Ensembles et applications

Séminaire - Cours

I Généralités sur les ensembles

- Un ensemble est une collection d'éléments ou d'objets. Les élément (ou objets) peuvent être des nombres, des points, des vecteurs... En général, un élément sera noté par une lettre minuscule et un ensemble par une lettre majuscule.
- Soient E un ensemble et x un objet de E. 0n dit alors que x est un élément de E ou x appartient à E et on écrit $x \in E$. Si x n'est pas un élément de l'ensemble E, on écrit $x \notin E$.
- Un ensemble peut être écrit en extension (list exclusive de tous les éléments) ou en compréhension (les éléments sont défini par une propriété).

Définition (ensemble vide) :
L'ensemble vide, noté $\emptyset$, est défini comme étant l'ensemble vérifiant $x \notin E$ pour tout objet x.

II Inclusion, égalité et parties d'un ensemble

Définitions :

- Soient E et F deux ensembles. On dit que E est inclus dans F, noté $E \subset F$, si $\forall x \in E, (x \in E \implies x \in F)$.
- On dit que E n'est pas inclus dans F, noté $E \not\subset F$, s'il existe au moins un élément de E qui n'appartient pas à F.

1. Propriétés :
Soient E, F et G trois ensembles, alors :

(i) $E \subset E$

(ii) $(E \subset F \wedge F \subset G) \implies E \subset G$ (transitivité)

Définition :
Soient E et F deux ensembles. On dit que E et F sont égaux et on note $E = F$, lorsqu'ils sont constitués de mêmes éléments. Sinon, on dit qu'ils sont dis- tincts, on note $E \neq F$.

2. Propriété :
Deux parties A et B d'un ensemble de E sont égales si et seulement si $A \subset B \wedge B \subset A$.

Définition :
L'ensemble des parties de E est l'ensemble dont les éléments sont les parties de E. On le note souvent $\mathcal{P}(E)$.

Remarques :

- $\mathcal{P}(E) = \{A, A \subset E\}$
- $A \in \mathcal{P}(E) \Leftrightarrow A \subset E$

III Opérations sur les parties d'un ensemble

Définitions (réunion, intersection, différence et complémentaire) :
Soient A et B deux parties d'un ensemble E.

(i) La réunion de A et de B est l'ensemble des éléments de E qui appartiennent à A OU à B. On note $A \cap B$.

(ii) L'intersection de A et de B est l'ensemble des éléments de E qui appartiennent à A ET à B. On note $A \cup B$.

(iii) La différence de A et de B est l'ensemble des éléments de E qui appartiennent à A et qui n'appartiennent pas à B. On note $A \setminus B$ ou $A - B$.

(iv) La partie complémentaire de A dans E est $E \setminus A$. On note $\overline{A}$ ou parfois $\complement_E^A$.

IV Règles de calcul

IV. 1 Intersection

3. Propriété (intersection) :
Soient A, B et C trois parties de E. Alors :

(i) $A \cap B = B \cap A$ (commutativité)

(ii) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ (associativité)

(iii) $A \cap \emptyset = A$, $A \cap A = A$ et $A \cap E = E$

(iv) $A \cap B = A \Leftrightarrow A \subset B$

IV. 2 Union

4. Propriété (union) :
Soient A et B deux parties de E. Alors :

(i) $A \cup B = B \cup A$ (commutativité)

(ii) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ (associativité)

(iii) $A \cup \emptyset = A$ et $A \cup A = A$

(iv) $A \cup B \Leftrightarrow A \subset B$

IV. 3 Intersection et union

5. Propriété :
Soient A, B et C trois parties de E. Alors :

(i) $\overline{\overline{A}} = A$

(ii) $\overline{(A \cap B)} \Leftrightarrow \overline{A} \cup \overline{B}$

(iii) $\overline{(A \cup B)} \Leftrightarrow \overline{A} \cap \overline{B}$

(iv) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

(v) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

V Produit cartésien

Définition :
Soient E et F deux ensembles. Le produit cartésien de E par F, noté $E \times F$, est l'ensemble des couples (x, y) où $x \in E$ et $y \in F$.

VI Applications

VI. 1 Définitions

Définition :
Soient E et F deux ensembles.
- Une application (ou fonction) $f : E \to F$ est la donnée pour chaque élément $x \in E$ d'un unique élément de F noté $f(x)$.
- Deux applications $f, g : E \to F$ sont égales si et seulement si : $\forall x \in E, f(x) = g(x)$. On note alors $f = g$.
- Le graphe de $f : E \to F$ est l'ensemble $\Gamma = \{(x, f(x)), x \in E\} \subset E \times F$

VI. 2 Image direct, image réciproque

Définition :
Soient $A \subset E$, $B \subset F$ et $f : E \to F$.
- L'image directe de A par f est l'ensemble

$$f(A) = \{f(x), x \in A\}$$

- L'image réciproque de B par f est l'ensemble

$$f^{-1}(B) = \{x \in E, f(x) \in B\}$$

VI. 3 Antécédent

Définition :
Soit y un élément fixé dans F. Tout élément $x \in E$ tel que $f(x) = y$ est un antécédent de y. L'ensemble des antécédent de y est $f^{-1}(\{y\})$.

