# 1 题目重述

取苹果游戏描述如下：初始有三堆苹果，个数分别为$M$、$N$、$N$。甲先手，甲乙依次按规则拿苹果：（1）从某一堆苹果中拿走不超过$S$个苹果；或（2）若三堆苹果均非空，从三堆中分别拿相同个数的苹果。拿走最后苹果的一方获胜。问：（1）当$M=1$，$N=5$，$S=3$时是否对某一方存在必胜策略，若存在求出必胜策略；（2）当$M$，$N$，$S$为任意正整数时是否对某一方存在必胜策略，若存在求出必胜策略。

# 2 符号说明

| 符号 | 含义 |
| --- | --- |
| $(A,B,C)$ | 当前三堆苹果个数分别为A,B,C,且 A,B,C 均为自然数 |
| $(A,B,C)\rightarrow(A',B',C')$ | 表示取一次苹果的策略 |
| $Next(A,B,C)$ | 面对$(A,B,C)$所有合法取苹果策略结果$(A',B',C')$的集合 |
| $f(A,B,C)$ | 关于$A,B,C$的函数 |
| $x_j^i$ | 第 $i$ 步从第 $j$ 堆取走$x_j^i$个苹果，其中$x_j^i\le S$，$1\le j\le 3$，$x_1^i=x_2^i=x_3^i\ne 0$或$x_1^i$，$x_2^i$，$x_3^i$仅有一个不为 0 |
| $M$ | 正整数，表示初始第一堆苹果的个数 |
| $N$ | 正整数，表示初始第二堆和第三堆苹果的个数 |
| $S$ | 正整数，从一堆苹果中最多可拿的个数 |
| $k,k',l,n,t,u$ | 自然数 |

# 3 模型假设

甲乙两人都极端聪明，均会采取最优策略。

# 4 模型建立

在建立模型之前，我们需要先证明两个定理。

## 4.1 *证明：若取苹果游戏能在有限步完成，一定有必胜策略*

假设取苹果游戏初始状态为$(A,B,B)$，经过$n$步完成，状态序列为

$$(A,B,B),(A^1,B^1,C^1),(A^2,B^2,C^2),(A^3,B^3,C^3),\dots,(A^{n-1},B^{n-1},C^{n-1}),(0,0,0)$$

（1）当$n = 1$时，甲显然有必胜策略$(A, B, B) \to (0,0,0)$。

（2）假设当$n \le k$，均有某一方存在必胜策略。那么，显然有$\mathrm{n} \bmod 2 = 0$时乙存在必胜策略；$\mathrm{n} \bmod 2 = 1$时甲存在必胜策略。

当$\mathrm{n} = \mathrm{k} + 1$时，甲先手取一次苹果，那么游戏还剩下的步数$\le k$。而根据假设，若游戏$\mathrm{k}$步内完成，必然有一方存在必胜策略。而甲极端聪明，先手取一次苹果时采取了最优策略，即能通过取苹果操作转移到的所有$k$步内完成的游戏中存在甲必胜，那么则会转移到该游戏，则甲存在必胜策略；否则，甲第一步无论怎么取苹果，都使得乙存在必胜策略，那么乙存在必胜策略。故$n = k + 1$时某一方必有必胜策略。

综上，若游戏能在有限步完成，一定有必胜策略。

### *4.2 证明：取苹果游戏一定在有限步内完成。*

假设取苹果的游戏的初始状态为$(M, N, N)$，苹果总数$M + N + N$为有限个，而每一次操作

$(A, B, C) \to (A', B', C')$使得苹果总数减少，即$A + B + C \ge A' + B' + C'$。易知苹果总数在有限个操作后必然减为 0，即游戏结束。因此，取苹果游戏一定在有限步内完成。

又因为 4.1 和 4.2 成立，所以取苹果游戏对于某一方存在必胜策略。那么，我们希望求出是哪一方存在必胜策略，且具体策略是什么。例如对于问题（1），甲存在必胜策略：

| 步数 | 甲/乙 | 策略 |
|---|---|---|
| 1 | 甲 | $(1,5,5) \to (0,4,4)$ |
| 2 | 乙 | $(0,4,4) \to (0,4 - x_2^2, 4 - x_3^2)$ |
| 3 | 甲 | $(0,4 - x_2^2, 4 - x_3^2) \to (0,4 - x_2^2 - x_3^2, 4 - x_3^2 - x_2^2)$ |
| 4 | 乙 | $(0,4 - x_2^2 - x_3^2, 4 - x_3^2 - x_2^2) \to (0,4 - x_2^2 - x_3^2 - x_2^4, 4 - x_3^2 - x_2^2 - x_3^4)$ |
| 5 | 甲 | $(0,4 - x_2^2 - x_3^2 - x_2^4, 4 - x_3^2 - x_2^2 - x_3^4) \to (0,4 - x_2^2 - x_3^2 - x_2^4 - x_3^4, 4 - x_3^2 - x_2^2 - x_3^4 - x_2^4)$ |
| … | … | … |
| $\boldsymbol{n}$ | 甲 | $(0, x_2^n, x_3^n) \to (0,0,0)$ |

