

V353

Das Relaxationsverhalten eines RC-Kreises

Umut Aydinli
umut.aydinli@tu-dortmund.de

Muhammed-Sinan Demir
sinan.demir@tu-dortmund.de

Durchführung: 14.01.2022

Abgabe: 21.01.2022

Inhaltsverzeichnis

1 Zielsetzung	3
2 Theorie	3
2.1 Allgemeine Relaxation und die Anwendung in einem RC-Kreis	3
2.2 Entlade und Ladevorgang eines Kondensators im RC-Kreis	3
2.3 Relaxationsverhalten bei angelegter Spannung	4
2.4 Die Phasenverschiebung	5
2.5 Integrationsverhalten des RC-Kreises	6
3 Versuchsaufbau und Versuchdurchführung	6
3.1 Bestimmung der Zeitkonstante beim Entladevorgang	6
3.2 Messung der Amplitude des Kondensators und der Phasenverschiebung . .	7
3.3 Bestätigung des RC-Kreises als Integrator	7
4 Auswertung	7
4.1 Bestimmung der Zeitkonstante	7
4.2 Amplitude der Kondensatorspannung in Abhängigkeit von der Frequenz und die Phasenverschiebung	9
4.3 RC-Kreis als Integrator	13
5 Diskussion	13
6 Anhang	15
Literatur	16

1 Zielsetzung

Bei dem Versuch 353 geht es um das Relaxationsverhalten beim Entladen eines RC-Kreises und die Verwendung des RC-Kreises als Integrator.

2 Theorie

2.1 Allgemeine Relaxation und die Anwendung in einem RC-Kreis

Das Phänomen bei dem ein System aus seinem Ausgangszustand, ohne Oszillation asymptotisch in denselben Zustand zurückkehrt, nennt man Relaxationserscheinung. Die Änderungsgeschwindigkeit der Größe A in einem Zeitpunkt t ist proportional zur Abweichung der Größe A im Endzustand

$$\frac{dA}{dt} = c [A(t) - A(\infty)].$$

Diese Gleichung lässt sich durch Umformen zu

$$A(t) = A(\infty) + [A(0) - A(\infty)] \quad (1)$$

lösen.

2.2 Entlade und Ladevorgang eines Kondensators im RC-Kreis

Die Aufladung und Entladung eines Kondensators über einen Widerstand bilden Beispiele für Relaxationsvorgänge.

Entladevorgang:

Die Spannung des Kondensators U_C wird durch die Ladung Q und die Kapazität C bestimmt

$$U_C = \frac{Q}{C}.$$

Durch den Widerstand R fließt nach dem Ohmschen Gesetz ein Strom, welcher den Ladungsausgleich herbeiführt.

$$I = \frac{U_C}{R}.$$

Die Ladung der Kondensatorplatten lässt durch

$$dQ = -I dt$$

beschreiben und führt mithilfe der restlichen Formeln zu dem zeitlichen Verlauf der Ladung des Kondensators, differentiell ausgedrückt

$$\frac{dQ}{dt} = -\frac{1}{RC} Q(t). \quad (2)$$

Dadurch, dass bei unendlich langer Entladung des Kondensators die Ladung gleich null ist und der Integration aus Formel (1) wird die Lösung der DGL erhalten

$$Q(t) = Q(0) \cdot e^{-\frac{t}{RC}}. \quad (3)$$

Aufladevorgang:

Die Gleichung für die Aufladung eines Kondensators über einen Widerstand lässt sich durch die Randbedingungen

$$Q(0) = 0$$

und

$$Q(\infty) = CU_0$$

herleiten. Dadurch setzt sich die DGL für den Aufladevorgang durch

$$Q(t) = CU_0(1 - e^{-\frac{t}{RC}})$$

zusammen. Der Ausdruck RC steht hierbei für die Zeitkonstante des Relaxationsvorganges und ist ein Maß für die Geschwindigkeit des Aufladevorganges.

