

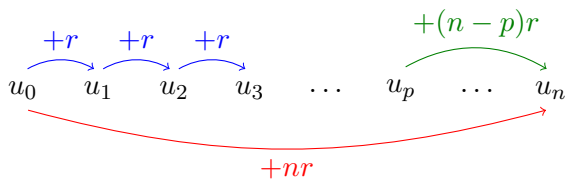
Les suites

1^{re} Spécialité mathématiques
Algèbre - Démonstrations

II. Suites arithmétiques et géométriques

1. Suites arithmétiques

Démonstrations (formule explicite) :



Démonstrations (sens de variation) :

On calcule $u_{n+1} - u_n$

$$\begin{aligned} &= u_n + r - u_n \\ &= r \end{aligned}$$

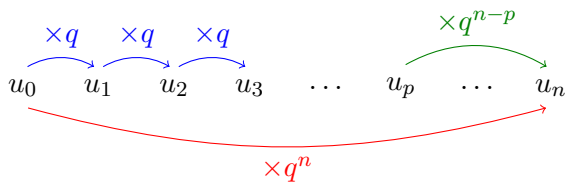
- Si $r > 0$, $u_{n+1} - u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Donc la suite u est strictement croissante.
- Si $r < 0$, $u_{n+1} - u_n < 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Donc la suite u est strictement décroissante.
- Si $r = 0$, $u_{n+1} - u_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Donc la suite u est constante.

Démonstrations (sommes de termes consécutifs) :

$$\begin{array}{r} S = 1 + 2 + 3 + \dots + (n-2) + (n-1) + n \\ + S = n + (n-1) + (n-2) + \dots + 3 + 2 + 1 \\ \hline 2S = (n+1) + (n+1) + (n+1) + \dots + (n+1) + (n+1) + (n+1) \\ \\ 2S = n(n+1) \\ \Leftrightarrow S = \frac{n(n+1)}{2} \end{array}$$

2. Suites géométriques

Démonstrations (formule explicite) :



Démonstrations (sens de variation) :

Comme $u_0 > 0$, lorsque $q > 0$, on a $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On calcule $\frac{u_{n+1}}{u_n}$

$$= \frac{q \times u_n}{u_n}$$

$$= q$$

- Si $q > 1$, on a $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ et on a $u_{n+1} > u_n$ (car positifs).
Donc la suite u est croissante.
- Si $q = 1$, on a $u_{n+1} = u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Donc la suite u est constante.
- Si $0 < q < 1$, on a $0 < \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$
Donc $u_{n+1} < u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Donc la suite u est décroissante.
- Lorsque $q < 0$, la suite est alternée, c'est à dire que les termes son successivement négatifs et positifs.
Donc la suite n'est ni croissante ni décroissant.

Démonstrations (sommes de termes consécutifs) :

On soustrait S à qS et on décale les éléments de qS vers la droite :

$$\begin{array}{r} S = 1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1} + q^n \\ - qS = \quad q + q^2 + \dots \dots \dots + q^n + q^{n+1} \\ \hline S - qS = 1 + 0 + \dots + \dots \dots + 0 - q^{n+1} \end{array}$$

$$S - qS = 1 - q^{n+1}$$

$$\Leftrightarrow S(1 - q) = 1 - q^{n+1}$$

$$\Leftrightarrow S = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \quad (\div 1 - q \text{ car } q \neq 1)$$