Fonctions dérivées et applications

1re Spécialité mathématiques
Analyse - Démonstrations

I. Fonctions dérivées

2. Dérivées des fonctions usuelles

Démonstration de la propriété de la fonction carrée :

Soit $f : x \mapsto x^2$.
Soit $x \in \mathbb{R}$
Calculons $f'(x)$

On calcule le taux d'accroissement de f en x :

$$\begin{aligned}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} \\ &= \frac{x^2+2xh+h^2-x^2}{h} \\ &= \frac{2xh+h^2}{h} = \frac{h(2x+h)}{h} \\ &= 2x+h\end{aligned}$$

Lorsque h tend vers 0, $2x+h$ tend vers $2x$. Donc $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = 2x$.
La fonction carrée est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa fonction dérivée est $f'(x) = 2x$.

Démonstration de la propriété de la fonction inverse :

Soit $f : x \mapsto \frac{1}{x}$.
Soit $x \in]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$.
Calculons $f'(x)$.

On calcule le taux d'accroissement de f en x :

$$\begin{aligned}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} \\ &= \frac{\frac{1}{(x+h)x} - \frac{1}{(x+h)x}}{h} \\ &= \frac{\frac{x+h}{(x+h)x} - \frac{x}{(x+h)x}}{h} \\ &= \frac{\frac{x-x-h}{(x+h)x}}{h} \\ &= \frac{-h}{(x+h)x} \times \frac{1}{h} \\ &= \frac{-1}{(x+h)x}\end{aligned}$$

Lorsque h tend vers 0, $x+h$ tend vers x,

$$(x+h)x \text{ tend vers } x^2,$$

$$\text{et } \frac{-1}{(x+h)x} \text{ tend vers } \frac{-1}{x^2}.$$

Donc $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = \dfrac{-1}{x^2}$.

La fonction inverse est dérivable sur $]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$ et sa fonction dérivée est $f'(x) = \frac{-1}{x^2}$.

II. Opérations sur les fonctions dérivables

Démonstration de la formule de la dérivée d'un produit :

Soit $f(x) = uv$. Soit $x \in I$

$$\begin{aligned}
\text{Calculons } f'(x) &= \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\
&= \frac{u(x+h) \times v(x+h) - u(x) \times v(x)}{h} \\
&= \frac{u(x+h) \times v(x+h) - u(x) \times v(x+h) + u(x) \times v(x+h) - u(x) \times v(x)}{h} \\
&= v(x+h) \times \frac{u(x+h)-u(x)}{h} + u(x+h) \times \frac{v(x+h)-v(x)}{h}
\end{aligned}$$

On doit calculer $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$

Or $\lim\limits_{h \to 0} v(x+h) = v(x)$

Or $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{u(x+h)-u(x)}{h} = u'(x)$

Or $\lim\limits_{h \to 0} v(x) = u(x)$

Et $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{v(x+h)-v(x)}{h} = v'(x)$

Donc $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = u'(x) \times v(x) + u(x) \times v'(x)$

$$f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$$

III. Application de la dérivation

2. Étude des extrema d'une fonction

Démonstration de la condition suffisante sur l'existence d'un extremum local

x	$-\infty$		a		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de $f(x)$		↘	$f(a)$	↗	

$f(a)$ est un minimum local

x	$-\infty$		a		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	
Variations de $f(x)$		↗	$f(a)$	↘	

$f(a)$ est un maximum local