2.3 Relaxationsverhalten bei angelegter Spannung

Die Gleichung

$$U(t) = U_0 \cdot \cos(\omega t)$$

beschreibt allgemein die Wechselspannung. Die daraus entstehende Phasenverschiebung zwischen der eingehenden Spannung des Sinusgenerators und der ausgehenden Spannung des verzögerten Kondensators führt zu der Gleichung für die ausgehende Wechselspannung

$$U_C(t) = A(\omega) \cos(\omega t + \varphi(\omega)),$$

wobei A die Kondensatorspannungsamplitude angibt.

Mit Hilfe der Kirchhoffschen Gesetze, bezogen auf diese RC Schaltung,

$$U(t) = U_R(t) + U_C(t),$$

dem zeitabhängigen Stromfluss

$$I(t) = \frac{dQ}{dt} = C \frac{dU_C}{dt},$$

der frequenzabhängigen Phase

$$\phi(\omega) = \arctan(-\omega RC),$$

sowie der Formel (2) erhält man die Gleichung

$$A(\omega) = \frac{U_0}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}}. \quad (4)$$

Dies folgt dadurch, dass durch die Proportionalität der Phasenverschiebung zur Frequenz, bei niedrigen Frequenz die Phasenverschiebung gegen null geht.

2.4 Die Phasenverschiebung

Die Phasenverschiebung lässt sich durch

$$\varphi = \frac{a}{b} \cdot 2\pi \quad (5)$$

berechnen, wobei a der Abstand beider Nullstellen zueinander und b die Wellenlänge in Bogenmaß beschreibt.

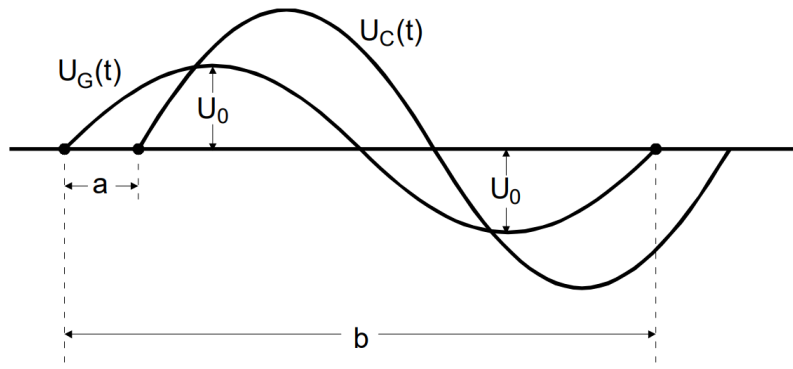


Abbildung 1: Die Abbildung einer Phasenverschiebung [1].

2.5 Integrationsverhalten des RC-Kreises

Damit ein RC-Kreis als Integrator dienen kann, muss die Voraussetzung, dass $\omega \gg \frac{1}{RC}$ ist, erfüllt sein. Durch die Formel

$$U(t) = U_R(t) + U_C(t),$$

welche umgeschrieben wird zu

$$U(t) = R \cdot I(t) + U_C(t)$$

und einsetzen des zeitabhängigen Stromflusses, erhält man

$$U(t) = RC \cdot \frac{dU_C}{dt} + U_C(t).$$

Durch die Voraussetzung $\omega \gg \frac{1}{RC}$, ist $|U_C|$ sehr viel kleiner als $|U_R|$ und $|U|$, wodurch näherungsweise geschrieben werden kann

$$U_C(t) = \frac{1}{RC} \int_0^t U(t') dt' . \quad (6)$$

3 Versuchsaufbau und Versuchsdurchführung

3.1 Bestimmung der Zeitkonstante beim Entladevorgang

Die Schaltung wird wie in Abbildung 1 aufgebaut. Durch einen Frequenzgenerator wird eine Rechtecksignal der Stärke $f = 200 \text{ Hz}$ generiert und läuft über ein Kabel durch den RC-Kreis und danach durch ein Kabel in das Oszilloskop. Auf dem Oszilloskop kann die Entladekurve dann betrachtet werden. Dies wird mit einem Foto festgehalten.

