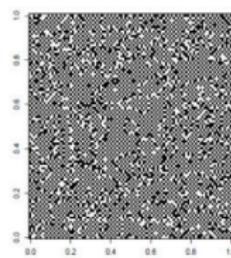
Corrélation

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires réelles. On définit (lorsqu'elle existe) la **corrélation** par la quantité :

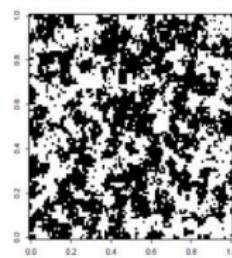
$$\rho_{XY} = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$$



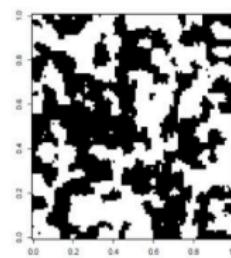
$$\rho = 0$$



$$\rho < 0$$



$$\rho > 0$$

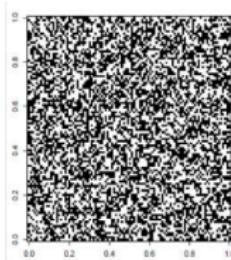


$$\rho \gg 0$$

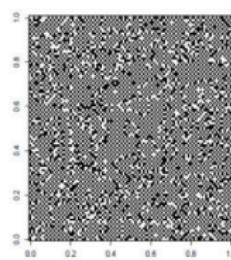
Corrélation

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires réelles. On définit (lorsqu'elle existe) la **corrélation** par la quantité :

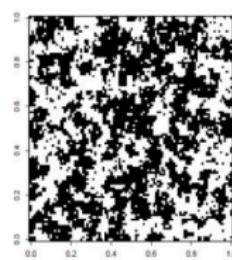
$$\rho_{XY} = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$$



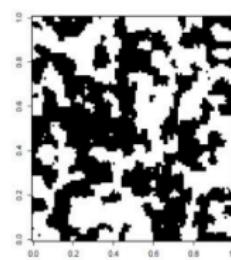
$$\rho = 0$$



$$\rho < 0$$



$$\rho > 0$$



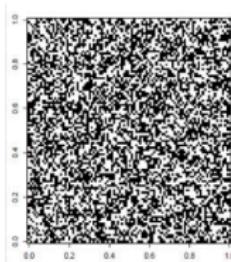
$$\rho \gg 0$$

$$-1 \geq \rho_{XY} \geq +1$$

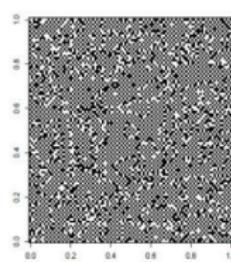
Corrélation

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires réelles. On définit (lorsqu'elle existe) la **corrélation** par la quantité :

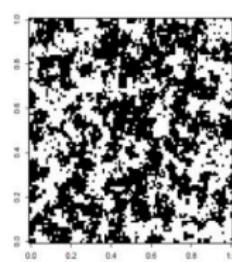
$$\rho_{XY} = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$$



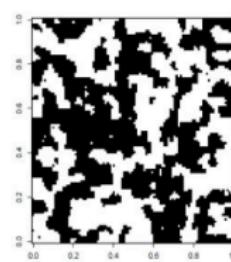
$$\rho = 0$$



$$\rho < 0$$



$$\rho > 0$$



$$\rho \gg 0$$

$$-1 \geq \rho_{XY} \geq +1 \quad (\text{Cauchy-Schwarz : } |\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle| \leq \|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\|)$$

Corrélation vs. dépendance

Corrélation vs. dépendance



La corrélation ne mesure que la dépendance linéaire

Corrélation vs. dépendance



La corrélation ne mesure que la dépendance linéaire

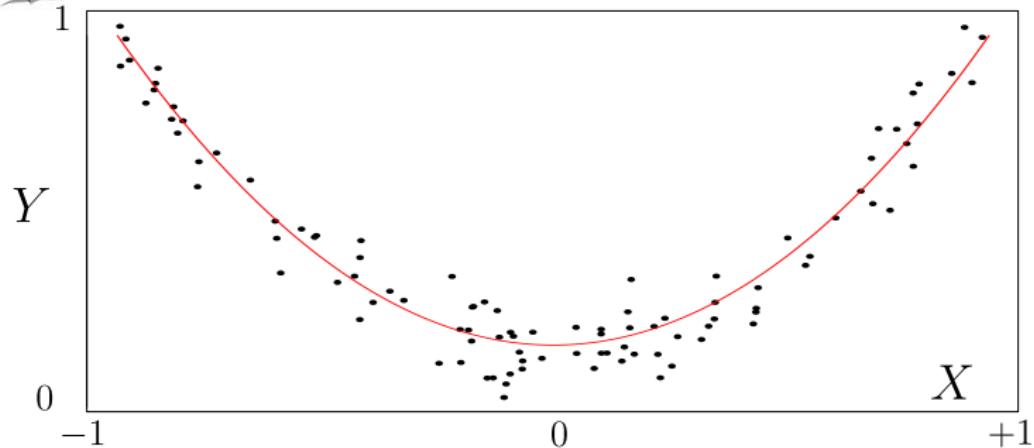
Contre-exemple : $X \sim \mathcal{U}([-1, +1])$ et $Y = X^2$

Corrélation vs. dépendance



La corrélation ne mesure que la dépendance linéaire

Contre-exemple : $X \sim \mathcal{U}([-1, +1])$ et $Y = X^2$

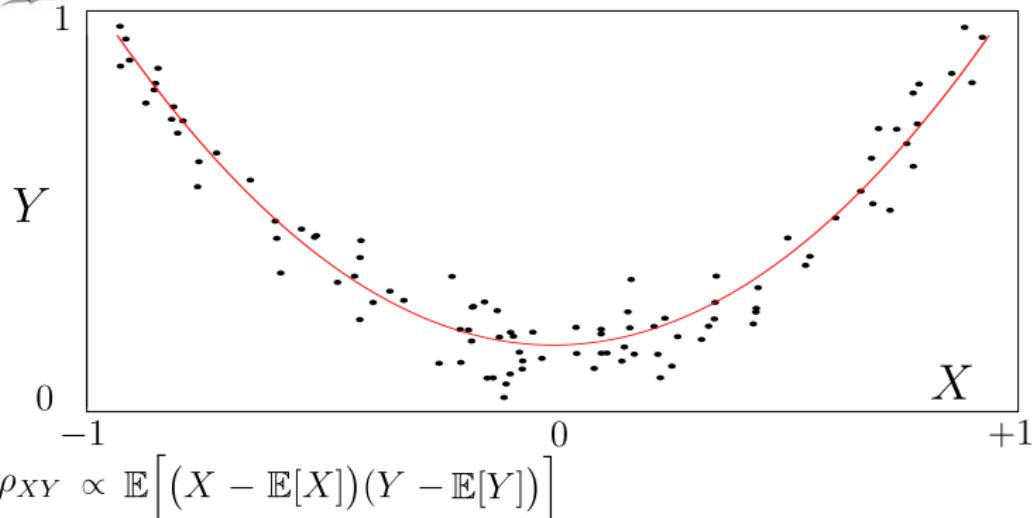


Corrélation vs. dépendance



La corrélation ne mesure que la dépendance linéaire

Contre-exemple : $X \sim \mathcal{U}([-1, +1])$ et $Y = X^2$



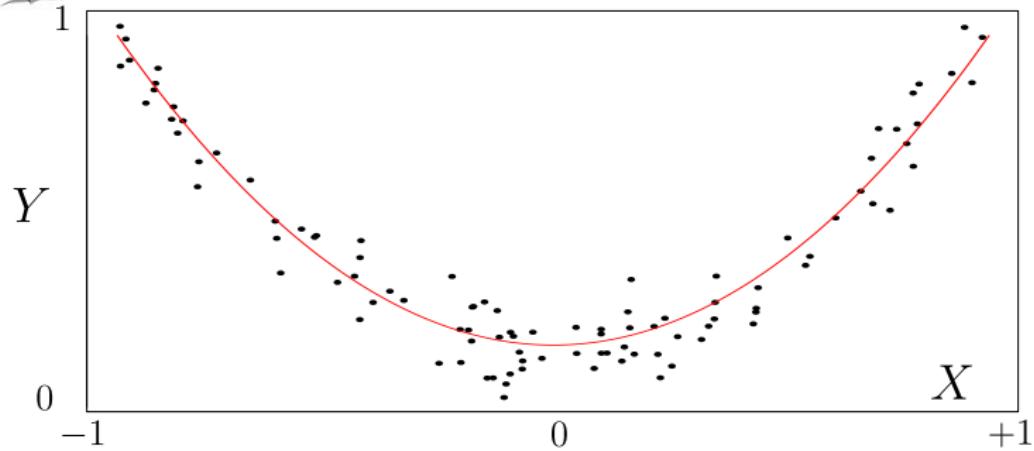
$$\rho_{XY} \propto \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])(Y - \mathbb{E}[Y])]$$

Corrélation vs. dépendance



La corrélation ne mesure que la dépendance linéaire

Contre-exemple : $X \sim \mathcal{U}([-1, +1])$ et $Y = X^2$



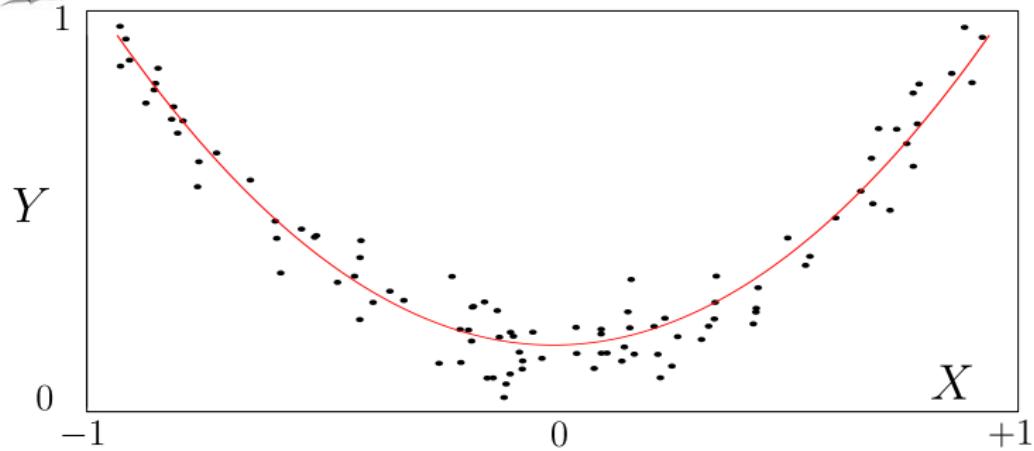
$$\rho_{XY} \propto \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])(Y - \mathbb{E}[Y])] = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$$

Corrélation vs. dépendance



La corrélation ne mesure que la dépendance linéaire

Contre-exemple : $X \sim \mathcal{U}([-1, +1])$ et $Y = X^2$



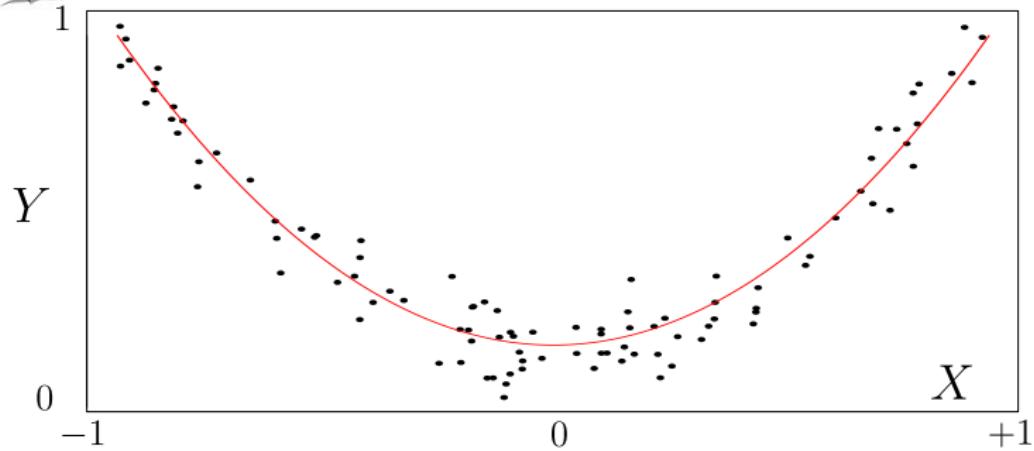
$$\begin{aligned}\rho_{XY} &\propto \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])(Y - \mathbb{E}[Y])] = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] \\ &= \mathbb{E}[X^3]\end{aligned}$$

Corrélation vs. dépendance



La corrélation ne mesure que la dépendance linéaire

Contre-exemple : $X \sim \mathcal{U}([-1, +1])$ et $Y = X^2$



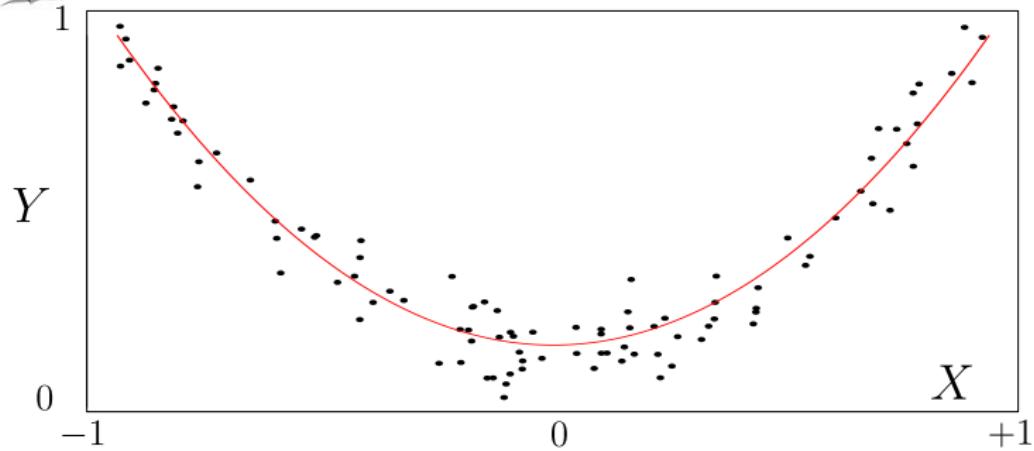
$$\begin{aligned}\rho_{XY} &\propto \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])(Y - \mathbb{E}[Y])] = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] \\ &= \mathbb{E}[X^3] = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} x^3 dx\end{aligned}$$

Corrélation vs. dépendance



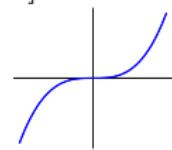
La corrélation ne mesure que la dépendance linéaire

Contre-exemple : $X \sim \mathcal{U}([-1, +1])$ et $Y = X^2$



$$\rho_{XY} \propto \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])(Y - \mathbb{E}[Y])] = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$$

$$= \mathbb{E}[X^3] = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} x^3 dx$$

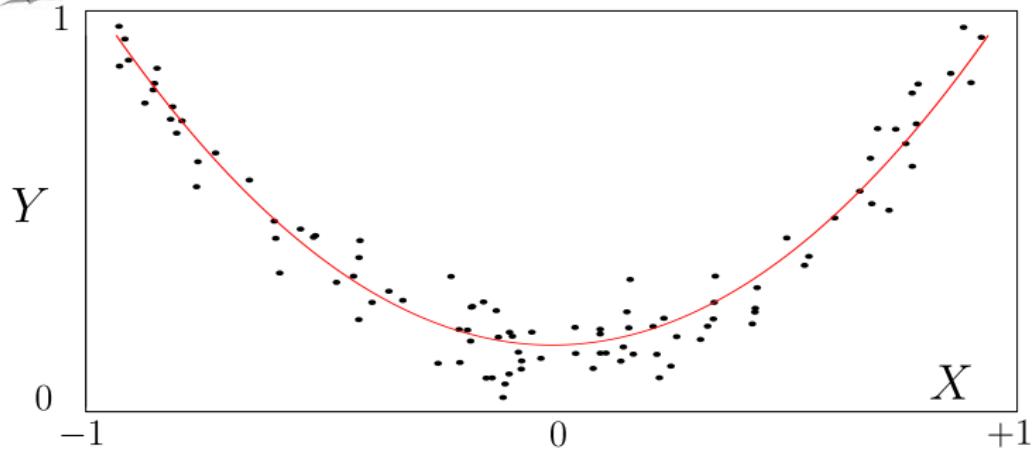


Corrélation vs. dépendance

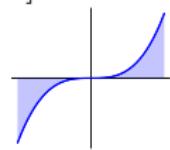


La corrélation ne mesure que la dépendance linéaire

Contre-exemple : $X \sim \mathcal{U}([-1, +1])$ et $Y = X^2$



$$\begin{aligned}\rho_{XY} &\propto \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])(Y - \mathbb{E}[Y])] = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] \\ &= \mathbb{E}[X^3] = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} x^3 dx\end{aligned}$$

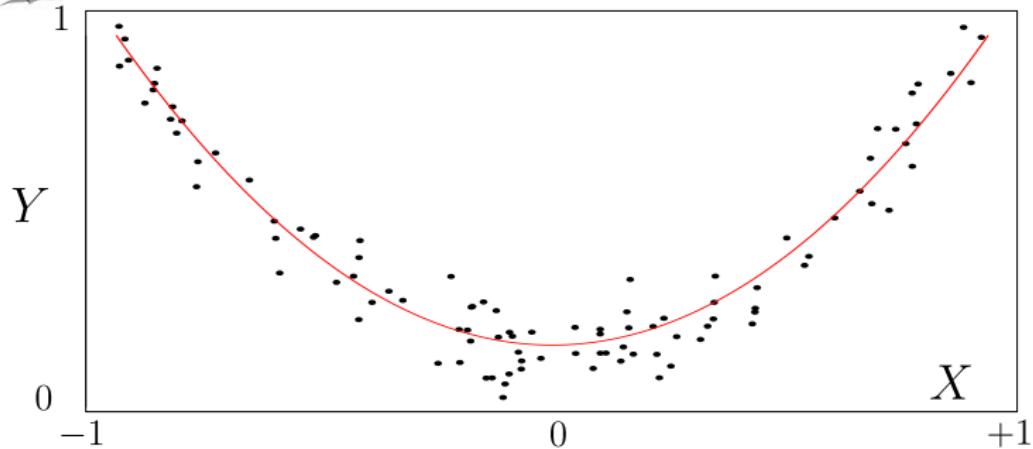


Corrélation vs. dépendance

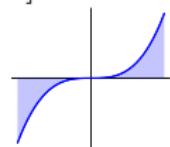


La corrélation ne mesure que la dépendance linéaire

Contre-exemple : $X \sim \mathcal{U}([-1, +1])$ et $Y = X^2$



$$\begin{aligned}\rho_{XY} &\propto \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])(Y - \mathbb{E}[Y])] = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] \\ &= \mathbb{E}[X^3] = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} x^3 dx = 0\end{aligned}$$

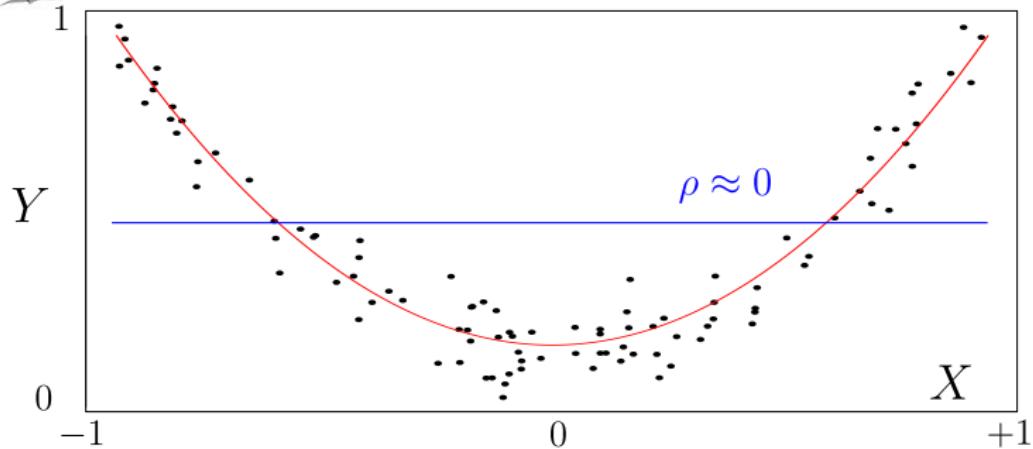


Corrélation vs. dépendance

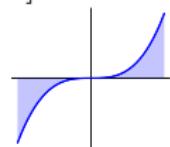


La corrélation ne mesure que la dépendance linéaire

Contre-exemple : $X \sim \mathcal{U}([-1, +1])$ et $Y = X^2$



$$\begin{aligned}\rho_{XY} &\propto \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])(Y - \mathbb{E}[Y])] = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] \\ &= \mathbb{E}[X^3] = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} x^3 dx = 0\end{aligned}$$

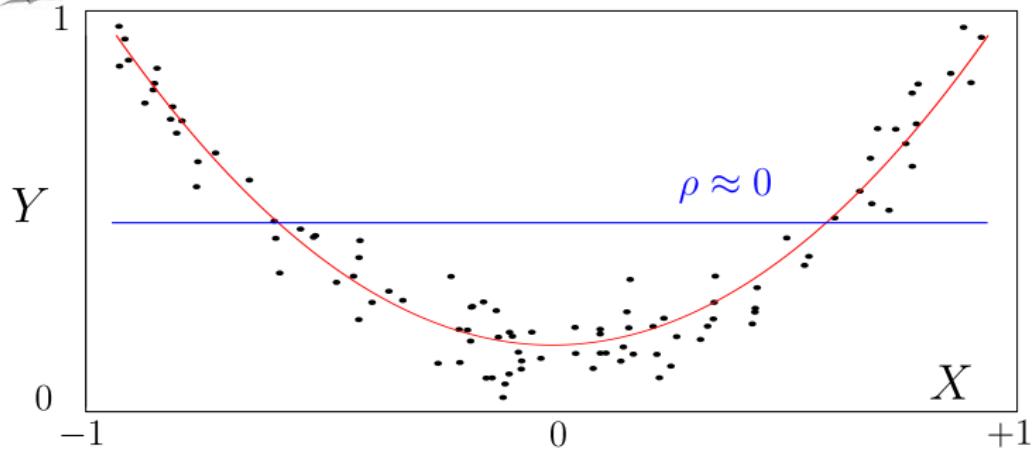


Corrélation vs. dépendance



La corrélation ne mesure que la dépendance linéaire

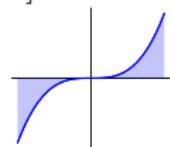
Contre-exemple : $X \sim \mathcal{U}([-1, +1])$ et $Y = X^2$



$$\rho_{XY} \propto \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])(Y - \mathbb{E}[Y])] = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$$

$$= \mathbb{E}[X^3] = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} x^3 dx = 0$$

$$\mathbb{P}(X = 1 | Y = 1)$$

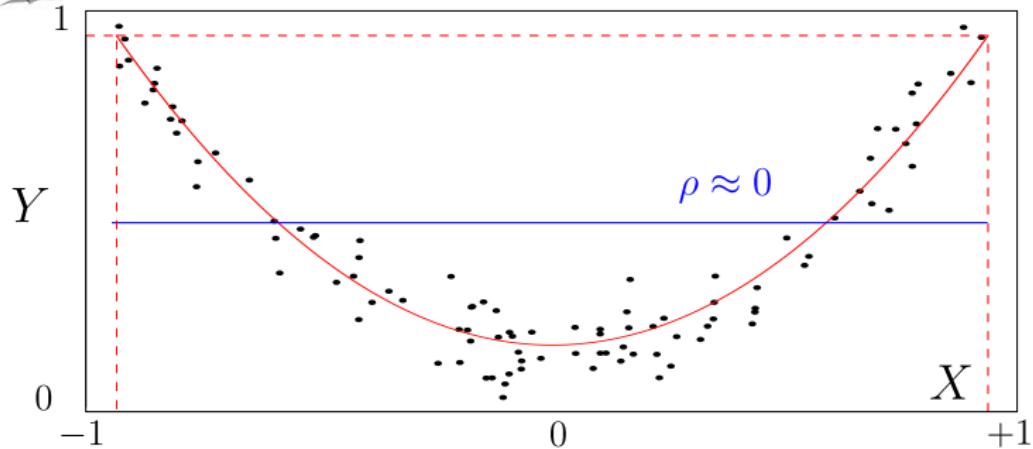


Corrélation vs. dépendance



La corrélation ne mesure que la dépendance linéaire

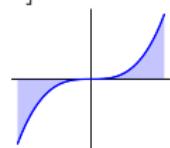
Contre-exemple : $X \sim \mathcal{U}([-1, +1])$ et $Y = X^2$



$$\rho_{XY} \propto \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])(Y - \mathbb{E}[Y])] = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$$

$$= \mathbb{E}[X^3] = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} x^3 dx = 0$$

$$\mathbb{P}(X = 1 | Y = 1)$$

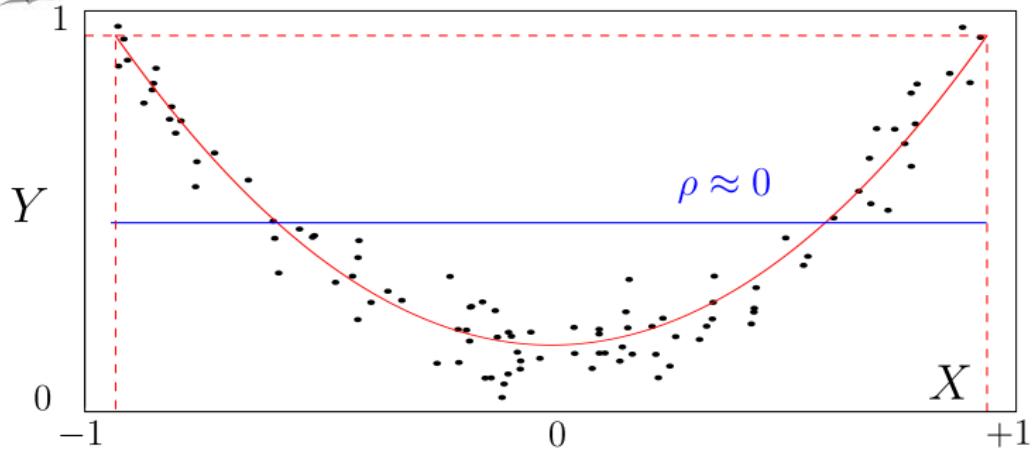


Corrélation vs. dépendance



La corrélation ne mesure que la dépendance linéaire

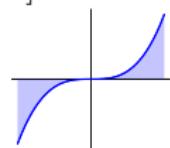
Contre-exemple : $X \sim \mathcal{U}([-1, +1])$ et $Y = X^2$



$$\rho_{XY} \propto \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])(Y - \mathbb{E}[Y])] = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$$

$$= \mathbb{E}[X^3] = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} x^3 dx = 0$$

$$\mathbb{P}(X = 1 | Y = 1) = \frac{1}{2}$$

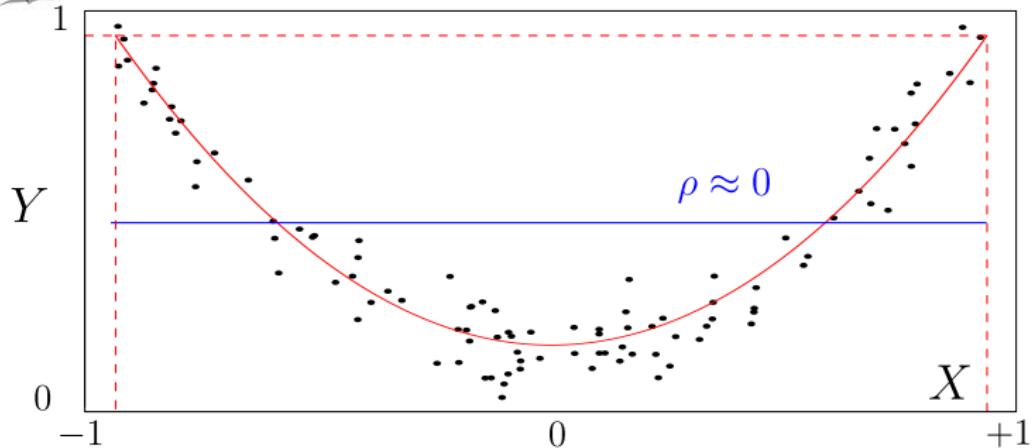


Corrélation vs. dépendance



La corrélation ne mesure que la dépendance linéaire

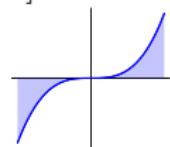
Contre-exemple : $X \sim \mathcal{U}([-1, +1])$ et $Y = X^2$



$$\rho_{XY} \propto \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])(Y - \mathbb{E}[Y])] = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$$

$$= \mathbb{E}[X^3] = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} x^3 dx = 0$$

$$\mathbb{P}(X = 1 | Y = 1) = \frac{1}{2} \neq \mathbb{P}(X = 1)$$

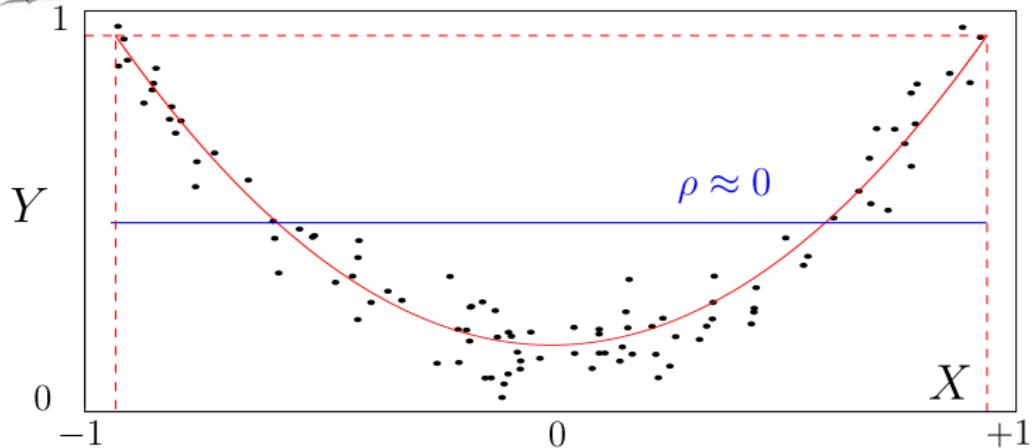


Corrélation vs. dépendance



La corrélation ne mesure que la dépendance linéaire

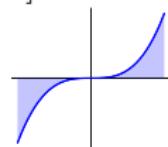
Contre-exemple : $X \sim \mathcal{U}([-1, +1])$ et $Y = X^2$



$$\rho_{XY} \propto \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])(Y - \mathbb{E}[Y])] = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$$

$$= \mathbb{E}[X^3] = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} x^3 dx = 0 \quad \text{décorrélation}$$

$$\mathbb{P}(X = 1 | Y = 1) = \frac{1}{2} \neq \mathbb{P}(X = 1)$$

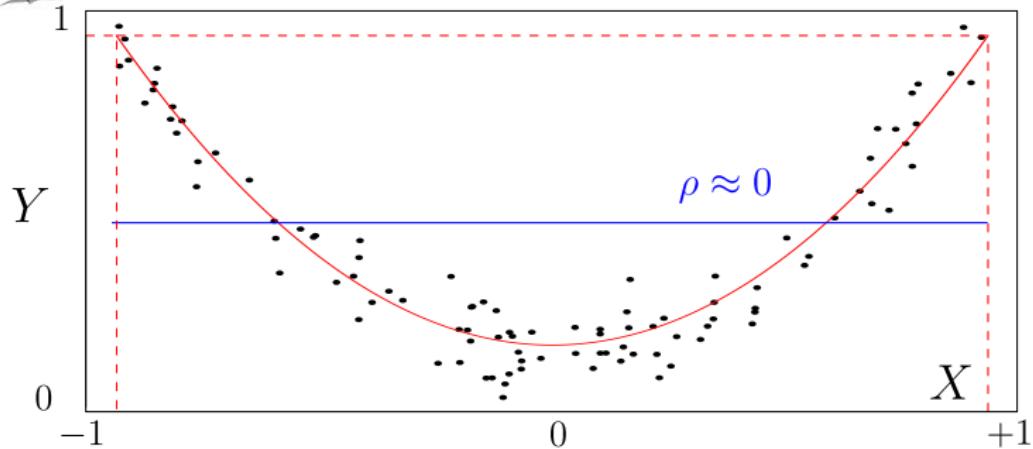


Corrélation vs. dépendance



La corrélation ne mesure que la dépendance linéaire

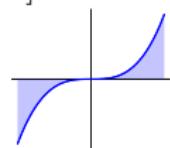
Contre-exemple : $X \sim \mathcal{U}([-1, +1])$ et $Y = X^2$



$$\rho_{XY} \propto \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])(Y - \mathbb{E}[Y])] = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$$

$$= \mathbb{E}[X^3] = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} x^3 dx = 0 \quad \text{décorrélation}$$

$$\mathbb{P}(X = 1 | Y = 1) = \frac{1}{2} \neq \mathbb{P}(X = 1) \quad \text{dépendance}$$



Encore un peu de multivarié...

Soit $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)^T \in \mathbb{R}^n$ un vecteur de n variables aléatoires réelles. On a $\mathbb{V}[X_i] = \text{Cov}(X_i, X_i)$. On peut donc former une matrice $\Sigma_{\mathbf{X}} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ de terme général $(\Sigma_{\mathbf{X}})_{ij} = \text{Cov}(X_i, X_j)$:

$$\Sigma_{\mathbf{X}} = \begin{pmatrix} \mathbb{V}[X_1] & \text{Cov}(X_1, X_2) & \cdots & \text{Cov}(X_1, X_n) \\ \text{Cov}(X_2, X_1) & \mathbb{V}[X_2] & \cdots & \text{Cov}(X_2, X_n) \\ \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ \text{Cov}(X_n, X_1) & \cdots & \cdots & \mathbb{V}[X_n] \end{pmatrix}$$

Encore un peu de multivarié...

Soit $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)^T \in \mathbb{R}^n$ un vecteur de n variables aléatoires réelles. On a $\mathbb{V}[X_i] = \text{Cov}(X_i, X_i)$. On peut donc former une matrice $\Sigma_{\mathbf{X}} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ de terme général $(\Sigma_{\mathbf{X}})_{ij} = \text{Cov}(X_i, X_j)$:

$$\Sigma_{\mathbf{X}} = \begin{pmatrix} \mathbb{V}[X_1] & \text{Cov}(X_1, X_2) & \cdots & \text{Cov}(X_1, X_n) \\ \text{Cov}(X_2, X_1) & \mathbb{V}[X_2] & \cdots & \text{Cov}(X_2, X_n) \\ \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ \text{Cov}(X_n, X_1) & \cdots & \cdots & \mathbb{V}[X_n] \end{pmatrix}$$

Propagation d'incertitudes

Soit \mathbf{X} un vecteur aléatoire de covariance $\Sigma_{\mathbf{X}}$ et $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Alors, la matrice de covariance de $\mathbf{Y} = \mathbf{AX}$ est :

$$\Sigma_{\mathbf{Y}} = \mathbf{A}\Sigma_{\mathbf{X}}\mathbf{A}^T$$

Encore un peu de multivarié...

Soit $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)^T \in \mathbb{R}^n$ un vecteur de n variables aléatoires réelles. On a $\mathbb{V}[X_i] = \text{Cov}(X_i, X_i)$. On peut donc former une matrice $\Sigma_{\mathbf{X}} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ de terme général $(\Sigma_{\mathbf{X}})_{ij} = \text{Cov}(X_i, X_j)$:

$$\Sigma_{\mathbf{X}} = \begin{pmatrix} \mathbb{V}[X_1] & \text{Cov}(X_1, X_2) & \cdots & \text{Cov}(X_1, X_n) \\ \text{Cov}(X_2, X_1) & \mathbb{V}[X_2] & \cdots & \text{Cov}(X_2, X_n) \\ \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ \text{Cov}(X_n, X_1) & \cdots & \cdots & \mathbb{V}[X_n] \end{pmatrix}$$

Propagation d'incertitudes

Soit \mathbf{X} un vecteur aléatoire de covariance $\Sigma_{\mathbf{X}}$ et $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Alors, la matrice de covariance de $\mathbf{Y} = \mathbf{AX}$ est :

$$\Sigma_{\mathbf{Y}} = \mathbf{A}\Sigma_{\mathbf{X}}\mathbf{A}^T$$

Preuve : aucun souci en partant de la définition $\Sigma_{\mathbf{X}} = \mathbb{E}[(\mathbf{X} - \mathbb{E}[\mathbf{X}])(\mathbf{X} - \mathbb{E}[\mathbf{X}])^T]$...

Exercices : propagation d'incertitudes

- Montrer que : $\mathbb{V}[X + Y] = \mathbb{V}[X] + \mathbb{V}[Y] + 2\text{Cov}(X, Y)$. Quid de $\mathbb{V}[X - Y]$?

Exercices : propagation d'incertitudes

- Montrer que : $\mathbb{V}[X + Y] = \mathbb{V}[X] + \mathbb{V}[Y] + 2\text{Cov}(X, Y)$. Quid de $\mathbb{V}[X - Y]$?
- A l'issue d'un examen, un étudiant reçoit 5 notes (sur 20 points) : **mathématiques** (coeff 12), **physique-chimie** (coeff 7), **informatique** (coeff 7), **français** (coeff 4) et **anglais** (coeff 2).

Exercices : propagation d'incertitudes

- Montrer que : $\mathbb{V}[X + Y] = \mathbb{V}[X] + \mathbb{V}[Y] + 2\text{Cov}(X, Y)$. Quid de $\mathbb{V}[X - Y]$?
- A l'issue d'un examen, un étudiant reçoit 5 notes (sur 20 points) : **mathématiques** (coeff 12), **physique-chimie** (coeff 7), **informatique** (coeff 7), **français** (coeff 4) et **anglais** (coeff 2).

On suppose que l'écart-type de l'erreur d'évaluation de chaque copie est de 3 points. Par ailleurs un seul et même évaluateur corrige les copies de mathématiques et d'informatique, ce que nous modéliserons par une corrélation ($\rho = 50\%$) des erreurs d'évaluation sur ces deux épreuves.

Exercices : propagation d'incertitudes

- Montrer que : $\mathbb{V}[X + Y] = \mathbb{V}[X] + \mathbb{V}[Y] + 2\text{Cov}(X, Y)$. Quid de $\mathbb{V}[X - Y]$?
- A l'issue d'un examen, un étudiant reçoit 5 notes (sur 20 points) : **mathématiques** (coeff 12), **physique-chimie** (coeff 7), **informatique** (coeff 7), **français** (coeff 4) et **anglais** (coeff 2).

On suppose que l'écart-type de l'erreur d'évaluation de chaque copie est de 3 points. Par ailleurs un seul et même évaluateur corrige les copies de mathématiques et d'informatique, ce que nous modéliserons par une corrélation ($\rho = 50\%$) des erreurs d'évaluation sur ces deux épreuves.

Calculer l'incertitude sur la moyenne de l'étudiant. Qu'en est-t-il si on suppose à présent les corrections indépendantes.

Exercices : propagation d'incertitudes (correction)

$$Z = X + Y = (1 \ 1)\mathbf{X} \text{ avec } \mathbf{X} = (X, Y)^T.$$

Exercices : propagation d'incertitudes (correction)

$$Z = X + Y = (1 \ 1)\mathbf{X} \text{ avec } \mathbf{X} = (X, Y)^T.$$

$$\Sigma_Z = \begin{bmatrix} -1 & +1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbb{V}[X] & \text{Cov}(X, Y) \\ \text{Cov}(X, Y) & \mathbb{V}[Y] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ +1 \end{bmatrix}$$
$$= \mathbb{V}[X] + \mathbb{V}[Y] + 2\text{Cov}(X, Y)$$

Exercices : propagation d'incertitudes (correction)

$$Z = X + Y = (1 \ 1)\mathbf{X} \text{ avec } \mathbf{X} = (X, Y)^T.$$

$$\Sigma_Z = \begin{bmatrix} -1 & +1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbb{V}[X] & \text{Cov}(X, Y) \\ \text{Cov}(X, Y) & \mathbb{V}[Y] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ +1 \end{bmatrix}$$
$$= \mathbb{V}[X] + \mathbb{V}[Y] + 2\text{Cov}(X, Y)$$

$$Z = X - Y = (+1 \ -1)\mathbf{X} \text{ avec } \mathbf{X} = (X, Y)^T.$$

Exercices : propagation d'incertitudes (correction)

$$Z = X + Y = (1 \ 1)\mathbf{X} \text{ avec } \mathbf{X} = (X, Y)^T.$$

$$\begin{aligned}\Sigma_Z &= \begin{bmatrix} -1 & +1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbb{V}[X] & \text{Cov}(X, Y) \\ \text{Cov}(X, Y) & \mathbb{V}[Y] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ +1 \end{bmatrix} \\ &= \mathbb{V}[X] + \mathbb{V}[Y] + 2\text{Cov}(X, Y)\end{aligned}$$

$$Z = X - Y = (+1 \ -1)\mathbf{X} \text{ avec } \mathbf{X} = (X, Y)^T.$$

$$\begin{aligned}\Sigma_Z &= \begin{bmatrix} +1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbb{V}[X] & \text{Cov}(X, Y) \\ \text{Cov}(X, Y) & \mathbb{V}[Y] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} +1 \\ -1 \end{bmatrix} \\ &= \mathbb{V}[X] + \mathbb{V}[Y] - 2\text{Cov}(X, Y)\end{aligned}$$

Exercices : propagation d'incertitudes (correction)

En notant $\mathbf{A} = [12, 7, 7, 4, 2]$ le vecteur des coefficients, on exprime sous forme matricielle la moyenne de l'étudiant : $\mu = \frac{1}{32}\mathbf{AX}$, avec \mathbf{X} le vecteur aléatoire des notes obtenues, de covariance :

Exercices : propagation d'incertitudes (correction)

En notant $\mathbf{A} = [12, 7, 7, 4, 2]$ le vecteur des coefficients, on exprime sous forme matricielle la moyenne de l'étudiant : $\mu = \frac{1}{32}\mathbf{AX}$, avec \mathbf{X} le vecteur aléatoire des notes obtenues, de covariance :

$$\Sigma_X = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 4.5 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 & 0 & 0 \\ 4.5 & 0 & 9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

Exercices : propagation d'incertitudes (correction)

En notant $\mathbf{A} = [12, 7, 7, 4, 2]$ le vecteur des coefficients, on exprime sous forme matricielle la moyenne de l'étudiant : $\mu = \frac{1}{32}\mathbf{AX}$, avec \mathbf{X} le vecteur aléatoire des notes obtenues, de covariance :

$$\Sigma_X = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 4.5 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 & 0 & 0 \\ 4.5 & 0 & 9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\text{Var}[\mu] = \frac{1}{32^2} \mathbf{A} \Sigma_X \mathbf{A}^T = 3.04$$

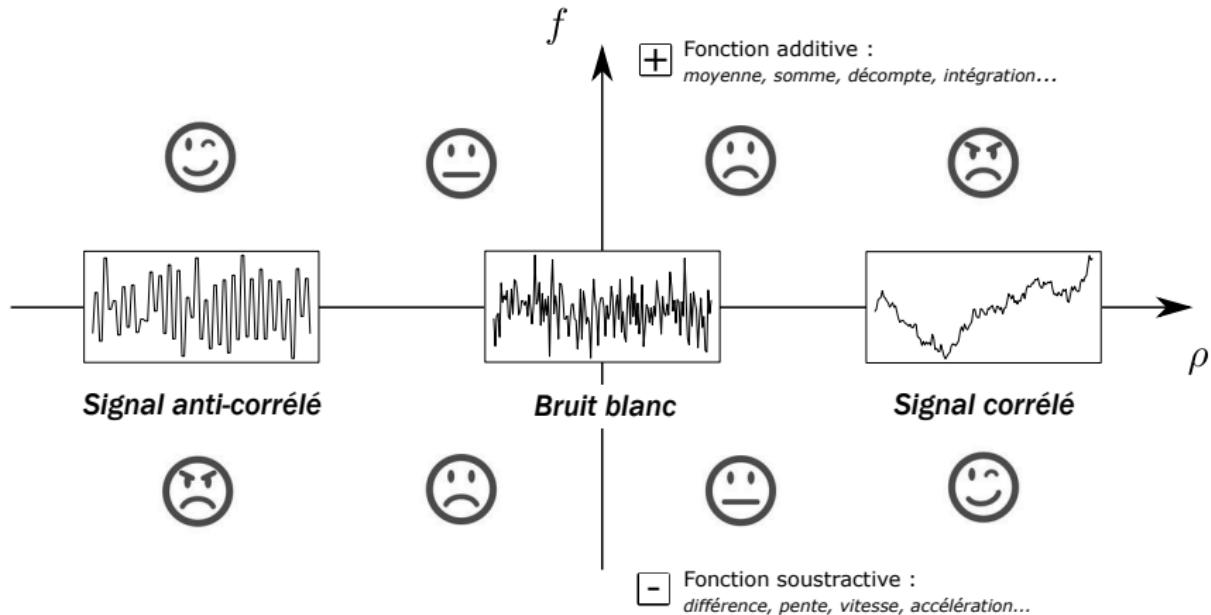
Exercices : propagation d'incertitudes (correction)

En notant $\mathbf{A} = [12, 7, 7, 4, 2]$ le vecteur des coefficients, on exprime sous forme matricielle la moyenne de l'étudiant : $\mu = \frac{1}{32}\mathbf{AX}$, avec \mathbf{X} le vecteur aléatoire des notes obtenues, de covariance :

$$\Sigma_X = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\text{Var}[\mu] = \frac{1}{32^2} \mathbf{A}(9I_5)\mathbf{A}^T = \frac{9}{32^2} \mathbf{AA}^T = 2.30$$

Impact de la corrélation des inputs



Propagation d'incertitudes : cas général

Que faire lorsque l'application n'est pas linéaire ?

Propagation d'incertitudes : cas général

Que faire lorsque l'application n'est pas linéaire ? Soit f une fonction scalaire **non-linéaire**, et X une variable aléatoire de variance $\mathbb{V}[X]$.

Propagation d'incertitudes : cas général

Que faire lorsque l'application n'est pas linéaire ? Soit f une fonction scalaire **non-linéaire**, et X une variable aléatoire de variance $\mathbb{V}[X]$.

$$f(X) \approx f(a) + f'(a)(X - a) + \frac{f^{(2)}(a)}{2}(X - a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(X - a)^n$$

$$\begin{aligned}\mathbb{V}[f(X)] &\approx \mathbb{V}[f(a) + f'(a)(X - a)] \\ &= \mathbb{V}[f(a)] + f'(a)^2 \mathbb{V}[X - a] \\ &= f'(a)^2 \mathbb{V}[X]\end{aligned}$$

Propagation d'incertitudes : cas général

Que faire lorsque l'application n'est pas linéaire ? Soit f une fonction scalaire **non-linéaire**, et X une variable aléatoire de variance $\mathbb{V}[X]$.

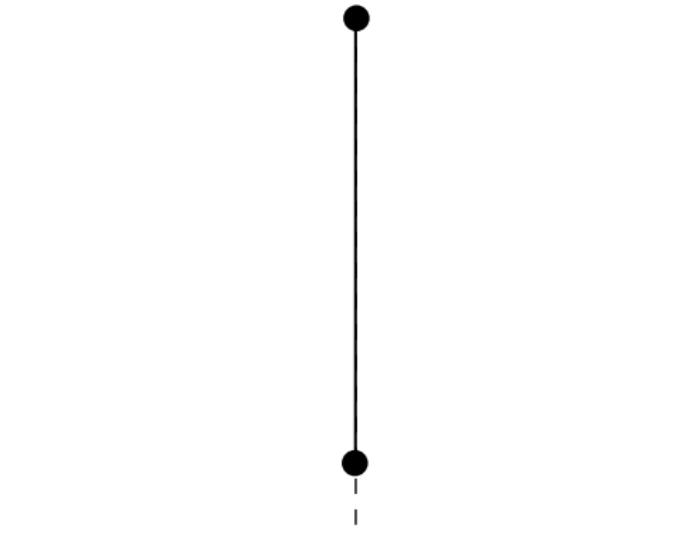
$$f(X) \approx f(a) + f'(a)(X - a) + \frac{f^{(2)}(a)}{2}(X - a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(X - a)^n$$

$$\begin{aligned}\mathbb{V}[f(X)] &\approx \mathbb{V}[f(a) + f'(a)(X - a)] \\ &= \mathbb{V}[f(a)] + f'(a)^2 \mathbb{V}[X - a] \\ &= f'(a)^2 \mathbb{V}[X]\end{aligned}$$

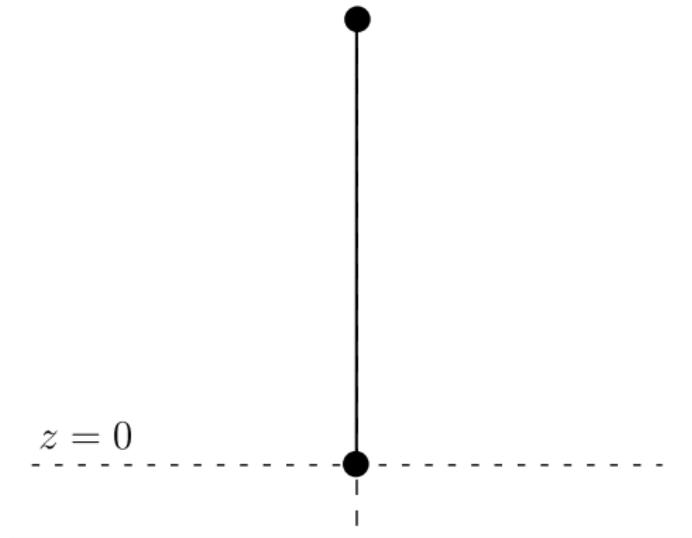
Exemple : prenons le cas de $f : x \mapsto \cos x$, et supposons que l'on travaille au voisinage de $a = \frac{\pi}{3}$. On a alors :

$$\mathbb{V}[\cos X] = (-\sin a)^2 \mathbb{V}[X] = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \mathbb{V}[X] = 0.75 \times \mathbb{V}[X]$$

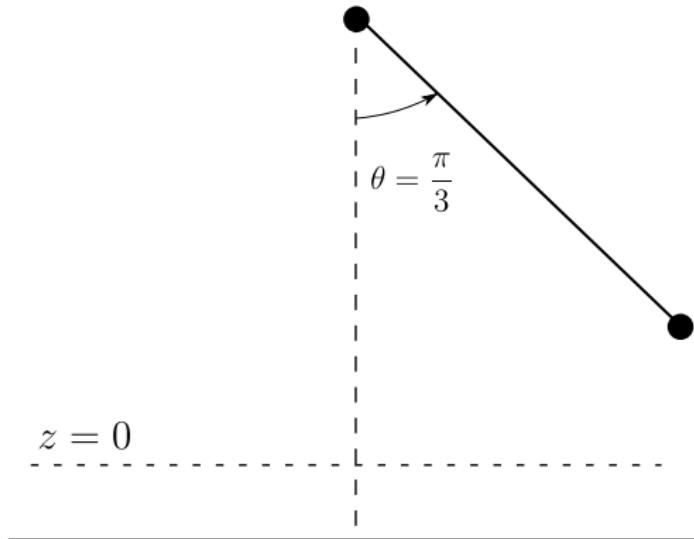
Propagation d'incertitudes : cas général



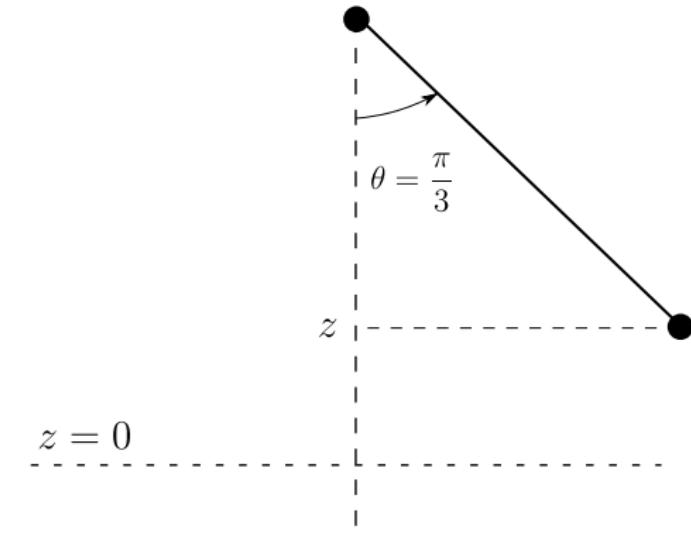
Propagation d'incertitudes : cas général



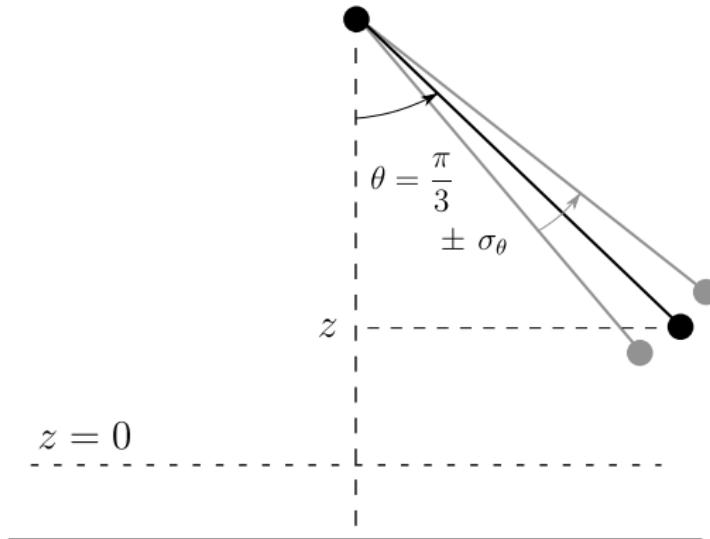
Propagation d'incertitudes : cas général



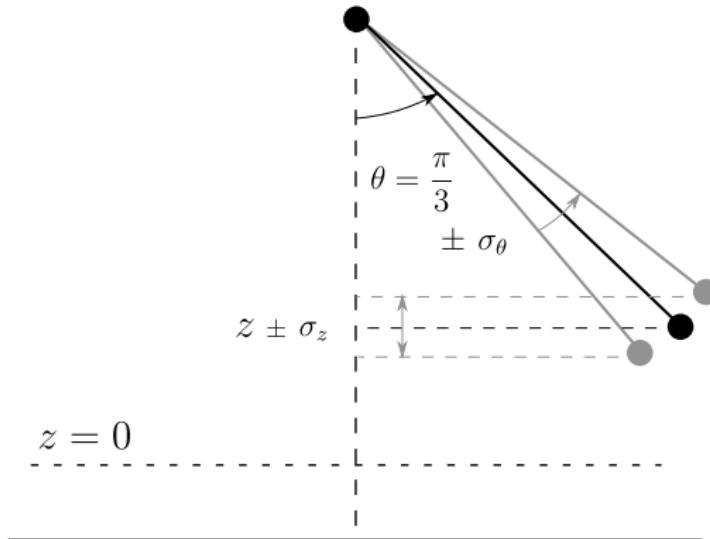
Propagation d'incertitudes : cas général



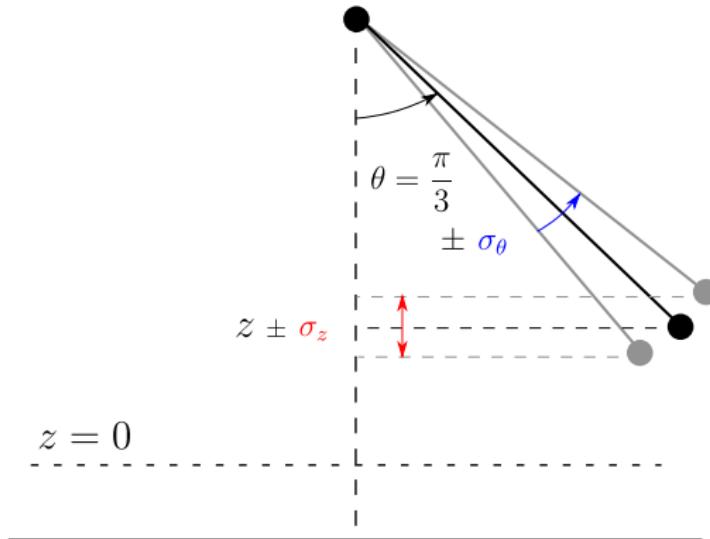
Propagation d'incertitudes : cas général



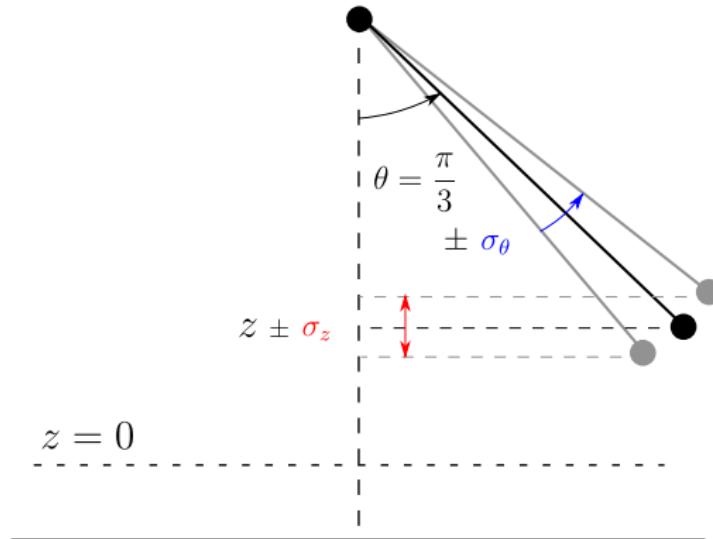
Propagation d'incertitudes : cas général



Propagation d'incertitudes : cas général

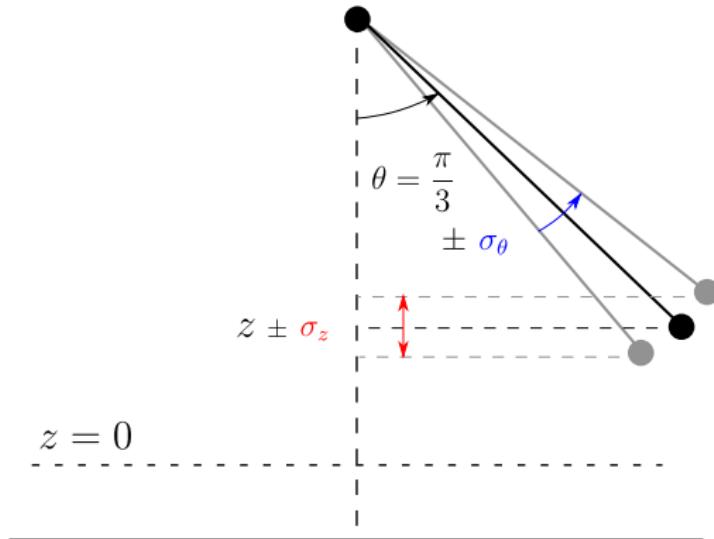


Propagation d'incertitudes : cas général



$$l = 1 \text{ m}, \quad \mathbb{V}[Z] = \mathbb{V}[l \cos \Theta] \approx 0.75 \mathbb{V}[\Theta]$$

Propagation d'incertitudes : cas général



$$l = 1 \text{ m}, \quad \mathbb{V}[Z] = \mathbb{V}[l \cos \Theta] \approx 0.75 \mathbb{V}[\Theta]$$

$$\sigma_\theta = 10^\circ = 0.17 \text{ rad} \Rightarrow \mathbb{V}[\Theta] = 0.029 \Rightarrow \mathbb{V}[Z] = 22 \text{ mm}$$

Propagation d'incertitudes : cas général

Pour $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$, \mathbf{J} est la matrice jacobienne de terme général $(\mathbf{J})_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}$, où f_1, f_2, \dots, f_m sont les composantes de f .

Propagation d'incertitudes : cas général

Pour $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$, \mathbf{J} est la matrice jacobienne de terme général $(\mathbf{J})_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}$, où f_1, f_2, \dots, f_m sont les composantes de f .

Loi de propagation des variances

Soit $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$, une fonction régulière de matrice jacobienne \mathbf{J} et \mathbf{X} un vecteur aléatoire de \mathbb{R}^n de matrice de covariance Σ_X :

$$\Sigma_{f(\mathbf{X})} = \mathbf{J}\Sigma_X\mathbf{J}^T$$

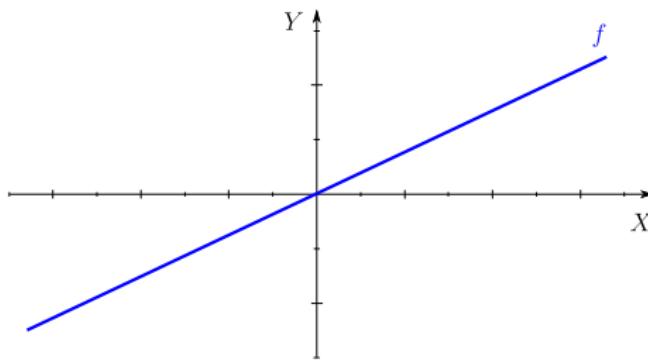
Propagation d'incertitudes : cas général

Pour $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$, \mathbf{J} est la matrice jacobienne de terme général $(\mathbf{J})_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}$, où f_1, f_2, \dots, f_m sont les composantes de f .

Loi de propagation des variances

Soit $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$, une fonction régulière de matrice jacobienne \mathbf{J} et \mathbf{X} un vecteur aléatoire de \mathbb{R}^n de matrice de covariance Σ_X :

$$\Sigma_{f(\mathbf{X})} = \mathbf{J}\Sigma_X\mathbf{J}^T$$



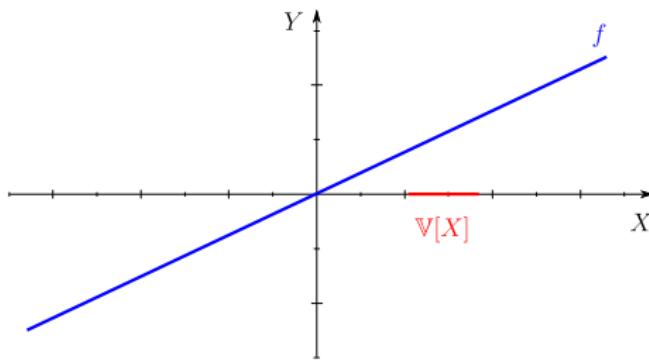
Propagation d'incertitudes : cas général

Pour $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$, \mathbf{J} est la matrice jacobienne de terme général $(\mathbf{J})_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}$, où f_1, f_2, \dots, f_m sont les composantes de f .

Loi de propagation des variances

Soit $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$, une fonction régulière de matrice jacobienne \mathbf{J} et \mathbf{X} un vecteur aléatoire de \mathbb{R}^n de matrice de covariance Σ_X :

$$\Sigma_{f(\mathbf{X})} = \mathbf{J}\Sigma_X\mathbf{J}^T$$



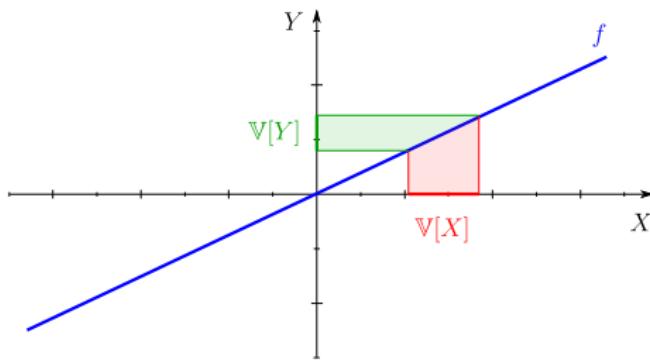
Propagation d'incertitudes : cas général

Pour $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$, \mathbf{J} est la matrice jacobienne de terme général $(\mathbf{J})_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}$, où f_1, f_2, \dots, f_m sont les composantes de f .

Loi de propagation des variances

Soit $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$, une fonction régulière de matrice jacobienne \mathbf{J} et \mathbf{X} un vecteur aléatoire de \mathbb{R}^n de matrice de covariance Σ_X :

$$\Sigma_{f(\mathbf{X})} = \mathbf{J}\Sigma_X\mathbf{J}^T$$



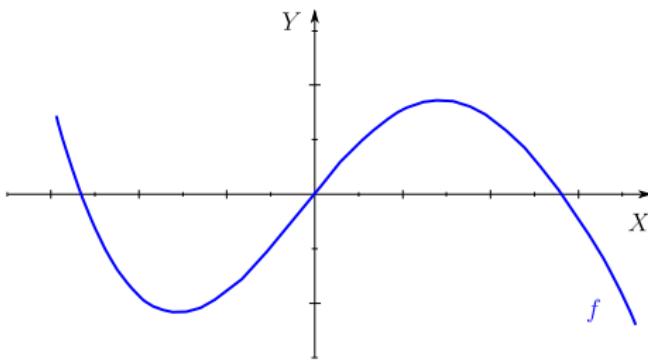
Propagation d'incertitudes : cas général

Pour $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$, \mathbf{J} est la matrice jacobienne de terme général $(\mathbf{J})_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}$, où f_1, f_2, \dots, f_m sont les composantes de f .

Loi de propagation des variances

Soit $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$, une fonction régulière de matrice jacobienne \mathbf{J} et \mathbf{X} un vecteur aléatoire de \mathbb{R}^n de matrice de covariance Σ_X :

$$\Sigma_{f(\mathbf{X})} = \mathbf{J}\Sigma_X\mathbf{J}^T$$



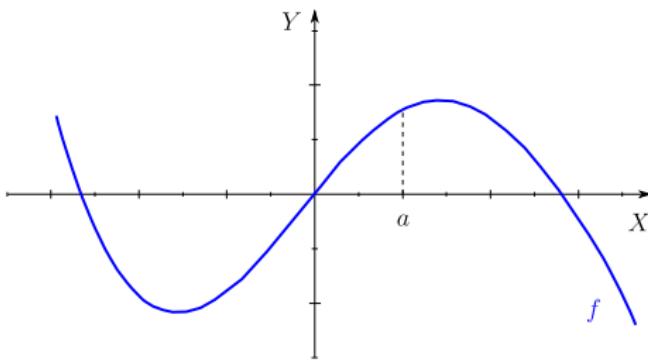
Propagation d'incertitudes : cas général

Pour $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$, \mathbf{J} est la matrice jacobienne de terme général $(\mathbf{J})_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}$, où f_1, f_2, \dots, f_m sont les composantes de f .

Loi de propagation des variances

Soit $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$, une fonction régulière de matrice jacobienne \mathbf{J} et \mathbf{X} un vecteur aléatoire de \mathbb{R}^n de matrice de covariance Σ_X :

$$\Sigma_{f(\mathbf{X})} = \mathbf{J}\Sigma_X\mathbf{J}^T$$



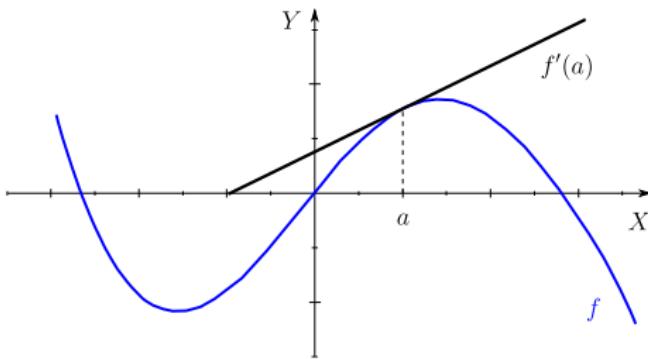
Propagation d'incertitudes : cas général

Pour $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$, \mathbf{J} est la matrice jacobienne de terme général $(\mathbf{J})_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}$, où f_1, f_2, \dots, f_m sont les composantes de f .

