Les suites

1$^{\text{re}}$ Spécialité mathématiques
Algèbre - Cours

I. Généralités

1. Introduction

Définitions :
Une suite numérique u est une fonction $u : n \mapsto u(n)$ définie pour tout entier naturel n (ou tout entier naturel $n \geq k$, k étant un entier naturel).

- $u(n)$ ou u_n s'appelle le terme de rang n (ou le terme général de la suite).
- u désigne la suite elle-même, elle peut être noté aussi (u_n).
- n est l'indice (ou le rang).
- u_{n-1} est le terme précédant u_n.
- u_{n+1} est le terme suivant u_n.
- u_0 (ou parfois u_1) est le terme initial (ou le premier terme).

2. Différents modes de génération d'une suite

Définition :
Une suite est définie de façon explicite lorsqu'on peut calculer n'importe quel terme de la suite directement en fonction de n.

Exemple :
Soit la suite u définie par $u_n = 12 + 2n$ pour tout entier naturel.
On calcule ses premiers termes :

$u_0 = 12 + 2 \times 0 = 12$ $\quad$ $u_3 = 12 + 2 \times 3 = 18$
$u_1 = 12 + 2 \times 1 = 14$ $\quad$ $u_4 = 12 + 2 \times 4 = 20$
$u_2 = 12 + 2 \times 2 = 16$ $\quad$ $u_5 = 12 + 2 \times 5 = 22$

Définition :
Lorsqu'une suite est définie par la donnée de son premier terme et d'une relation qui permet de calculer chaque terme en fonction du terme précédent, on dit que la suite est définie par récurrence. On donne l'expression de u_{n+1} en fonction de u_n.
Cette relation s'appelle relation (ou formule) de récurrence.

Exemple :
Soit F la suite définie par $\begin{cases} F_0 = 0 \\ F_1 = 1 \\ F_{n+1} = F_{n-1} + F_{n-2} \end{cases}$ pour tout $n \geq 2$.

Cette suite s'appelle la suite de Fibonacci. Elle est définie par une relation de récurrence d'ordre 2, c'est à dire que chaque terme de la suite est la somme des deux termes qui le précèdent.

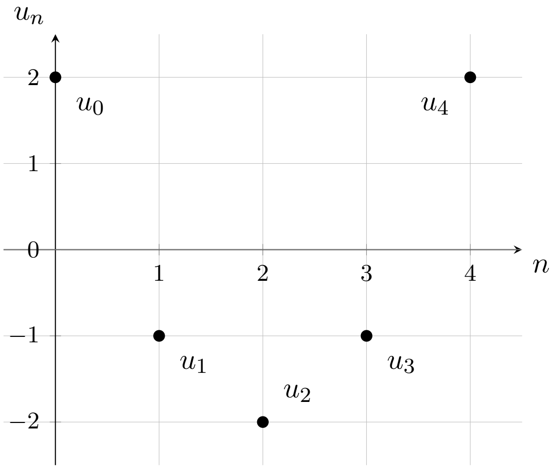
$F_2 = 1 + 0 = 1$ $\quad$ $F_4 = 2 + 1 = 3$ $\quad$ $F_6 = 5 + 3 = 8$ $\quad$ $F_8 = 13 + 8 = 21$
$F_3 = 1 + 1 = 2$ $\quad$ $F_5 = 3 + 2 = 5$ $\quad$ $F_7 = 8 + 5 = 13$ $\quad$ $F_9 = 21 + 13 = 34$

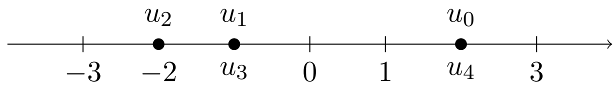
3. Représentation graphique d'un suite

Une suite u peut être représentée :

- en plaçant les points de coordonnées (n, u_n) dans un repère (on appelle cet ensemble nuage de points).
- en plaçant les réels u_0, u_1, $u_2 \dots$ sur une droite graduée.

Exemple :
On représente la suite u définie pour tout entier naturel n par $u_n = n^2 - 4n + 2$.
On a $u_0 = 2$, $u_1 = -1$, $u_2 = -2$, $u_3 = -1$ et $u_4 = 2$.





4. Sens de variation d'une suite

Définition :
Soit une suite u définie sur $\mathbb{N}$.

- Dire que u est strictement croissante signifie que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n+1} > u_n$.
- Dire que u est strictement décroissante signifie que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n+1} < u_n$.
- Dire que u est constante signifie que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n+1} = u_n$.

