V101

Das Trägheitsmoment

Umut Aydinli
umutaydinli27@gmail.com

Muhammed-Sinan Demir
sinan.demir@tu-dortmund.de

Durchführung: 26.11.2021 Abgabe: 03.12.2021

TU Dortmund – Fakultät Physik

Inhaltsverzeichnis

1 Zielsetzung

Bei dem Versuch V101 geht es darum, das Trägheitsmoment besser kennenzulernen und dessen Zusammensetzen besser und anschaulicher darzustellen. Es werden viele verschiedene Trägheitsmomente von verschiedenen Körpern bestimmt, deren Drehachse ebenfalls nicht immer durch den Schwerpunkt verlaufen.

2 Theorie

Das Trägheitmoment I ist eine von drei physikalische Komponenten die für das beschreiben einer Rotationsbewegung benötigt ist. Das Drehmoment M und die Winkelbeschleunigung $\dot{\omega}$ sind die anderen Komponenten. Das Trägheitsmoment lässt sich ausdrücken als:

$$I = mr^2 \tag{1}$$

für eine punktförmige Masse m mit dem Abstand r von der Drehachse. Alle Massenelemente eines ausgedehnten Körpers, welche sich um eine Achse drehen, bewegen sich mit gleicher Winkelgeschwindigkeit um die Drehachse. Daraus folgt das Gesamtträgheitsmoment

$$I = \sum_i r_i^2 \cdot m_i.$$

Für infinitisimale Massen gilt

$$I = \int r^2 \, dm.$$

Das Drehmoment ist eine lageabhängige Komponente, welche von der Lage der Drehachse abhängt. Die Berechnung des Trägheitsmomentes ist einfacher berechenbar für geometrische Körper, wie z.B. eine Kugel oder ein Zylinder, bei denen die Drehachse durch den Schwerpunkt S verlaufen, als für komplexere Körper (wie z.B. eine Holzpuppe). Hierbei ist es einfacher den Körper in kleinere Segmente aufzuteilen und die berechneten Trägheiten aufeinander zu addieren, wenn sie alle von einer Achse abhängig sind. Bei Körpern bei denen die Drehachse nicht durch den Schwerpunkt verläuft, sondern um einen Abstand a parrallel verschoben, ist wird der Satz von Steiner, um das Trägheitsmoment zu berechnen, benutzt

$$I = I_s + m \cdot a^2. \tag{2}$$

Das I_s ist hierbei das Trägheitsmoment, welches durch den Schwerpunkt des Körpers verläuft, m die Gesamtmasse des Körpers und a der Abstand zur Schwerpunktsachse. Einige Trägheitsmomente welche für dieses Experiment wichtig sein werden, sind

$$I_{\text{Stab}} = \frac{1}{12} m l^2,$$
$$I_{\text{Kugel}} = \frac{2}{5} m R^2, \tag{3}$$
$$I_{\text{Zylinder}} = \frac{1}{2} m R^2. \tag{4}$$

Für das Drehmoment gilt, wenn eine Kraft im Abstand r eingreift, $M = \vec{F} \times \vec{r}$. Würde diese Kraft dabei um α ausgelenkt, dann folgt dafür:

$$\rightarrow M = \vec{F} \cdot \vec{r} \cdot \sin(\alpha) \tag{5}$$

($\vec{F}$ und $\vec{r}$ stehen senkrecht zueinander).

Durch das Auslenken entsteht eine harmonische Schwingung mit der Dauer:

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{I}{D}}. \tag{6}$$

Durch Umformen ensteht

$$I = \frac{T^2 \cdot D}{4\pi^2}. \tag{7}$$

Die Relative Abweichung wird in % bestimmt, durch

$$a = \frac{x_{exp} - x_{theo}}{x_{theo}} \cdot 100 \tag{8}$$

3 Aufgaben

Zunächst wird die Winkelgröße D und das dazugehörige Eigenträgheitsmoment l_{D} durch Anwendung des Satzes von Steiner, bestimmt. Danach soll das Trägheitsmoment l von den zwei Körpern bestimmen und mit den theoretisch berechneten Werten vergleichen. Als letztes soll das Trägheitsmoment einer Modellpuppe bestimmt werden, welche in zwei verschiedene Haltungen eingestellt wird. Die ermittelten Werte sollen dann verglichen werden mit der dazugehörigen Modellrechnung.

4 Vorbereitungsaufgaben

Die Vorbereitungsaufgabe für diesen Versuch besteht aus dem Berechnen des Drehmoments M. An einer Stange wirkt Senkrecht eine Kraft von $F = 0.1\,\mathrm{N}$, in einem Winkel von $\alpha_1 = 90°$. Ebenso soll man $\alpha_2 = 45°$ Die Werte sollen in einem Abstandsbereich von 5 bis 25 cm bestimmt werden. Dies soll für 10 verschiedene Abstände berechnet werden. Hierfür wird die Formel

$$M = F \cdot r \cdot \sin\alpha$$

benötigt.

$$\rightarrow \quad M_{r1} = 0.1\mathrm{N} \cdot r \cdot \sin(45°) \tag{9}$$
$$\rightarrow \quad M_{r2} = 0.1\mathrm{N} \cdot r \cdot \sin(90°) \tag{10}$$

die verschiedenen Abstände eingesetzt führen zu den Ergebnissen

$$\begin{aligned}
M_{r1=5} &= 0,353\,\mathrm{N}, \quad M_{r2=5} = 0,5\,\mathrm{N}\\
M_{r1=7} &= 0,495\,\mathrm{N}, \quad M_{r2=7} = 0,7\,\mathrm{N}\\
M_{r1=9} &= 0,636\,\mathrm{N}, \quad M_{r2=9}, = 0,9\,\mathrm{N}\\
M_{r1=11} &= 0,779\,\mathrm{N}, \quad M_{r2=11} = 1,1\,\mathrm{N}\\
M_{r1=13} &= 0,919\,\mathrm{N}, \quad M_{r2=13} = 1,3\,\mathrm{N}\\
M_{r1=15} &= 1,060\,\mathrm{N}, \quad M_{r2=15} = 1,5\,\mathrm{N}\\
M_{r1=17} &= 1,202\,\mathrm{N}, \quad M_{r2=17} = 1,7\,\mathrm{N}\\
M_{r1=19} &= 1,343\,\mathrm{N}, \quad M_{r2=19} = 1,9\,\mathrm{N}\\
M_{r1=21} &= 1,484\,\mathrm{N}, \quad M_{r2=21} = 2,1\,\mathrm{N}\\
M_{r1=23} &= 1,626\,\mathrm{N}, \quad M_{r2=23} = 2,3\,\mathrm{N}\\
M_{r1=25} &= 1,767\,\mathrm{N}. \quad M_{r2=25} = 2,5\,\mathrm{N}
\end{aligned}$$

