

# Fonctions dérivées et applications

1<sup>re</sup> Spécialité mathématiques  
Analyse - Cours

## I. Fonctions dérivées

### 1. Définition

#### Définition :

Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$ .

Si, pour tout réel  $a$  de  $I$ , le nombre dérivé  $f'(a)$  existe, on dit que la fonction  $f$  est dérivable sur  $I$ .

On appelle fonction dérivée de  $f$  sur  $I$  la fonction qui, à tout réel  $x \in I$  associe le réel  $f'(x)$ .

On la note  $f'$ .

### 2. Dérivées des fonctions usuelles

#### Propriétés :

La fonction $f$ est définie par...	$f$ est définie sur...	$f$ est dérivable sur...	La fonction dérivable $f'$ est définie par...
$f(x) = k$ ( $k \in \mathbb{R}$ ) Fonction constante	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 0$
$f(x) = ax + b$ ( $a$ et $b$ réels) Fonction affine	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = a$
$f(x) = x^2$ Fonction carrée	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 2x$
$f(x) = x^3$ Fonction cube	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 3x^2$
$f(x) = x^n$ ( $x \in \mathbb{N}^*$ ) Fonction puissance	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = nx^{n-1}$
$f(x) = \frac{1}{x}$ Fonction inverse	$] - \infty; 0[ \cup ] 0; +\infty[$	$] - \infty; 0[ \cup ] 0; +\infty[$	$f'(x) = \frac{-1}{x^2}$
$f(x) = \frac{1}{x^n}$ ( $x \in \mathbb{N}^*$ ) Fonction inverse d'une puissance	$] - \infty; 0[ \cup ] 0; +\infty[$	$] - \infty; 0[ \cup ] 0; +\infty[$	$f'(x) = \frac{-n}{x^{n+1}}$
$f(x) = \sqrt{x}$ Fonction racine carrée	$[0; +\infty[$	$] 0; +\infty[$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

## II. Opérations sur les fonctions dérivables

### Propriété :

Soient  $u$  et  $v$  deux fonctions dérivables sur un intervalle  $I$ , et  $k$  un nombre réel.

Les fonctions suivantes sont dérivables sur  $I$  de fonctions dérivées :

Fonction	Fonction dérivée
Somme $u + v$	$(u + v)' = u' + v'$
Produit par un réel $ku$	$(ku)' = ku'$
Produit $uv$	$(uv)' = u'v + uv'$
Quotient $\frac{u}{v}$	$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

### Exemples :

Soit  $f(x) = 3x\sqrt{x}$  sur  $I = ]0; +\infty[$ .

Posons  $u(x) = 3x$  et  $v(x) = \sqrt{x}$ .

On a  $u(x)' = 3$  et  $v(x)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ .

On a  $(uv)' = u'v + uv'$ .

Donc  $f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$

$$\begin{aligned}
 &= 3\sqrt{x} + 3x \times \frac{1}{2\sqrt{x}} \\
 &= 3\sqrt{x} + \frac{3x}{2\sqrt{x}} \times \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \\
 &= 3\sqrt{x} + \frac{3x\sqrt{x}}{2x} \\
 &= 3\sqrt{x} + 1,5\sqrt{x} = 4,5\sqrt{x}
 \end{aligned}$$

Soit  $g(x) = \frac{2x-1}{x-5}$  sur  $I = ]-\infty; 5[ \cup ]5; +\infty[$ .

Posons  $u(x) = 2x - 1$  et  $v(x) = x - 5$ .

On a  $u(x)' = 2$  et  $v(x)' = 1$ .

On a  $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ .

$$\begin{aligned}
 \text{Donc } g'(x) &= \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{[v(x)]^2} \\
 &= \frac{2(x-5) - (2x-1) \times 1}{(x-5)^2} \\
 &= \frac{2x - 10 - 2x + 1}{(x-5)^2} \\
 &= \frac{-9}{(x-5)^2}
 \end{aligned}$$

### Propriété admise :

On considère un intervalle  $I$  et  $a$  et  $b$  deux réels.

Soit  $J$  l'intervalle formé des valeurs prises par  $ax + b$  lorsque  $x$  décrit l'intervalle  $I$ .

Si la fonction  $g$  est dérivable sur  $J$ , alors la fonction  $f$  définie sur  $I$  par  $f(x) = g(ax + b)$  est dérivable sur  $I$  et, pour tout réel  $x$  de  $I$ , on a  $f'(x) = a \times g'(ax + b)$ .