Loi de propagation des variances

Soit $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$, une fonction régulière de matrice jacobienne \mathbf{J} et \mathbf{X} un vecteur aléatoire de \mathbb{R}^n de matrice de covariance Σ_X :

$$\Sigma_{f(\mathbf{X})} = \mathbf{J}\Sigma_X\mathbf{J}^T$$



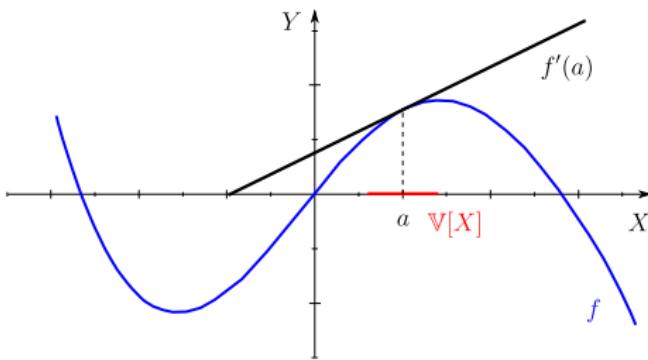
Propagation d'incertitudes : cas général

Pour $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$, \mathbf{J} est la matrice jacobienne de terme général $(\mathbf{J})_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}$, où f_1, f_2, \dots, f_m sont les composantes de f .

Loi de propagation des variances

Soit $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$, une fonction régulière de matrice jacobienne \mathbf{J} et \mathbf{X} un vecteur aléatoire de \mathbb{R}^n de matrice de covariance Σ_X :

$$\Sigma_{f(\mathbf{X})} = \mathbf{J}\Sigma_X\mathbf{J}^T$$



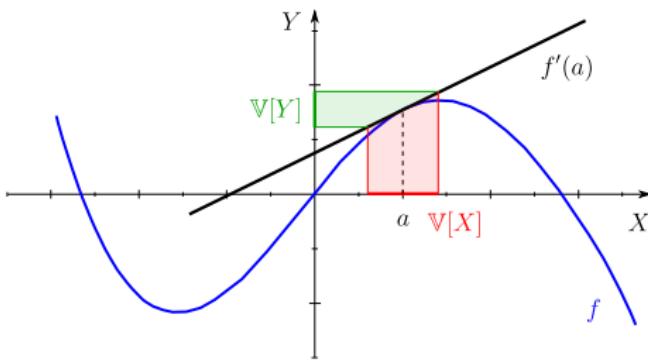
Propagation d'incertitudes : cas général

Pour $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$, \mathbf{J} est la matrice jacobienne de terme général $(\mathbf{J})_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}$, où f_1, f_2, \dots, f_m sont les composantes de f .

Loi de propagation des variances

Soit $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$, une fonction régulière de matrice jacobienne \mathbf{J} et \mathbf{X} un vecteur aléatoire de \mathbb{R}^n de matrice de covariance Σ_X :

$$\Sigma_{f(\mathbf{X})} = \mathbf{J}\Sigma_X\mathbf{J}^T$$



Méthode de propagation des variances : méthodologie

- **Etape 1 :** écrire l'expression analytique F des grandeurs à calculer.

Méthode de propagation des variances : méthodologie

- **Etape 1 :** écrire l'expression analytique F des grandeurs à calculer.
- **Etape 2 :** repérer dans F , la liste des grandeurs entâchées d'incertitudes : $\mathbf{X} = (x_1, x_2, \dots x_n)$.

Méthode de propagation des variances : méthodologie

- **Etape 1 :** écrire l'expression analytique F des grandeurs à calculer.
- **Etape 2 :** repérer dans F , la liste des grandeurs entâchées d'incertitudes : $\mathbf{X} = (x_1, x_2, \dots x_n)$.
- **Etape 3 :** pour chaque grandeur x_i évaluer son écart-type σ_i (en considérant la nature de l'incertitude)

Méthode de propagation des variances : méthodologie

- **Etape 1** : écrire l'expression analytique F des grandeurs à calculer.
- **Etape 2** : repérer dans F , la liste des grandeurs entâchées d'incertitudes : $\mathbf{X} = (x_1, x_2, \dots x_n)$.
- **Etape 3** : pour chaque grandeur x_i évaluer son écart-type σ_i (en considérant la nature de l'incertitude)
- **Etape 4** : étudier les corrélations potentielles entre variables et les évaluer (si non négligeables) : $\text{Cov}(x_i, x_j) \quad \forall (i, j) \quad i \neq j$

Méthode de propagation des variances : méthodologie (suite)

- **Etape 5 :** former la matrice de variances-covariances des entrées Σ_X : $(\Sigma_X)_{ij} = \text{Cov}(x_i, x_j)$

Méthode de propagation des variances : méthodologie (suite)

- **Etape 5 :** former la matrice de variances-covariances des entrées Σ_X : $(\Sigma_X)_{ij} = \text{Cov}(x_i, x_j)$
- **Etape 6 :** calculer la matrice jacobienne de F en \mathbf{X} , si besoin par dérivation numérique : $J_{ij} = \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(\mathbf{X})$

Méthode de propagation des variances : méthodologie (suite)

- **Etape 5 :** former la matrice de variances-covariances des entrées $\Sigma_{\mathbf{X}}$: $(\Sigma_X)_{ij} = \text{Cov}(x_i, x_j)$
- **Etape 6 :** calculer la matrice jacobienne de F en \mathbf{X} , si besoin par dérivation numérique : $J_{ij} = \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(\mathbf{X})$
- **Etape 7 :** propager les variances avec : $\Sigma_{\mathbf{F}} = \mathbf{J}\Sigma_{\mathbf{X}}\mathbf{J}^t$

Méthode de propagation des variances : méthodologie (suite)

- **Etape 5 :** former la matrice de variances-covariances des entrées $\Sigma_{\mathbf{X}}$: $(\Sigma_X)_{ij} = \text{Cov}(x_i, x_j)$
- **Etape 6 :** calculer la matrice jacobienne de F en \mathbf{X} , si besoin par dérivation numérique : $J_{ij} = \frac{\partial F_i}{\partial x_i}(\mathbf{X})$
- **Etape 7 :** propager les variances avec : $\Sigma_{\mathbf{F}} = \mathbf{J}\Sigma_{\mathbf{X}}\mathbf{J}^t$
- **Etape 8 :** récupérer les écart-types : $\sigma(F_i) = \sqrt{\Sigma_{\mathbf{F}ii}}$

Méthode de propagation des variances : méthodologie (suite)

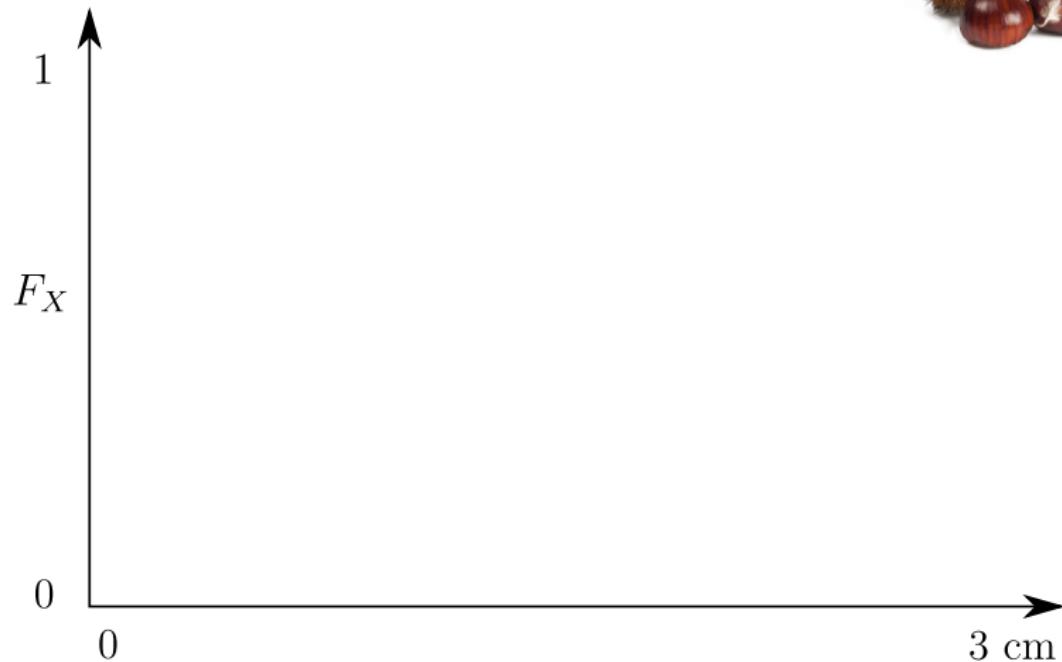
- **Etape 5 :** former la matrice de variances-covariances des entrées $\Sigma_{\mathbf{X}}$: $(\Sigma_X)_{ij} = \text{Cov}(x_i, x_j)$
- **Etape 6 :** calculer la matrice jacobienne de F en \mathbf{X} , si besoin par dérivation numérique : $J_{ij} = \frac{\partial F_i}{\partial x_i}(\mathbf{X})$
- **Etape 7 :** propager les variances avec : $\Sigma_{\mathbf{F}} = \mathbf{J}\Sigma_{\mathbf{X}}\mathbf{J}^t$
- **Etape 8 :** récupérer les écart-types : $\sigma(F_i) = \sqrt{\Sigma_{\mathbf{F}ii}}$
- **Etape 9 :** dériver des intervalles de confiance $F_i(\mathbf{X}) \pm k\sigma(F_i)$ et calculer des probabilités de dépassement de seuil.

Aspects numériques

- *inférence*
- *simulations*

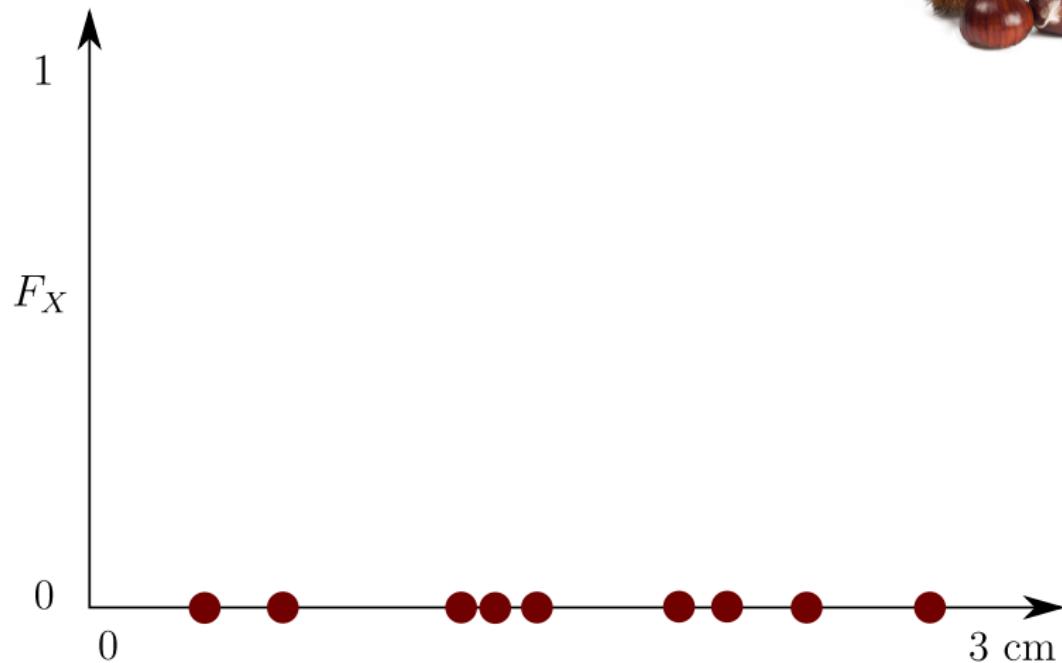
Inférence : fonction de répartition

X : v.a. réelle représentant la taille d'une châtaigne



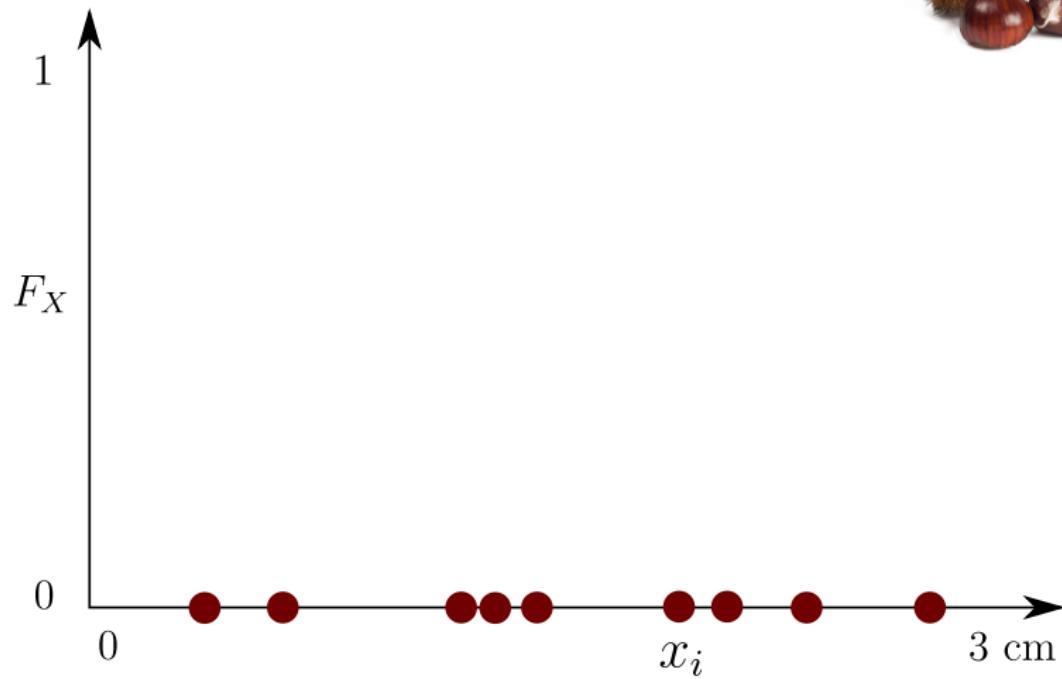
Inférence : fonction de répartition

X : v.a. réelle représentant la taille d'une châtaigne



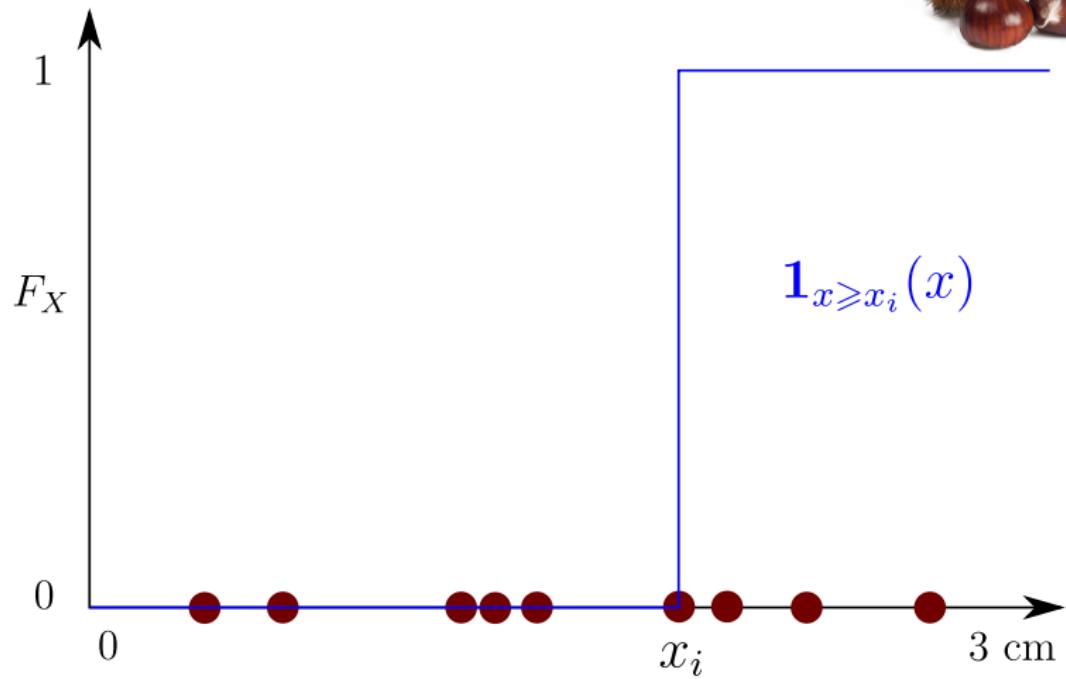
Inférence : fonction de répartition

X : v.a. réelle représentant la taille d'une châtaigne



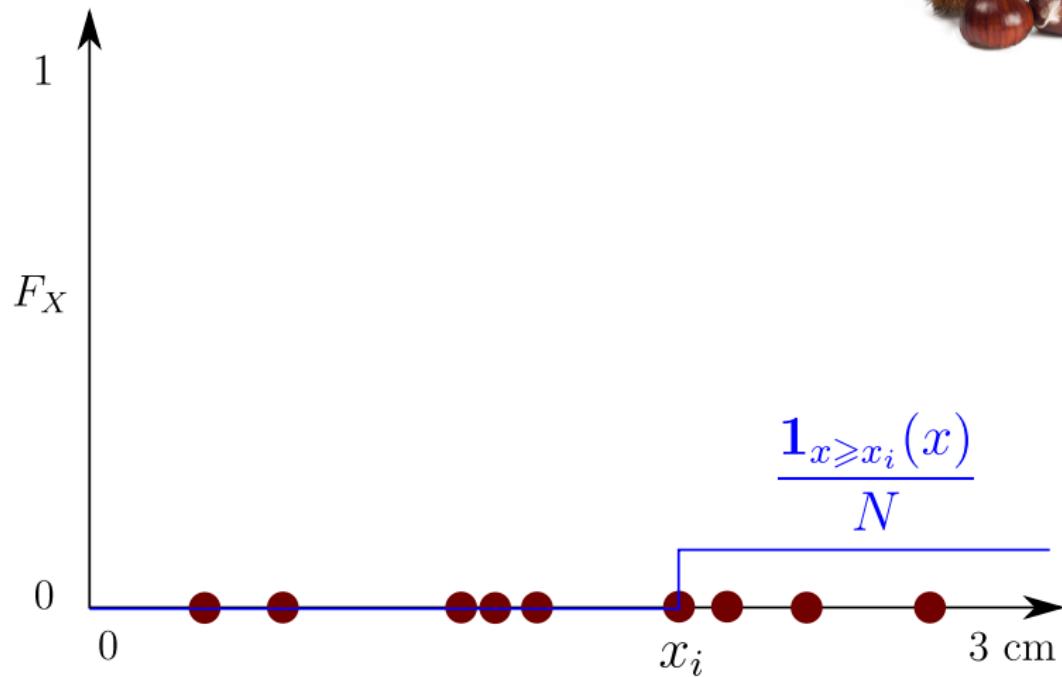
Inférence : fonction de répartition

X : v.a. réelle représentant la taille d'une châtaigne



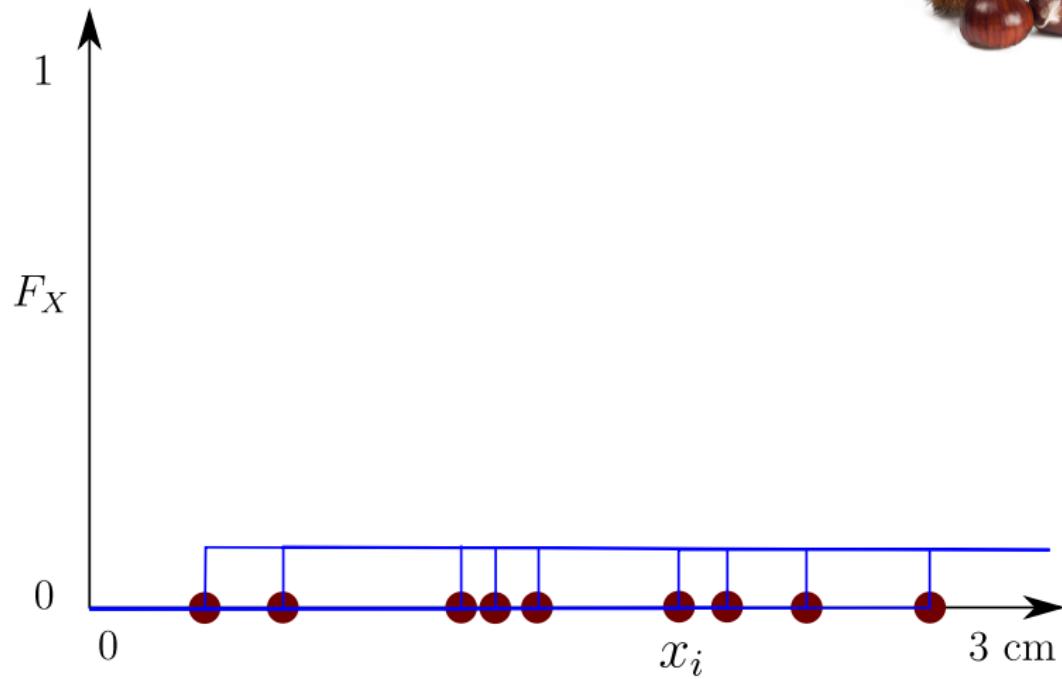
Inférence : fonction de répartition

X : v.a. réelle représentant la taille d'une châtaigne



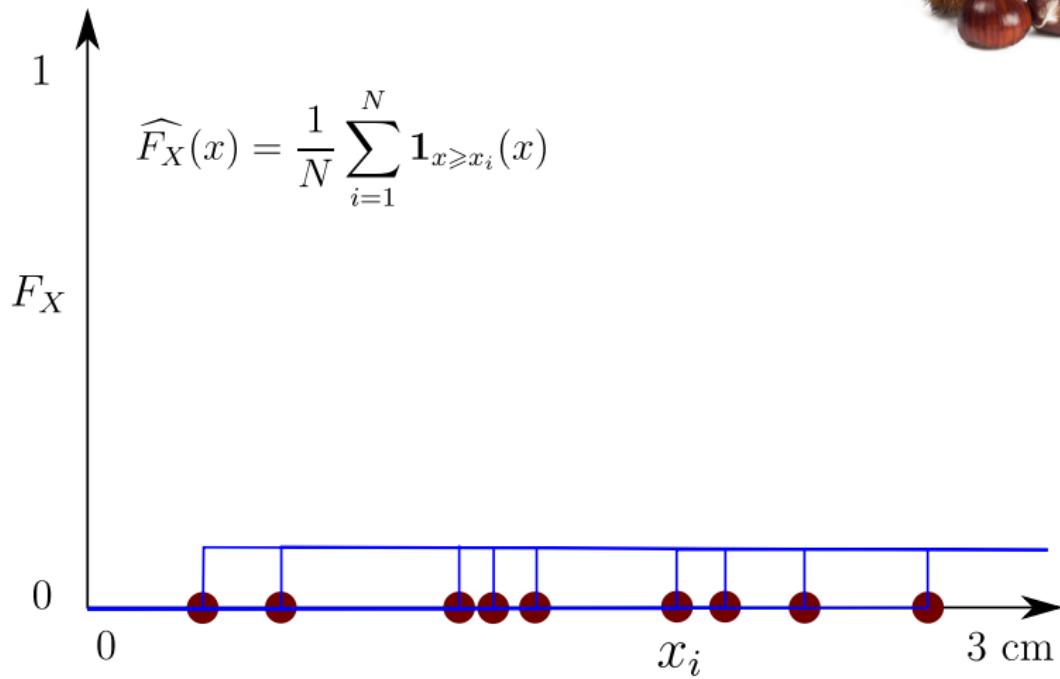
Inférence : fonction de répartition

X : v.a. réelle représentant la taille d'une châtaigne



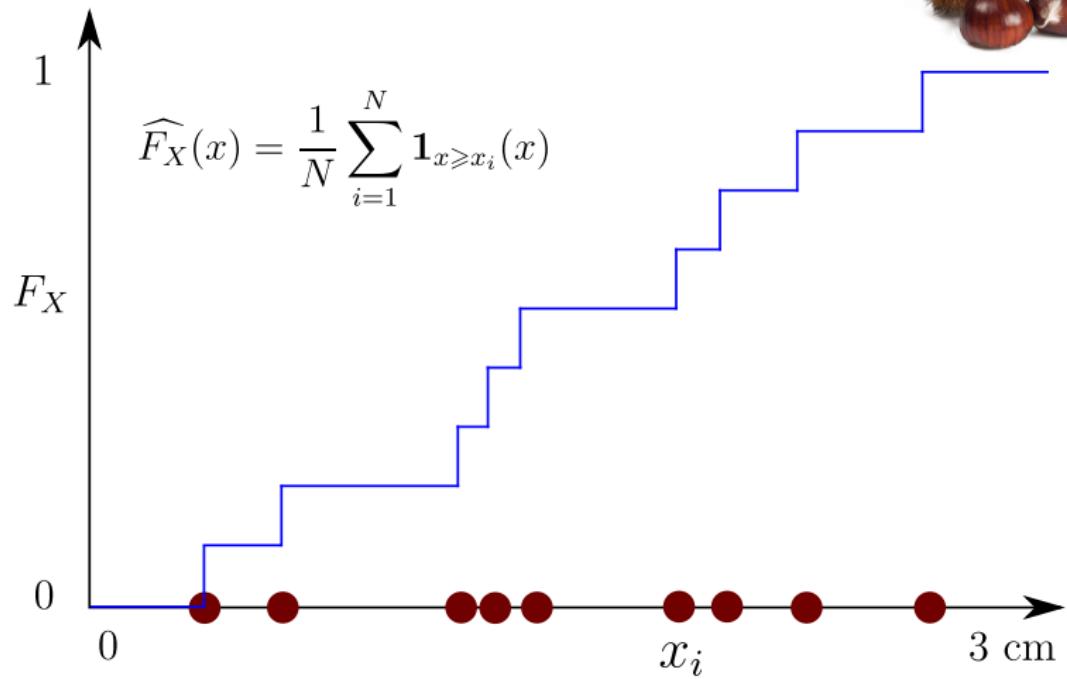
Inférence : fonction de répartition

X : v.a. réelle représentant la taille d'une châtaigne



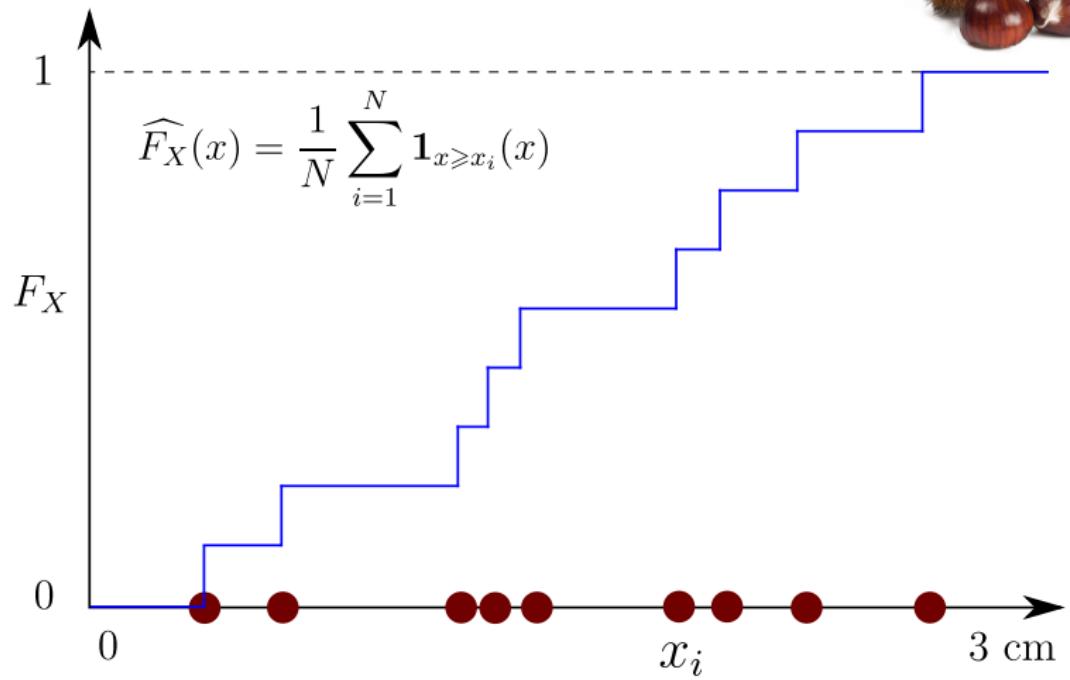
Inférence : fonction de répartition

X : v.a. réelle représentant la taille d'une châtaigne



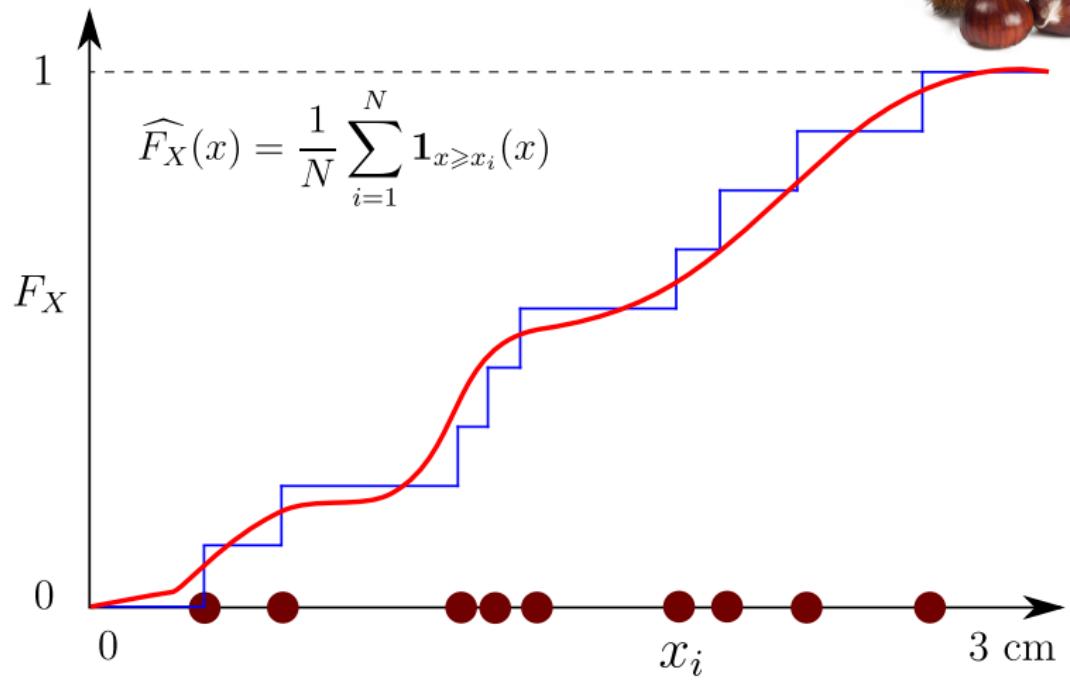
Inférence : fonction de répartition

X : v.a. réelle représentant la taille d'une châtaigne



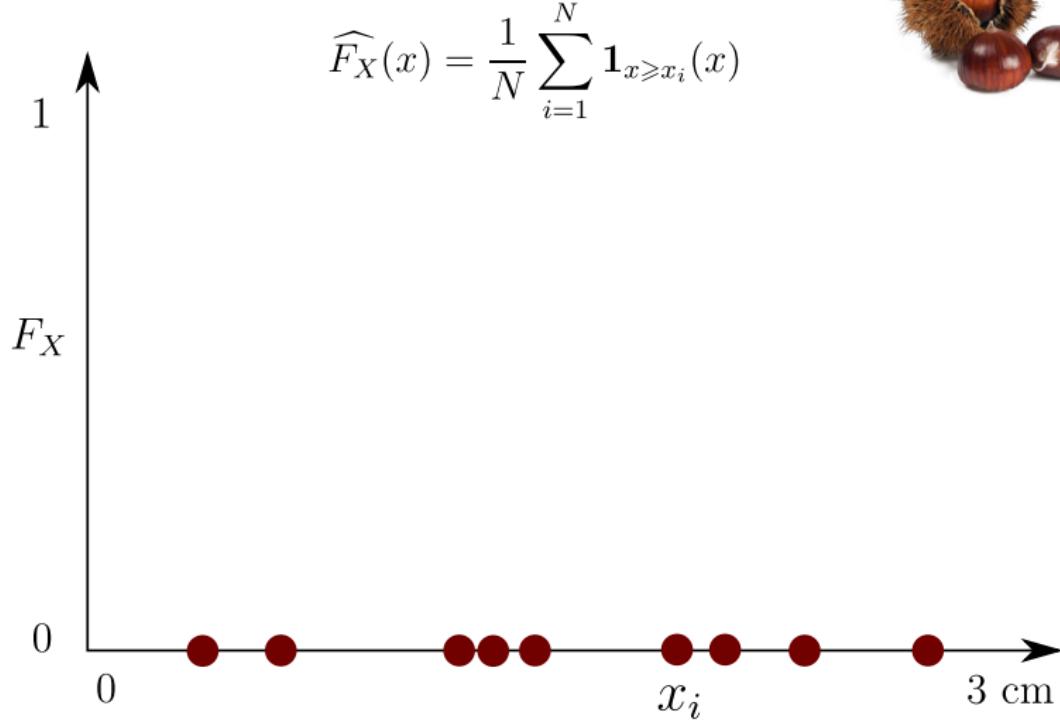
Inférence : fonction de répartition

X : v.a. réelle représentant la taille d'une châtaigne



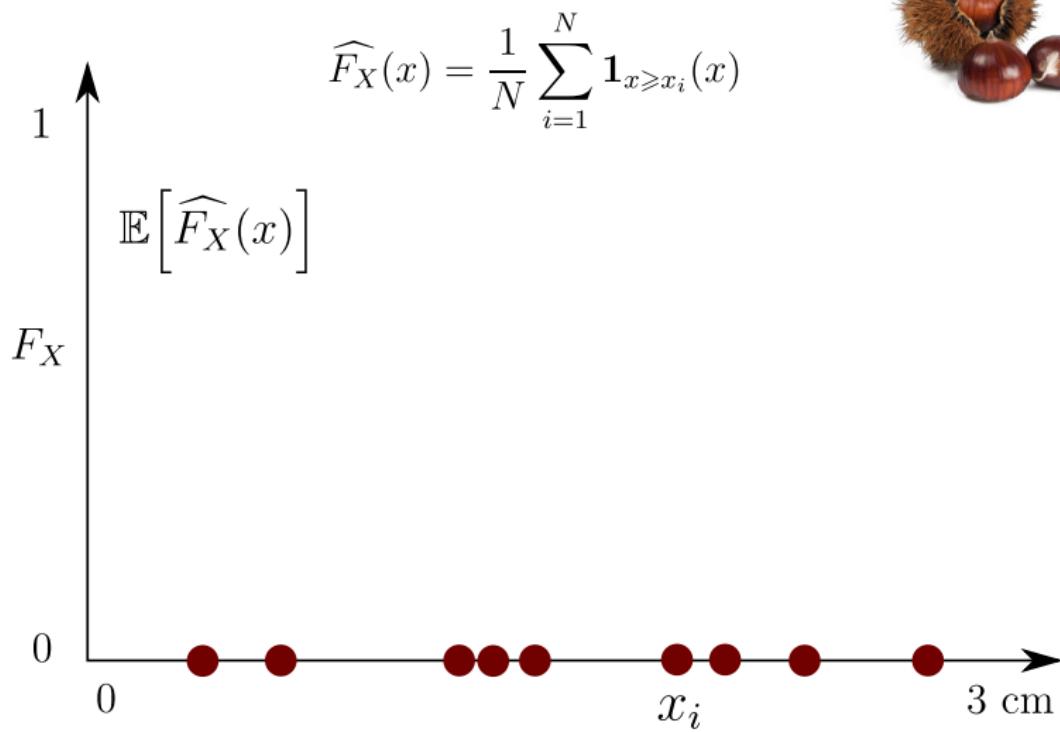
Inférence : fonction de répartition

X : v.a. réelle représentant la taille d'une châtaigne



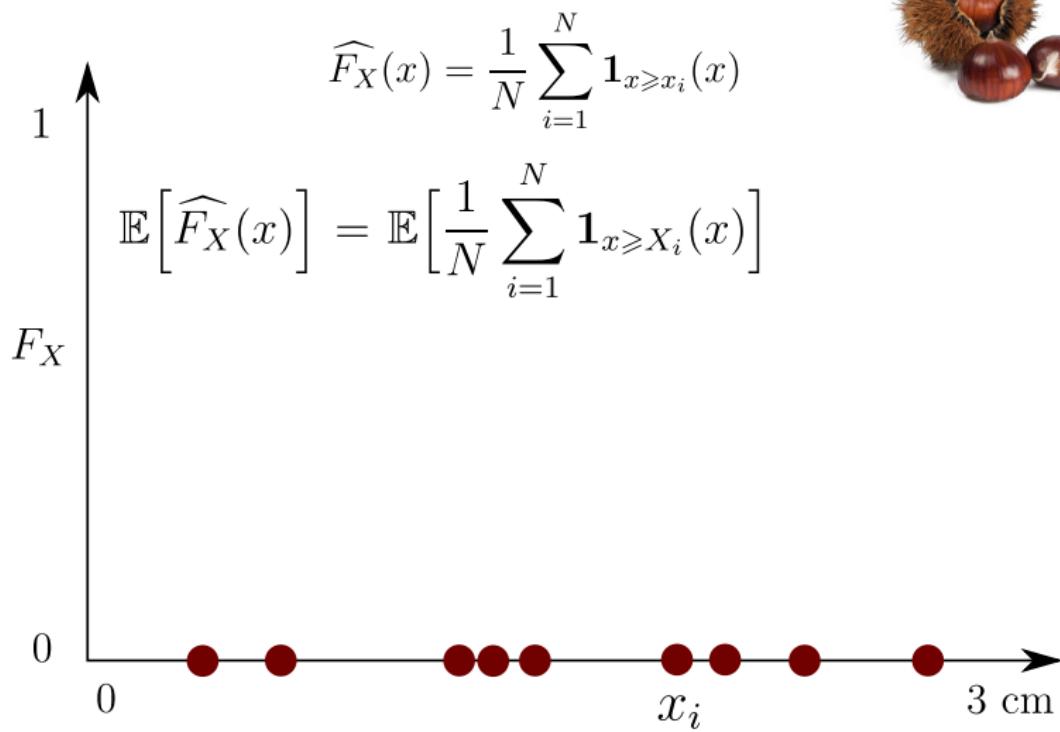
Inférence : fonction de répartition

X : v.a. réelle représentant la taille d'une châtaigne



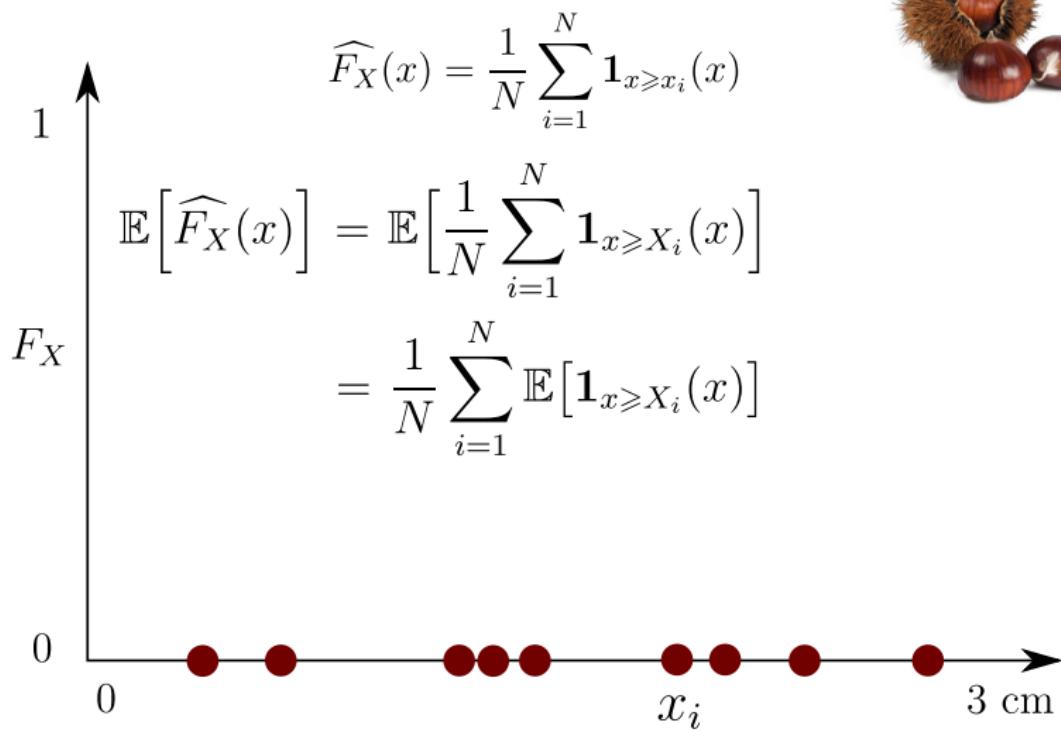
Inférence : fonction de répartition

X : v.a. réelle représentant la taille d'une châtaigne



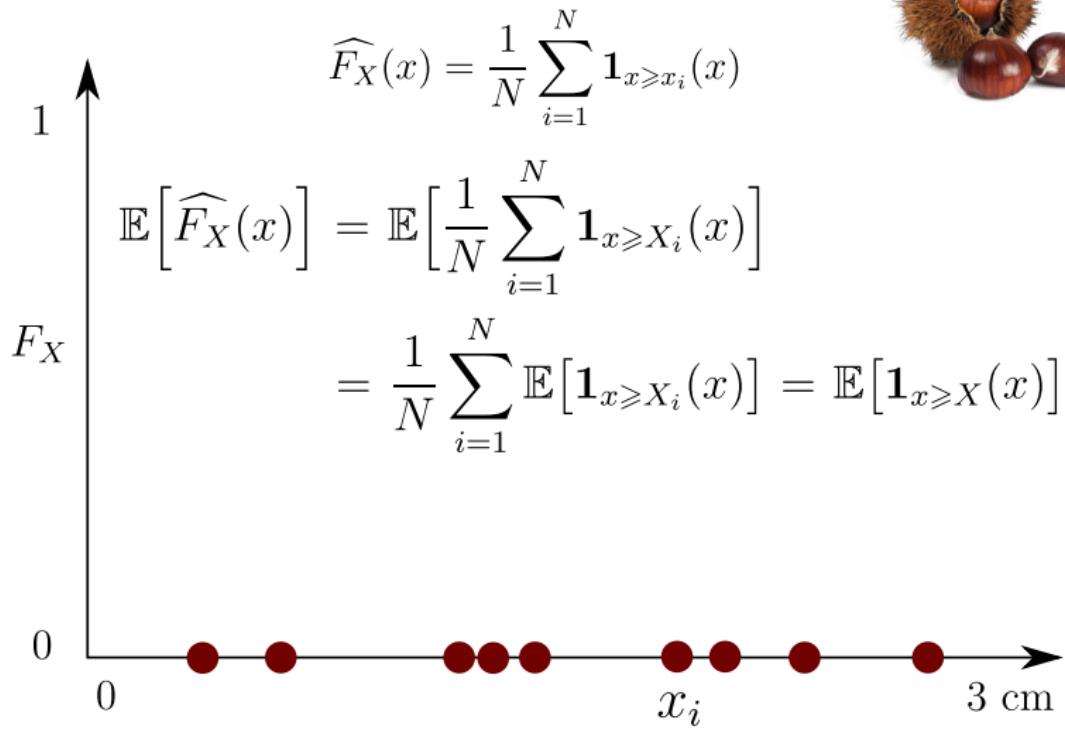
Inférence : fonction de répartition

X : v.a. réelle représentant la taille d'une châtaigne



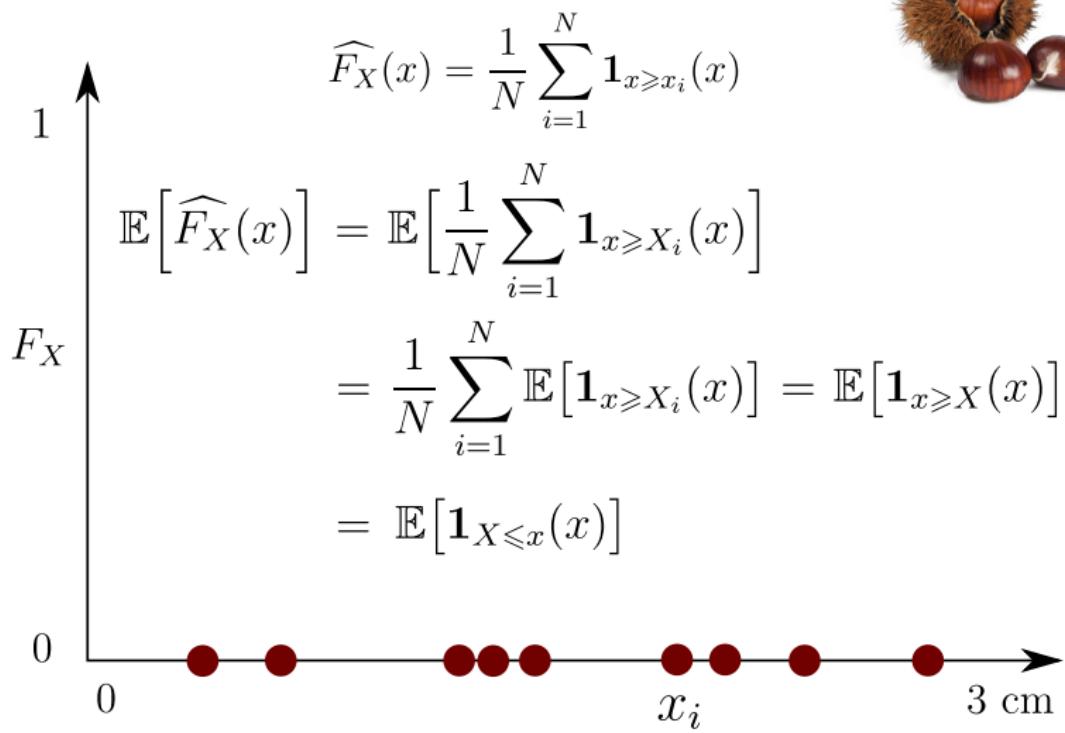
Inférence : fonction de répartition

X : v.a. réelle représentant la taille d'une châtaigne



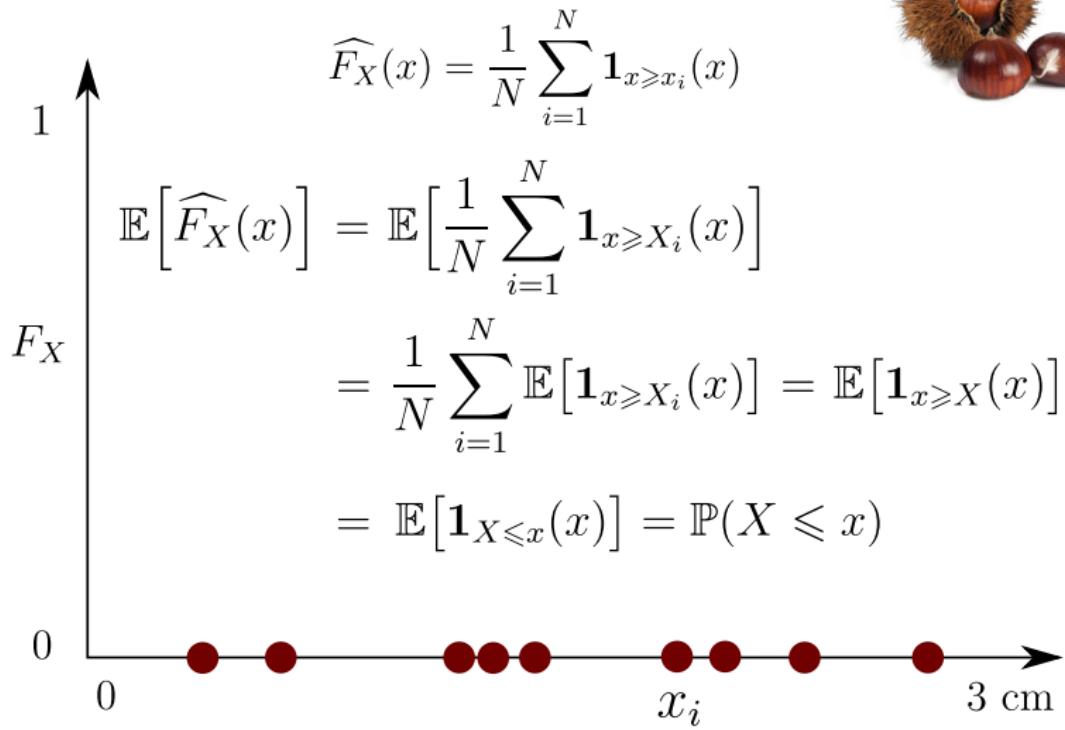
Inférence : fonction de répartition

X : v.a. réelle représentant la taille d'une châtaigne



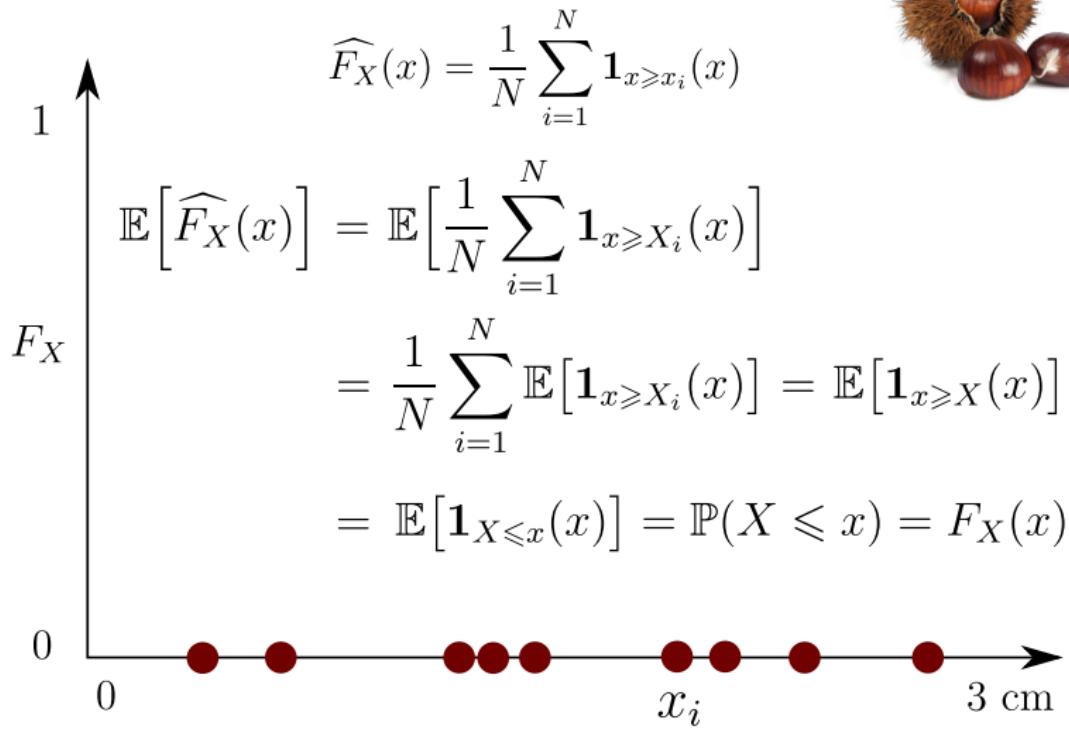
Inférence : fonction de répartition

X : v.a. réelle représentant la taille d'une châtaigne



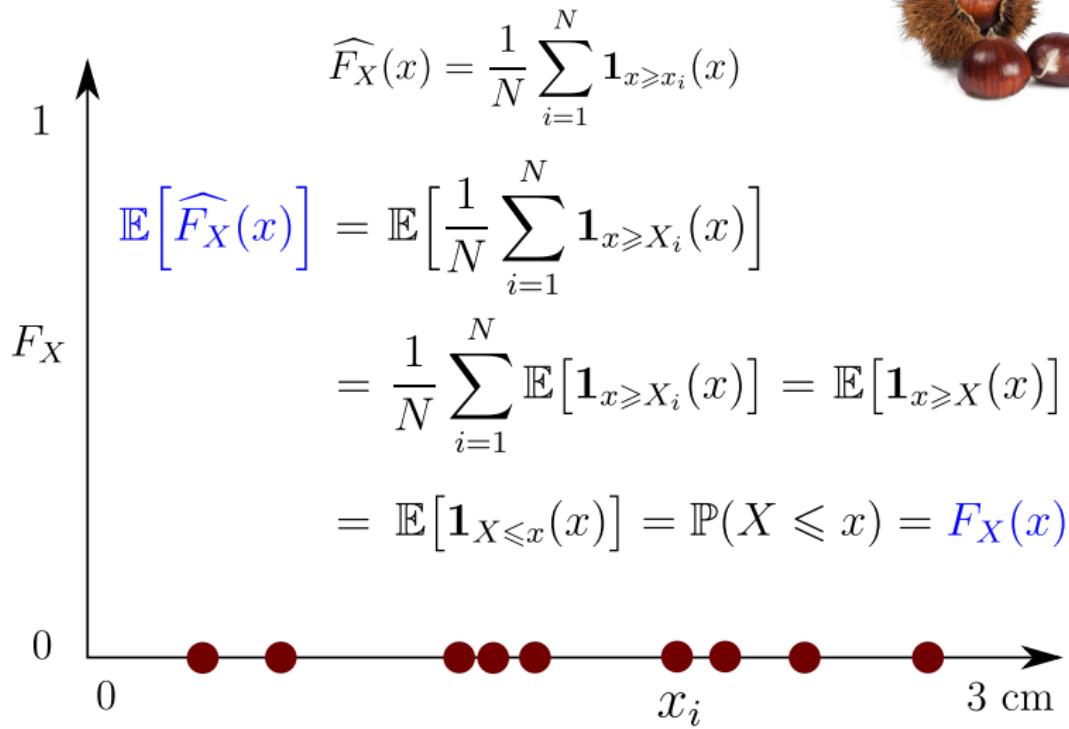
Inférence : fonction de répartition

X : v.a. réelle représentant la taille d'une châtaigne



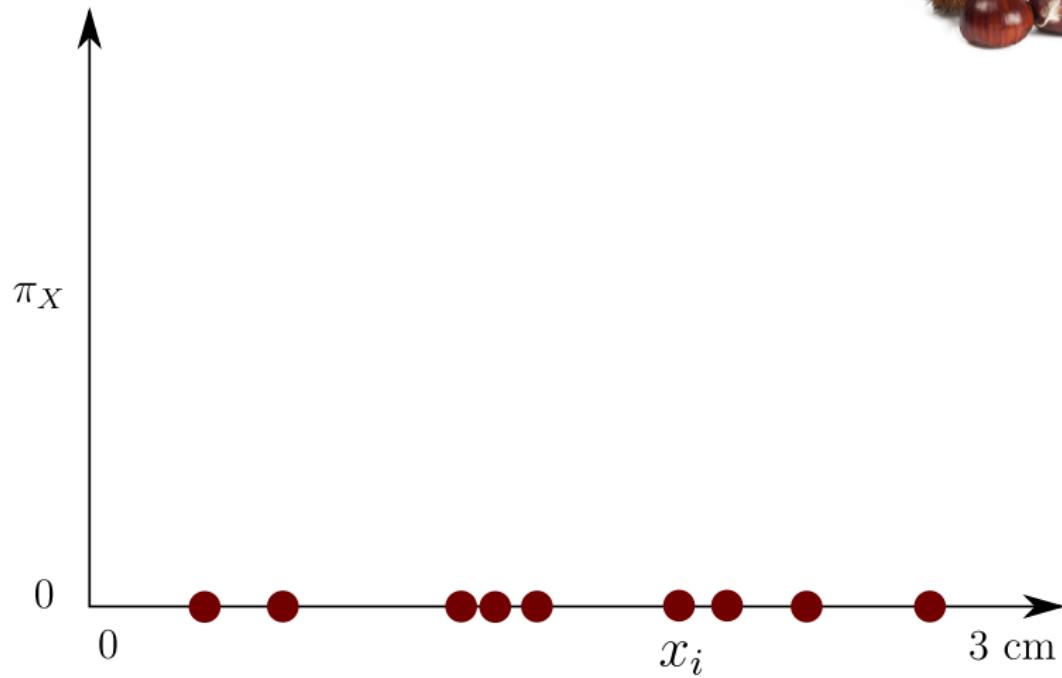
Inférence : fonction de répartition

X : v.a. réelle représentant la taille d'une châtaigne



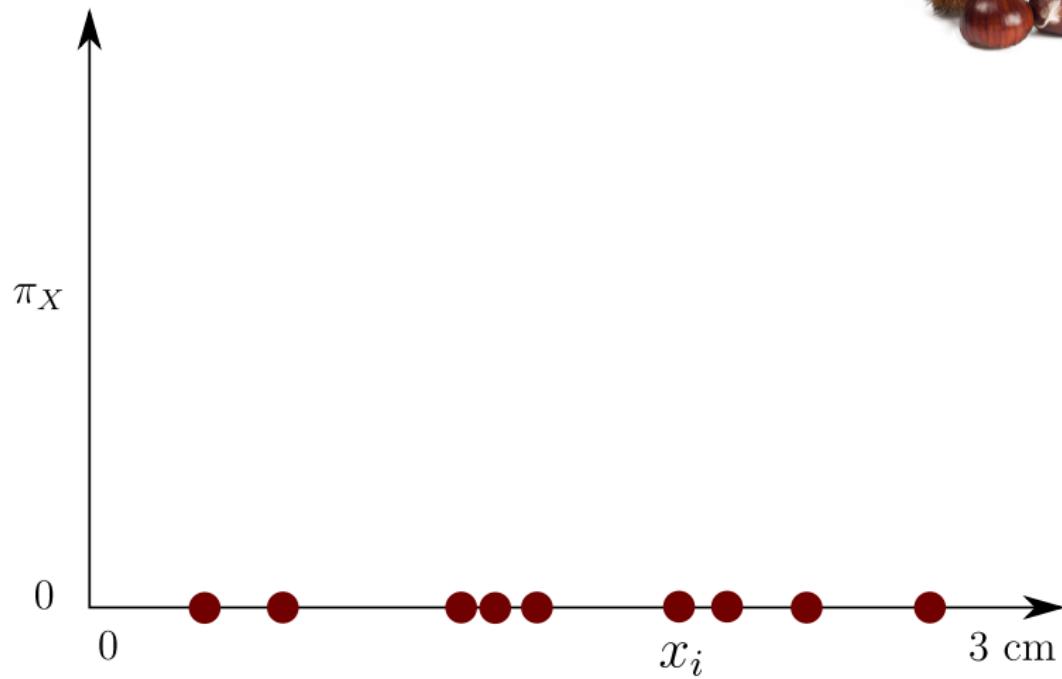
Inférence : densité de probabilité

X : v.a. réelle représentant la taille d'une châtaigne



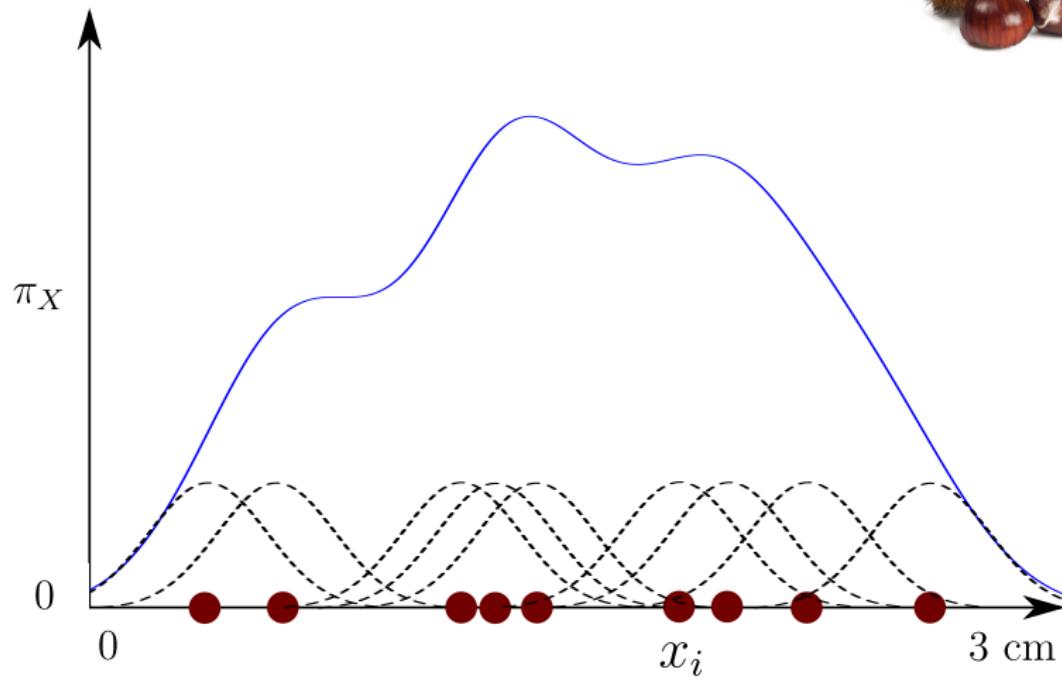
Inférence : densité de probabilité

X : v.a. réelle représentant la taille d'une châtaigne



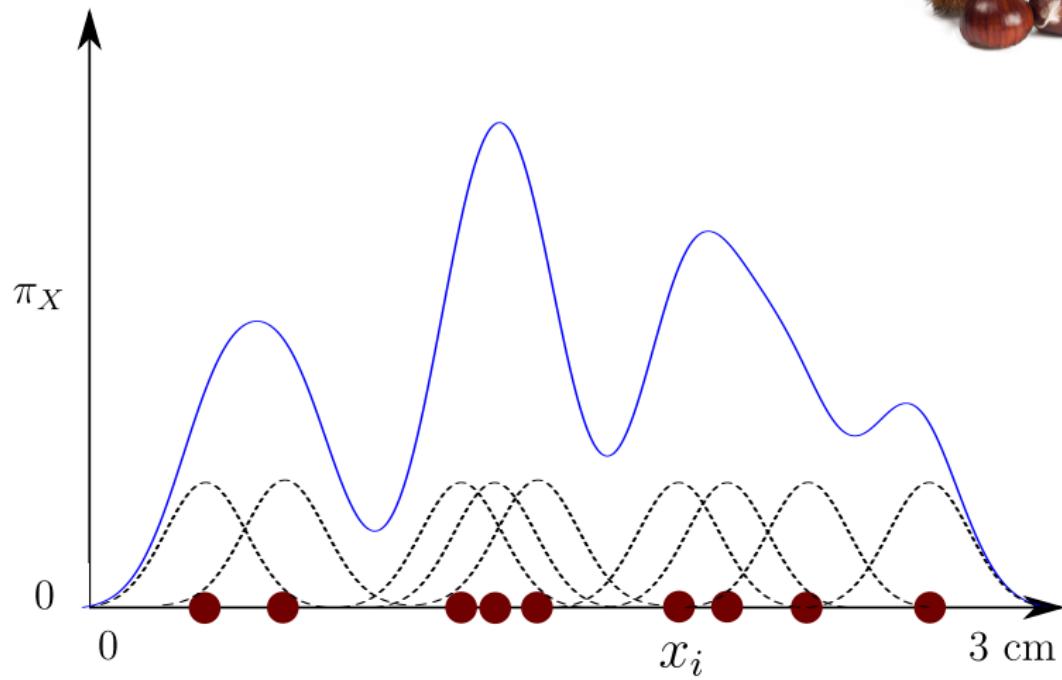
Inférence : densité de probabilité

X : v.a. réelle représentant la taille d'une châtaigne



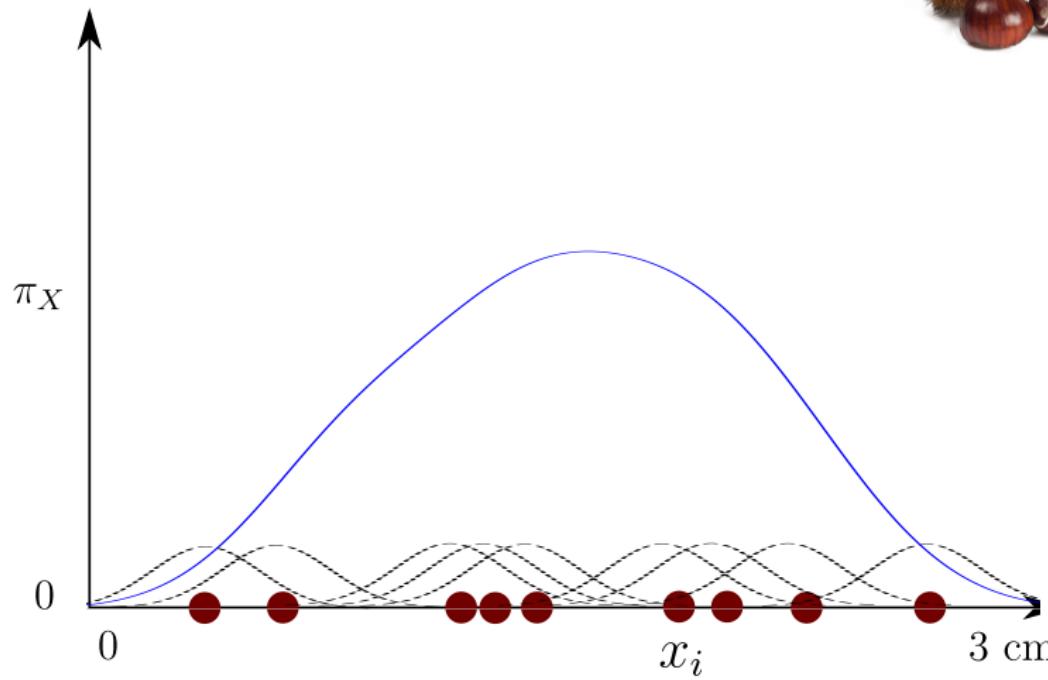
Inférence : densité de probabilité

X : v.a. réelle représentant la taille d'une châtaigne

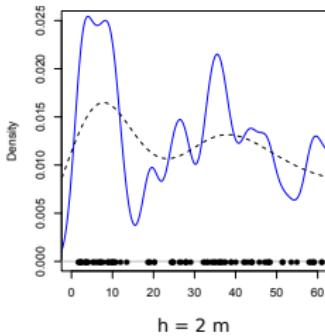
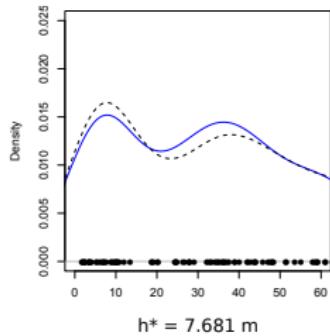
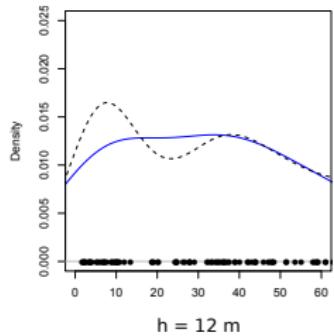