5 Versuchsaufbau und Versuchdurchführung

Im den gesamten Versuch wird eine Drillachse, ein Metallstab, ein Winkelmesser, zwei Federwaagen ($0,2\,\mathrm{N}$ und $10\,\mathrm{N}$), 2 gleichschwere Gewichte, einen Styropor Zylinder, eine Holzkugel, eine Holzpuppe, eine kleine und eine große Schieblehre und eine Waage benötigt. Diese Objekte sind in Abbildung 1 zu sehen.

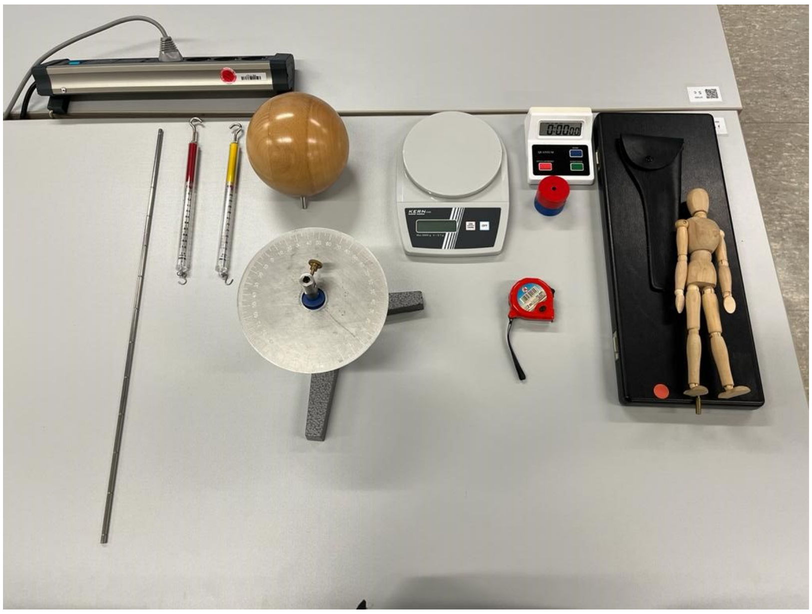


Abbildung 1: Die Abbildung aller Versuchsbauteilen.

Für den ersten Arbeitsauftrag wird an einer Drillachse die Mitte eines Metallstab befestigt. Auf der Drillachse liegt ein Winkelmesser, welcher so eingestellt ist, dass die Ruhelage des Stabs bei 0° liegt. An einer fest gewählten Stelle wird die Federwaage befestigt und waagerecht zum Stab gehalten. Der Aufbau ist in Abbildung 2 zu sehen. Danach wird der der Stab mithilfe der Federwaage um einen variablen Winkel α ausgelenkt. Die daraus resultierende Kraft, die auf der Federwaage angezeigt wird, gibt an wie viel Kraft benötigt wird um den Stab um den Winkel α auszulenken. Der Winkel muss mindestens 10 mal geändert werden. Die daraus resultierenden Werte werden in Tabelle 1 festgehalten.

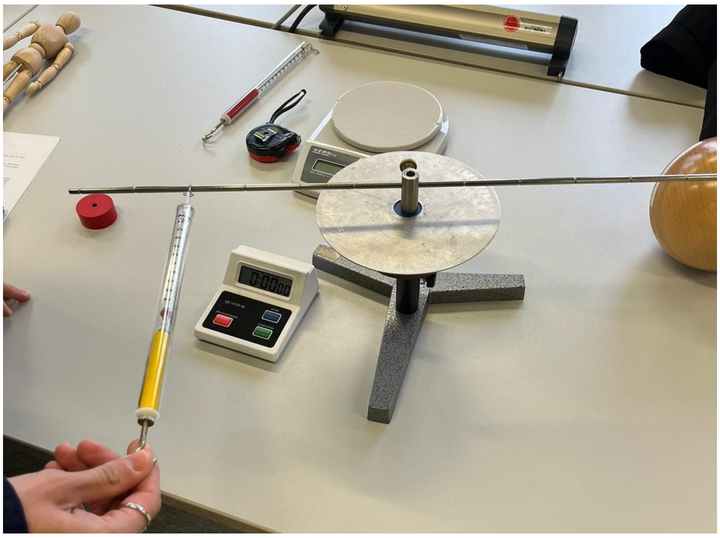


Abbildung 2: Der Aufbau für die Federwaage, welche am Stab befestigt ist.

Als nächstes wird die Federwaage mit zwei gleichschweren und gleichgroßen Gewichten ausgewechselt. Jedes Gewicht wird auf einer Seite im selben Abstand befestigt. Der Aufbau ist in Abbildung 3 zu sehen. Um das Eigenträgheitsmoment nun zu bestimmen wird diese Aufbaukonstruktion zum Schwingen gebracht. Dies wird durch das auslenken um 180° des Stabes mit den Gewichten herbeigeführt. Betrachtet wird eine ganze Schwingperiode. Eine ganze Schwingperiode ist vom Auslenken bis zum Maximumspunkt in Richtung Ursprungsauslenkung. Hierbei werden die Abstände zur Drehachse verändert, wobei die Abstände der beiden Gewichte zur Drehachse auf beiden Seiten immer gleich sind. Die daraus resultierenden Werte werden in Tabelle 2 festgehalten.

