Nombres complexes

Algèbre - Cours

I Ensemble des nombres complexes

I. 1 Notion de nombre complexe

1. Propriété :
Il existe un ensemble des nombres complexes (noté $\mathbb{C}$) qui possède les propriétés suiante :

(i) $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

(ii) L'addition et la multiplication des réels se prolongent aux nombres complexes et les règles de calcul sont les mêmes.

(iii) Il existe un nombre complexe i tel que $i^2 = -1$.

(iv) Tout nombre complexe z s'écrit $z = a + ib$ avec a et b des réels.

Définitions (nombre complexe) :
L'écriture $z = a + ib$ d'un nombre complexe avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ est appelé forme algébrique (ou cartésienne) de z avec :

— a la partie réelle de z noté $a = \text{Re}(z)$.

— b la partie imaginaire de z noté $a = \text{Im}(z)$.

Remarques :

Soit z un nombre complexe.

— On a $z = \text{Re}(z) + i \times \text{Im}(z)$

— Si $\text{Re}(z) = 0$, on dit que z est imaginaire pur. On note $i\mathbb{R}$ l'ensemble des imaginaires purs.

— Si $\text{Im}(z) = 0$, z est réel.

1. Théorème :
Soient $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ deux nombres complexes avec a, b, a' et b' des réels. Alors : $z = z' \Leftrightarrow \begin{cases} a = a' \\ b = b' \end{cases}$.

Corrolaire :
Tout nombre complexe z s'écrit de manière unique $z = a + ib$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

2. Propriétés (conséquence) :
Soient $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ deux nombres complexes avec a, b, a' et b' des réels. Alors :

(i) $z \neq z' \Leftrightarrow a \neq a' \vee b \neq b'$

(ii) $z = 0 \Leftrightarrow a = 0 \wedge b = 0$

(iii) $z \neq 0 \Leftrightarrow a \neq 0 \vee b \neq 0$

I. 2 Opérations sur les nombres complexes

3. Propriétés (addition et multiplication) :
Soient $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ deux nombres complexes avec a, b, a' et b' des réels. Alors :

(i) $z + z' = (a + a') + i(b + b')$

(ii) $z \times z' = (aa' - bb') + i(ab' - a'b)$

Définition (opposé) :
Pour tout nombre complexe $z = a + ib$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, il existe un unique nombre complexe z' tel que $z + z' = 0$. On appelle z' l'opposé de z et on le note $-z = (-a) + i(-b)$.

Définition (soustraction) :
Soient $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ deux nombres complexes avec a, b, a' et b' des réels. Alors $z - z'$ est défini par $z + (-z')$ et on a $z - z' = (a - a') + i(b - b')$.

Définition (inverse) :
Pour tout nombre complexe $z = a + ib$ avec a, b des réels et $z \neq 0$, il existe un unique nombre complexe z' tel que $z \times z' = 1$. On appelle z' inverse de z et on le note $\dfrac{1}{z} = \dfrac{a}{a^2 + b^2} + i \times \dfrac{b}{a^2 + b^2}$.

Définition (quotient) :
Soient z et z' deux nombres complexes tels que $z' \neq 0$. Alors $\dfrac{z}{z'}$ est défini par $\dfrac{z}{z'} = z \times \dfrac{1}{z'}$.

II Conjugué d'un nombre complexe

Définition :
Soit z un nombre complexe tel que $z = a + ib$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Alors le conjugué de z, noté $\overline{z}$, est le nombre complexe défini par $\overline{z} = a - ib$.

4. Propriétés :
Pour tout nombre complexe z, on a :

(i) $z + \overline{z} = 2\mathrm{Re}(z)$

(ii) $z - \overline{z} = 2i\mathrm{Im}(z)$

(iii) $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z = \overline{z}$

(iv) $z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow z = -\overline{z}$

(v) $\overline{\overline{z}} = z$

(vi) $z\overline{z} = \mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2$

5. Propriétés (opérations et conjugué) :
Pour tous nombres complexes z et z', on a :

(i) $\overline{-z} = -\overline{z}$

(ii) $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$

(iii) $\overline{z \times z'} = \overline{z} \times \overline{z'}$

(iv) $\forall n \in \mathbb{N}, \overline{(z^n)} = (\overline{z})^n$

(i) Si $z \neq 0$, $\overline{\left(\dfrac{1}{z}\right)} = \dfrac{1}{\overline{z}}$

(ii) Si $z \neq 0$, $\overline{\left(\dfrac{z'}{z}\right)} = \dfrac{\overline{z'}}{\overline{z}}$