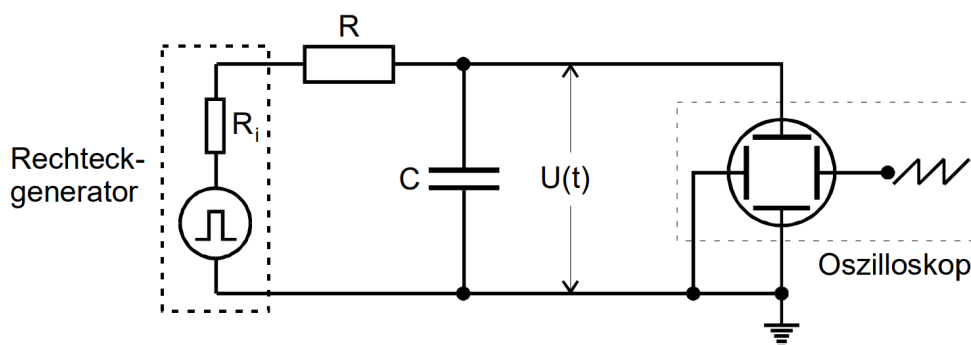


Abbildung 2: Der Aufbau zur Bestimmung der Zeitkonstante [1].

3.2 Messung der Amplitude des Kondensators und der Phasenverschiebung

Der Schaltung von dem Durchgang davor wird ein Kabel ergänzt. Dieses Kabel führt von dem Frequenzgenerator direkt zum Oszilloskop. Es werden Frequenzen von $20 \text{ Hz} \leq f \leq 20000 \text{ Hz}$ eingestellt und die Amplitude von der Eingangsspannung U_{ein} , die Amplitude der Ausgangsspannung U_{aus} , sowie die Phasenverschiebung φ zwischen beiden Phasen.

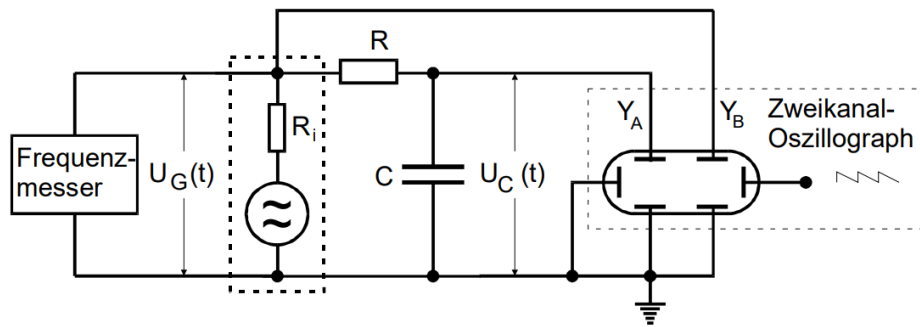


Abbildung 3: Der Aufbau zur Messung der Amplitude und der Phasenverschiebung [1].

3.3 Bestätigung des RC-Kreises als Integrator

Der Aufbau des vorherigen Arbeitsauftrages wird beibehalten und der Verlauf der eingehenden sowie ausgehenden Spannungsverlauf mit einem Foto festgehalten. Durchgeführt wird dies einmal als Sinussignal, einmal als Dreieckssignal und einmal als Rechteckssignal. Die Frequenz wird auf 20 kHz.

4 Auswertung

4.1 Bestimmung der Zeitkonstante

Im Folgenden wird die Zeitkonstante des Entladevorgangs des Tiefpasses bestimmt. Dazu wurde die Spannung $U_C(t)$ bei angelegter Rechtecksspannung $U_S(t)$ bei einer Frequenz von 200 Hz beobachtet. Folgendes Foto wurde aufgenommen:

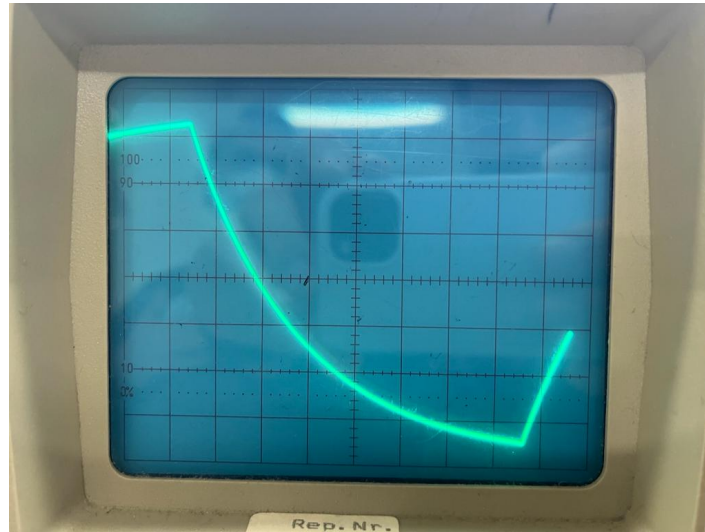


Abbildung 4: Entladevorgang des RC-Gliedes bei angelegter Rechtecksspannung.