Inférence : densité de probabilité

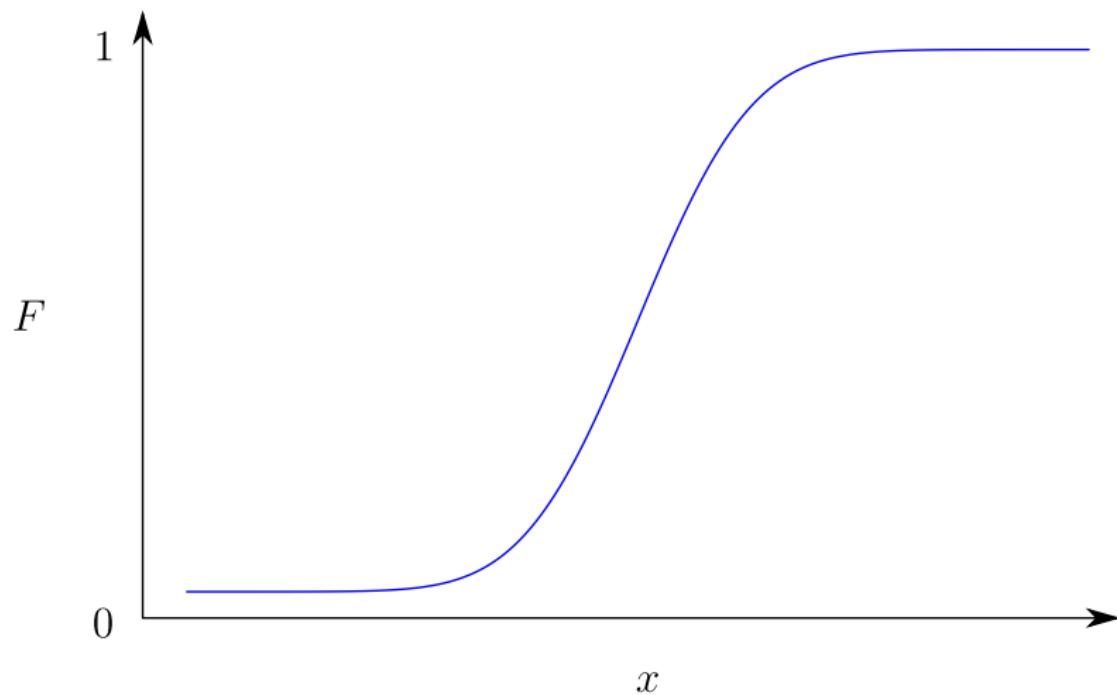
X : v.a. réelle représentant la taille d'une châtaigne



