

# Le second degré

1<sup>re</sup> Spécialité mathématiques  
Algèbre - Cours

## I. Les fonctions polynômes du second degré

### Définition :

On appelle *fonction polynôme (ou trinôme) du second degré* toute fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = ax^2 + bx + c$  où  $a$ ,  $b$  et  $c$  sont trois réels avec  $a \neq 0$ .  
Les réels  $a$ ,  $b$  et  $c$  sont appelés *coefficients de la fonction*.

### Exemple :

- $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  tel que  $f(x) = 2x^2 - 4x + 1$
- $g$  définie sur  $\mathbb{R}$  tel que  $g(x) = -x^2 + 9x - 12$

**Remarque :** L'expression  $ax^2 + bx + c$  est dite forme développée de  $f(x)$ .

### 1. Forme canonique

#### Théorème :

Toute fonction trinôme du second degré définie par  $f(x) = ax^2 + bx + c$  peut s'écrire sous une forme appelée canonique  $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$ , avec  $\alpha = -\frac{b}{2a}$  et  $\beta = f(\alpha)$ .

### Exemple :

Soit  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = x^2 - 4x + 17$ .  
Donner sa forme canonique.

1. En utilisant le théorème : On a  $a = 1$ ,  $b = -4$  et  $c = 17$

Calculons  $\alpha = -\frac{b}{2a} = -\frac{-4}{2 \times 1} = \frac{4}{2} = 2$  et  $\beta = f(\alpha) = f(2) = 2^2 - 4 \times 2 + 17 = 13$

Donc la forme canonique de  $f$  est  $f(x) = 1(x - 2)^2 + 13$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .

2. En utilisant une identité remarquable :

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 - 4x + 17 \\ &= x^2 - 4x + 4 - 4 + 17 \\ &= (x - 2)^2 + 13 \end{aligned}$$

Donc la forme canonique de  $f$  est  $f(x) = (x - 2)^2 + 13$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .

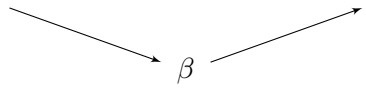
## 2. Sens de variation

### Propriété :

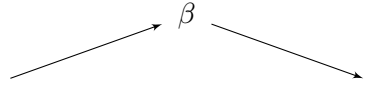
Soit  $f$  une fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$ .

- Cas où  $a > 0$  : la fonction  $f$  est strictement décroissante sur  $] -\infty; \alpha]$  puis strictement croissante sur  $[\alpha; +\infty[$ .  $f$  admet un minimum égal à  $\beta$  atteint en  $x = \alpha$ .
- Cas où  $a < 0$  : la fonction  $f$  est strictement croissante sur  $] -\infty; \alpha]$  puis strictement décroissante sur  $[\alpha; +\infty[$ .  $f$  admet un maximum égal à  $\beta$  atteint en  $x = \alpha$ .

### On retient :

$x$	$-\infty$	$\alpha$	$+\infty$
$f(x)$			

car  $a > 0$

$x$	$-\infty$	$\alpha$	$+\infty$
$f(x)$			

car  $a < 0$

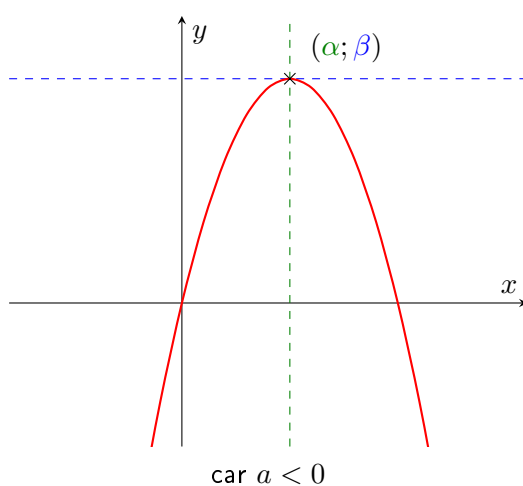
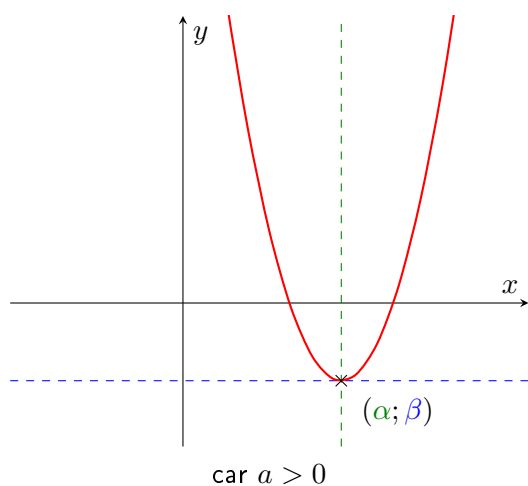
## 3. Représentation graphique

### Propriété (conséquence) :

Soit  $f$  une fonction définie par  $f(x) = a(x - \alpha) + \beta$ .

