

Fonctions dérivées et applications

1^{re} Spécialité mathématiques
Analyse - Cours

I. Fonctions dérivées

1. Définition

Définition :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I .

Si, pour tout réel a de I , le nombre dérivé $f'(a)$ existe, on dit que la fonction f est dérivable sur I .

On appelle fonction dérivée de f sur I la fonction qui, à tout réel $x \in I$ associe le réel $f'(x)$.

On la note f' .

2. Dérivées des fonctions usuelles

Propriétés :

La fonction f défini par...	f définie sur...	f dérivable sur...	La fonction dérivable f' défini par...
$f(x) = k$ ($k \in \mathbb{R}$) Fonction constante	\mathbb{R}	\mathbb{R}	$f'(x) = 0$
$f(x) = ax + b$ (a et b réels) Fonction affine	\mathbb{R}	\mathbb{R}	$f'(x) = a$
$f(x) = x^2$ Fonction carrée	\mathbb{R}	\mathbb{R}	$f'(x) = 2x$
$f(x) = x^3$ Fonction cube	\mathbb{R}	\mathbb{R}	$f'(x) = 3x^2$
$f(x) = x^n$ ($x \in \mathbb{N}^*$) Fonction puissance	\mathbb{R}	\mathbb{R}	$f'(x) = nx^{n-1}$
$f(x) = \frac{1}{x}$ Fonction inverse	$] - \infty; 0[\cup] 0; +\infty[$	$] - \infty; 0[\cup] 0; +\infty[$	$f'(x) = \frac{-1}{x^2}$
$f(x) = \frac{1}{x^n}$ Fonction inverse d'une puissance	$] - \infty; 0[\cup] 0; +\infty[$	$] - \infty; 0[\cup] 0; +\infty[$	$f'(x) = \frac{-n}{x^{n+1}}$
$f(x) = \sqrt{x}$ Fonction racine carrée	$[0; +\infty[$	$] 0; +\infty[$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

II. Opérations sur les fonctions dérivables

Propriété :

Soit u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I , et k un nombre réel.

Les fonctions suivantes sont dérivables sur I de fonctions dérivées :

Fonction	Fonction dérivée
Somme $u + v$	$(u + v)' = u' + v'$
Produit par un réel ku	$(ku)' = ku'$
Produit uv	$(uv)' = u'v + uv'$
Quotient $\frac{u}{v}$	$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

Propriété (*admise*) :

On considère un intervalle I et a et b deux réels.

Soit J l'intervalle formé des valeurs prises par $ax + b$ lorsque x décrit l'intervalle I .

Si la fonction g est dérivable sur J , alors la fonction f définie sur I par $f(x) = g(ax + b)$ est dérivable sur I et, pour tout réel x de I , on a $f'(x) = a \times g'(ax + b)$.

III. Application de la dérivation

1. Étude des variations d'une fonction

Théorème :

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I , de fonction dérivée f' .

- Si f est croissante sur I , alors f' est positive sur I
- Si f est décroissante sur I , alors f' est négative sur I
- Si f est constante sur I , alors f' est nulle sur I

Théorème réciproque (*admis*) :

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I , de fonction dérivée f' .

- Si f' est strictement positive sur I , sauf pour un nombre fini de réel où elle s'annule, alors f est strictement croissante sur I
- Si f' est strictement négative sur I , sauf pour un nombre fini de réel où elle s'annule, alors f est strictement décroissante sur I
- Si f' est nulle sur I , alors f est constante sur I

2. Étude des extrema d'une fonction

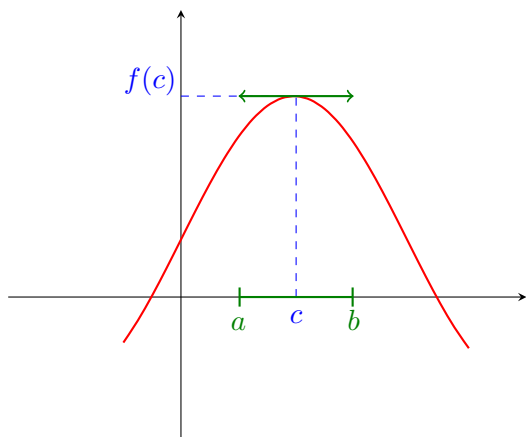
Définition :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et c un réel de I et qui n'est pas une borne de I .

Dire que $f(c)$ est un maximum local de f signifie qu'il existe deux réels a et b dans I tels que $c \in]a; b[$ et que pour tout réel $x \in]a; b[$, $f(x) \leq f(c)$.

Dire que $f(c)$ est un minimum local de f signifie qu'il existe deux réels a et b dans I tels que $c \in]a; b[$ et que pour tout réel $x \in]a; b[$, $f(x) \geq f(c)$.

Un extremum local est un minimum ou un maximum local.



Théorème de la condition nécessaire d'un extremum local (*admis*) :

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I et a un réel de I .

Si f présente un extremum local en a alors $f'(a) = 0$.

Remarque : La réciproque est fausse. En effet, pour $f : x \mapsto x^3$ on a $f : x \mapsto 3x^2$ donc $f'(0) = 0$ mais f n'admet pas d'extremum local en O .

Théorème de la condition suffisante sur l'existence d'un extremum local : :

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I , de dérivée f' et $a \in I$. Si la dérivée f' s'annule en a en changeant de signe en a , alors la fonction f admet un extremum local en a .