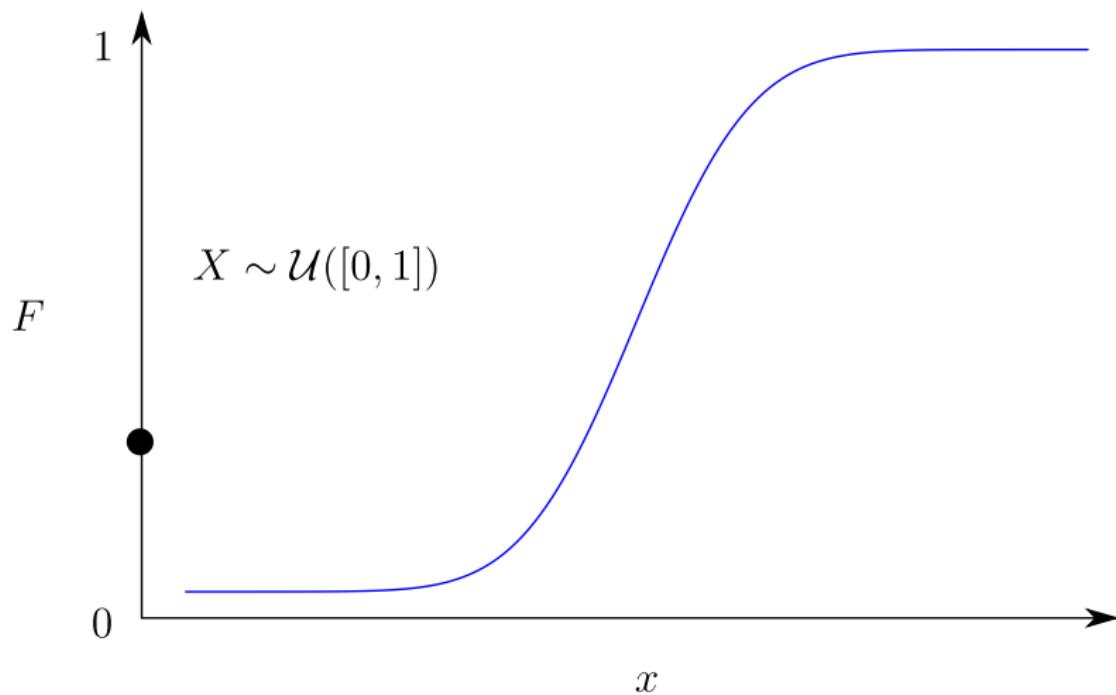
Inférence : densité de probabilité



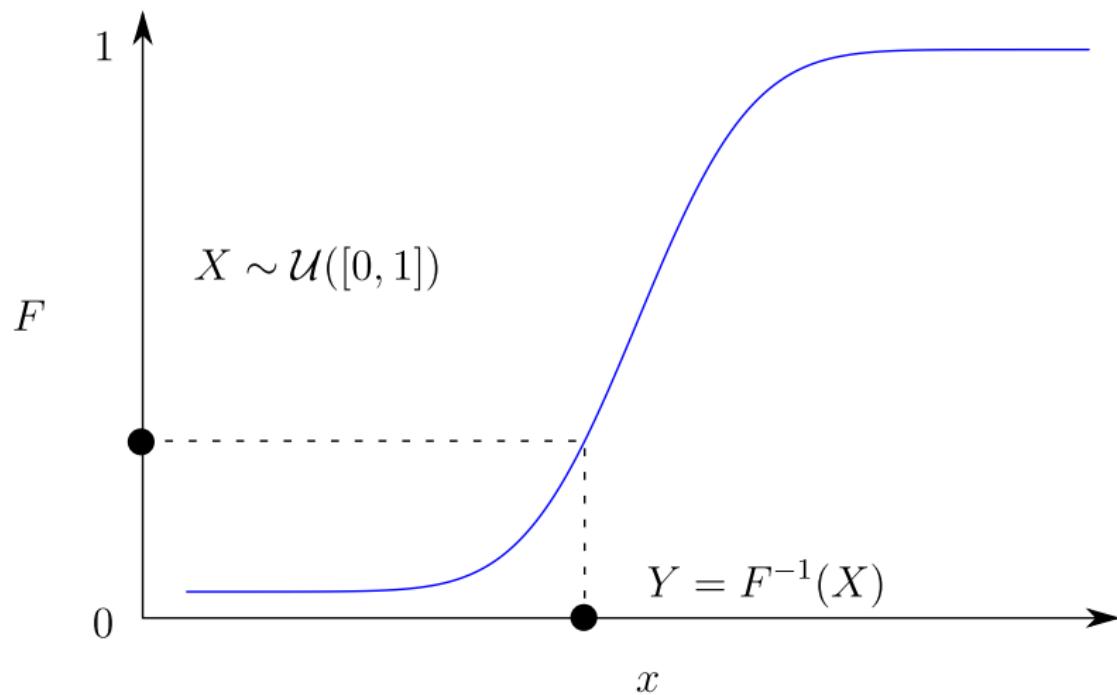
Simulation : fonction de répartition



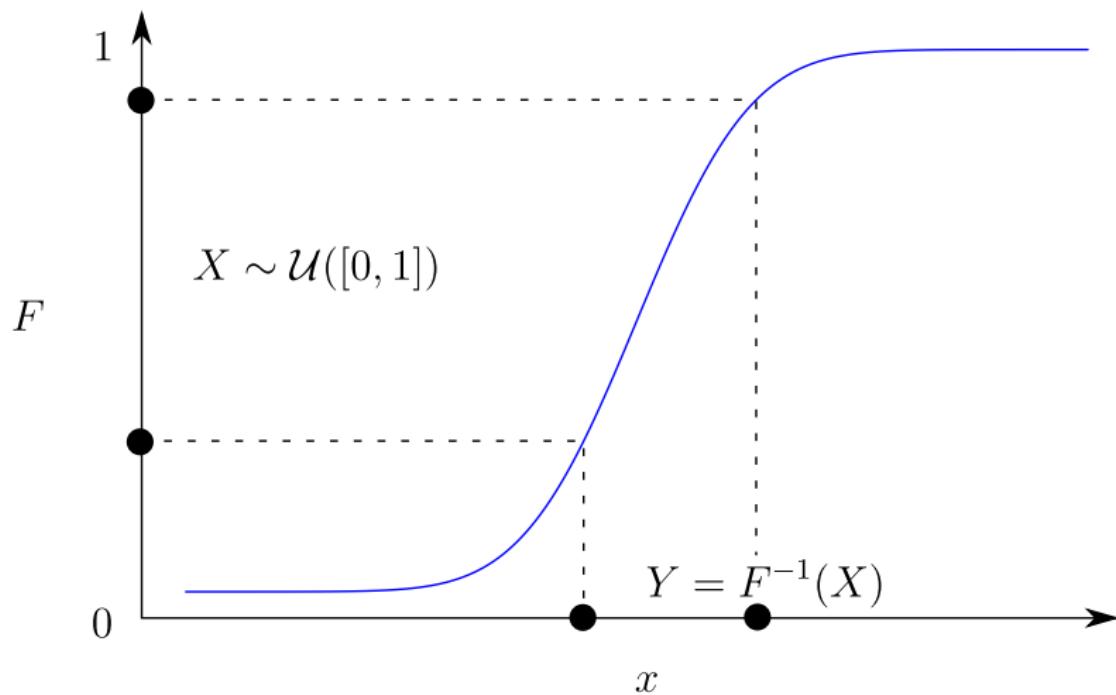
Simulation : fonction de répartition



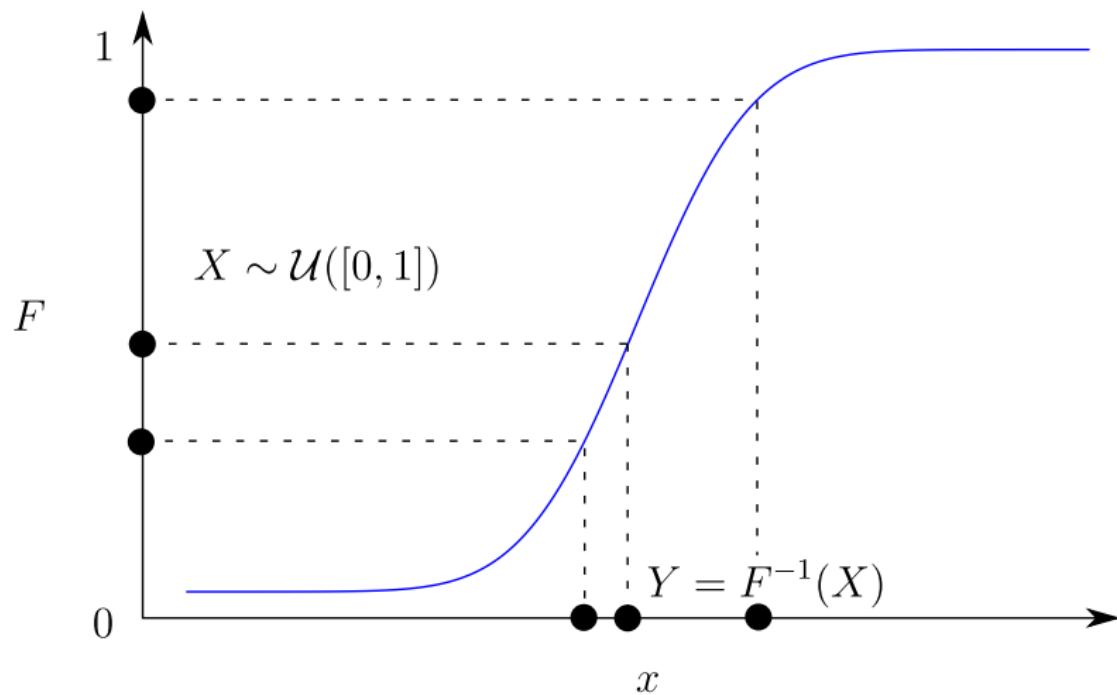
Simulation : fonction de répartition



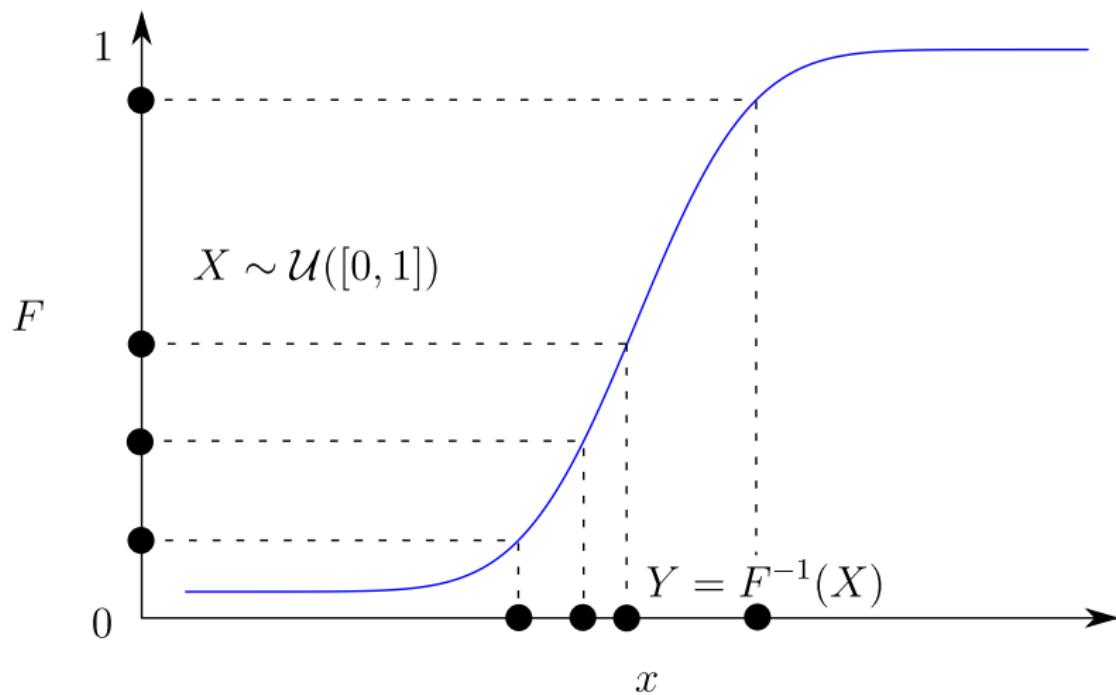
Simulation : fonction de répartition



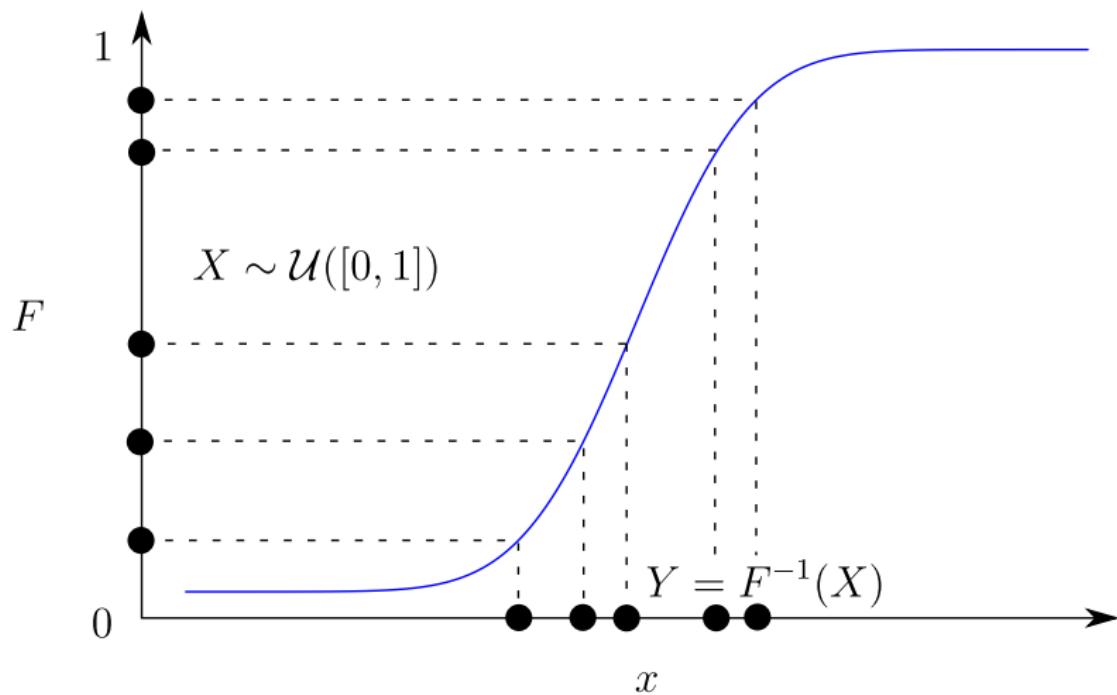
Simulation : fonction de répartition



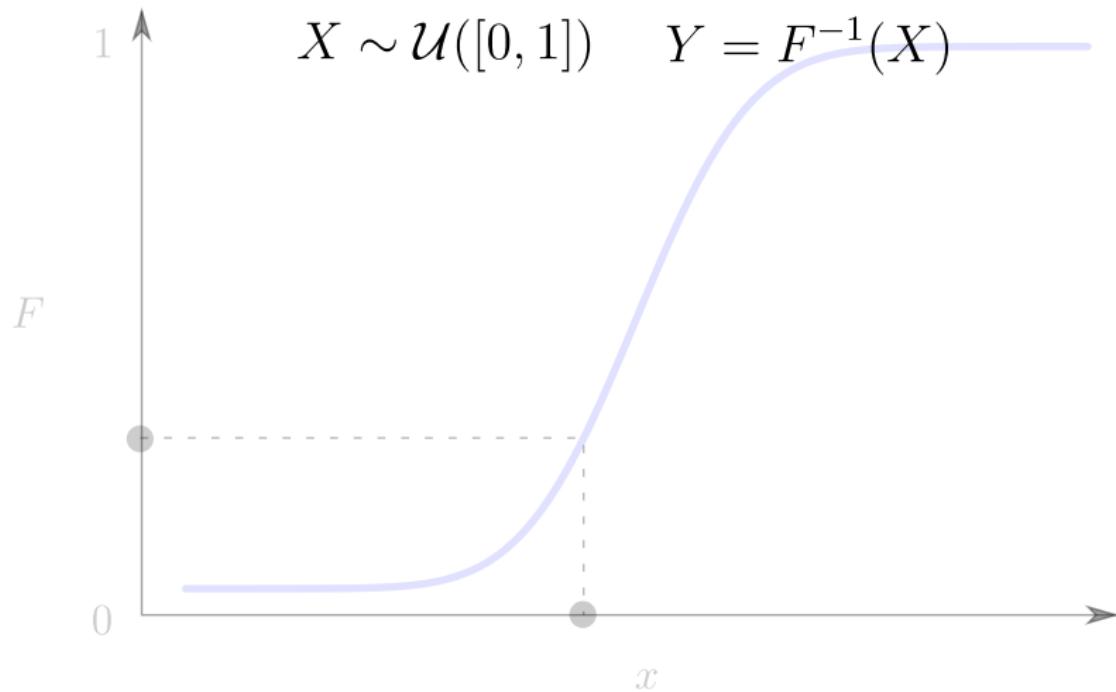
Simulation : fonction de répartition



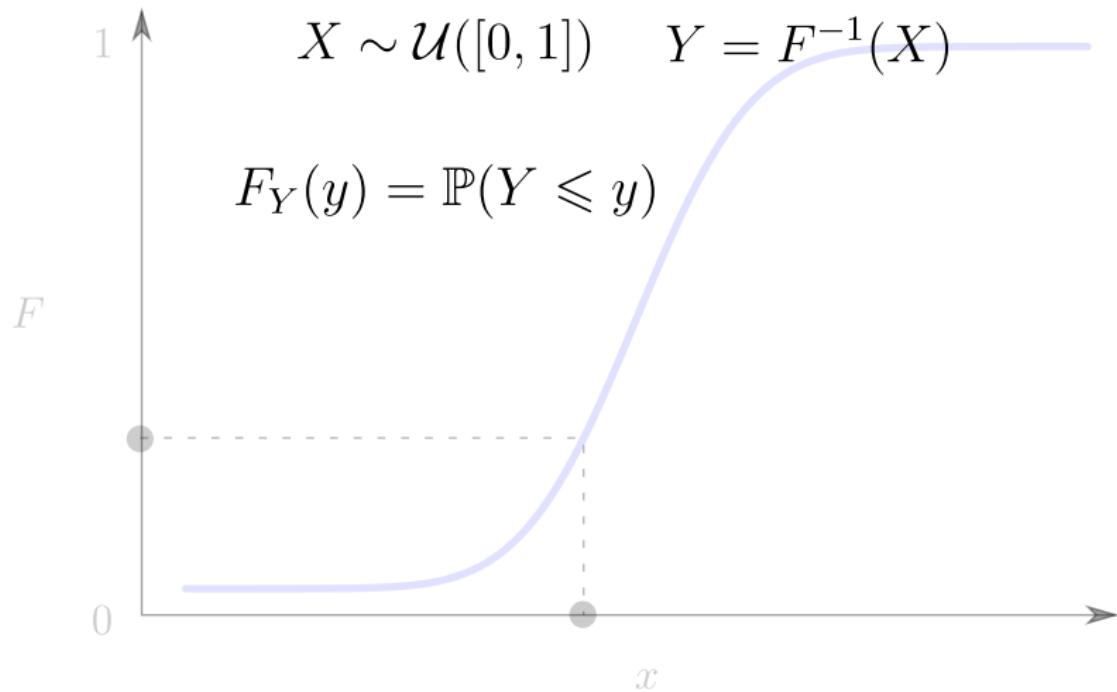
Simulation : fonction de répartition



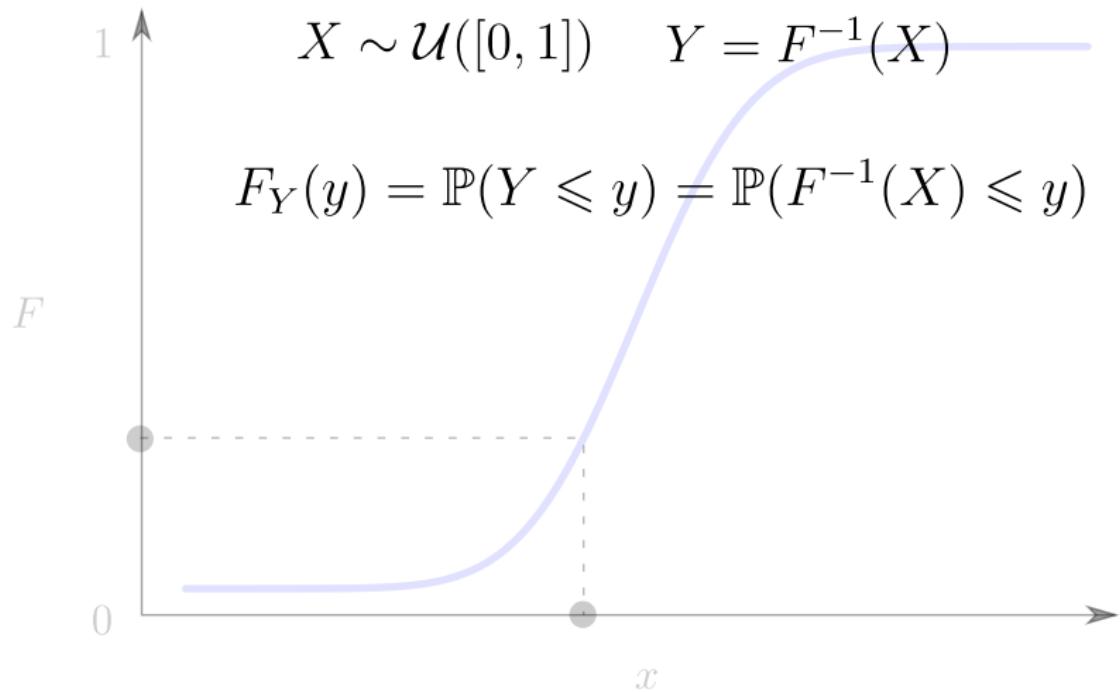
Simulation : fonction de répartition



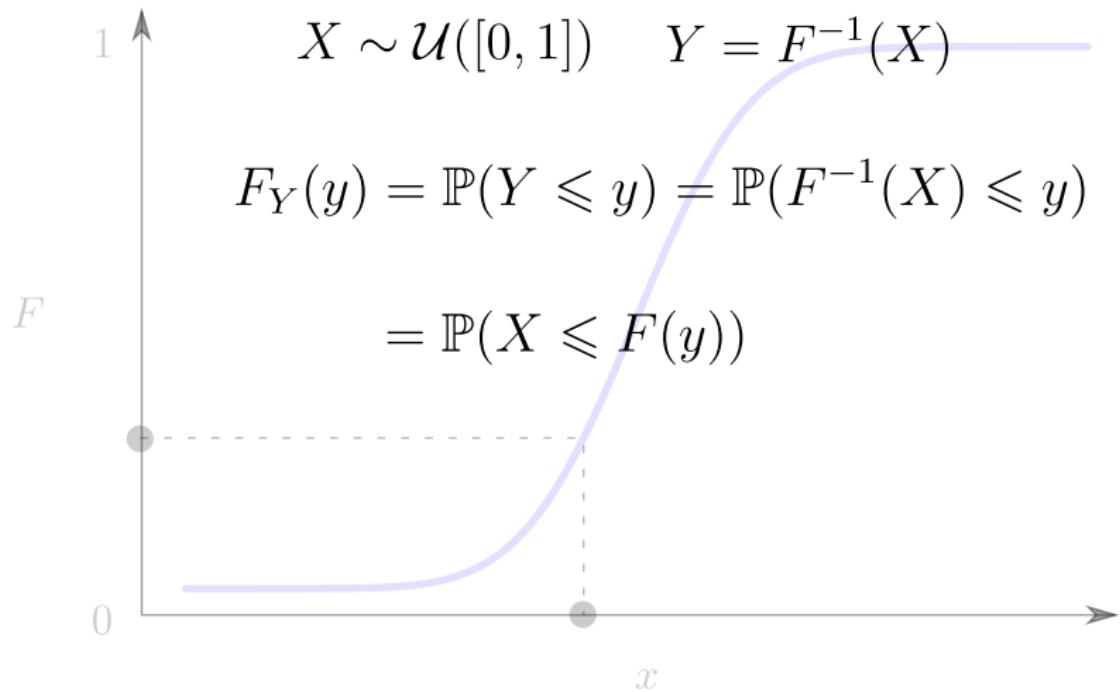
Simulation : fonction de répartition



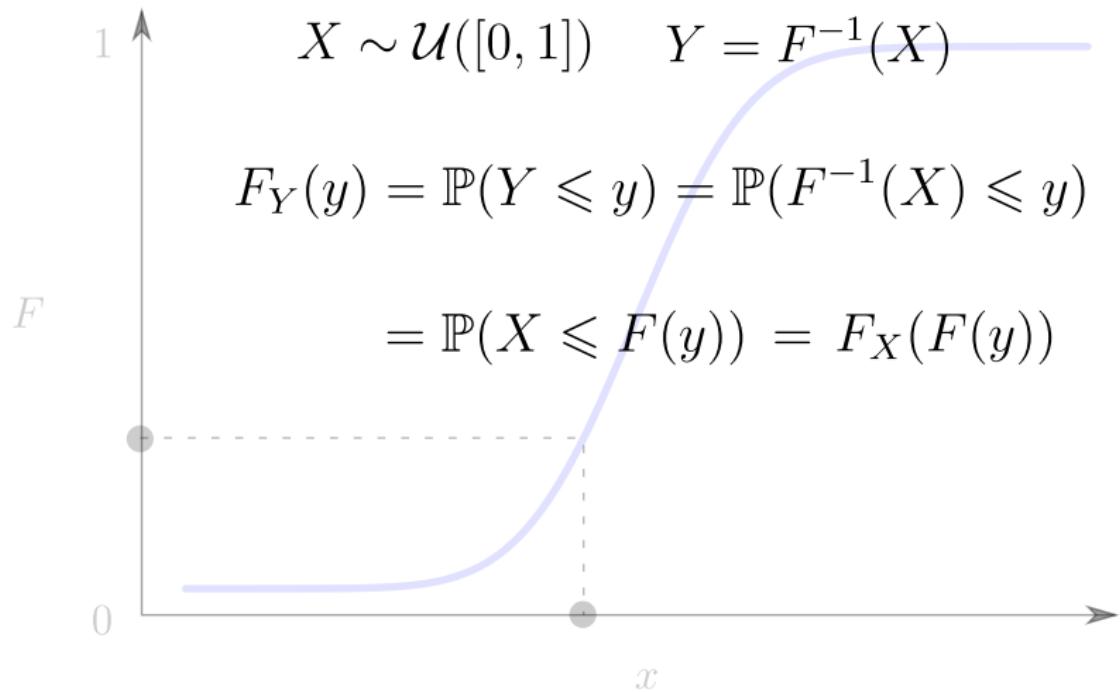
Simulation : fonction de répartition



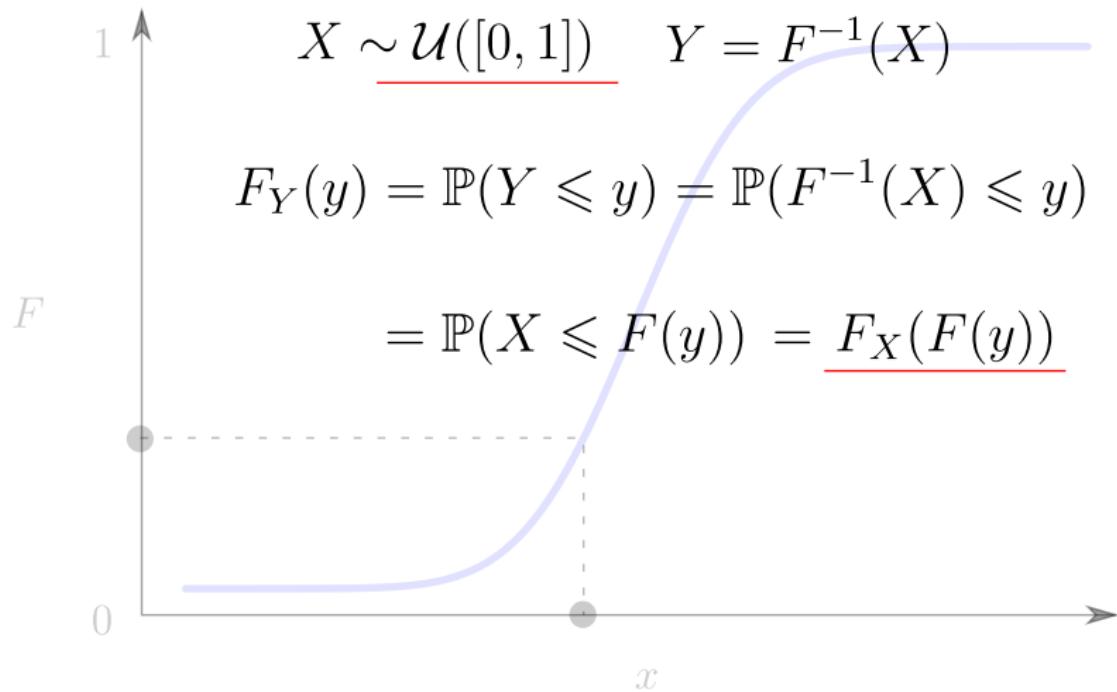
Simulation : fonction de répartition



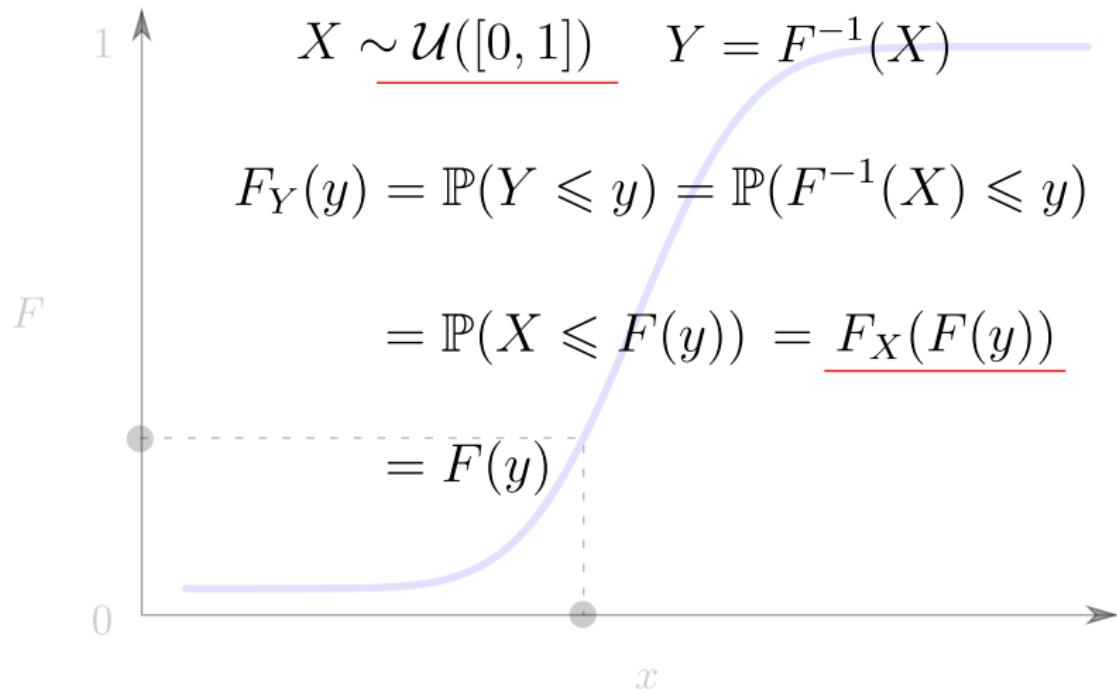
Simulation : fonction de répartition



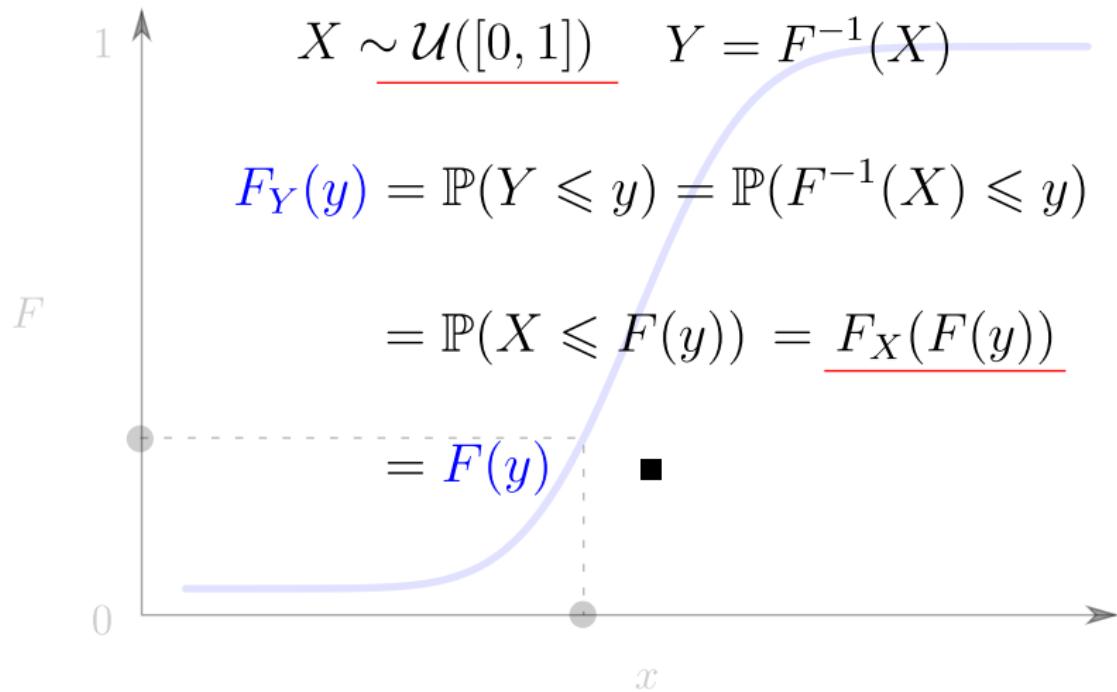
Simulation : fonction de répartition



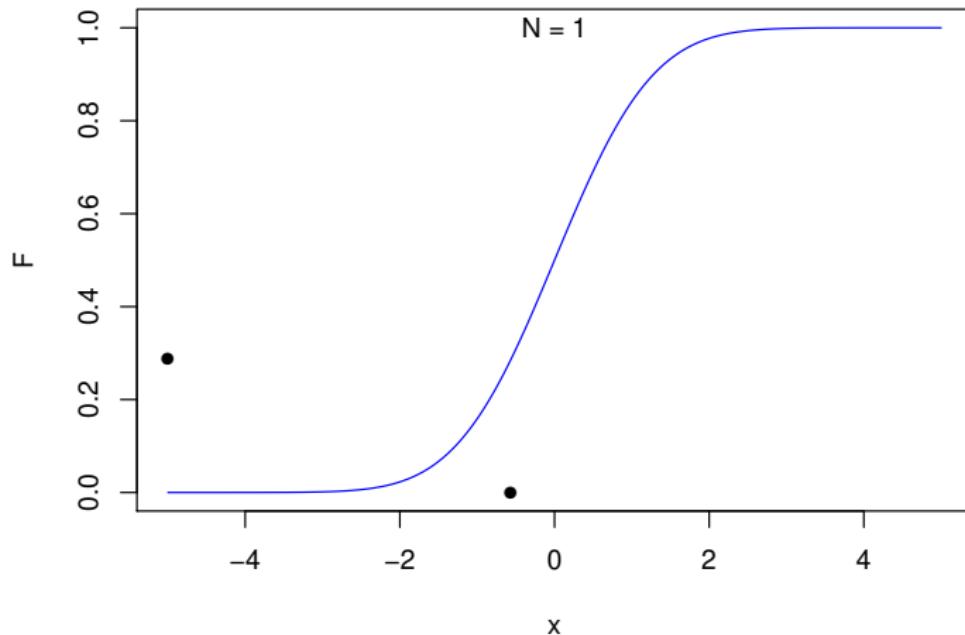
Simulation : fonction de répartition



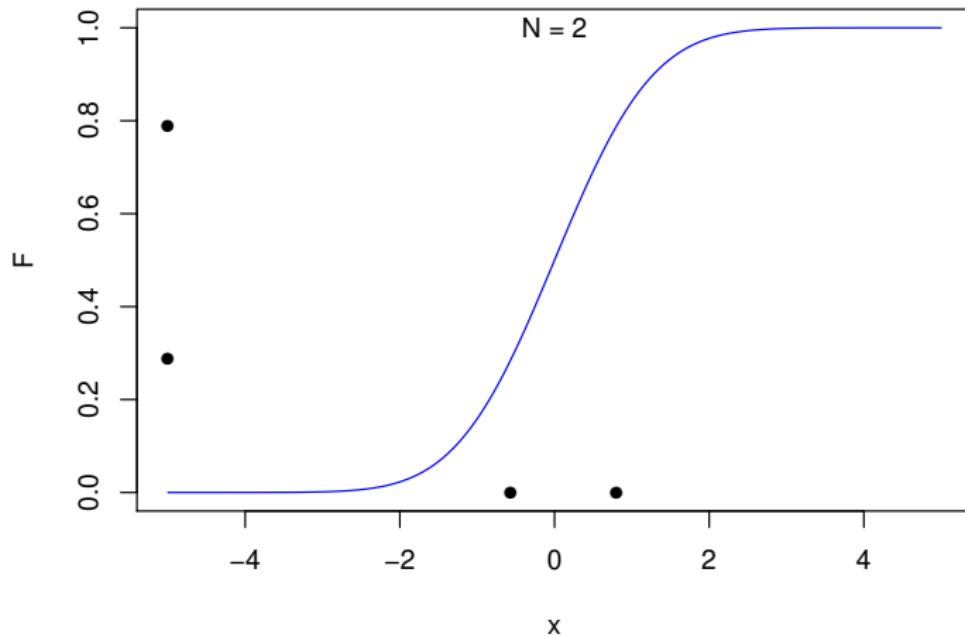
Simulation : fonction de répartition



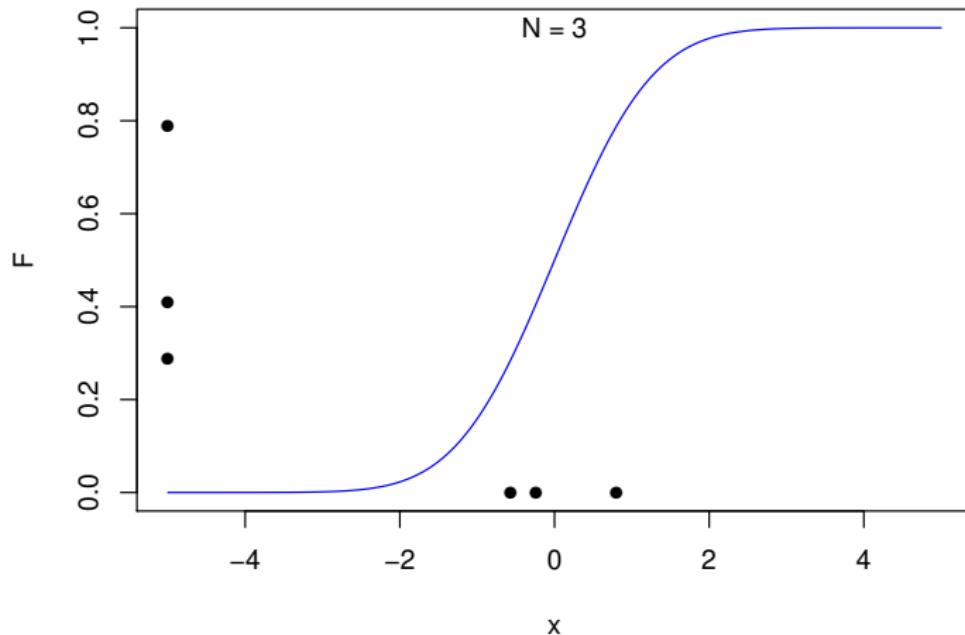
Simulation : fonction de répartition



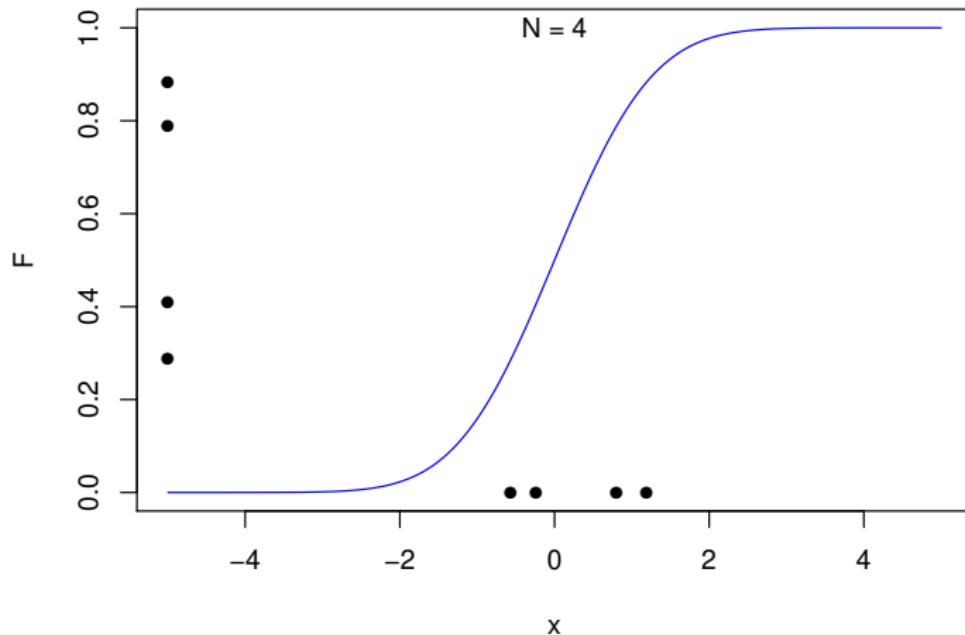
Simulation : fonction de répartition



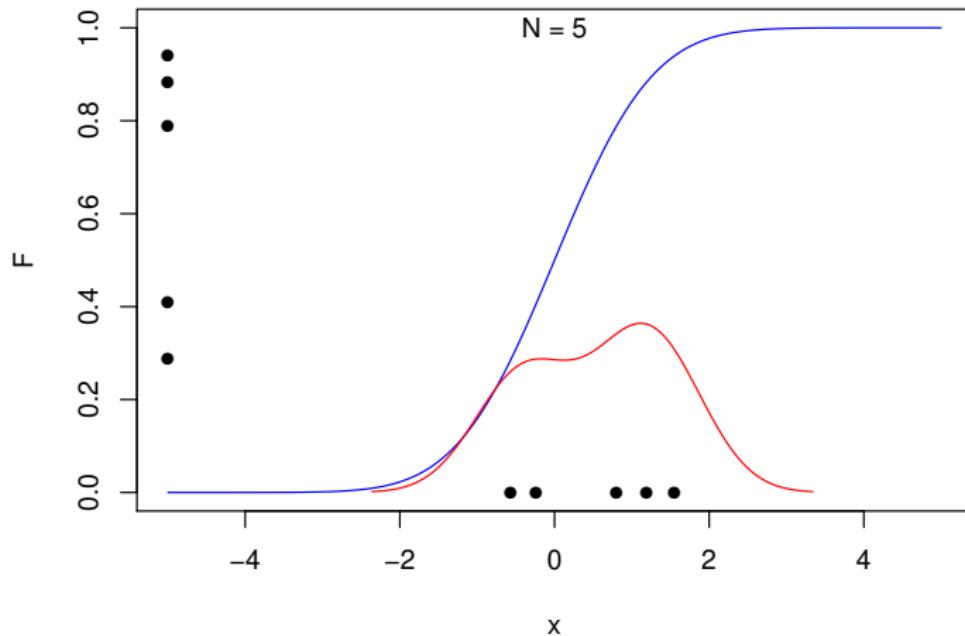
Simulation : fonction de répartition



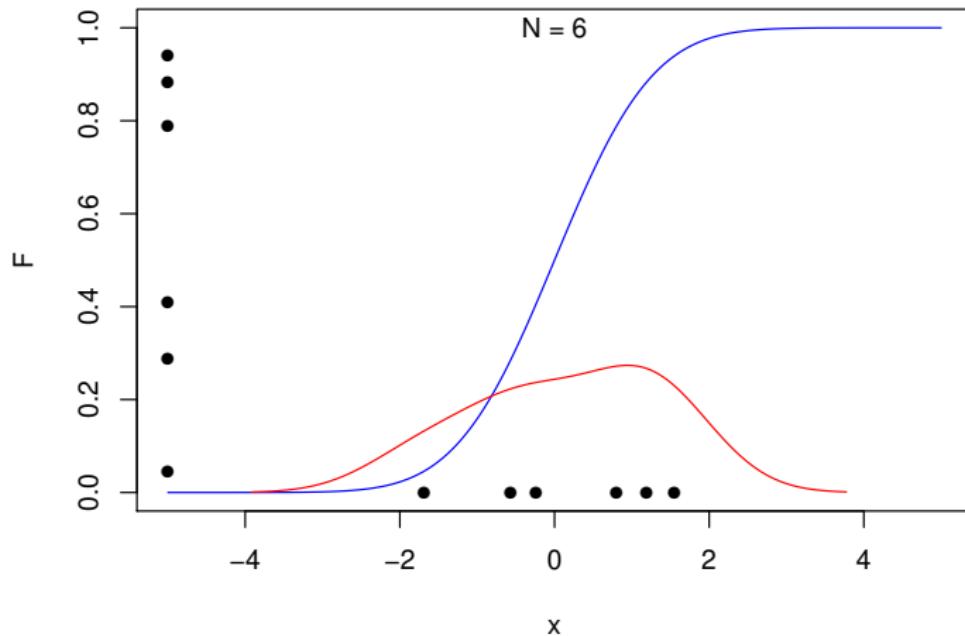
Simulation : fonction de répartition



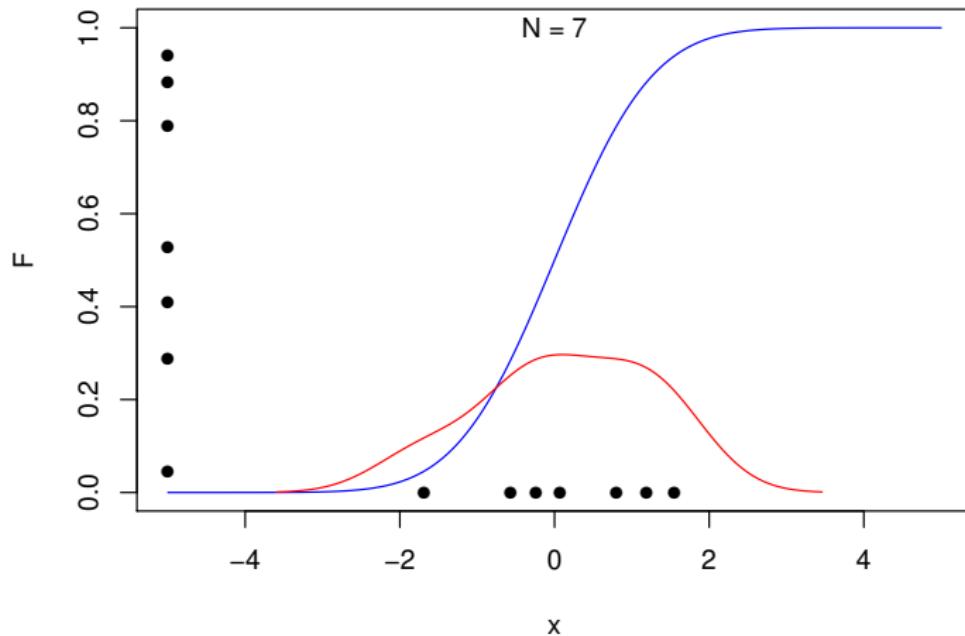
Simulation : fonction de répartition



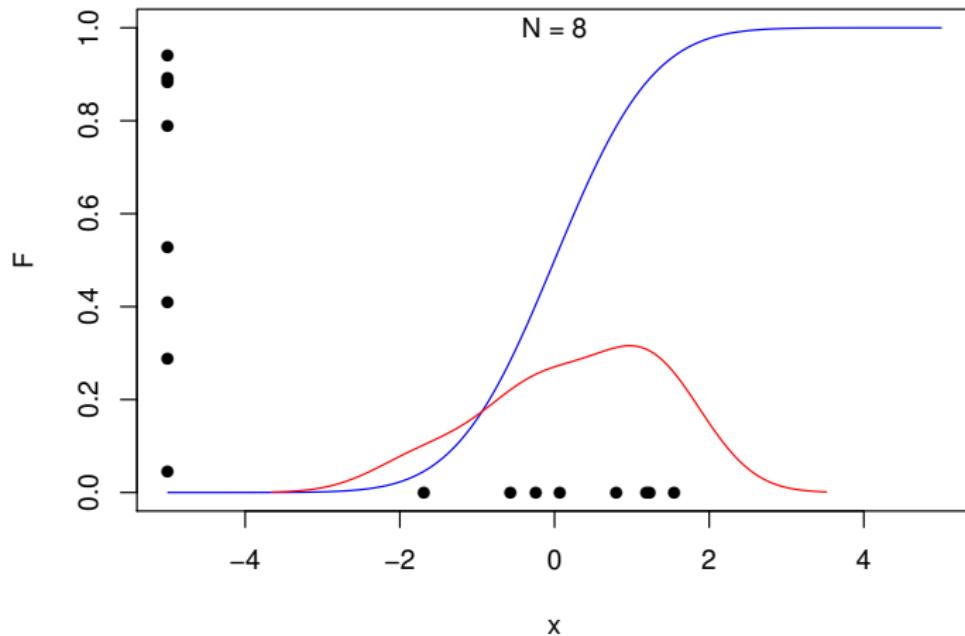
Simulation : fonction de répartition



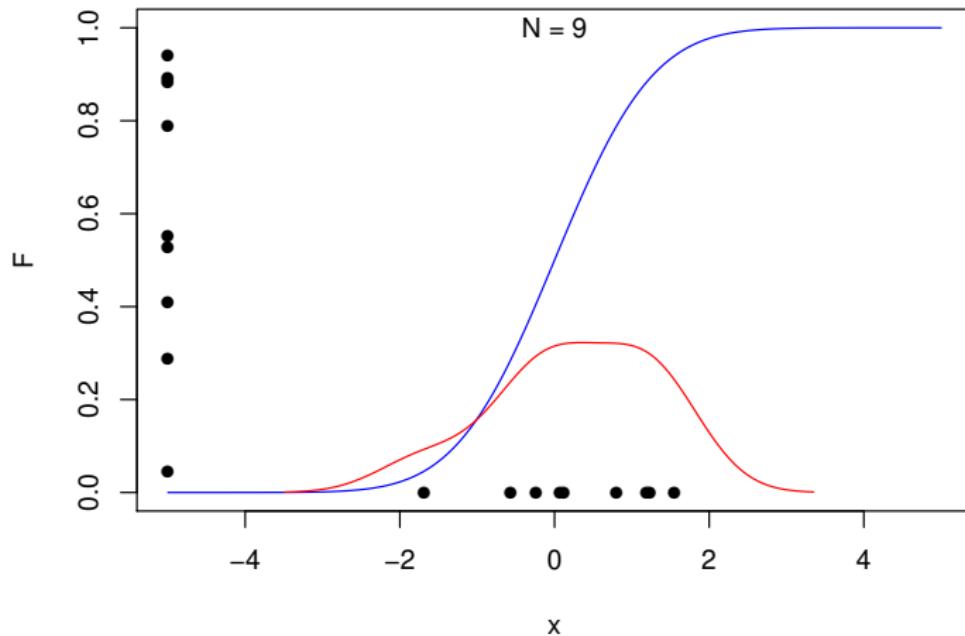
Simulation : fonction de répartition



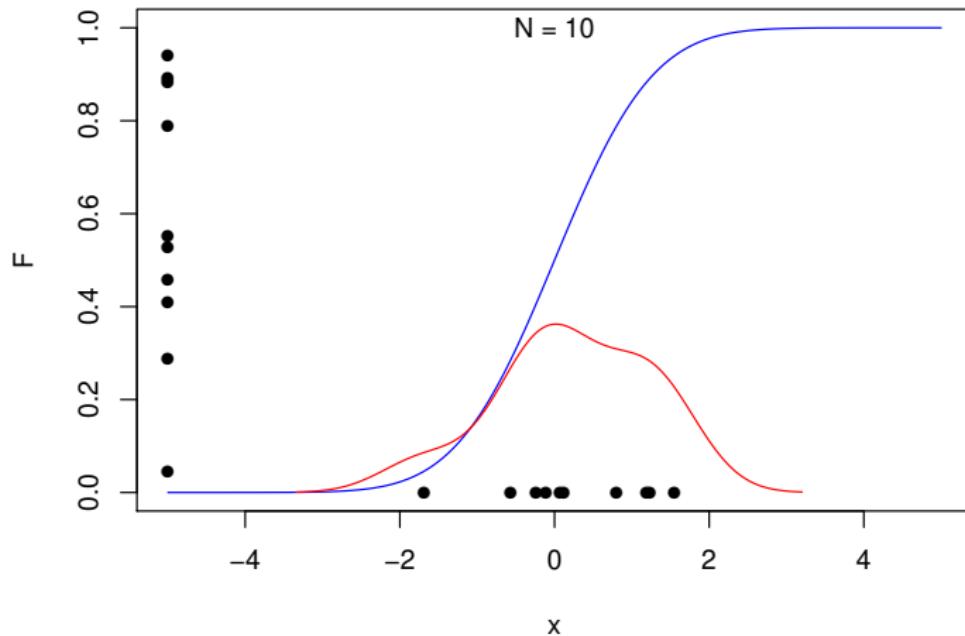
Simulation : fonction de répartition



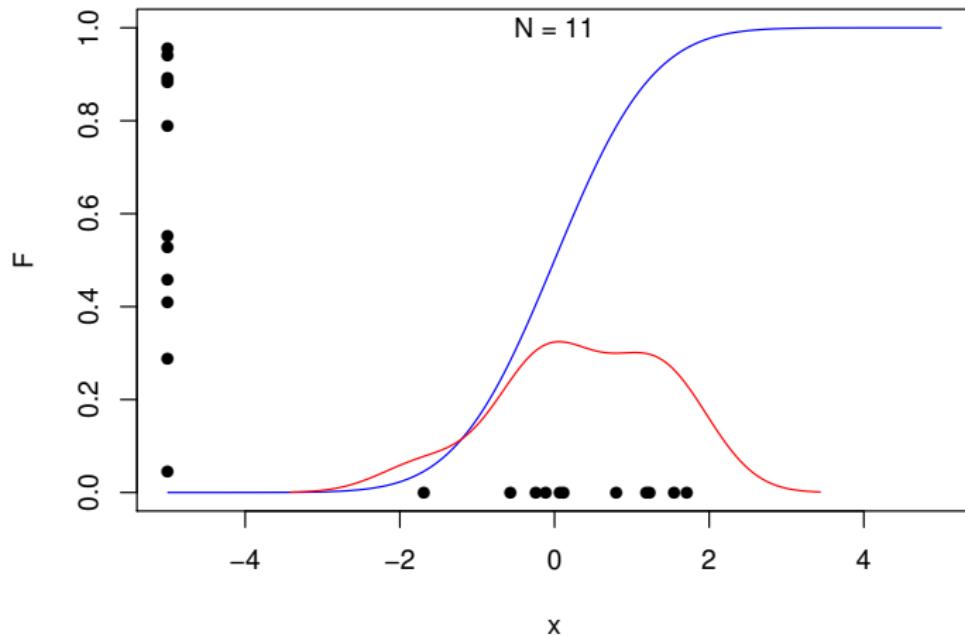
Simulation : fonction de répartition



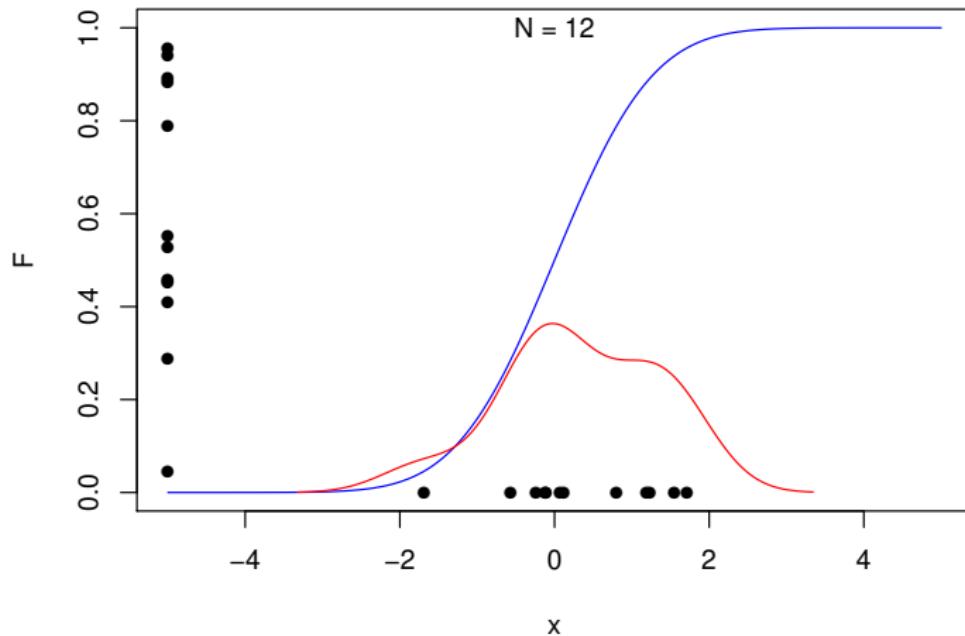
Simulation : fonction de répartition



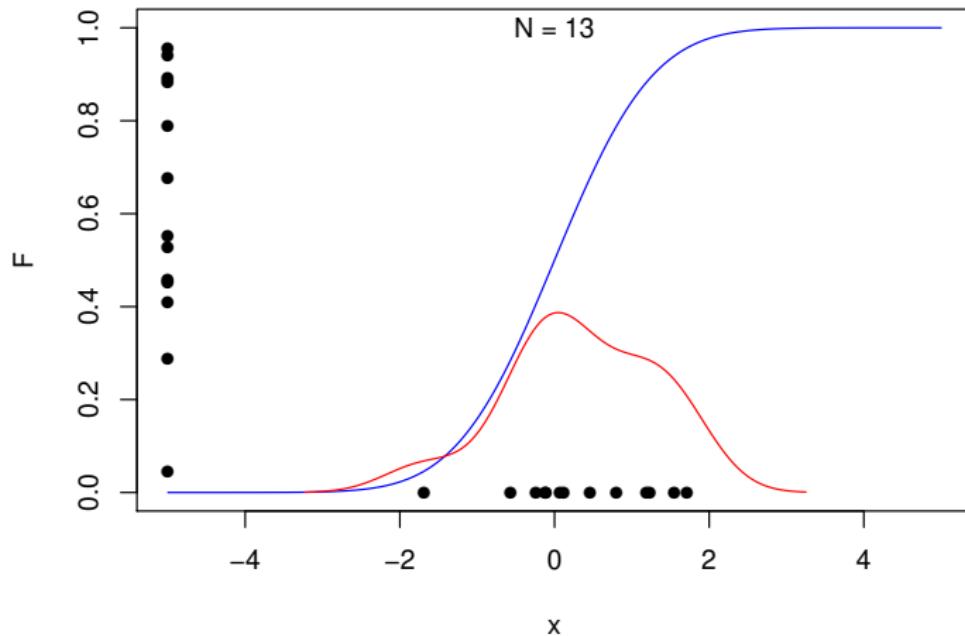
Simulation : fonction de répartition



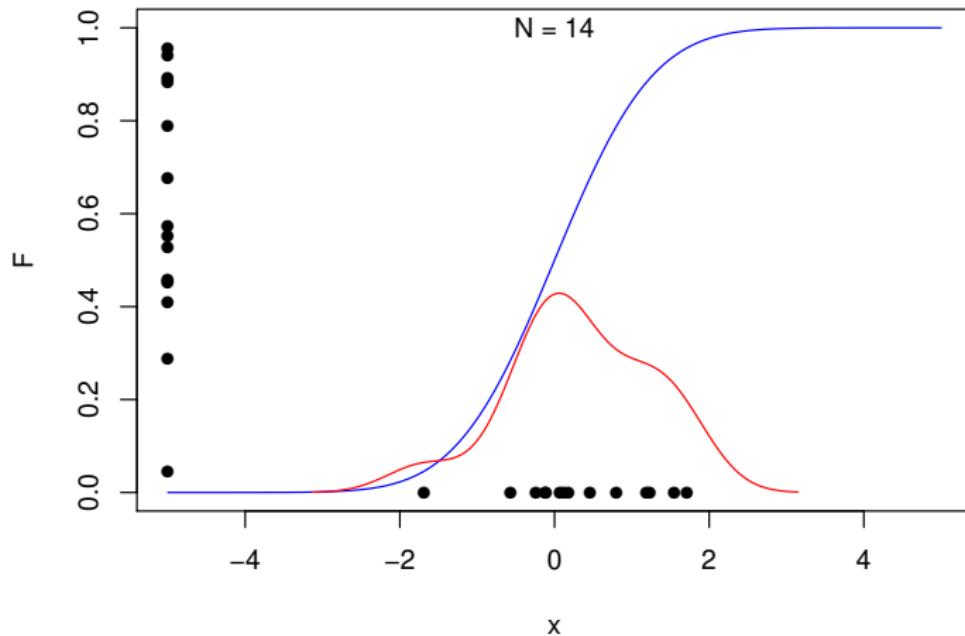
Simulation : fonction de répartition



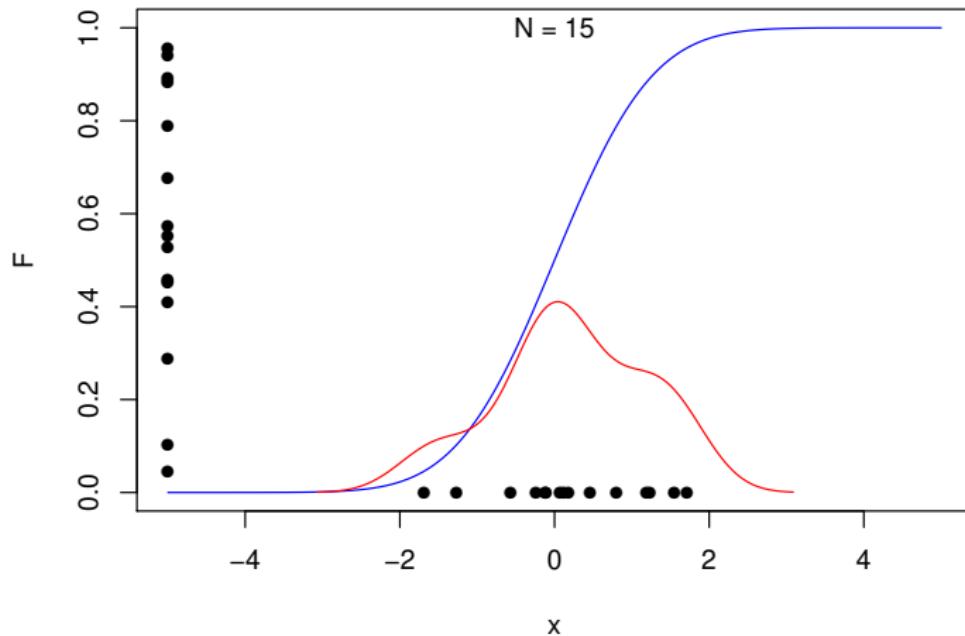
Simulation : fonction de répartition



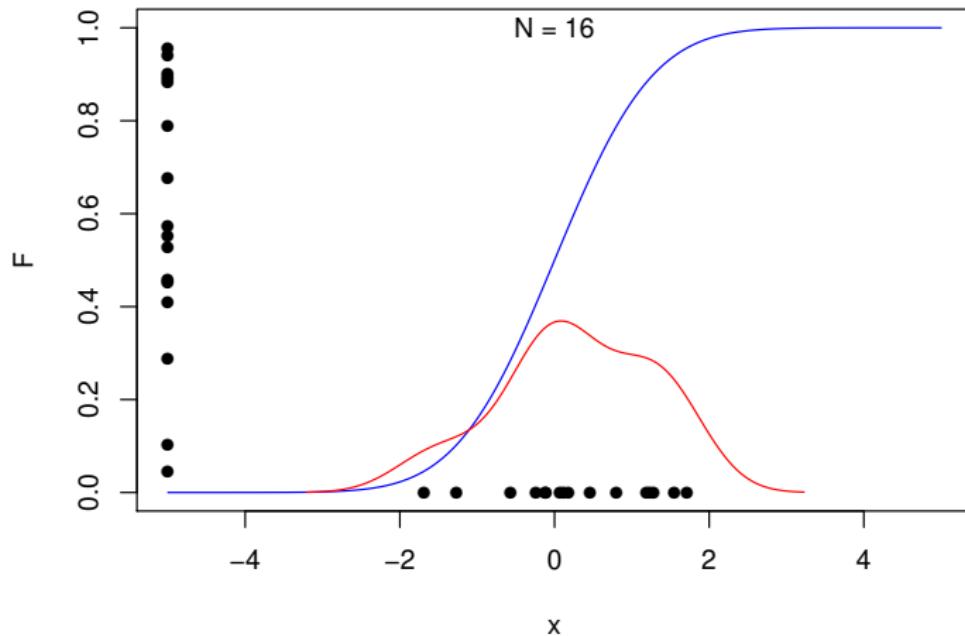
Simulation : fonction de répartition



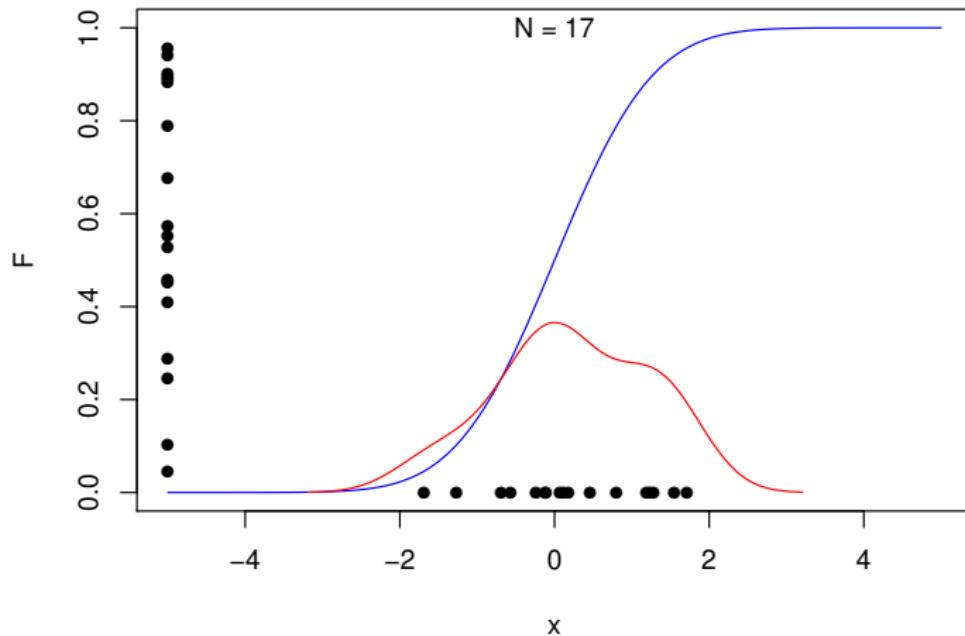
Simulation : fonction de répartition



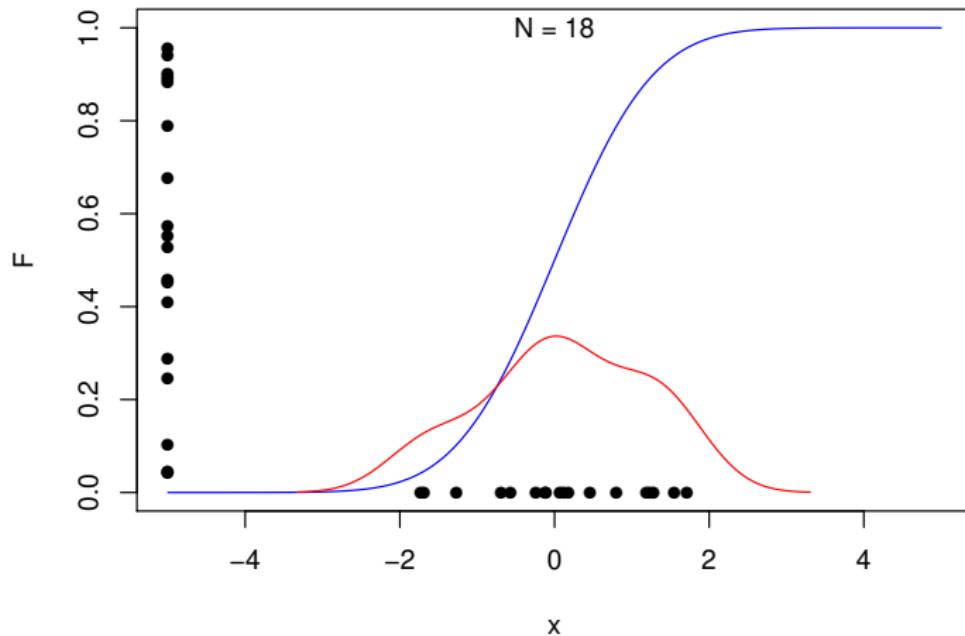
Simulation : fonction de répartition



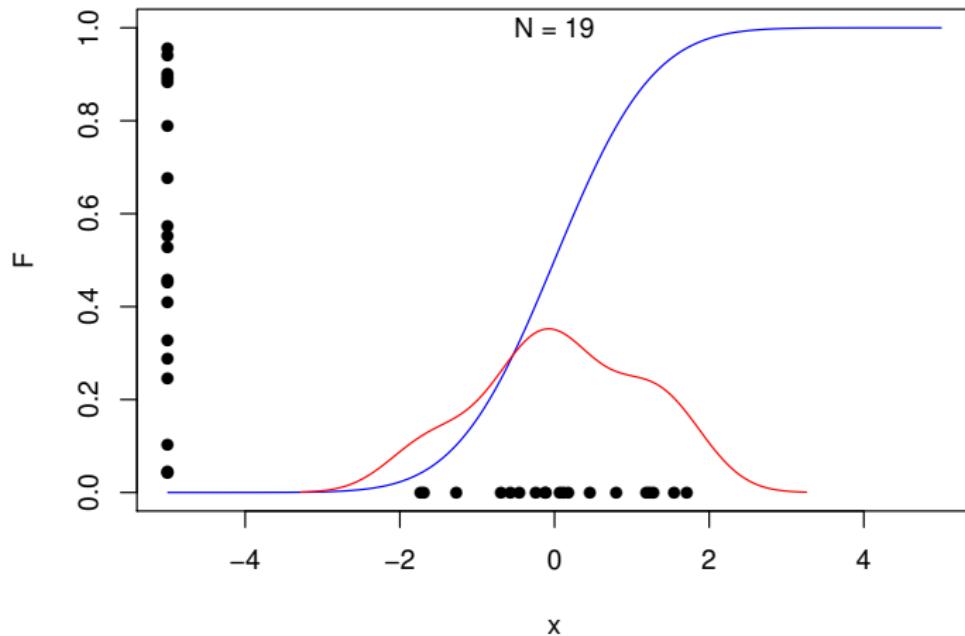
Simulation : fonction de répartition



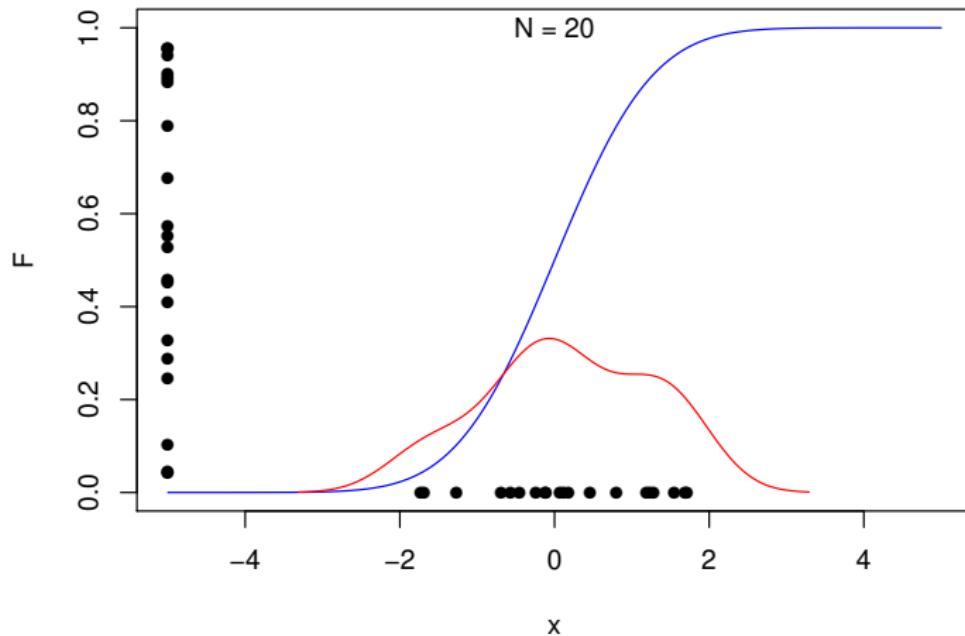
Simulation : fonction de répartition



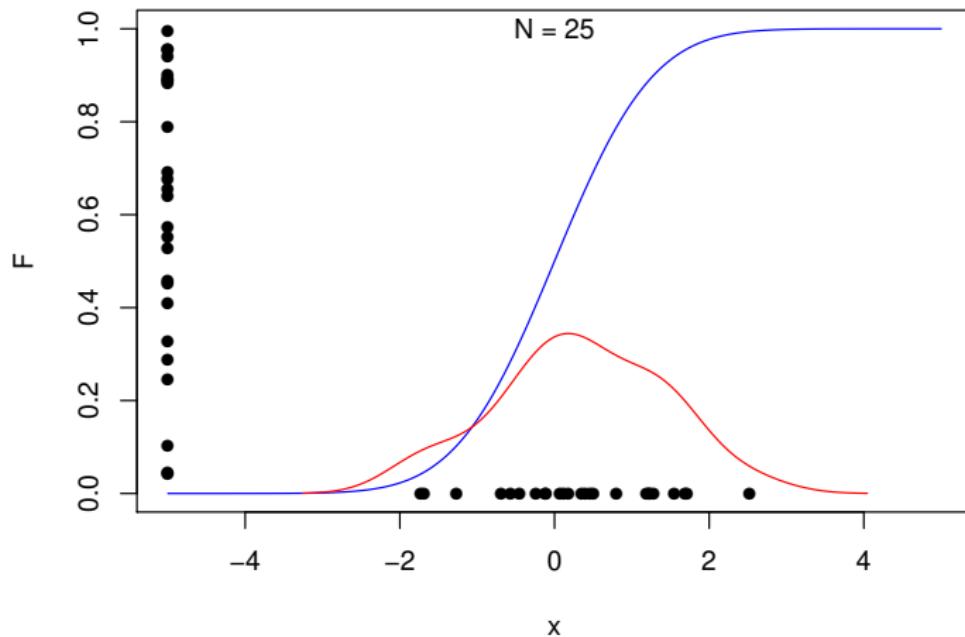
Simulation : fonction de répartition



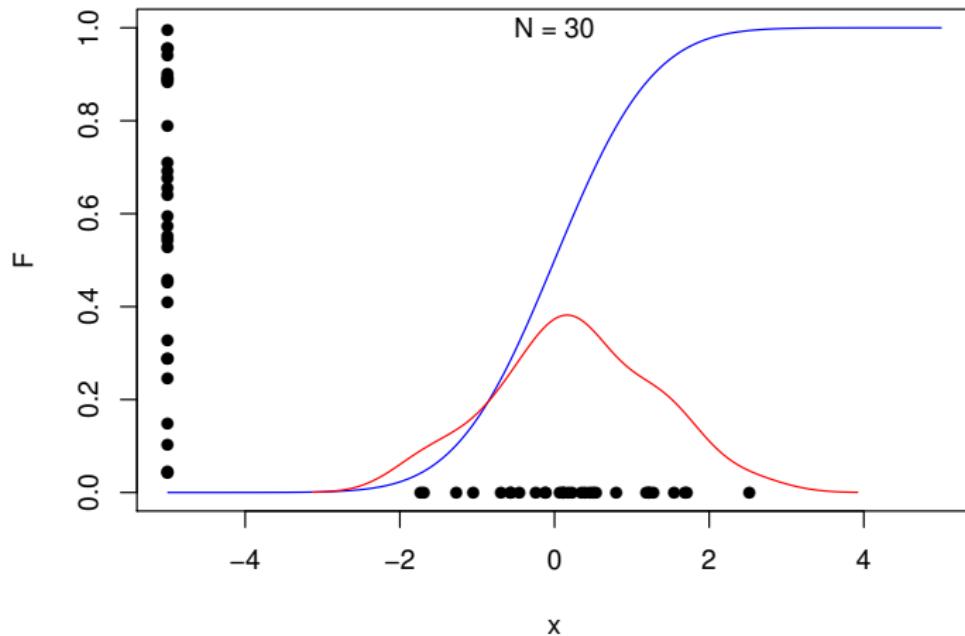
Simulation : fonction de répartition



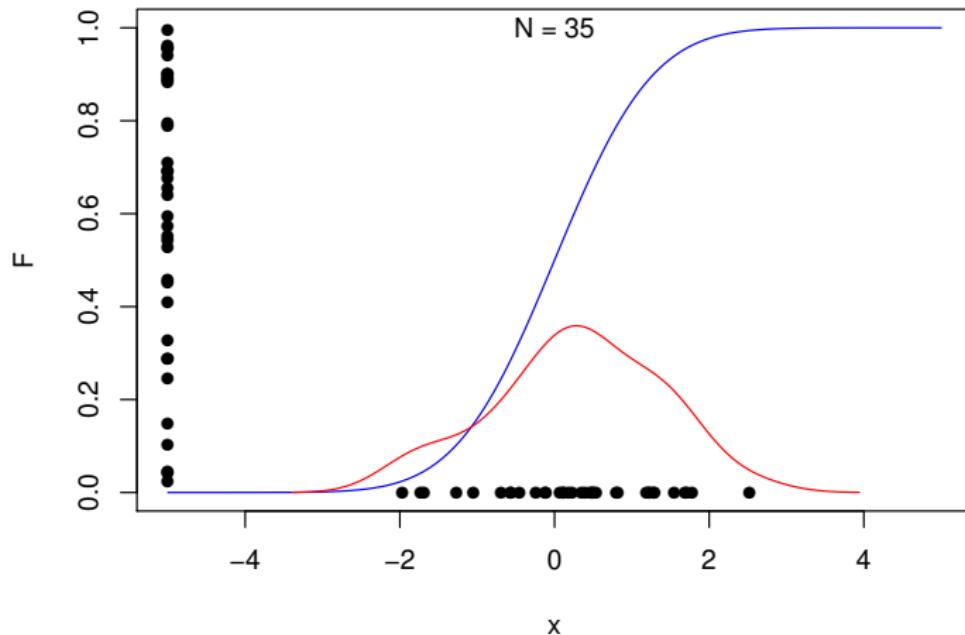
Simulation : fonction de répartition



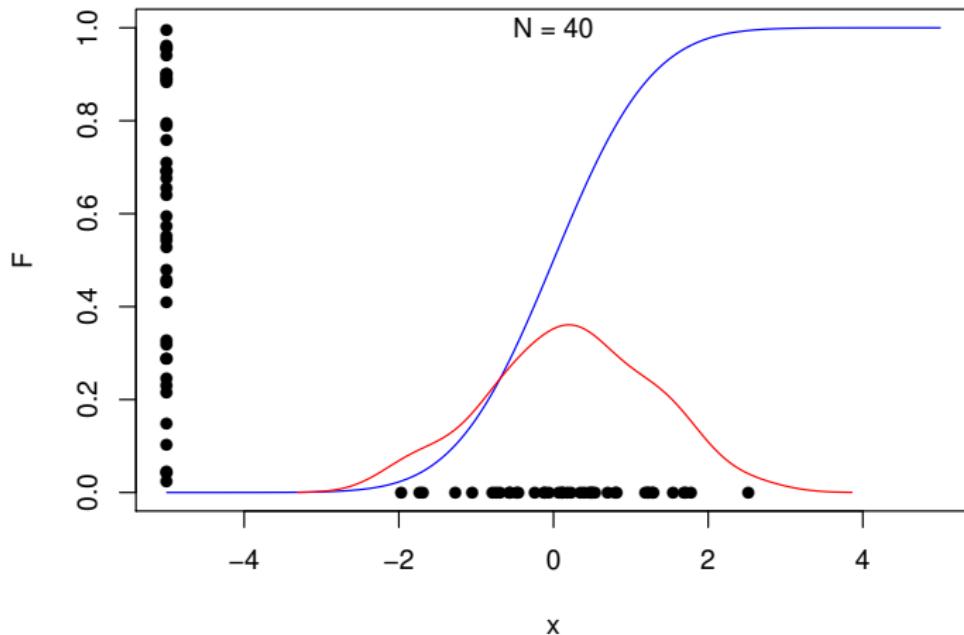
Simulation : fonction de répartition



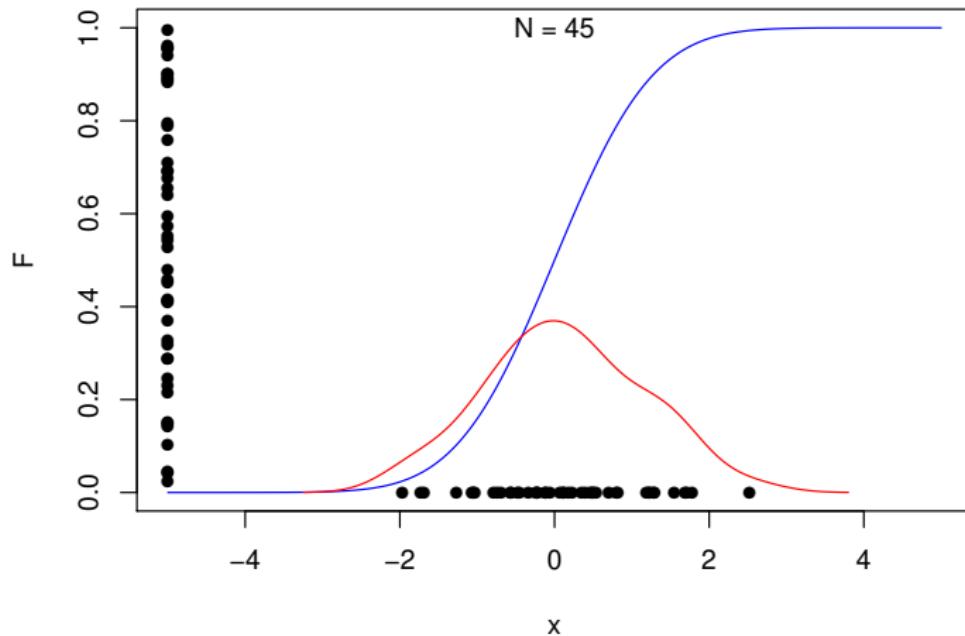
Simulation : fonction de répartition



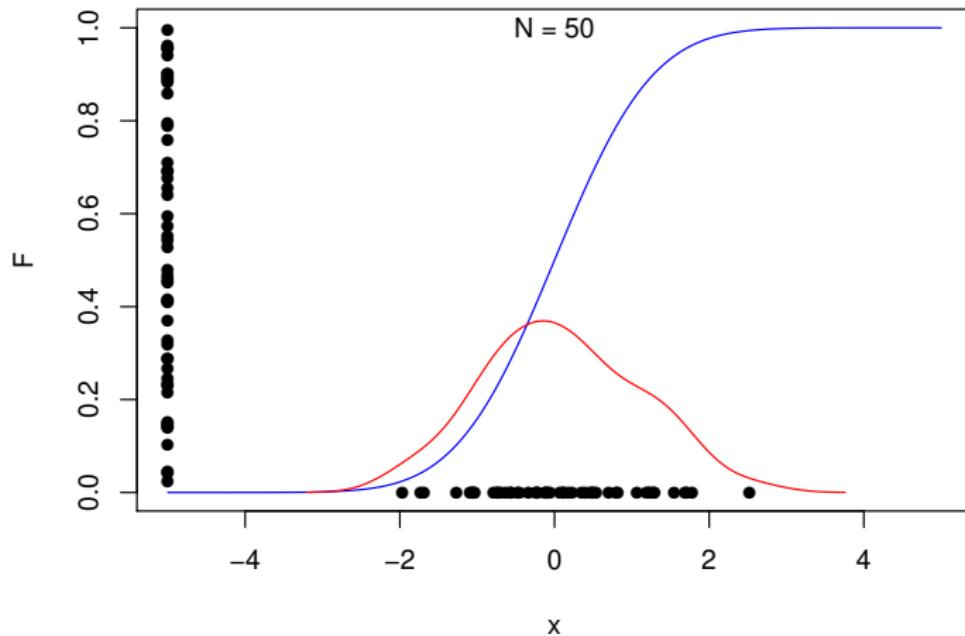
Simulation : fonction de répartition



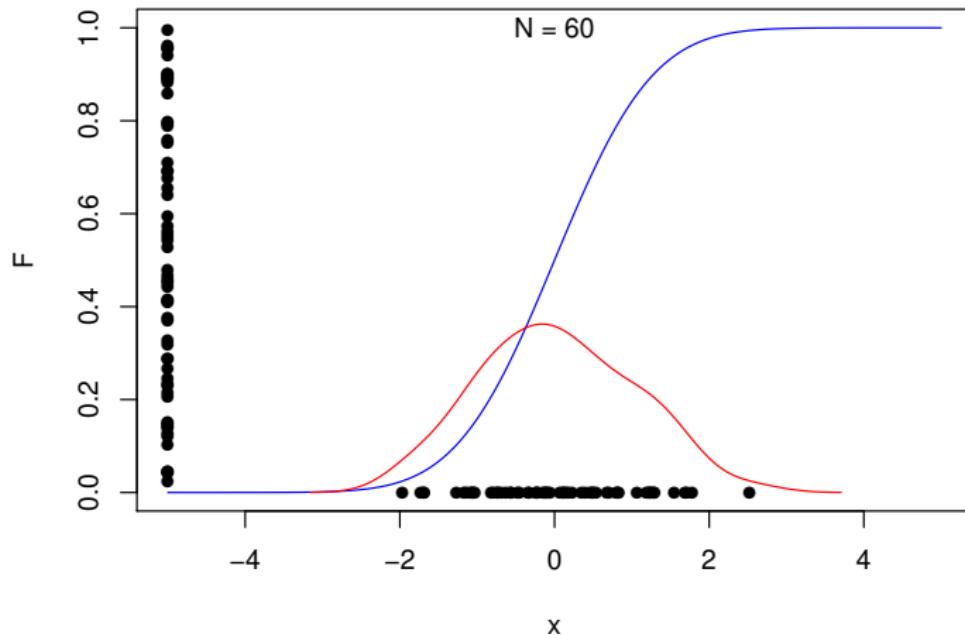
Simulation : fonction de répartition



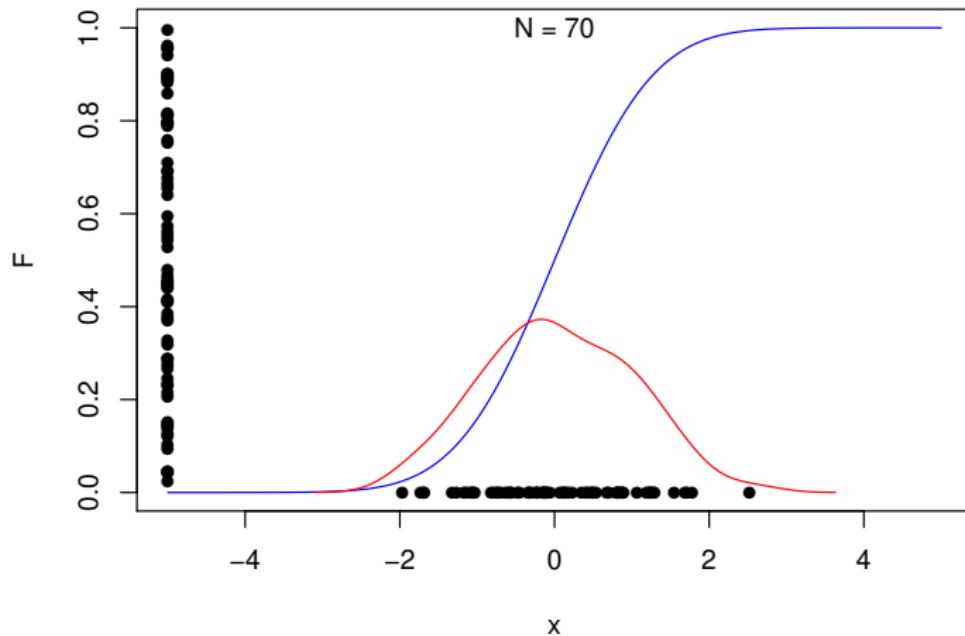
Simulation : fonction de répartition



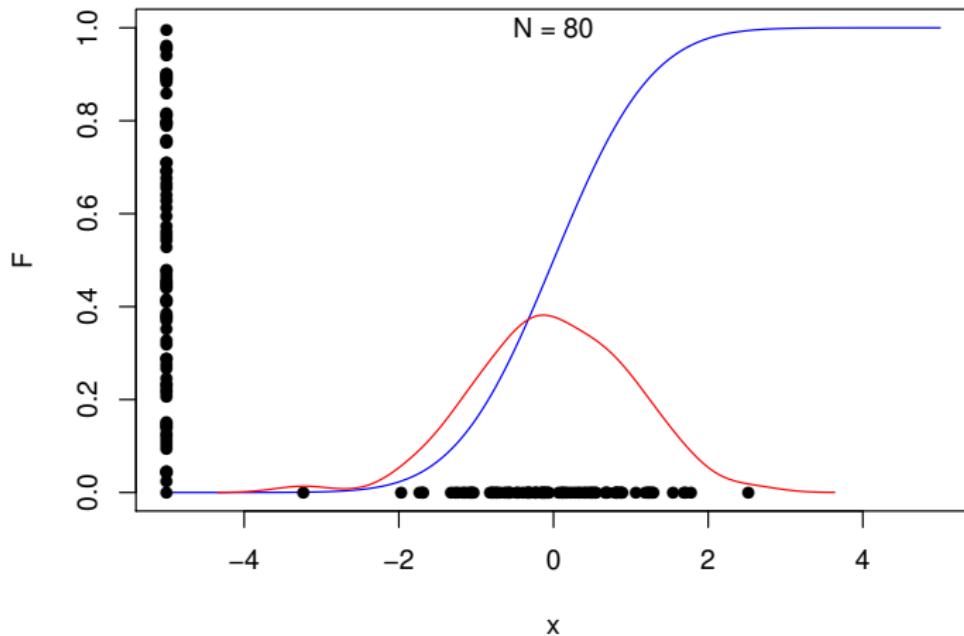
Simulation : fonction de répartition



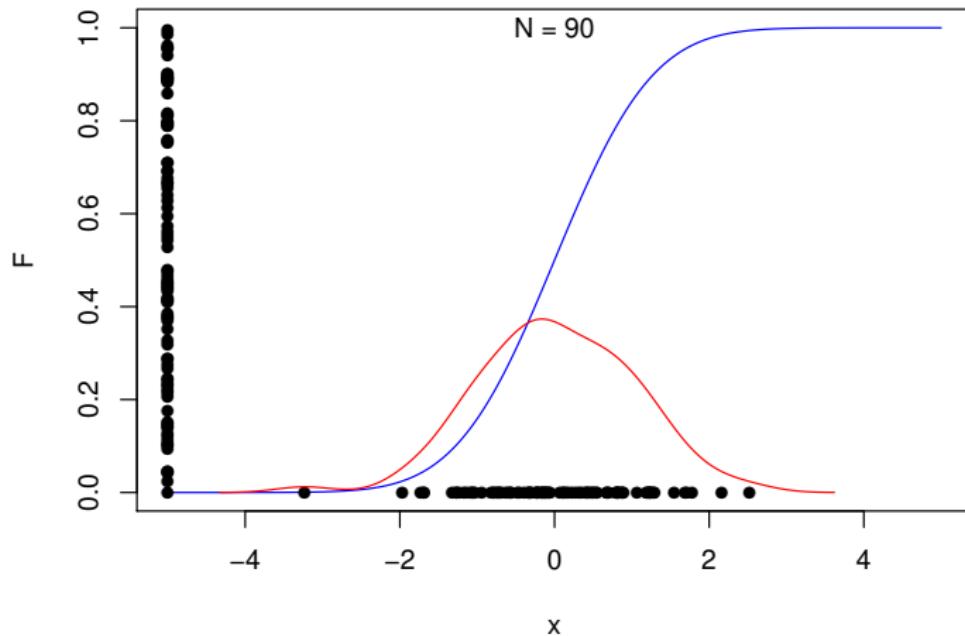
Simulation : fonction de répartition



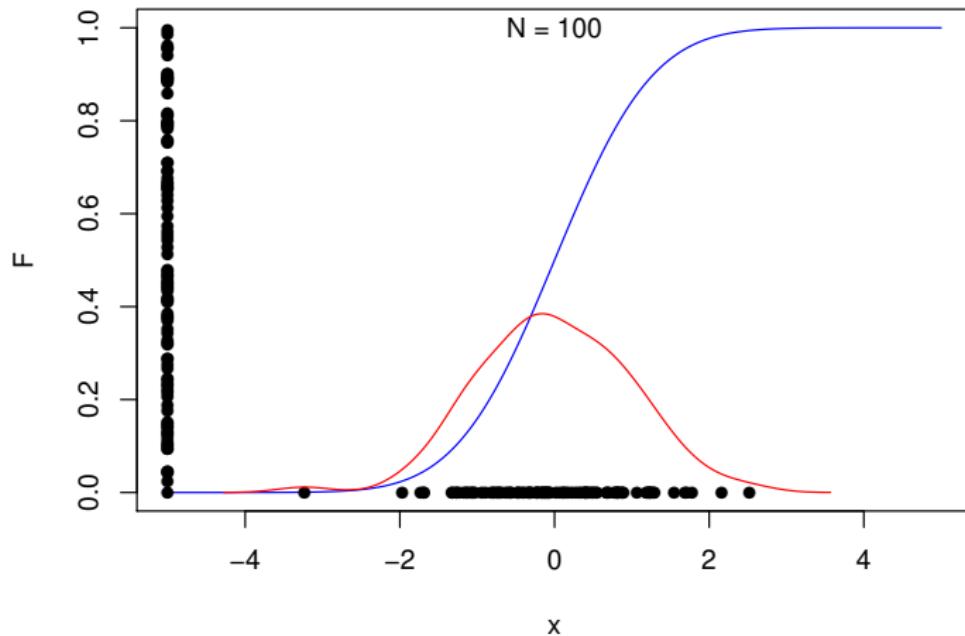
Simulation : fonction de répartition



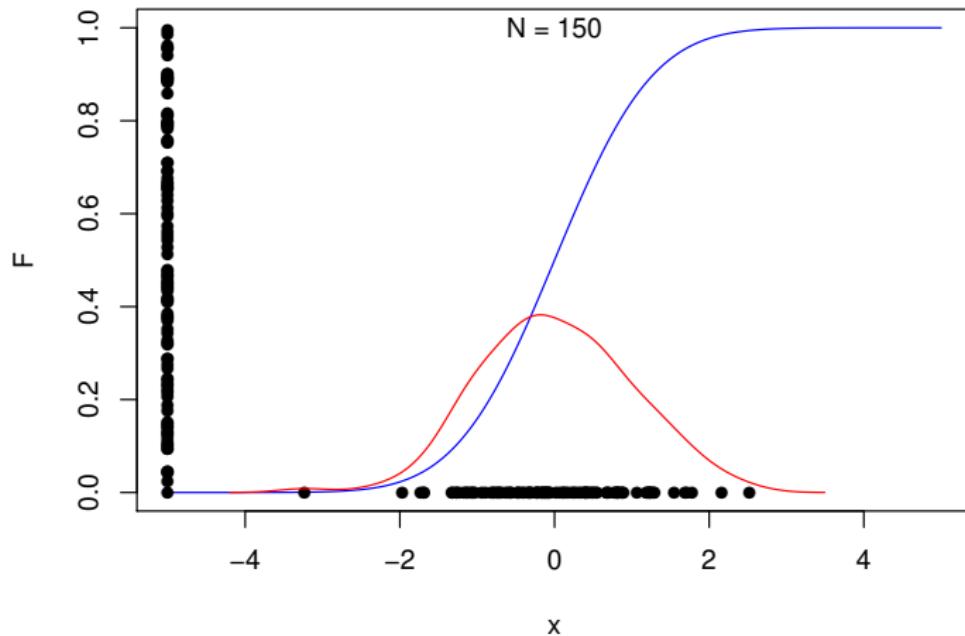
Simulation : fonction de répartition



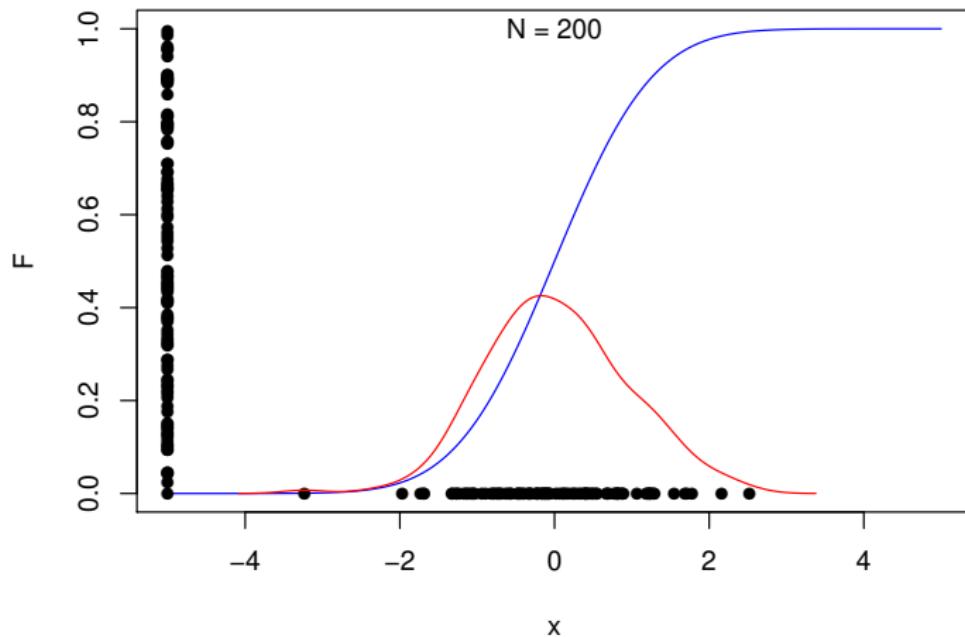
Simulation : fonction de répartition



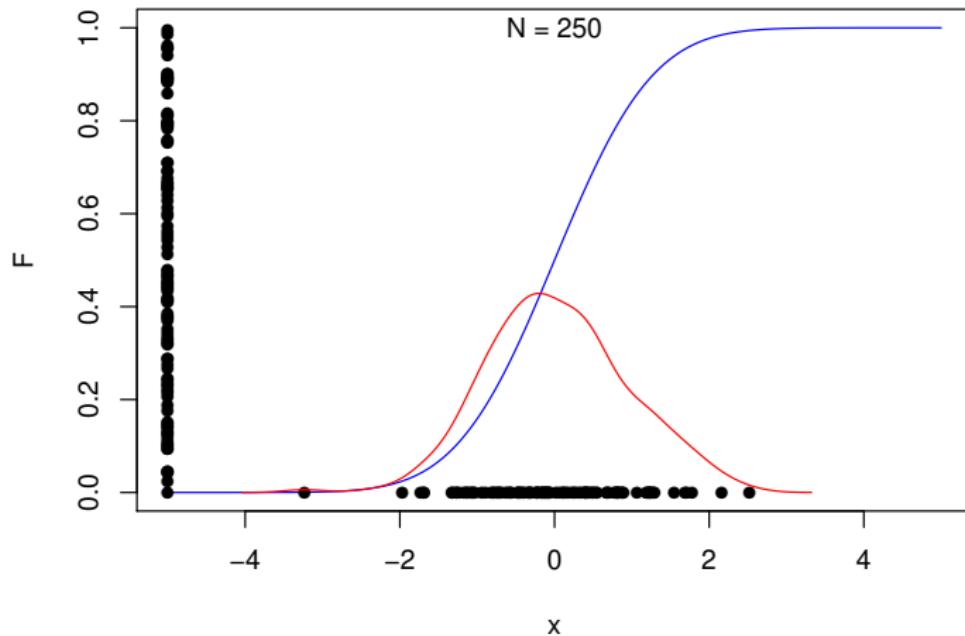
Simulation : fonction de répartition



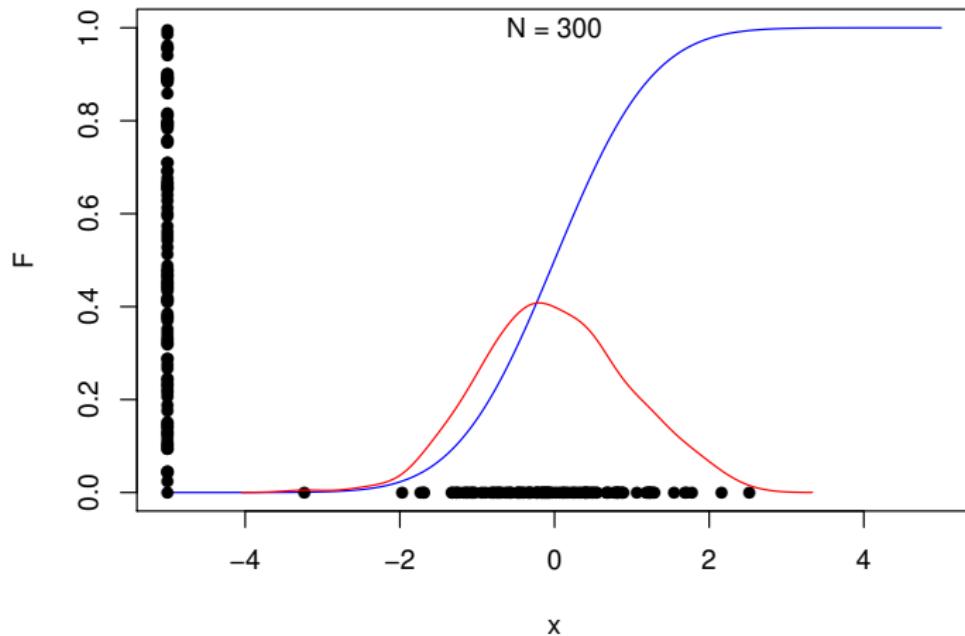
Simulation : fonction de répartition



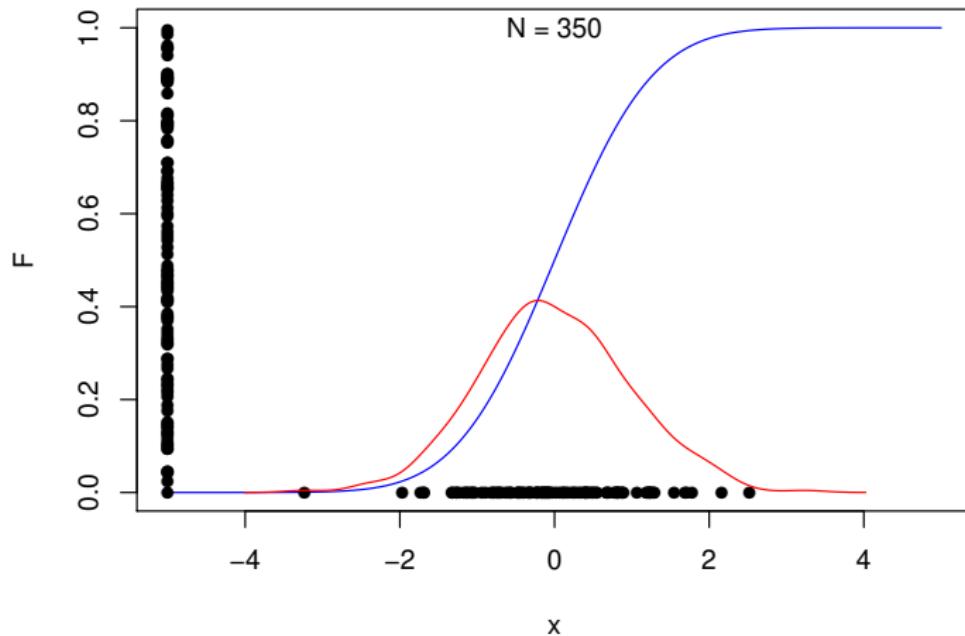
Simulation : fonction de répartition



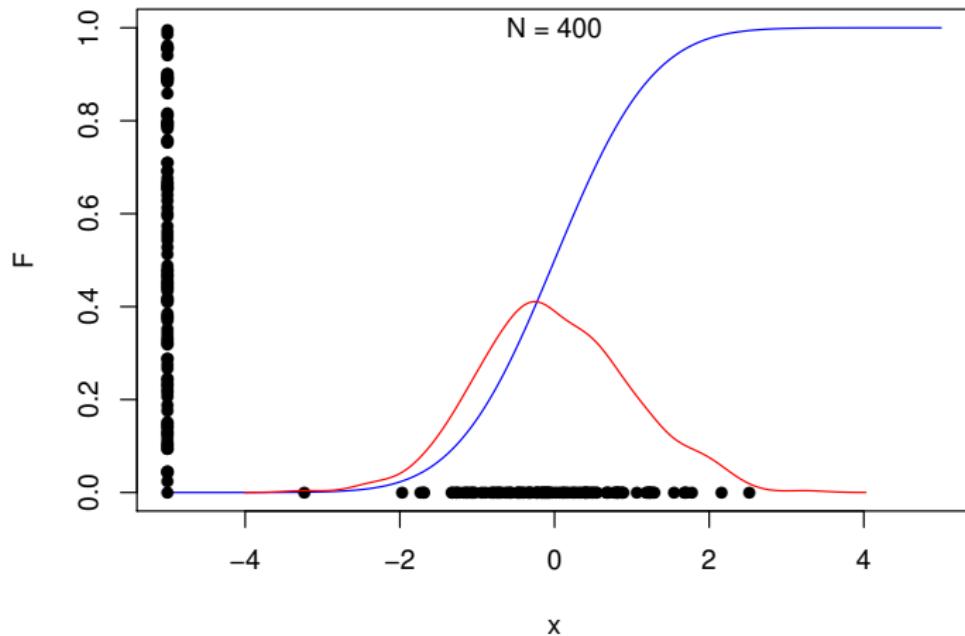
Simulation : fonction de répartition



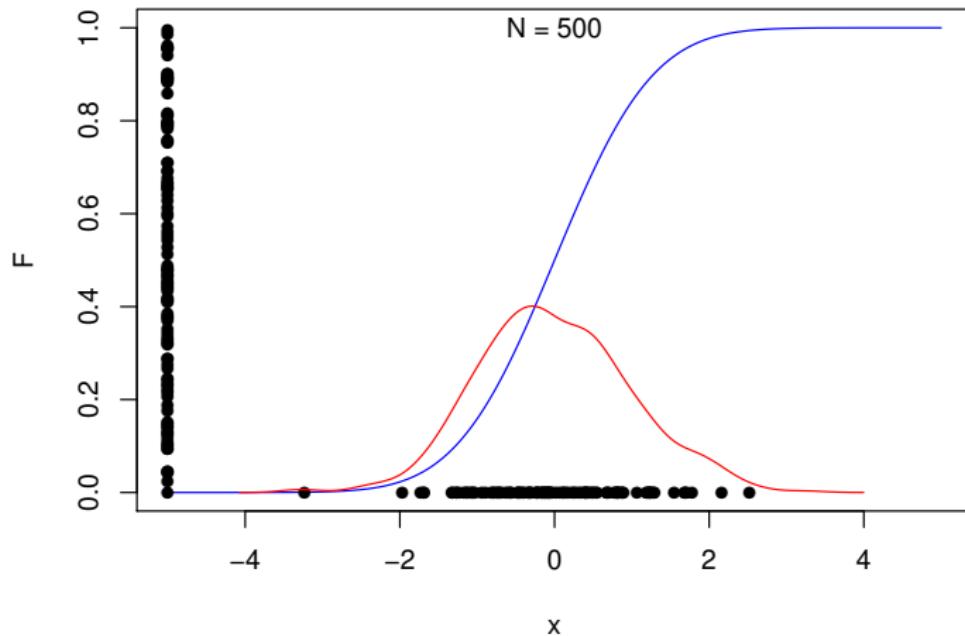
Simulation : fonction de répartition



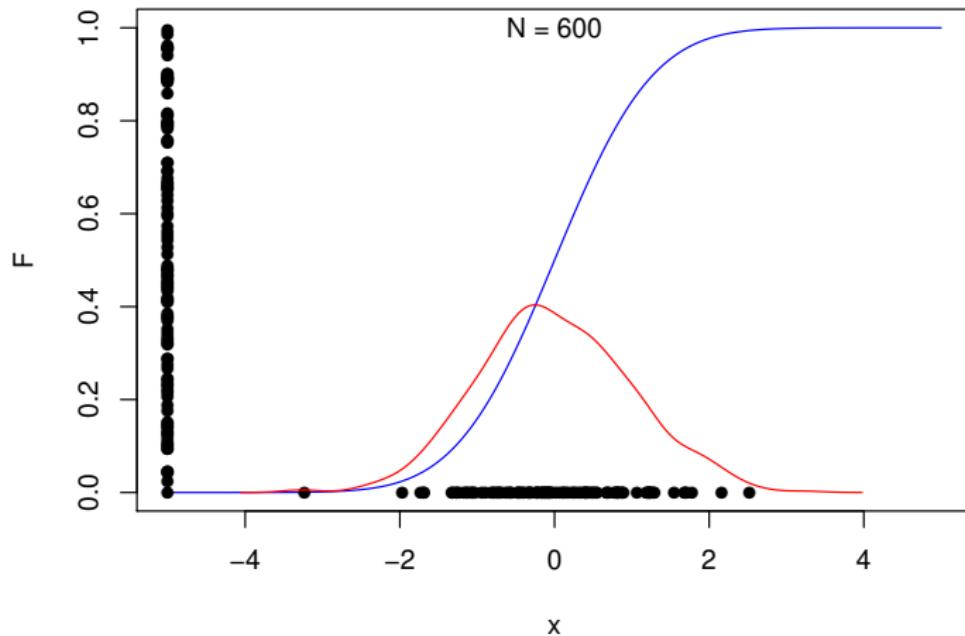
Simulation : fonction de répartition



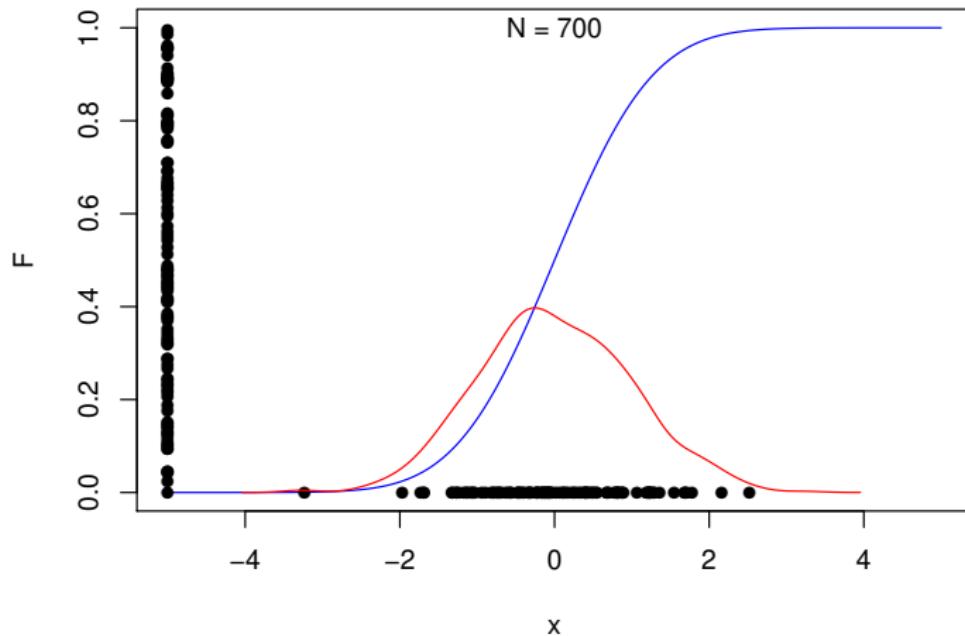
Simulation : fonction de répartition



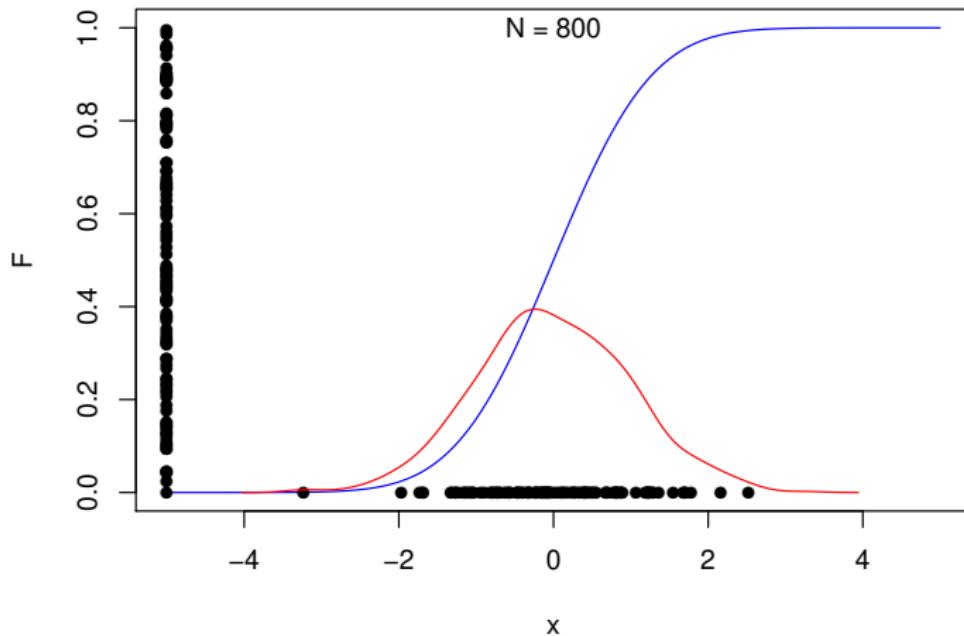
Simulation : fonction de répartition



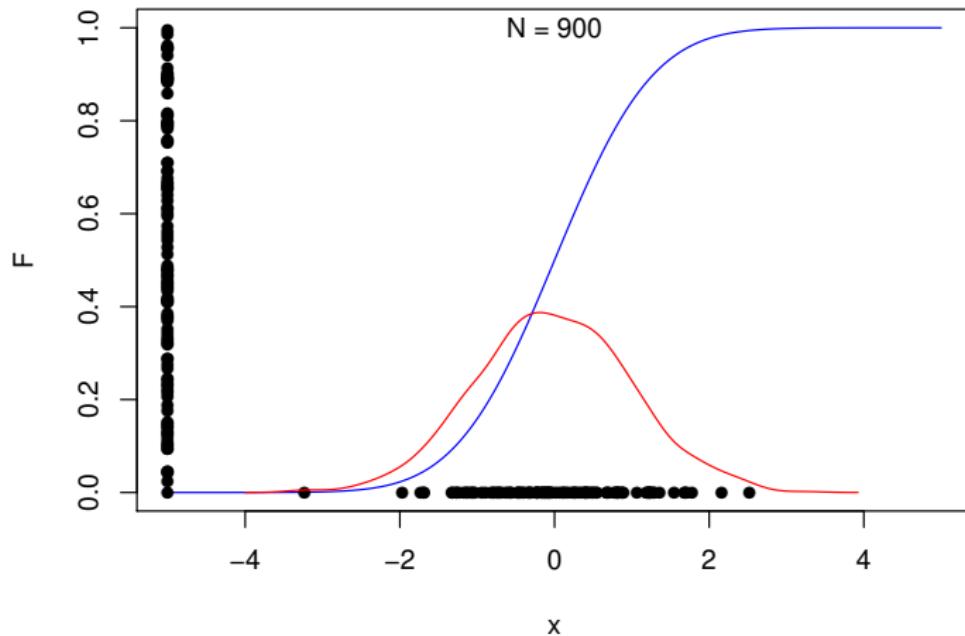
Simulation : fonction de répartition



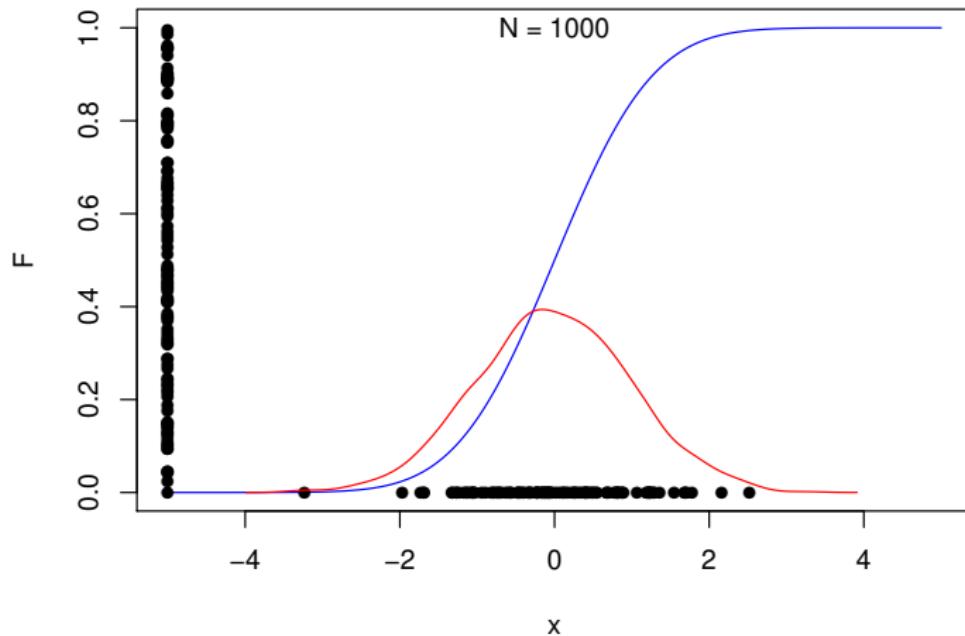
Simulation : fonction de répartition



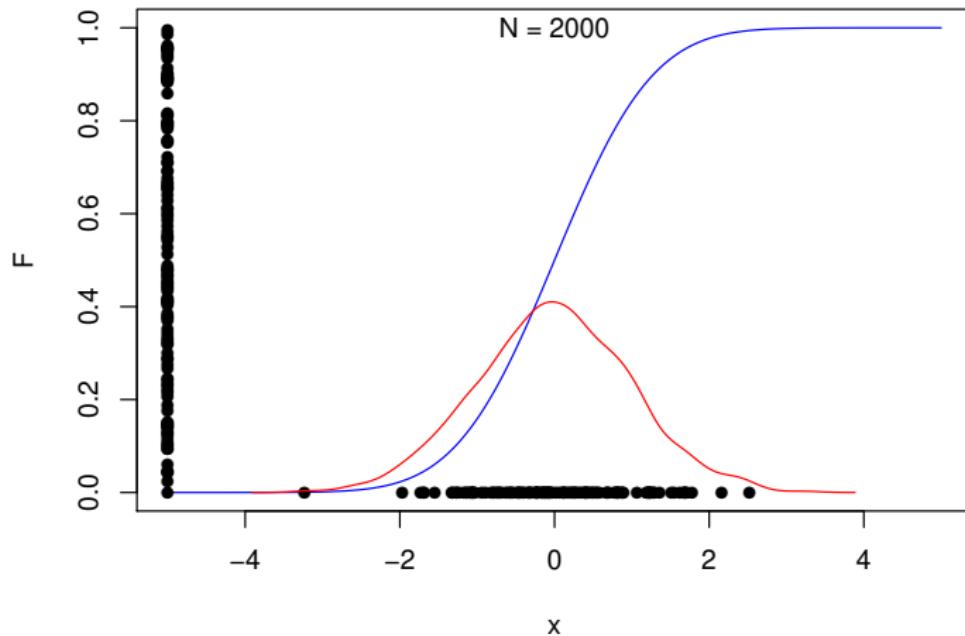
Simulation : fonction de répartition



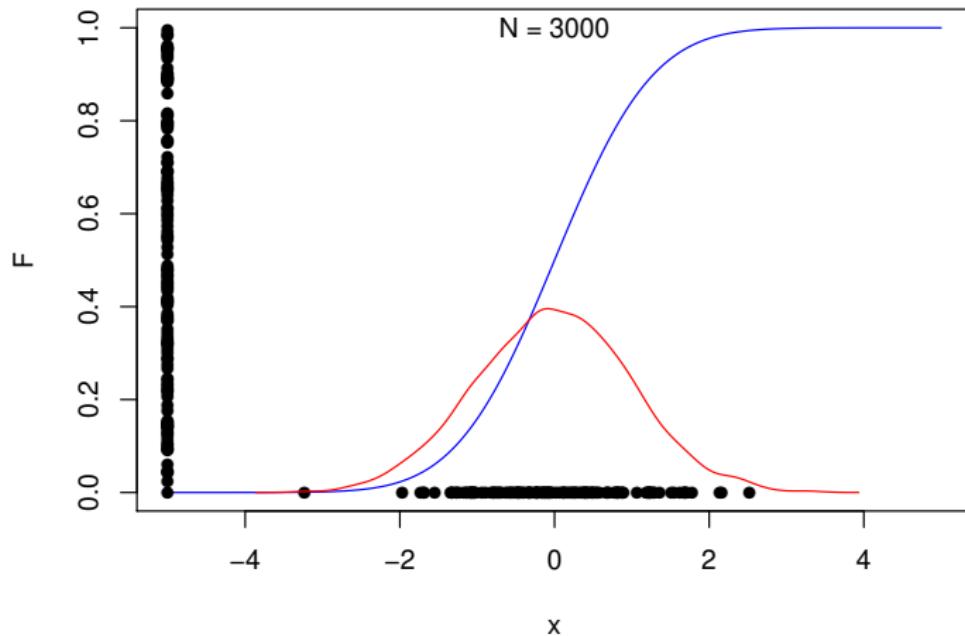
