Fonctions dérivées et applications

Analyse - Cours

I Fonctions dérivées

Définition :
Soit f une fonction définie sur un intervalle I. Si, pour tout réel a de I, le nombre dérivé $f'(a)$ existe, on dit que la fonction f est dérivable sur I. On appelle fonction dérivée de f sur I la fonction qui, a tout réel $x \in I$ associe le réel $f'(x)$. On la note f'.

I. 1 Dérivées des fonctions usuelles

Nom	**Fonction**	**Dérivée**
Fonction constante	$\forall x \in \mathbb{R} : \quad f(x) = k \quad (k \in \mathbb{R})$	$\forall x \in \mathbb{R} : \quad f'(x) = 0$
Fonction affine	$\forall x \in \mathbb{R} : \quad f(x) = ax + b \quad (a \text{ et } b \text{ réels})$	$\forall x \in \mathbb{R} : \quad f'(x) = a$
Fonction puissance	$\forall x \in \mathbb{R} : \quad f(x) = x^n \quad (n \in \mathbb{N}^*)$	$\forall x \in \mathbb{R} : \quad f'(x) = nx^{n-1}$
Fonction inverse	$\forall x \in \mathbb{R}^* : \quad f(x) = \dfrac{1}{x}$	$\forall x \in \mathbb{R}^* : \quad f'(x) = \dfrac{-1}{x^2}$
Fonction puissance inverse	$\forall x \in \mathbb{R}^* : \quad f(x) = \dfrac{1}{x^n} \quad (n \in \mathbb{N}^*)$	$\forall x \in \mathbb{R}^* : \quad f'(x) = \dfrac{-n}{x^{n+1}}$
Fonction racine carrée	$\forall x \in \mathbb{R}_+^* : \quad f(x) = \sqrt{x}$	$\forall x \in \mathbb{R}_+^* : \quad f'(x) = \dfrac{-1}{2\sqrt{x}}$
Fonction cosinus	$\forall x \in \mathbb{R} : \quad f(x) = \cos(x)$	$\forall x \in \mathbb{R} : \quad f'(x) = -\sin(x)$
Fonction sinus	$\forall x \in \mathbb{R} : \quad f(x) = \sin(x)$	$\forall x \in \mathbb{R} : \quad f'(x) = \cos(x)$
Fonction exponentielle	$\forall x \in \mathbb{R} : \quad f(x) = e^x$	$\forall x \in \mathbb{R} : \quad f'(x) = e^x$
Fonction logarithme	$\forall x \in \mathbb{R}_+^* : \quad f(x) = \ln(x)$	$\forall x \in \mathbb{R}^* : \quad f'(x) = \dfrac{1}{x}$

II Opérations sur les fonctions dérivables

1. Propriété :
Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I, et k un nombre réel.

Fonction	**Dérivée**
Somme $u+v$	$u'+v'$
Produit par un réel $k\times u$	$k\times u'$
Produit $u\times v$	$u'\times v+u\times v'$
Quotient $\dfrac{u}{v}\quad(v\neq 0)$	$\dfrac{u'\times v-u\times v'}{v^2}$
Inverse $\dfrac{1}{u}\quad(u\neq 0)$	$\dfrac{-u'}{u^2}$

III Dérivée d'une fonction composée

Définition :
Soient u et v deux fonctions dérivable respectivement sur les intervalles I et J tel que pour tout x dans I, $u(x)\in J$. Pour tout réel x dans I, on note $v\circ u(x)=v(u(x))$. La fonction $v\circ u$ ainsi définie est appelé la composée de u par v.

2. Propriété :
Soient les fonction u et v telles que $v\circ u$ est dérivable sur un intervalle I. Pour tout réel x dans I, $(v\circ u)'(x)=u'(x)\times v'(u(x))$.

Remarque : On peut aussi noter $(v\circ u)'=u'\times(v'\circ u)$.

IV Applications de la dérivation

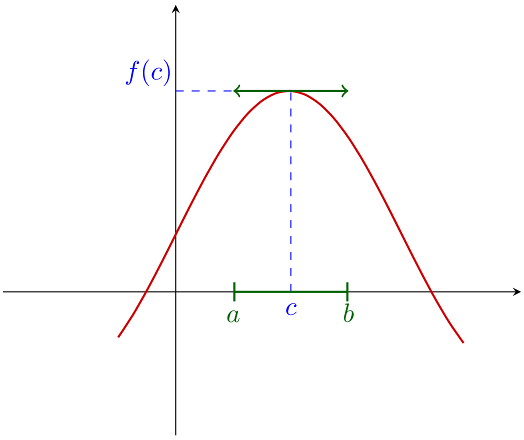
IV. 1 Étude des variations d'une fonction

1. Théorème :
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I, de fonction dérivée f'.
- Si f est croissante sur I, alors f' est positive sur I.
- Si f est décroissante sur I, alors f' est négative sur I.
- Si f est constante sur I, alors f' est nulle sur I.

2. Théorème (réciproque) :
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I, de fonction dérivée f'.
- Si f' est strictement positive sur I, sauf pour un nombre fini de réel où elle s'annule, alors f est strictement croissante sur I.
- Si f' est strictement négative sur I, sauf pour un nombre fini de réel où elle s'annule, alors f est strictement décroissante sur I.
- Si f' est nulle sur I, alors f est constante sur I.

IV. 2 Étude des extrema d'une fonction

Définition :
Soit f une fonction définie sur un intervalle I et c un réel de I et qui n'est pas une borne de I.
- Dire que $f(c)$ est un maximum local de f signifie qu'il existe deux réels a et b dans I tels que $c \in]a;b[$ et que pour tout réel $x \in]a;b[$, $f(x) \leq f(c)$.
- Dire que $f(c)$ est un minimum local de f signifie qu'il existe deux réels a et b dans I tels que $c \in]a;b[$ et que pour tout réel $x \in]a;b[$, $f(x) \geq f(c)$.
- Un extremum local est un minimum ou un maximum local.



3. Théorème (condition nécessaire sur l'existence d'un extremum local) :
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I et a un réel de I. Si f présente un extremum local en a alors $f'(a) = 0$.

Remarque : La réciproque est fausse. En effet, pour $f : x \mapsto x^3$ on a $f : x \mapsto 3x^2$ donc $f'(0) = 0$ mais f n'admet pas d'extremum local en O.

4. Théorème (condition suffisante sur l'existence d'un extremum local) :
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I, de dérivée f' et $a \in I$. Si la dérivée f' s'annule en a en changeant de signe en a, alors la fonction f admet un extremum local en a.