Dans un repère orthogonal d'origine  $O$ , la représentation graphique de la fonction  $f$  est une parabole de sommet  $S(\alpha; \beta)$  qui admet pour axe de symétrie la droite d'équation  $x = \alpha$ .

### On retient :



## II. Factorisation d'une fonction du second degré et équation du second degré

### 1. Factorisation

#### Définition :

On appelle discriminant de la fonction trinôme  $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$  ou de l'équation  $ax^2 + bx + c = 0$  le réel  $\Delta$  défini par  $\Delta = b^2 - 4ac$ .

#### Exemple :

Soit l'équation  $-3x^2 + 6x - 3 = 0$ .

On a  $a = -3$ ,  $b = 6$  et  $c = -3$ .

Calculons  $\Delta = b^2 - 4ac$

$$\begin{aligned} &= 6^2 - 4 \times (-3) \times (-3) \\ &= 0 \end{aligned}$$

#### **Théorème (factorisation d'un trinôme du second degré) :**

Soit  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = ax^2 + bx + c$ .

- Si  $\Delta < 0$ , alors  $f(x) = ax^2 + bx + c$  n'est pas factorisable.
- Si  $\Delta = 0$ , alors  $f(x) = a(x - \alpha)^2$  où  $\alpha = -\frac{b}{2a}$ .
- Si  $\Delta > 0$ , alors  $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$  où  $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$  et  $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ .

### 2. Résolution des équation du second degré

#### Théorème :

Soit l'équation  $ax^2 + bx + c = 0$  avec  $a \neq 0$ .

- Si  $\Delta < 0$ , l'équation  $ax^2 + bx + c = 0$  n'admet aucune solution.
- Si  $\Delta = 0$ , l'équation  $ax^2 + bx + c = 0$  admet une unique solution  $\alpha = -\frac{b}{2a}$ .
- Si  $\Delta > 0$ , l'équation  $ax^2 + bx + c = 0$  admet deux solutions distinctes :  $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$  et  $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ .

#### Exemple :

Soit l'équation  $2x^2 + 19x + 42 = 0$ .

On a  $a = 2$ ,  $b = 19$  et  $c = 42$ .

On calcule  $\Delta = b^2 - 4ac = 25$ .

$\Delta > 0$  donc l'équation admet deux solutions  $x_1$  et  $x_2$  telles que :

- $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-19 - \sqrt{25}}{2 \times 2} = -6$
- $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-19 + \sqrt{25}}{2 \times 2} = -\frac{7}{2}$

L'ensemble solution est  $S = \left\{-\frac{7}{2} - 6\right\}$ .

