Probabilités conditionnelles et indépendance

1re Spécialité mathématiques
Probabilités et Statistiques - Démonstrations

I. Notion de probabilité conditionnelle

1. Définition

Démonstration :
On a $(A \cap B) \subset A$.
Donc $p(A \cap B) \leq p(A)$.
Donc $\frac{p(A\cap B)}{p(A)} \leq 1 \Leftrightarrow p_B(A) \leq 1$
De plus, $p_B(A) \geq 1$ comme quotient de deux positifs.

$$\text{Calculons } p_A(B) + p_A(\bar{B}) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)} + \frac{p(A \cap \bar{B})}{p(A)}$$
$$= \frac{p(A \cap B) + p(A \cap \bar{B})}{p(A)}$$

Or $(A \cap B) \cup (A \cap \bar{B}) = A$.
Donc $p(A \cap B) + p(A \cap \bar{B}) = p(A)$.
Donc $p_A(B) + p_A(\bar{B}) = \frac{p(A)}{p(A)} = 1$

III. Indépendance de deux évènements

Démonstration :

$$A \text{ et } B \text{ sont indépendants} \Leftrightarrow p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$$
$$\Leftrightarrow p_A(B) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)} = \frac{p(A) \times p(B)}{p(A)} = p(B)$$
$$\Leftrightarrow p_A(B) = p(B)$$

Démonstration :

$$\text{Calculons } p(A \cap \bar{B}) = p(A) - p(A \cap B)$$
$$p(A) - p(A) \times p(B) \text{ car } A \text{ et } B \text{ sont indépendants}$$
$$p(A)(1 - p(B))$$
$$p(A)p(\bar{B})$$

Ainsi, les évènements A et $\bar{B}$ sont indépendants.