Les suites

1re Spécialité mathématiques
Algèbre - Démonstrations

II. Suites arithmétiques et géométriques

1. Suites arithmétiques

Démonstrations *(formule explicite)* :

$$\begin{tikzcd}
u_0 \arrow[r, bend left, "+r"] \arrow[rrrrrr, bend right, "+nr"'] & u_1 \arrow[r, bend left, "+r"] & u_2 \arrow[r, bend left, "+r"] & u_3 & \dots & u_p \arrow[rr, bend left, "+(n-p)r"] & \dots & u_n
\end{tikzcd}$$

Démonstrations *(sens de variation)* :

On calcule $u_{n+1} - u_n$

$$\begin{aligned} &= u_n + r - u_n \\ &= r \end{aligned}$$

- Si $r > 0$, $u_{n+1} - u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
  Donc la suite u est strictement croissante.
- Si $r < 0$, $u_{n+1} - u_n < 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
  Donc la suite u est strictement décroissante.
- Si $r = 0$, $u_{n+1} - u_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
  Donc la suite u est constante.

Démonstrations *(sommes de termes consécutifs)* :

$$\begin{array}{rrccccccccccccc}
 & S = & 1 & + & 2 & + & 3 & + & \dots & + & (n-2) & + & (n-1) & + & n \\
+ & S = & n & + & (n-1) & + & (n-2) & + & \dots & + & 3 & + & 2 & + & 1 \\
\hline
 & 2S = & (n+1) & + & (n+1) & + & (n+1) & + & \dots & + & (n+1) & + & (n+1) & + & (n+1)
\end{array}$$

$$\begin{aligned} & 2S = n(n+1) \\ \Leftrightarrow \quad & S = \frac{n(n+1)}{2} \end{aligned}$$

2. Suites géométriques

Démonstrations *(formule explicite)* :

$$\begin{tikzcd} u_0 \arrow[r, bend left, "\times q"] \arrow[rrrrrrr, bend right, "\times q^n"'] & u_1 \arrow[r, bend left, "\times q"] & u_2 \arrow[r, bend left, "\times q"] & u_3 & \dots & u_p \arrow[rr, bend left, "\times q^{n-p}"] & \dots & u_n \end{tikzcd}$$

Démonstrations *(sens de variation)* :

Comme $u_0 > 0$, lorsque $q > 0$, on a $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On calcule $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$

$$= \frac{q \times u_n}{u_n}$$

$$= q$$

- Si $q > 1$, on a $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ et on a $u_{n+1} > u_n$ (car positifs).
  Donc la suite u est croissante.
- Si $q = 1$, on a $u_{n+1} = u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
  Donc la suite u est constante.
- Si $0 < q < 1$, on a $0 < \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$
  Donc $u_{n+1} < u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
  Donc la suite u est décroissante.
- Lorsque $q < 0$, la suite est alternée, c'est à dire que les termes son successivement négatifs et positifs.
  Donc la suite n'est ni croissante ni décroissant.

Démonstrations *(sommes de termes consécutifs)* :

On soustrait S à qS et on décale les éléments de qS vers la droite :

$$\begin{array}{rcccccccccccccc}
 S = & 1 & + & q & + & q^2 & + & \dots & + & q^{n-1} & + & q^n & & \\
- \quad qS = & & & q & + & q^2 & + & \dots & \dots & \dots & + & q^n & + & q^{n+1} \\
\hline
S - qS = & 1 & + & 0 & + & \dots & + & \dots & \dots & \dots & + & 0 & - & q^{n+1}
\end{array}$$

$$S - qS = 1 - q^{n+1}$$

$$\Leftrightarrow \quad S(1-q) = 1 - q^{n+1}$$

$$\Leftrightarrow \quad S = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \quad (\div 1 - q \text{ car } q \neq 1)$$