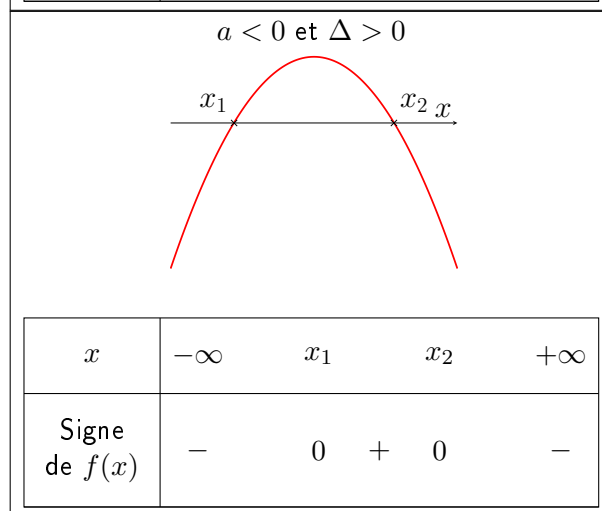
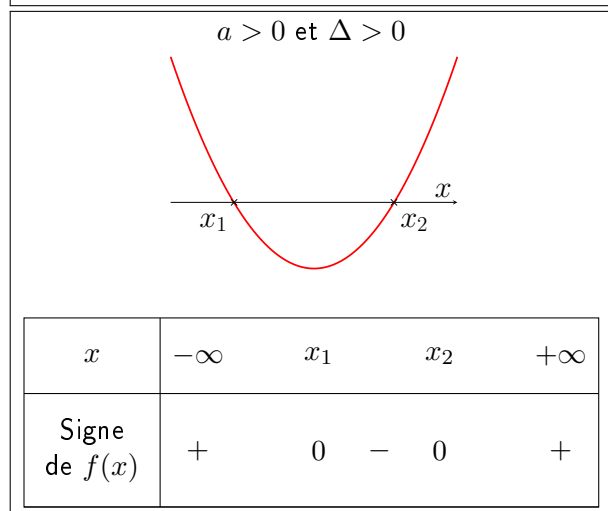
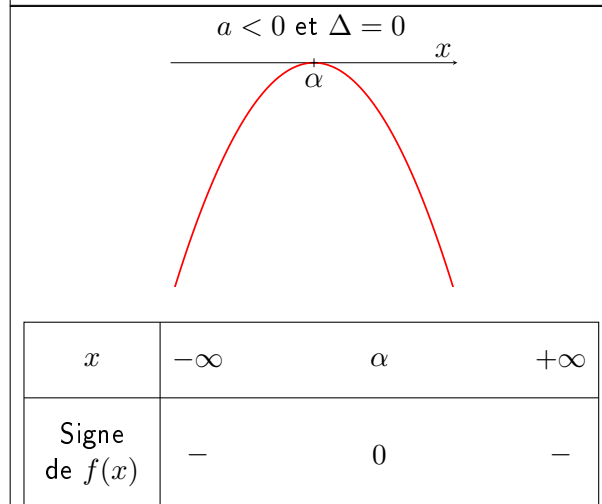
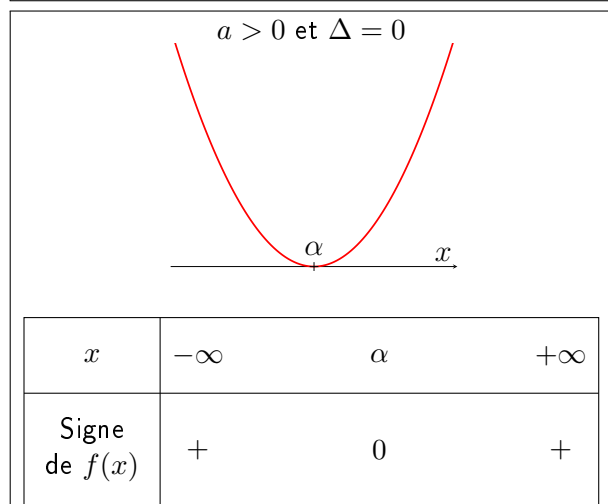
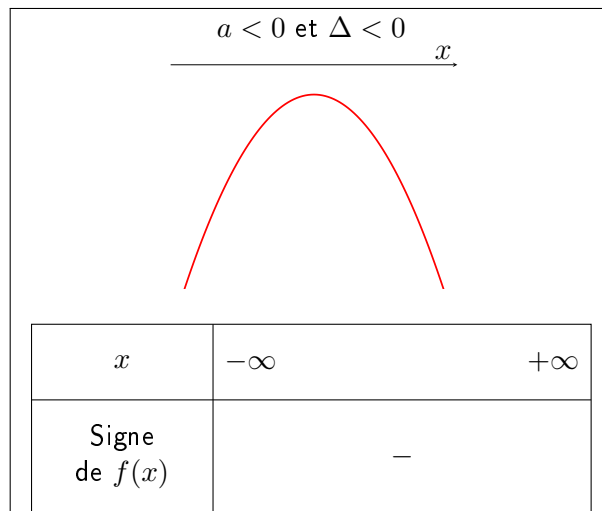
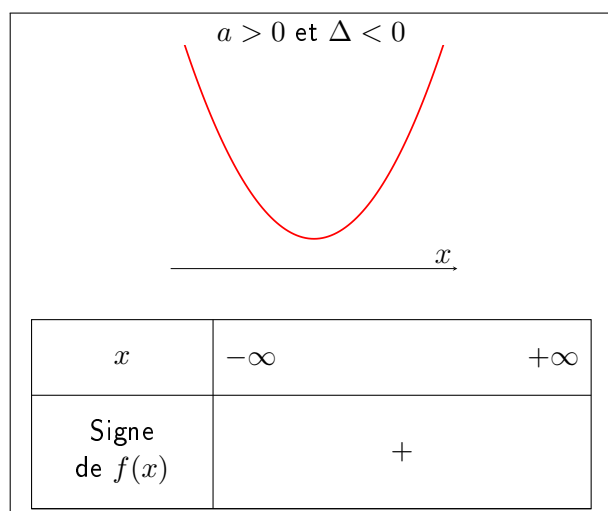
### 3. Somme et produit des racines

#### Propriété :

Soit  $x_1$  et  $x_2$  les racines d'une fonction polynôme du second degré  $ax^2 + bx + c$ , avec  $a \neq 0$ .

On a alors  $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$  et  $x_1 \times x_2 = \frac{c}{a}$

### III. Signe d'une fonction du second degré et inéquations



#### Propriété (signe d'une fonction trinôme du second degré) :

Soit  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = ax^2 + bx + c$ .

- Si  $\Delta < 0$ , alors pour tout réel  $x$ ,  $f(x)$  est du signe de  $a$ .
- Si  $\Delta = 0$ , alors pour tout réel  $x$ ,  $f(x)$  est du signe de  $a$  sauf en  $\alpha$  où  $f(x) = 0$ .
- Si  $\Delta > 0$ , alors pour tout réel  $x$ ,  $f(x)$  s'annule en  $x_1$  et  $x_2$  et est du signe de  $a$  pour tout  $x \in ]-\infty; x_1[ \cup ]x_2; +\infty[$  (avec  $x_1 < x_2$ ) et du signe opposé à celui de  $a$  pour tout  $x \in ]x_1; x_2[$ .

**Remarque :** On peut retenir que  $f(x)$  est du signe de  $a$  sauf entre les racines lorsqu'elles existent.