Remarques :

- Lorsqu'une suite est croissante ou décroissantes, on dit qu'elle est monotone.
- Pour étudier le sens de variation d'une suite, on peut :
  1. calculer la différence $u_{n+1} - u_n$ et étudier son signe.
  2. pour une suite positive, calculer le quotient $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ et étudier sa position par rapport à 1.
  3. pour une suite définie de façon explicite par $u_n = f(n)$, utiliser le sens de variation de f.

Exemple :
Soit u définie par $u_n = \frac{1}{3^n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$ donc on utilise la deuxième méthode.

On calcule $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{\frac{1}{3^{n+1}}}{\frac{1}{3^n}} = \dfrac{1}{3^{n+1}} \times \dfrac{3^n}{1} = \dfrac{3^n}{3^{n+1}} = \dfrac{\overbrace{3 \times 3 \times \dots \times 3}^{n \text{ fois}} \times 1}{\underbrace{3 \times 3 \times \dots \times 3 \times 3}_{n+1 \text{ fois}}} = \dfrac{1}{3}$

II. Suites arithmétiques et géométriques

1. Suites arithmétiques

Définition :
On dit que la suite u est arithmétique si, à partir de son premier terme, chaque terme est obtenu en ajoutant au précédent un même nombre appelé raison.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + r$

Remarque : Une suite est arithmétique si $u_{n+1} - u_n = r$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

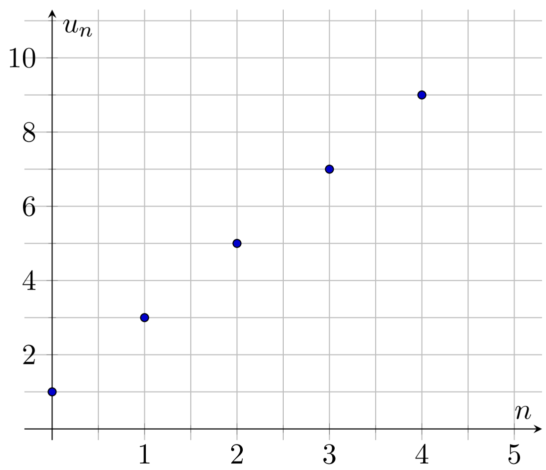
Propriété ***(formule explicite)***:
Soit u une suite arithmétique de raison r.
Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 + nr$.
Plus généralement, pour tout entier n et p, $u_n = u_p + (n-p)r$

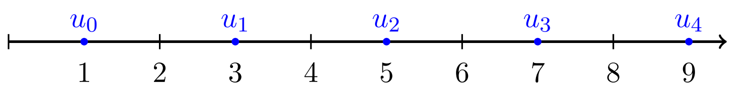
Théorème ***(sens de variation)*** **:**
Soit u une suite arithmétique de raison r.

- Si $r > 0$, la suite u est strictement croissante.
- Si $r < 0$, la suite u est strictement décroissante.
- Si $r = 0$, la suite u est constante.

Propriété ***(représentation graphique)*** **:**
La représentation graphique d'une suite arithmétique est un nuage de points situé sur une droite d'équation $y = u_0 + xr$.

Exemple :
On représente la suite arithmétique de premier terme $u_0 = 1$ et de raison $r = 2$:





Théorème ***(calculs de sommes de termes consécutifs)*** **:**
Soit n un entier naturel non nul.
Alors la somme des n premiers termes non nuls est $1 + 2 + 3 + ... + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

Exemple :

$$\begin{aligned} \text{On calcule } S &= 1 + 2 + 3 + \cdots + 1\ 000 \\ &= \frac{1\ 000(1\ 000 + 1)}{2} \\ &= 500\ 500 \end{aligned}$$

2. Suites géométriques

Définition :
On dit que la suite u est géométrique si, à partir de son premier terme, chaque terme est obtenu en multipliant le précédent par un même nombre appelé raison.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n \times q$

Remarque : Une suite est géométrique si $\frac{u_{n+1}}{u_n} = q$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

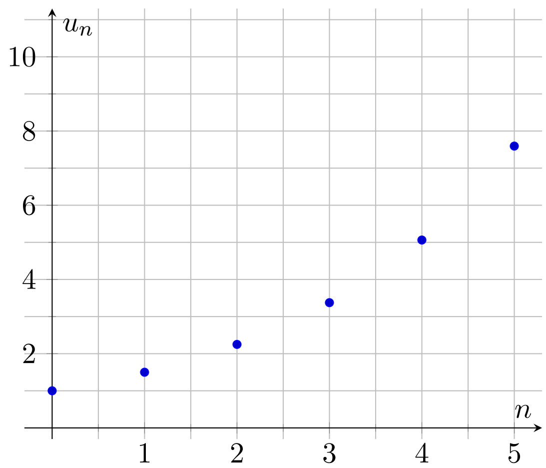
Propriété ***(formule explicite)*** **:**
Soit u une suite géométrique de raison q.
Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 \times q^n$.
Plus généralement, pour tout entier n et p, $u_n = u_p \times q^{n-p}$