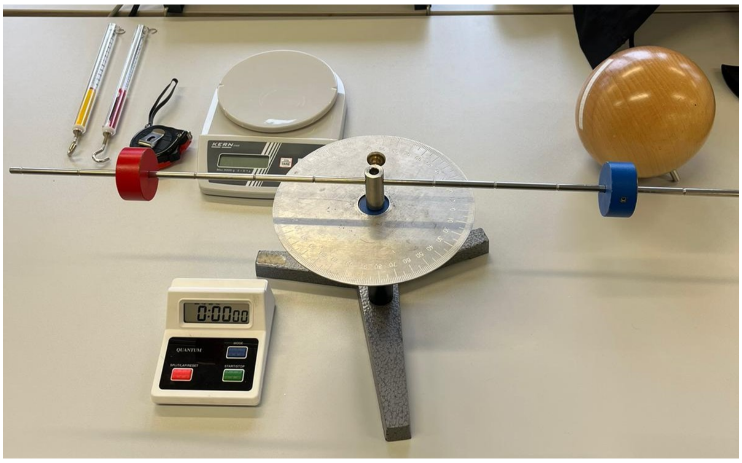
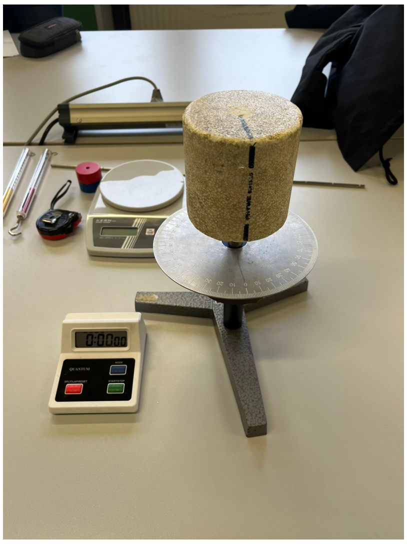


Abbildung 3: Der Aufbau der beiden Massen, welche am Stab befestigt sind.

Danach wird an einer Drillachse mit dem Winkelmesser einer von den beiden Körpern (Styroporzylinder, Holzkugel) befestigt. Der Winkelmesser wird wieder so gelegt, dass die Markierung (welche auf den Objekten angezeichnet wurden) in Ruhelage bei 0° liegt.
Den Aufbau hierzu sieht man in Abbildung (4a) für den Styroporzylinder und in Abbildung (4b) für die Holzkugel. Die Durchführung für den Zylinder ist identisch zu der Kugel. Man lenkt den Körper um 180° aus und misst wie lange der Körper für eine Schwingperiode benötigt. Man wiederholt dies jeweils fünf mal für jedes Objekt.
Die daraus resultierenden Zeiten werden in Tabelle (3) für den Styroporzylinder und in Tabelle (4) für die Holzkugel festgehalten.

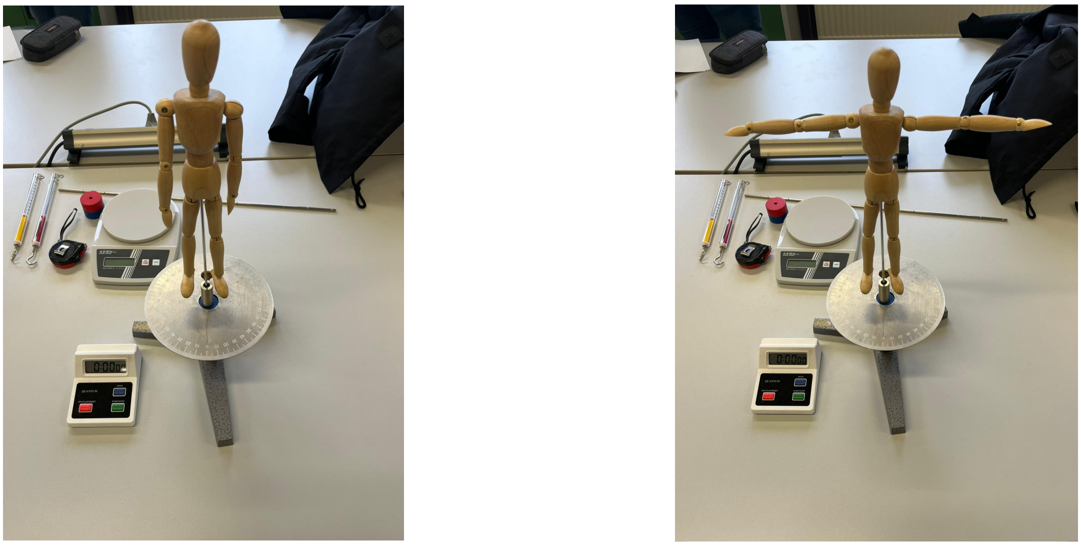


(a) Der Aufbau zu dem Styroporzylinder an der Drillachse.

(b) Der Aufbau zu der Holzkugel an der Drillachse.

Abbildung 4: Die Darstellung der beiden Messkörper an der Drillachse.

Als letztes wird an der Drillachse eine Holzpuppe befestigt. Diese hat zwei spezifische Haltungen. Die erste ist mit den Armen am Körper und die zweite ist mit den Armen zur Seite hinausgestreckt. Den Winkelmesser legt man diesmal so an, dass die Mitte des Körpers in Ruhelage bei 0° liegt. Der Aufbau ist in Abbildung 5 zu sehen. Die Puppe wird dies nur um 90° ausgelenkt und die Schwingperiode gemessen. Dies wird für beide Haltungen jeweils 5 mal gemacht. Die daraus resultierenden Zeiten werden in Tabelle 6 für die Haltung eins und in Tabelle 7 für die Haltung zwei festgehalten.



(a) Die Darstellung der ersten Haltung.

(b) Die Darstellung der zweiten Haltung.

Abbildung 5: Die Darstellung der beiden Haltungen der Holzpuppe.

