Ensembles

Séminaire - Cours

I Généralités sur les ensembles

- Un ensemble est une collection d'éléments ou d'objets. Les élément (ou objets) peuvent être des nombres, des points, des vecteurs... En général, un élément sera noté par une lettre minuscule et un ensemble par une lettre majuscule.
- Soient E un ensemble et x un objet de E. 0n dit alors que x est un élément de E ou x appartient à E et on écrit $x \in E$. Si x n'est pas un élément de l'ensemble E, on écrit $x \notin E$.
- Un ensemble peut être écrit en extension (list exclusive de tous les éléments) ou en compréhension (les éléments sont défini par une propriété).

Définition (ensemble vide) :
L'ensemble vide, noté $\emptyset$, est défini comme étant l'ensemble vérifiant $x \notin E$ pour tout objet x.

II Inclusion, égalité et parties d'un ensemble

Définitions :

- Soient E et F deux ensembles. On dit que E est inclus dans F, noté $E \subset F$, si $\forall x \in E, (x \in E \implies x \in F)$.
- On dit que E n'est pas inclus dans F, noté $E \not\subset F$, s'il existe au moins un élément de E qui n'appartient pas à F.

1. Propriétés :
Soient E, F et G trois ensembles, alors :

(i) $E \subset E$

(ii) $(E \subset F \wedge F \subset G) \implies E \subset G$ (transitivité)

Définition :
Soient E et F deux ensembles. On dit que E et F sont égaux et on note $E = F$, lorsqu'ils sont constitués de mêmes éléments. Sinon, on dit qu'ils sont dis- tincts, on note $E \neq F$.

2. Propriété :
Deux parties A et B d'un ensemble de E sont égales si et seulement si $A \subset B \wedge B \subset A$.

Définition :
L'ensemble des parties de E est l'ensemble dont les éléments sont les parties de E. On le note souvent $\mathcal{P}(E)$.

Remarques :

- $\mathcal{P}(E) = \{A, A \subset E\}$
- $A \in \mathcal{P}(E) \Leftrightarrow A \subset E$

III Opérations sur les parties d'un ensemble

Définitions (réunion, intersection, différence et complémentaire) :
Soient A et B deux parties d'un ensemble E.

(i) La réunion de A et de B est l'ensemble des éléments de E qui appartiennent à A OU à B. On note $A \cap B$.

(ii) L'intersection de A et de B est l'ensemble des éléments de E qui appartiennent à A ET à B. On note $A \cup B$.

(iii) La différence de A et de B est l'ensemble des éléments de E qui appartiennent à A et qui n'appartiennent pas à B. On note $A \setminus B$ ou $A - B$.

(iv) La partie complémentaire de A dans E est $E \setminus A$. On note $\overline{A}$ ou parfois $\complement_E^A$.

IV Règles de calcul

IV. 1 Intersection

3. Propriété (intersection) :
Soient A, B et C trois parties de E. Alors :

(i) $A \cap B = B \cap A$ (commutativité)

(ii) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ (associativité)

(iii) $A \cap \emptyset = A$, $A \cap A = A$ et $A \cap E = E$

(iv) $A \cap B = A \Leftrightarrow A \subset B$

IV. 2 Union

4. Propriété (union) :
Soient A et B deux parties de E. Alors :

(i) $A \cup B = B \cup A$ (commutativité)

(ii) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ (associativité)

(iii) $A \cup \emptyset = A$ et $A \cup A = A$

(iv) $A \cup B \Leftrightarrow A \subset B$

IV. 3 Intersection et union

5. Propriété :
Soient A, B et C trois parties de E. Alors :

(i) $\overline{\overline{A}} = A$

(ii) $\overline{(A \cap B)} \Leftrightarrow \overline{A} \cup \overline{B}$

(iii) $\overline{(A \cup B)} \Leftrightarrow \overline{A} \cap \overline{B}$

(iv) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

(v) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

V Produit cartésien

Définition :
Soient E et F deux ensembles. Le produit cartésien de E par F, noté $E \times F$, est l'ensemble des couples (x, y) où $x \in E$ et $y \in F$.