### Exemple :

Soit  $f$  définie sur  $[-\frac{2}{5}; +\infty[$  par  $f(x) = \sqrt{5x + 2}$

On a  $f : x \rightarrow 5x + 2 \rightarrow \sqrt{5x + 2}$

La fonction  $f$  est de la forme  $f(x) = g(ax + b)$  avec  $a = 5$ ,  $b = 2$  et  $g : x \mapsto \sqrt{x}$

Donc  $f'(x) = ag'(ax + b)$  avec  $g' : x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$$\begin{aligned}
 &= 5 \times \frac{1}{\sqrt{5x + 2}} \\
 &= \frac{5}{\sqrt{5x + 2}}
 \end{aligned}$$

Pour tout  $x \in [-\frac{2}{5}; +\infty[$ ,  $5x + 2 \in [0; +\infty[$ .

Or  $g$  est dérivable sur  $]0; +\infty[$ .

Donc  $f$  est dérivable sur  $[-\frac{2}{5}; +\infty[$ .

### III. Application de la dérivation

#### 1. Étude des variations d'une fonction

**Théorème admis :**

Soit  $f$  une fonction dérivable sur un intervalle  $I$ , de fonction dérivée  $f'$ .

- Si  $f$  est croissante sur  $I$ , alors  $f'$  est positive sur  $I$ .
- Si  $f$  est décroissante sur  $I$ , alors  $f'$  est négative sur  $I$ .
- Si  $f$  est constante sur  $I$ , alors  $f'$  est nulle sur  $I$ .

**Théorème réciproque admis :**

Soit  $f$  une fonction dérivable sur un intervalle  $I$ , de fonction dérivée  $f'$ .

- Si  $f'$  est strictement positive sur  $I$ , sauf pour un nombre fini de réel où elle s'annule, alors  $f$  est strictement croissante sur  $I$ .
- Si  $f'$  est strictement négative sur  $I$ , sauf pour un nombre fini de réel où elle s'annule, alors  $f$  est strictement décroissante sur  $I$ .
- Si  $f'$  est nulle sur  $I$ , alors  $f$  est constante sur  $I$ .

#### 2. Étude des extrema d'une fonction

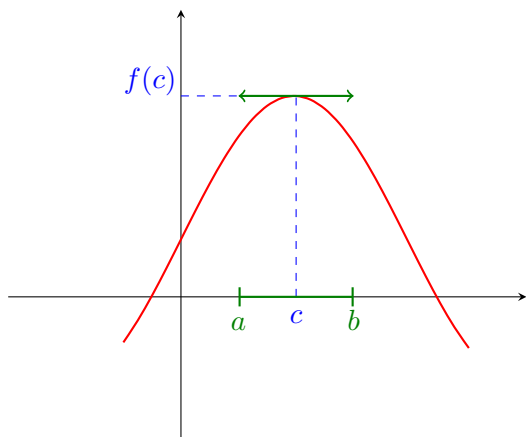
**Définition :**

Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$  et  $c$  un réel de  $I$  et qui n'est pas une borne de  $I$ .

Dire que  $f(c)$  est un maximum local de  $f$  signifie qu'il existe deux réels  $a$  et  $b$  dans  $I$  tels que  $c \in ]a; b[$  et que pour tout réel  $x \in ]a; b[$ ,  $f(x) \leq f(c)$ .

Dire que  $f(c)$  est un minimum local de  $f$  signifie qu'il existe deux réels  $a$  et  $b$  dans  $I$  tels que  $c \in ]a; b[$  et que pour tout réel  $x \in ]a; b[$ ,  $f(x) \geq f(c)$ .

Un extremum local est un minimum ou un maximum local.

**Théorème admis (condition nécessaire d'un extremum local) :**

Soit  $f$  une fonction dérivable sur un intervalle ouvert  $I$  et  $a$  un réel de  $I$ .

Si  $f$  présente un extremum local en  $a$  alors  $f'(a) = 0$ .

**Remarque :** La réciproque est fausse. En effet, pour  $f : x \mapsto x^3$  on a  $f : x \mapsto 3x^2$  donc  $f'(0) = 0$  mais  $f$  n'admet pas d'extremum local en  $O$ .

**Théorème (condition suffisante sur l'existence d'un extremum local) :**

Soit  $f$  une fonction dérivable sur un intervalle ouvert  $I$ , de dérivée  $f'$  et  $a \in I$ . Si la dérivée  $f'$  s'annule en  $a$  en changeant de signe en  $a$ , alors la fonction  $f$  admet un extremum local en  $a$ .