6 Auswertung

Für die Auswertung der Winkelrichtgröße sind folgende Werte gegeben.
Die Masse des Stabs beträgt: $m_{Stab} = 0,1351\,\mathrm{kg}$
Der Radius wir festgelegt auf 14,9 cm
Die Winkelrichtgröße $D = \frac{F \cdot r}{\phi}$
Den Wert für in Radiant wird durch $\frac{\phi° \cdot \pi}{180}$ berechnet.

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} x_n$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{n=1}^{N} (x_n - \bar{x})^2}$$

$$N = 9 \qquad \bar{x} = 0,0231$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{9-1} \sum_{n=1}^{9} (x_n - 0,0231)^2} = 0,001851$$

somit folgt: $D = (0,0231 \pm 0,001851)\,\mathrm{N\,m}$

Tabelle 1: Messdaten für die Bestimmung des Winkelgrößen

ϕ / °	ϕ / rad	F / N	D / N m
30	$\frac{\pi}{6}$	0,07	0,01991
50	$\frac{5\pi}{18}$	0,13	0,02219
70	$\frac{7\pi}{18}$	0,172	0,02097
90	$\frac{\pi}{2}$	0,26	0,02466
110	$\frac{11\pi}{18}$	0,30	0,02328
130	$\frac{13\pi}{18}$	0,35	0,02298
150	$\frac{5\pi}{6}$	0,42	0,02390
180	π	0,52	0,02466
200	$\frac{10\pi}{9}$	0,60	0,02561

Für das Eigenträgheitsmoment sind folgende Werte für folgende Gegebenheiten zustande gekommen.

$$
\begin{aligned}
m_D &= 0,2612\,\mathrm{kg} \\
\alpha &= 180° \\
h_D &= 0,028\,\mathrm{m} \\
r_D &= 0,0225\,\mathrm{m}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
l_{2t,\text{liegend}} &= I_D + 2m_D \cdot \left(\frac{r_D^2}{4} + \frac{h_D^2}{12}\right) + 2m_D \cdot a_D^2 \\
T^2 &= \frac{8\pi^2 \cdot m_D}{D} \cdot a_D^2 + \frac{4\pi^2 \cdot I_D}{D} + \frac{8\pi^2 \cdot m_D \left(\frac{r_D^2}{4} + \frac{h_D^2}{12}\right)}{D}
\end{aligned}
$$

lineare Regression mit $\rightarrow y = mx + b$

$$
\begin{aligned}
m &= \frac{8\pi^2 \cdot I_D}{D} \\
b &= \frac{4\pi^2 \cdot I_D}{D} + \frac{8\pi^2 \cdot m_D \left(\frac{r_D^2}{4} + \frac{h_D^2}{12}\right)}{D}
\end{aligned}
$$

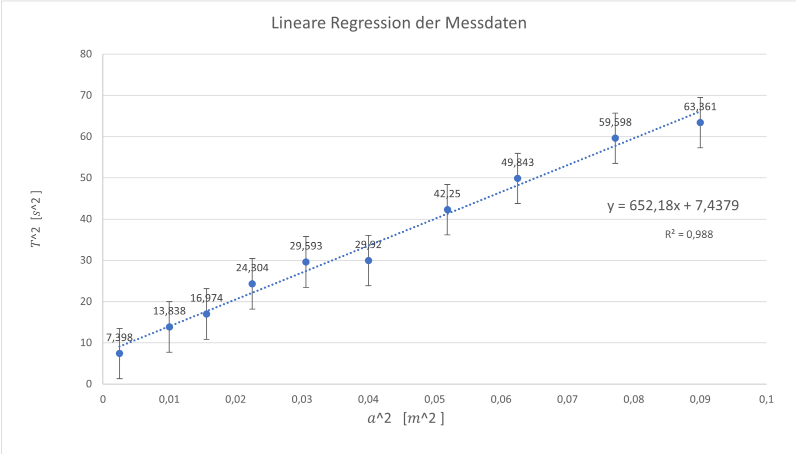


Abbildung 6: Die lineare Regression verbildlicht.

Es folgt daraus:

$$\begin{aligned} r^2 &= 0,98799565112239 \\ r &= 0,9959797035792 \\ m &= 652,183\,\mathrm{s^2m^2} \\ \Delta m &= 25,416\,\mathrm{s^2m^2} \\ b &= 7.4379\,\mathrm{s^2} \\ \Delta b &= 1,2464\,\mathrm{s^2} \end{aligned}$$

mit GTR (Grafikfähiger Taschenrechner) (7):

$$m = (652,183 \pm 25,416)\,\mathrm{s^2m^2} \quad b = (7,4379 \pm 1,2464)\mathrm{s^2}$$

mit

$$\begin{aligned} I_D &= \frac{6 \cdot D}{4\pi^2} - 2 \cdot m_D \cdot \left(\frac{r_D^2}{4} + \frac{h_D^2}{12} \right) D \\ &= \frac{7,4379\mathrm{s^2} \cdot 0,0231\mathrm{N\,m}}{4\pi^2} - 2 \cdot 0,2612\mathrm{kg} \cdot \left(\frac{(0,0225\mathrm{m})^2}{4} + \frac{(0,028\mathrm{m})^2}{12} \right) \\ &= 4,25 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{kgm^2} = 0,00425\,\mathrm{kgm^2} \end{aligned}$$

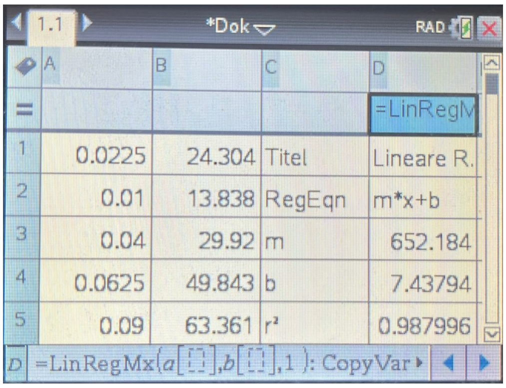


Abbildung 7: Die lineare Regression mit dem Grafikfähigen Taschenrechner.

