

Le second degré

1^{re} Spécialité mathématiques
Algèbre - Cours

I. Les fonctions polynômes du second degré

Définition :

On appelle *fonction polynôme (ou trinôme) du second degré* toute fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = ax^2 + bx + c$ où a , b et c sont trois réels avec $a \neq 0$.
Les réels a , b et c sont appelés *coefficients de la fonction*.

Exemple :

- f définie sur \mathbb{R} tel que $f(x) = 2x^2 - 4x + 1$
- g définie sur \mathbb{R} tel que $g(x) = -x^2 + 9x - 12$

Remarque : L'expression $ax^2 + bx + c$ est dite forme développée de $f(x)$.

1. Forme canonique

Théorème :

Toute fonction trinôme du second degré définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$ peut s'écrire sous une forme appelée canonique $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$, avec $\alpha = -\frac{b}{2a}$ et $\beta = f(\alpha)$.

Exemple :

Soit f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^2 - 4x + 17$.
Donner sa forme canonique.

1. En utilisant le théorème : On a $a = 1$, $b = -4$ et $c = 17$

Calculons $\alpha = -\frac{b}{2a} = -\frac{-4}{2 \times 1} = \frac{4}{2} = 2$ et $\beta = f(\alpha) = f(2) = 2^2 - 4 \times 2 + 17 = 13$

Donc la forme canonique de f est $f(x) = 1(x - 2)^2 + 13$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

2. En utilisant une identité remarquable :

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 - 4x + 17 \\ &= x^2 - 4x + 4 - 4 + 17 \\ &= (x - 2)^2 + 13 \end{aligned}$$

Donc la forme canonique de f est $f(x) = (x - 2)^2 + 13$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

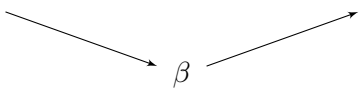
2. Sens de variation

Propriété :

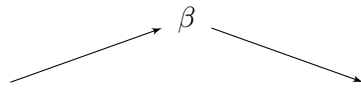
Soit f une fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$.

- Cas où $a > 0$: la fonction f est strictement décroissante sur $] -\infty; \alpha]$ puis strictement croissante sur $[\alpha; +\infty[$. f admet un minimum égal à β atteint en $x = \alpha$.
- Cas où $a < 0$: la fonction f est strictement croissante sur $] -\infty; \alpha]$ puis strictement décroissante sur $[\alpha; +\infty[$. f admet un maximum égal à β atteint en $x = \alpha$.

On retient :

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f(x)$			

car $a > 0$

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f(x)$			

car $a < 0$

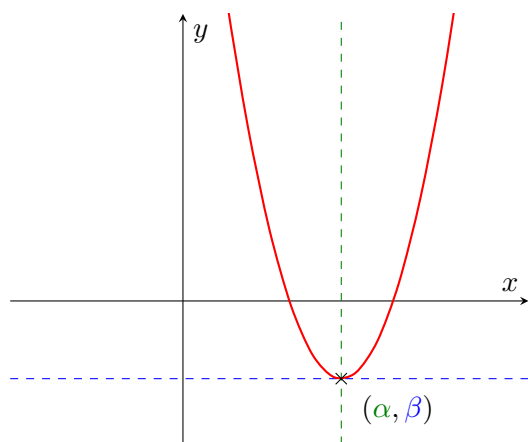
3. Représentation graphique

Propriété (conséquence) :

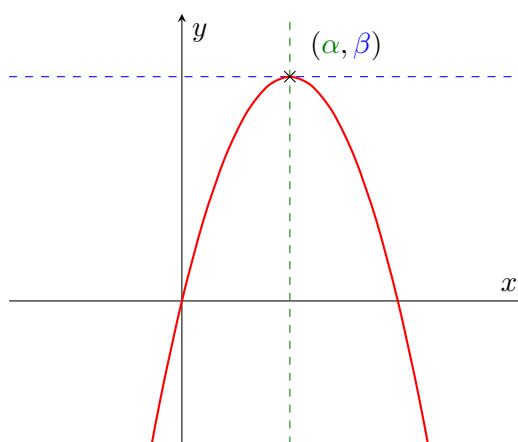
Soit f une fonction définie par $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$.

Dans un repère orthogonal d'origine O , la représentation graphique de la fonction f est une parabole de sommet $S(\alpha; \beta)$ qui admet pour axe de symétrie la droite d'équation $x = \alpha$.