Aus der Aufnahme wurden zehn Wertepaare entnommen und tabellarisch aufgelistet.

Tabelle 1: $U_C(t)$ zu bestimmten t .

$U_C(t) / \text{V}$	$\ln\left(\frac{U_C}{1\text{V}}\right)$	t / ms
0,56	-0,579	0,5
0,44	-0,820	1
0,28	-1,272	2
0,175	-1,742	3
0,14	-1,966	3,5
0,1	-2,302	4
0,06	-2,813	5
0,04	-3,210	5,5
0,03	-3,500	6
0,019	-3,963	6,5

Für die Zeitkonstante RC lässt sich eine Ausgleichsrechnung mit der Formel (6) bestimmen.

$$\ln\left(\frac{U_C}{1\text{V}}\right) = m \cdot x + b \quad (7)$$

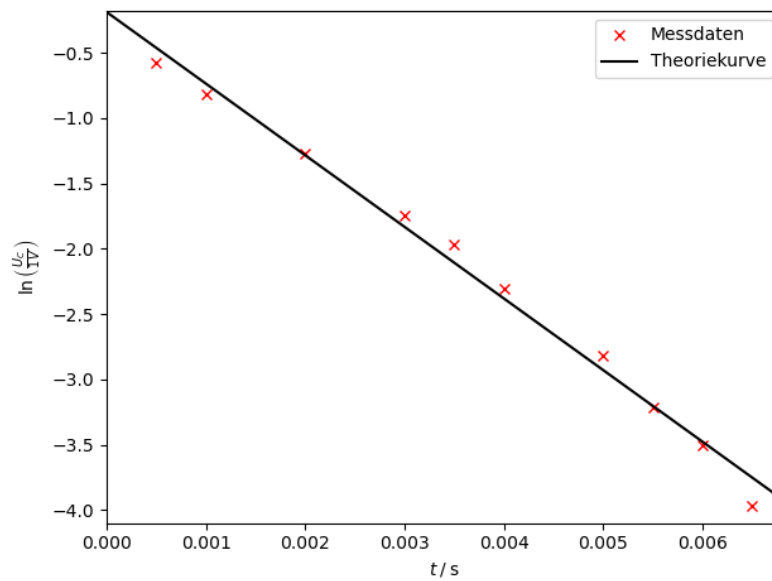


Abbildung 5: Bestimmung der Zeitkonstante durch lineare Regression.

Die Ausgleichsgerade liefert die Parameter

$$m = (1807,01 \pm 30,50) \text{ s}^{-1}$$

$$b = (-0,305 \pm 0,155).$$

Somit lautet die Zeitkonstante

$$RC_1 = -\frac{1}{m} = (-5,53 \pm 0,301) \cdot 10^{-4} \text{ s}$$

4.2 Amplitude der Kondensatorspannung in Abhängigkeit von der Frequenz und die Phasenverschiebung

In diesem Teil wird die Kondensatorspannung U_C und die Speisespannung U_0 in Abhängigkeit von der Frequenz gemessen. Dabei wurden die Amplituden im Bereich von 20 Hz bis 20 kHz ermittelt. Zudem sind die jeweiligen Abstände a und die Wellenlänge in Bogenmaß b zu finden. Daraus resultiert die Phasenverschiebung φ .