Fehlerfortpflanzung:

$$\Delta I_D = \sqrt{\left(\frac{b}{4\pi^2}\right)^2 \cdot (\Delta D)^2 + \left(\frac{D}{4\pi^2}\right)^2 \cdot (\Delta b)^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{7,4379\mathrm{s}^2}{4\pi^2}\right)^2 \cdot (0,001851)^2 + \left(\frac{0,0231\,\mathrm{N\,m}}{4\pi^2}\right)^2 \cdot (1,2464)^2}$$

$$I_D = (0,00425 \pm 0.00131)\,\mathrm{kgm}^2$$

Tabelle 2: Messdaten für das Eigenträgheitsmoment

a / m	a^2 / m^2	T / s	T^2 / s^2
0,05	0,0025	2,72	7,398
0,10	0,01	3,72	13,838
0,125	0,0156	4,12	16,974
0,15	0,0225	4,93	24,304
0,175	0,0306	5,44	29,593
0,20	0,04	5,47	29,920
0,228	0,0519	6,50	42,250
0,25	0,0625	7,06	49,843
0,278	0,0772	7,72	59,598
0,30	0,09	7,96	63,361

Die Werte für die Bestimmung des Trägheitsmoments des Zylinders lauten:

$$\begin{aligned} r_{Z1} &= 4,8\,\mathrm{cm} = 0.048\,\mathrm{m} \\ h_{Z1} &= 0,10016\,\mathrm{m} \\ m_{Z1} &= 0,3675\,\mathrm{kg} \end{aligned}$$

Theoretisch

$$I_{Zl,\mathrm{Theo}} = \frac{1}{2}mR^2 = \frac{1}{2} \cdot 0,3675\,\mathrm{kg} \cdot (0,0048\,\mathrm{m})^2 = 4,23 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{kgm}^2$$

Experimentell: $\alpha = 180°$

Tabelle 3: Messdaten Trägheitsmoment Zylinder

T_{Zylinder} / s
0,66
0,75
0,86
0,68
0,78

mit den Werten aus der Tabelle folgt: $\bar{x} = 0,744\,\mathrm{s}$
mit $\sigma = 0,078 \quad \rightarrow \quad T_{Z1,Exp} = (0,744 \pm 0,078)\,\mathrm{s}$

Trägheitsmoment:

$$I = \frac{T^2 \cdot D}{4\pi^2} = \frac{(0,744\mathrm{s})^2 \cdot 0,0231}{4\pi^2} = 0,000323\,\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2$$

Fehlerfortpflanzung:

$$\Delta K1 = \sqrt{\left(\frac{2 \cdot D \cdot T_{Z1}}{4\pi}\right)^2 \cdot (\Delta T_{Z1})^2 + \left(\frac{T_{Z1}}{4\pi}\right)^2 \cdot (\Delta D)^2}$$
$$= \sqrt{\left(\frac{2 \cdot 0,0231 \cdot 0,744\mathrm{s}}{4\pi}\right)^2 \cdot (0,078\mathrm{s})^2 + \left(\frac{0,744}{4\pi}\right)^2 \cdot (0,001851)^2} = 0,00022\,\mathrm{kgm}^2$$

$$\text{somit ergibt sich} \rightarrow I_{Z1} = (0,000323 \pm 0,00022)\,\mathrm{kgm}^2$$

Die Werte für die Bestimmung der Trägheits der Holzkugel lauten:

$$r_{K2} = 0,0702\,\mathrm{m}$$
$$d_{K2} = h_{Z2} = 0,1404\,\mathrm{m}$$
$$m_{K2} = 1,1725\,\mathrm{kg}$$

Tabelle 4: Messdaten Trägheitsmoment Zylinder

T_{K2} / s
1,85
1,59
1,75
1,75
1,88

$$\text{durch die Werte aus der Tabelle folgt :} \quad \bar{x} = 1,764\,\mathrm{s}$$
$$\text{mit } \sigma = 0,1134 \quad \rightarrow \quad T_{K2,Exp} = (0,744 \pm 0,078)\,\mathrm{s}$$

$$\text{Trägheitsmoment: } I = \frac{(1.764\mathrm{s})^2 \cdot (0,0231)}{4\pi^2} = 0,00182\,\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2$$

$$\Delta I = \sqrt{\left(\frac{2 \cdot (0,0231) \cdot 1,764\mathrm{s}}{4\pi}\right)^2 \cdot (0,1134)^2 + \left(\frac{1,764^2\mathrm{s}}{4\pi}\right)^2 \cdot (0,001851)^2} = 0,000866\,\mathrm{kgm}^2$$

$$\underline{I_{K2,Exp} = (0,00182 \pm 0,000866)\,\mathrm{kgm}^2}$$

$$\underline{\text{Theoretisch}}\text{: } \frac{2}{5} m R^2 = \frac{2}{5} 1,1725\,\mathrm{kg} \cdot (0,0702\,\mathrm{m})^2 = 2,311 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{kgm}^2$$

Die Holzpuppe hat eine Masse von $m_p = 0,1675\,\mathrm{kg}$

Tabelle 5: Messdaten der Radien der Holzpuppe

r_{Rumpf} / m	r_{Arm} / m	r_{Bein} / m	r_{Kopf} / m
0,03912	0,014	0,019	0,023
0,026	0,138	0,016	0,027
0,032	0,012	0,0121	0,02708
0,0386	0,014	0,01706	0,025
0,040	0,013	0,13	0,0211
0,038	0,016	0,009	0,02812

durch das mitteln der Radien folgen die Werte:

$$\begin{aligned} r_{\text{Rumpf}} &= (0,03562 \pm 0,0055)\,\text{m} \\ r_{\text{Arm}} &= (0,0138 \pm 0,0013)\,\text{m} \\ r_{\text{Bein}} &= (0,01436 \pm 0,0036)\,\text{m} \\ r_{\text{Kopf}} &= (0,0253 \pm 0,0028)\,\text{m} \end{aligned}$$

hierbei sind die Werte $\bar{x}$ und die Messunsicherheiten σ

Die Länge der einzelnen Teile des Holzpuppe betragen:

$$\begin{aligned} L_{\text{Rumpf}} &= 0,0918\,\text{m} \\ L_{\text{Arm}} &= 0,112\,\text{m} \\ L_{\text{Bein}} &= 0,147\,\text{m} \\ L_{\text{Kopf}} &= 0,041\,\text{m} \end{aligned}$$