Simulation : fonction de répartition



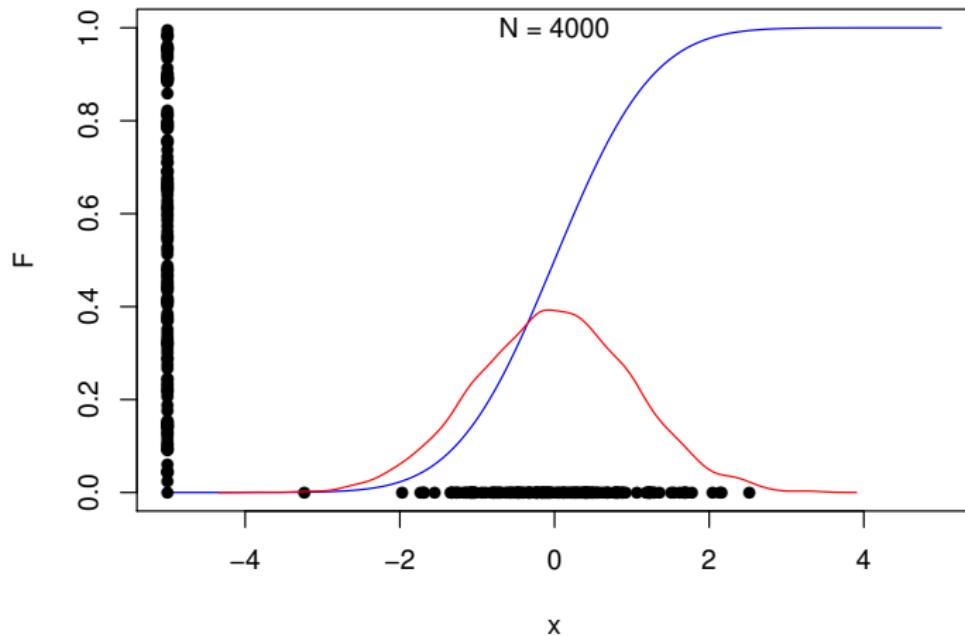
Simulation : fonction de répartition



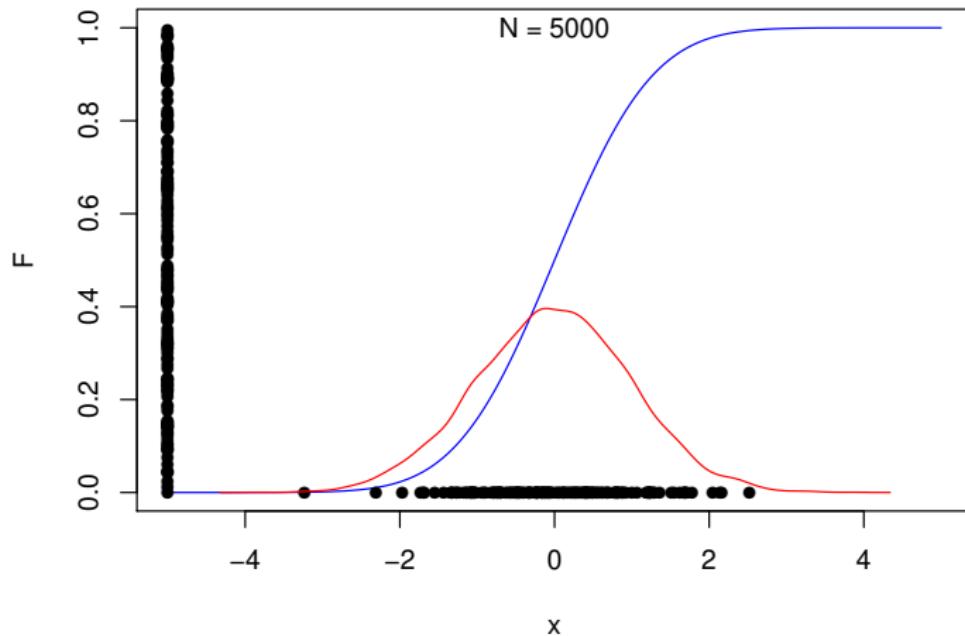
Simulation : fonction de répartition



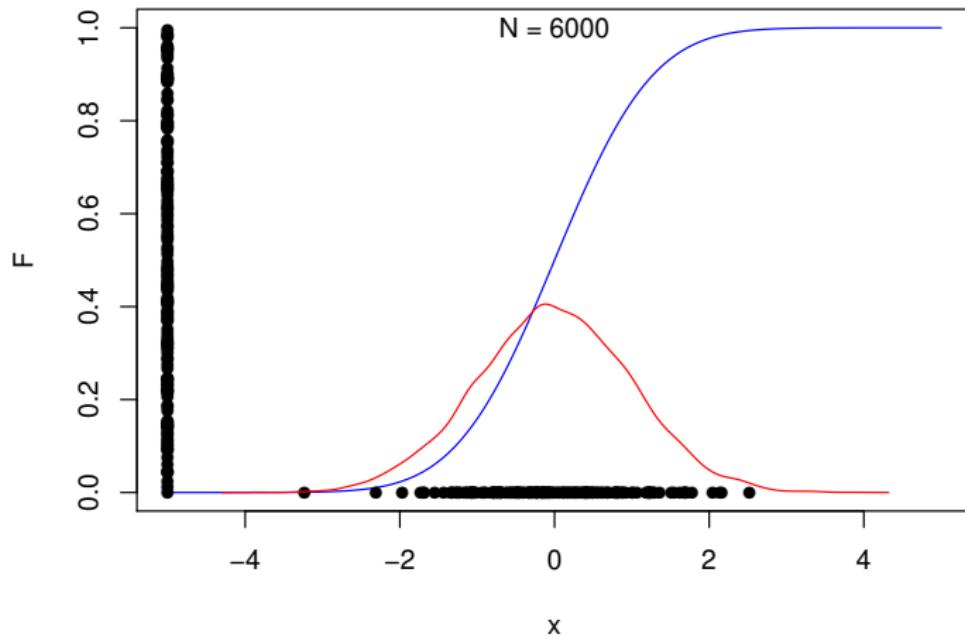
Simulation : fonction de répartition



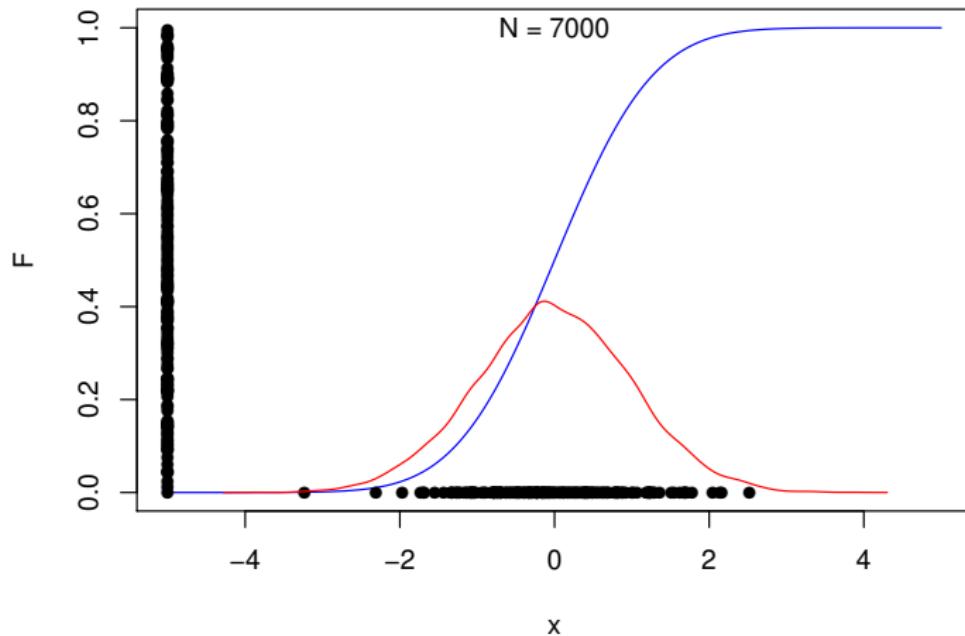
Simulation : fonction de répartition



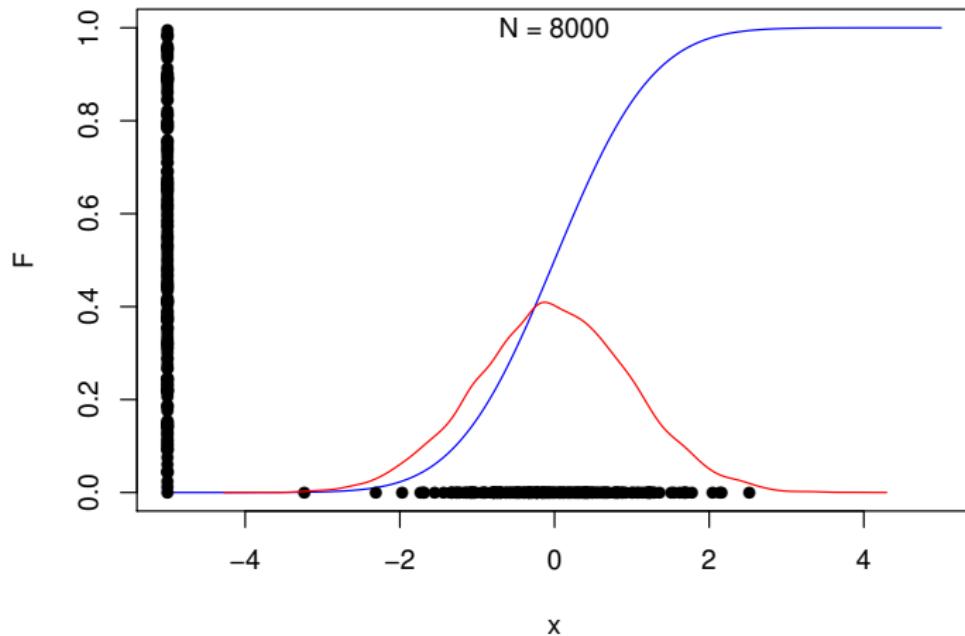
Simulation : fonction de répartition



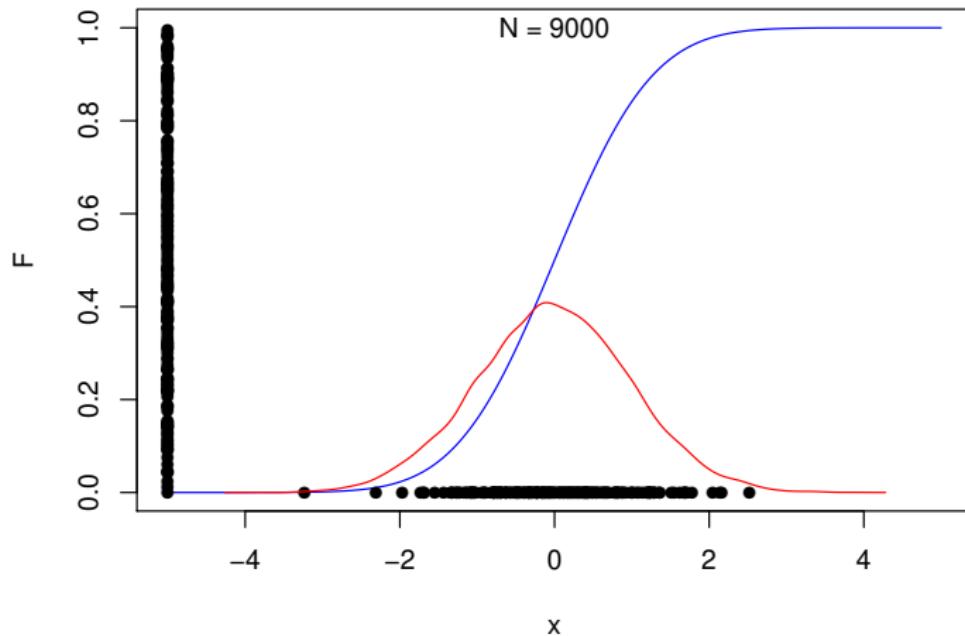
Simulation : fonction de répartition



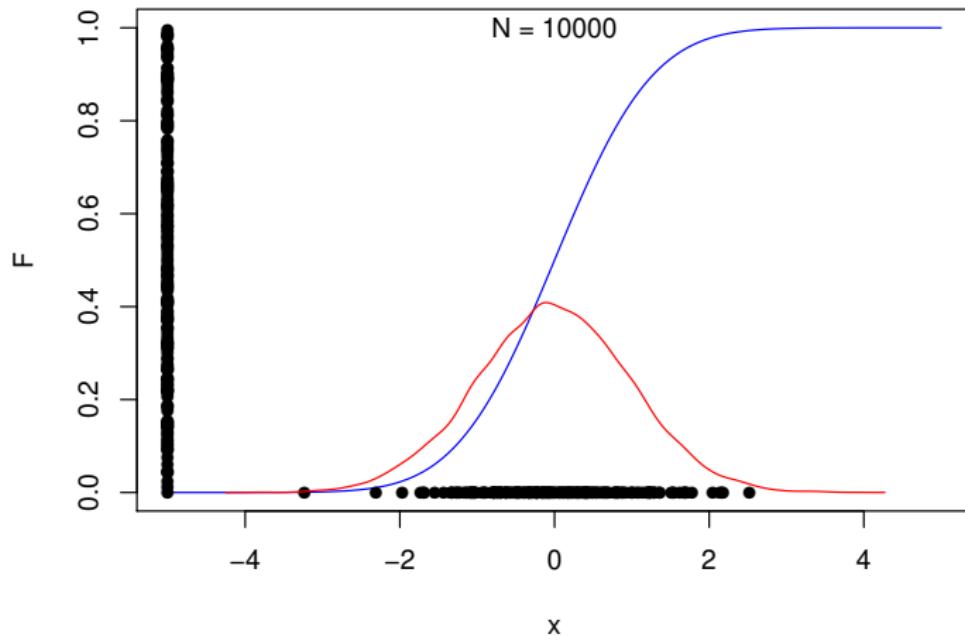
Simulation : fonction de répartition



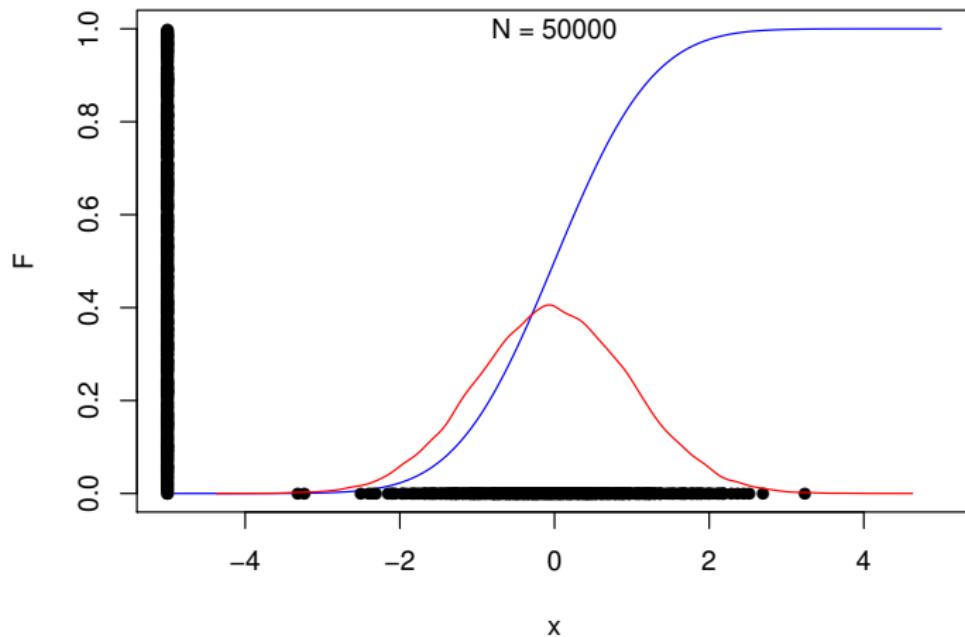
Simulation : fonction de répartition



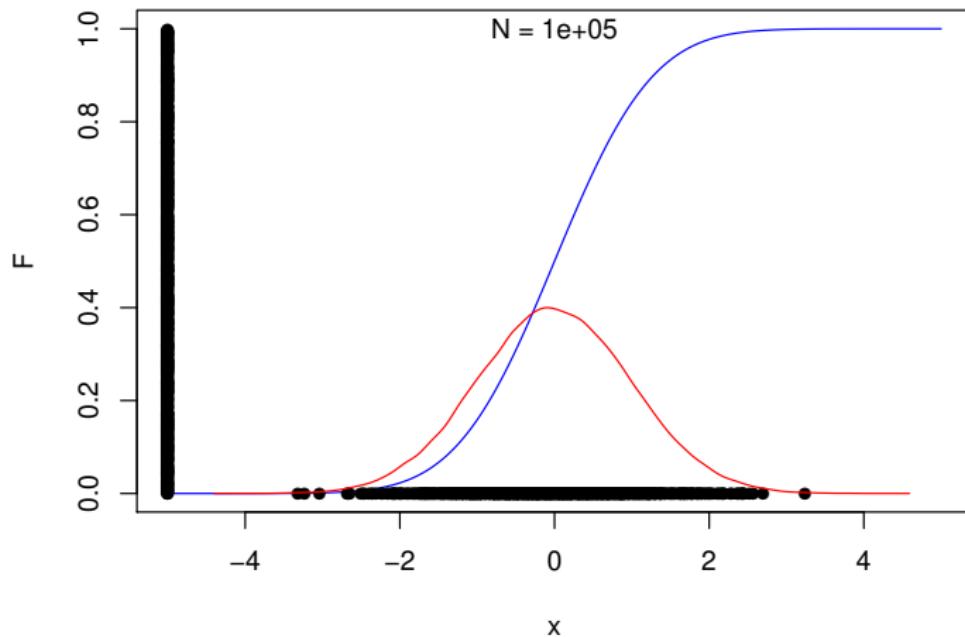
Simulation : fonction de répartition



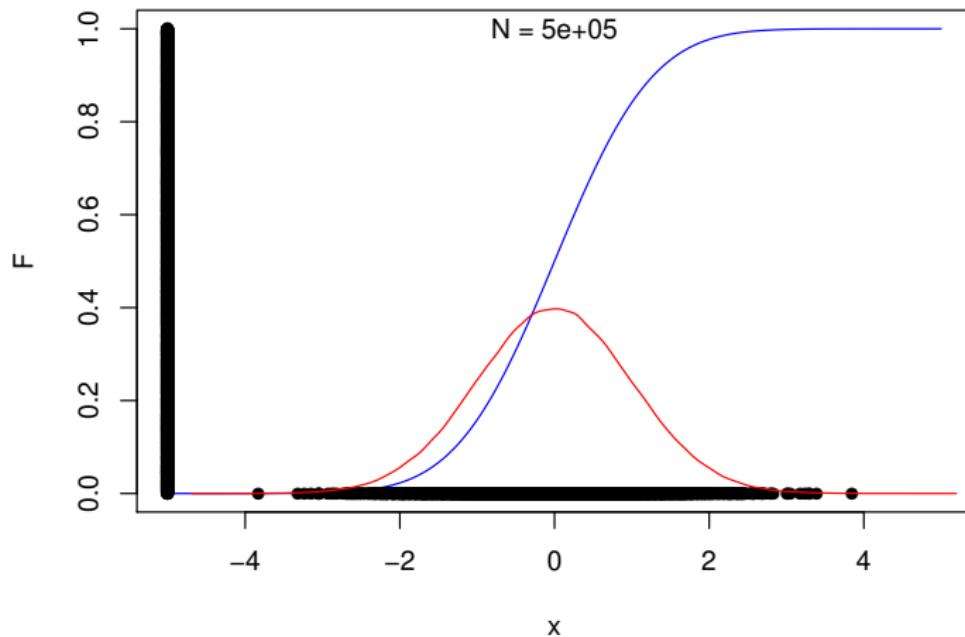
Simulation : fonction de répartition



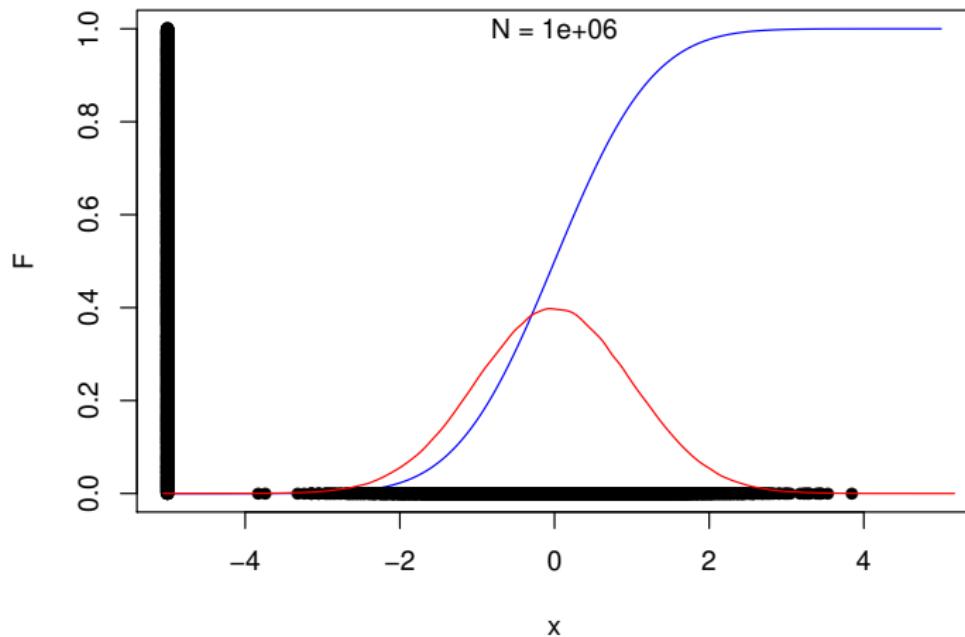
Simulation : fonction de répartition



Simulation : fonction de répartition

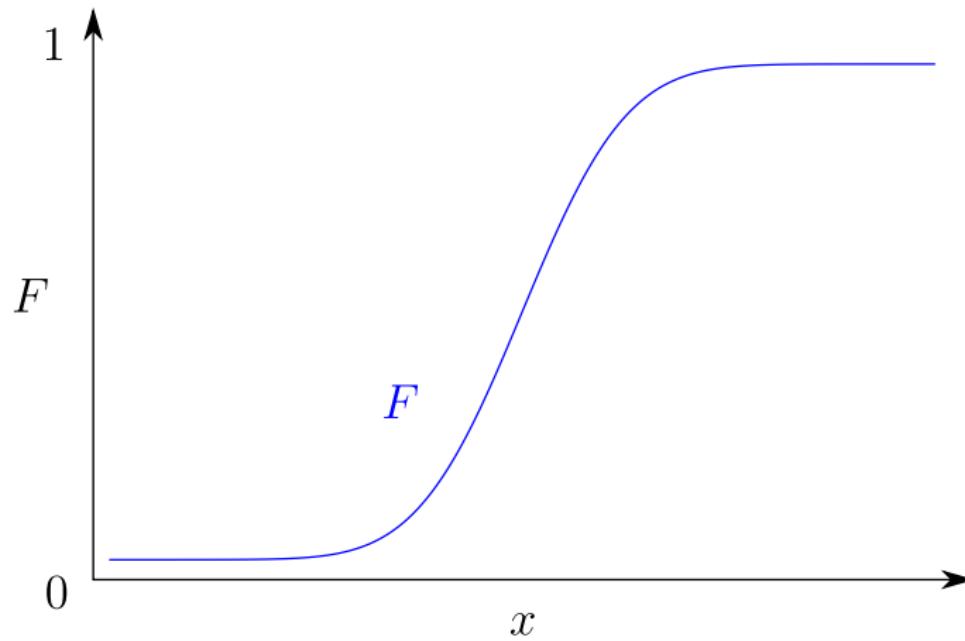


Simulation : fonction de répartition



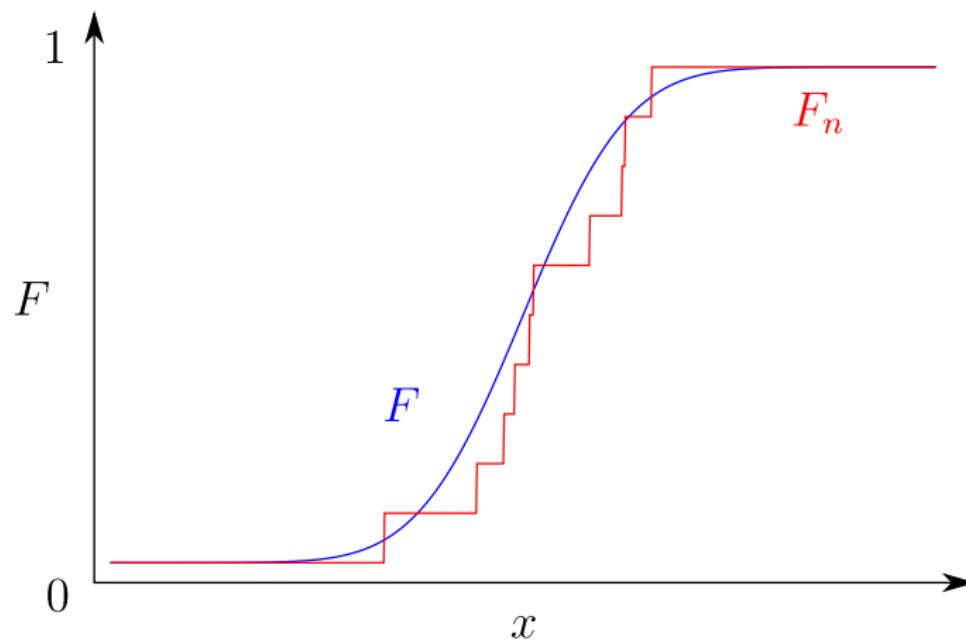
Simulation : fonction de répartition

Comment contrôler la qualité de la simulation ?



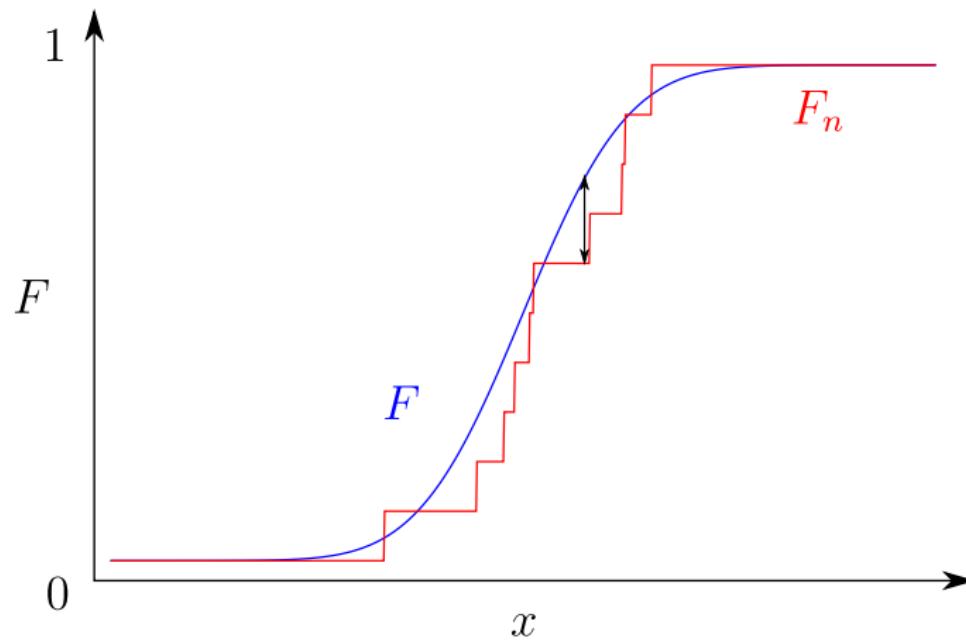
Simulation : fonction de répartition

Comment contrôler la qualité de la simulation ?



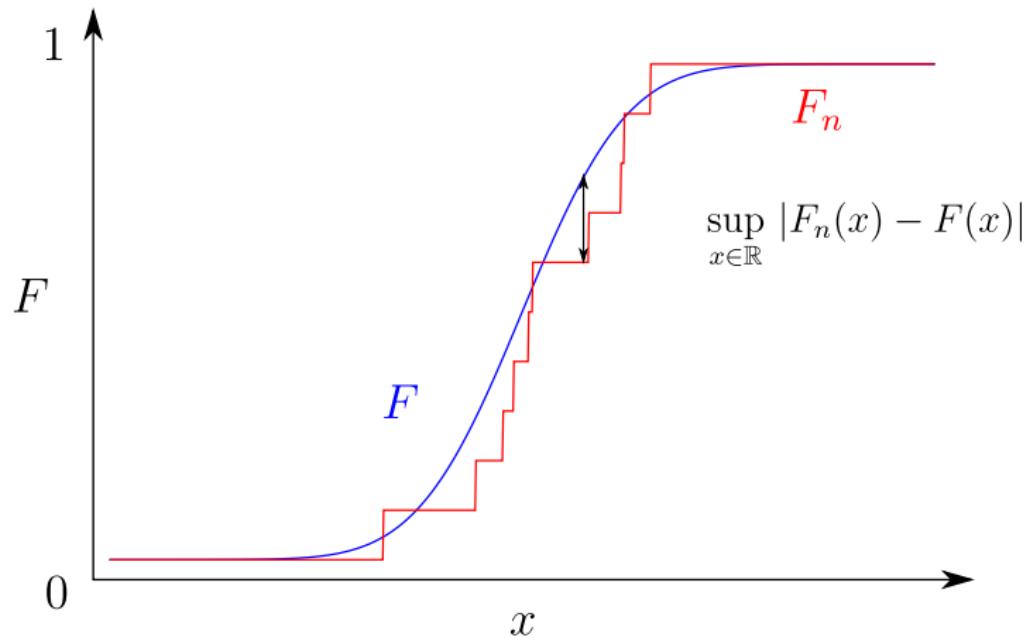
Simulation : fonction de répartition

Comment contrôler la qualité de la simulation ?



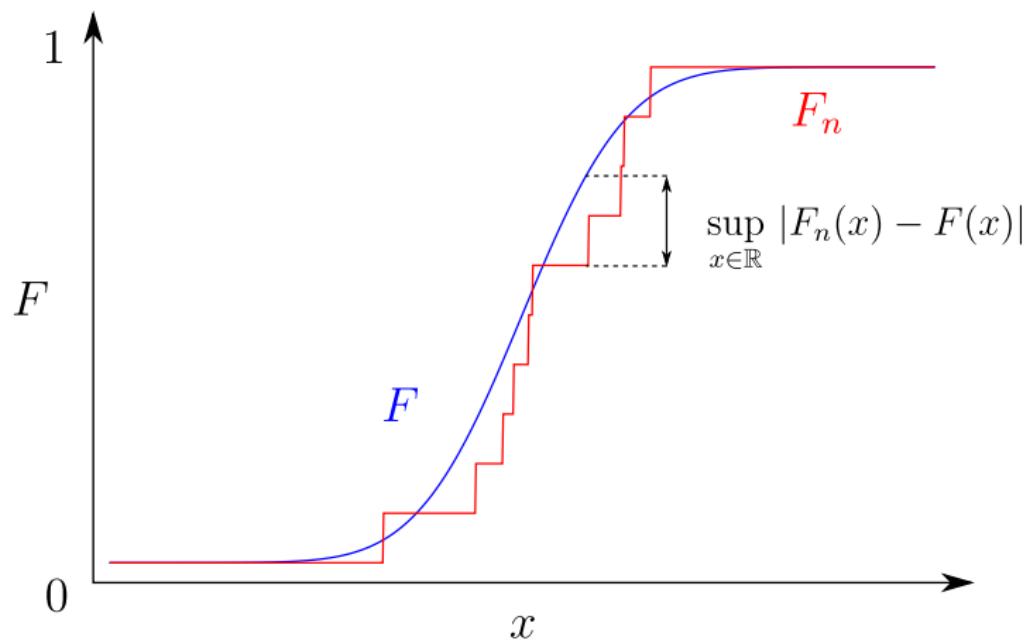
Simulation : fonction de répartition

Comment contrôler la qualité de la simulation ?



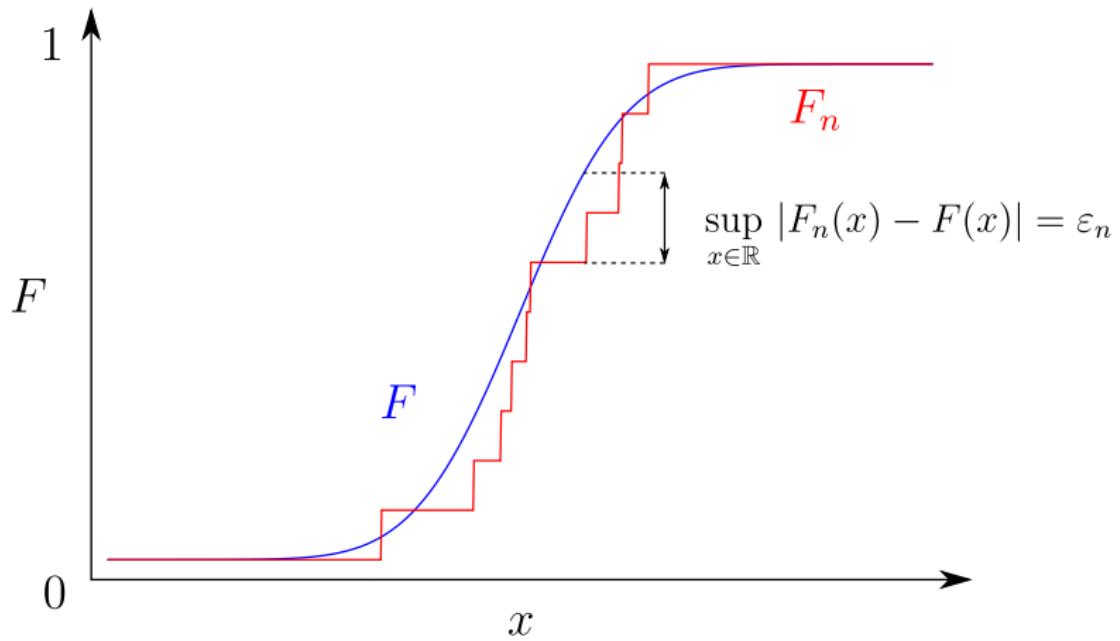
Simulation : fonction de répartition

Comment contrôler la qualité de la simulation ?



Simulation : fonction de répartition

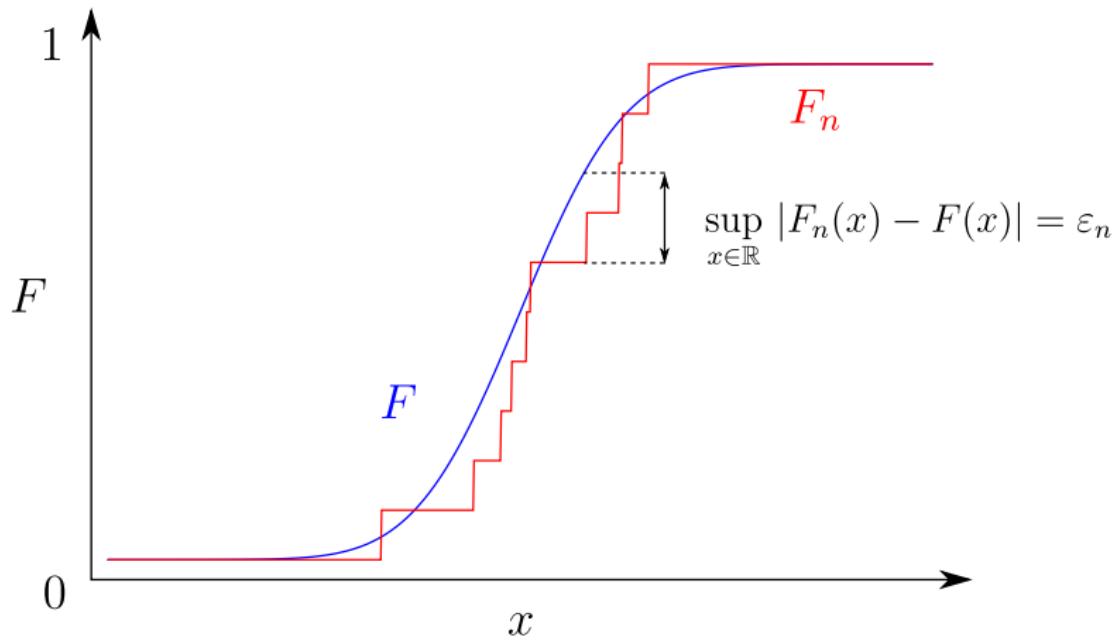
Comment contrôler la qualité de la simulation ?



Simulation : fonction de répartition

Comment contrôler la qualité de la simulation ?

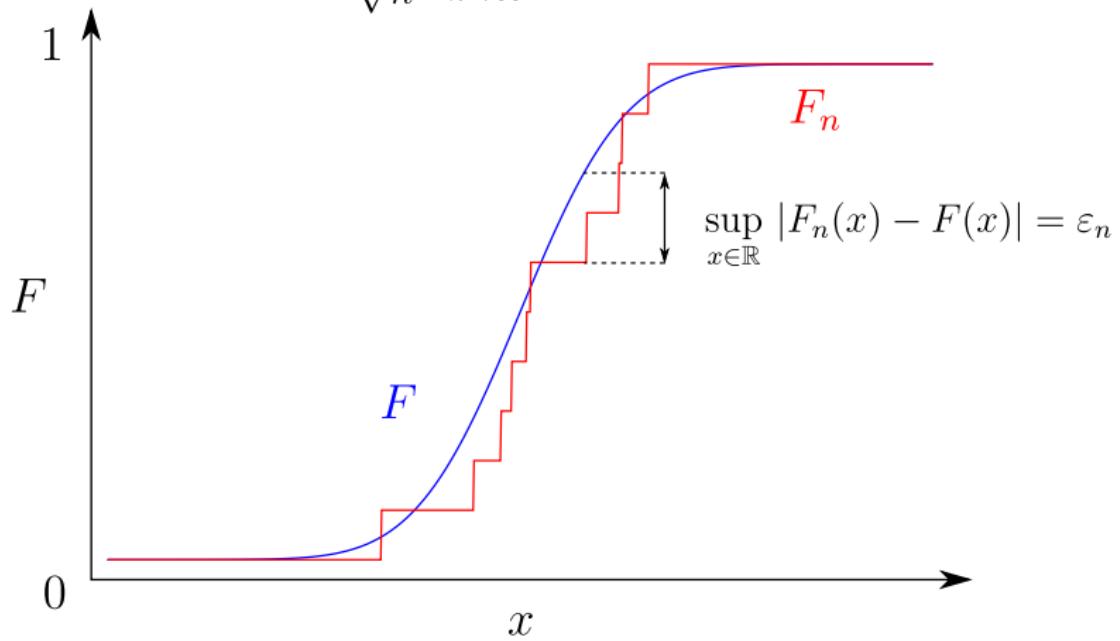
$$\mathbb{P}(\varepsilon_n \geq ?) = ?$$



Simulation : fonction de répartition

Comment contrôler la qualité de la simulation ?

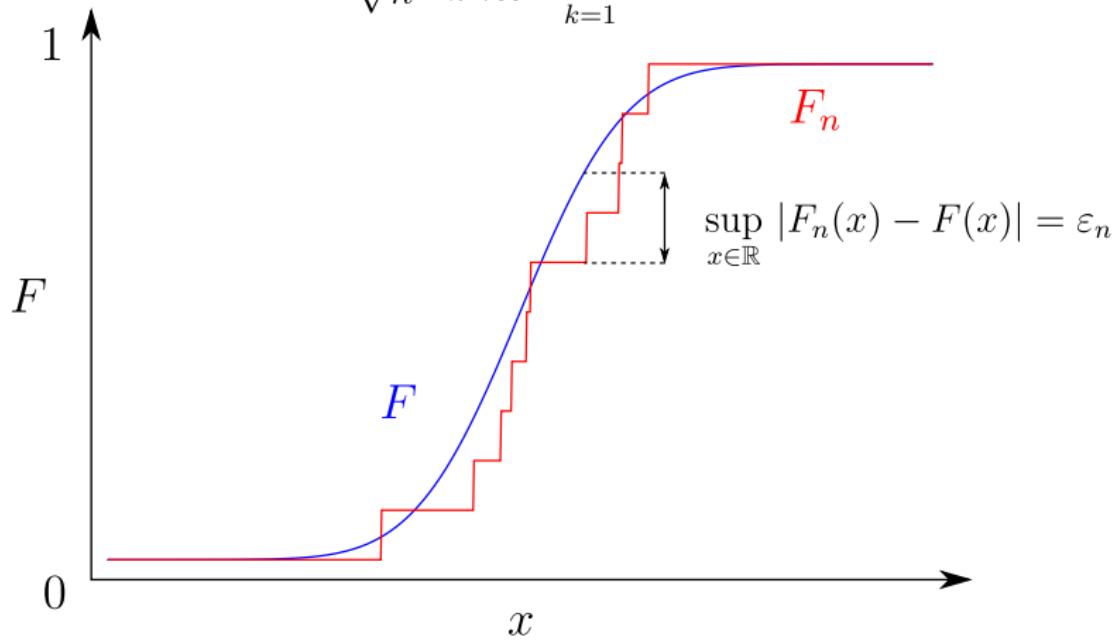
$$\mathbb{P}\left(\varepsilon_n \geqslant \frac{c}{\sqrt{n}}\right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$$



Simulation : fonction de répartition

Comment contrôler la qualité de la simulation ?

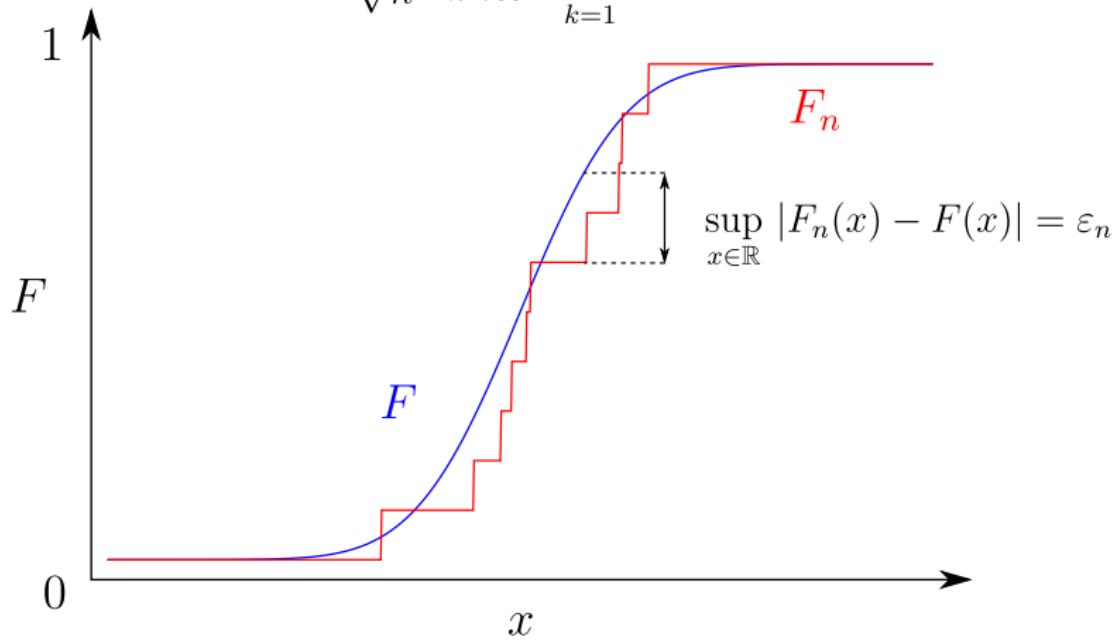
$$\mathbb{P}(\varepsilon_n \geqslant \frac{c}{\sqrt{n}}) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 2 \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k-1} \exp(-2c^2 k^2)$$



Simulation : fonction de répartition

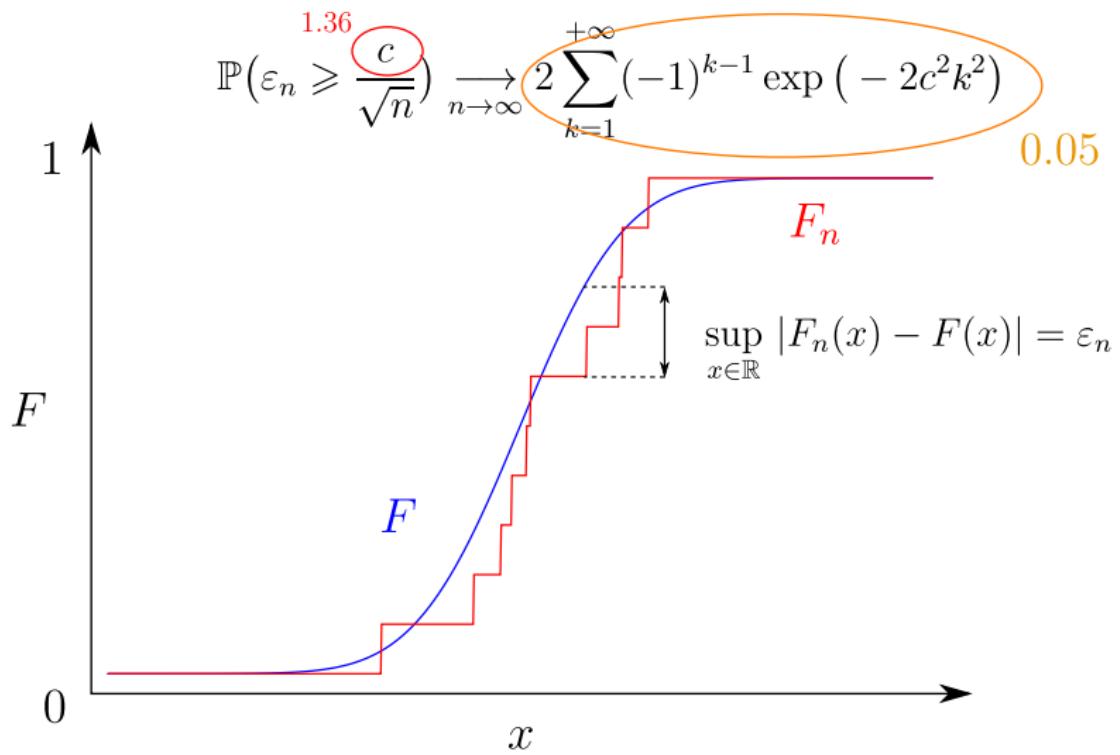
Comment contrôler la qualité de la simulation ?

$$\mathbb{P}\left(\varepsilon_n \geqslant \frac{c}{\sqrt{n}}\right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 2 \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k-1} \exp(-2c^2 k^2)$$



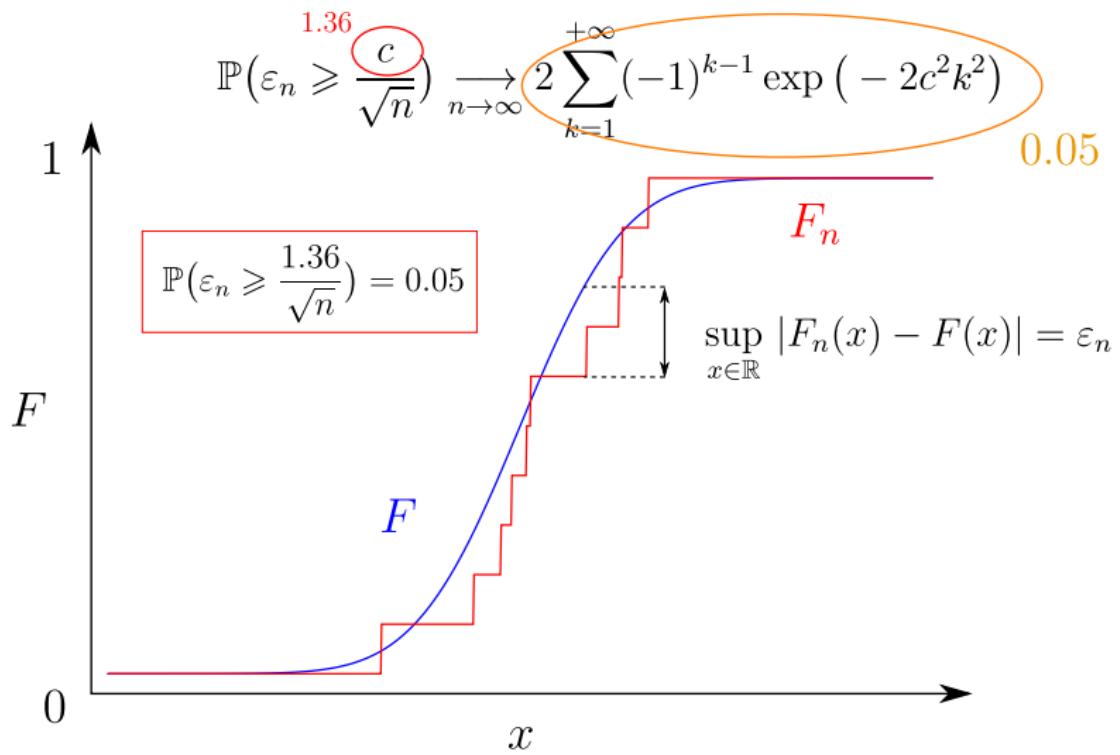
Simulation : fonction de répartition

Comment contrôler la qualité de la simulation ?



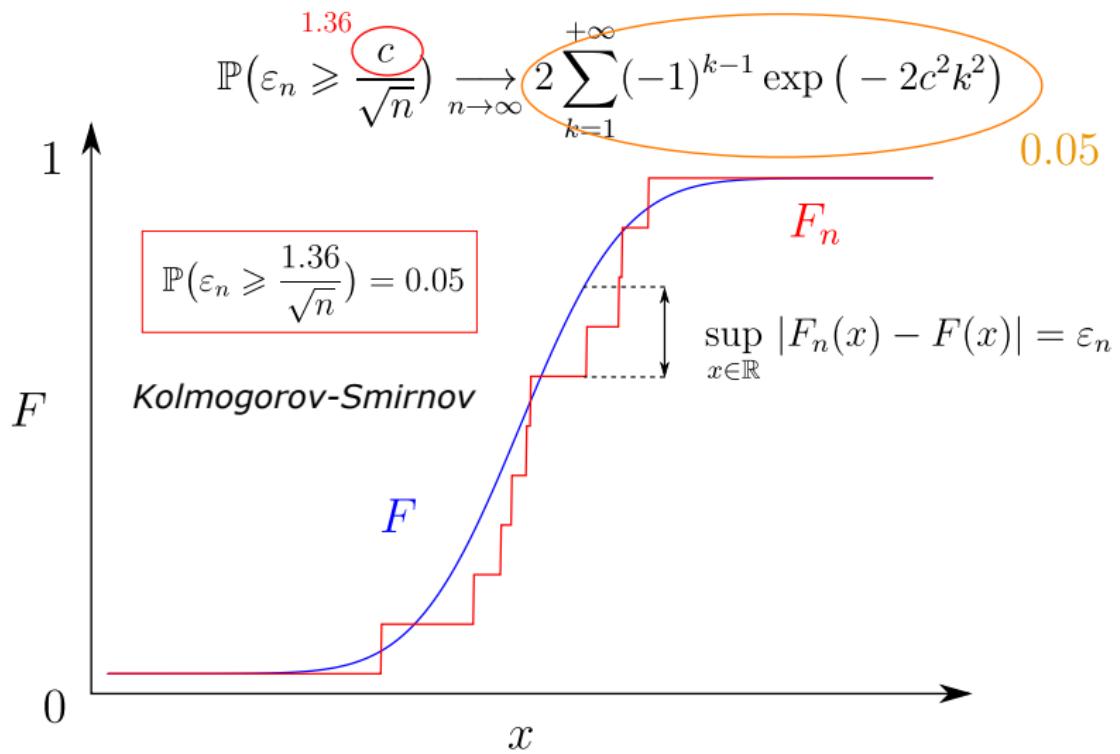
Simulation : fonction de répartition

Comment contrôler la qualité de la simulation ?



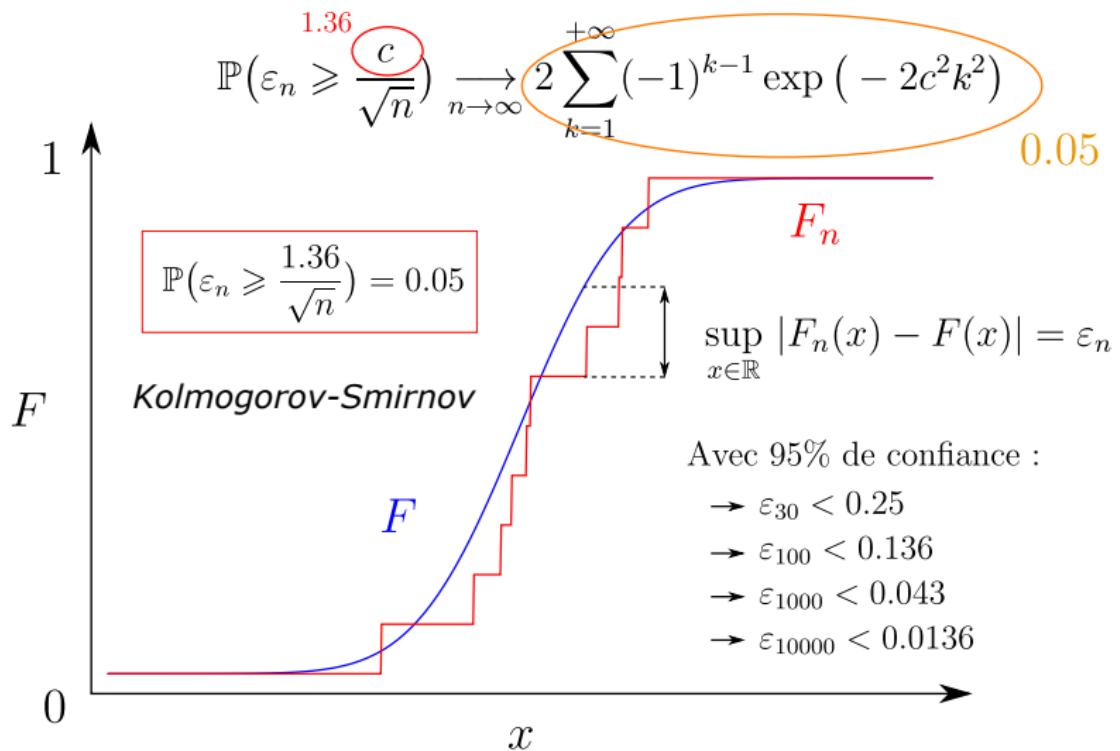
Simulation : fonction de répartition

Comment contrôler la qualité de la simulation ?



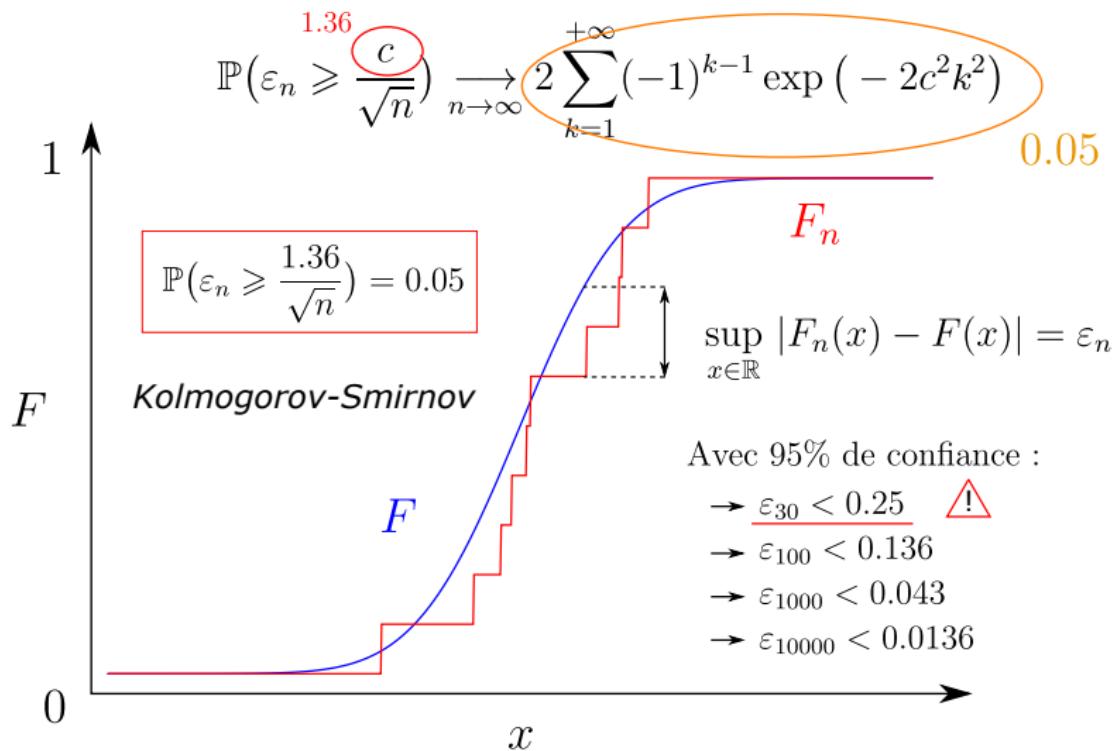
Simulation : fonction de répartition

Comment contrôler la qualité de la simulation ?



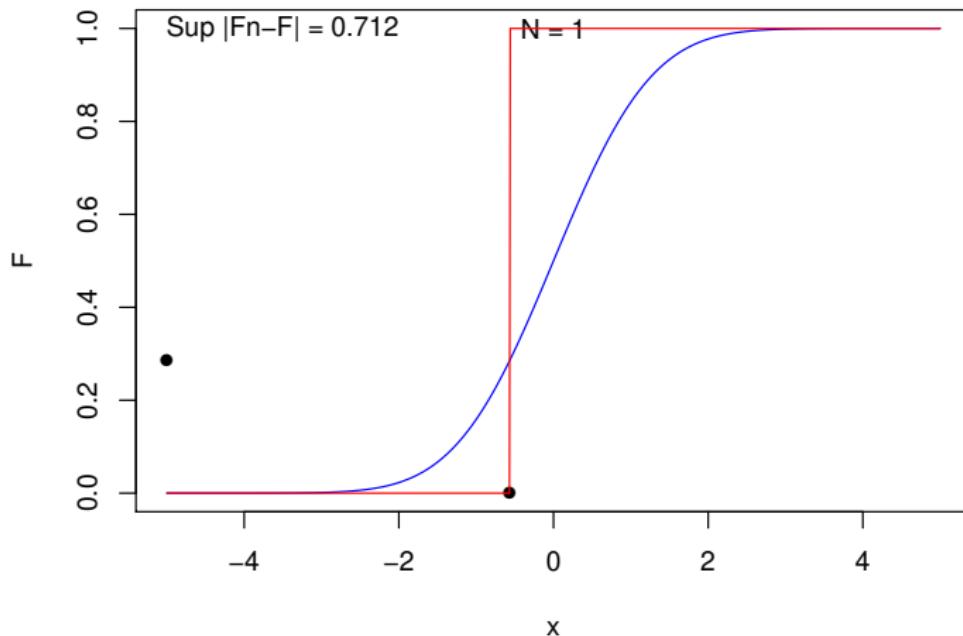
Simulation : fonction de répartition

Comment contrôler la qualité de la simulation ?



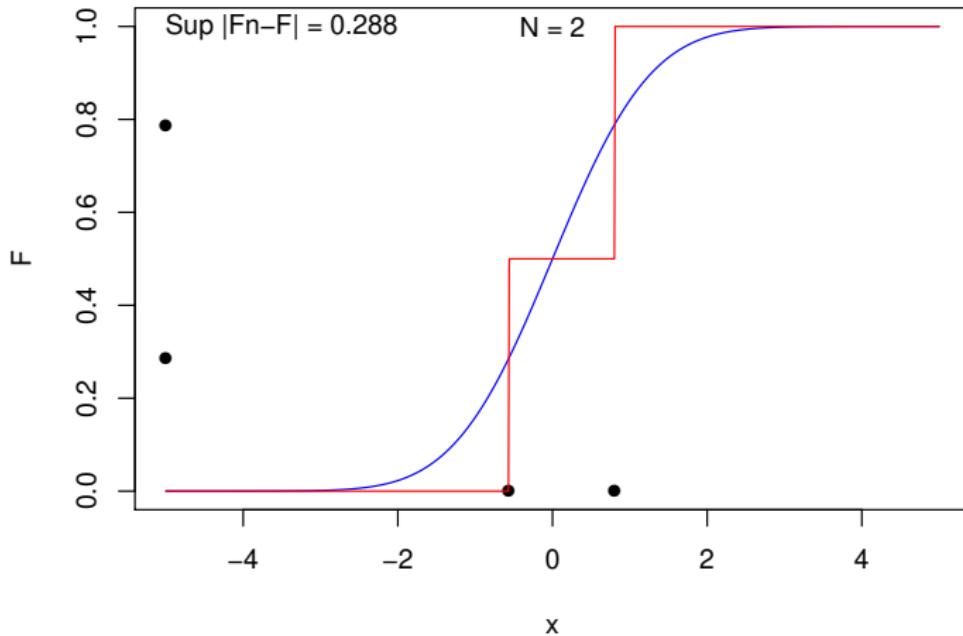
Simulation : fonction de répartition

Comment contrôler la qualité de la simulation ?



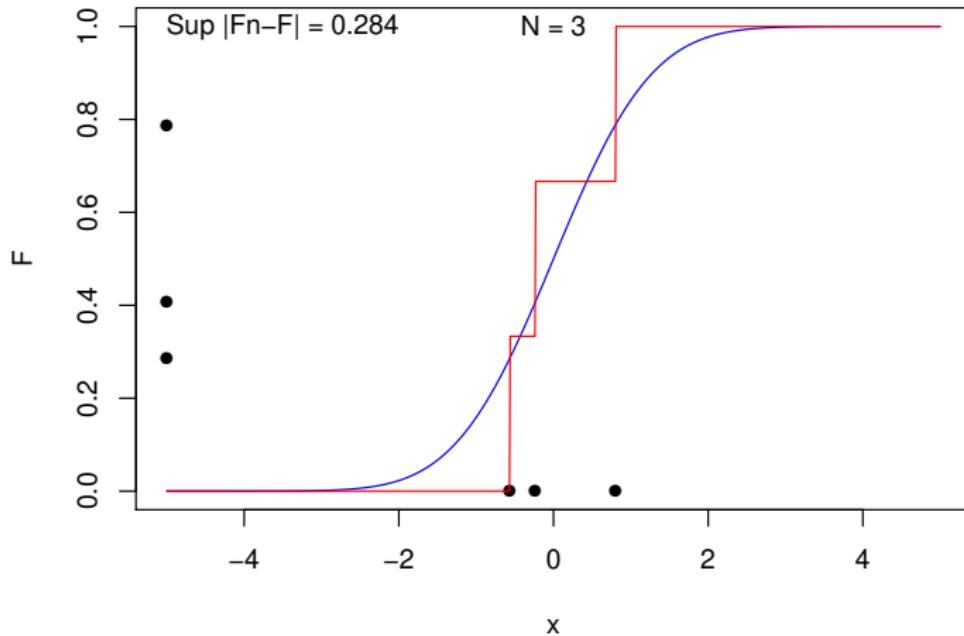
Simulation : fonction de répartition

Comment contrôler la qualité de la simulation ?



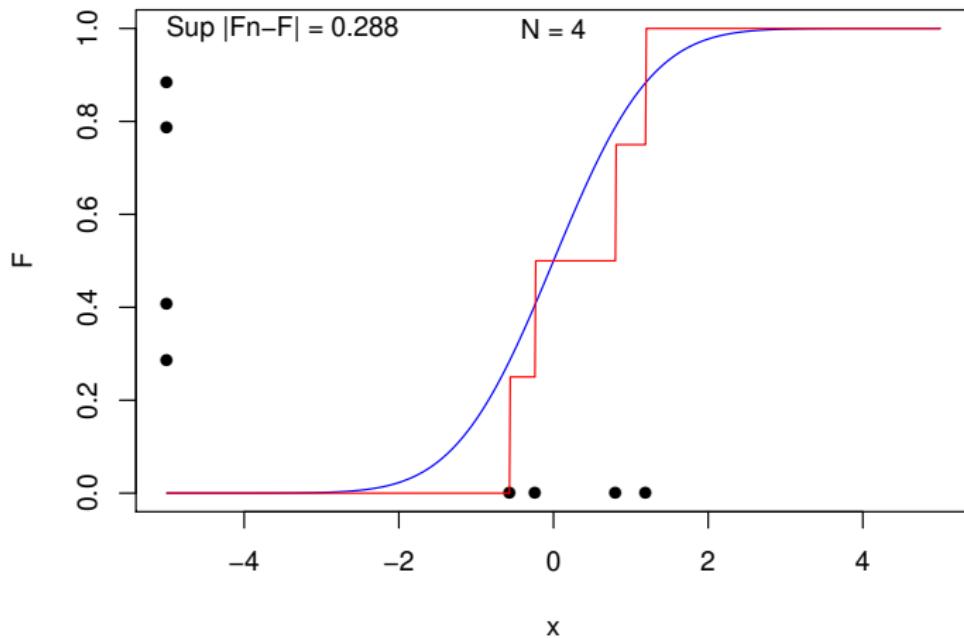
Simulation : fonction de répartition

Comment contrôler la qualité de la simulation ?



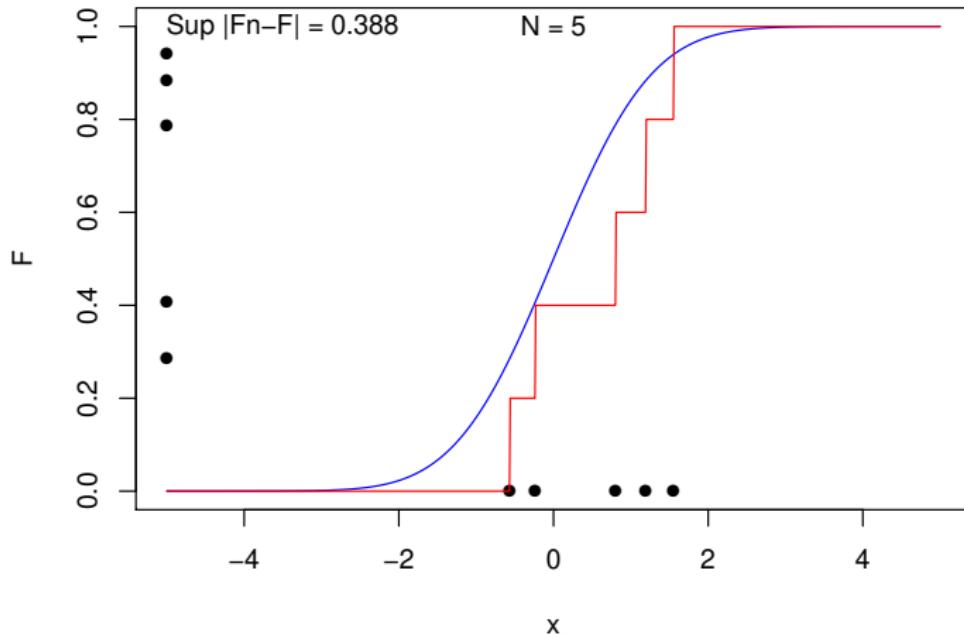
Simulation : fonction de répartition

Comment contrôler la qualité de la simulation ?



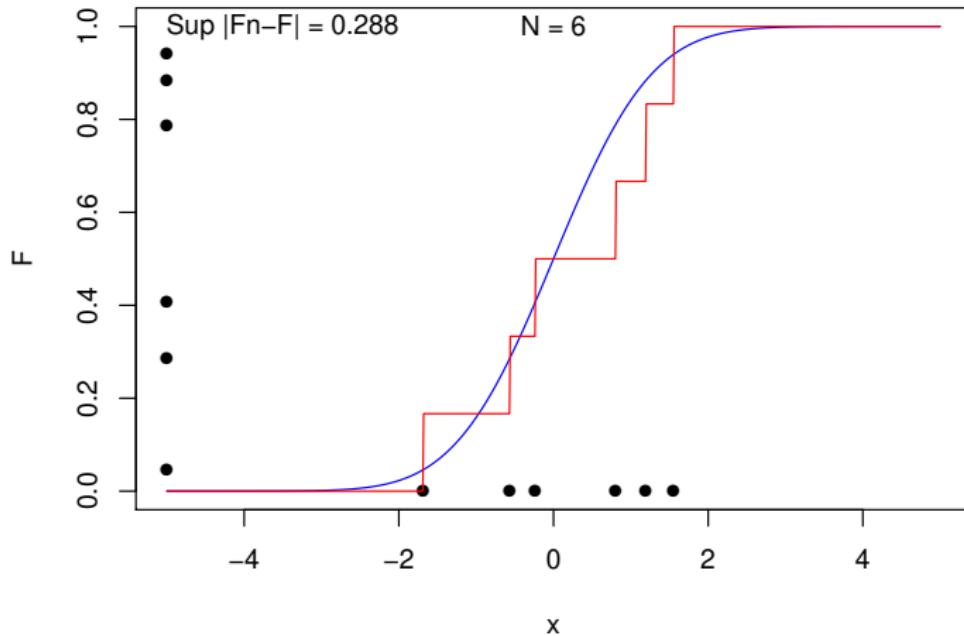
Simulation : fonction de répartition

Comment contrôler la qualité de la simulation ?



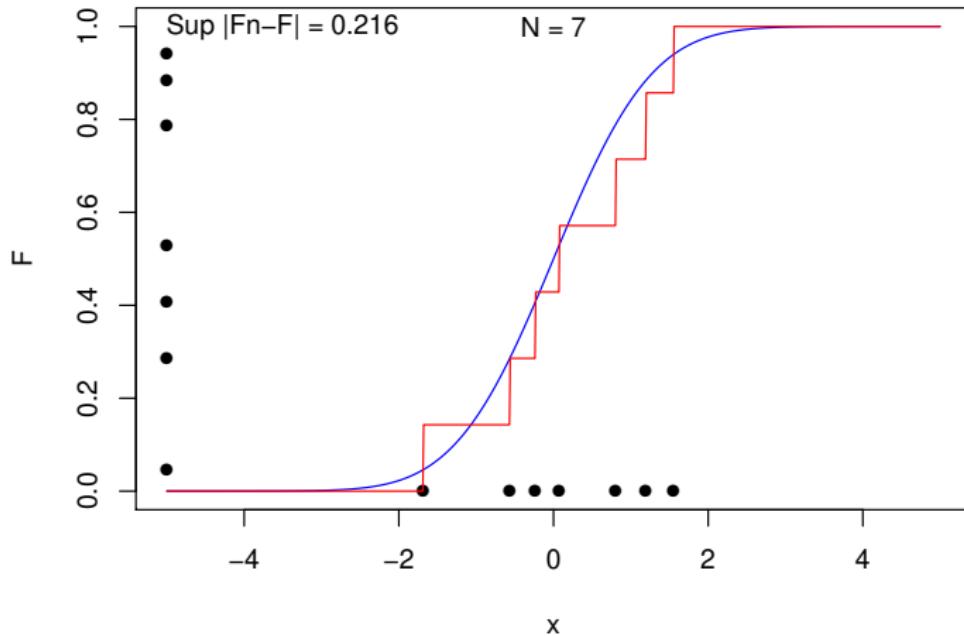
Simulation : fonction de répartition

Comment contrôler la qualité de la simulation ?



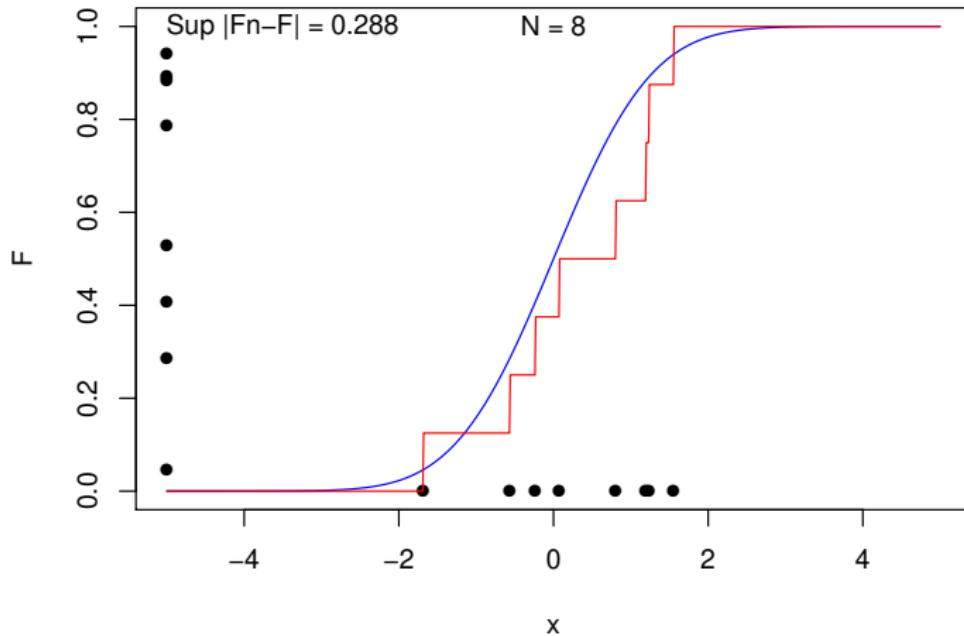
Simulation : fonction de répartition

Comment contrôler la qualité de la simulation ?



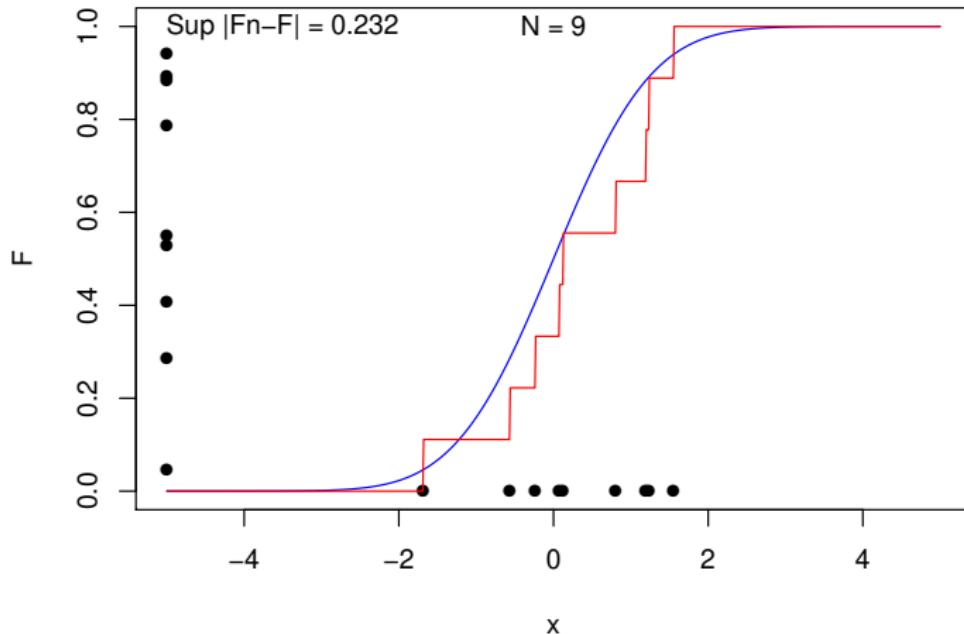
Simulation : fonction de répartition

Comment contrôler la qualité de la simulation ?



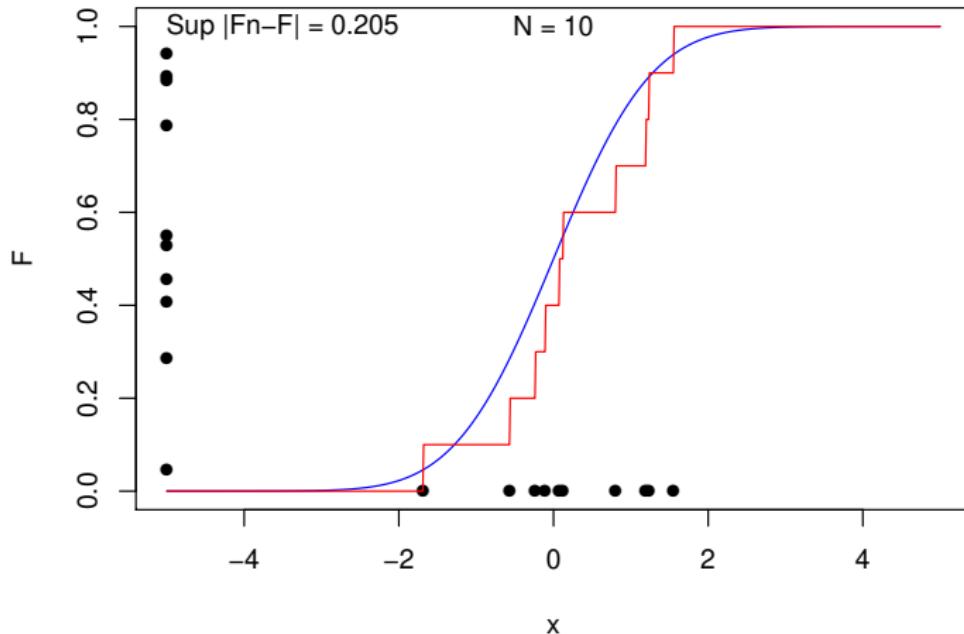
Simulation : fonction de répartition

Comment contrôler la qualité de la simulation ?