Tabelle 2: Die Kondensatorsspannungsamplitude sowie die Messwerte a und b in Abhängigkeit der Frequenz.

f / Hz	U_C / V	U_0 / V	$\frac{U_C}{U_0}$	a / s	b / s	φ / rad
20	0,90	0,6	1,50	0,0010	0,05	0,12566
80	0,85	0,6	1,416	0,00050	0,0125	0,25132
140	0,75	0,6	1,25	0,00050	0,00714	0,43999
200	0,67	0,6	1,116	0,00060	0,005	0,75398
600	0,35	0,6	0,583	0,00030	0,0016	1,17809
1000	0,20	0,6	0,30	0,00022	0,001	1,38230
2000	0,12	0,6	0,20	0,00010	0,0005	1,25663
9000	0,02	0,6	0,03	0,000026	0,0001	1,63362
15000	0,013	0,6	0,0216	0,000016	0,00006	1,67550
20000	0,10	0,6	0,016	0,000012	0,00005	1,50796

Die Ausgleichsfunktion hat die Form

$$\frac{U_C}{U_0} = \frac{1}{\sqrt{1 + a^2 \cdot f^2}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{U_C}{U_0} = \frac{b}{\sqrt{1 + a^2 \cdot f^2}}$$

Die Funktion wurde mit einem weiteren Regressionsparameter b ergänzt, da einige Werte von $\frac{U_C}{U_0} > 1$ sind.

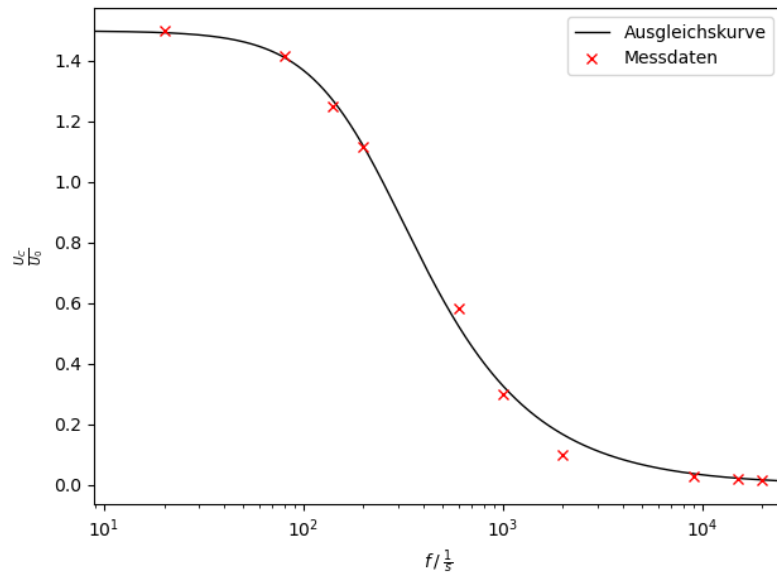


Abbildung 6: Die Abbildung des Frequenzabhängigen Amplitudenverhältnis.

Durch die Ausgleichsrechnung ergibt sich

$$RC_2 = (4,466 \pm 0,244) \cdot 10^{-3} \text{ s.}$$

Die Phasenverschiebung einer externen Sinusspannung und Kondensatorspannung wird in Abhängigkeit von der Frequenz untersucht. Zur Bestimmung der Phasenverschiebung wird die Gleichung (5) verwendet. Die Messwerte dazu befinden sich in Tabelle 2. Dabei wird φ gegen die Frequenz geplottet, wodurch sich dann RC bestimmen lässt. Zudem wird ein Polarplot erstellt.

