# Les nombres complexes : point de vue géométrique

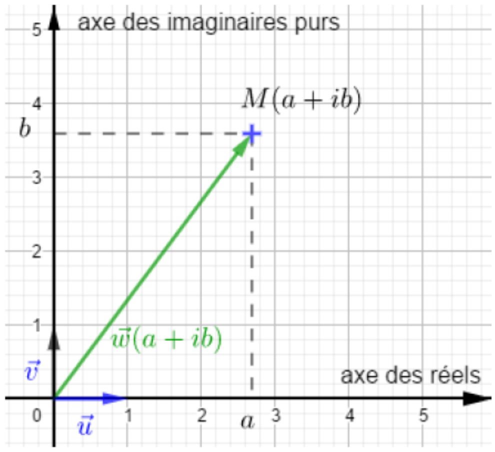
Dans tout le chapitre, on munit le plan d'un repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$ orthonormé direct .

## I ) Représentation dans le plan complexe

### 1 ) Définitions

**Définitions :** À tout nombre complexe $z = a + ib$, avec $a$ et $b$ réels, on peut associer :

- L'unique point $M(a; b)$. $M$ est appelé point image de $z$.
- L'unique vecteur $\vec{w}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$. $\vec{w}$ est appelé vecteur image de $z$.




Réciproquement :

- À tout point $M(a; b)$ avec $a$ et $b$ deux réels, on peut associer l'unique nombre complexe $z = a + ib$.

  Le nombre $z$ est appelé affixe du point $M$
- À tout vecteur vecteur $\vec{w}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ avec $a$ et $b$ deux réels, on peut associer l'unique nombre complexe $z = a + ib$.

  Le nombre $z$ est appelé affixe du vecteur $\vec{w}$.

**Remarques :**

- Les nombres réels sont les affixes des points de l'axe des abscisses aussi appelé : axe des réels.
- Les nombres imaginaires purs sont les affixes des points de l'axe des ordonnées aussi appelé : axe des imaginaires purs.
- Lorsqu'un point ou un vecteur est repéré par son affixe, le plan est appelé le plan complexe.
- L'affixe de $M$ est souvent noté $z_M$ et la donnée d'un point $M$ d'affixe $z_M$ est souvent notée $M(z_M)$.

  L'affixe de $\vec{w}$ est souvent noté $z_{\vec{w}}$, et la donnée d'un vecteur $w$ d'affixe $z_{\vec{w}}$ est souvent notée $\vec{w}(z_{\vec{w}})$ .

**Exemples :** $A(1; 2)$ avec $z_A = 1 + 2i$. $z_{\vec{w}} = 2 - 3i$ et $\vec{w}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$.

### 2 ) Propriétés

Des propriétés connues de géométrie sur les vecteurs et points donnent les propriétés suivantes.

**Propriétés :** Soient $A(z_A)$ et $B(z_B)$ deux points du plan complexe. Soient $\vec{w_1}(z_{\vec{w_1}})$ et $\vec{w_2}(z_{\vec{w_2}})$ deux vecteurs du plan complexe. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$(i)$ $A = B \iff z_A = z_B$ .

$(ii)$ $\vec{w_1} = \vec{w_2} \iff z_{\vec{w_1}} = z_{\vec{w_2}}$.

$(iii)$ $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe $z_B - z_A$.

$(iv)$ Le milieu du segment $[AB]$ a pour affixe $\dfrac{z_A + z_B}{2}$.

$(v)$ Le vecteur $\vec{w_1} + \vec{w_2}$ a pour affixe $z_1 + z_2$.

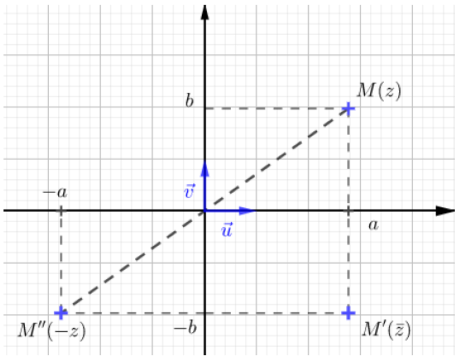
$(vi)$ $\lambda\vec{w_1}$ a pour affixe $\lambda z_1$.

**Démonstration :** $(iii)$ On sait que $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$ d'où pour les affixes :

$z_{\overrightarrow{AB}} = (x_B - x_A) + i(y_B - y_A) = (x_B - iy_B) - (x_A - iy_A) = z_B - z_A$.

