

La fonction exponentielle

1^{re} Spécialité mathématiques
Analyse - Démonstrations

I. Généralités sur la fonction exponentielle

2. Propriétés algébriques

Démonstration (lemme) :

Pour tout réel x , on pose $\varphi(x) = \exp(x) \times \exp(-x)$.

Calculons $\varphi'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$.

avec $u(x) = \exp(x)$ $u'(x) = \exp(x)$

$v(x) = \exp(-x)$ $v'(x) = -\exp(-x)$ (du type $ag'(ax+b)$)

$$\begin{aligned}\text{Donc } \varphi'(x) &= \exp(x) \exp(-x) + \exp(x)(-\exp(-x)) \\ &= \exp(x) \exp(-x) - \exp(x) \exp(-x) \\ &= 0\end{aligned}$$

Donc φ est une fonction constante.

$$\begin{aligned}\text{En particulier } \varphi(x) &= \varphi(0) \text{ pour tout réel } x \\ &= \exp(0) \times \exp(0) \\ &= 1 \times 1 = 1\end{aligned}$$

Donc $\exp(x) \exp(-x) = 1$ pour tout réel x .

Donc $\exp(x) \neq 0$ pour tout réel x .

Démonstration (relation fonctionnelle) :

Soit $y \in \mathbb{R}$. Soit $f : x \mapsto \frac{\exp(x+y)}{\exp(x)}$ définie sur \mathbb{R} car $\exp(x) \neq 0$ pour tout x .

Calculons $f'(x)$.

Posons $u(x) = \exp(x+y)$ $u'(x) = \exp(x+y)$ (du type $ag'(ax+b)$)

$v(x) = \exp(x)$ $v'(x) = \exp(x)$

$$\begin{aligned}\text{Donc } f'(x) &= \frac{\exp(x+y) \exp(x) - \exp(x+y) \exp(x)}{(\exp(x))^2} \\ &= 0\end{aligned}$$

Donc f est une fonction constante sur \mathbb{R} .

$$\begin{aligned}\text{Donc } f(x) &= f(0) \\ &= \frac{\exp(y)}{\exp(0)} \\ &= \exp(y) \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Donc $\frac{\exp(x+y)}{\exp(x)} = \exp(y)$ d'où $\exp(x+y) = \exp(x) \times \exp(y)$ pour tout réels x et y .

- Pour $\exp(-x)$:

$$\begin{aligned}\exp(x + (-x)) &= \exp(x) \times \exp(-x) \\ \Leftrightarrow \exp(0) &= \exp(x) \times \exp(-x) \\ \Leftrightarrow 1 &= \exp(x) \times \exp(-x) \\ \Leftrightarrow \exp(-x) &= \frac{1}{\exp(x)}\end{aligned}$$

- Pour $\exp(x - y)$:

$$\begin{aligned}\exp(x - y) &= \exp(x + (-y)) \\ &= \exp(x) \times \exp(-y) \\ &= \exp(x) \times \frac{1}{\exp(y)} \\ &= \frac{\exp(x)}{\exp(y)}\end{aligned}$$

- Pour $\exp(nx)$:

$$\begin{aligned}\exp(nx) &= \exp(\underbrace{x + x + \cdots + x}_{n \text{ fois}}) \text{ avec } n \in \mathbb{N} \\ &= \underbrace{\exp(x) \times \exp(x) \times \cdots \times \exp(x)}_{n \text{ fois}} \\ &= (\exp(x))^n\end{aligned}$$

4. Lien avec les suites géométriques

Démonstration :

Soit a un réel.

Soit u la suite définie pour tout entier naturel n par $u_n = e^{na}$.

$$\begin{aligned}\text{Calculons } \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{e^{(n+1)a}}{e^{na}} \\ &= e^{na+a-na} \\ &= e^a\end{aligned}$$

Donc la suite u est géométrique de raison $q = e^a$.

II. Étude et applications de la fonction exponentielle

1. Signe de la fonction exponentielle

Démonstration :

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x = (e^{\frac{x}{2}})^2$.

Donc $e^x > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

2. Variations de la fonction exponentielle

Démonstration :

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\exp'(x) = \exp(x)$ et $\exp(x) > 0$.

Donc la fonction \exp est strictement croissante sur \mathbb{R} .

4. Fonctions définies par $f(t) = e^{kt}$ avec $k \in \mathbb{R}$

Démonstration :

On a $k \in \mathbb{R}$. Soit $f : t \mapsto e^{kt}$.

Calculons $f'(t)$.

On a $f : t \mapsto kt \mapsto e^{kt}$.

Donc $f(t) = g(ax + b)$ avec $a = k$ $g = \exp$

$b = 0$ $g' = \exp$

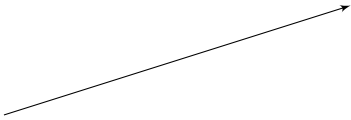
Donc $f'(t) = ag'(ax + b)$

$= k \exp(kt)$

$= ke^{kt}$

Donc $f'(t)$ est du signe de k .

Si $k > 0$:

t	$-\infty$	$+\infty$
Signe de $f'(t)$	+	
Variations de $f(t)$		

Si $k < 0$:

t	$-\infty$	$+\infty$
Signe de $f'(t)$	-	
Variations de $f(t)$	