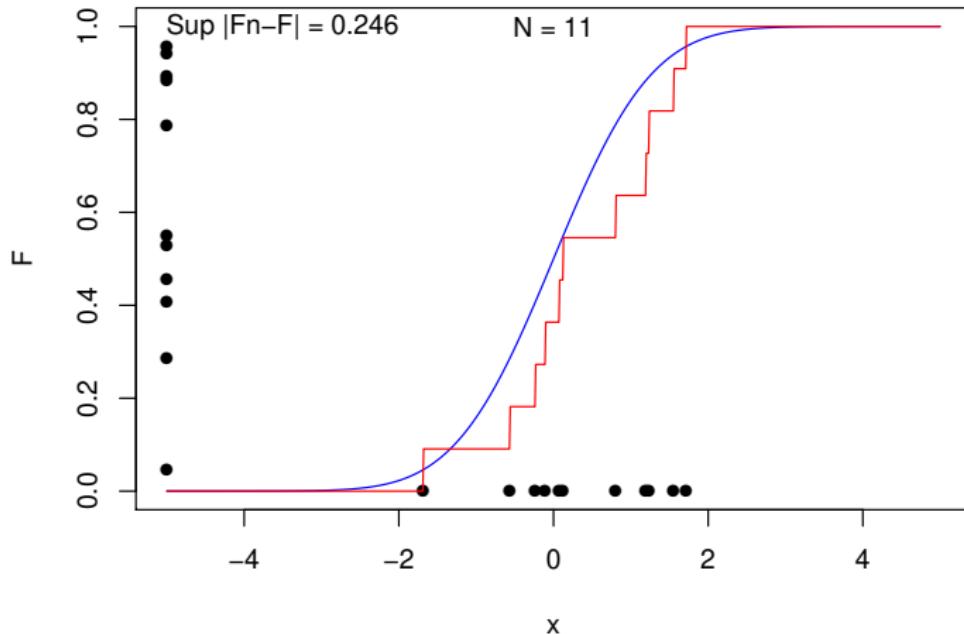
Simulation : fonction de répartition

Comment contrôler la qualité de la simulation ?



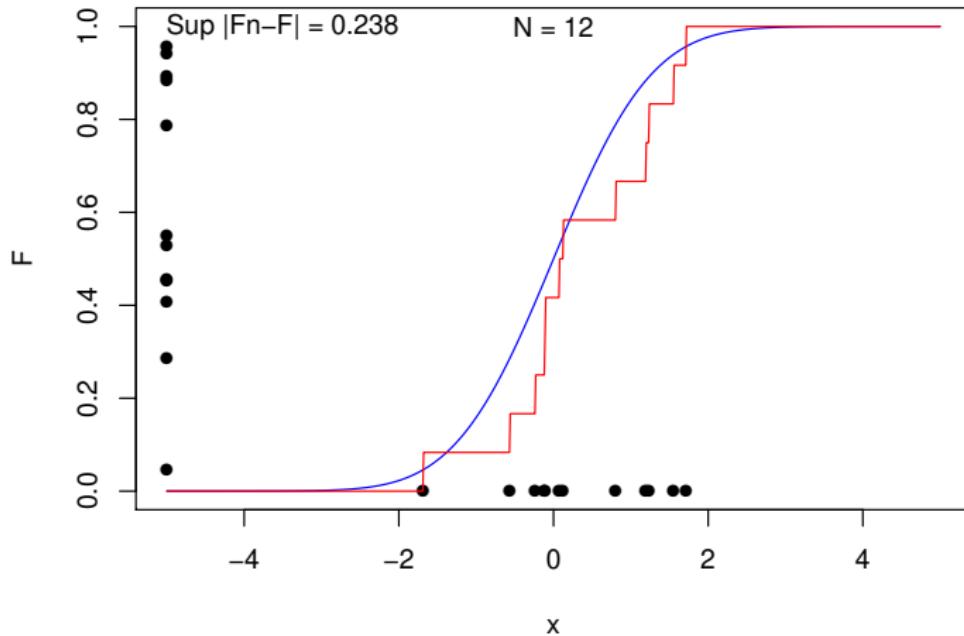
Simulation : fonction de répartition

Comment contrôler la qualité de la simulation ?



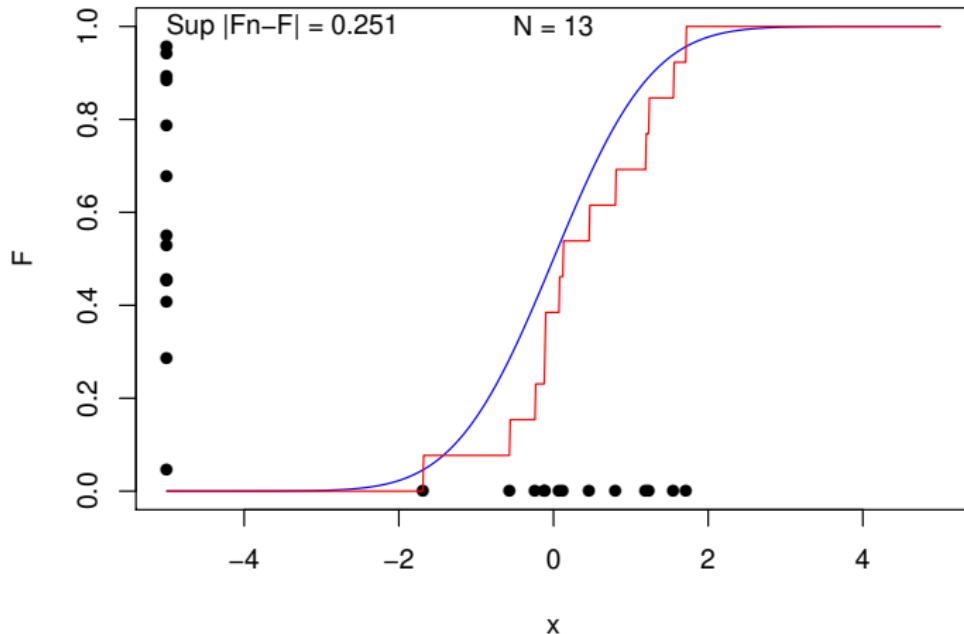
Simulation : fonction de répartition

Comment contrôler la qualité de la simulation ?



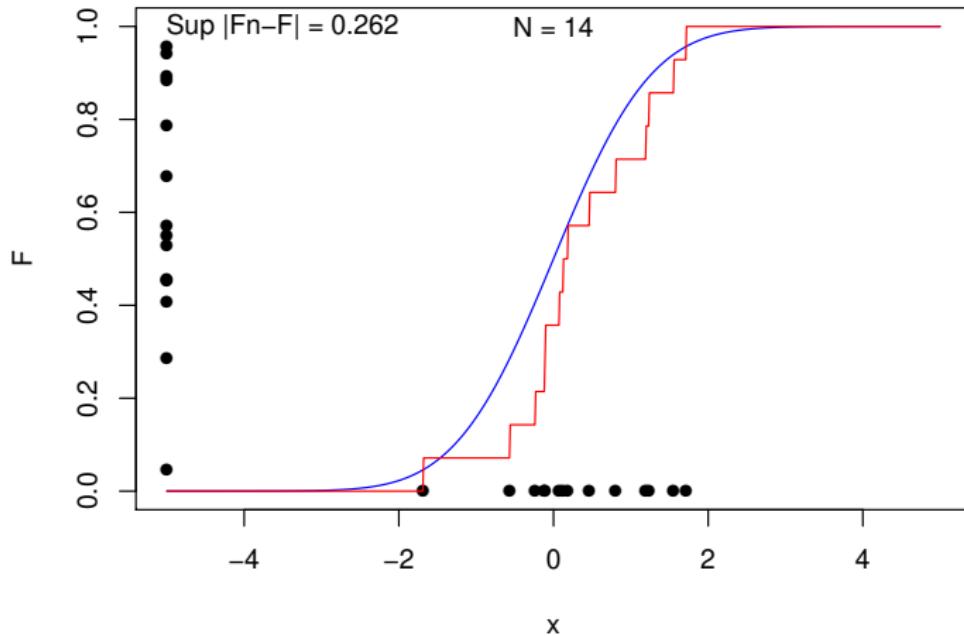
Simulation : fonction de répartition

Comment contrôler la qualité de la simulation ?



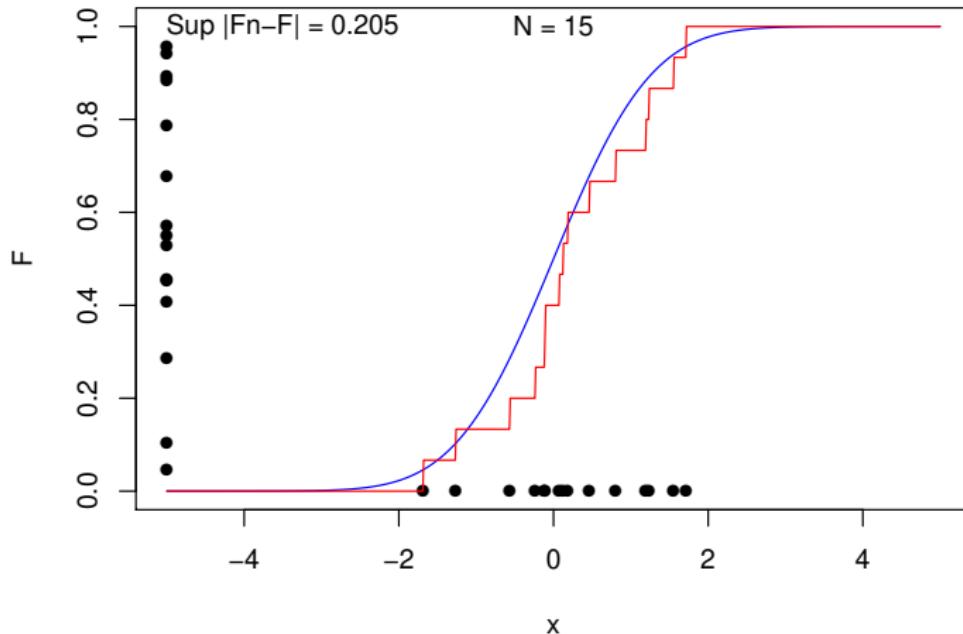
Simulation : fonction de répartition

Comment contrôler la qualité de la simulation ?



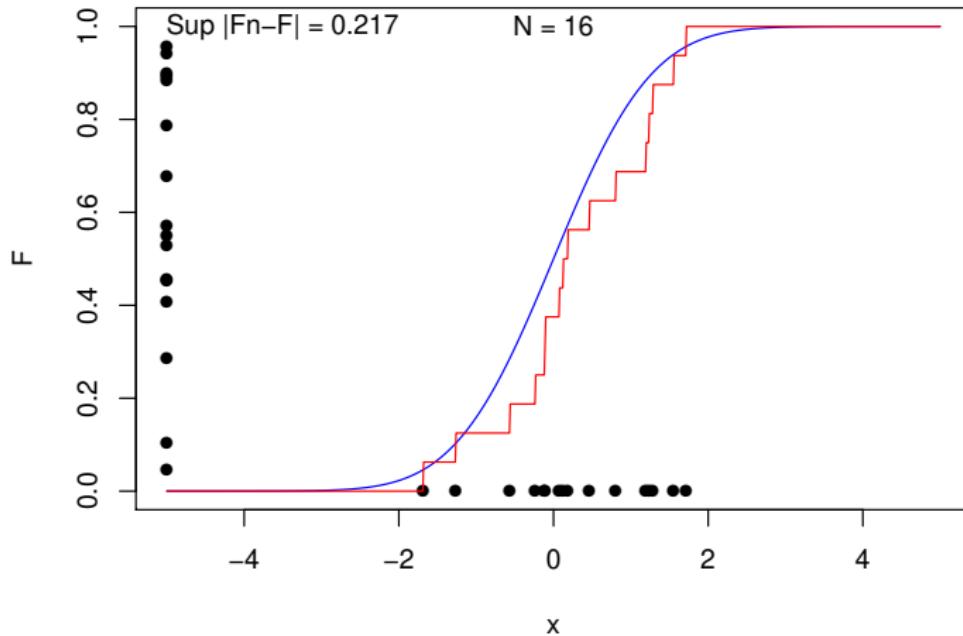
Simulation : fonction de répartition

Comment contrôler la qualité de la simulation ?



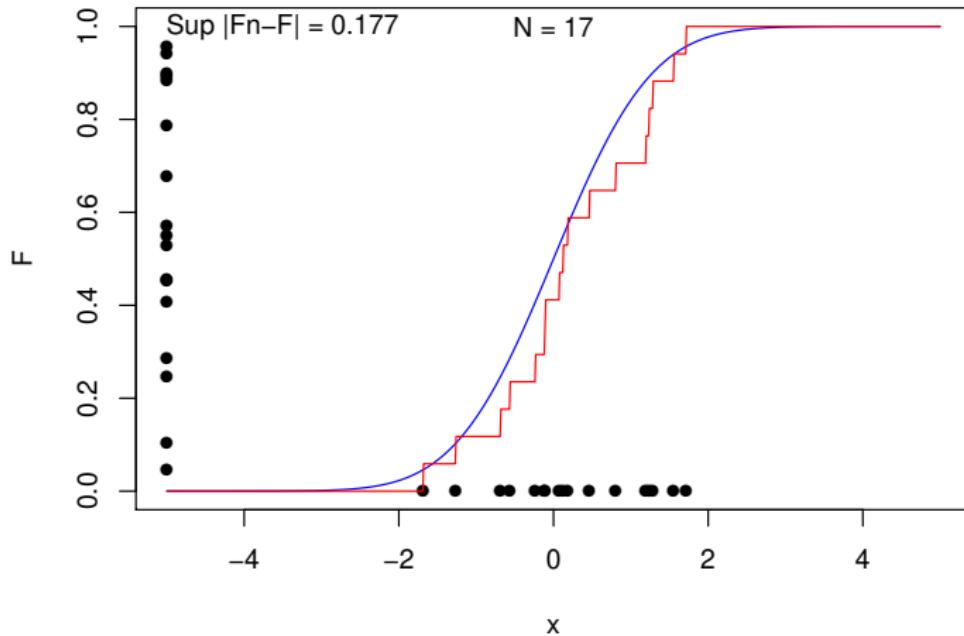
Simulation : fonction de répartition

Comment contrôler la qualité de la simulation ?



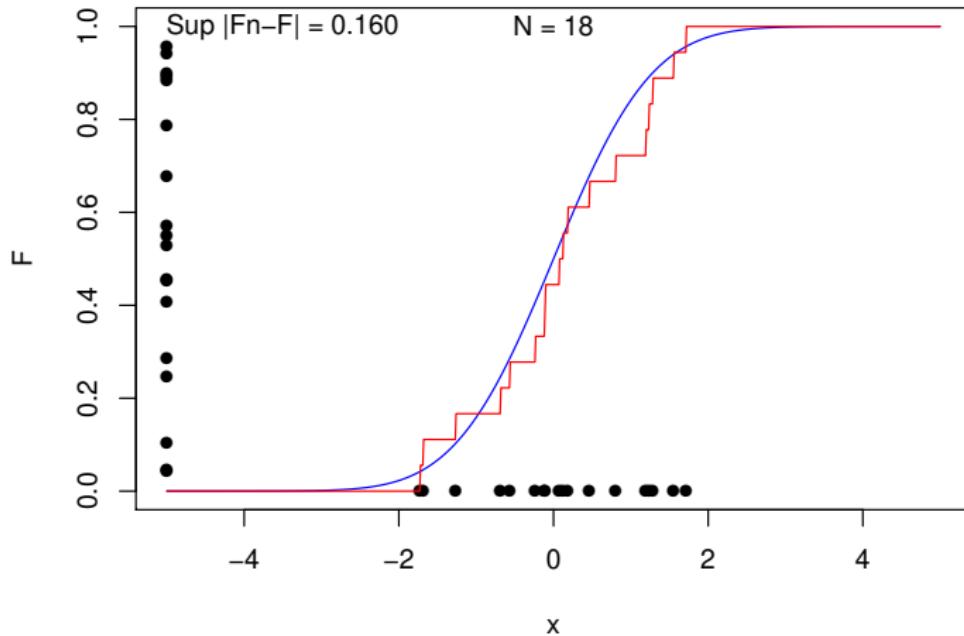
Simulation : fonction de répartition

Comment contrôler la qualité de la simulation ?



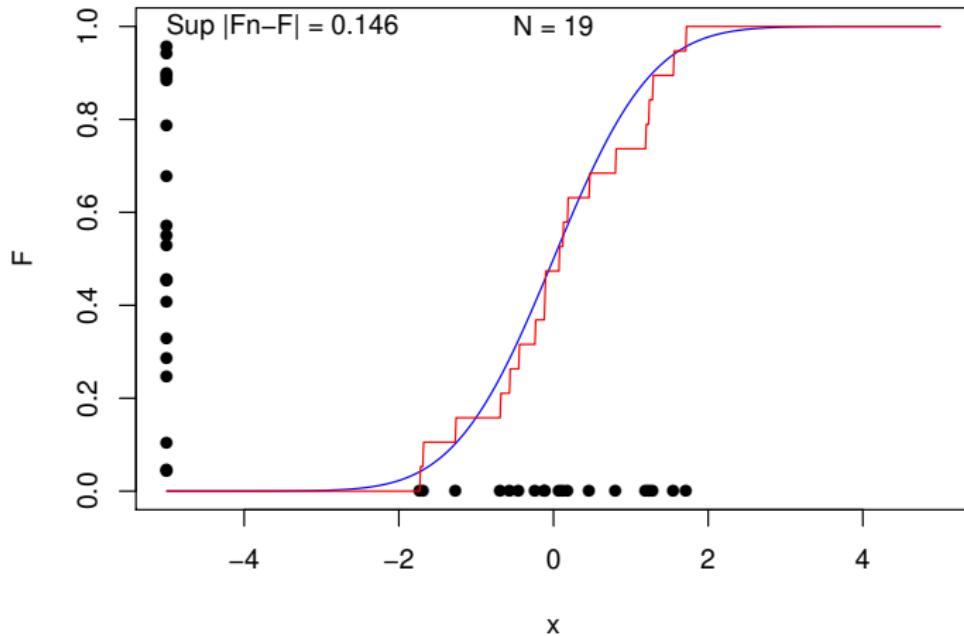
Simulation : fonction de répartition

Comment contrôler la qualité de la simulation ?



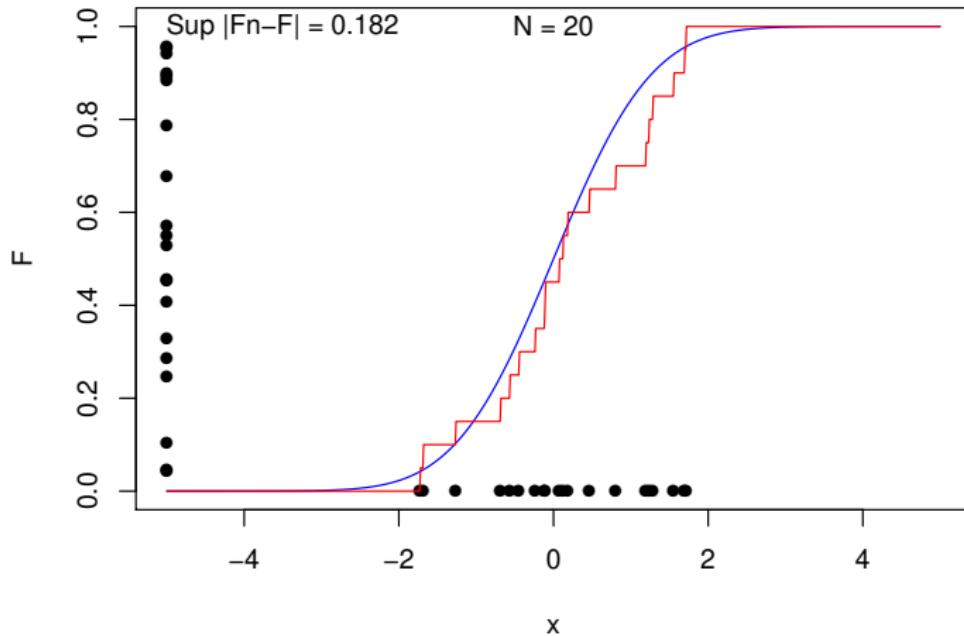
Simulation : fonction de répartition

Comment contrôler la qualité de la simulation ?



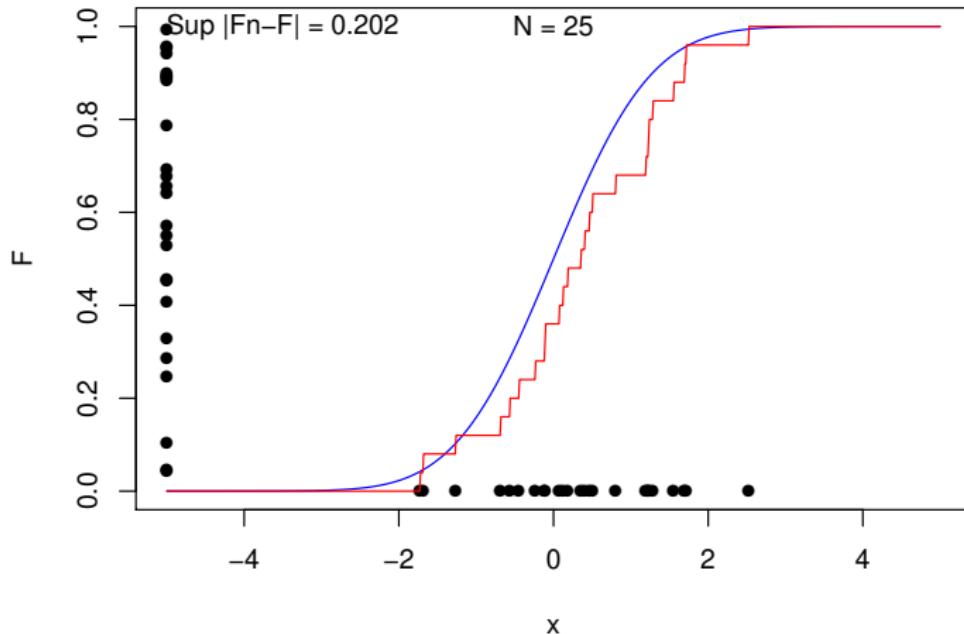
Simulation : fonction de répartition

Comment contrôler la qualité de la simulation ?



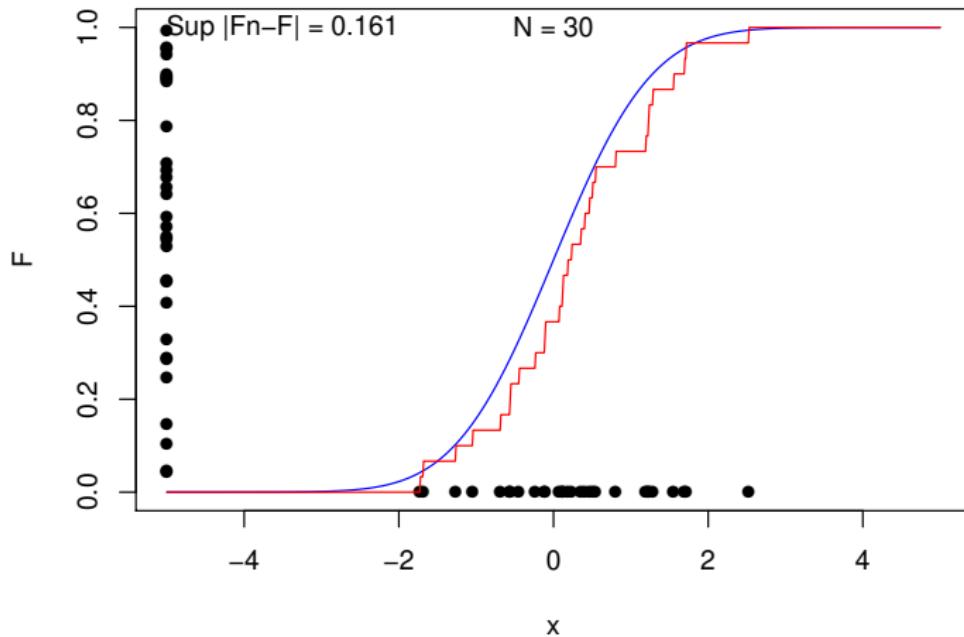
Simulation : fonction de répartition

Comment contrôler la qualité de la simulation ?



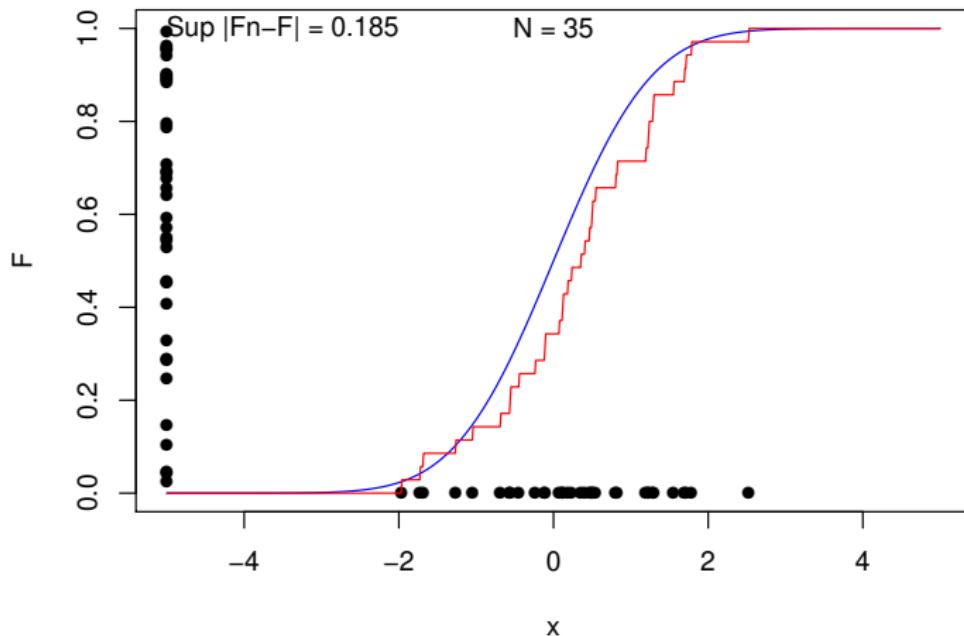
Simulation : fonction de répartition

Comment contrôler la qualité de la simulation ?



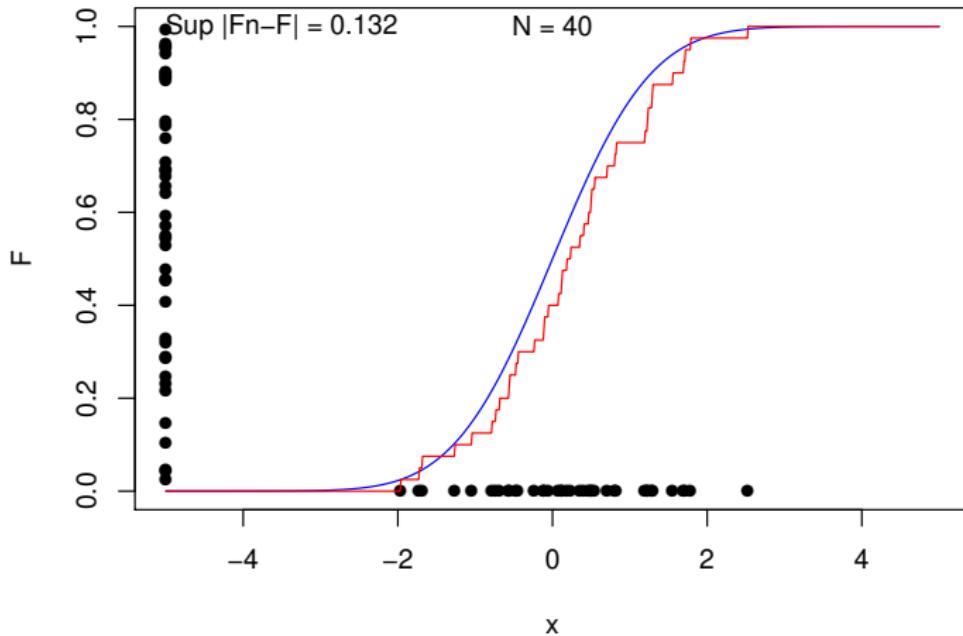
Simulation : fonction de répartition

Comment contrôler la qualité de la simulation ?



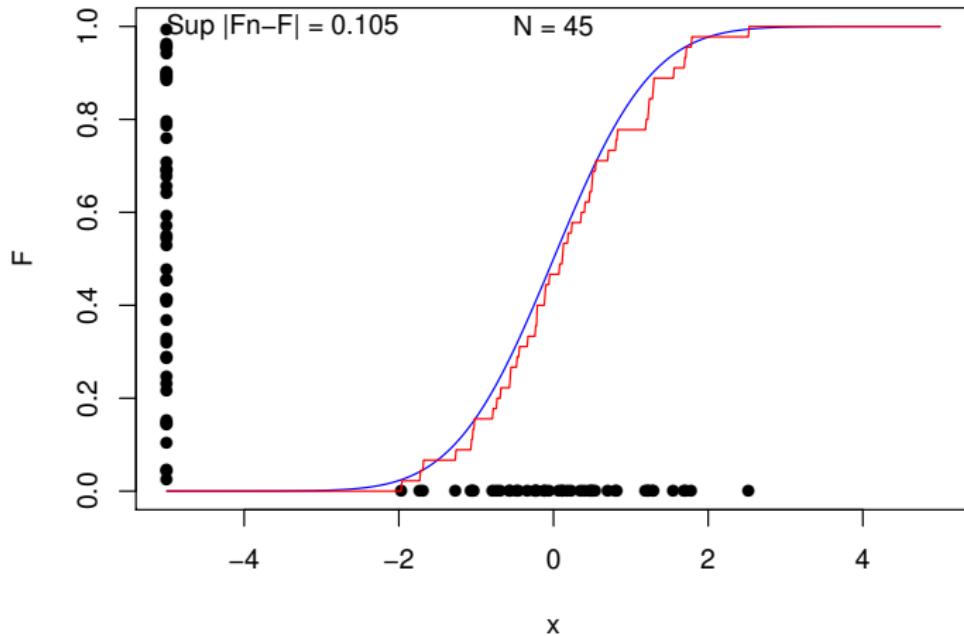
Simulation : fonction de répartition

Comment contrôler la qualité de la simulation ?



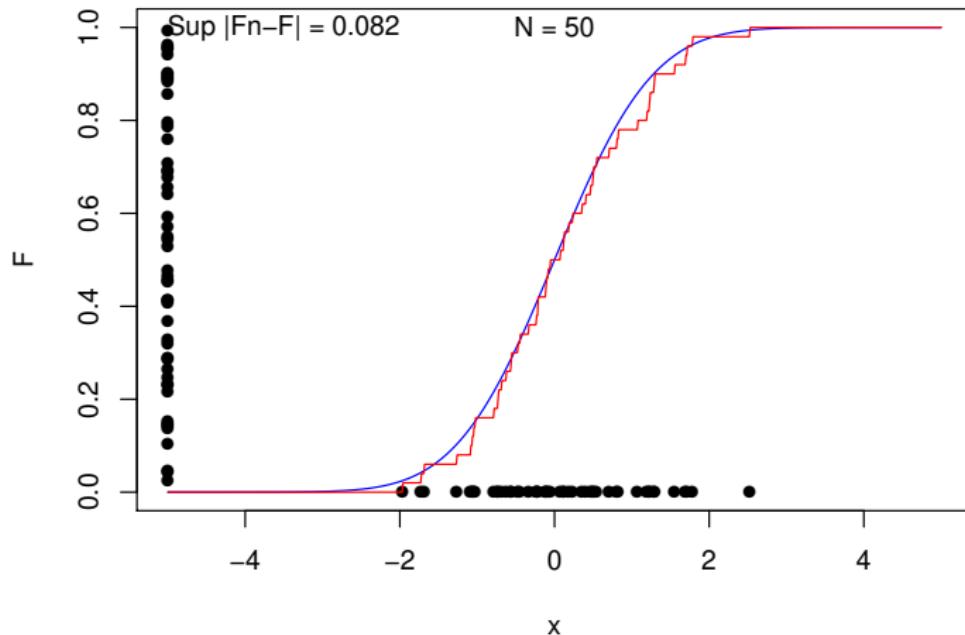
Simulation : fonction de répartition

Comment contrôler la qualité de la simulation ?



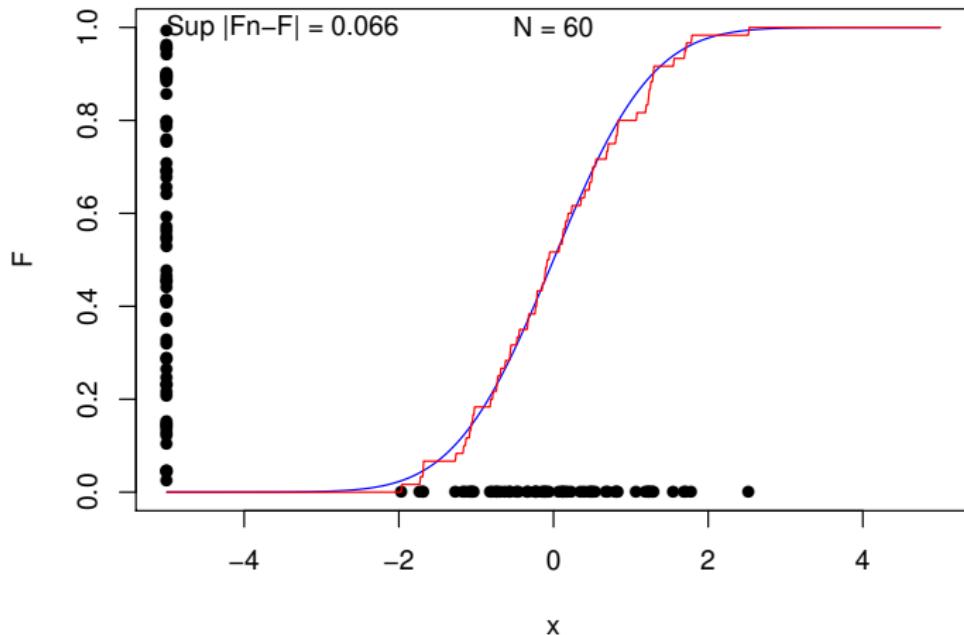
Simulation : fonction de répartition

Comment contrôler la qualité de la simulation ?



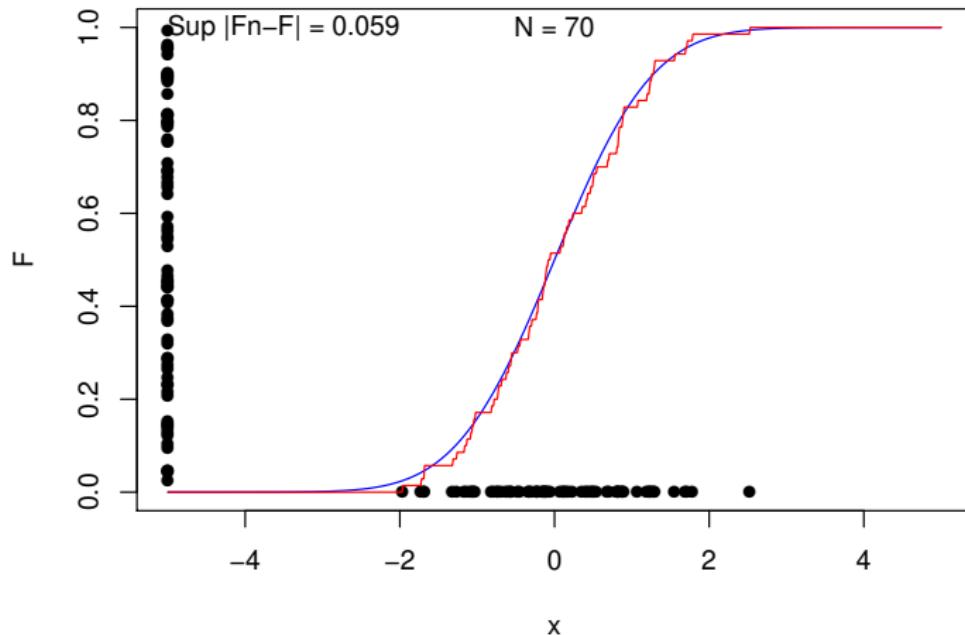
Simulation : fonction de répartition

Comment contrôler la qualité de la simulation ?



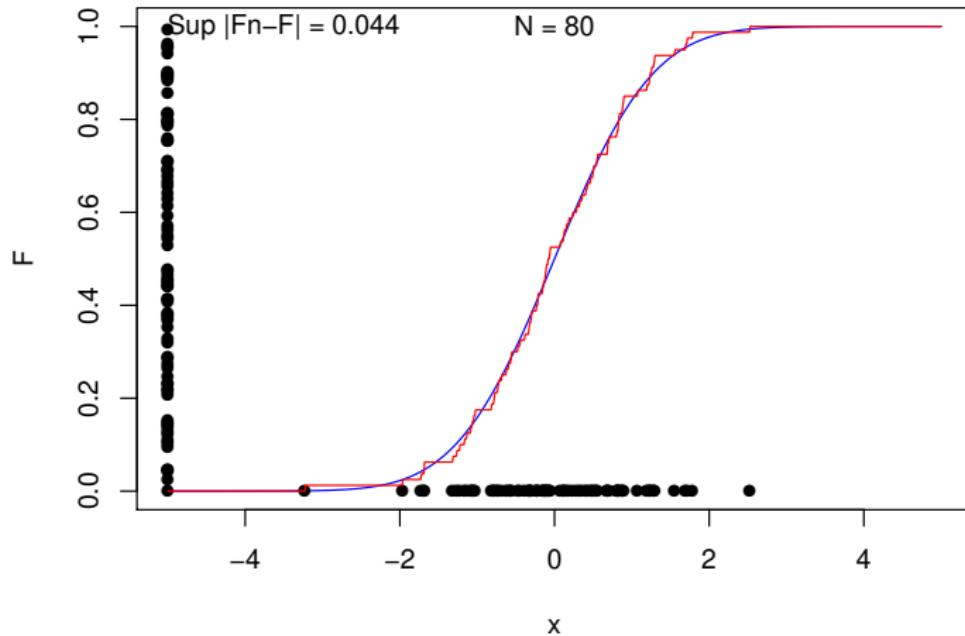
Simulation : fonction de répartition

Comment contrôler la qualité de la simulation ?



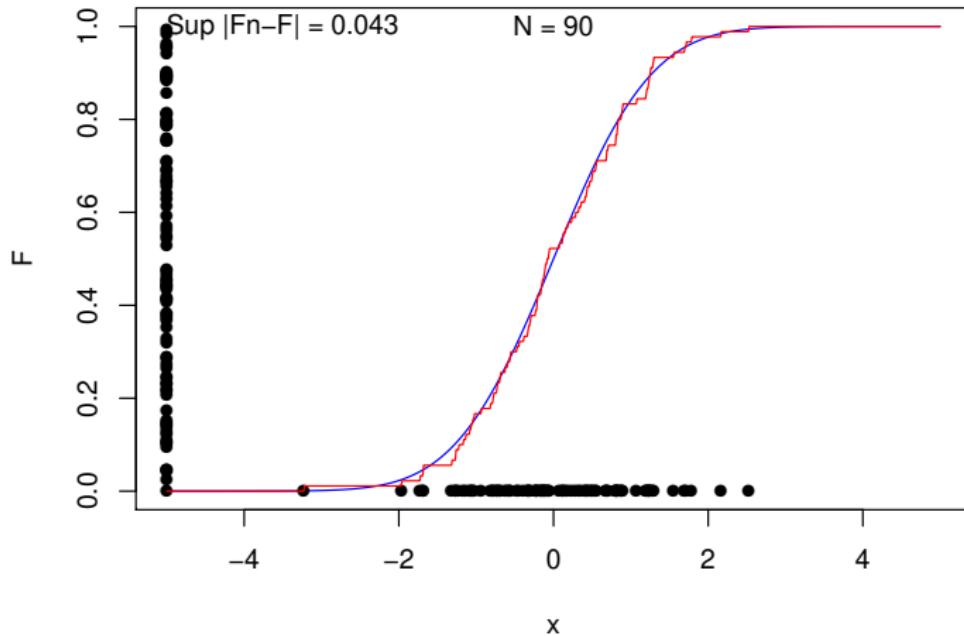
Simulation : fonction de répartition

Comment contrôler la qualité de la simulation ?



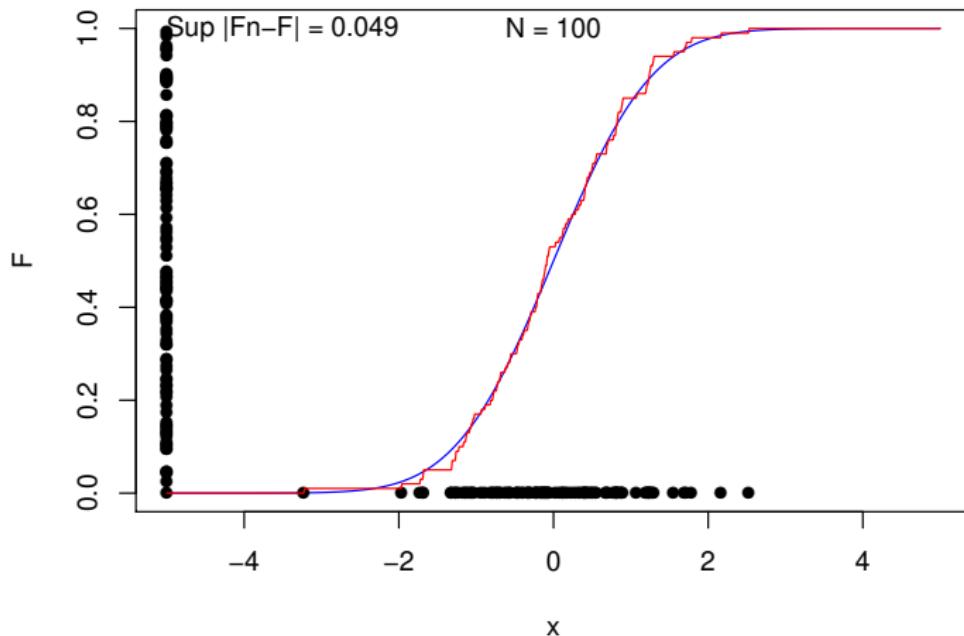
Simulation : fonction de répartition

Comment contrôler la qualité de la simulation ?



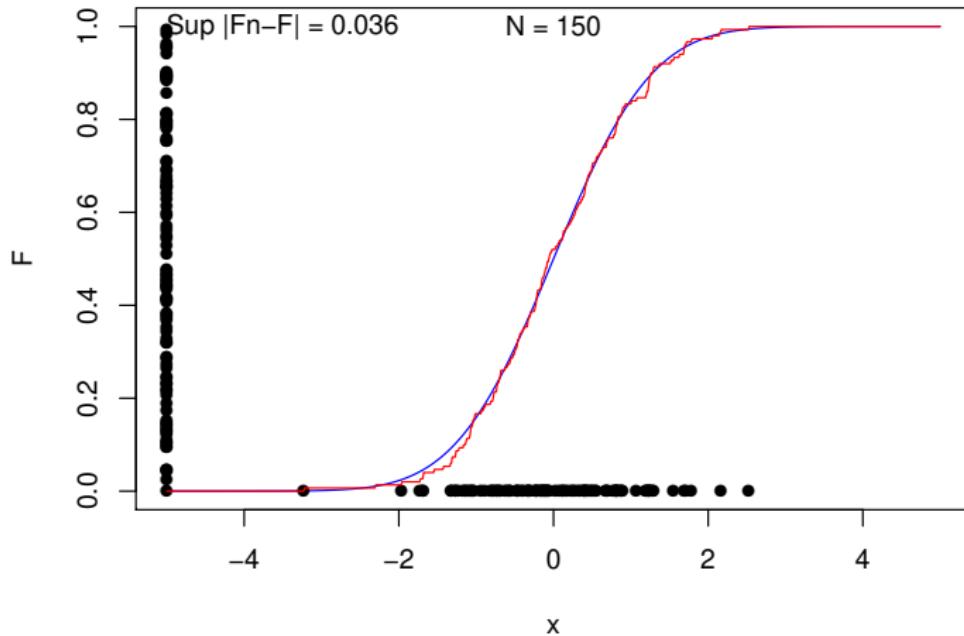
Simulation : fonction de répartition

Comment contrôler la qualité de la simulation ?



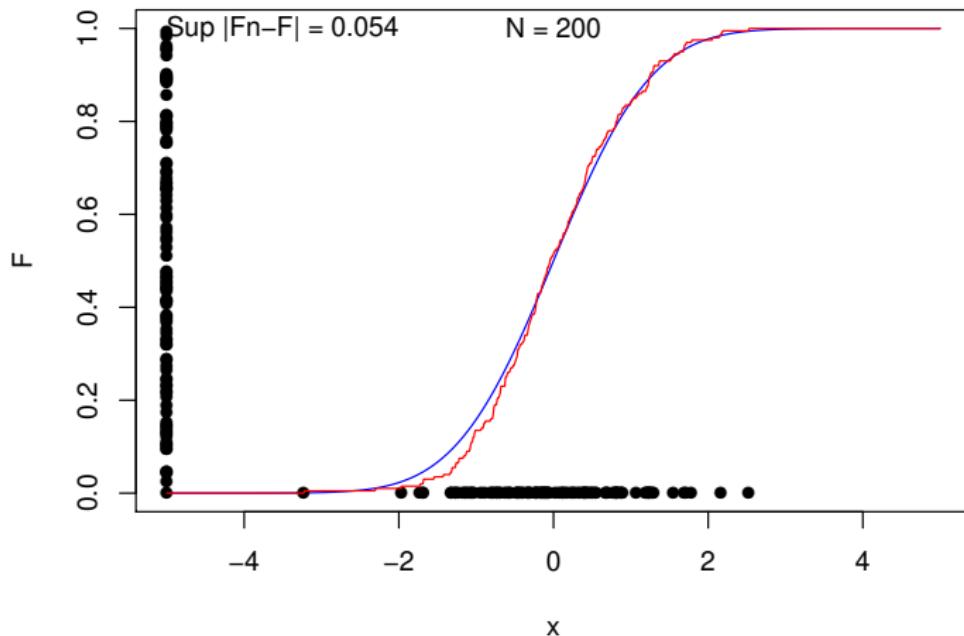
Simulation : fonction de répartition

Comment contrôler la qualité de la simulation ?



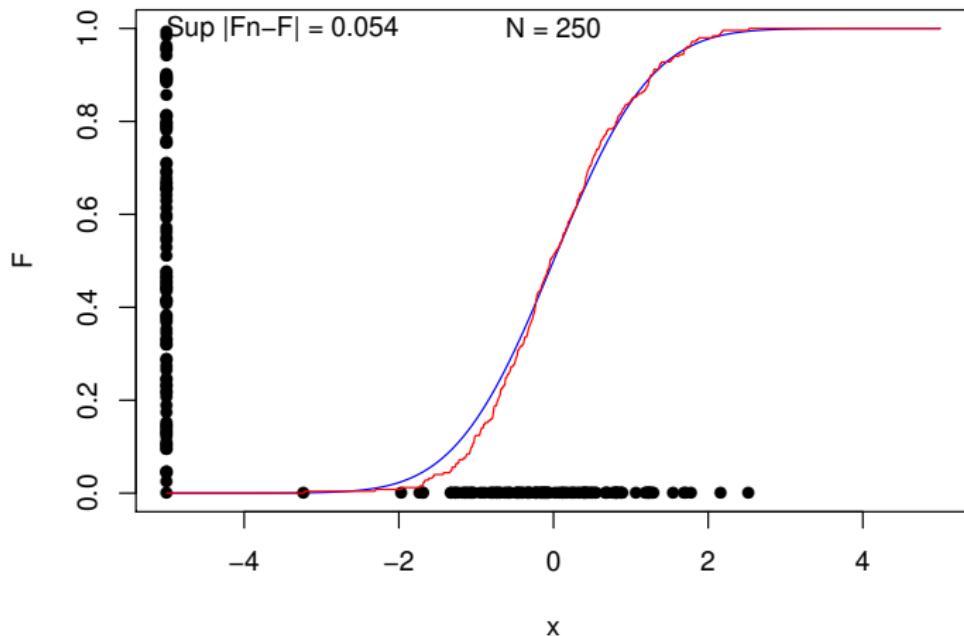
Simulation : fonction de répartition

Comment contrôler la qualité de la simulation ?



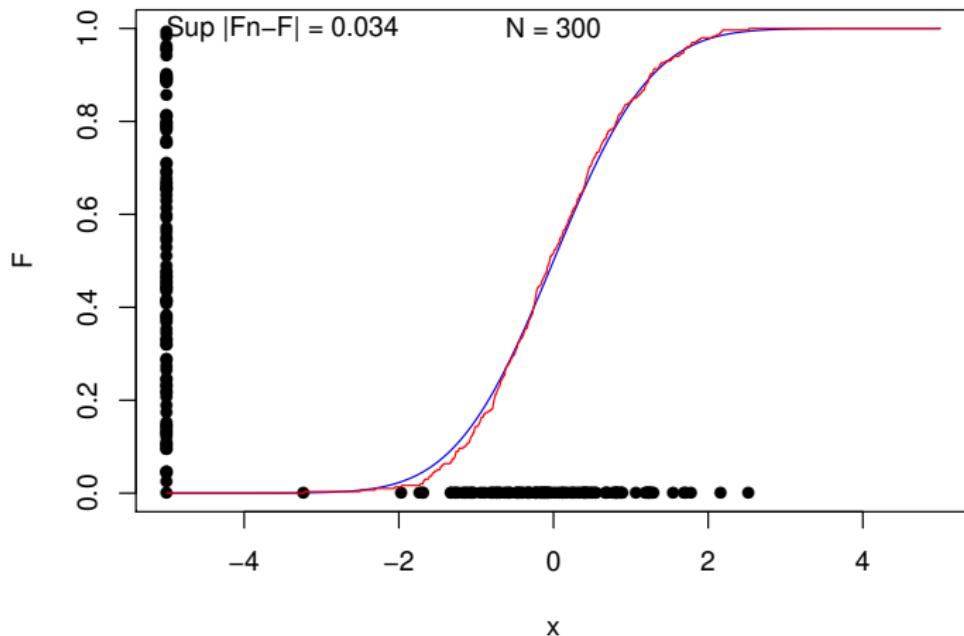
Simulation : fonction de répartition

Comment contrôler la qualité de la simulation ?



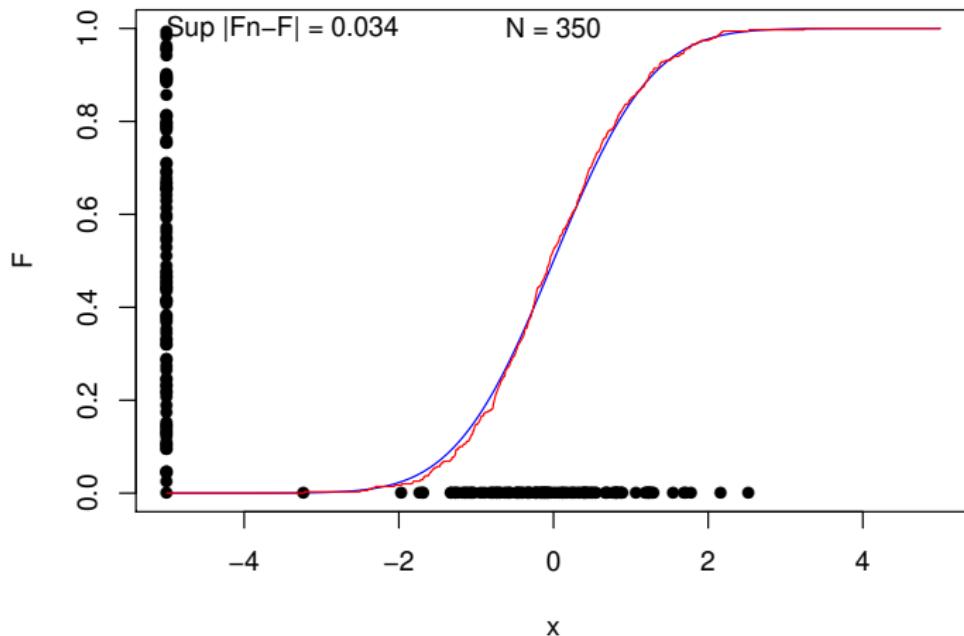
Simulation : fonction de répartition

Comment contrôler la qualité de la simulation ?



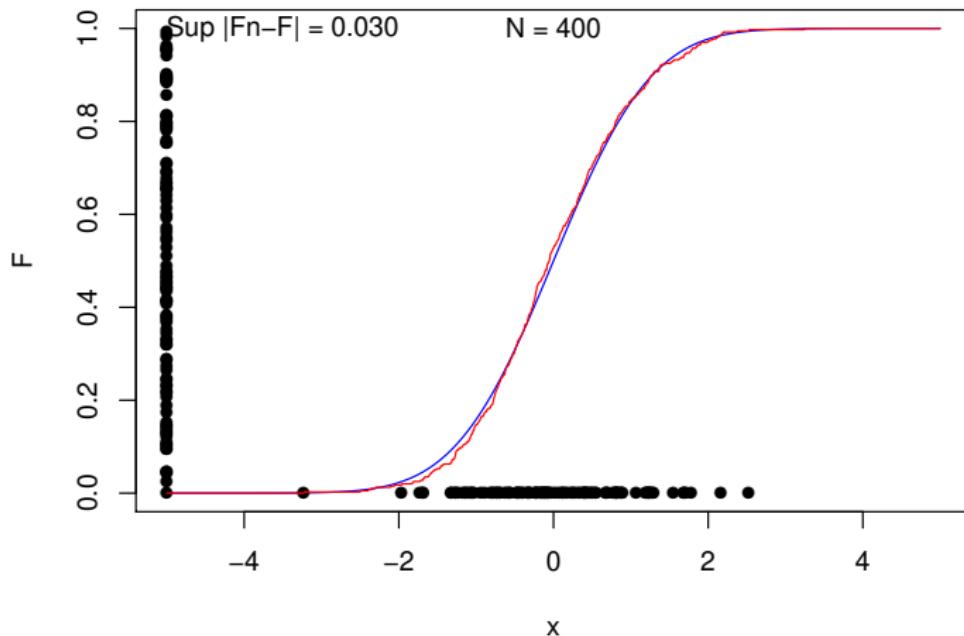
Simulation : fonction de répartition

Comment contrôler la qualité de la simulation ?



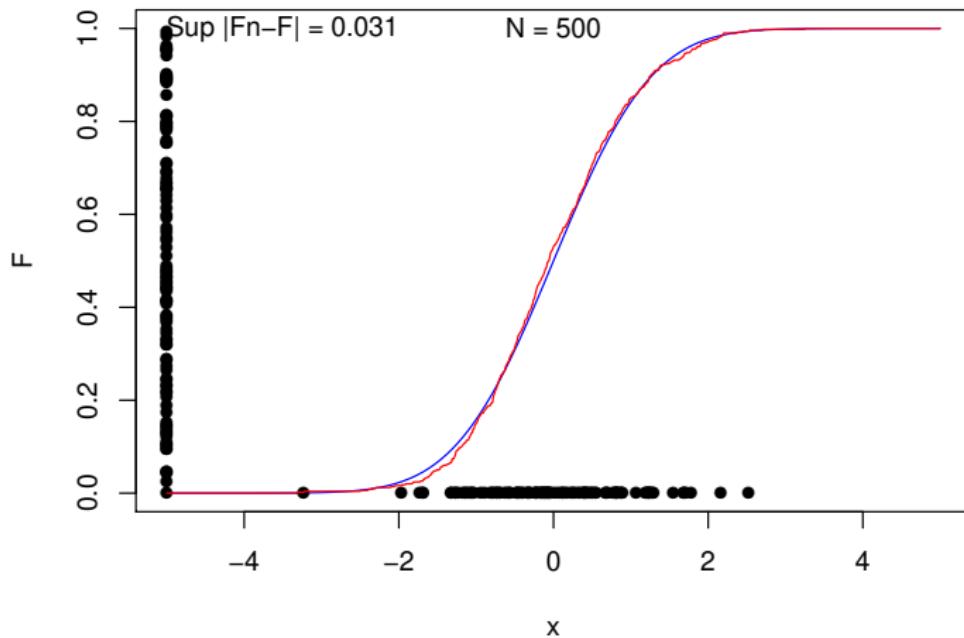
Simulation : fonction de répartition

Comment contrôler la qualité de la simulation ?



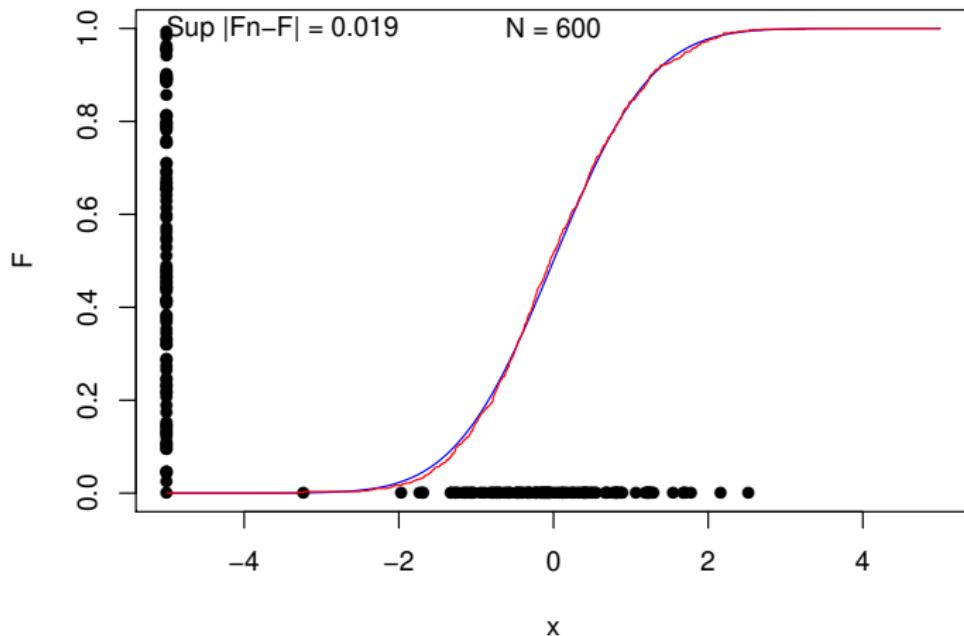
Simulation : fonction de répartition

Comment contrôler la qualité de la simulation ?



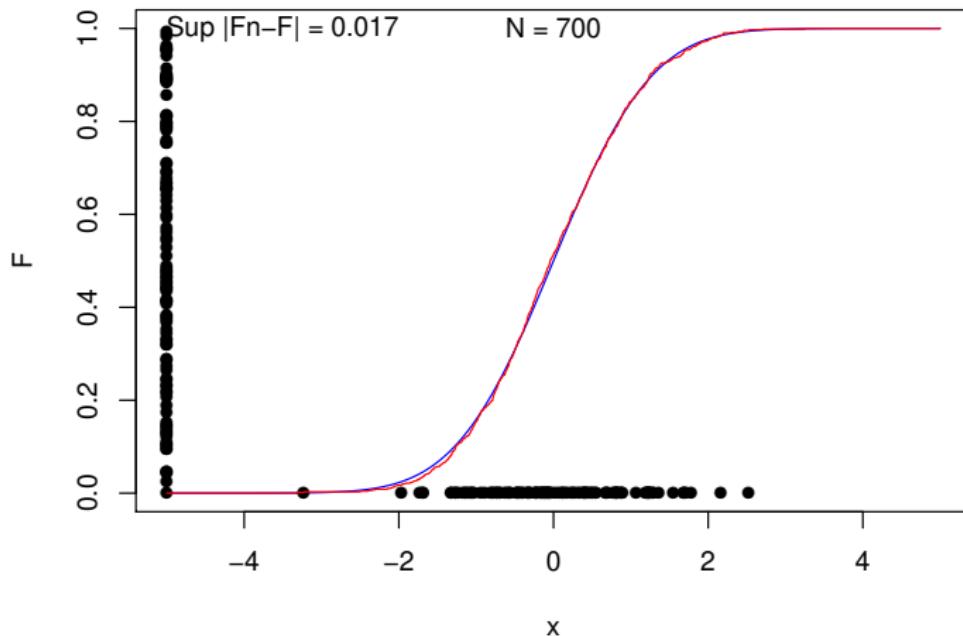
Simulation : fonction de répartition

Comment contrôler la qualité de la simulation ?



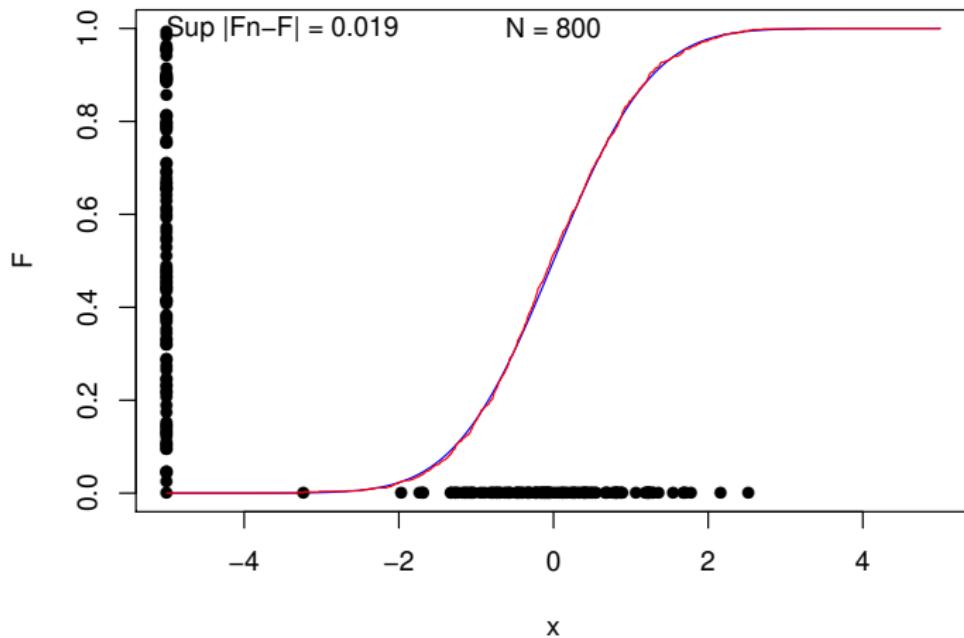
Simulation : fonction de répartition

Comment contrôler la qualité de la simulation ?



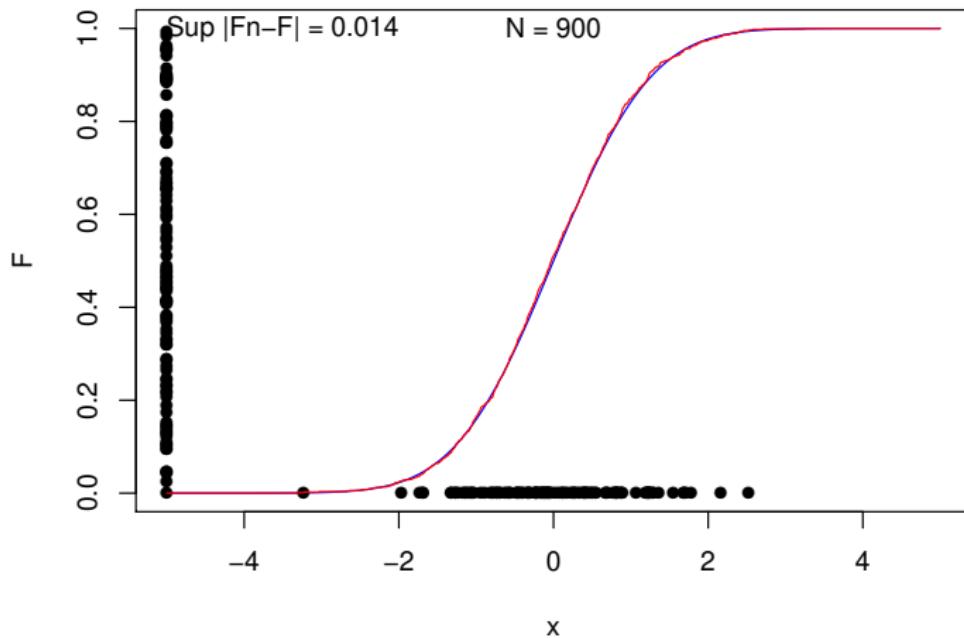
Simulation : fonction de répartition

Comment contrôler la qualité de la simulation ?



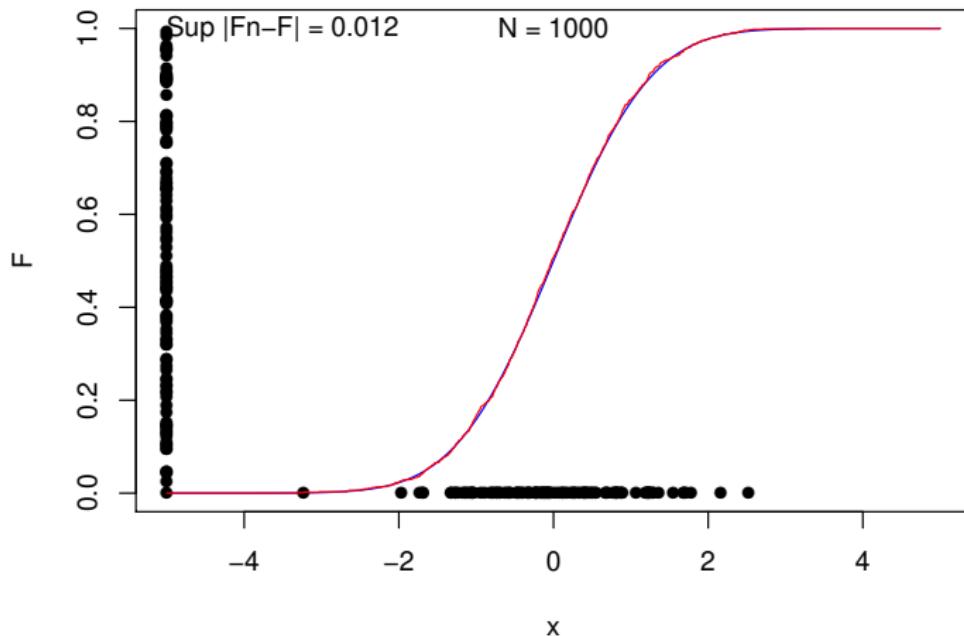
Simulation : fonction de répartition

Comment contrôler la qualité de la simulation ?



