

# Le second degré

1<sup>re</sup> Spécialité mathématiques  
Algèbre - Démonstrations

## I. Les fonctions polynômes du second degré

### 1. Forme canonique

Démonstration :

$$\begin{aligned}\text{Soit } f(x) &= ax^2 + bx + c \\ &= a \left[ x^2 + \frac{b}{a}x \right] + c \\ &= a \left[ x^2 + \frac{2b}{2a}x + \left( \frac{b}{2a} \right)^2 - \left( \frac{b}{2a} \right)^2 \right] + c \\ &= a \left[ \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} \right] + c \\ &= a \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c \\ &= a(x - \alpha) + \beta \text{ avec } \alpha = \frac{-b}{2a} \text{ et } \beta = \frac{-b^2}{4a} + c = f(\alpha)\end{aligned}$$

### 2. Sens de variation

Démonstration de la propriété sur le sens de variation :

- 1<sup>er</sup> cas :  $a > 0$

Soient  $x_1$  et  $x_2$  deux réels de l'intervalle  $] -\infty; \alpha[$  tels que  $x_1 < x_2 < \alpha$ .

$$\begin{aligned}x_1 - \alpha &< x_2 - \alpha < 0 \\ (x_1 - \alpha)^2 &> (x_2 - \alpha)^2 \text{ car } x_1 - \alpha \text{ et } x_2 - \alpha \text{ sont négatifs} \\ a(x_1 - \alpha)^2 &> a(x_2 - \alpha)^2 \text{ car } a > 0 \\ a(x_1 - \alpha)^2 + \beta &> a(x_2 - \alpha)^2 + \beta \\ f(x_1) &> f(x_2)\end{aligned}$$

Donc  $f$  est strictement décroissante sur  $] -\infty; \alpha[$ .

Soient  $x_1$  et  $x_2$  deux réels de l'intervalle  $[\alpha; \infty[$  tels que  $\alpha < x_1 < x_2$ .

$$\begin{aligned}0 &\leq x_1 - \alpha < x_2 - \alpha \\ (x_1 - \alpha)^2 &< (x_2 - \alpha)^2 \text{ car } x_1 - \alpha \text{ et } x_2 - \alpha \text{ sont positifs} \\ a(x_1 - \alpha)^2 &< a(x_2 - \alpha)^2 \text{ car } a > 0 \\ a(x_1 - \alpha)^2 + \beta &< a(x_2 - \alpha)^2 + \beta \\ f(x_1) &< f(x_2)\end{aligned}$$

Donc  $f$  est strictement croissante sur  $[\alpha; \infty[$ .

- 2<sup>ème</sup> cas :  $a < 0$

Soient  $x_1$  et  $x_2$  deux réels de l'intervalle  $] -\infty; \alpha[$  tels que  $x_1 < x_2 < \alpha$ .

$$x_1 - \alpha < x_2 - \alpha < 0$$

$$(x_1 - \alpha)^2 > (x_2 - \alpha)^2 \text{ car } x_1 - \alpha \text{ et } x_2 - \alpha \text{ sont positifs}$$

$$a(x_1 - \alpha)^2 < a(x_2 - \alpha)^2 \text{ car } a < 0$$

$$a(x_1 - \alpha)^2 + \beta < a(x_2 - \alpha)^2 + \beta$$

$$f(x_1) < f(x_2)$$

Donc  $f$  est strictement croissante sur  $] -\infty; \alpha[$ .

Soient  $x_1$  et  $x_2$  deux réels de l'intervalle  $[\alpha; \infty[$  tels que  $\alpha < x_1 < x_2$ .

$$0 \leq x_1 - \alpha < x_2 - \alpha$$

$$(x_1 - \alpha)^2 < (x_2 - \alpha)^2 \text{ car } x_1 - \alpha \text{ et } x_2 - \alpha \text{ sont positifs}$$

$$a(x_1 - \alpha)^2 > a(x_2 - \alpha)^2 \text{ car } a < 0$$

$$a(x_1 - \alpha)^2 + \beta > a(x_2 - \alpha)^2 + \beta$$

$$f(x_1) > f(x_2)$$

Donc  $f$  est strictement décroissante sur  $[\alpha; \infty[$ .

## II. Factorisation d'une fonction du second degré et équation du second degré

### 1-2. Factorisation - Résolution des équation du second degré

Démonstration :

Pour  $f(x) = ax^2 + bx + c$ , on a vu que  $f(x)$  peut s'écrire sous la forme  $f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right) + \frac{-b}{4a} + c$ .

$$\begin{aligned} \text{Donc } f(x) &= a\left(x + \frac{b}{2a}\right) + \frac{-b}{4a} + \frac{4ac}{4a} \\ &= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{-b^2}{4a^2} + \frac{4ac}{4a^2}\right] \\ &= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right] \text{ On pose } \Delta = -b^2 - 4ac \\ &= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] \end{aligned}$$

- 1<sup>er</sup> cas :  $\Delta < 0$

Si  $\Delta < 0$  alors  $f(x) > 0$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$  (si  $a > 0$ ) ou  $f(x) < 0$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$  (si  $a < 0$ ).

Donc  $f(x) = 0$  n'admet pas de solution et  $f(x)$  n'est pas factorisable.

- 2<sup>ème</sup> cas :  $\Delta = 0$

Si  $\Delta = 0$  alors  $f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$  ou  $f(x) = a(x - \alpha)^2$  avec  $\alpha = -\frac{b}{2a}$ .

Donc l'équation  $f(x) = 0$  admet une solution (double)  $\alpha$  et  $f(x)$  est factorisable ou  $f(x) = a(x - \alpha)^2$ .

- 3<sup>ème</sup> cas :  $\Delta > 0$

$$\begin{aligned}
 \text{Si } \Delta > 0 \text{ alors } f(x) &= a \left[ \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \left( \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \right)^2 \right] \\
 &= a \left( x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \right) \left( x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \right) \\
 &= a \left( x - \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \right) \left( x - \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \right)
 \end{aligned}$$

Donc  $f(x)$  est factorisable en  $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$  avec  $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$  et  $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ .  
L'équation  $f(x) = 0$  admet deux solutions  $x_1$  et  $x_2$ .

### 3. Somme et produit des racines

Démonstration :

$$\begin{aligned}
 \text{Calculons } x_1 + x_2 &= \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \\
 &= \frac{-b - \sqrt{\Delta} - b + \sqrt{\Delta}}{2a} \\
 &= \frac{-2b}{2a} = \frac{-b}{a}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Calculons } x_1 \times x_2 &= \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \times \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \\
 &= \frac{(-b - \sqrt{\Delta})(-b + \sqrt{\Delta})}{4a^2} \\
 &= \frac{(-b)^2 - (\sqrt{\Delta})^2}{4a^2} \\
 &= \frac{b^2 - \Delta}{4a^2} \\
 &= \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} \\
 &= \frac{b^2 - b^2 + 4ac}{4a^2} \\
 &= \frac{c}{a}
 \end{aligned}$$