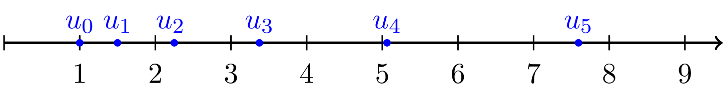
Théorème ***(sens de variation)*** **:**
Soit u une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0 strictement positif.

- Si $q > 1$, la suite u est strictement croissante.
- Si $q = 1$, la suite u est constante, égal à u_0.
- Si $0 < q < 1$, la suite u est strictement décroissante.
- Si $q = 0$, la suite u est constante égale à 0, à partir du rang 1.
- Si $q < 0$, la suite u n'est ni croissante ni décroissante.

Propriété ***(représentation graphique)*** **:**
La représentation graphique d'une suite géométrique est un nuage de points situé sur la courbe d'une fonction exponentielle.

Exemple :
On représente la suite géométrique de premier terme $u_0 = 1$ et de raison $q = 1,5$:





Théorème ***(calculs de sommes de termes consécutifs) :***
Soit n un entier naturel non nul et q un réel différent de 1.
Alors $1 + q + q^2 + ... + q^n = \dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$.

Exemple :
On calcule
$$\begin{aligned} S &= 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{10} \\ &= \frac{1 - 2^{11}}{1 - 2} \\ &= 2\ 047 \end{aligned}$$

III. Suites minorées et majorées

Définition :
Soit u une suite.

- On dit que u est minorée s'il existe un réel m tel que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \geq m$. On dit que m est un minorante de la suite.
- On dit que u est majorée s'il existe un réel M tel que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \leq m$. On dit que M est un majorant de la suite.

Remarques :

- Une suite croissante est nécesairement minorée par son terme initial : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq u_0$.
- Une suite décroissante est nécesairement majorée par son terme initial : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq u_0$.

Exemple :

- On pose $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{-1}{n}$.
  La suite (u) est strictement croissante car $\forall n \in \mathbb{N}^*, n < n+1 \Rightarrow \frac{1}{n} > \frac{1}{n+1} \Rightarrow \frac{-1}{n} < \frac{-1}{n+1}$.
  Donc (u) est majorée par 0 : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{-1}{n} \leq 0$.
- On pose $u_n = \begin{cases} -n \text{ si } n \text{ pair} \\ n \text{ si } n \text{ impair} \end{cases}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. La suite(u) n'est ni minorée ni majorée.

IV. Propositions héréditaires et démonstrations par récurrence

Définition :
Soit $P(n)$ un prédicat de n.
On dit que P est héréditaires si la proposition « $\forall n \in \mathbb{N},\ P(n) \Rightarrow P(n+1)$ » est vérifiée.

Exemple :

- Soit $P(n)$: « $n^2 > 10$ » pour tout $n \in \mathbb{N}$. $P(0)$, $P(1)$, $P(2)$ et $P(3)$ sont fausses.
  Ensuite, $P(4)$, $P(5)$, etc sont vraies et ceci pour tout $n \geq 4$ (preuve : $f(x) = x^2$ est croissante sur $[0; +\infty[$ et $f(4) = 16$).
  Donc P est héréditaires.
- Soit $P(n)$: « $\frac{6}{n+1} > 1,1$ » pour tout $n \in \mathbb{N}$. $P(0)$, $P(1)$, $P(2)$ $P(3)$ et $P(4)$ sont vraies.
  Ensuite, $P(5)$, $P(6)$, etc sont fausses et ceci pour tout $n \geq 5$ (preuve : si $n \geq 5$, alors $n+1 \geq 6$ donc $\frac{6}{n+1} \leq \frac{6}{6} = 1$).
  Donc P n'est pas héréditaires car $P(4)$ est vraie mais $P(5)$ est fausse ce qui contredit « $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ ».

Théorème :
Soit $P(n)$ un prédicat de n. On suppose que $P(n)$ est héréditaire.
Deux cas sont alors possibles :

- $P(n)$ est fausse pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- il existe un entier n_0 tel que $P(n)$ soit vraie pour tout entier $n \geq n_0$.

