Convexité

Analyse - Cours

I Définition

1. Théorème :
Soit f une fonction dérivable deux fois sur un intervalle I. Si la fonction dérivée f' est croissante sur I alors la courbe f se situe au dessus de toutes ses tangentes sur I.

Définition :
Une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I est dite convexe si elle vérifie les trois proposition suivantes.

2. Théorème :
Pour toute fonction f dérivable deux fois sur un intervalle I, alors les trois propositions suivantes sont équivalentes :

(i) La fonction dérivée f est croissante sur I.
(ii) La courbe de f se situe au dessus de toutes ses tangentes sur I.
(iii) La dérivée seconde f'' est positive sur I.

Exemples :

— La fonction carrée : $\forall x \in \mathbb{R} : f(x) = x^2 \quad ; \quad f'(x) = 2x \quad ; \quad f''(x) = 2 > 0$
La dérivée seconde f'' est positive sur $\mathbb{R}$ donc f est convexe sur $\mathbb{R}$.
— La fonction exponentielle : $\forall x \in \mathbb{R} : f(x) = e^x \quad ; \quad f'(x) = e^x \quad ; \quad f''(x) = e^x > 0$
La dérivée seconde f'' est positive sur $\mathbb{R}$ donc f est convexe sur $\mathbb{R}$.
— La fonction inverse : $\forall x \in \mathbb{R}^* : f(x) = \dfrac{1}{x} \quad ; \quad f'(x) = \dfrac{-1}{x^2} \quad ; \quad f''(x) = \dfrac{2}{x^3} > 0$
Pour tout $x > 0$, $f'' > 0$ donc f est convexe sur $\mathbb{R}$.

Définition :
Une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I est dite concave si elle vérifie les trois proposition suivantes.

3. Théorème :
Pour toute fonction f dérivable deux fois sur un intervalle I, alors les trois propositions suivantes sont équivalentes :

(i) La fonction dérivée f est décroissante sur I.
(ii) La courbe de f se situe en dessous de toutes ses tangentes sur I.
(iii) La dérivée seconde f'' est négative sur I.

Exemples :

— La fonction inverse est concave sur $]-\infty; 0[$ car $f''(x) = \dfrac{2}{x^3} < 0$ pour tout $x < 0$
— La fonction racine carrée : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f(x) = \sqrt{x} \quad ; \quad f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \quad ; \quad f''(x) = \dfrac{-\frac{1}{\sqrt{x}}}{(2\sqrt{x})^2} < 0$
La dérivée seconde f'' est négative sur $\mathbb{R}_+^*$ donc f est concave sur $\mathbb{R}_+^*$.
— La fonction logarithme népérien : $\forall x \in \mathbb{R}_+^* : f(x) = \ln(x) \quad ; \quad f'(x) = \dfrac{1}{x} \quad ; \quad \dfrac{-1}{x^2} < 0$
La dérivée seconde f'' est négative sur $\mathbb{R}_+^*$ donc f est concave sur $\mathbb{R}_+^*$.

> **Définition :**
> Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I. Soit $a \in I$. On dit que le point de corrdonnées $(a; f(a))$ est un point d'inflexion de la courbe de f si f'' change de signe en s'annulant en a.

Remarque : Le point d'inflexion est un point où la courbe de f traverse sa tangente.
Exemple :

La fonction cube : $\forall x \in \mathbb{R} : f(x) = x^3 \quad ; \quad f'(x) = 3x^2 \quad ; \quad f''(x) = 6x$
Ici, f'' change de signe en s'annulant en $x = 0$, donc le point $(0, 0)$ est un point d'inflexion de la courbe f.

Conclusion : f est $\begin{cases} \text{concave sur }]-\infty; 0] \\ \text{convexe sur }]0; +\infty[\end{cases}$

Remarque : Les points d'inflexion correspondent à l'endroit où la convexité de la courbe change (passe de concave à convexe ou l'inverse)