Le second degré

1^{re} Spécialité mathématiques
Algèbre - Démonstrations

I. Les fonctions polynômes du second degré

1. Forme canonique

Démonstration :

Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$

$$\begin{aligned}
&= a\left[x^2 + \frac{b}{a}x\right] + c \\
&= a\left[x^2 + \frac{2b}{2a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right] + c \quad \textit{(identité remarquable)} \\
&= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2}\right] + c \\
&= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c \\
&= a(x-\alpha) + \beta \text{ avec } \alpha = \frac{-b}{2a} \text{ et } \beta = \frac{-b^2}{4a} + c = f(\alpha)
\end{aligned}$$

2. Sens de variation

Démonstration de la propriété sur le sens de variation :

- 1^{er} cas : $a > 0$
  Soients x_1 et x_2 deux réels de l'intervalle $]-\infty;\alpha[$ tels que $x_1 < x_2 < \alpha$.

$$\begin{aligned}
x_1 - \alpha < x_2 - \alpha &< 0 \\
(x_1-\alpha)^2 &> (x_2-\alpha)^2 \text{ car } x_1 - \alpha \text{ et } x_2 - \alpha \text{ sont négatifs} \\
a(x_1-\alpha)^2 &> a(x_2-\alpha)^2 \text{ car } a > 0 \\
a(x_1-\alpha)^2 + \beta &> a(x_2-\alpha)^2 + \beta \\
f(x_1) &> f(x_2)
\end{aligned}$$

  Donc f est strictement décroissante sur $]-\infty;\alpha[$.

  Soients x_1 et x_2 deux réels de l'intervalle $[\alpha;\infty[$ tels que $\alpha < x_1 < x_2$.

$$\begin{aligned}
0 \leq x_1 - \alpha &< x_2 - \alpha \\
(x_1-\alpha)^2 &< (x_2-\alpha)^2 \text{ car } x_1 - \alpha \text{ et } x_2 - \alpha \text{ sont positifs} \\
a(x_1-\alpha)^2 &< a(x_2-\alpha)^2 \text{ car } a > 0 \\
a(x_1-\alpha)^2 + \beta &< a(x_2-\alpha)^2 + \beta \\
f(x_1) &< f(x_2)
\end{aligned}$$

  Donc f est strictement croissante sur $[\alpha;\infty[$.

- 2ème cas : $a < 0$
  Soient x_1 et x_2 deux réels de l'intervalle $]-\infty;\alpha[$ tels que $x_1 < x_2 < \alpha$.

$$\begin{aligned} x_1-\alpha < x_2-\alpha &< 0 \\ (x_1-\alpha)^2 > (x_2-\alpha)^2 &\text{ car } x_1-\alpha \text{ et } x_2-\alpha \text{ sont positifs} \\ a(x_1-\alpha)^2 < a(x_2-\alpha)^2 &\text{ car } a<0 \\ a(x_1-\alpha)^2+\beta &< a(x_2-\alpha)^2+\beta \\ f(x_1) &< f(x_2) \end{aligned}$$

  Donc f est strictement croissante sur $]-\infty;\alpha[$.
  Soient x_1 et x_2 deux réels de l'intervalle $[\alpha;\infty[$ tels que $\alpha < x_1 < x_2$.

$$\begin{aligned} 0 \leq x_1-\alpha &< x_2-\alpha \\ (x_1-\alpha)^2 < (x_2-\alpha)^2 &\text{ car } x_1-\alpha \text{ et } x_2-\alpha \text{ sont positifs} \\ a(x_1-\alpha)^2 > a(x_2-\alpha)^2 &\text{ car } a<0 \\ a(x_1-\alpha)^2+\beta &> a(x_2-\alpha)^2+\beta \\ f(x_1) &> f(x_2) \end{aligned}$$

  Donc f est strictement décroissante sur $[\alpha;\infty[$.

II. Factorisation d'une fonction du second degré et équation du second degré

1-2. Factorisation - Résolution des équation du second degré

Démonstration :

Pour $f(x) = ax^2+bx+c$, on a vu que $f(x)$ peut s'écrire sous la forme $f(x) = a(x+\frac{b}{2a}) + \frac{-b}{4a} + c$.

$$\begin{aligned} \text{Donc } f(x) &= a\left(x+\frac{b}{2a}\right) + \frac{-b}{4a} + \frac{4ac}{4a} \\ &= a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{-b^2}{4a^2} + \frac{4ac}{4a^2}\right] \\ &= a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2}\right] \\ &\text{On pose } \Delta = -b^2-4ac \\ &= a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] \end{aligned}$$

- 1er cas : $\Delta < 0$
  Si $\Delta < 0$ alors $f(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ (si $a > 0$) ou $f(x) < 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ (si $a < 0$).
  Donc $f(x) = 0$ n'admet pas de solution et $f(x)$ n'est pas factorisable.

- 2ème cas : $\Delta = 0$
  Si $\Delta = 0$ alors $f(x) = a(x+\frac{b}{2a})^2$ ou $f(x) = a(x-\alpha)^2$ avec $\alpha = \frac{-b}{2a}$.
  Donc l'équation $f(x) = 0$ admet une solution (double) α et $f(x)$ est factorisable ou $f(x) = a(x-\alpha)^2$.

- 3ème cas : $\Delta > 0$

  $$\text{Si } \Delta > 0 \text{ alors } f(x) = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2\right]$$
  $$= a\left(x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)$$
  $$= a\left(x-\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x-\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)$$

  Donc $f(x)$ est factorisable en $f(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$ avec $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.
  L'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions x_1 et x_2.

3. Somme et produit des racines

Démonstration :

$$\text{Calculons } x_1 + x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}+\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$
$$= \frac{-b-\sqrt{\Delta}-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$
$$= \frac{-2b}{2a}$$
$$= \frac{-b}{a}$$

$$\text{Calculons } x_1 \times x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\times\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$
$$= \frac{(-b-\sqrt{\Delta})(-b+\sqrt{\Delta})}{4a^2}$$
$$= \frac{(-b)^2-(\sqrt{\Delta})^2}{4a}$$
$$= \frac{b^2-\Delta}{4a^2}$$
$$= \frac{b^2-(b^2-4ac)}{4a^2}$$
$$= \frac{b^2-b^2+4ac}{4a^2}$$
$$= \frac{c}{a}$$