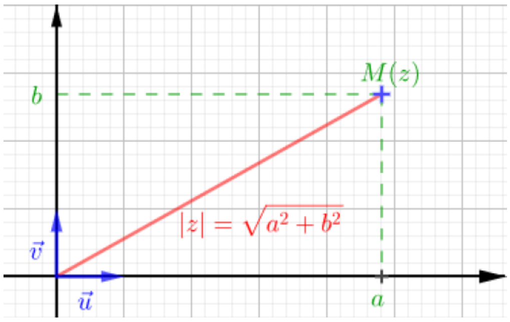
**Exemple :** Soit $A(3 + 2i)$ et $B(5 - i)$. Alors le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe $z_{\overrightarrow{AB}} = 5 - i - (3 + 2i) = 2 - 3i$.

### 3) Conjugué et opposé




Les points $M$ d'affixe $z$ et $M'$ d'affixe $\overline{z}$ sont symétriques par rapport à l'axe des réels.
Les points $M$ d'affixe $z$ et $M''$ d'affixe $-z$ sont symétriques par rapport à l'origine du repère.

## II ) Module et argument d'un nombre complexe




### 1) Module

**Définition :** Soit $M$ un point d'affixe $z$. Le module de $z$, noté $|z|$ est le réel positif défini par $|z| = OM$.
Si $z = a + ib$ avec $a$ et $b$ deux réels. Alors $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

**Remarque :** Si $z = z'$, alors $|z| = |z'|$. Mais la réciproque est fausse.
Contre-exemple avec $z = 1 + i$ et $z' = 1 - i$. $|z| = |z'| = \sqrt{2}$ et $z \neq z'$.

**Propriétés :** Soit $z$ un nombre complexe.

$(i)$ $|z|^2 = z\overline{z}$

$(ii)$ $|\overline{z}| = |z|$

$(iii)$ $|-z| = |z|$

$(iv)$ $|z| = 0 \iff z = 0$

**Démonstration :**

$(i)$ $z\overline{z} = (a + ib)(a - ib) = a^2 - (ib)^2 = a^2 - i^2b^2 = a^2 + b^2 = |z|^2$

$(ii)$ $|\overline{z}| = \sqrt{a^2 + (-b)^2} = \sqrt{a^2 + b^2} = |z|$

$(iii)$ $|-z| = \sqrt{(-a)^2 + (-b)^2} = \sqrt{a^2 + b^2} = |z|$

$(iv)$ $|z| = 0 \Rightarrow a^2 + b^2 = 0 \iff a = b = 0$. Sens réciproque évident.

**Remarque :** Corollaire de (i) : $\boxed{|z| = \sqrt{z\overline{z}}}$. (utile en pratique).

**Propriété :** Soit $A(z_A)$ et $B(z_B)$. On a $AB = |z_B - z_A| = |z_A - z_B|$.

**Démonstration :** On a $AB = \left\|\overrightarrow{AB}\right\| = |z_{\overrightarrow{AB}}| = |z_B - z_A|$.

**Propriétés :** Soient $z$ et $z'$ deux nombres complexes non nuls et entier naturel non nul.

$(i)$ Produit : $|zz'| = |z||z'|$

$(ii)$ Puissance : $|z^n| = |z|^n$

$(iii)$ Inverse : $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$

$(iv)$ Quotient : $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$

**Démonstration :**
• Module d'un produit :$|zz'|^2 = zz' \times \overline{zz'} = zz'\overline{z}\overline{z'} = z\overline{z} \times z'\overline{z'} = |z|^2|z'|^2 = (|z||z'|)^2$.
Or $|zz'| \in \mathbb{R}^+$ et $|z||z'| \in \mathbb{R}^+$ d'où $|zz'| = |z||z'|$
• Module d'une puissance : On procède par récurrence.
Initialisation : $|z^1| = |z| = |z|^1$. $P(1)$ est vraie.
Hérédité : Supposons qu'il existe un entier $k$ tel que la propriété $P(k)$ soit vraie : $|z^k| = |z|^k$
$|z^{k+1}| = |z^kz| = |z^k||z| = |z|^k|z| = |z|^{k+1}$
Conclusion : La propriété est vraie pour $n = 1$ et héréditaire à partir de ce rang.
Donc elle est vraie pour tout entier naturel $n$, soit : $|z^n| = |z|^n$.
• Module de l'inverse : $z \times \frac{1}{z} = 1$ d'où $\left|z \times \frac{1}{z}\right| = |1| = 1$ puis $|z| \times \left|\frac{1}{z}\right| = 1 \iff \left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$.

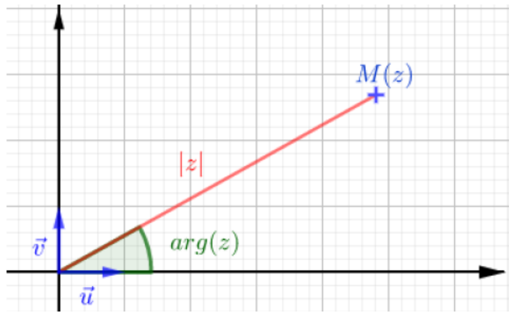
- Module du quotient : $\dfrac{z}{z'} = z \times \dfrac{1}{z'}$. Donc $\left|\dfrac{z}{z'}\right| = \left|z \times \dfrac{1}{z'}\right| = |z| \times \left|\dfrac{1}{z'}\right| = |z| \times \dfrac{1}{|z'|} = \dfrac{|z|}{|z'|}$.