即一开始甲每堆拿一个苹果，只剩下两堆苹果；之后不论乙拿哪堆苹果几个，甲都拿另一堆苹果几个，使得两堆苹果数量相同。这样，甲总能拿到最后一个苹果。

下面我们利用动态规划，考虑当$M$，$N$，$S$为任意正整数时的情况。构造函数

$$f(A, B, C) = \begin{cases} 1, & \textit{甲存在必胜策略，乙不存在必胜策略} \\ 0, & \textit{甲不存在必胜策略，乙存在必胜策略} \end{cases}$$

表示轮到甲取苹果时，面对状态$(A, B, C)$是否存在必胜策略。显然有初始条件$f(0,0,0) = 0$，即甲因一个苹果都不能取而输了。

考虑当前状态为(0,4,4)，若轮到乙取苹果，则甲可采取上述必胜策略；反之，若轮到甲取苹果，则乙有类似的必胜策略，而甲没有必胜策略。对于任意状态$(A', B', C')$，若$f(A', B', C') = 0$，且存在$(A, B, C) \to (A', B', C')$，那么甲面对$(A, B, C)$时必胜策略为$(A, B, C) \to (A', B', C')$，且有$f(A, B, C) = 1$。容易得出$f(A, B, C)$的状态转移方程为

$$f(A,B,C)=\begin{cases}1, & \exists(A',B',C')\in Next(A,B,C), f(A',B',C')=0\\0, & otherwise\end{cases}$$

# 5 模型求解

得到状态转移方程后，可以编程求解。得到函数$f$部分值如下：

S=3

| N / M | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | | | | | | |
| 2 | | | | | | | | | |
| 3 | | | | | | | | | |
| 4 | | | | | | | | | |
| 5 | | | | | | | | | |
| 6 | | | | | | | | | |
| 7 | | | | | | | | | |
| 8 | | | | | | | | | |
| 9 | | | | | | | | | |

S=4

| N / M | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | | | | | | |
| 2 | | | | | | | | | |
| 3 | | | | | | | | | |
| 4 | | | | | | | | | |
| 5 | | | | | | | | | |
| 6 | | | | | | | | | |
| 7 | | | | | | | | | |
| 8 | | | | | | | | | |
| 9 | | | | | | | | | |

其中红色代表 1，即甲存在必胜策略；蓝色代表 0，即乙存在必胜策略。

# 6 模型分析和改进

## *6.1 分析*

给定 $S$，我们可以得到函数$f$的值；再给定 $M$，$N$，*我们就能根据*$f(M,N,N)$的值判断哪一方存在必胜策略，且具体策略是什么：

（1） $f(M,N,N)=1$
甲存在必胜策略。每次甲取苹果，均选择策略$(A,B,C)\rightarrow(A',B',C')$使得 $f(A',B',C')=0$。

（2） $f(M,N,N)=0$
乙存在必胜策略。每次乙取苹果，均选择策略$(A,B,C)\rightarrow(A',B',C')$使得 $f(A',B',C')=1$。

此外，注意到 $f(0,N,N)=0$，容易证明：此时不论甲拿哪一堆的苹果，乙均有必胜策略即拿另一堆相同个数苹果。以此类推，乙必将拿走最后一个苹果。

我们还注意到$f(M,0,0)=\begin{cases}0, & M=(s+1)*k\\1, & otherwise\end{cases}$。现证明如下：当$M<s+1$时，甲均可一次性拿完苹果获胜，因此$f(M,0,0)=1$；而当$M=s+1$时，不存在$f\left(s+1-x_1^i,0,0\right)=0$，即甲无法一次性拿完全部苹果，而不论甲拿几个苹果，乙都能拿完剩下的苹果，甲不存在必胜策略，

而乙存在。容易推广，$M=(s+1)*k$时，$\forall(M',0,0)\in Next(M,0,0), f(M',0,0)=1$,因此$f(M,0,0)=0$。$M\neq(s+1)*k$时，均能找到最大的$k$使得$M-(s+1)*k\leq s$，

且 $f\big((s+1)*k,0,0\big)=0$，故$f(M,0,0)=1$。

### *6.2 改进*

计算函数$f$需要多项式的时间，我们希望对于任意 $M$，$N$，$S$，均能直接求出谁存在必胜策略；甚至对于一些特殊情况，能直接给出必胜策略。我们讨论以下三种情况：