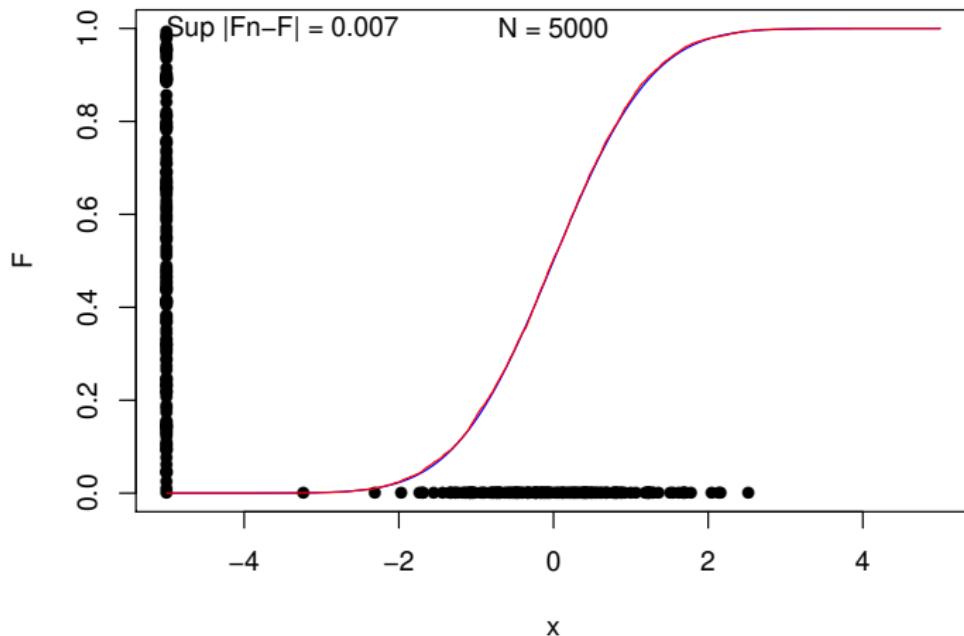
Simulation : fonction de répartition

Comment contrôler la qualité de la simulation ?



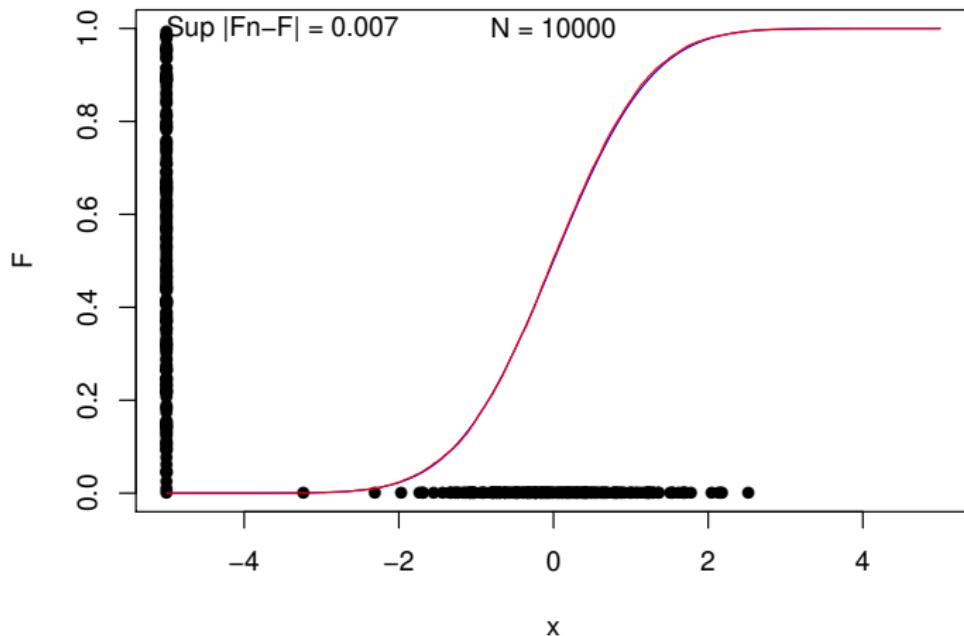
Simulation : fonction de répartition

Comment contrôler la qualité de la simulation ?



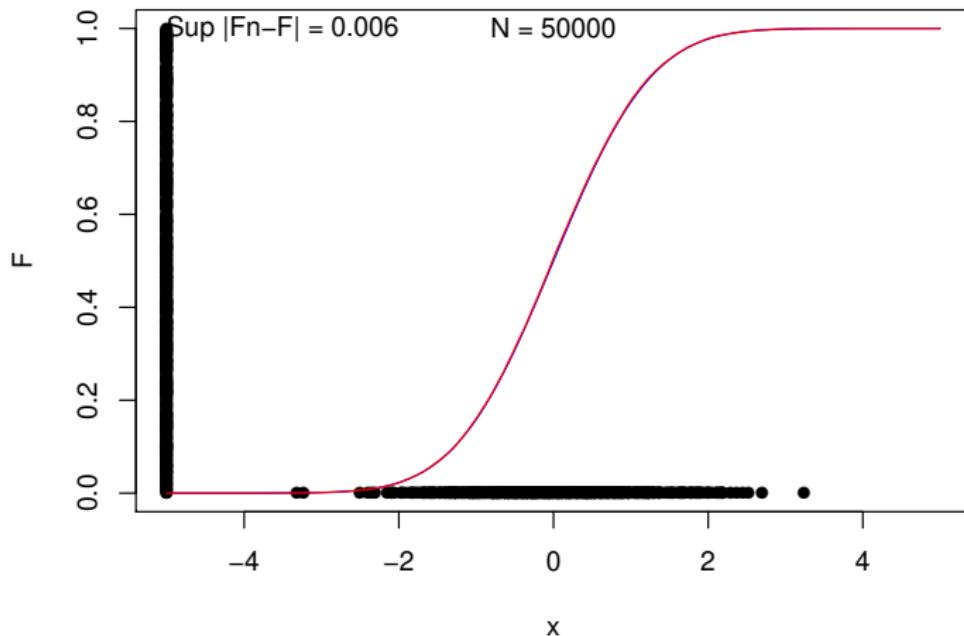
Simulation : fonction de répartition

Comment contrôler la qualité de la simulation ?



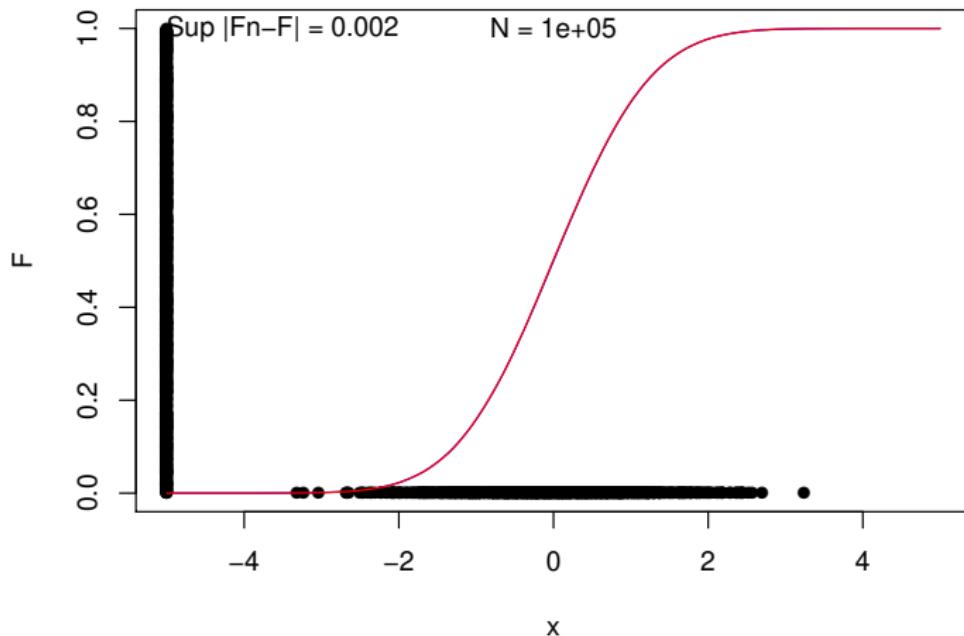
Simulation : fonction de répartition

Comment contrôler la qualité de la simulation ?



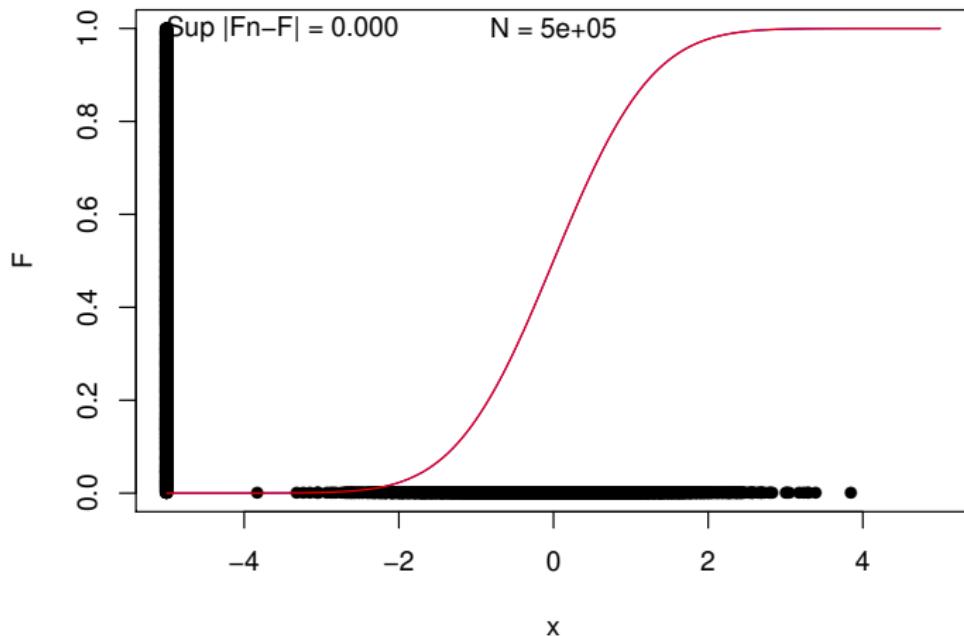
Simulation : fonction de répartition

Comment contrôler la qualité de la simulation ?



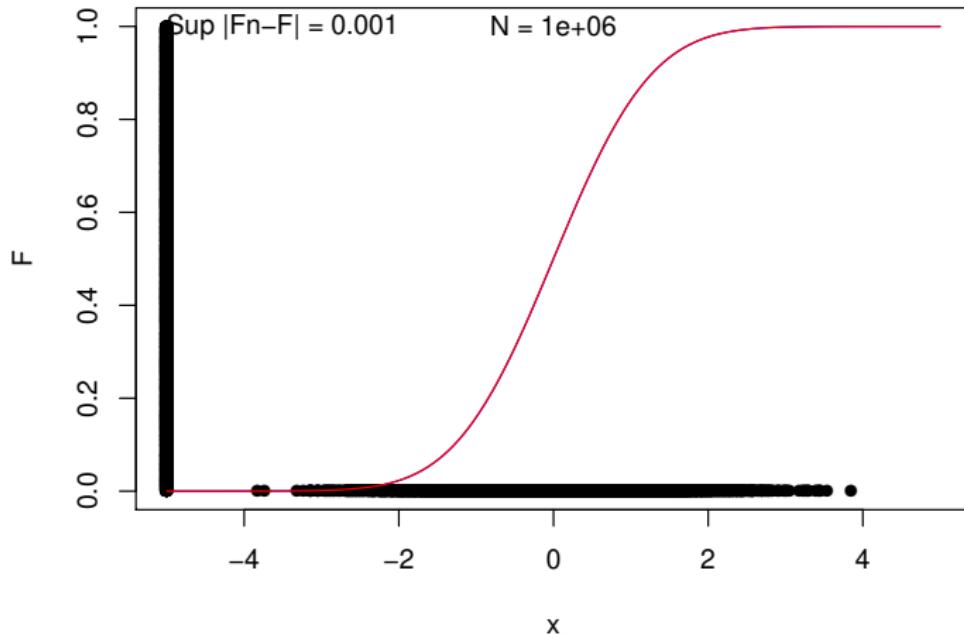
Simulation : fonction de répartition

Comment contrôler la qualité de la simulation ?

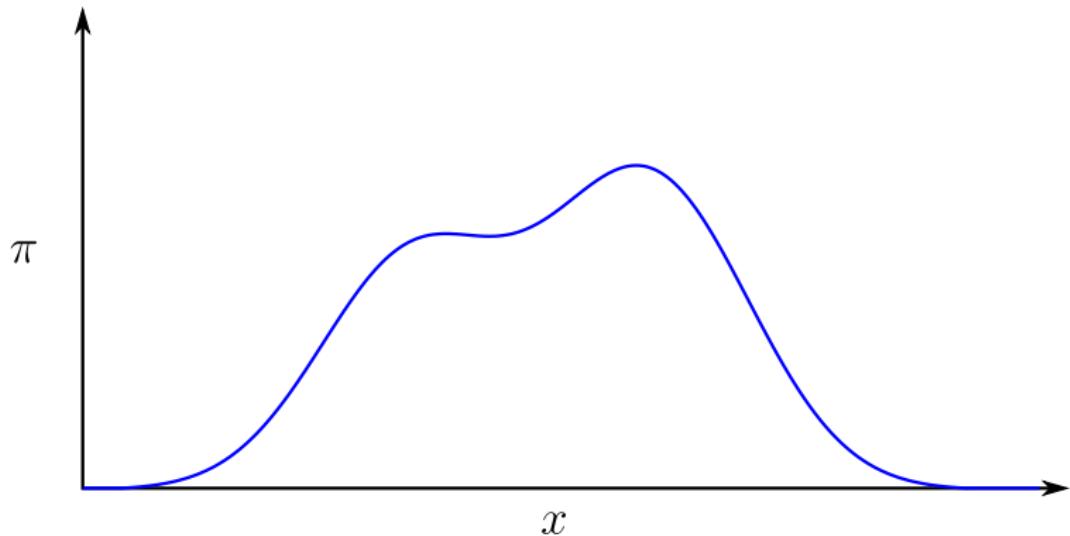


Simulation : fonction de répartition

Comment contrôler la qualité de la simulation ?

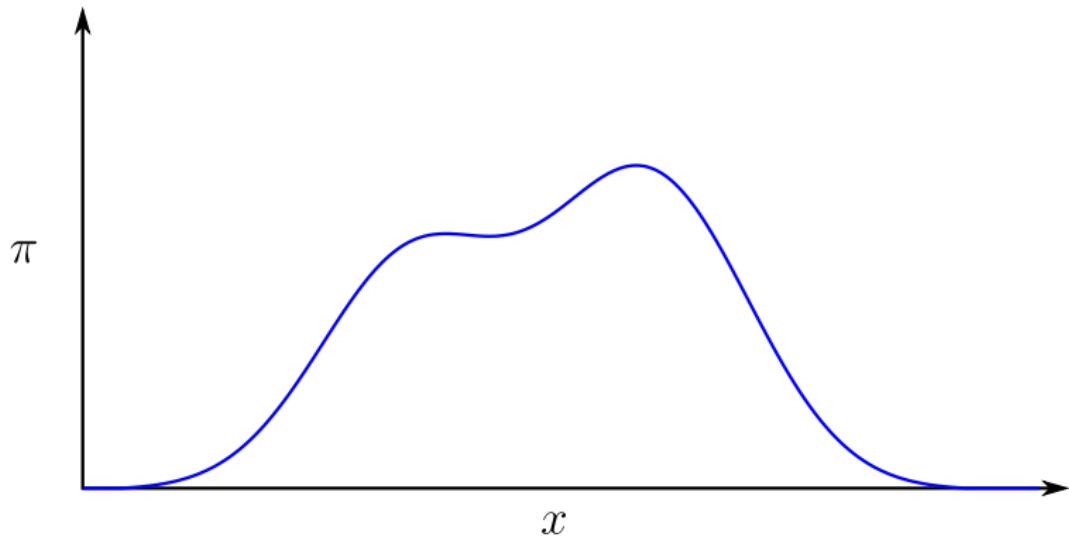


Metropolis-Hastings



Metropolis-Hastings

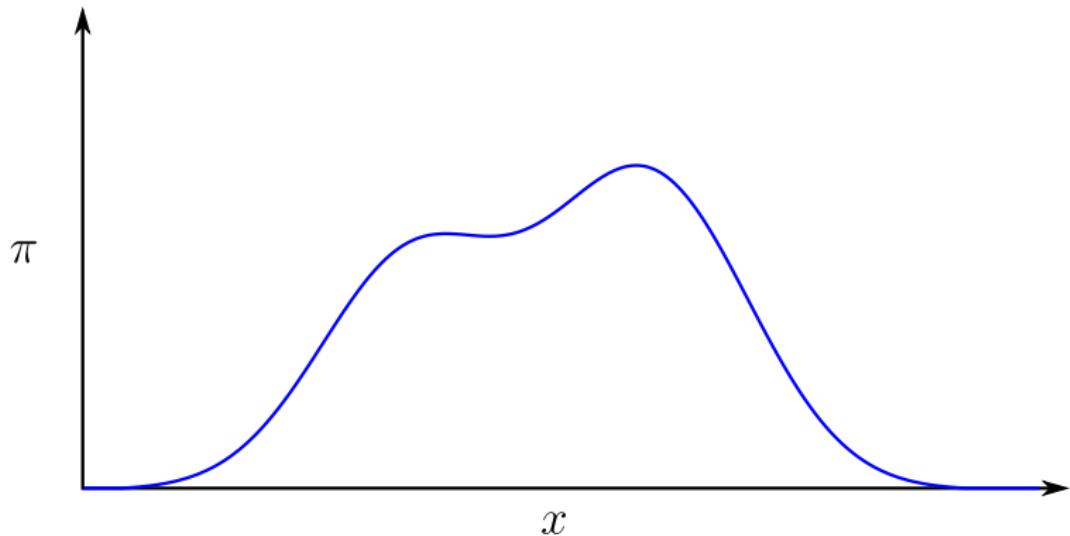
MCMC (Markov Chain - Monte Carlo)



Metropolis-Hastings

MCMC (Markov Chain - Monte Carlo)

$$x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow x_3 \rightarrow \dots \rightarrow x_n$$

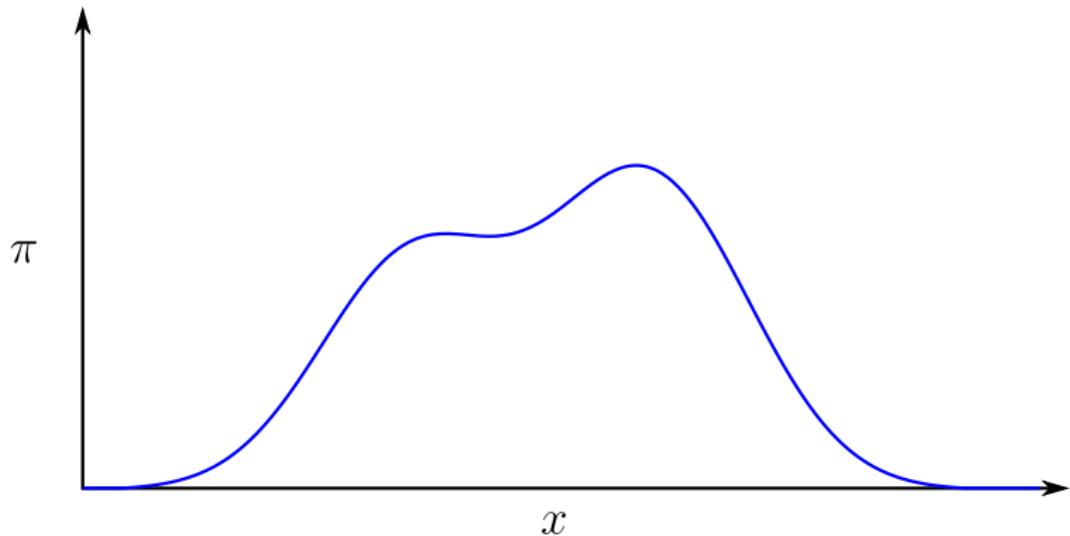


Simulation : densité de probabilité $\pi(x)$ ou loi $P_X(X = x)$

Metropolis-Hastings

MCMC (Markov Chain - Monte Carlo)

$$x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow x_3 \rightarrow \dots \rightarrow x_n \quad (X_n)_{n \in \mathbb{N}} \underset{\infty}{\sim} \pi$$



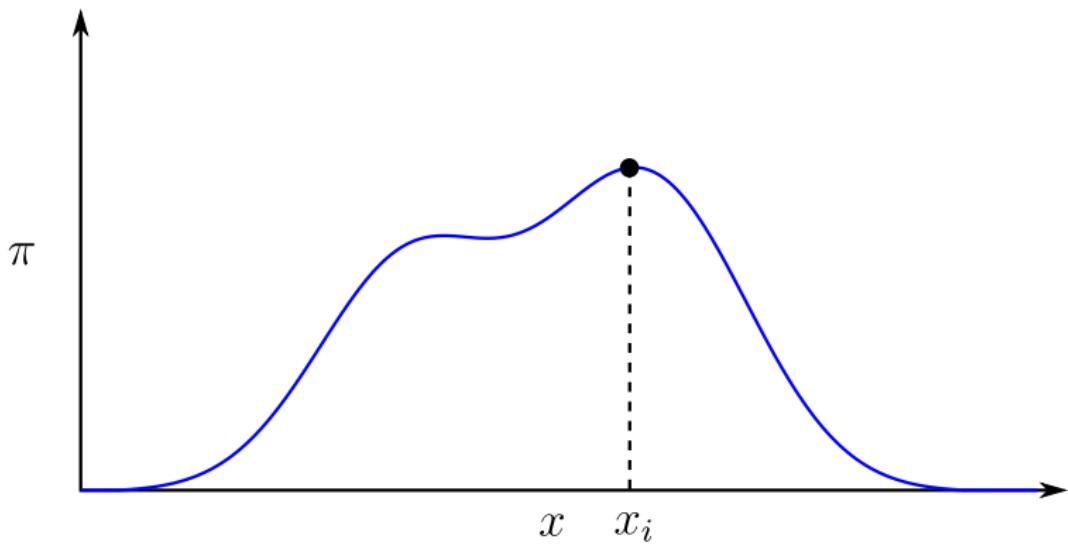
Simulation : densité de probabilité $\pi(x)$ ou loi $P_X(X = x)$

Metropolis-Hastings

$$x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow x_3 \rightarrow \dots \rightarrow x_n$$

MCMC (Markov Chain - Monte Carlo)

$$(X_n)_{n \in \mathbb{N}} \underset{\infty}{\sim} \pi$$



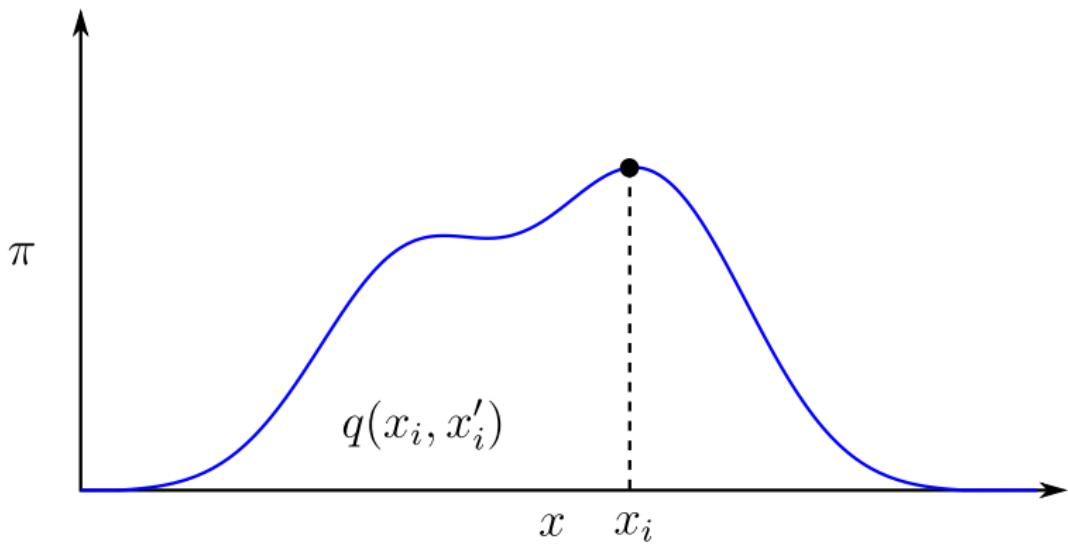
Simulation : densité de probabilité $\pi(x)$ ou loi $P_X(X = x)$

Metropolis-Hastings

$$x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow x_3 \rightarrow \dots \rightarrow x_n$$

MCMC (Markov Chain - Monte Carlo)

$$(X_n)_{n \in \mathbb{N}} \underset{\infty}{\sim} \pi$$

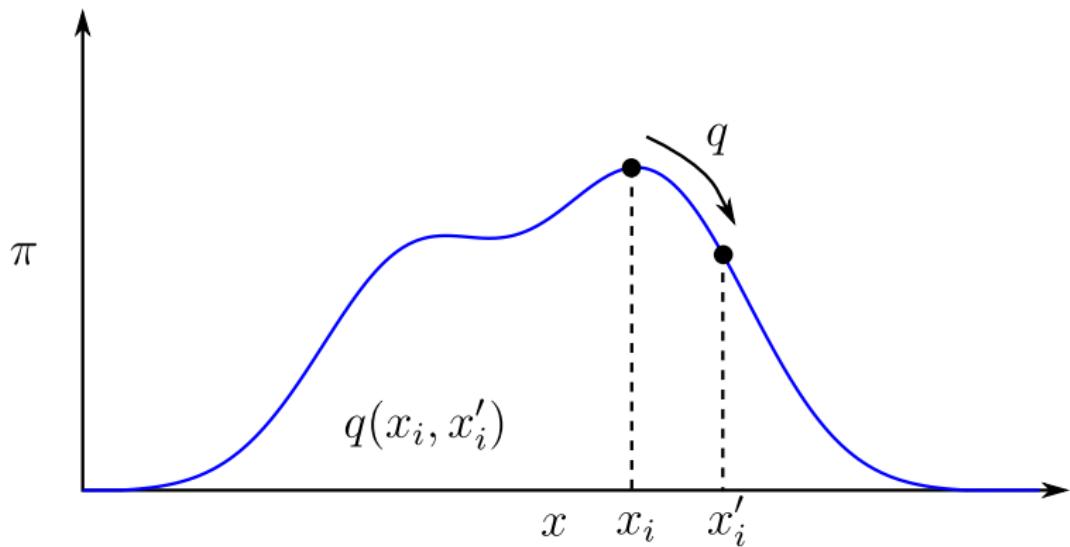


Simulation : densité de probabilité $\pi(x)$ ou loi $P_X(X = x)$

Metropolis-Hastings

MCMC (Markov Chain - Monte Carlo)

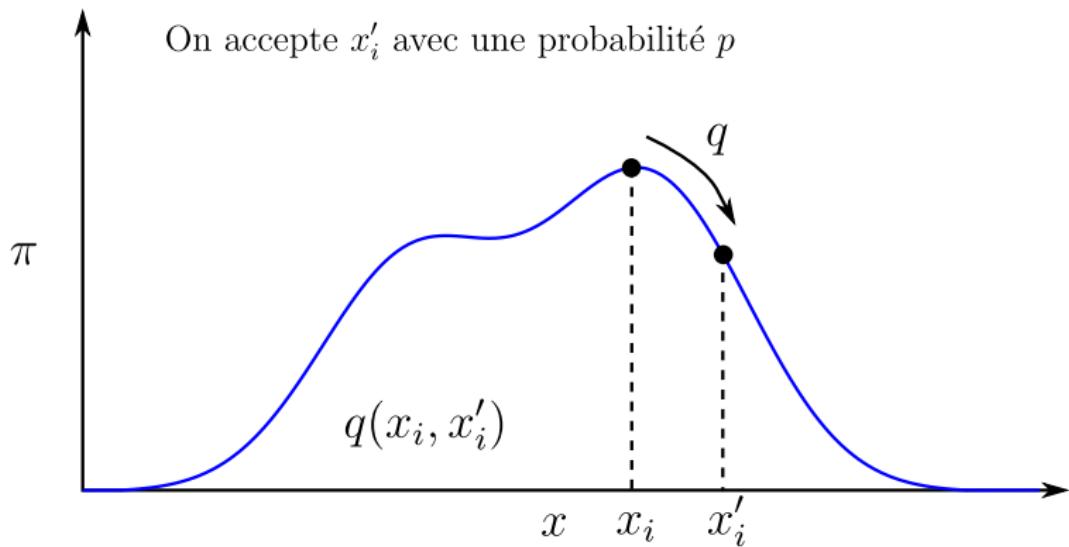
$$x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow x_3 \rightarrow \dots \rightarrow x_n \quad (X_n)_{n \in \mathbb{N}} \underset{\infty}{\sim} \pi$$



Metropolis-Hastings

MCMC (Markov Chain - Monte Carlo)

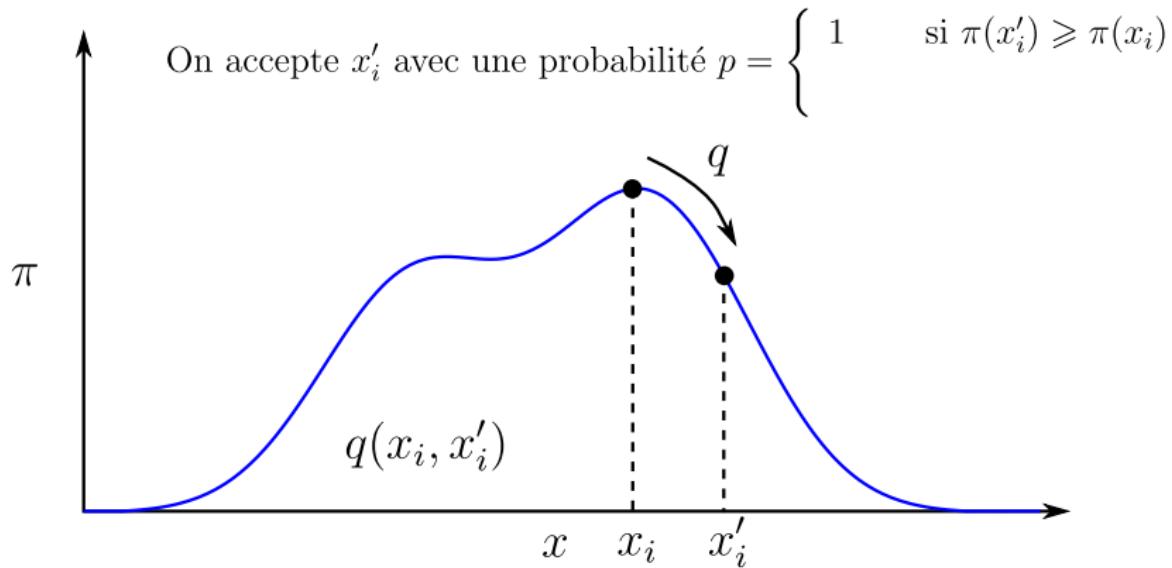
$$x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow x_3 \rightarrow \dots \rightarrow x_n \quad (X_n)_{n \in \mathbb{N}} \underset{\infty}{\sim} \pi$$



Metropolis-Hastings

MCMC (Markov Chain - Monte Carlo)

$$x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow x_3 \rightarrow \dots \rightarrow x_n \quad (X_n)_{n \in \mathbb{N}} \underset{\infty}{\sim} \pi$$

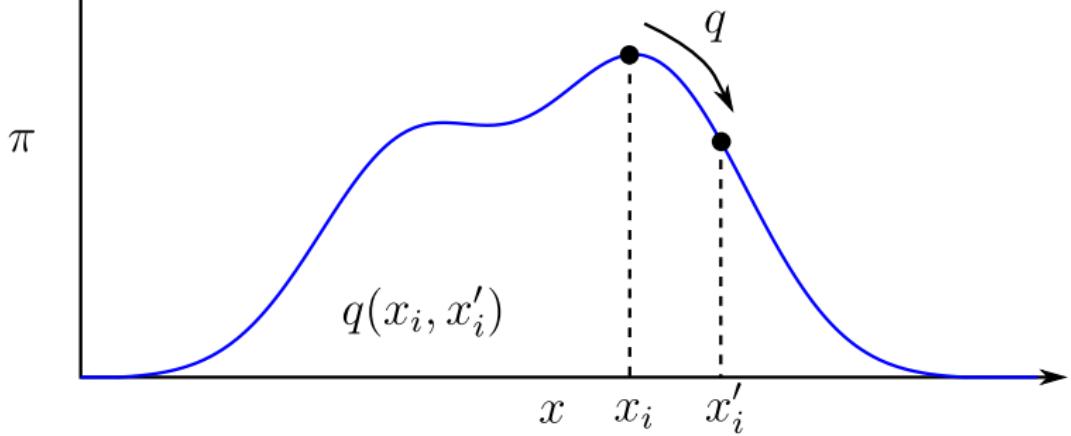


Metropolis-Hastings

MCMC (Markov Chain - Monte Carlo)

$$x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow x_3 \rightarrow \dots \rightarrow x_n \quad (X_n)_{n \in \mathbb{N}} \underset{\infty}{\sim} \pi$$

On accepte x'_i avec une probabilité $p = \begin{cases} 1 & \text{si } \pi(x'_i) \geq \pi(x_i) \\ \frac{\pi(x'_i)}{\pi(x_i)} & \text{sinon.} \end{cases}$



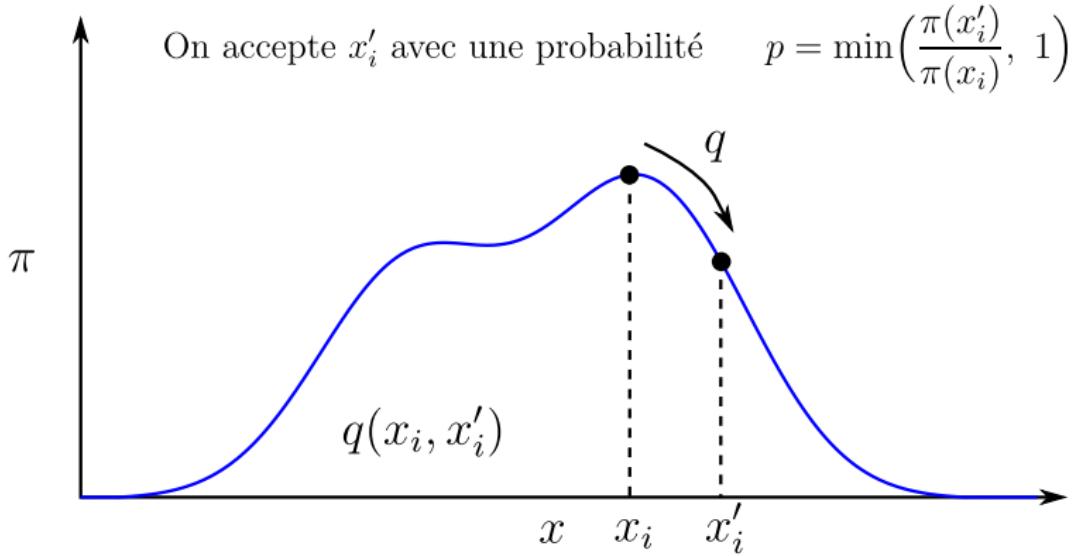
Simulation : densité de probabilité $\pi(x)$ ou loi $P_X(X = x)$

Metropolis-Hastings

$$x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow x_3 \rightarrow \dots \rightarrow x_n$$

MCMC (Markov Chain - Monte Carlo)

$$(X_n)_{n \in \mathbb{N}} \underset{\infty}{\sim} \pi$$



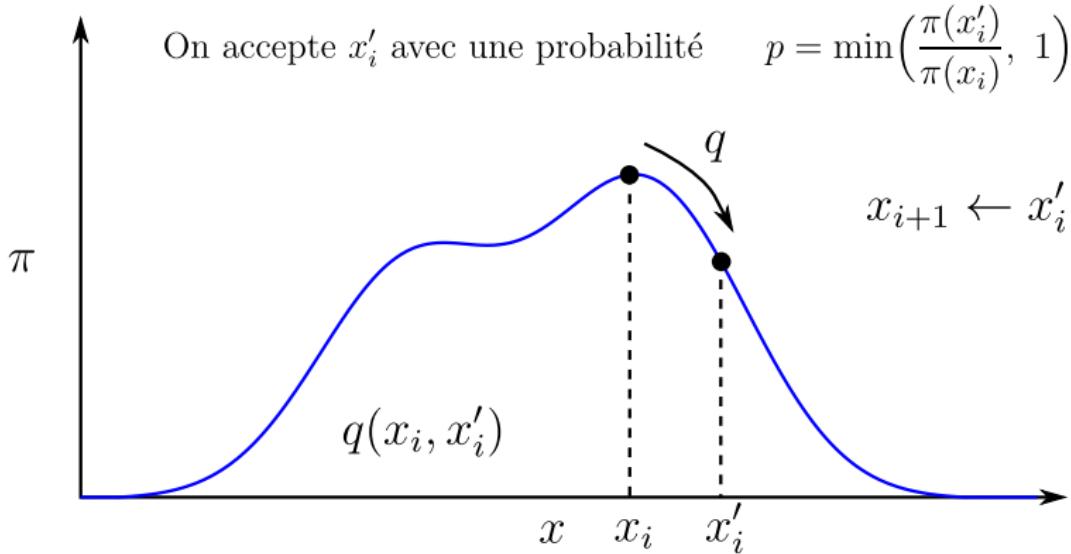
Simulation : densité de probabilité $\pi(x)$ ou loi $P_X(X = x)$

Metropolis-Hastings

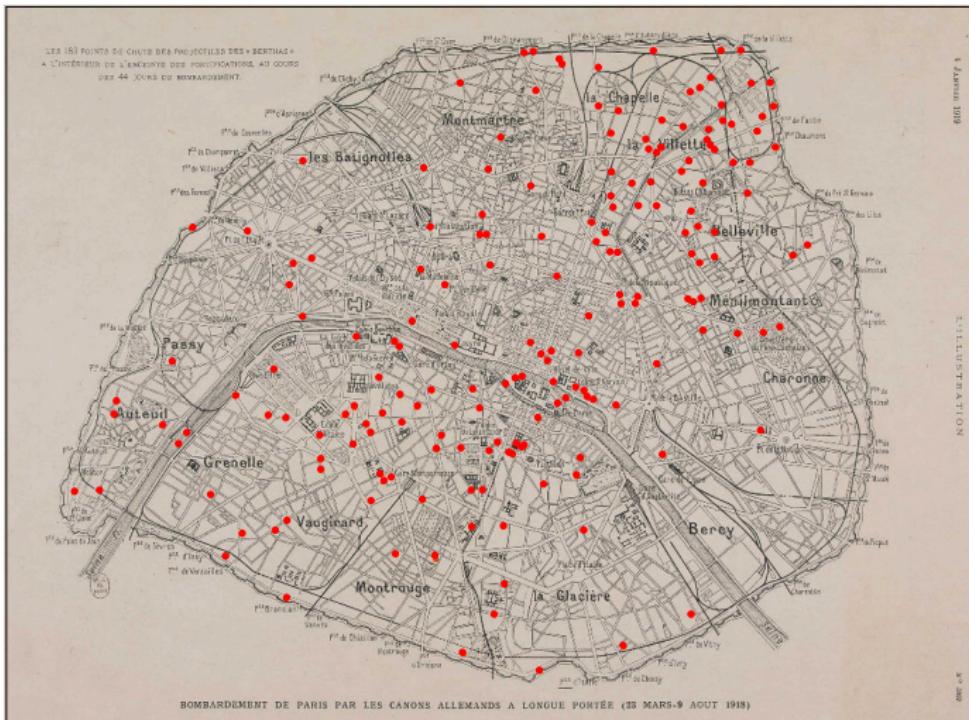
$$x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow x_3 \rightarrow \dots \rightarrow x_n$$

MCMC (Markov Chain - Monte Carlo)

$$(X_n)_{n \in \mathbb{N}} \underset{\infty}{\sim} \pi$$

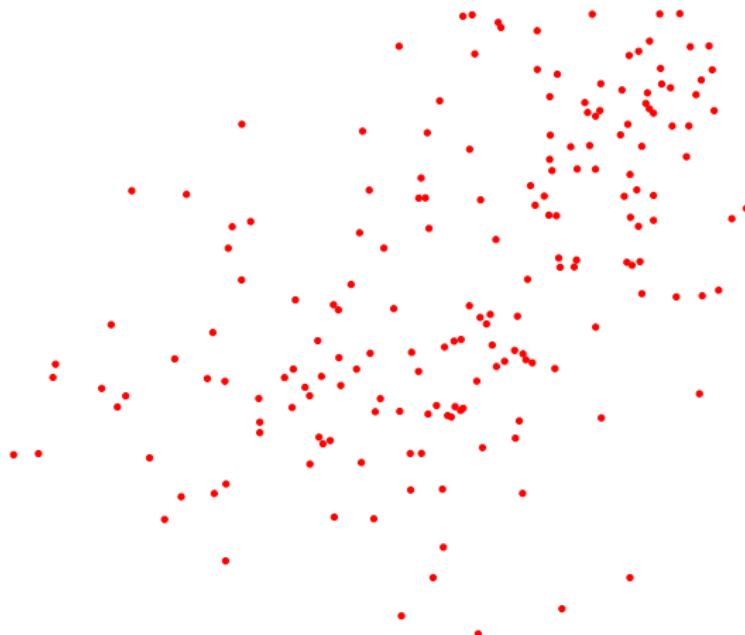


Simulation : densité de probabilité $\pi(x)$ ou loi $P_X(X = x)$

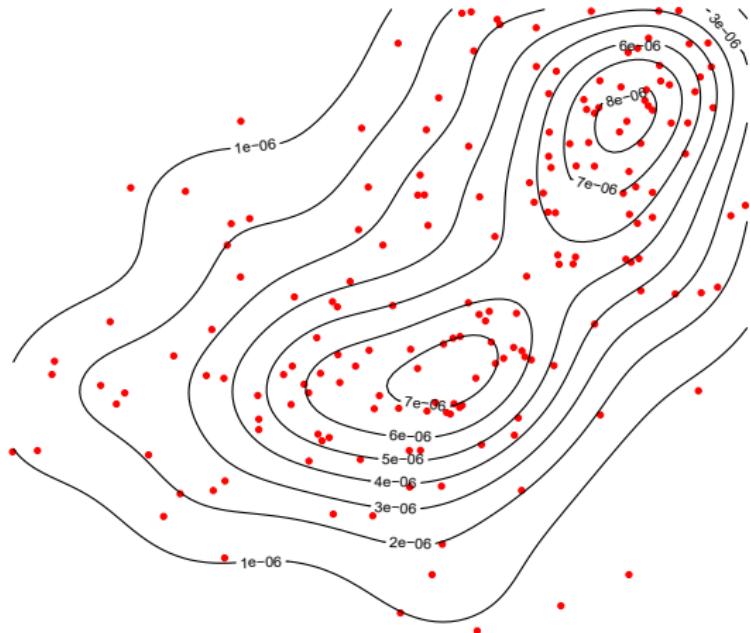


<http://quotidien-parisiens-grande-guerre.paris.fr>

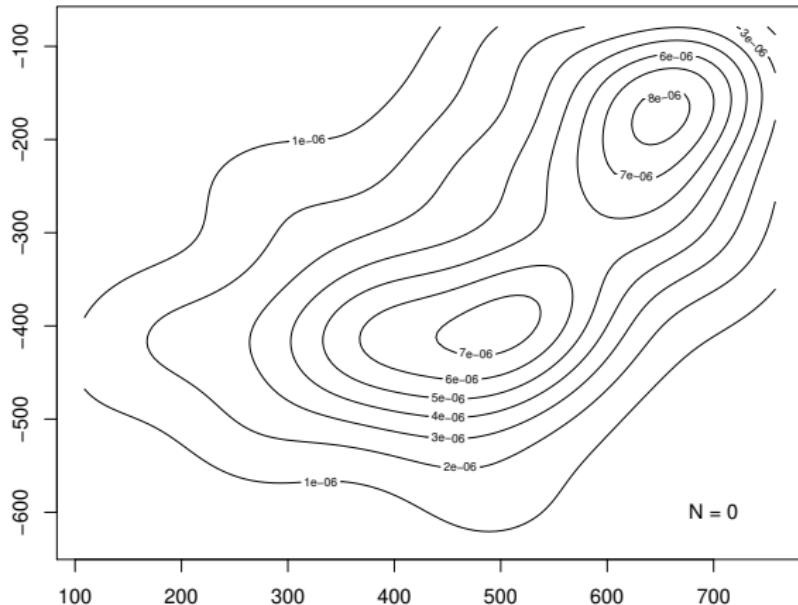
Simulation : densité de probabilité $\pi(x)$ ou loi $P_X(X = x)$



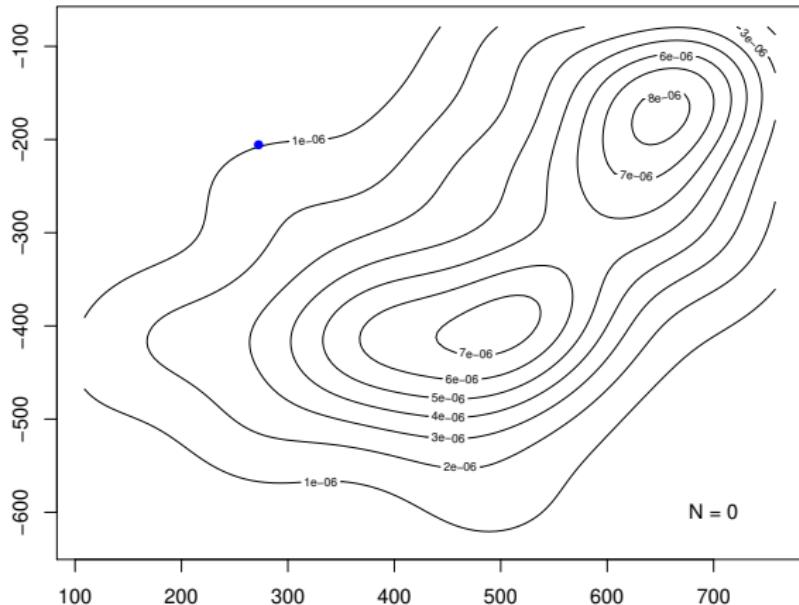
Simulation : densité de probabilité $\pi(x)$ ou loi $P_X(X = x)$



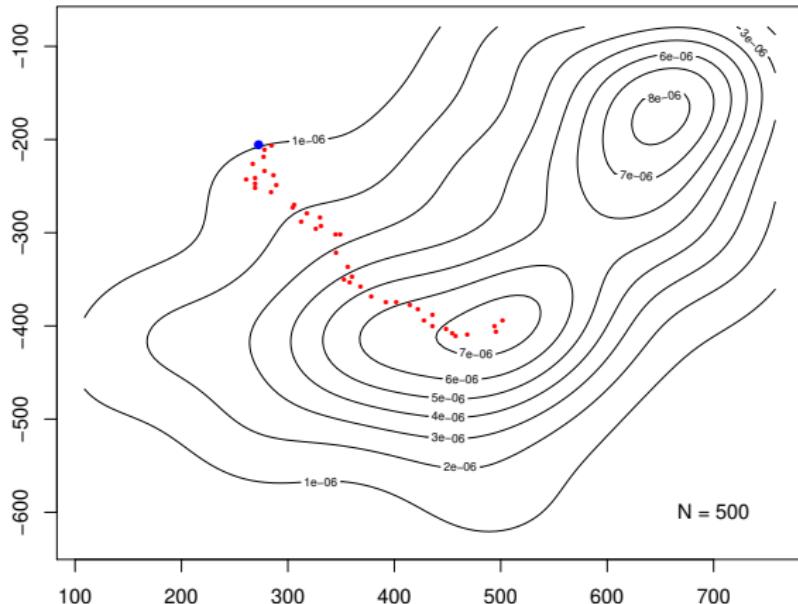
Simulation : densité de probabilité $\pi(x)$ ou loi $P_X(X = x)$



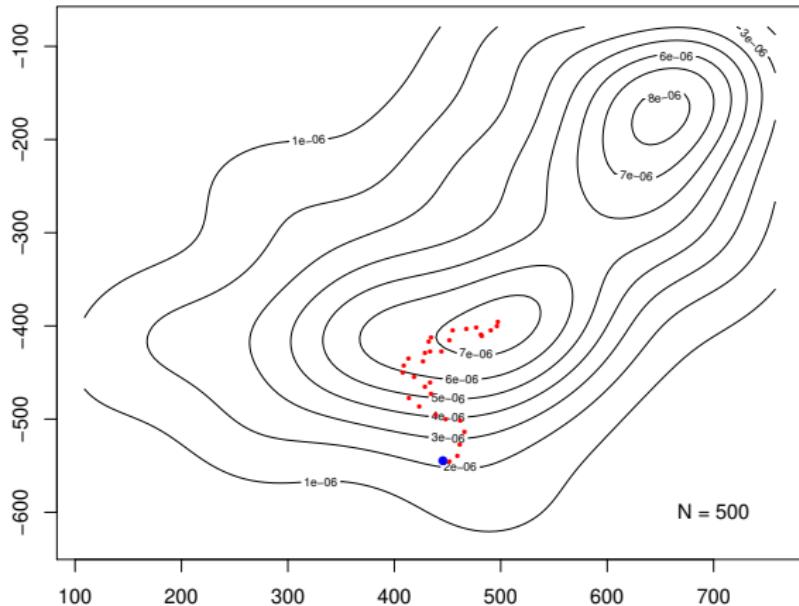
Simulation : densité de probabilité $\pi(x)$ ou loi $P_X(X = x)$



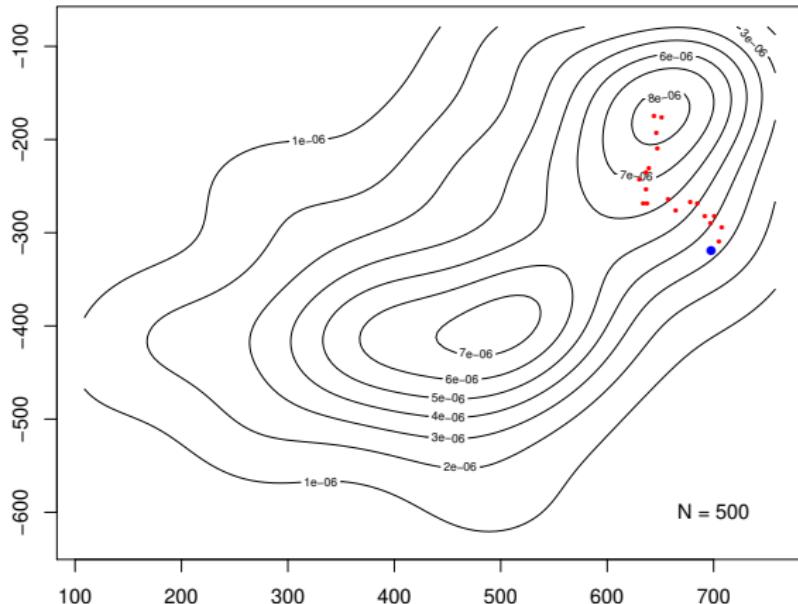
Simulation : densité de probabilité $\pi(x)$ ou loi $P_X(X = x)$



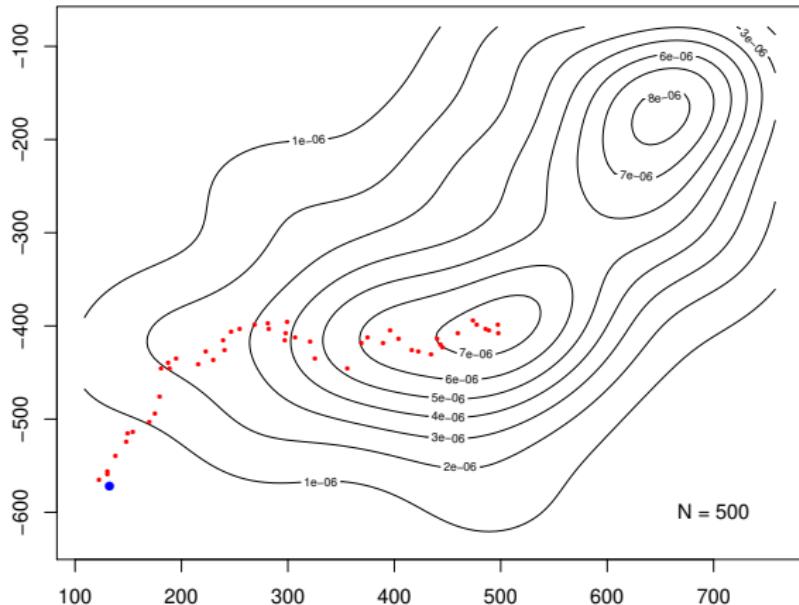
Simulation : densité de probabilité $\pi(x)$ ou loi $P_X(X = x)$



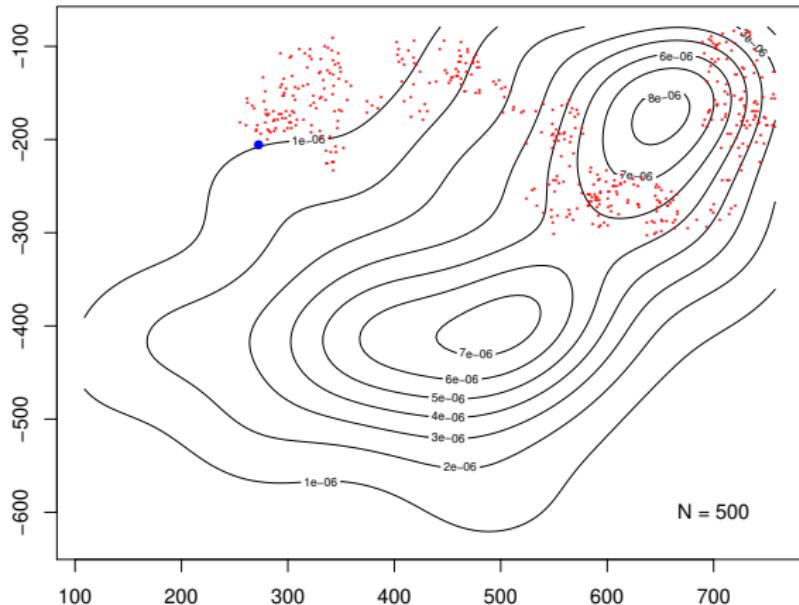
Simulation : densité de probabilité $\pi(x)$ ou loi $P_X(X = x)$



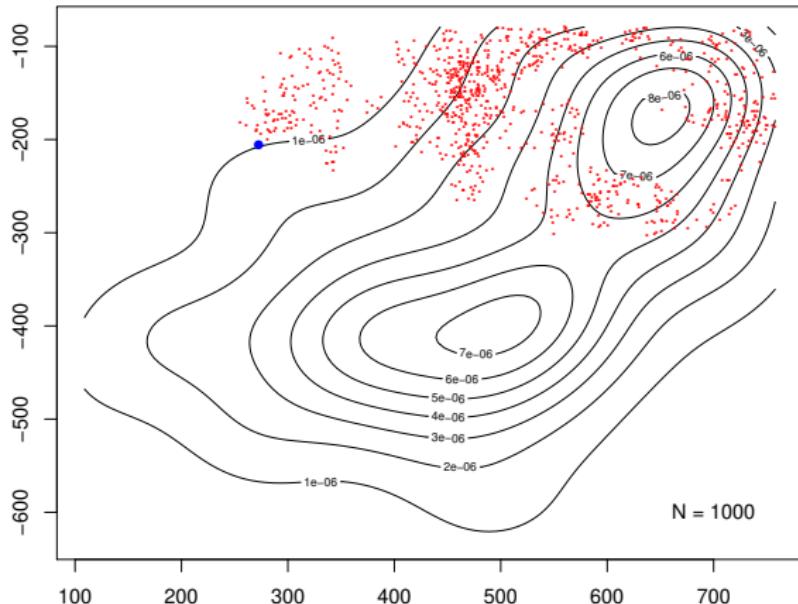
Simulation : densité de probabilité $\pi(x)$ ou loi $P_X(X = x)$



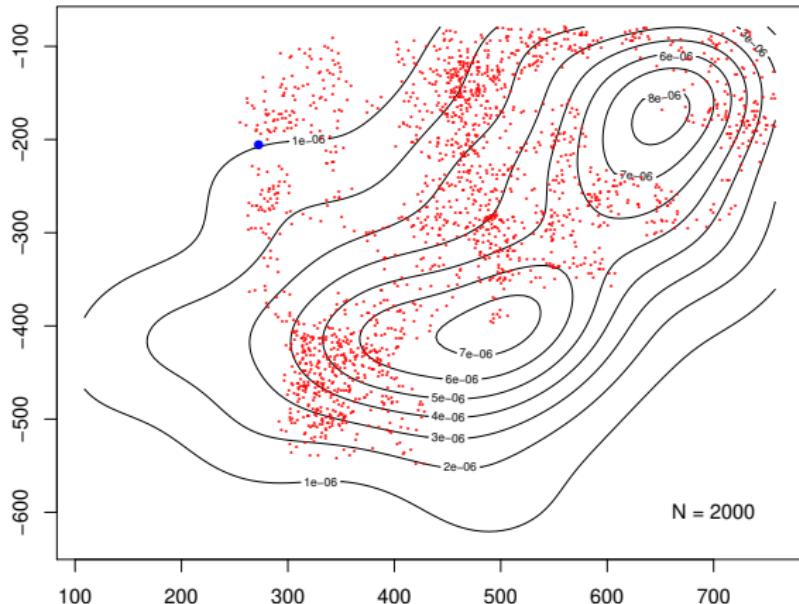
Simulation : densité de probabilité $\pi(x)$ ou loi $P_X(X = x)$



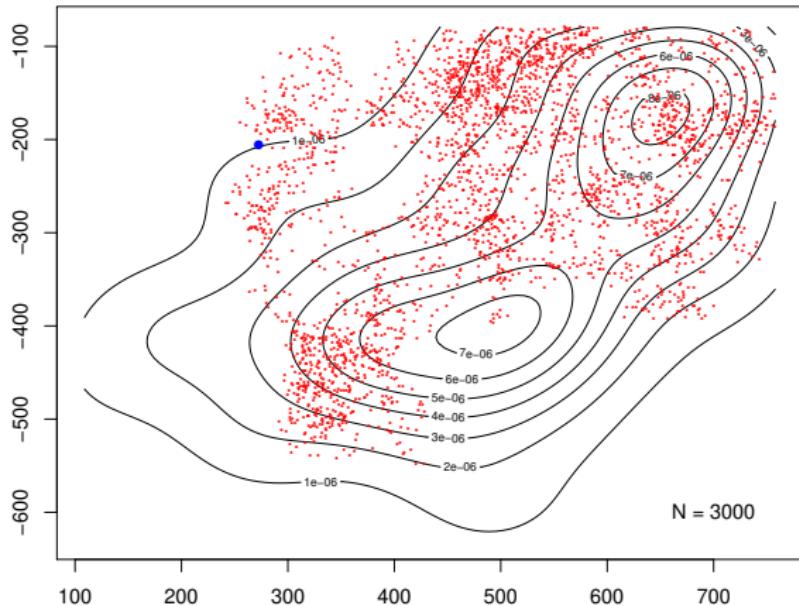
Simulation : densité de probabilité $\pi(x)$ ou loi $P_X(X = x)$



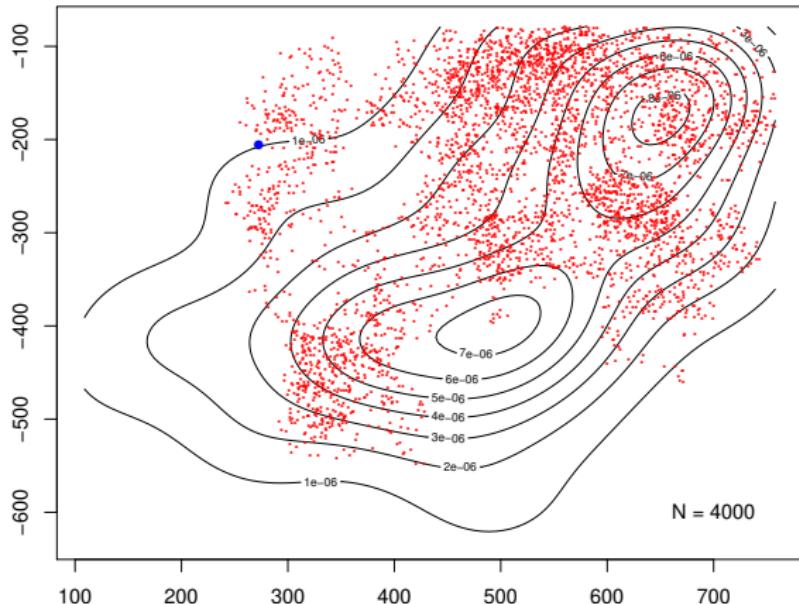
Simulation : densité de probabilité $\pi(x)$ ou loi $P_X(X = x)$



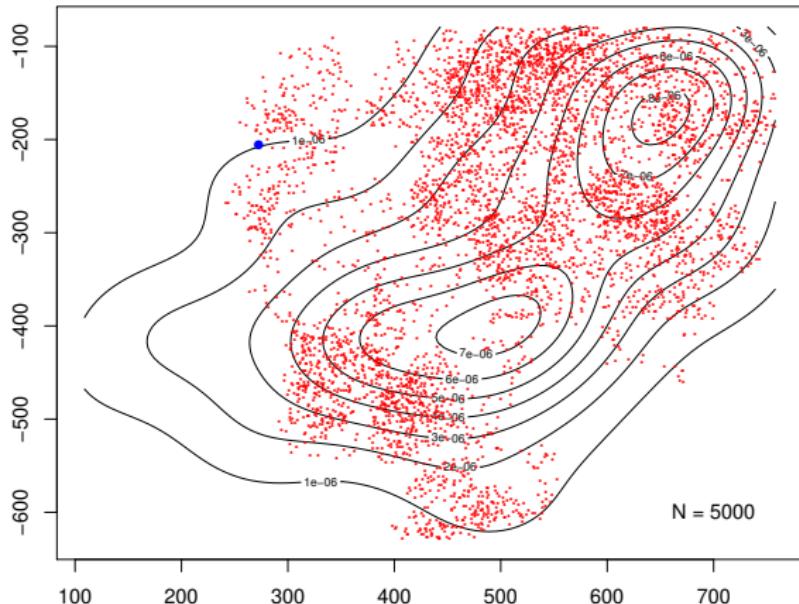
Simulation : densité de probabilité $\pi(x)$ ou loi $P_X(X = x)$



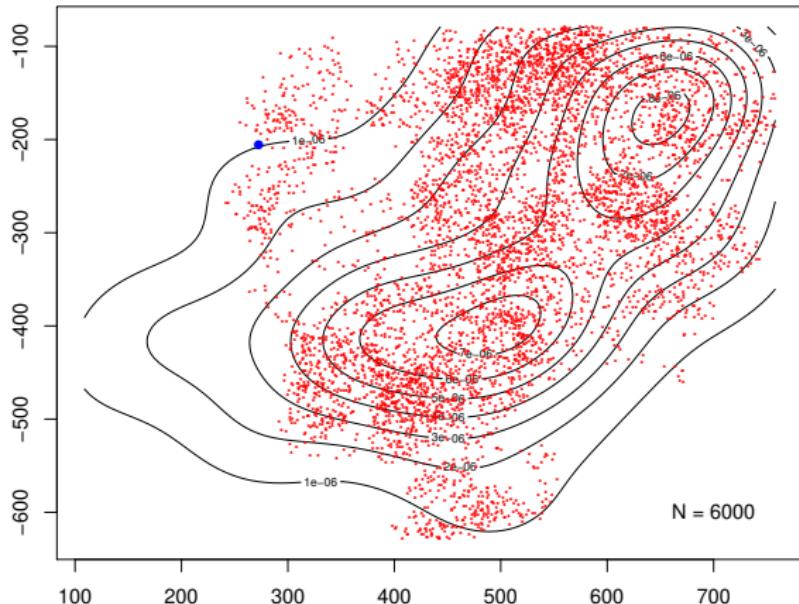
Simulation : densité de probabilité $\pi(x)$ ou loi $P_X(X = x)$



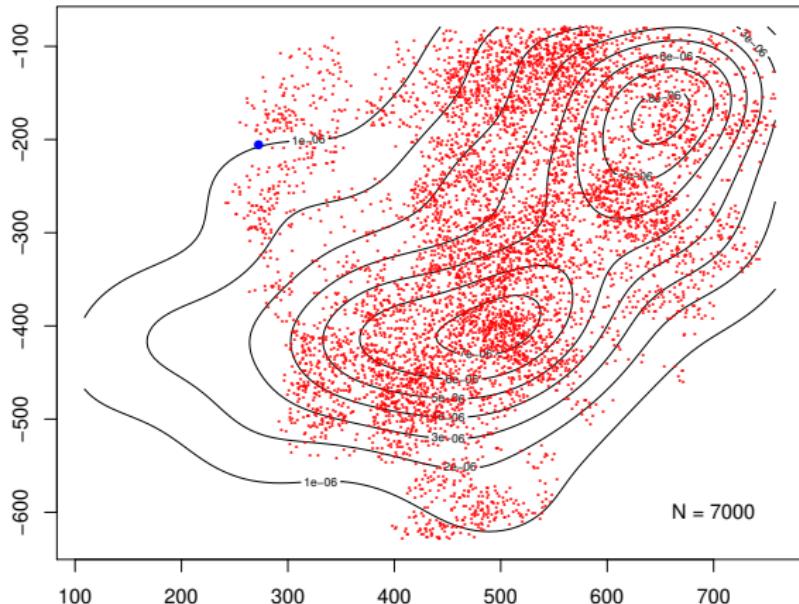
Simulation : densité de probabilité $\pi(x)$ ou loi $P_X(X = x)$



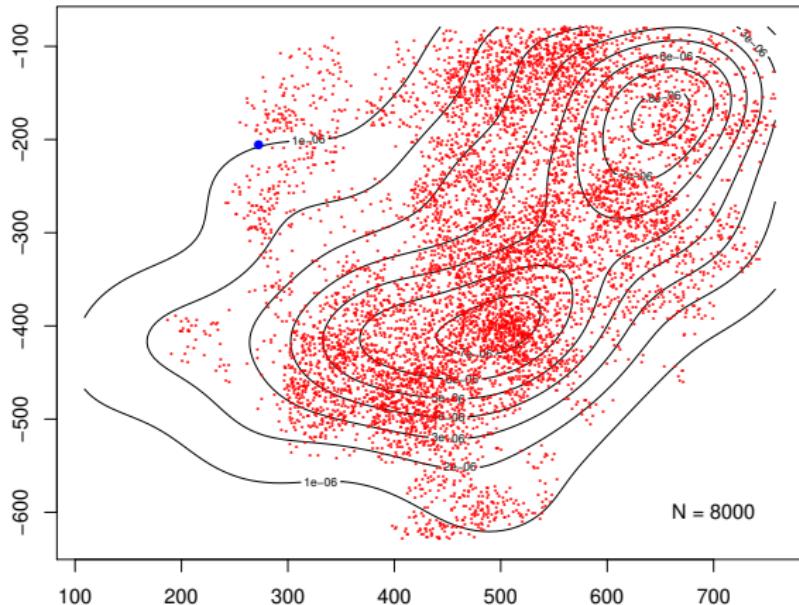
Simulation : densité de probabilité $\pi(x)$ ou loi $P_X(X = x)$



