

Dénombrement

Algèbre - Cours

I Vocabulaire et principes de base

Définition :

Soit E un ensemble fini. On appelle cardinal de E le nombre d'éléments appartenant à E . On note $Card(E)$.

Remarque : Il y existe différentes notations du cardinal : $Card(E) = n(E) = \#E = |E| = \overline{E} = \overline{\overline{E}}$

Axiomes (principe additif et multiplicatif) :

Soient E et F deux ensembles finis.

- $Card(E \cup F) = Card(E) + Card(F) - Card(E \cap F)$
- $Card(E \times F) = Card(E) \times Card(F)$

Exemple :

$$\begin{aligned} E &= \{A, B\} & F &= \{1, 2, 3\} \\ E \times F &= \{(A, 1), (A, 2), (A, 3), (B, 1), (B, 2), (B, 3)\} \\ Card(E \times F) &= 6 & Card(E) \times Card(F) &= 6 \end{aligned}$$

Définition :

Soit E un ensemble fini. Soit un entier $n \geq 2$. On appelle n -uplet d'éléments de E une liste ordonnée (x_1, x_2, \dots, x_n) avec $x_1 \in E, x_2 \in E, \dots, x_n \in E$. On note E^n l'ensemble de tous les n -uplets d'éléments de E .

Exemple :

$$E = \{A, B\} \quad E^3 = \{(A, A, A), (A, A, B), (A, B, A), (A, B, B), (B, A, A), (B, A, B), (B, B, A), (B, B, B)\}$$

1. Théorème :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit E un ensemble de cardinal n . Pour tout entier naturel $k \geq 2$: $Card(E^k) = n^k$.

Remarque : On peut dire que le nombre de k -uplets de E est n^k .

II Arrangements et permutations

Définition :

Soit E un ensemble de cardinal $n \geq 2$. Pour tout $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$, on appelle arrangement de k éléments de E tout k -uplet sans répétitions d'éléments de E .

Exemple :

Si $E = \{a, b, c, d\}$, alors (a, d, c) est un arrangement de 3 éléments de E .

Définition :

Soit E un ensemble de cardinal n . Un arrangement des n éléments de E est appelé une permutation de E .

Exemple :

Si $E = \{a, b, c, d\}$, alors (d, a, b, c) et (a, b, c, d) sont deux permutation de E .

2. Théorèmes :

Soit E un ensemble de cardinal $n \geq 2$.

(i) Pour tout $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$, le nombre d'arrangements de k éléments de E est égal à

$$n \times (n-1) \times \cdots \times (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

(ii) Le nombre de permutations de E est égal à $n!$

Exemples :

On a $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.

— Le nombre de permutations de E est $8! = 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 40320$.

— Le nombre d'arrangements de 3 éléments de E est $8 \times 7 \times 6 = 336$.

III Parties d'un ensemble, coefficients binomiaux

Définition :

Soit E un ensemble. Tout ensemble A qui est inclus dans E est appelé une partie de E . L'ensemble des parties de E est noté $\mathcal{P}(E)$.

Remarque : Par convention, pour tout ensemble E : $\emptyset \in E$ (\emptyset est donc une partie de E).

3. Théorème :

Soit E un ensemble fini. Soit $n = \text{Card}(E)$. On a $\text{Card}(\mathcal{P}(E)) = 2^n$.

Exemple :

$$E = \{a, b, c\} \quad \mathcal{P}(E) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{a, c\}, E\}$$

$$\text{On a } \text{Card}(\mathcal{P}(E)) = 2^3 = 8$$

Remarque : Un ensemble qui comprend exactement un élément est appelé un singleton.

Définition :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$. On note $\binom{n}{k}$ le nombre de parties à k éléments dans un ensemble à n éléments.

Exemple :

$E = \{a, b, c\}$ Il y a ici 3 parties à deux éléments : $\{a, b\}$, $\{b, c\}$ et $\{a, c\}$.

$$\text{On note donc } \binom{2}{3} = 3.$$

4. Théorèmes :

Soit $n \in \llbracket 1; +\infty \rrbracket$. Soit $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$.

$$(i) \quad \binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$$

$$(ii) \quad \binom{n}{1} = n$$

$$(iii) \quad \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

5. Théorème :

$$\forall n \in \llbracket 1; +\infty \rrbracket, \forall k \in \llbracket 0; n \rrbracket : \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Exemple :

$$\binom{8}{3} = \frac{8!}{3! \times 5!} = \frac{8 \times 7 \times \cancel{6} \times \cancel{5} \times \cancel{4} \times \cancel{3} \times \cancel{2} \times \cancel{1}}{\cancel{3} \times \cancel{2} \times \cancel{1} \times \cancel{5} \times \cancel{4} \times \cancel{3} \times \cancel{2} \times \cancel{1}} = 8 \times 7 = 56$$

6. Théorème (Formule de Pascal) :

$$\forall n \in \llbracket 2; +\infty \llbracket, \forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket : \binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

Exemple :

$$\binom{4}{2} = \binom{3}{2} + \binom{3}{1} = 3 + 3 = 6$$

Triangle de Pascal :

				1				
			1		1			
		1		2		1		
	1		3		3		1	
1		4		6		4		1
1	5	10	10	5	1			

					$\binom{0}{0}$			
			$\binom{1}{0}$		$\binom{1}{0}$			
		$\binom{2}{0}$		$\binom{2}{1}$		$\binom{2}{0}$		
	$\binom{3}{0}$		$\binom{3}{1}$		$\binom{3}{1}$		$\binom{3}{0}$	
$\binom{4}{0}$		$\binom{4}{1}$		$\binom{4}{2}$		$\binom{4}{1}$		$\binom{4}{0}$
$\binom{5}{0}$	$\binom{5}{1}$	$\binom{5}{2}$	$\binom{5}{2}$	$\binom{5}{1}$	$\binom{5}{0}$			

7. Théorème :

Soit n un entier naturel. Soit $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$. On considère une répétitions de n épreuves de Bernoulli identiques. Le nombre d'issues comptant k succès est égal à $\binom{n}{k}$.

Exemple : $n = 6$ et $k = 3$

L'issue *ESSESE* correspond à la partie $\{2; 3; 5\}$ de l'ensemble $\{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$. Ici, le nombre total d'issues est $\binom{6}{3} = 20$.