Trigonométrie

1^{re} Spécialité mathématiques
Analyse - Démonstrations

I. Lecture sur le cercle trigonométrique

1. Le cercle trigonométrique

2. Longueur d'un arc et radian

II. Enroulement de la droite des réels sur le cercle trigonométrique

III. Cosinus et sinus d'un nombre réel

1. Définitions

2. Valeurs remarquables du cosinus et du sinus

Démonstration *(valeurs remarquables)* :

- Pour $\frac{\pi}{3}$:
  -> Ajouter schéma
  Le triangle IOM est isocèle (car $IO = OM$) avec un angle de $60°$. Il est donc équilatéral.
  Donc la hauteur (HM) est aussi la médiatrice du segment $[OI]$.
  Donc $OH = \frac{1}{2}$, soit $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$.

  De plus, $\cos^2(\frac{\pi}{3}) + \sin^2(\frac{\pi}{3}) = 1$

  $$\Leftrightarrow \sin^2(\frac{\pi}{3}) = 1 - \frac{1}{4}$$

  $$\Leftrightarrow \sin(\frac{\pi}{3}) = \sqrt{\frac{3}{4}}$$

  Comme $\sin(\frac{\pi}{3}) > 0$, on a $\sin(\frac{\pi}{3}) = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

- Pour $\frac{\pi}{6}$:
  -> Ajouter schéma

  Par des calculs analogues dans le triangle OMJ, on obtient $OH = \cos(\frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$
  et $OH' = \sin(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}$.

- Pour $\frac{\pi}{4}$:
  -> Ajouter schéma
  Le triangle OMH est rectangle avec un angle de $45°$ donc il est rectangle isocèle.
  Donc $OH = HM$
  D'après le théorème de Pythagore :

  $$OH^2 + HM^2 = OM^2$$

  $$\Leftrightarrow 2OH^2 = OM^2$$

  $$\Leftrightarrow OH^2 = \frac{1}{2}$$

  $$\Leftrightarrow OH = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Donc $OH = \cos(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

et $HM = \sin(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

3. Lien avec le cosinus et sinus dans un triangle rectangle

IV. Fonctions cosinus et sinus