On retient :



car $a > 0$



car $a < 0$

II. Factorisation d'une fonction du second degré et équation du second degré

1. Factorisation

Définition :

On appelle discriminant de la fonction trinôme $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$ ou de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ le réel Δ défini par $\Delta = b^2 - 4ac$.

Exemple : Calculer le discriminant de l'équation $-3x^2 + 6x - 3 = 0$.

On a $a = -3$, $b = 6$ et $c = 3$.

$$\begin{aligned}\text{Calculons } \Delta &= b^2 - 4ac \\ &= 6^2 - 4 \times (-3) \times (-3) \\ &= 0\end{aligned}$$

Théorème :

Soit f sur \mathbb{R} par $f(x) = ax^2 + bx + c$.

- Si $\Delta < 0$, alors $f(x) = ax^2 + bx + c$ n'est pas factorisable.
- Si $\Delta = 0$, alors $f(x) = a(x - \alpha)^2$ où $\alpha = -\frac{b}{2a}$.
- Si $\Delta > 0$, alors $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ où $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$.

2. Résolution des équation du second degré

Théorème :

Soit l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ avec $a \neq 0$.

- Si $\Delta < 0$, l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ n'admet aucune solution.
- Si $\Delta = 0$, l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ admet une unique solution $\alpha = -\frac{b}{2a}$.
- Si $\Delta > 0$, l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ admet deux solutions distinctes : $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$.

Exemple : Résoudre l'équation suivante $2x^2 + 19x + 42 = 0$.

On a $a = 2$, $b = 19$ et $c = 42$.

On calcule $\Delta = b^2 - 4ac = 25$.

$\Delta > 0$ donc l'équation admet deux solutions.

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-19 - \sqrt{25}}{2 \times 2} = -6$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-19 + \sqrt{25}}{2 \times 2} = -\frac{7}{2}$$

L'ensemble solution est $S = \{-6; -\frac{7}{2}\}$.