Alle Körperteile werden als Zylinder betrachtet:

$$V_{\text{Zylinder}} = \pi r^2 L \text{ und } \Delta V_{\text{Zylinder}} = \sqrt{\left(2\pi \cdot L_{\text{Koerperteil}} \cdot r_{\text{Koerperteil}}\right)^2 \cdot \left(\Delta r_{\text{Koerperteil}}\right)^2}$$

$$\begin{aligned} V_{\text{Rumpf}} &= (3,65 \pm 0,13) \cdot 10^{-4}\,\text{m}^3 \\ V_{\text{Arm}} &= (0,067 \pm 0,0126) \cdot 10^{-4}\,\text{m}^3 \\ V_{\text{Bein}} &= (0,095 \pm 0,047) \cdot 10^{-4}\,\text{m}^3 \\ V_{\text{Kopf}} &= (0,082 \pm 0,01) \cdot 10^{-4}\,\text{m}^3 \end{aligned}$$

$$\Delta V_{\text{ges}} = \sqrt{(\Delta V_{\text{Rumpf}})^2 + 4 \cdot (\Delta V_{\text{Arm}})^2 + 4 \cdot (\Delta V_{\text{Bein}})^2 + (\Delta V_{\text{Kopf}})^2}$$

$$V_{ges} = (0,000609 \pm 0,00016)\,\text{m}^3$$

Teilvolumina am Gesamtvolumen:

$$A_{\text{Koerperteil}} = \frac{V_{\text{Koerperteil}}}{V_{\text{ges}}}$$

mit der dazugehörigen Fehlerfortpflanzung:

$$\Delta A_{\text{Koerperteil}} = \sqrt{\left(\frac{1}{V_{\text{ges}}}\right)^2 \cdot (\Delta V_{\text{Koerperteil}})^2 + \left(-\frac{V_{\text{Koerperteil}}}{V_{\text{ges}}}^2\right)^2 \cdot (\Delta V_{\text{ges}})^2}$$

Anteile

$$A_{\text{Rumpf}} = (0,599 \pm 0,265)$$
$$A_{\text{Arm}} = (0,11 \pm 0,0350)$$
$$A_{\text{Bein}} = (0,159 \pm 0,0786)$$
$$A_{\text{Kopf}} = (0,1346 \pm 0,039)$$

$$m_{\text{Koerperteil}} = A_{\text{Koerperteil}} \cdot m_{\text{Puppe}}$$

$$m_{\text{Rumpf}} = 0,1003\,\text{kg}$$
$$m_{\text{Arm}} = 0,0183\,\text{kg}$$
$$m_{\text{Bein}} = 0,0266\,\text{kg}$$
$$m_{\text{Kopf}} = 0,0225\,\text{kg}$$

Die Theoretischen Werte für die Trägheit der ersten Haltung setzen sich zusammen aus, dem Trägheitsmoment des Rumpfes und des Kopfes aus der Formel (4), sowie für die Arme und Beine aus den Formeln (2) und (4), mit Hilfe des Satzes von Steiner.

$$I_{\text{Arm}} = \frac{m_{\text{Arm}} \cdot r_{\text{Arm}}^2}{2} + m_{\text{Arm}} \cdot (r_{\text{Rumpf}} + r_{\text{Arm}})^2$$
$$I_{\text{Bein}} = \frac{m_{\text{Bein}} \cdot r_{\text{Bein}}^2}{2} + m_{\text{Bein}} \cdot r_{\text{Bein}}^2$$
$$\Delta I_{\text{Koerperteil}} = \sqrt{(m_{\text{Koerperteil}} \cdot r_{\text{Koerperteil}})^2 \cdot (\Delta r_{\text{Koerperteil}})^2}$$
$$\Delta I_{\text{Arm}} = \sqrt{(m_{\text{Arm}} \cdot (2r_{\text{Arm}} + 3r_{\text{Rumpf}}))^2 \cdot (\Delta r_{\text{Arm}})^2}$$
$$\Delta I_{\text{Bein}} = \sqrt{(m_{\text{Bein}} \cdot r_{\text{Bein}} \cdot (1 + r_{\text{Bein}}))^2 \cdot (\Delta r_{\text{Bein}})^2}$$
$$I_{Zi(\text{Kopf/Rumpf})} = \frac{1}{2} m R^2$$

$$\text{Gesamtfehler: } \Delta I_{Puppe} = \sqrt{(\Delta I_{Rumpf})^2 + 4(\Delta I_{Arm})^2 + 4(\Delta I_{Bein})^2 + (\Delta I_{\text{Koerperteil}})^2}$$

$$I_{\text{Kopf}} = 7,2 \cdot 10^{-6}\,\text{kgm}^2$$
$$I_{\text{Rumpf}} = 6,36 \cdot 10^{-5}\,\text{kgm}^2$$
$$I_{\text{Arm}} = 7,87 \cdot 10^{-11}\,\text{kgm}^2$$
$$I_{\text{Bein}} = 8,22 \cdot 10^{-6}\,\text{kgm}^2$$
$$\Delta I_{\text{Kopf}} = 3,21 \cdot 10^{-6}\,\text{kgm}^2$$
$$\Delta I_{\text{Rumpf}} = 1,39 \cdot 10^{-6}\,\text{kgm}^2$$
$$\Delta I_{\text{Arm}} = 1,5939 \cdot 10^{-6}\,\text{kgm}^2$$
$$\Delta I_{\text{Bein}} = 1,96 \cdot 10^{-5}\,\text{kgm}^2$$

durch mitteln folgt der Wert $\Delta I_{\text{Puppe}} = 2,087 \cdot 10^{-5}\,\text{kgm}^2$

$$I_{\text{Theo,Puppe}} = (7,9 \cdot 10^{-5} \pm 2,087 \cdot 10^{-5})\,\text{kgm}^2$$