> **Propriété : Inégalité triangulaire**
> Soient $z$ et $z'$ deux nombres complexes, on a $|z + z'| \leq |z| + |z'|$

**Démonstration :** Voir fiche complément

## 2 ) Argument

**Définition :** Soit un point $M$ d'affixe non nulle $z$.
On appelle argument de $z$, noté $\arg(z)$ une mesure, en radians, de l'angle $(\vec{u}; OM)$.




**Remarques :**

- Un nombre complexe non nul possède une infinité d'arguments de la forme $\arg(z) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

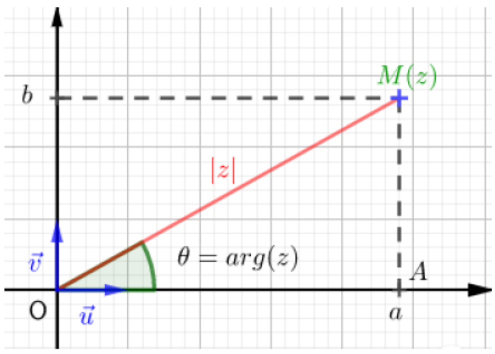
  On notera $\arg(z)$ modulo $2\pi$ ou $\arg(z)[2\pi]$

- 0 n'a pas d'argument car dans ce cas l'angle $(\vec{u}; OM)$ n'est pas défini.

**Exemple :** Soit $z = 3 + 3i$. On a $|z| = 3\sqrt{2}$ et $\arg(z) \equiv \dfrac{\pi}{4}\ [2\pi]$. On peut noter $\arg(z) = \dfrac{\pi}{4}[2\pi]$.
$|i| = 1; \arg(i) = \dfrac{\pi}{2}[2\pi]$.

> **Propriétés :** Soit $z$ un nombre complexe non nul.
> $(i)$ $z$ est un nombre réel $\iff \arg(z) = 0[\pi]$ $\qquad$ $(iii)$ $\arg(\overline{z}) = -\arg(z)[2\pi]$
>
> $(ii)$ $z$ est un nombre imaginaire pur $\iff \arg(z) = \dfrac{\pi}{2}[\pi]$ $\qquad$ $(iv)$ $\arg(-z) = \arg(z) + \pi[2\pi]$

# III ) Forme trigonométrique d'un nombre complexe




> **Propriété :** Soit $z = a + ib$ un nombre complexe non nul.
> On pose : $\theta = \arg(z)$.
> On a alors : $a = |z|\cos(\theta)$ et $b = |z|\sin(\theta)$.

**Démonstration :** Dans le triangle $OAM$ rectangle en $A$ on utilise la trigonométrie de collège.
On a $\cos(\theta) = \dfrac{a}{|z|}$ et $\sin(\theta) = \dfrac{b}{|z|}$.

**Définition :** On appelle forme trigonométrique d'un nombre complexe non nul l'écriture :
$z = |z|(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$ avec $\theta = \arg(z)$.

> **Propriété :** Deux nombres complexes non nuls sont égaux si, et seulement si, ils ont même module et même argument (modulo $2\pi$).

**Démonstration :**
- Si $z = z'$ implication triviale.
- Réciproque : Si $\begin{cases} |z| = |z'| \\ \arg(z) = \theta = \arg(z') = \theta'[2\pi] \end{cases}$ Alors $z = |z|(\cos(\theta) + i\sin(\theta)) = |z'|(\cos(\theta') + i\sin(\theta')) = z'$.

**Exemple :** Écrire le nombre complexe $z = \dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{6}}{2}$ sous sa forme trigonométrique.
*Méthodologie :*
- On commence par calculer le module de $z$
- On calcule $\dfrac{z}{|z|}$ pour identifier la partie réelle de et sa partie imaginaire.
- $|z| = \cdots = \sqrt{2}$.

- $\dfrac{z}{|z|} = \cdots = \dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

On cherche donc un argument tel que $\cos(\theta) = \dfrac{1}{2}$ et $\sin(\theta) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
Parmi les valeurs remarquable on a $\cos(\dfrac{\pi}{3}) = \dfrac{1}{2}$ et $\sin(\dfrac{\pi}{3}) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
D'où $\dfrac{z}{|z|} = \cos(\dfrac{\pi}{3}) + i\sin(\dfrac{\pi}{3})$ puis $z = \sqrt{2}\left(\cos(\dfrac{\pi}{3}) + i\sin(\dfrac{\pi}{3})\right)$