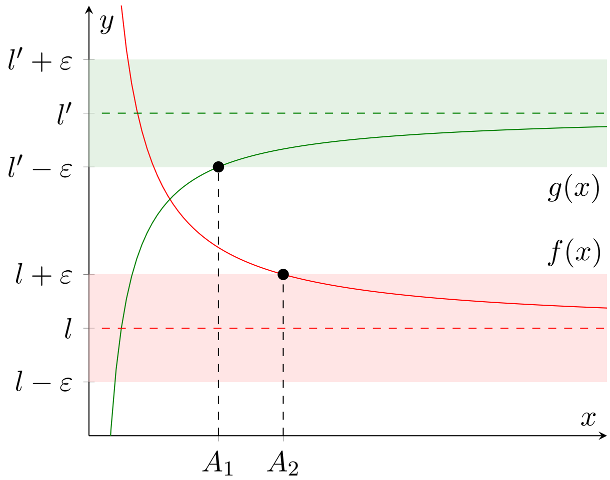
Les limites

Tle Spécialité mathématiques
Analyse - Démonstrations

1 Limites finies d'une fonction en $+\infty$

Démonstration du Théorème 1 :



On choisit ε tel que $l+\varepsilon < l'-\varepsilon$.
En supposant que f tend vers l : il existe A_1 tel que pour tout $x > A_1$: $l-\varepsilon < f(x) < l+\varepsilon$.
En supposant que g tend vers l' : il existe A_2 tel que pour tout $x > A_2$: $l'-\varepsilon < g(x) < l'+\varepsilon$.
En prenant $A = \max(A_1, A_2)$, pour tout $x > A$ on a :

- $x > A_1$ donc $f(x) < l+\varepsilon$
- $x > A_2$ donc $g(x) > l'-\varepsilon$

Donc $f(x) < l+\varepsilon < l'-\varepsilon < g(x)$ donc $f(x) < g(x)$.

Démonstration du Théorème 2 :

Par l'absurde, supposons que $l > l'$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = l'$ et il existe A réel tel que pour tout $x > A$: $f(x) \leq g(x)$.
D'après le Théorème 1, sous les hypothèses ci-dessus, il existe un réel A' tel que pour tout $x > A'$, $f(x) > g(x)$.
Ceci entre en contradiction avec la 4^e hypothèse $(f(x) \leq g(x))$. Conclusion : $l < l'$.