La fonction exponentielle

1re Spécialité mathématiques
Analyse - Démonstrations

I. Généralités sur la fonction exponentielle

2. Propriétés algébriques

Démonstration *(lemme)* :
Pour tout réel x, on pose $\varphi(x) = \exp(x) \times \exp(-x)$.

Calculons $\varphi'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$.

$$\begin{aligned}
\text{avec } & u(x) = \exp(x) & u'(x) = \exp(x) & \\
& v(x) = \exp(-x) & v'(x) = -\exp(-x) & \quad \text{(du type } ag'(ax+b)\text{)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Donc } \varphi'(x) &= \exp(x)\exp(-x) + \exp(x)(-\exp(-x)) \\
&= \exp(x)\exp(-x) - \exp(x)\exp(-x) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Donc φ est une fonction constante.

$$\begin{aligned}
\text{En particulier } \varphi(x) &= \varphi(0) \text{ pour tout réel } x \\
&= \exp(0) \times \exp(0) \\
&= 1 \times 1 = 1
\end{aligned}$$

Donc $\exp(x)\exp(-x) = 1$ pour tout réel x.
Donc $\exp(x) \neq 0$ pour tout réel x.

Démonstration *(relation fonctionnelle)* :
Soit $y \in \mathbb{R}$. Soit $f : x \mapsto \dfrac{\exp(x+y)}{\exp(x)}$ définie sur $\mathbb{R}$ car $\exp(x) \neq 0$ pour tout x.
Calculons $f'(x)$.

$$\begin{aligned}
\text{Posons } & u(x) = \exp(x+y) & u'(x) = \exp(x+y) & \quad \text{(du type } ag'(ax+b)\text{)} \\
& v(x) = \exp(x) & v'(x) = \exp(x) &
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Donc } f'(x) &= \frac{\exp(x+y)\exp(x) - \exp(x+y)\exp(x)}{(\exp(x))^2} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Donc f est une fonction constante sur $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
\text{Donc } f(x) &= f(0) \\
&= \frac{\exp(y)}{\exp(0)} \\
&= \exp(y) \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Donc $\frac{\exp(x+y)}{\exp(x)} = \exp(y)$ d'où $\exp(x+y) = \exp(x) \times \exp(y)$ pour tout réels x et y.

Démonstrations *(conséquences de la relation fonctionnelle)*

- Pour $\exp(-x)$:

$$\begin{aligned} & \exp(x+(-x)) = \exp(x) \times \exp(-x) \\ \Leftrightarrow \quad & \exp(0) = \exp(x) \times \exp(-x) \\ \Leftrightarrow \quad & 1 = \exp(x) \times \exp(-x) \\ \Leftrightarrow \quad & \exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)} \end{aligned}$$

- Pour $\exp(x-y)$:

$$\begin{aligned} \exp(x-y) &= \exp(x+(-y)) \\ &= \exp(x) \times \exp(-y) \\ &= \exp(x) \times \frac{1}{\exp(y)} \\ &= \frac{\exp(x)}{\exp(y)} \end{aligned}$$

- Pour $\exp(nx)$:

$$\begin{aligned} \exp(nx) &= \exp(\underbrace{x+x+\cdots+x}_{n \text{ fois}}) \text{ avec } n \in \mathbb{N} \\ &= \underbrace{\exp(x) \times \exp(x) \times \cdots \times \exp(x)}_{n \text{ fois}} \\ &= (\exp(x))^n \end{aligned}$$

4. Lien avec les suites géométriques

Démonstration :
Soit a un réel.
Soit u la suite définie pour tout entier naturel n par $u_n = e^{na}$.

Calculons $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{e^{(n+1)a}}{e^{na}}$

$$\begin{aligned} &= e^{na+a-na} \\ &= e^a \end{aligned}$$

Donc la suite u est géométrique de raison $q = e^a$.

II. Étude et applications de la fonction exponentielle

1. Signe de la fonction exponentielle

Démonstration :
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x = (e^{\frac{x}{2}})^2$.
Donc $e^x > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

2. Variations de la fonction exponentielle

Démonstration :
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\exp'(x) = \exp(x)$ et $\exp(x) > 0$.
Donc la fonction $\exp$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

4. Fonctions définies par $f(t) = e^{kt}$ avec $k \in \mathbb{R}$

Démonstration :
On a $k \in \mathbb{R}$. Soit $f : t \mapsto e^{kt}$.
Calculons $f'(t)$.

On a $f : t \mapsto kt \mapsto e^{kt}$.

Donc $f(t) = g(ax+b)$ avec $\begin{array}{ll} a = k & g = \exp \\ b = 0 & g' = \exp \end{array}$

$$\begin{aligned} \text{Donc } f'(t) &= ag'(ax+b) \\ &= k\exp(kt) \\ &= ke^{kt} \end{aligned}$$

Donc $f'(t)$ est du signe de k.

Si $k > 0$:

t	$-\infty$	$+\infty$
Signe de $f'(t)$	$+$	
Variations de $f(t)$	$\nearrow$	

Si $k < 0$:

t	$-\infty$	$+\infty$
Signe de $f'(t)$	$-$	
Variations de $f(t)$	$\searrow$	