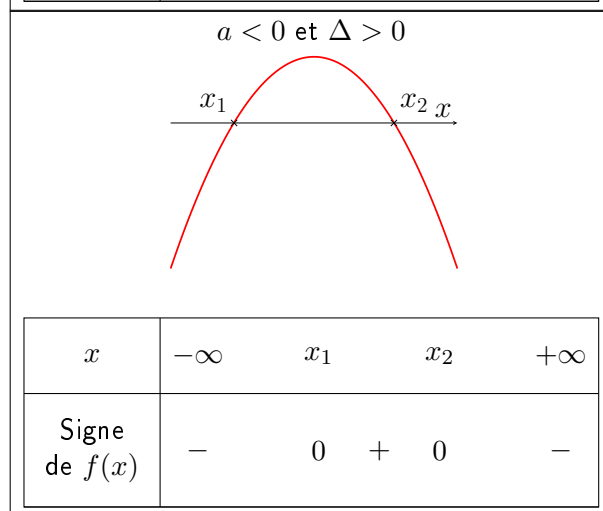
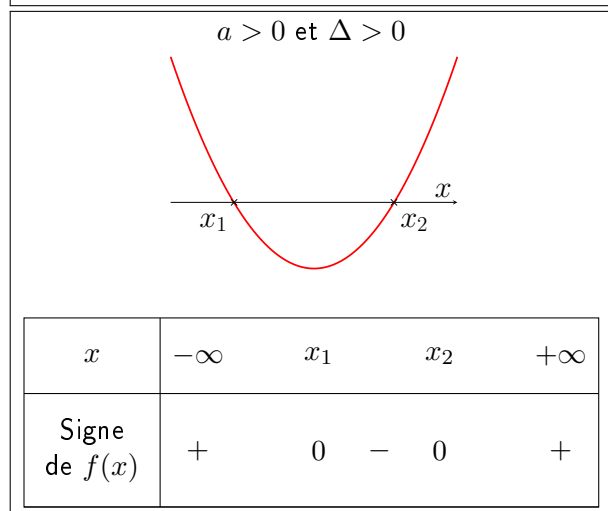
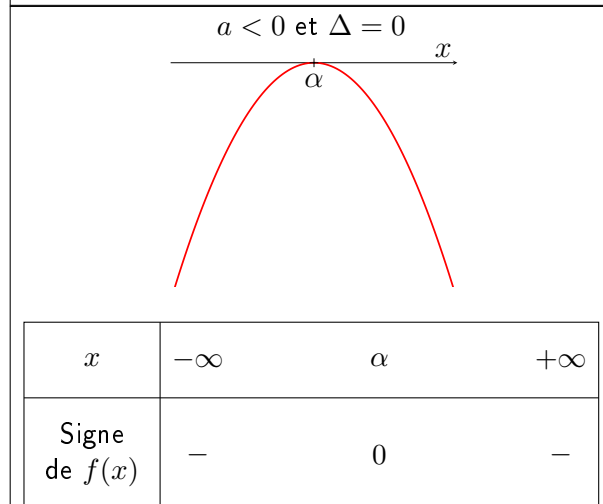
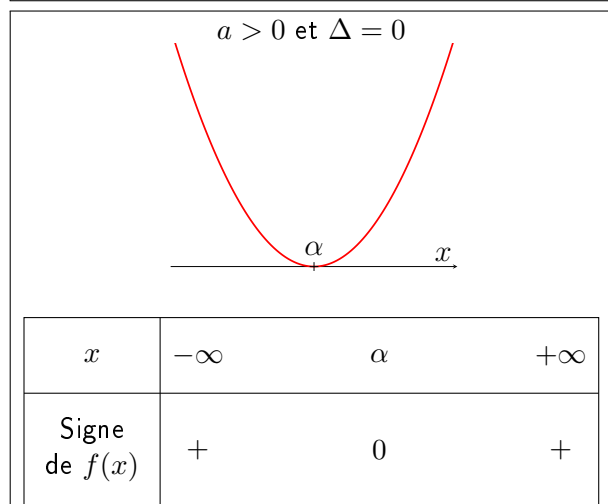
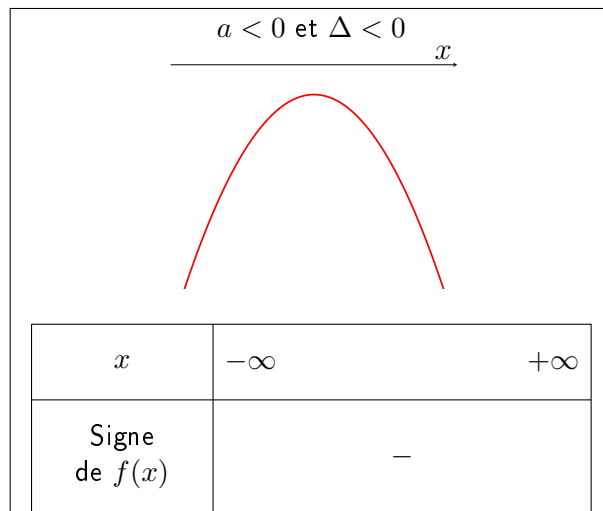
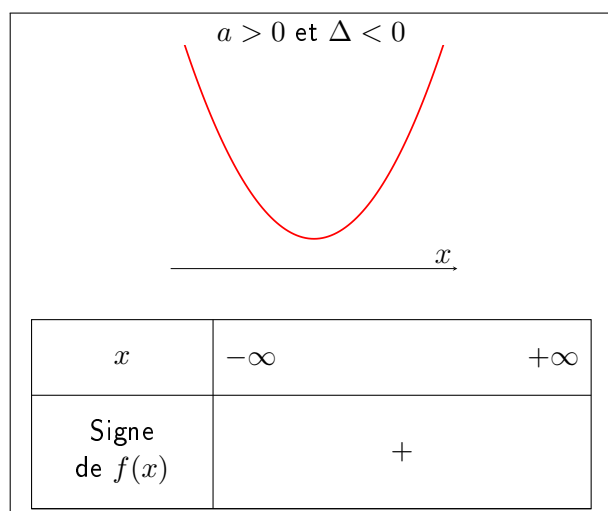
3. Somme et produit des racines

Propriété :

Soit x_1 et x_2 les racines d'une fonction polynôme du second degré $ax^2 + bx + c$, avec $a \neq 0$.

On a alors $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ et $x_1 \times x_2 = \frac{c}{a}$.

III. Signe d'une fonction du second degré et inéquations



Propriété :

Soit f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = ax^2 + bx + c$.

- Si $\Delta < 0$, alors pour tout réel x , $f(x)$ est du signe de a .
- Si $\Delta = 0$, alors pour tout réel x , $f(x)$ est du signe de a sauf en α où x vaut 0.
- Si $\Delta > 0$, alors pour tout réel x , $f(x)$ s'annule en x_1 et x_2 et est du signe de a pour tout $x \in]-\infty; x_1[\cup]x_2; +\infty[$ (avec $x_1 < x_2$) et du signe opposé à celui de a pour tout $x \in]x_1; x_2[$.

Remarque : On peut retenir que $f(x)$ est du signe de a sauf entre les racines lorsqu'elles existent.