Remarque : Faire une « démonstration par récurrence » consiste à prouver qu'une proposition P est héréditaire et trouver un entier n_0 pour lequelle $P(n_0)$ est vraie.
Le principe de récurrence permet alors de conclure que pour tout entier naturel $n \geq n_0$, $P(n)$ est vraie.

Exemple d'une démonstration par récurrence :

Soit la suite $\left\{ \begin{array}{l} u_0 = 3 \\ u_n + 1 = \frac{u_n}{2} + 1 \end{array} \right.$.

Nommons $P(n)$: « $u_n \leq 3$ ».

- Initialisation :
  $P(0)$ est vraie car $u_0 = 3$.

- Hérédité :
  Montrons que P est héréditaire.
  Soit n un entier naturel. Supposons $P(n)$:
  On a $u_n \leq 3$
  donc $\dfrac{u_n}{2} \leq 1,5$
  donc $\dfrac{u_n}{2} + 1 \leq 2,5$
  donc $\dfrac{u_n}{2} + 1 \leq 2,5 \leq 3$
  donc $u_{n+1} \leq 3$ donc $P(n+1)$

- Conclusion :
  Par principe de récurrence, comme P est héréditaire et vraie au rang 0, on déduit que pour tout $n \geq 0$, $P(n)$ est vraie.
  Autrement dit, pour tout $n \geq 0$, $u_n \leq 3$.

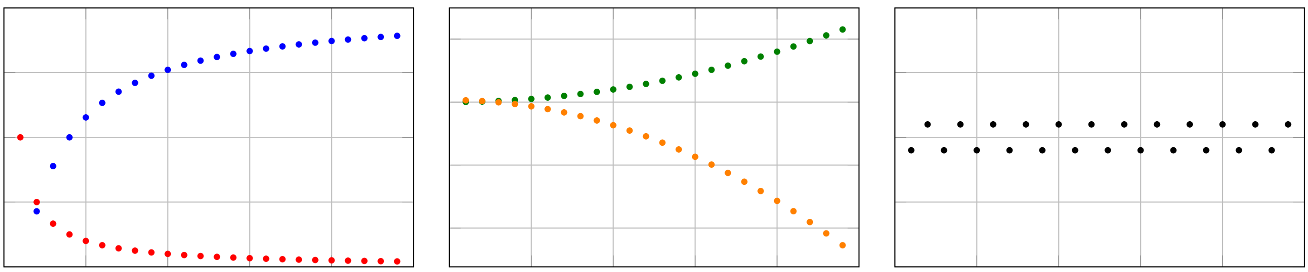
Remarque : En math, supposer $\neq$ admettre. Lorsqu'on suppose, on attribut temporairement la valeur de vérité « vrai » à une proposition (on suppose souvent lors de démonstrations) tandis que lorsqu'on admet, on suppose de manière définitive (ex : on admet des théorèmes lorsqu'ils sont trop complexes pour être démontrés).

V. Comportement d'une suite à l'infini

S'intéresser à la limite d'une suite, c'est étudier le comportement des termes u_n quand on donne des valeurs à n aussi grandes que l'on veut, ce qui se dit aussi : « quand n tend vers l'infini ».

On s'intéresse aux suite u, v, w, x et t définies pour tout entier naturel n par :

$$u_n = \frac{1}{n} \qquad v_n = \frac{4n-5}{2n+3} \qquad w_n = n^2 \qquad x_n = 16 - 2n^2 \qquad t_n = (-1)^n$$



Limite finie

- On écrit $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$ ce qui signifie que u_n peut être aussi proche de 0 que l'on veut, pourvue que n soit assez grand.
  On le note : $\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n > n_0, |u_n| < \epsilon$

- On écrit $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 2$ ce qui signifie que v_n peut être aussi proche de 2 que l'on veut, pourvue que n soit assez grand.
  On le note : $\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n > n_0, |v_n - 2| < \epsilon$

Limite infinie

- On écrit $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n = +\infty$ ce qui signifie que w_n peut être aussi grand que l'on veut, pourvue que n soit assez grand.
  On le note : $\forall A > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n > n_0, w_n > A$
- On écrit $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = -\infty$ ce qui signifie que w_n peut être aussi petit que l'on veut, pourvue que n soit assez grand.
  On le note : $\forall A > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n > n_0, x_n < A$

Pas de limite

- La suite (t_n) n'a pas de limite car $t_n = (-1)^n = \left\{ \begin{array}{l} 1 \text{ si } n \text{ est pair} \\ -1 \text{ si } n \text{ est impair} \end{array} \right.$.