# Dénombrement

Algèbre - Cours

## I Vocabulaire et principes de base

**Définition :**
Soit $E$ un ensemble fini. On appelle cardinal de $E$ le nombre d'éléments appartenant à $E$. On note $Card(E)$.

**Remarque :** Il y existe différentes notations du cardinal : $Card(E) = n(E) = \#E = |E| = \bar{E} = \bar{\bar{E}}$

**Axiomes (principe additif et multiplicatif) :**
Soient $E$ et $F$ deux ensembles finis.
- $Card(E \cup F) = Card(E) + Card(F) - Card(E \cap F)$
- $Card(E \times F) = Card(E) \times Card(F)$

**Exemple :**

$E = \{A, B\} \qquad F = \{1, 2, 3\}$
$E \times F = \{(A, 1), (A, 2), (A, 3), (B, 1), (B, 2), (B, 3)\}$
$Card(E \times F) = 6 \qquad Card(E) \times Card(F) = 6$

**Définition :**
Soit $E$ un ensemble fini. Soit un entier $n \geq 2$. On appelle n-uplet d'éléments de $E$ une liste ordonnée $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ avec $x_1 \in E, x_2 \in E, \ldots, x_n \in E$. On note $E^n$ l'ensemble de tous les n-uplets d'éléments de $E$.

**Exemple :**

$E = \{A, B\} \quad E^3 = \{(A, A, A), (A, A, B), (A, B, A), (A, B, B), (B, A, A), (B, A, B), (B, B, A), (B, B, B)\}$

**1. Théorème :**
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $E$ un ensemble de cardinal $n$. Pour tout entier naturel $k \geq 2$ : $Card(E^k) = n^k$.

**Remarque :** On peut dire que le nombre de k-uplets de $E$ est $n^k$.

## II Arrangements et permutations

**Définition :**
Soit $E$ un ensemble de cardinal $n \geq 2$. Pour tout $k \in [\![1; n]\!]$, on appelle arrangement de $k$ éléments de $E$ tout k-uplet sans répétitions d'éléments de $E$.

**Exemple :**

Si $E = \{a, b, c, d\}$, alors $(a, d, c)$ est un arrangement de 3 éléments de $E$.

**Définition :**
Soit $E$ un ensemble de cardinal $n$. Un arrangement des $n$ éléments de $E$ est appelé une permutation de $E$.

**Exemple :**

Si $E = \{a, b, c, d\}$, alors $(d, a, b, c)$ et $(a, b, c, d)$ sont deux permutation de $E$.

**2. Théorèmes :**
Soit $E$ un ensemble de cardinal $n \geq 2$.

(i) Pour tout $k \in [\![1; n]\!]$, le nombre d'arrangements de $k$ éléments de $E$ est égal à
$$n \times (n-1) \times \cdots \times (n-k-1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

(ii) Le nombre de permutations de $E$ est égal à $n!$

**Exemples :**

On a $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.
- Le nombre de permutations de $E$ est $8! = 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 40320$.
- Le nombre d'arrangements de 3 éléments de $E$ est $8 \times 7 \times 6 = 336$.

# III Parties d'un ensemble, coefficients binomiaux

**Définition :**
Soit $E$ un ensemble. Tout ensemble $A$ qui est inclus dans $E$ est appelé une partie de $E$. L'ensemble des parties de $E$ est noté $\mathcal{P}(E)$.

**Remarque :** Par convention, pour tout ensemble $E$ : $\varnothing \in E$ ($\varnothing$ est donc une partie de $E$).

**3. Théorème :**
Soit $E$ un ensemble fini. Soit $n = Card(E)$. On a $Card(\mathcal{P}(E)) = 2^n$.

**Exemple :**

$E = \{a, b, c\}$ $\quad$ $\mathcal{P}(E) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{a, c\}, E\}$
On a $Card(\mathcal{P}(E)) = 2^3 = 8$

**Remarque :** Un ensemble qui comprend exactement un élément est appelé un singleton.

**Définition :**
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $k \in [\![0; n]\!]$. On note $\binom{n}{k}$ le nombre de parties à $k$ éléments dans un ensemble à $n$ éléments.

**Exemple :**

$E = \{a, b, c\}$ $\quad$ Il y a ici 3 parties à deux éléments : $\{a, b\}, \{b, c\}$ et $\{a, c\}$.
On note donc $\binom{2}{3} = 3$.

**4. Théorèmes :**
Soit $n \in [\![1; +\infty[\![$. Soit $k \in [\![0; n]\!]$.

(i) $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$

(ii) $\binom{n}{1} = n$

(iii) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

**5. Théorème :**
$\forall n \in [\![1; +\infty[\![, \forall k \in [\![0; n]\!] : \binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$

**Exemple :**

$$\binom{8}{3} = \frac{8!}{3! \times 5!} = \frac{8 \times 7 \times \cancel{6} \times \cancel{5} \times \cancel{4} \times \cancel{3} \times \cancel{2} \times \cancel{1}}{\cancel{3} \times \cancel{2} \times \cancel{1} \times \cancel{5} \times \cancel{4} \times \cancel{3} \times \cancel{2} \times \cancel{1}} = 8 \times 7 = 56$$

**6. Théorème (Formule de Pascal) :**
$\forall n \in [\![2;+\infty[\![, \forall k \in [\![1;n]\!] : \binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$

**Exemple :**

$$\binom{4}{2} = \binom{3}{2} + \binom{3}{1} = 3 + 3 = 6$$

**Triangle de Pascal :**

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | | |
| 1 | 1 | | | | |
| 1 | 2 | 1 | | | |
| 1 | 3 | 3 | 1 | | |
| 1 | 4 | 6 | 4 | 1 | |
| 1 | 5 | 10 | 10 | 5 | 1 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $\binom{0}{0}$ | | | | | |
| $\binom{1}{0}$ | $\binom{1}{0}$ | | | | |
| $\binom{2}{0}$ | $\binom{2}{1}$ | $\binom{2}{0}$ | | | |
| $\binom{3}{0}$ | $\binom{3}{1}$ | $\binom{3}{1}$ | $\binom{3}{0}$ | | |
| $\binom{4}{0}$ | $\binom{4}{1}$ | $\binom{4}{2}$ | $\binom{4}{1}$ | $\binom{4}{0}$ | |
| $\binom{5}{0}$ | $\binom{5}{1}$ | $\binom{5}{2}$ | $\binom{5}{2}$ | $\binom{5}{1}$ | $\binom{5}{0}$ |

**7. Théorème :**
Soit $n$ un entier naturel. Soit $k \in [\![0;n]\!]$. On considère une répétitions de $n$ épreuves de Bernoulli identiques. Le nombre d'issues comptant $k$ succès est égal à $\binom{n}{k}$.

**Exemple :** $n = 6$ et $k = 3$

L'issue $ESSESE$ correspond à la partie $\{2;3;5\}$ de l'ensemble $\{1;2;3;4;5;6\}$. Ici, le nombre total d'issues est $\binom{6}{3} = 20$.