Experimentelle Bestimmt: $\rightarrow \alpha = 90°$

Tabelle 6: Messdaten der Holzpuppe Haltung 1

$T_{\text{Holzpuppe,1}}$ / s
0,32
0,31
0,35
0,44
0,34

$$\bar{x} = 0,352 \text{ und } \sigma = 0,0516 \rightarrow \; T = (0,352 \pm 0,0516)\,\mathrm{s}$$

$$I_{H1} = \frac{T^2 \cdot D}{(2\pi)^2} = \frac{(0,352\,\mathrm{s})^2 \cdot 0,0231}{(2\pi)^2} = 0,0000724\,\mathrm{kgm}^2$$

$$\Delta I_{H1} = 0,0000692\,\mathrm{kgm}^2$$

$$I_{H1} = (0,0000692 \pm 0,0000692)\,\mathrm{kgm}^2$$

Der Theoretisch ermittelte Wert für die zweite Haltung setzt sich zusammen aus, dem Satz von Steiner mit den Formeln (2) und $I_{\text{Stab}} = \frac{ml^2}{3}$ (Trägheitsmoment eines Stabes an den Enden) für die Arme. Mit der Formel (4) für den Rumpf und dessen Kopf, sowie (2) und (4) für die Beine.

$$I_{\text{Arm}} = \frac{m_{\text{Arm}} \cdot L_{\text{Arm}}^2}{3} + m_{\text{Arm}} \cdot r_{\text{Rumpf}}^2 = 1,002 \cdot 10^{-4}\,\text{kgm}^2$$
$$I_{\text{Rumpf}} = \frac{1}{2} m_{\text{Rumpf}} \cdot R_{\text{Rumpf}}^2 = 6,36 \cdot 10^{-5}\,\text{kgm}^2$$
$$I_{\text{Kopf}} = \frac{1}{2} m_{\text{Kopf}} \cdot R_{\text{Kopf}}^2 = 7,2 \cdot 10^{-6}\,\text{kgm}^2$$
$$I_{\text{Bein}} = \frac{m_{\text{Bein}} + r_{\text{Bein}}^2}{2} + m_{\text{Bein}} \cdot r_{\text{Bein}}^2 = 8,22 \cdot 10^{-6}\,\text{kgm}^2$$
$$I_{\text{Arm}} = \sqrt{(2m_{\text{Arm}} \cdot r_{\text{Rumpf}}) \cdot (\Delta r_{\text{Rumpf}})^2} = 1,99 \cdot 10^{-4}\,\text{kgm}^2$$
$$\Delta I_{\text{Bein}} = 1,39 \cdot 10^{-6}\,\text{kgm}^2$$
$$\Delta I_{\text{Kopf}} = 1,59 \cdot 10^{-6}\,\text{kgm}^2$$
$$\Delta I_{\text{Rumpf}} = 1,96 \cdot 10^{-6}\,\text{kgm}^2$$
$$I_{Theo,H2} = (0,000179 \pm 0,000398)\,\text{kgm}^2$$

Tabelle 7: Messdaten der Holzpuppe Haltung 2

$T_{\text{Holzpuppe,2}}$ / s
0,50
0,60
0,44
0,44
0,53

$$\bar{x} = 0,502 \quad \text{und} \quad \sigma = 0,067$$

$$\rightarrow T_{H2} = (0,502 \pm 0,067)\,\text{s}$$
$$I_{H2} = \frac{T^2 \cdot D}{4\pi^2} = \frac{(0,5020\text{s})^2 \cdot 0,0231}{4\pi^2} = 1,47 \cdot 10^{-4}\,\text{kgm}^2$$
$$\Delta I_{H2} = 0,000129\,\text{kgm}^2$$
$$I_{H2,Exp} = (0,000147 \pm 0,000129)\,\text{kgm}^2$$

7 Diskussion

Bei kronologischer Vorgehensweise, wird bei der Bestimmung der Regression gesehen, dass die Werte in einem annehmbaren Bereich liegen. Wie zu erkennen verläuft die Gerade recht „gut“ durch die Punkte. Ebenso festzulegen durch die Kennzahl beziehungsweise das Bestimmtheitmaß $r^2 = 0,987$, welche genau darstellt, wie die Werte zum Modell passen. Vergleich bei $r^2 = 1$ würde es heißen, dass die Gerade durch alle Punkte gehen würden. Durch die Abweichung lassen sich sogenannte Quadrate darstellen, in unserem Fall: $\sum Quadrate = 40,4507$. Durch das Vergleichen der Werte der Objekte mit den theoretisch sowie experimentell bestimmten werten und der verschiedenen Körperhaltung fällt auf, dass der Zylinder eine relative Abweichung, berechnet durch die Formel (8), von $-37,76\,\%$ hat. Für die Kugel beträgt die Abweichung des experimentellen Wertes von den Theoretischen um $-21,24\,\%$. Die erste Körperhaltung der Puppe hat eine Abweichung von $-8,35\,\%$ und die zweite eine von $-17,8\,\%$. Bei der Untersuchung der Äquivalenz der Trägheitsmomente der zwei Haltungen führt dazu, dass die erste Haltung kleiner ist, um $\frac{1}{2}$, als die zweite Haltung. Beim genaueren Betrachten fällt auf, dass die relative Abweichung im negativen Bereich befindet. Dies weißt daraufhin, dass die theoretischen Werte größer sind als die experimentell bestimmten Werte. Wie schon in der Durchführung thematisiert, handelt es sich um einen Versuch, wobei viel abgelesen werden muss. Dadurch entstehen Fehler beim Ablesen der Schwingungsdauer, des Kraftmessers oder bei der Schieblehre. Zudem die genaue zeitliche Koordinierung beim Auslenken und stoppen der Uhrzeit stellt eine große Fehlerquelle dar. Somit sind systematische Fehler vorhanden.