（1） $M<N$
初始时，甲可采取策略$(M,N,N)\rightarrow(0,N-M,N-M)$，又因为$f(0,N-M,N-M)=0$，所以$f(M,N,N)=1$，即甲存在必胜策略。而此后不论乙取哪一堆苹果，甲都取另一堆相同个数的苹果。

（2） $M=N$
初始时，甲采取必胜策略$(M,M,M)\rightarrow(0,0,0)$。因此$f(M,M,M)=1$

（3） $M>N$

① $M=k*(s+1)$

a. $N<s+1$

我们要证明此时$f(k*(s+1),N,N)=0$。首先，假设存在最小的$i$使得$f(k*(s+1),i,i)=1$，且$i<s+1$。甲采取策略

$$(k*(s+1),i,i)\rightarrow(k*(s+1)-x_1^1,i-x_2^1,i-x_3^1)$$

若甲从第二堆或第三堆取苹果，那么乙可采取策略

$$(k*(s+1),i,i)\rightarrow(k*(s+1)-x_1^1,i-x_2^1-x_3^1,i-x_3^1-x_2^1)$$

使得后两堆苹果数量相等。此时，根据假设，甲不存在必胜策略。

若甲只从第一堆取苹果，乙可采取策略

$$(k*(s+1)-x_1^1,i-x_2^1,i-x_3^1)\rightarrow\big((k-1)*(s+1),i-x_2^1,i-x_3^1\big)$$

使得第一堆苹果仍是$s+1$的倍数，且第一堆苹果为 0 时甲不存在必胜策略。

若甲每堆都取了苹果，乙仍可采取策略

$$(k*(s+1)-x_1^1,i-x_2^1,i-x_3^1)\rightarrow\big((k-1)*(s+1),i-x_2^1,i-x_3^1\big)$$

此时依据假设，甲不存在必胜策略。

三种情况均与假设矛盾，因此假设不成立。因此$f(k*(s+1),N,N)=0$，乙存在必胜策略。

*b.* $N\geq s+1$

甲采取策略

$$(k*(s+1),N,N)\rightarrow(k'*(s+1),N\ mod\ (s+1),N\ mod\ (s+1)),$$

其中$x_1^1=x_2^1=x_3^1=N-N\ mod\ (s+1)$

且$f(k'*(s+1),N\ mod\ (s+1),N\ mod\ (s+1))=0$。因此$f(k*(s+1),N,N)=1$，甲存在必胜策略。

② $M\neq k*(s+1)$

令$M=k*(s+1)+t$，$N=l*(s+1)+u$。显然能够找到某个$f(k'*(s+1),i,i)=0$，使得$(k-k')*(s+1)+\mathrm{t}=l*(s+1)-i$。这样，甲就能采取必胜策略$(k*(s+1),N,N)\rightarrow(k'*(s+1),i,i)$。故$f(M,N,N)=1$。

$M>N$时确实能直接求出必胜策略，但相对复杂，根据“大道至简”的原则，在此不赘述。

## 7 总结

当$M=1$，$N=5$，$S=3$时对甲方存在必胜策略：先每堆取一个苹果，之后采取策略使得后两堆苹果相同。

定义函数

$$f(A,B,C)=\begin{cases}1，\textit{甲存在必胜策略，乙不存在必胜策略}\\0，\textit{甲不存在必胜策略，乙存在必胜策略}\end{cases}$$

初始状态$f(0{,}0{,}0)=0$。定义其状态转移方程

$$f(A,B,C)=\begin{cases}1，\exists(A',B',C')\in Next(A,B,C),f(A',B',C')=0\\0，otherwise\end{cases}$$

当$M$，$N$，$S$为任意正整数时，

（1）$M=k*(s+1)$，$N<s+1$，则乙存在最优策略：面对任意状态$(A,B,C)$，采取策略 $(A,B,C)\rightarrow(A',B',C')$使得$f(A',B',C')=1$。

（2）反之，甲存在最优策略：面对任意状态$(A,B,C)$，采取策略 $(A,B,C)\rightarrow(A',B',C')$使得$f(A',B',C')=1$。特别的，当$M=N$时，甲第一步取走所有苹果；$M<N$时，甲第一步每堆取走$N-M$个苹果，之后维持第二堆苹果和第三堆苹果个数相同。

## 参考文献

[1] Ulrich Schwalbe, Paul Walker, *Zermelo and the Early History of Game Theory, Games and Economic Behavior*, Volume 34, 2001, 123-137

[2] MIT. 2009. *Theory of Impartial Games*. http://web.mit.edu/sp.268/www/nim.pdf. 2019/1/4