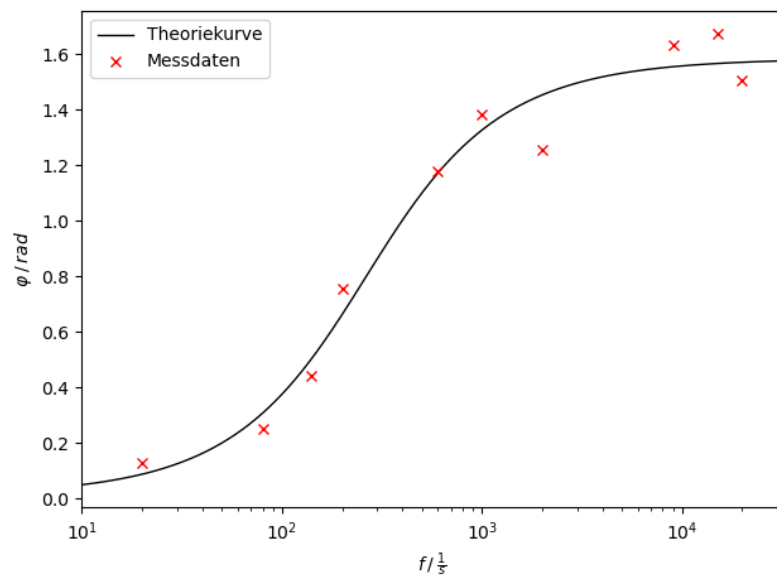
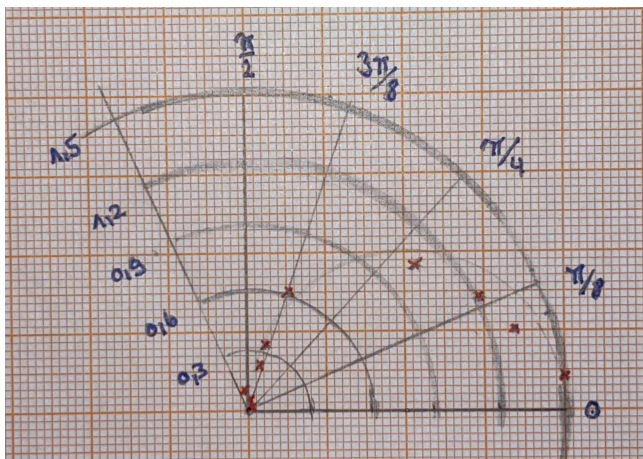


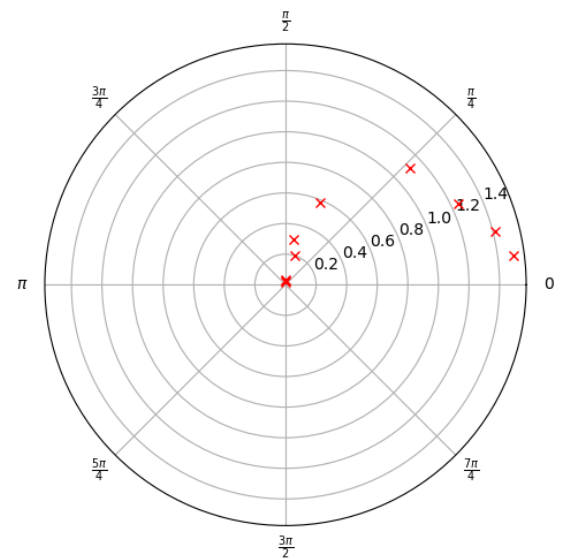
Abbildung 7: Die Abbildung der Phasenverschiebung.

Daraus folgt

$$RC_3 = (-1,002 \pm 0,0719) \cdot 10^{-3} \text{ s.}$$



(a)

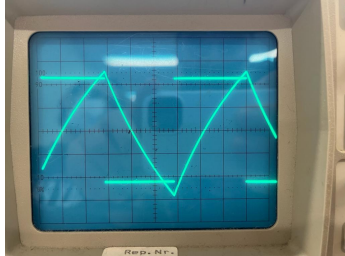


(b)

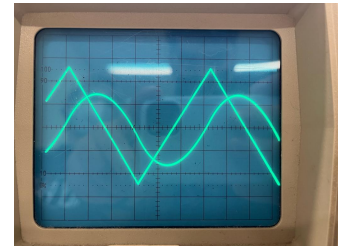
Abbildung 8: Darstellung der Phasenverschiebung einem Polarplot

4.3 RC-Kreis als Integrator

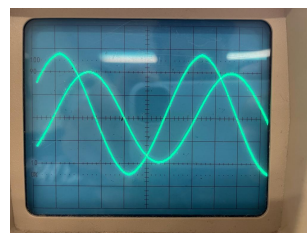
Im Folgenden wird zur Untersuchung der Integrator-Identität des RC-Kreises drei verschiedene Wechselspannungen angelegt.



