Fonction exponentielle et logarithme népérien

Analyse - Cours

I Généralités sur la fonction exponentielle

Définition :
Il existe une unique fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$. Cette fonction est appelée fonction exponentielle et se note exp. Ainsi, pour tout réel x, on a $\exp'(x) = \exp(x)$ et $\exp(0) = 1$.

I. 1 Propriétés algébriques

1. Propriété (lemme) :
Pour tout réel x, on a $\exp(x) \neq 0$.

2. Propriétés :
Pour tous réels x et y, on a :

(i) $\exp(x+y) = \exp(x) \times \exp(y)$ (appelé relation fonctionnelle)

(ii) $\exp(-x) = \dfrac{1}{\exp(x)}$

(iii) $\exp(x-y) = \dfrac{\exp(x)}{\exp(y)}$

(iv) $\exp(nx) = \exp(x)^n$

I. 2 La notation de l'exponentielle

Définition :
L'image de 1 par la fonction exp est le nombre noté e, appelé constante d'Euler. Ainsi, $\exp(1) = e$.

Remarques :

— La fonction exp possède les mêmes propriété algébriques que les fonctions puissances. On notera donc $\exp(x) = e^x$.

— $e \approx 2,71828182845904\ldots$

3. Propriétés :
Pour tous réels x et y, on a :

(i) $e^{x+y} = e^x \times e^y$

(ii) $e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$

(iii) $e^{x-y} = \dfrac{e^x}{e^y}$

(iv) $(e^x)^n = e^{nx}$

II Étude et applications de la fonction exponentielle

II. 1 Signe et variations de la fonction exponentielle

4. Propriété :
La fonction exp est strictement positive sur $\mathbb{R}$. Autrement dit : pour tout nombre réel x, $e^x > 0$.

5. Propriété :
La fonction exp est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

II. 2 Fonctions définies avec l'exponentielle

6. Propriété :
Soit $a \in \mathbb{R}$. Soit la fonction $f(x) = e^{ax}$.

(i) Pour $a > 0$, la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

(ii) Pour $a < 0$, la fonction f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

7. Propriété :
Soient a et b deux réels. La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{ax+b}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $f'(x) = a \times e^{ax+b}$.

II. 3 Équations et inéquations

8. Propriété :
Pour tous réels a et b, on a :

(i) $e^a = e^b \Leftrightarrow a = b$

(ii) $e^a < e^b \Leftrightarrow a < b$

(iii) $e^a \leq e^b \Leftrightarrow a \leq b$

III Généralités sur la fonction logarithme népérien

9. Propriété (lemme) :
Pour tout réel $a > 0$, il existe un unique réel b tel que $a = e^b$.

III. 1 Définition et notation

Définition :
On appelle logarithme népérien d'un réel $a > 0$, le nombre réel b tel que $e^b = a$. On le note $\ln(a) = b$.

Remarques :

— $\ln(0)$ n'existe pas. En effet, $e^x \neq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$
— Pour tout entier $n \geq 2$, $\ln(n)$ n'est pas rationel.

Exemples :

— $\ln(1) = 0$ (car $e^0 = 1$)
— $\ln(e) = 1$ (car $e^1 = e$)

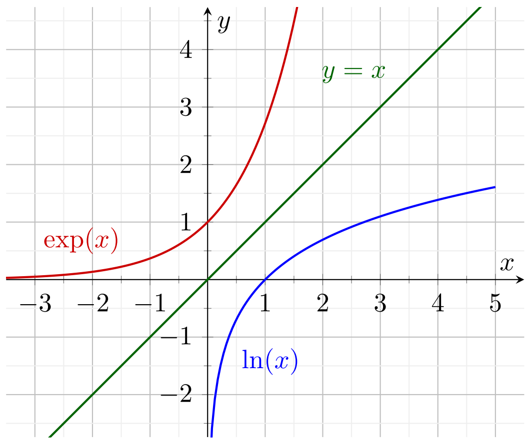
III. 2 Propriétés algébriques

10. Propriété :
Pour tout réel $x > 0$, $y > 0$ et pour tout entier relatif n :
(i) $e^{\ln(x)} = x$
(ii) $\ln(e^x) = x$
(iii) $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$
(iv) $\ln(\frac{x}{y}) = \ln(x) - \ln(y)$
(v) $\ln(x^n) = n\ln(x)$

IV Propriétés graphiques

IV. 1 Symétrie des courbes représentatives

Dans un repère orthonormé, on note d la droite d'équation $x = y$.
La symétrie axiale par rapport à la droite d a pour effet d'échanger les abscisses et les ordonnées, c'est à dire qu'elle transforme tout point de coordonnées $(x; y)$ en un point de coordonnées $(x; y)$.



1. Théorème :
Les courbes représentatives de la fonction exp et ln sont symétriques l'une de l'autre par rapport à la droite d.

IV. 2 Dérivation de la fonction logarithme

11. Propriété :
Si pour tout réel $x > 0$, $f(x) = \ln(x)$ alors f est dérivable, et pour tout $x > 0$: $f'(x) = \dfrac{1}{x}$

12. Propriétés (corrolaires) :
— La fonction $\ln(x)$ est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.
— Pour tous réels a et b strictements positifs, $\ln(a) < \ln(b) \Leftrightarrow a < b$.

V Compléments sur le logarithme décimal

Soit n un entier et en posant $x = 10^n$, on a $\ln(x) = n \times \ln(10)$ donc $n = \dfrac{\ln(x)}{\ln(10)}$.
Le nombre n est appelé le logarithme décimal de x noté $\log_1 0(x)$ ou plus simplement $\log(x)$. On peut généraliser cette définition pour tout réel strictement positif :

Définition :
Pour tout réel $a > 0$, on définit le logarithme décimal de a par $\log(a) = \dfrac{\ln(a)}{\ln(10)}$.

13. Propriétés :
Pour tous réels $x > 0$, $y > 0$ et pour tout entier relatif n, on a :

(i) $\log(10^n) = n$

(ii) $\log(x \times y) = \log(x) + \log(y)$

(iii) $\log\left(\frac{x}{y}\right) = \log(x) - \log(y)$

(iv) $\log(x^n) = n \times \log(n)$

Remarque : Tout nombre réel x peut s'écrire sous la forme $x = a \times 10^n$ avec $a \in [1; 10[$ (c'est ce qu'on appelle l'écriture scientifique de x). Dans ce cas, l'entier n est égal à la partie entière de $\log(x)$.
Exemple :

Soit $x = 123,4 = 1,234 \times 10^2$. La partie entière de $\log(x)$ est égal à 2, c'est à dire que $2 \leq \log(x) < 3$.