

Fonctions dérivées et applications

1^{re} Spécialité mathématiques
Analyse - Démonstrations

I. Fonctions dérivées

2. Dérivées des fonctions usuelles

Démonstration de la propriété de la fonction carrée :

Soit $f : x \mapsto x^2$.

Soit $x \in \mathbb{R}$

Calculons $f'(x)$

On calcule le taux d'accroissement de f en x :

$$\begin{aligned}\frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} \\ &= \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} \\ &= \frac{2xh + h^2}{h} = \frac{h(2x + h)}{h} \\ &= 2x + h\end{aligned}$$

Lorsque h tend vers 0, $2x + h$ tend vers $2x$. Donc $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = 2x$.

La fonction carrée est dérivable sur \mathbb{R} et sa fonction dérivée est $f'(x) = 2x$.

Démonstration de la propriété de la fonction inverse :

Soit $f : x \mapsto \frac{1}{x}$.

Soit $x \in]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$.

Calculons $f'(x)$.

On calcule le taux d'accroissement de f en x :

$$\begin{aligned}\frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} \\ &= \frac{\frac{1}{(x+h)x} - \frac{1}{(x+h)x}}{h} \\ &= \frac{\frac{x+h}{(x+h)x} - \frac{x}{(x+h)x}}{h} \\ &= \frac{\frac{x-x-h}{(x+h)x}}{h} \\ &= \frac{-h}{(x+h)x} \times \frac{1}{h} \\ &= \frac{-1}{(x+h)x}\end{aligned}$$

Lorsque h tend vers 0, $x + h$ tend vers x ,

$(x + h)x$ tend vers x^2 ,

et $\frac{-1}{(x + h)x}$ tend vers $\frac{-1}{x^2}$.

$$\text{Donc } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} = \frac{-1}{x^2}.$$

La fonction inverse est dérivable sur $] - \infty; 0[\cup] 0; +\infty[$ et sa fonction dérivée est $f'(x) = \frac{-1}{x^2}$.

II. Opérations sur les fonctions dérivables

Démonstration de la formule de la dérivée d'un produit :

Soit $f(x) = uv$. Soit $x \in I$

$$\begin{aligned} \text{Calculons } f'(x) &= \frac{f(x + h) - f(x)}{h} \\ &= \frac{u(x + h) \times v(x + h) - u(x) \times v(x)}{h} \\ &= \frac{u(x + h) \times v(x + h) - u(x) \times v(x + h) + u(x) \times v(x + h) - u(x) \times v(x)}{h} \\ &= v(x + h) \times \frac{u(x + h) - u(x)}{h} + u(x + h) \times \frac{v(x + h) - v(x)}{h} \end{aligned}$$

$$\text{On doit calculer } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

$$\text{Or } \lim_{h \rightarrow 0} v(x + h) = v(x)$$

$$\text{Or } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x + h) - u(x)}{h} = u'(x)$$

$$\text{Or } \lim_{h \rightarrow 0} v(x) = v(x)$$

$$\text{Et } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{v(x + h) - v(x)}{h} = v'(x)$$

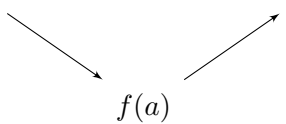
$$\text{Donc } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} = u'(x) \times v(x) + u(x) \times v'(x)$$

$$f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$$

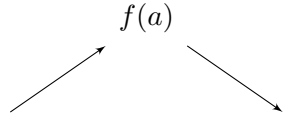
III. Application de la dérivation

2. Étude des extrema d'une fonction

Démonstration de la condition suffisante sur l'existence d'un extremum local

x	$-\infty$	a	$+\infty$
Signe de $f'(x)$	$-$	0	$+$
Variations de $f(x)$			

$f(a)$ est un minimum local

x	$-\infty$	a	$+\infty$
Signe de $f'(x)$	$+$	0	$-$
Variations de $f(x)$			

$f(a)$ est un maximum local