VI. 4 La loi rond

Définition :
Soient E, F, G trois ensembles et $f : E \to F$, $g : F \to G$ deux applications. La composée de f et g notée $g \circ f$ est l'application de E dans G défini par $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ où $x \in E$

6. Propriété :
Soient E, F, G, H quatre ensembles et $f : E \to F$, $g : F \to G$, $h : G \to H$ trois applications. Alors $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$.

Remarque : En général, $f \circ g \neq g \circ f$.

VII Ensembles finis

VII. 1 Injection, surjection et bijection

Définition (injection, surjection et bijection) :
Soient E et F deux ensembles et $f : E \to F$ une application.
- L'application f est dite injective si :

$$\forall (x, x') \in E^2 : f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$$

- L'application f est dite surjective si :

$$\forall y \in F, \exists x \in E : y = f(x)$$

- L'application f est dite bijective si elle est à la fois injective et surjective.

Remarques :

- L'injection assure l'unicité tandis que la surjection assure l'existence.
- $f : E \to F$ injective $\Leftrightarrow \forall (x, x') \in E^2 : x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')$
- $f : E \to F$ sujective $\Leftrightarrow f(E) = F$
- $f : E \to F$ bijective $\Leftrightarrow \forall y \in F, \exists ! x \in E : y = f(x)$

Définition (ensemble fini, cardinal) :
Soit E un ensemble et $n \in \mathbb{N}^*$.

- L'ensemble E est dit fini s'il est vide ou s'il existe une bijection de $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ sur E.
- L'entier n est unique et s'appelle le cardinal de E. On le note $Card(E)$.

Remarque : Il y existe différentes notations du cardinal : $Card(E) = n(E) = \#E = |E| = \overline{E} = \overline{\overline{E}}$

7. Propriété :
Soient E et F deux ensembles finis et f une application de E dans F.

(i) Si f est injective alors $Card(E) \leq Card(F)$.

(ii) Si f est surjective alors $Card(E) \geq Card(F)$.

(iii) Si f est bijective alors $Card(E) = Card(F)$.

8. Propriété :
Soient E, F deux ensembles finis et $f : E \to F$ une application. Si $Card(E) = Card(F)$ alors les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) f est injective,

(ii) f est surjective,

(iii) f est bijective.

VII. 2 Nombre d'applications

Définition :
Soient E et F deux ensembles. L'ensemble des application de E dans F est noté F^E.

9. Propriété :
Soient E et F deux ensembles finis. Alors le nombre d'applications différentes de E dans F est $Card(E)^{Card(F)}$.

10. Propriété :
Soient E et F deux ensembles finis avec $n = Card(E)$ et $p = Card(F)$. Alors le nombre d'injections de E dans F est $p \times (p-1) \times \cdots \times (p-(n-1))$.

11. Propriété :
Le nombre de bijections d'un ensemble E de cardinal n dans lui-même est $n!$.

VII. 3 Parties d'un ensemble fini

Définition :
Soit E un ensemble. Une partition de E est une famille de parties $(A_i)_{i \in I}$ telle que :

- $\displaystyle\bigcup_{i \in I} A_i = E$
- $\forall (i, j) \in I^2 : i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset$

12. Propriété :
Soit E un ensemble fini.
(i) Si A est une partie de E alors A est fini et $Card(A) \leq Card(E)$
(ii) Si $A \subset E$ et $Card(A) = Card(E)$, alors $E = A$.

13. Propriété :
Soit E un ensemble fini.
(i) Soient $A \subset E$ et $B \subset E$ tels que $A \cap B = \emptyset$. Alors
$$Card(A \cup B) = Card(A) + Card(B)$$
.
(ii) Soient $A \subset E$ et $B \subset E$. Alors
$$Card(A \cup B) = Card(A) + Card(B) - Card(A \cap B)$$
.
(iii) Soit $A \subset E$. Alors
$$Card(\overline{A}) = Card(E) - Card(A)$$
.

14. Propriété :
Soit E un ensemble fini de cardinal n. Alors $Card(\mathcal{P}(E)) = 2^n$.

VIII Binôme de Newton

Définition :
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $n! = 1 \times 2 \times \cdots \times n = \prod_{k=1}^{n} k$ appelé factorielle de n.
Par convention, $0! = 1$.

Définition :
Soient n et p deux entiers tels que $0 \leq p \leq n$. On défini le symbole $\binom{n}{k}$ par
$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Remarque : La notation du binôme peut aussi s'écrire C_n^k.

15. Propriété :
(i) $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$
(ii) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ (relation de Pascal)
(iii) $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$

1. Théorème (formule du binôme de Newton) :
Soient a et b deux nombres réels. Pour tout entier naturel n, on a :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k \times b^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} \times b^k$$