8 Anhang

Teilvolumina

V_{Rumpf} =
V_{Arm} =
V_{Bein} =
V_{Kopf} =

$\Bigg\} \Rightarrow \Delta V_{ges}$

$A_{Körp.} = \frac{V_{Körpert.}}{V_{ges}}$

A_{Rumpf} =
A_{Arm} =
A_{Bein} =
A_{Kopf} =

$\Rightarrow$ m_{Rumpf}, m_{Arm}, m_{Bein}, m_{Kopf}

1. Haltung

→ 90° ausgelenkt

	$T_{P1} / \frac{1}{s}$
1.	0,32
2.	0,31
3.	0,35
4.	0,44
5.	0,34

2. Haltung

→ 90° = ϑ ausgelenkt

	$T_{P2} / \frac{1}{s}$
1.	0,5
2.	0,6
3.	0,44
4.	0,44
5.	0,53

R.R.

Vorgehensweise

$M = \underbrace{F \times r}_{allg} = F \cdot r \cdot \sin(\vartheta)$

1) Winkelrichtgröße bst. $D = \frac{F \cdot r}{\phi}$

- Drillachse ⇒ Apparatkonstanten D und I_D bestimmen ☒
- für Winkelrichtgröße D → Federwaage in einem Haken eingehängt
  ↳ senkrecht zum Radius der von Körper beschr. Kreisb.
  → Winkel ϑ ausgelenkt ☒

→ mind. 10 Ergebnisse:

$r = \cancel{4{,}8cm}$ 14,9cm

$\frac{\phi° \cdot \pi}{180}$ = rad

	ϕ / °	ϕ / rad	F / N	D / Nm
1.	~~10~~		~~0,07~~	
2.	30	$\pi/6$	0,07	~~$3{,}47 \cdot 10^{-4}$~~ 0,0199
3.	50	$5\pi/18$	0,13	~~$3{,}874 \cdot 10^{-4}$~~ 0,02219
4.	70	$\frac{7}{18}\pi$	0,172	~~$3{,}66 \cdot 10^{-4}$~~ 0,02057
5.	90	$\pi/2$	0,26	0,02466
6.	110	$\frac{11}{18}\pi$	0,3	0,02328
7.	130	$\frac{13}{18}\pi$	0,35	0,02297
8.	150	$\frac{5}{6}\pi$	0,42	0,02390
9.	180	π	0,52	0,02466
10.	200	$\frac{10}{9}\pi$	0,6	~~0,2439~~ 0,02561

immer jeweils F, r und ϕ bst. ☒

ϑ mind 10. mal ändern

$m_{Stab} = 0{,}1351$ kg

0

2.1) Eigenträgheitsmoment I_D

→ Metallstange mit 2 Gewichten senkrecht auf die Drehachse gesteckt ☐ → wird zum Schwingen gebracht ☐
→ T messen

a/m a^2 / m^2 T / 1/s T^2 / 1/s

→ Abstände der beiden Massen zur Drehachse bei dem Winkel $\vartheta = 180°$ $m_{10} = 0{,}2612$ kg

→ Zylinderhöhe: $h_{10} = 0{,}028$m   Radius $r_{10} = 0{,}0225$m   0,014

a/m	a²/m²	T / 1/s	T² / 1/s²
1. 0,15	0,0225	4,93	24,1304
2. 0,1	0,01	3,72	13,838
3. 0,2	0,04	5,47	29,920
4. 0,25	0,0625	7,06	49,843
5. 0,3	0,09	7,96	63,361
6. 0,278	0,0772	7,72	59,598
7. 0,228	0,0519	6,5	42,250
8. 0,175	0,0306	5,44	29,593
9. 0,125	0,0156	4,12	16,974
10. 0,05	0,0025	2,72	7,398

a - Abstände
T = Schwingungsdauer
mind. für 10 vers. a's

2) Trägheitsmoment eines Körpers

→ einen Körper auf der Drillachse ☐ → Aus der Ruhelage auslenken ☐ → Periodendauer mit Stoppuhr bst ☐

→ 5. Ergebnisse ☐ mitteln ☐

Bsp. Zylinder

R von Zylinder r_{k1} = 48 mm ☐
H v. " h_{k1} = 400,16 mm ☐
m v. " m_{k1} = 0,3675 kg ☐

The

→ Trägheitsmoment bst. ☐

T_{k1} / 1/s
1. 0,66
2. 0,75
3. 0,85
4. 0,68
5. 0,78

→ Körper wird um 180° ausgelenkt } exp.

2. Körper

Bsp. ~~Stab.~~ Kugel

r_{k2} = 7,02 cm
$d = h_{k2}$ = 14,04 cm
m_{k2} = 1,1725 kg

$I_{Theo,k2}$ = ☐

Umfang = 44,107 cm

T_{k2} / 1/s
1. 1,85
2. 1,59
3. 1,75
4. 1,75
5. 1,88

180° ausgelenkt
Vorgehensweise wie oben.

Holzpuppe mit zwei vers.

1) Theoretische Werte.

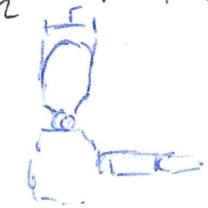
Masse von Puppe m_P = 0,1675 kg ☐

Radien berechnen: in m

	r_{Rumpf}	r_{Arm}	r_{Bein}	r_{Kopf}
1.	0,03912	~~0,03512~~	0,019	0,023
2.	0,026	0,0138	0,016	0,027
3.	0,032	0,012	0,01271	0,02708
4.	0,0386	0,014	0,01706	0,025
5.	0,04	0,013	0,013	0,0211
6.	0,038	0,016	0,009	0,02812
7.	~~0,04~~			

0,014 r_{Arm1}

⇒ Mittelwert jeweil + σ



Länge der Körperteile

L_{Rumpf} = 0,0918 m L = Bein = 0,147
L_{Arm} = 0,112 m L = Kopf = ~~0,1122~~ 0,04112

Literatur

[1] TU Dortmund. *Das Trägheitsmoment*. 2021. URL: https://moodle.tu-dortmund.de/pluginfile.php/1884626/mod_resource/content/1/V101.pdf (besucht am 02. 12. 2021).