(a) Die Abbildung der Rechtecksschwingung



(b) Die Abbildung der Dreiecksschwingung



(c) Die Abbildung der Sinusschwingung

Abbildung 9: Die drei verschiedenen Wechselspannungen

5 Diskussion

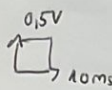

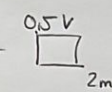

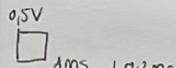
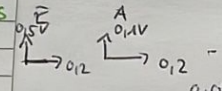
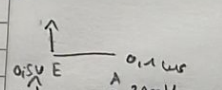
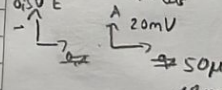
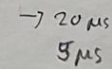
Anhand der drei Versuchsteile konnten drei verschiedene Werte für die Zeitkonstante ermittelt werden. Beim Vergleich der verschiedenen Zeitkonstanten folgt für die relativen Abweichungen:

	RC_1	RC_2	RC_3
RC_1	-	88%	45%
RC_2	707%	-	345%
RC_3	81%	78%	-

Auffällig hierbei ist, dass die Zeitkonstanten stark voneinander abweichen, die zum einen auf die Ablesefehler der einzelnen Werte zurückzuführen sein können. Das Oszilloskop hat ebenso einen Effekt auf die Messwerte, denn bei 20 kHz schwankte der Graph, wodurch das Ablesen schwer fiel.

Bei genauer Betrachtung weichen einige Messwerte von der Theorie ab, wie bei der linearen Regression oder der Phasenverschiebung, die teilweise durch den Ablesefehler erklärt werden können. Wie zu erwarten, sieht die Kondensatorspannung mit zunehmender Frequenz trotzdem ab und die Phasenverschiebung bleibt im Bereich null bis $\frac{\pi}{2}$. Im Vergleich ist es zu erkennen, dass RC_2 die kleinste Abweichung zu den anderen besitzt und somit der Wert am ehesten angenommen werden kann. Bezüglich des Integratorverhaltens, lässt sich sagen, dass der Erwartungswert mit dem Realwert des Oszilloskops übereinstimmt und somit die Integrierbarkeit des RC -Kreises bewiesen wurde.

6 Anhang

V353		200,1 kHz			
Frequenz / γ in Hz		Amplitude A <small>große</small>	Amplitude E <small>kleine</small>	Zeitl. Abst.	
1.	20	0,6 V 0,9	0,9 V 0,6 V	1 ms 1 ms	
	50	0,65 V	0,9 V 0,6 V	0,5 ms	
	100	0,65 V 0,85 V	0,85 V 0,6 V	1 ms 0,5 ms	
	110	0,65 V	0,7 V	1 ms	
	140	0,7 V 0,75 V	0,75 V 0,6 V	0,6 ms 0,5 ms	
	170	0,7 V	0,73 V	0,6 ms	
7.	200	0,65 V 0,67 V	0,68 V 0,6 V	0,6 ms 0,6 ms	
	400	0,45 V	0,7 V	1,5 ms 0,3 ms	
	600	0,35 V 0,35 V	0,7 V 0,6 V	0,3 ms 0,3 ms	
	800	0,3 V	0,7 V	1 ms	
	1000	0,25 V 0,2 V	0,7 V 0,6 V	1 ms 0,22 ms	
	1500	0,13 V	0,7 V	0,16 ms	
	2000	0,1 V 0,12 V	0,65 V 0,6 V	0,1 ms 0,1 ms	
	5000	0,05 V	0,7 V	0,03 ms	
	9000	22 mV = 0,022 V 20 mV	0,7 V 0,56 V	30 μ s 26 μ s	
	11000	0,016 V	0,65 V	20 μ s	
	15000	0,014 V 13 mV	0,7 V 0,56 V	16 μ s 16 μ s	
	18000	0,01 V	0,65 V 0,56 V	15 μ s	
	21000	0,012 V 10 mV	0,7 V 0,56 V	15 μ s 12 μ s	

Literatur

- [1] TU Dortmund. *Das Relaxationsverhalten eines RC-Kreises*. 2021. URL: https://moodle.tu-dortmund.de/pluginfile.php/1716956/mod_resource/content/1/V353.pdf (besucht am 14.01.2022).