Les limites

T$^{\text{le}}$ Spécialité mathématiques
Analyse - Cours

1 Limites finies d'une fonction en $+\infty$

Définition :
Soit f une fonction et l un réel. Dire que «$f(x)$ tend vers l quand x tend vers $+\infty$ » signifie
$\forall \varepsilon > 0$, $\exists A \in \mathbb{R}$, $\forall x > A$: $l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon$.
On note $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l$.

Théorème[1] :
Pour toutes fonctions f et g et pour tous réel l et l' :
Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = l'$ et $l < l'$ alors il existe un réel A tel que pour tout $x > A$, $f(x) < g(x)$.

Remarque : Une conséquence de ce théorème est que la limite d'une fonction est unique si elle existe. En effet, si on applique ce théorème à une fonction f avec elle-même, on obtient $f(x) < f(x)$ ce qui n'a pas de sens.

Théorème[2] de comparaison des limites :
Soient f et g deux fonctions et l et l' deux réel.
Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = l'$ et il existe A réel tel que pour tout $x > A$: $f(x) \leq g(x)$ alors $l \leq l'$.

Remarque : Attention, même si $f(x) < g(x)$, leur limites peuvent quand même être égales (ex : $g(x) = \frac{1}{x}$ et $f(x) = \frac{-1}{x}$ tendent toutes les deux vers 0.)

Théorème[3] des gendarmes *(admis)* :
Soient f, g et h trois fonctions et l un réel.
Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = l$ et s'il existe A réel tel que pour tout $x > A$, $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ alors $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = l$.