Géométrie dans l'espace

Géométrie - Démonstrations

Démonstration de la représentation paramétrique d'une droite (Théorème 6) :

$$\begin{aligned} M \in (d) &\Leftrightarrow (AM) \text{ parallèle à } (d) \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \text{ et } \vec{u} \text{ sont colinéaires} \\ &\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R}, \overrightarrow{AM} = k\vec{u} \\ &\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R}, \begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \\ z - z_A \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} x_{\vec{u}} \\ y_{\vec{u}} \\ z_{\vec{u}} \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R}, \begin{cases} x - x_A = kx_{\vec{u}} \\ y - y_A = ky_{\vec{u}} \\ z - z_A = kz_{\vec{u}} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = x_A + kx_{\vec{u}} \\ y = y_A + ky_{\vec{u}} \\ z =_A + kz_{\vec{u}} \end{cases} \end{aligned}$$

Démonstration des coordonnées du produit scalaire (Théorème 12) :

On suppose $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, c'est à dire $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

$$\begin{aligned} \text{On calcule } \vec{u} \cdot \vec{i} &= (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) \cdot \vec{i} \\ &= x(\vec{i} \cdot \vec{i}) + y\underbrace{(\vec{j} \cdot \vec{i})}_{=0} + z\underbrace{(\vec{k} \cdot \vec{i})}_{=0} \\ &= x \times \|\vec{i}\|^2 \\ &= x \end{aligned}$$

De façon analogue, $\vec{u} \cdot \vec{j} = y$ et $\vec{u} \cdot \vec{k} = z$.

On suppose $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$, c'est à dire $\vec{v} = x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k}$.

$$\begin{aligned} \text{On calcule } \vec{u} \cdot \vec{v} &= \vec{u} \cdot (x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k}) \\ &= \vec{u} \cdot (x'\vec{i}) + \vec{u} \cdot (y'\vec{j}) + \vec{u} \cdot (z'\vec{k}) \\ &= x'(\vec{u} \cdot \vec{i}) + y'(\vec{u} \cdot \vec{j}) + z'(\vec{u} \cdot \vec{k}) \\ &= x'x + y'y + z'z \end{aligned}$$

Démonstration du calcul de la norme d'un vecteur (Corrolaire du Théorème 12) :

$$\begin{aligned} \text{On a } \|\vec{u}\|^2 &= \|u\| \times \|u\| \\ &= \vec{u} \cdot \vec{u} && \textit{d'après le Théorème 9.iii.a} \\ &= xx + yy + zz && \textit{d'après le Théorème 12} \end{aligned}$$

Donc $\|\vec{u}\|^2 = x^2 + y^2 + z^2$ donc $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.