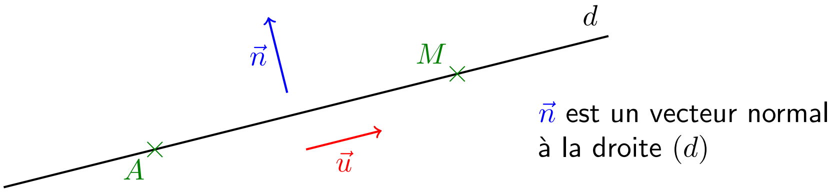
Géométrie repérée

1^{re} Spécialité mathématiques
Géométrie - Cours

I. Équation cartésienne d'une droite et vecteur normal

Définition :
Soit d une droite de vecteur directeur $\vec{u}$.
Un vecteur normal à la droite (d) est un vecteur non nul orthogonal au vecteur $\vec{u}$.

Schéma :



Propriété :
Soit a, b et c trois réels tels que a et b ne sont pas simultanément nuls.
Dans un repère orthonormé, le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est normal à la droite (d) si et seulement si la droite admet une équation cartésienne de la forme $ax + by + c = 0$ avec c un réel à déterminer.

Exemple :
On cherche à déterminer une équation cartésienne de la droite (d) passant par le point $A(5; -1)$ et de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} M(x;y) \in (d) &\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x-5 \\ y+1 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{n}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} \text{ sont orthogonaux} \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0 \\ &\Leftrightarrow 2(x-5) - 3(y+1) = 0 \\ &\Leftrightarrow 2x - 10 - 3y - 3 = 0 \\ &\Leftrightarrow 2x - 3y - 13 = 0 \end{aligned}$$

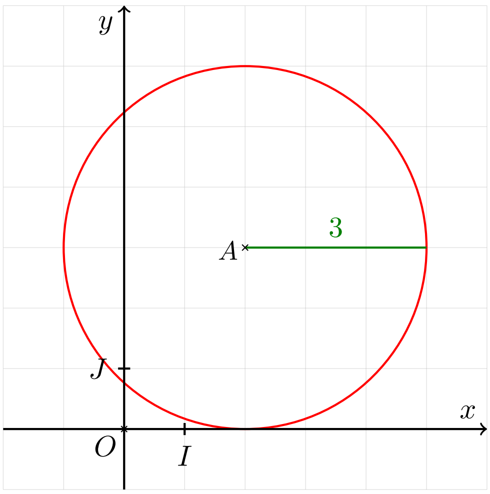
Donc une équation cartésienne de (d) est $2x - 3y - 13 = 0$.

II. Équation cartésienne d'un cercle

Définition :
On appelle cercle de centre Ω et de rayon $r > 0$ l'ensemble des points M du plan qui vérifie $\Omega M = r$.

Propriété de l'équation d'un cercle connaissant son centre et son rayon :
Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J).
Soit C le cercle de centre $\Omega(x_0; y_0)$ et de rayon R.
Une équation du cercle C est $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$.

Exemple :

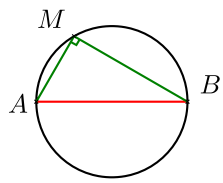


On cherche à déterminer l'équation du cercle de centre $A(2; 3)$ et de rayon 3.

$$\begin{aligned} M(x;y) \in C &\Leftrightarrow AM = 3 \\ &\Leftrightarrow AM^2 = 9 \text{ avec } AM = \sqrt{(x-2)^2 + (y-3)^2} \\ &\Leftrightarrow (x-2)^2 + (y-3)^2 = 9 \\ &\Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 - 6x + 9 = 9 \\ &\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 4x - 6x + 4 = 0 \end{aligned}$$

Une équation cartésienne du cercle de centre $A(2; 3)$ et de rayon 3 est $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 9$ ou $x^2 + y^2 - 4x - 6x + 4 = 0$.

Propriété de l'équation d'un cercle connaissant son diamètre :
Soit C le cercle de diamètre $[AB]$.
Un point $M(x; y)$ appartient au cercle C si et seulement si $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$. Une équation cartésienne du cercle C est donc $(x - x_A)(x - x_B) + (y - y_A)(y - y_B) = 0$.



III. Équation cartésienne d'une parabole

Définition :
Soit a, b et c trois réels tels que $a \neq 0$.
Soit f une fonction polynôme du second degré définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$.
La courbe représentative de la fonction f qui a pour équation $y = ax^2 + bx + c$ est une parabole.

Propriété :
Cette courbe représentative admet pour axe de symétrie de la droite d'équation $x = \dfrac{-b}{2a}$ et pour sommet le point $S\left(\dfrac{-b}{2a}; f\left(\dfrac{-b}{2a}\right)\right)$.

Exemple :
On cherche à déterminer le sommet et l'axe de symétrie de la parabole d'équation $y = -x^2 + 2x - 5$.

Axe de symétrie :
On a $a = -1$, $b = 2$ et $c = -5$.
On calcule $x = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-2}{2(-1)} = 1$.
Donc l'axe de symétrie de la parabole est $x = 1$.

Sommet :
Donc le sommet a pour abscisse 1.
Son ordonnée est $y = -1^2 + 2 \times 1 - 5 = -4$.
Donc $S\,(1; -4)$