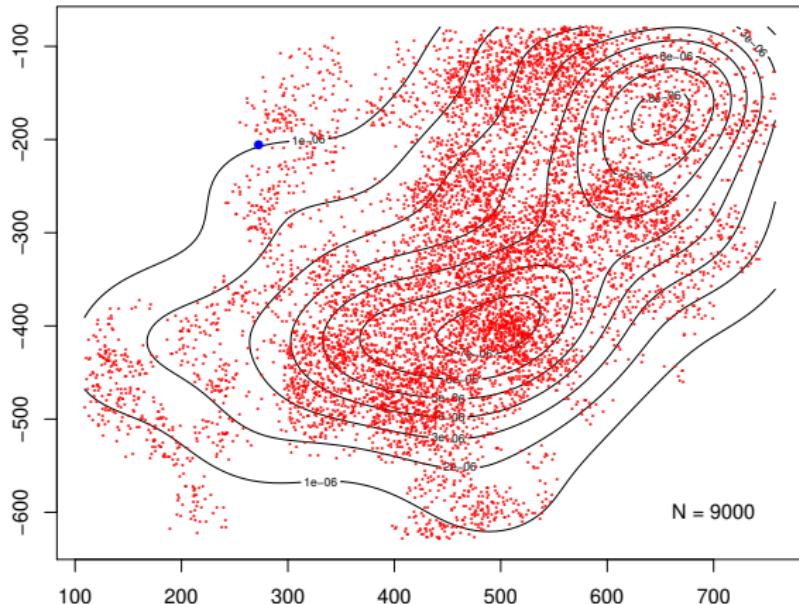
Simulation : densité de probabilité $\pi(x)$ ou loi $P_X(X = x)$



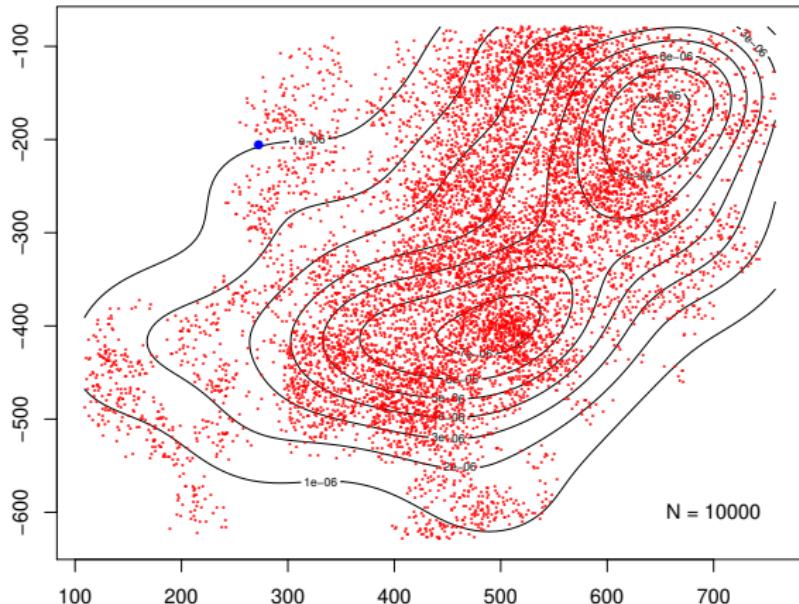
Simulation : densité de probabilité $\pi(x)$ ou loi $P_X(X = x)$



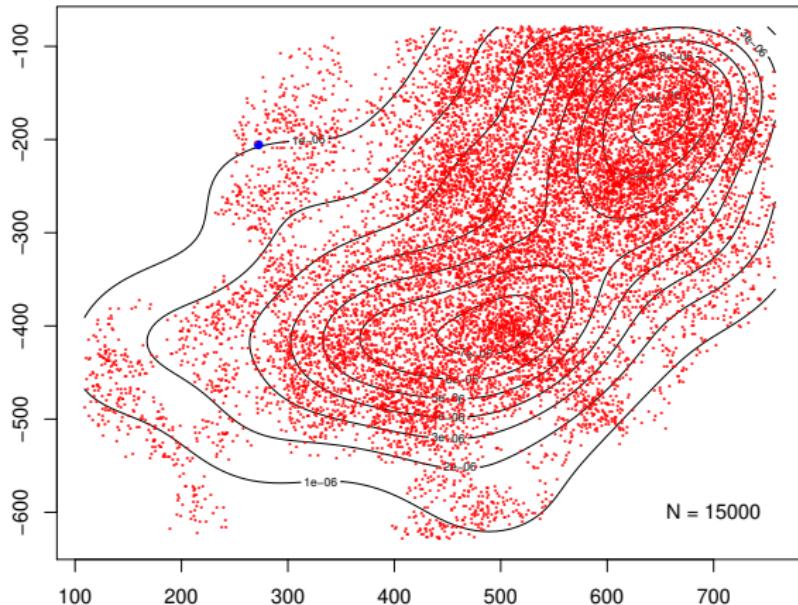
Simulation : densité de probabilité $\pi(x)$ ou loi $P_X(X = x)$



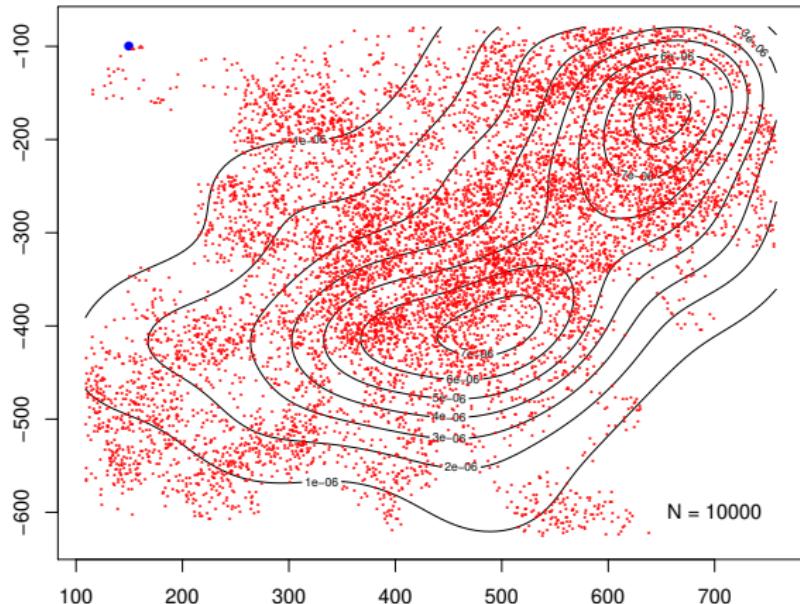
Simulation : densité de probabilité $\pi(x)$ ou loi $P_X(X = x)$



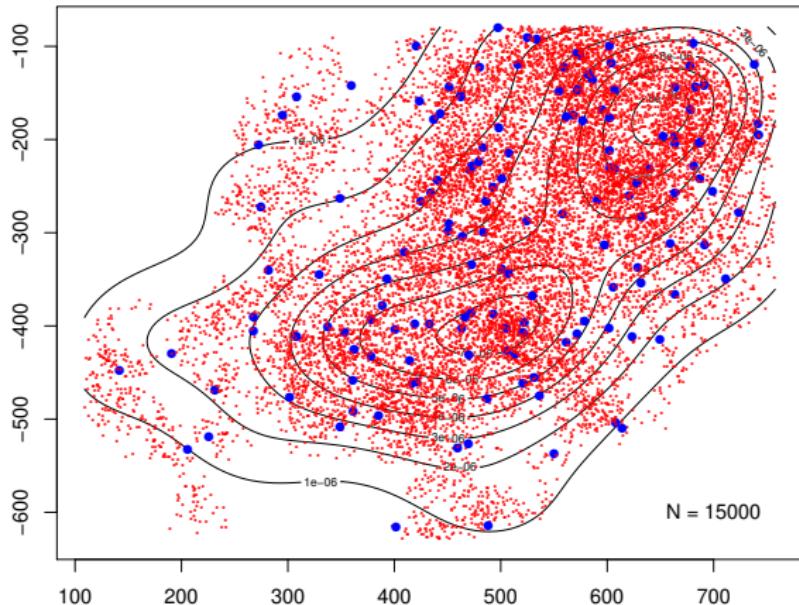
Simulation : densité de probabilité $\pi(x)$ ou loi $P_X(X = x)$



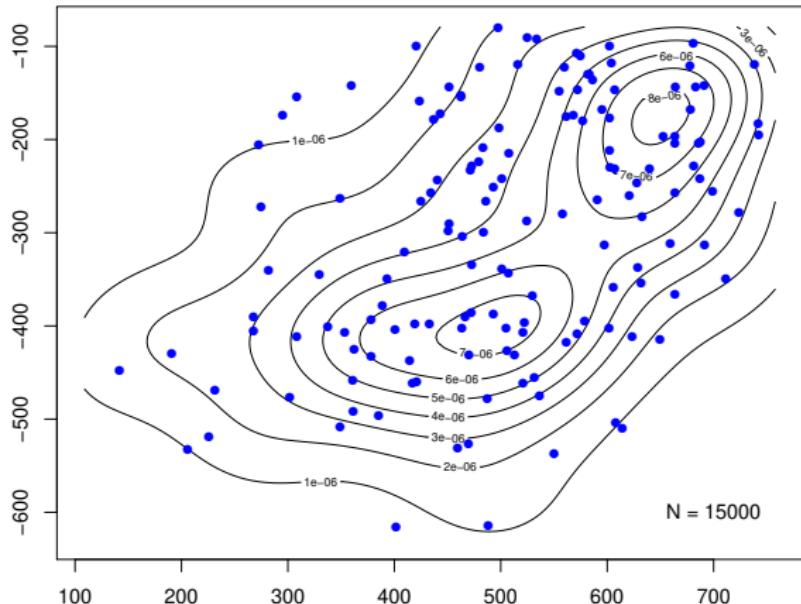
Simulation : densité de probabilité $\pi(x)$ ou loi $P_X(X = x)$



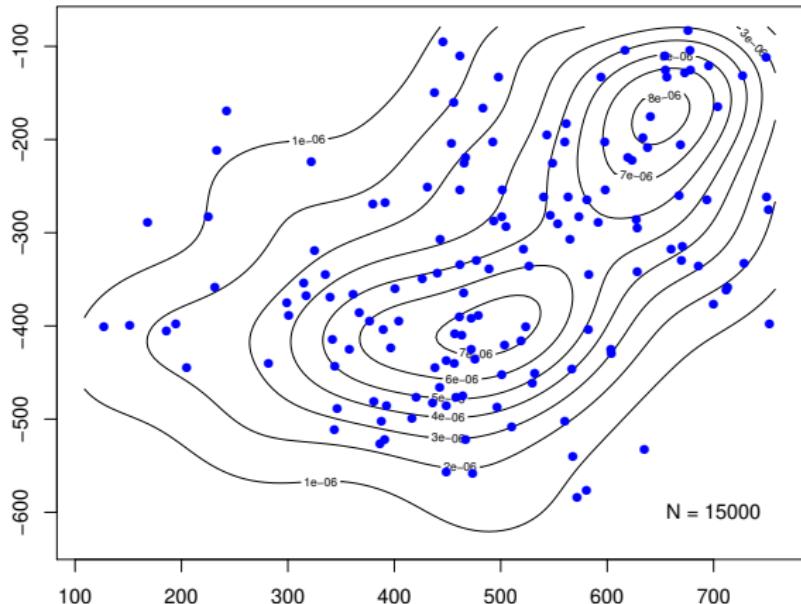
Simulation : densité de probabilité $\pi(x)$ ou loi $P_X(X = x)$



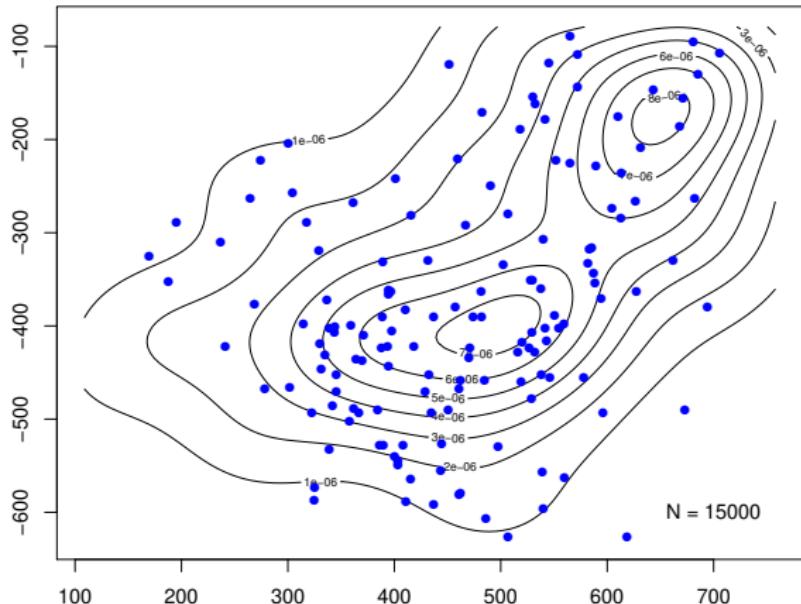
Simulation : densité de probabilité $\pi(x)$ ou loi $P_X(X = x)$



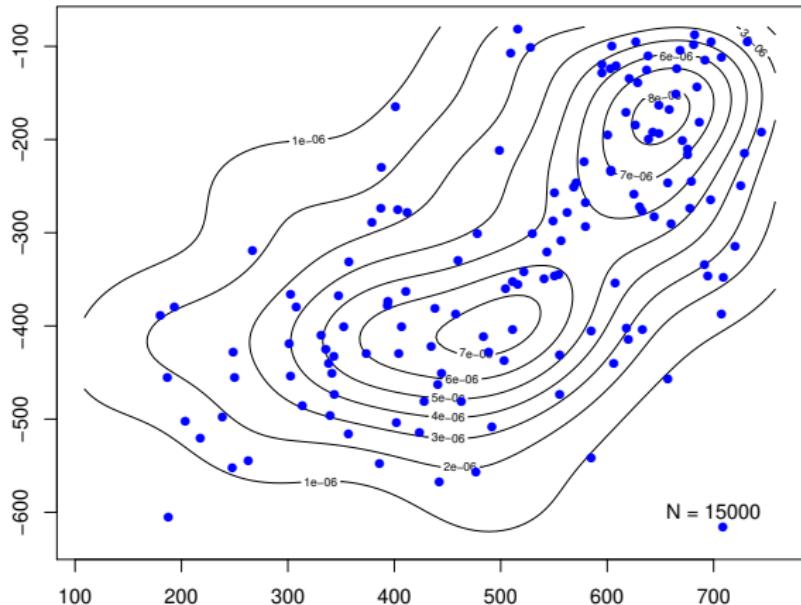
Simulation : densité de probabilité $\pi(x)$ ou loi $P_X(X = x)$



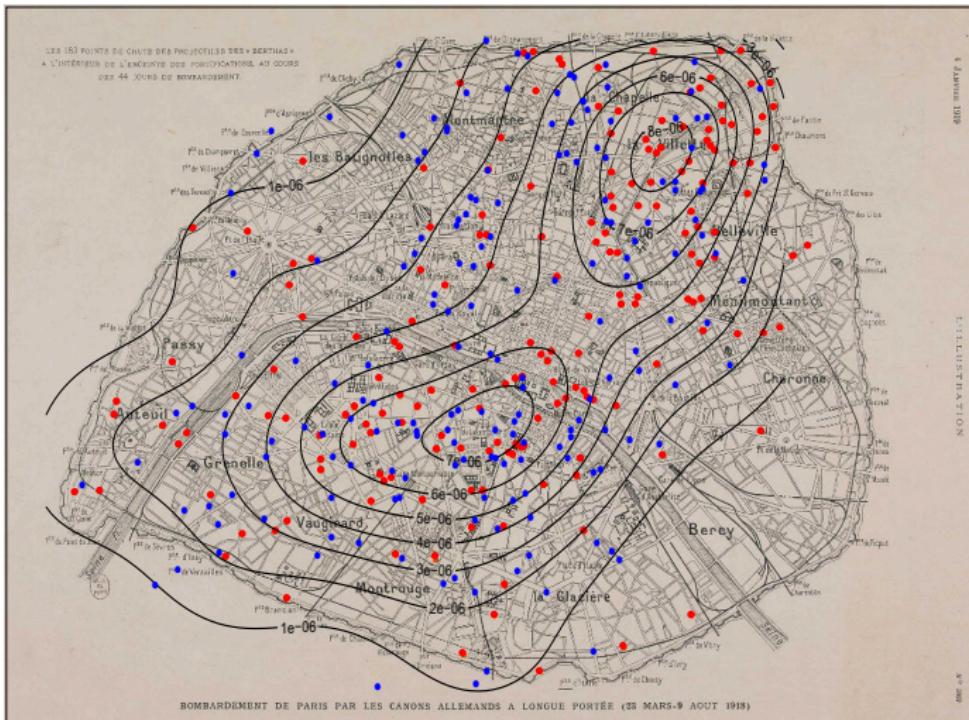
Simulation : densité de probabilité $\pi(x)$ ou loi $P_X(X = x)$



Simulation : densité de probabilité $\pi(x)$ ou loi $P_X(X = x)$

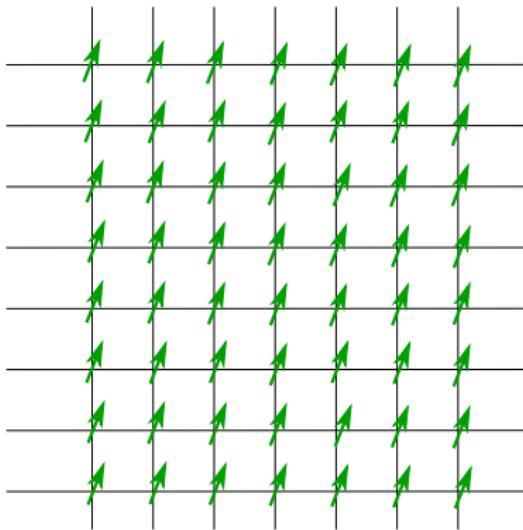


Simulation : densité de probabilité $\pi(x)$ ou loi $P_X(X = x)$

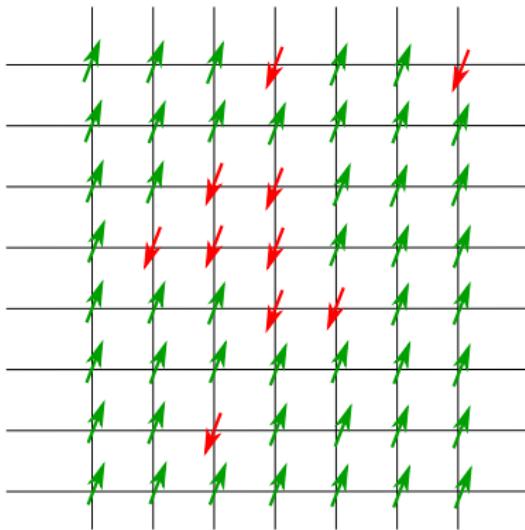


<http://quotidien-parisiens-grande-guerre.paris.fr>

Simulation : densité de probabilité $\pi(x)$ ou loi $P_X(X = x)$

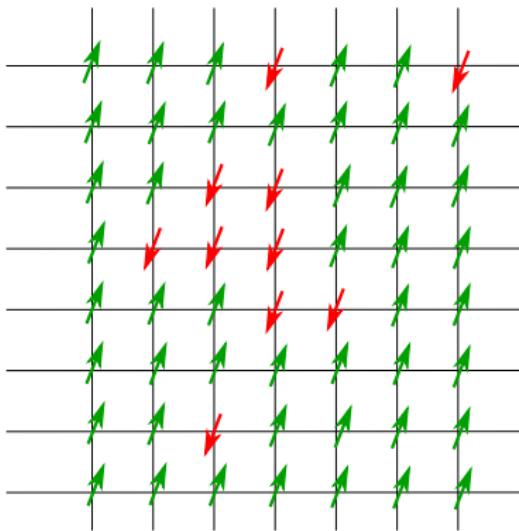


Simulation : densité de probabilité $\pi(x)$ ou loi $P_X(X = x)$



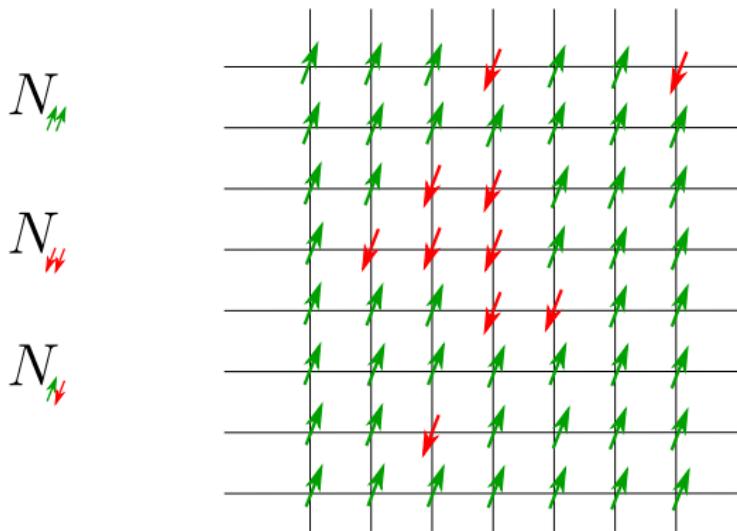
Simulation : densité de probabilité $\pi(x)$ ou loi $P_X(X = x)$

$$\pi(x) \propto \exp(-kE)$$



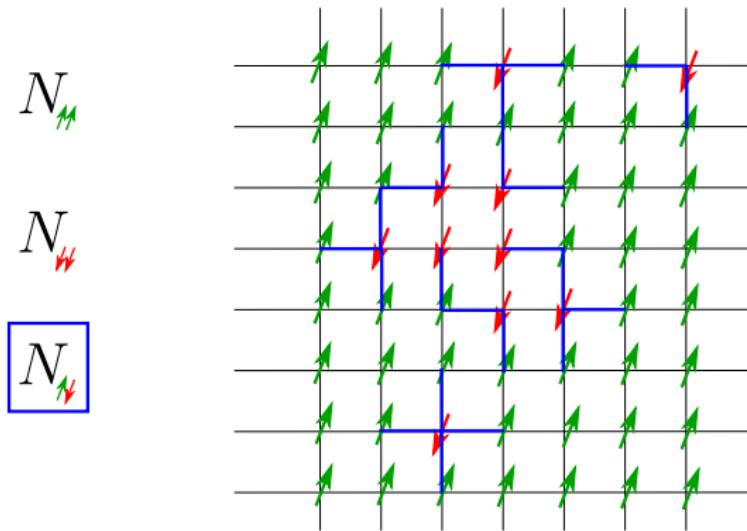
Simulation : densité de probabilité $\pi(x)$ ou loi $P_X(X = x)$

$$\pi(x) \propto \exp(-kE)$$



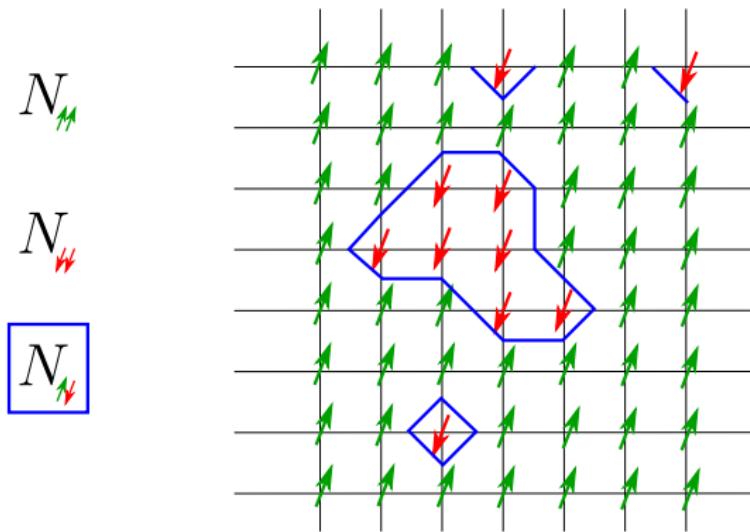
Simulation : densité de probabilité $\pi(x)$ ou loi $P_X(X = x)$

$$\pi(x) \propto \exp(-kE)$$



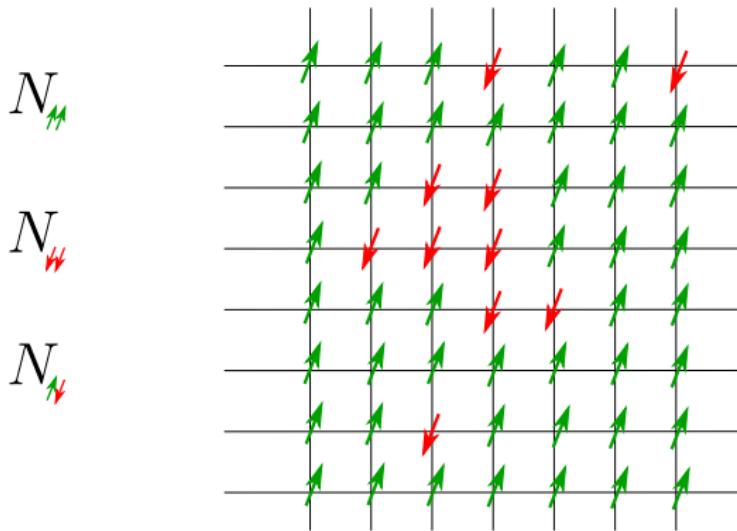
Simulation : densité de probabilité $\pi(x)$ ou loi $P_X(X = x)$

$$\pi(x) \propto \exp(-kE)$$



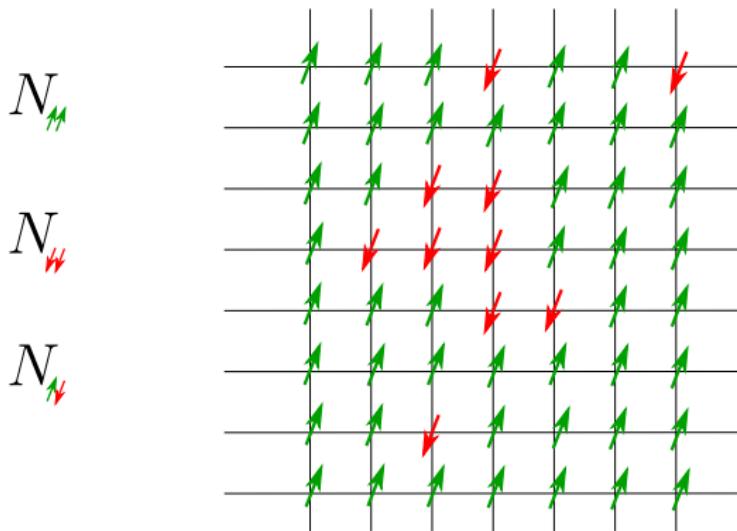
Simulation : densité de probabilité $\pi(x)$ ou loi $P_X(X = x)$

$$\pi(x) \propto \exp(-kN_{\textcolor{red}{x}})$$



Simulation : densité de probabilité $\pi(x)$ ou loi $P_X(X = x)$

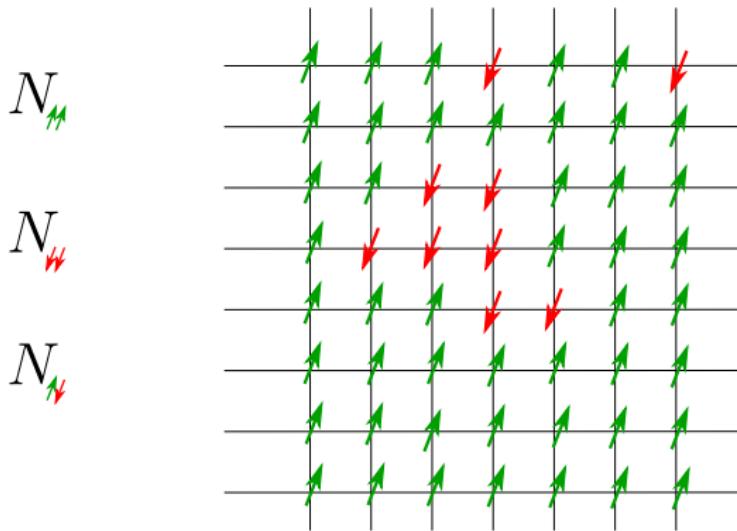
$$\pi(x) \propto \exp(-kN_{\textcolor{red}{x}})$$



$$N_{\textcolor{red}{x}} = 23$$

Simulation : densité de probabilité $\pi(x)$ ou loi $P_X(X = x)$

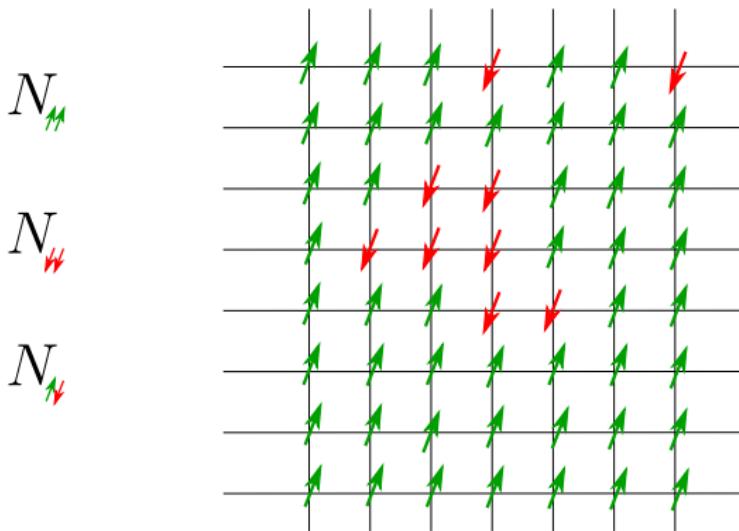
$$\pi(x) \propto \exp(-kN_{\textcolor{red}{x}})$$



$$N_{\textcolor{red}{x}} = 19$$

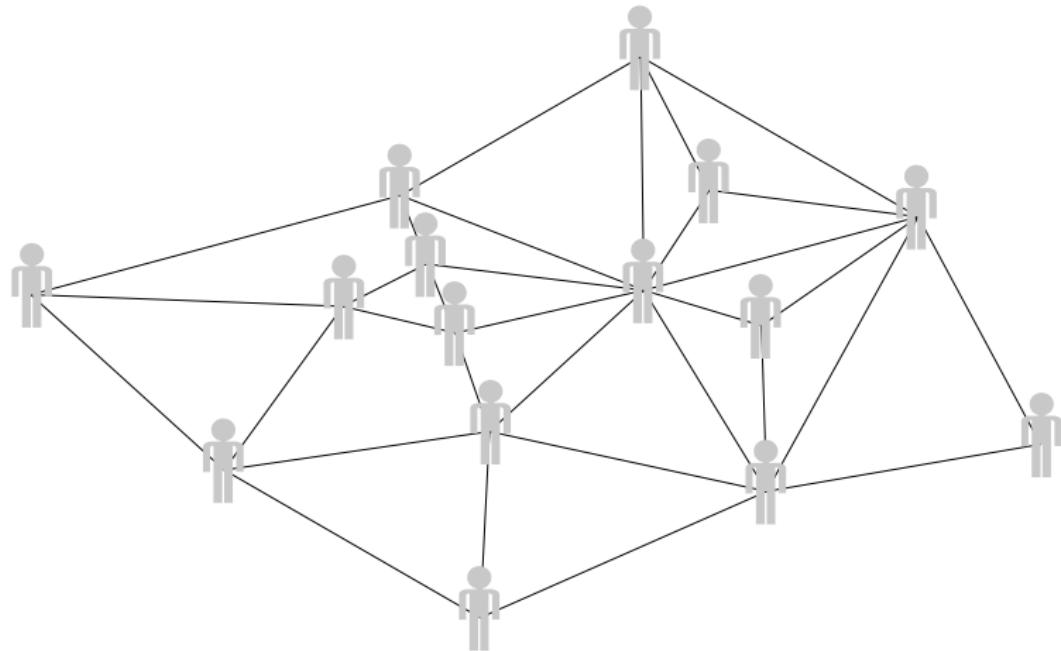
Simulation : densité de probabilité $\pi(x)$ ou loi $P_X(X = x)$

$$\pi(x) \propto \exp(-kN_{\textcolor{red}{x}})$$

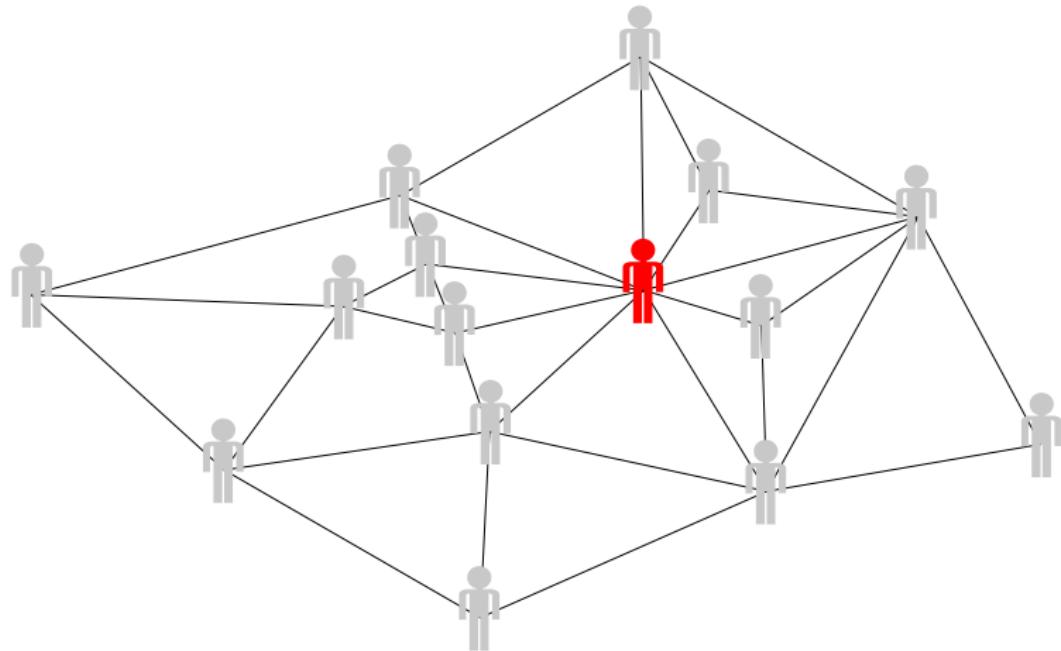


$$\frac{\pi(x')}{\pi(x)} = \frac{\exp(-19k)}{\exp(-23k)} = \exp(4k)$$

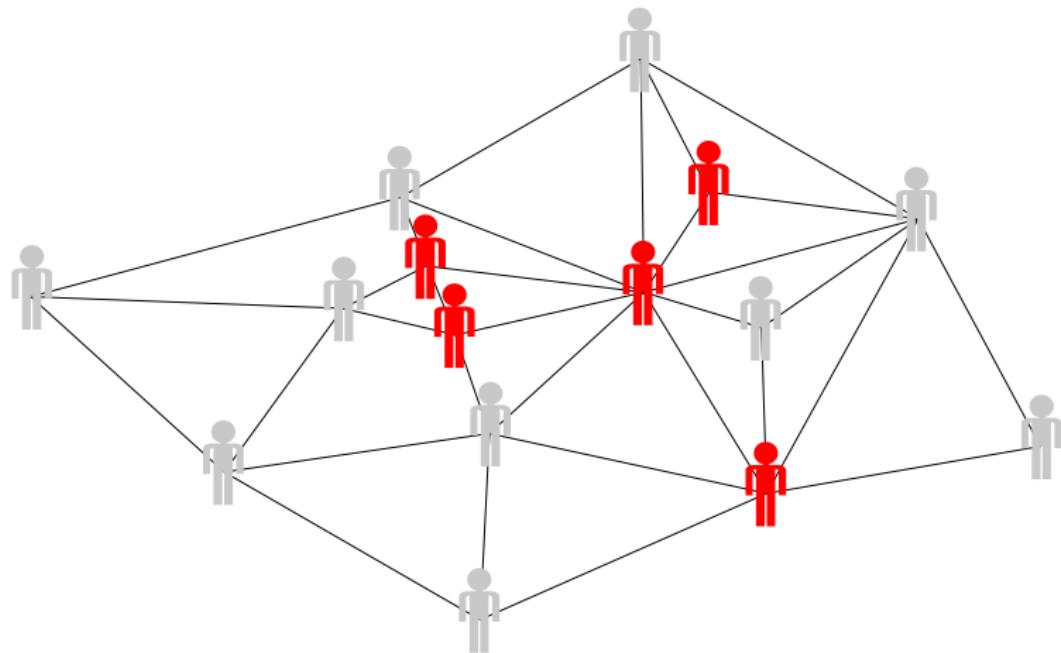
Simulation : densité de probabilité $\pi(x)$ ou loi $P_X(X = x)$



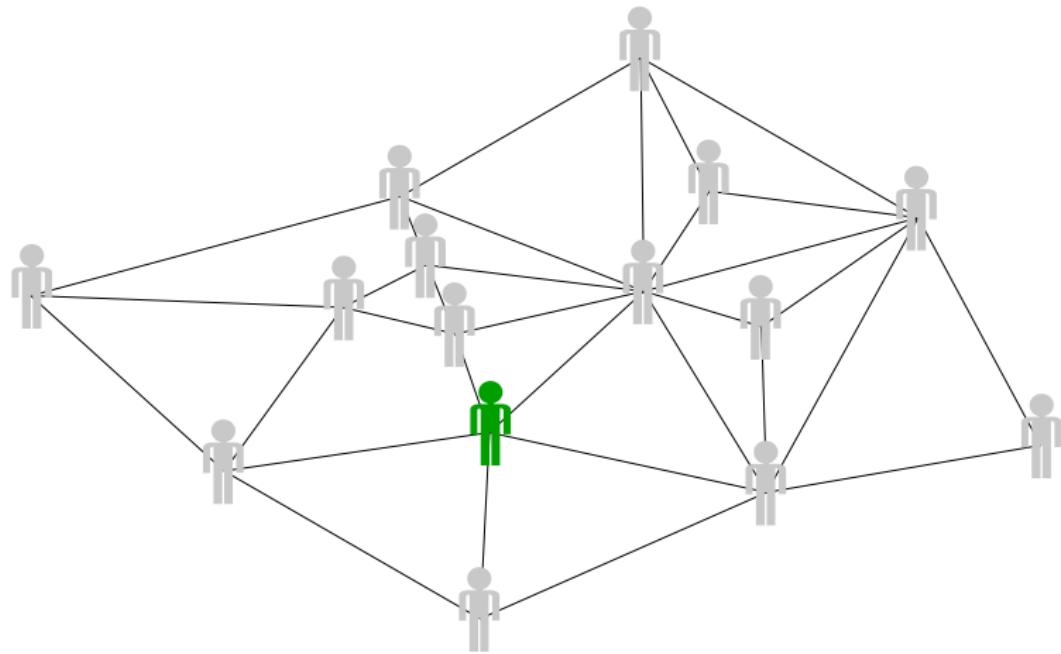
Simulation : densité de probabilité $\pi(x)$ ou loi $P_X(X = x)$



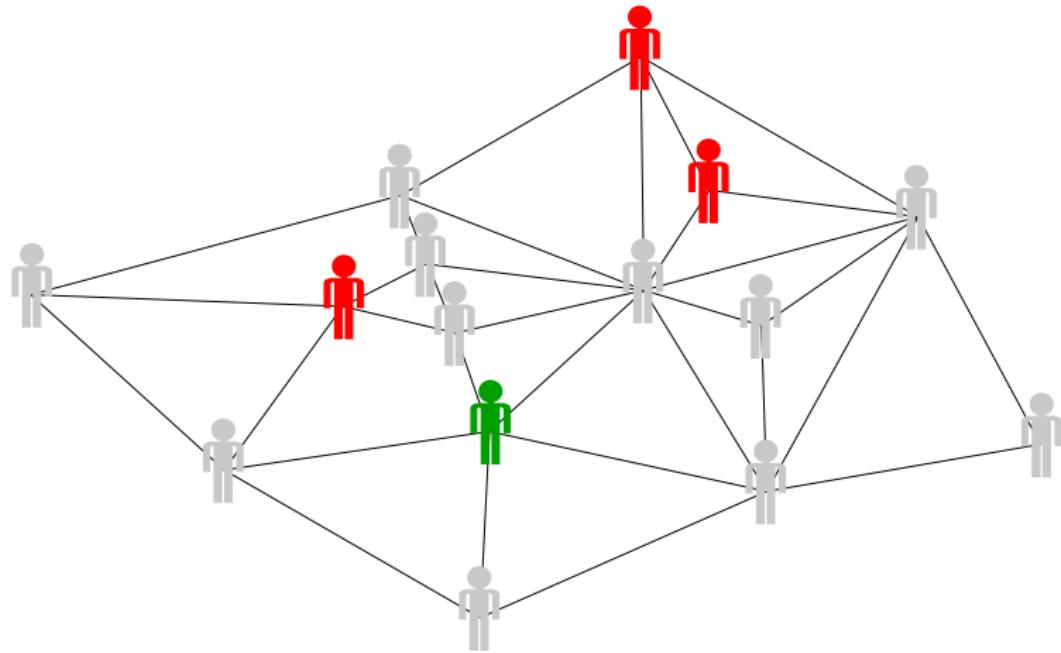
Simulation : densité de probabilité $\pi(x)$ ou loi $P_X(X = x)$



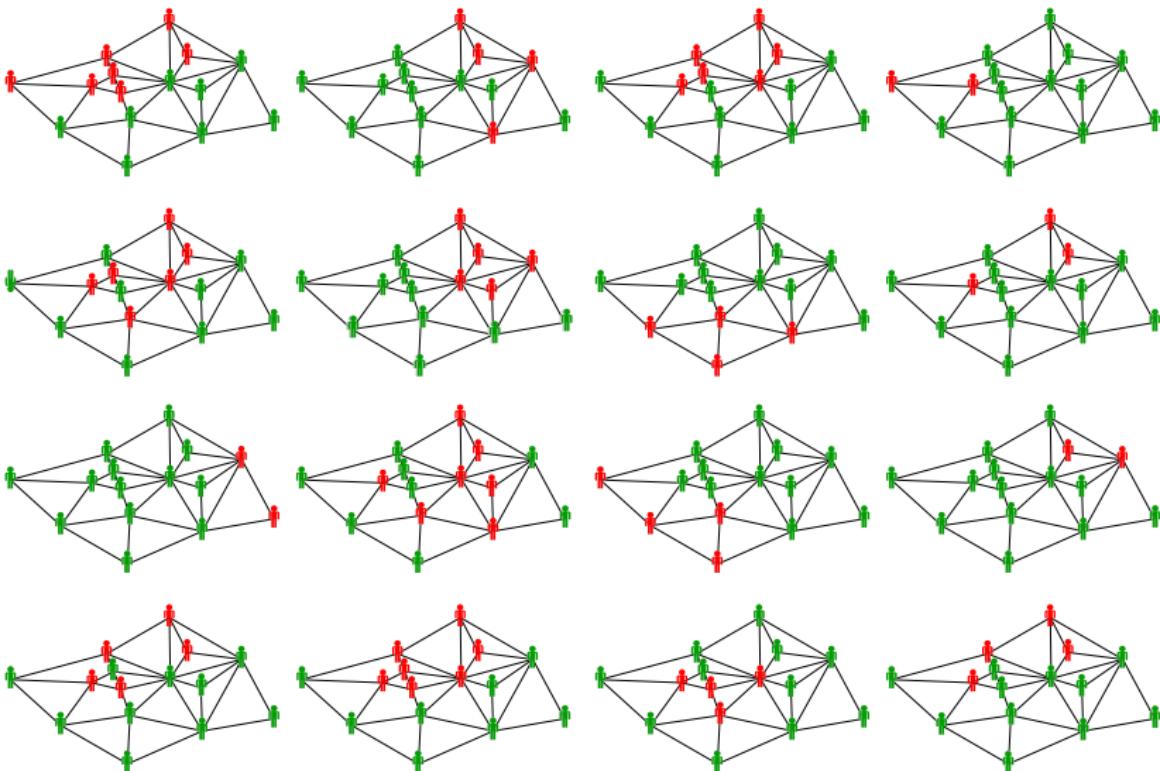
Simulation : densité de probabilité $\pi(x)$ ou loi $P_X(X = x)$



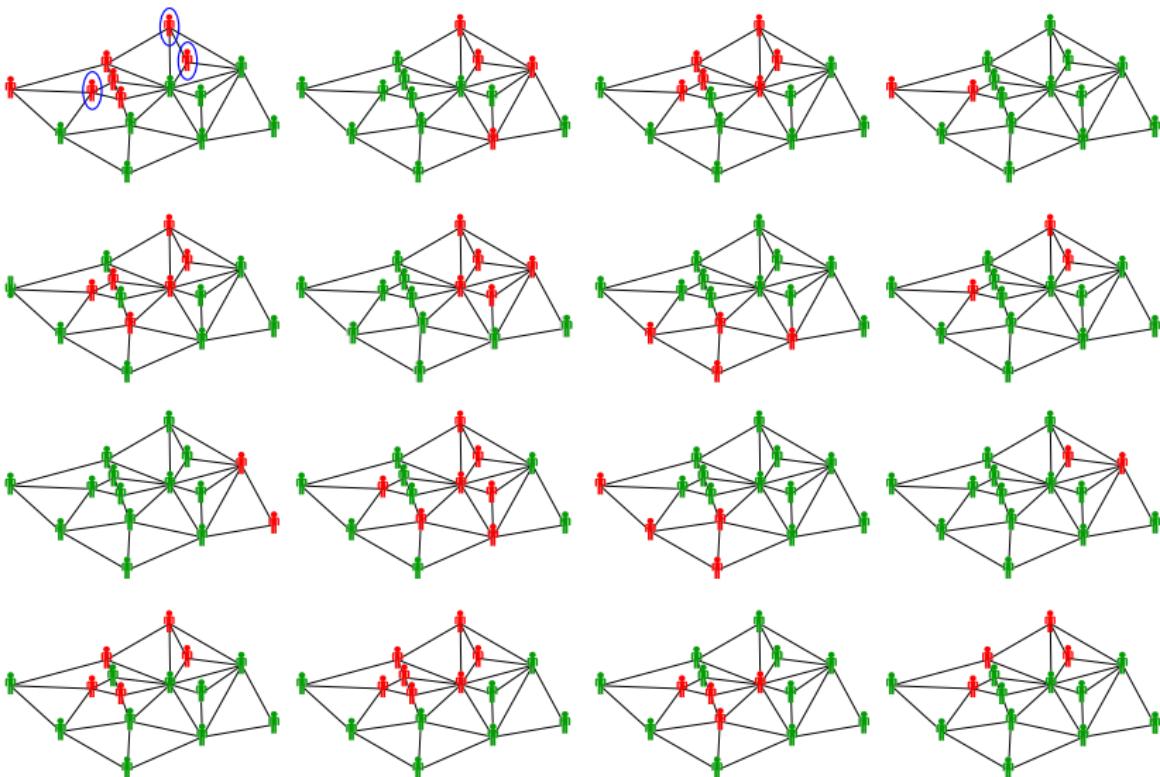
Simulation : densité de probabilité $\pi(x)$ ou loi $P_X(X = x)$



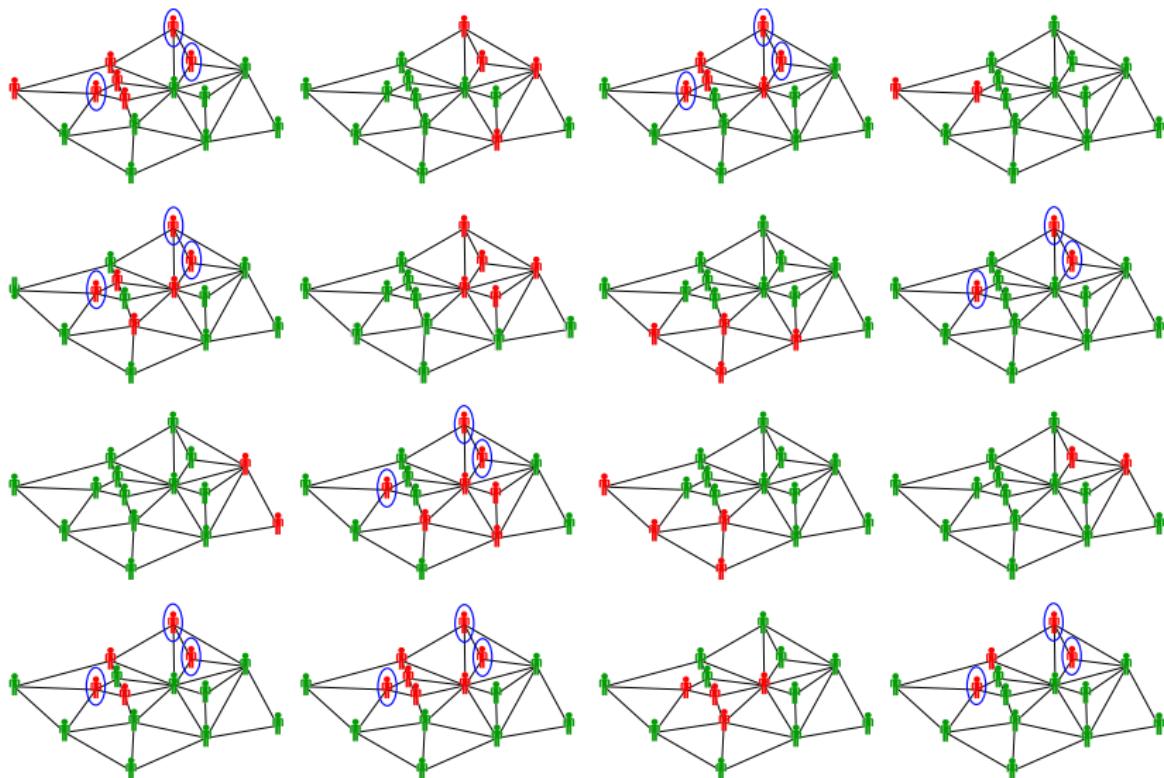
Simulation : densité de probabilité $\pi(x)$ ou loi $P_X(X = x)$



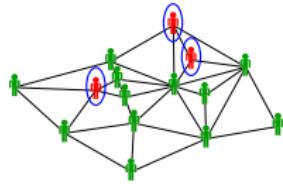
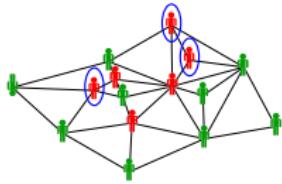
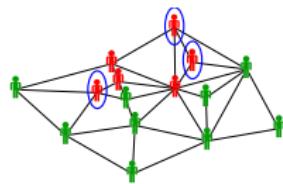
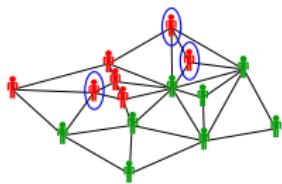
Simulation : densité de probabilité $\pi(x)$ ou loi $P_X(X = x)$



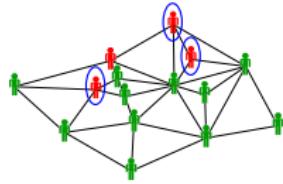
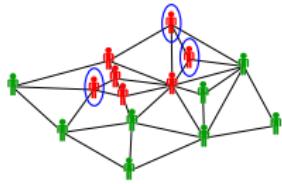
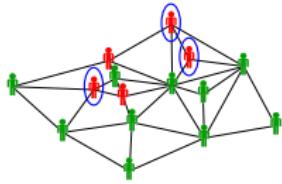
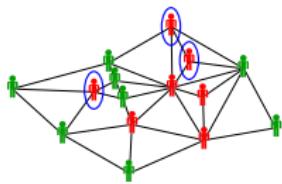
Simulation : densité de probabilité $\pi(x)$ ou loi $P_X(X = x)$



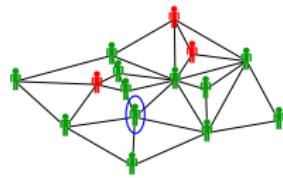
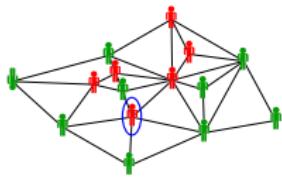
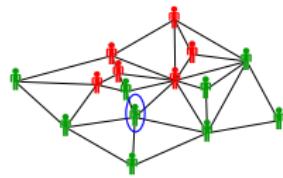
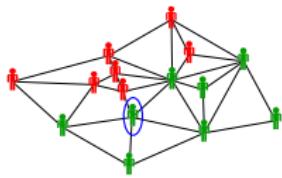
Simulation : densité de probabilité $\pi(x)$ ou loi $P_X(X = x)$



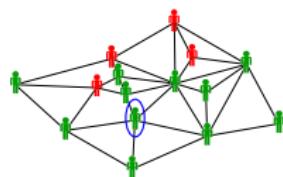
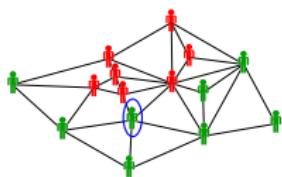
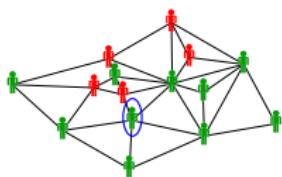
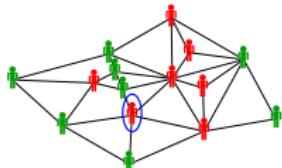
...



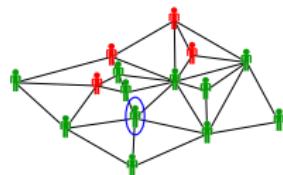
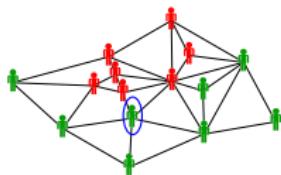
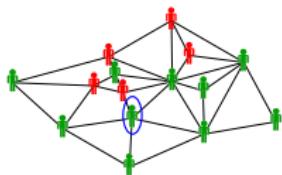
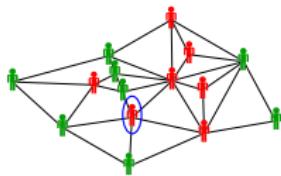
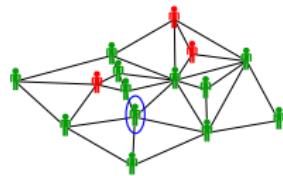
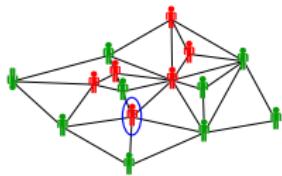
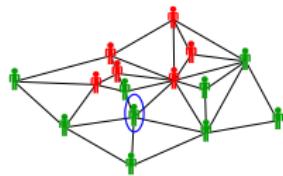
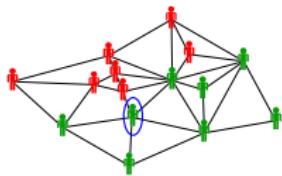
Simulation : densité de probabilité $\pi(x)$ ou loi $P_X(X = x)$



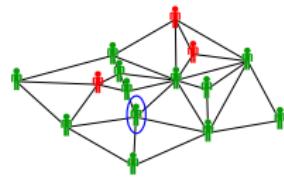
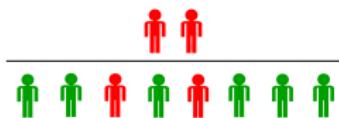
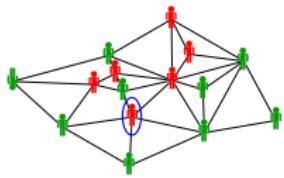
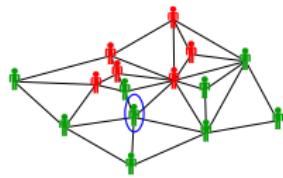
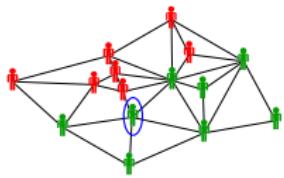
...



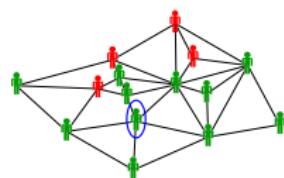
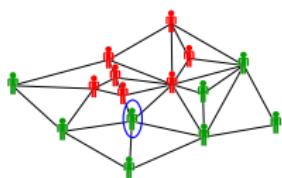
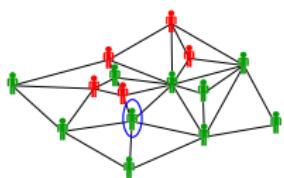
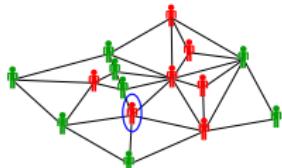
Simulation : densité de probabilité $\pi(x)$ ou loi $P_X(X = x)$



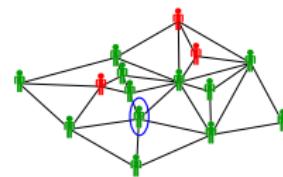
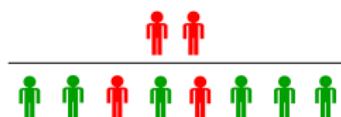
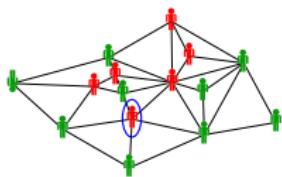
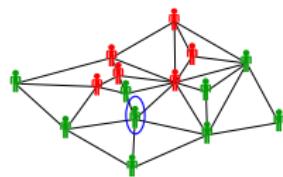
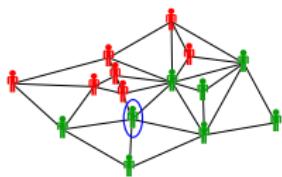
Simulation : densité de probabilité $\pi(x)$ ou loi $P_X(X = x)$



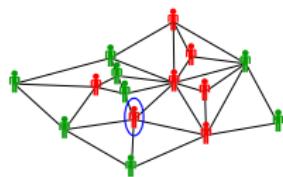
...



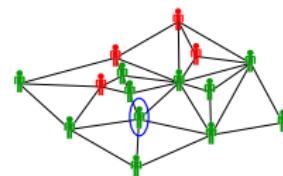
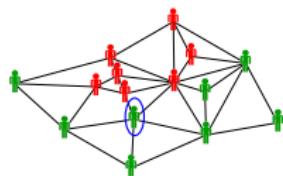
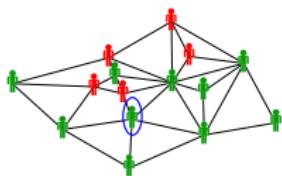
Simulation : densité de probabilité $\pi(x)$ ou loi $P_X(X = x)$



1

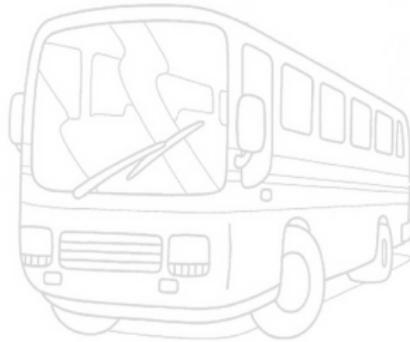
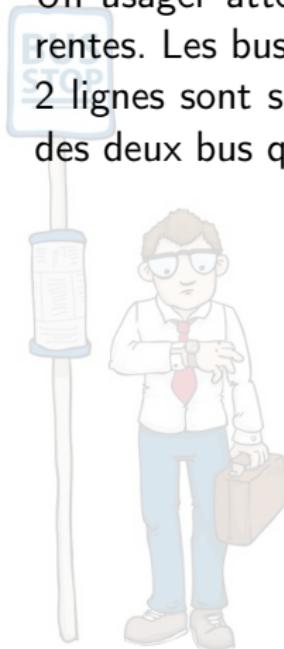


$$\mathbb{P}(\text{red}) = 0.25$$



Exercice synthèse

Un usager attend le bus à une station desservie par 2 lignes différentes. Les bus y passent à un intervalle régulier de 10 minutes. Les 2 lignes sont supposées indépendantes. L'usager prendra le premier des deux bus qui arrive.



Exercice synthèse

Un usager attend le bus à une station desservie par 2 lignes différentes. Les bus y passent à un intervalle régulier de 10 minutes. Les 2 lignes sont supposées indépendantes. L'usager prendra le premier des deux bus qui arrive.

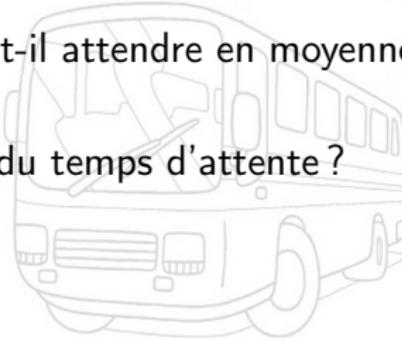
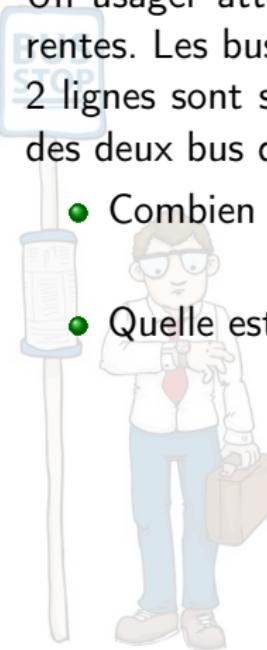
- Combien de temps doit-il attendre en moyenne ?



Exercice synthèse

Un usager attend le bus à une station desservie par 2 lignes différentes. Les bus y passent à un intervalle régulier de 10 minutes. Les 2 lignes sont supposées indépendantes. L'usager prendra le premier des deux bus qui arrive.

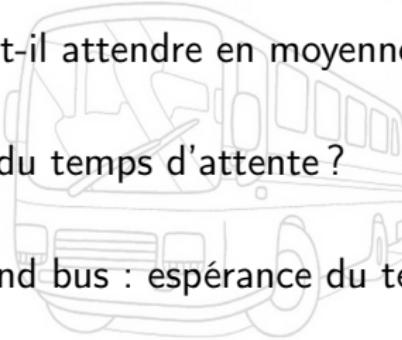
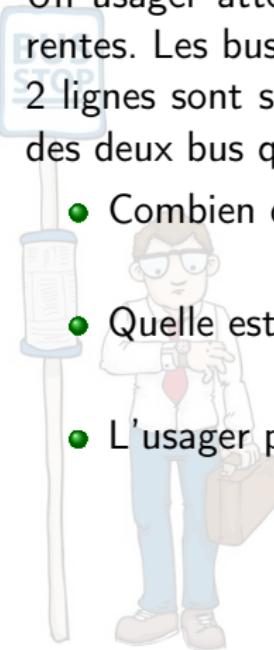
- Combien de temps doit-il attendre en moyenne ?
- Quelle est la variance du temps d'attente ?



Exercice synthèse

Un usager attend le bus à une station desservie par 2 lignes différentes. Les bus y passent à un intervalle régulier de 10 minutes. Les 2 lignes sont supposées indépendantes. L'usager prendra le premier des deux bus qui arrive.

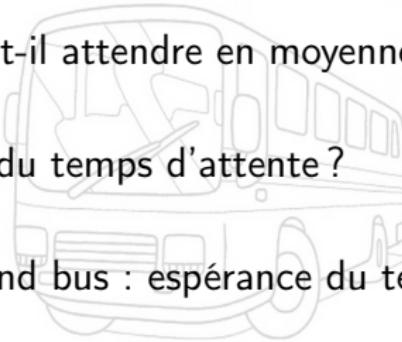
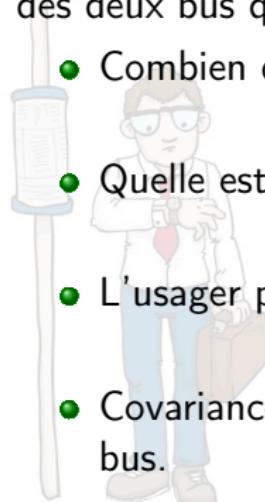
- Combien de temps doit-il attendre en moyenne ?
- Quelle est la variance du temps d'attente ?
- L'usager prend le second bus : espérance du temps d'attente



Exercice synthèse

Un usager attend le bus à une station desservie par 2 lignes différentes. Les bus y passent à un intervalle régulier de 10 minutes. Les 2 lignes sont supposées indépendantes. L'usager prendra le premier des deux bus qui arrive.

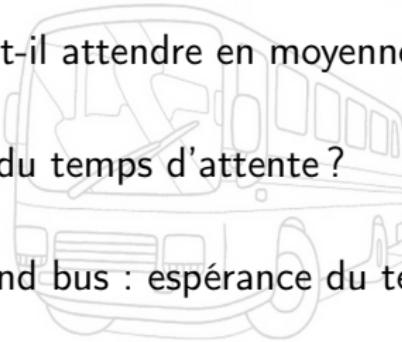
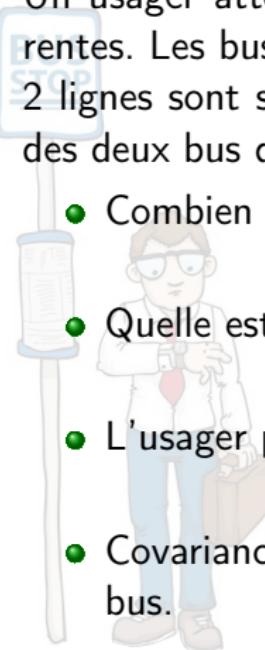
- Combien de temps doit-il attendre en moyenne ?
- Quelle est la variance du temps d'attente ?
- L'usager prend le second bus : espérance du temps d'attente
- Covariance (et corrélation) entre les temps d'attente des deux bus.



Exercice synthèse

Un usager attend le bus à une station desservie par 2 lignes différentes. Les bus y passent à un intervalle régulier de 10 minutes. Les 2 lignes sont supposées indépendantes. L'usager prendra le premier des deux bus qui arrive.

- Combien de temps doit-il attendre en moyenne ?
- Quelle est la variance du temps d'attente ?
- L'usager prend le second bus : espérance du temps d'attente
- Covariance (et corrélation) entre les temps d'attente des deux bus.
- Généralisation au cas de n lignes de bus ?



Références bibliographiques

- [1] *La Guerre du Péloponnèse, ou Histoire de la guerre du Péloponnèse, ouvrage de l'historien athénien Thucydide écrit à la fin du V e siècle av. J. -C*
- [2] Samueli, J. J., & Boudonot, J. C. (2009). *Histoire des probabilités : des origines à 1900*. Ellipses
- [3] Barbin, E., Lamarche J.P. (2004). *Histoires de probabilités et de statistiques*. Editions Ellipses.
- [4] Tieszen, R. L., & Tieszen, R. (2011). *After Gödel : Platonism and rationalism in mathematics and logic*. Oxford University Press
- [5] Behrisch, L. (2016). *Statistics and Politics in the 18th Century*. Historical Social Research/Historische Sozialforschung, 238-257.
- [6] Johnson, A. (1995). *Geometric probability. Geometry and its applications*. COMAP, Inc.
- [7] <https://www.statistics.com/statistics-at-war/>
- [8] <https://www.eadan.net/blog/german-tank-problem/>
- [9] Smith, G. (2014). *Standard deviations : Flawed assumptions, tortured data, and other ways to lie with statistics*. Abrams.
- [10] Koller, D., & Friedman, N. (2009). *Probabilistic graphical models : principles and techniques*. MIT press.

Références bibliographiques

- [11] Tribus, M. (2016). *Rational Descriptions, Decisions and Designs : Pergamon Unified Engineering Series*. Elsevier.
- [12] Daly, R., Shen, Q., & Aitken, S. (2011). Learning Bayesian networks : approaches and issues. *The knowledge engineering review*, 26(2), 99-157.
- [13] Lecoutre, J. P. (2002). *Statistique et probabilités*. Dunod.