Géométrie dans l'espace

Géométrie - Cours

I Droites, plans et vecteurs de l'espace

I. 1 Droites et plans

Axiomes :

- Par deux points distincts de l'espace passe une unique droite.
- Par trois points non alignés de l'espace passe un unique plan.
- L'intersection de deux plans distincts est soit une droite, soit l'ensemble vide.
- Si une droite a au moins deux points d'intersections avec un plan, alors elle est incluse dans ce plan.

Définitions :

- Des points de l'espace sont dits coplanaires s'il existe un plan les contenant tous.
- Des droites de l'espace sont dites coplanaires s'il existe un plan les contenant toutes.
- Deux droites de l'espace sont dites sécantes si elles ont un unique point d'intersection.

Exemple :

Dans le cube $ABCDEFGH$ ci-contre, les droites (AB) et (ED) ne sont ni sécantes ni parallèles : elles sont coplanaires.

I. 2 Décomposition d'un vecteur et repérage dans un plan

1. Théorème / Définition :
Dans un plan, soient A, B et C trois points non-alignés.

(i) Pour tout vecteur $\vec{u}$ du plan, il existe un unique couple de réels (x, y) tel que $\vec{u} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$.
- On dit que $\vec{u}$ est écrit sous la forme d'une combinaison linéaire de $\overrightarrow{AB}$ et de $\overrightarrow{AC}$.
- Les réels x et y sont appelés les coordonnées de $\vec{u}$ dans la base $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

(ii) Pour tout point M du plan ; il existe un unique couple de réels (x, y) tel que $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$.
- Les réels x et y sont appelés les coordonnées de M dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

I. 3 Vecteurs dans l'espace

Soient A, B, C et D quatre points de l'espace. On dit que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux si les points A, B, C et D sont coplanaires et si $ABDC$ est un parallèlogramme. On note $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

Un vecteur de l'espace est caractérisé par sa direction, son sens et sa norme.
On définit (de la même façon que dans un plan) les sommes de vecteurs et la multiplication d'un vecteur par un réel. Les mêmes règles de calcul restent valables dans l'espace. Par exemple, la relation de Chasles : Pour tous points A, B et C de l'espace $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

La notion de colinéarité des vecteurs se généralise aussi à l'espace :

- Deux vecteurs de l'espace $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont dits colinéaires s'il existe un réel k tel que $\vec{u} = k\vec{v}$.
- Si A et B sont deux points et si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires, on dit alors que $\vec{u}$ dirige la droite (AB), ou encore que $\vec{u}$ est un vecteur directeur de la droite (AB).

2. Théorème :
Deux droites de l'espace sont parallèles si et seulement si elles sont dirigées par des vecteurs colinéaires.

II Repérage dans l'espace

II. 1 Bases et repère dans l'espace

3. Théorème / Définition :
Soient A, B, C et D quatre points non coplanaires de l'espace :

(i) Pour tout vecteur de l'espace $\vec{u}$, il existe trois réels x, y et z tels que $\vec{u} = x\overrightarrow{AB} + x\overrightarrow{AC} + x\overrightarrow{AD}$.
- Le triplet (x, y, z) est unique et x, y, z sont appelés coordonnées du vecteur $\vec{u}$ dans la base $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$.
- On note $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

(ii) Pour tout point de l'espace M, il existe des nombres réels (x, y, z) tels que $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC} + z\overrightarrow{AD}$.
- Le triplet (x, y, z) est unique et x, y, z sont appelés coordonnées du point M dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$.
- On note $M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.