Matrices : quelques applications

I) Résolution d'un système linéaire

Exemple : On considère le système (S) suivant $\begin{cases} 5x + 2y = 16 \\ 4x + 3y = 17 \end{cases}$

On pose $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 16 \\ 17 \end{pmatrix}$.

On a alors $A \times X = \begin{pmatrix} 5x + 2y \\ 4x + 3y \end{pmatrix}$.

Ainsi le système peut s'écrire $AX = B$.

Propriété : Un système linéaire de la forme $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$
est équivalent à l'équation $AX = B$ où $A = (a_{ij})$ est une matrice carrée d'ordre n, $X = (x_j)$ et $B = (b_j)$ sont deux matrices colonnes.
Si A est inversible, alors l'équation $AX = B$ admet pour unique solution $X = A^{-1}B$.

Démonstration : $AX = B$ d'où $A^{-1}AX = A^{-1}B \iff I_nX = A^{-1}B \iff X = A^{-1}B$.
Remarque : Dans le contexte de la propriété précédente, si A n'est pas inversible alors le système correspondant possède une infinité de solutions ou aucune solution.
Exemples :

1. Résoudre, à l'aide des matrices et sans utiliser sa calculatrice, le système S_1 : $\begin{cases} 5x + 2y = 16 \\ 4x + 3y = 17 \end{cases}$

2. Résoudre, si possible, à l'aide des matrices et de sa calculatrice le système S_2 : $\begin{cases} x + y + z = 125 \\ 2x + 3y + z = 136 \\ x + 2y + 3z = 143 \end{cases}$

II) Suites de matrices

Définition : Soit (U_n) une suite de matrices colonnes à p lignes.
La suite (U_n) est définie par son premier terme (en général la matrice colonne U_0), et par la relation de récurrence $U_{n+1} = AU_n + C$, où A est une matrice carrée d'ordre p, et C une matrice colonne à p lignes.
Dans ce cas, l'état stable, s'il existe, est la matrice colonne à p lignes S qui vérifie $S = AS + C$.

Définition : Soit U_n une suite de matrices colonnes à p lignes. Soit L une matrice colonne à p lignes.
La suite (U_n) tend vers L lorsque la limite quand n tend vers $+\infty$ de chaque coefficient de U_n est égale au coefficient de L correspondant.

Propriété : On considère une suite (U_n) de matrices colonnes telle que $U_{n+1} = AU_n + B$ pour tout entier n.

(i) S'il existe une matrice X telle que $AX + B = X$ alors la suite (V_n) définie par $V_n = U_n - X$ vérifie :
$V_{n+1} = AV_n$ pour tout entier n.
Dans ce cas on a $U_n = A^n(U_0 - X) + X$ pour tout entier n.

(ii) Si (U_n) est une suite convergente, alors elle converge vers une matrice U vérifiant $AU + B = U$.

Démonstration :
Soit une suite (U_n) de matrices colonnes telles que $U_{n+1} = AU_n + B$ pour tout entier n.

(i) S'il existe une matrice X telle que $AX + B = X$, posons (V_n) définie par $V_n = U_n - X$.
Alors $V_{n+1} = U_{n+1} - X = AU_n + B - (AX + B) = AU_n + B - AX - B = AU_n - AX = A(U_n - X) = AVn$.
La suite (V_n) est donc une suite géométrique de raison A, donc $V_n = A^n V_0$ pour tout entier n.
(La démonstration de cette propriété peut se faire par récurrence).

Or $V_0 = U_0 - X$ donc $V_n = A^n(U_0 - X)$ pour tout entier n.
$V_n = U_n - X$ donc $U_n = V_n + X = A^n(U_0 - X) + X$ pour tout entier n.
(ii) Si (U_n) est une suite convergente, soit U sa limite.
D'une part $\lim\limits_{n\to+\infty} U_{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} U_n = U$.
D'autre part $\lim\limits_{n\to+\infty} U_{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty}(Au_n + B) = A(\lim\limits_{n\to+\infty} U_n) + B = AU + B$.
Donc U vérifie bien $AU + B = U$.

Exemple :
Soit (a_n) et (b_n) deux suites définies par : $a_0 = 10, b_0 = 20, a_{n+1} = 0,9a_n - 0,7b_n + 4$ et $b_{n+1} = 0,2b_n + 3$
On pose $U_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$.
La suite (U_n) est définie par son premier terme $U_0 = \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \end{pmatrix}$ et par la relation de récurrence $U_{n+1} = AU_n + C$.

a. Donner les matrices A et C.

b. Déterminer, s'il existe, l'état stable S.

c. On considère la suite (V_n) vérifiant $V_n = U_n - S$. Montrer que $V_{n+1} = AV_n$.

d. Montrer par récurrence que, pour tout entier n on a $V_n = A^n V_0$.

e. Montrer par récurrence que $A^n = \begin{pmatrix} 0,9^n & 0,2^n - 0,9^n \\ 0 & 0,2^n \end{pmatrix}$.

f. Déterminer une formule explicite pour U_n en fonction de A^n, U_0 et S.

   Puis en déduire que $\begin{cases} a_n = -20 \times 0,9^n + 16,25 \times 0,2^n + 13,75 \\ b_n = 16,25 \times 0,2^n + 3,75 \end{cases}$

g. Montrer que, si la suite (U_n) tend vers une matrice L, alors $L = S$.

h. Montrer que la suite (U_n) tend effectivement vers S.

III) Quelques transformations géométriques

Propriété : On se place dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soient $A(x_A; y_A), B(x_B; y_B)$ et $\vec{u}\begin{pmatrix} x_{\vec{u}} \\ y_{\vec{u}} \end{pmatrix}$.
B est l'image de A par la translation de vecteur $\vec{u}$ si, et seulement si $\begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_{\vec{u}} \\ y_{\vec{u}} \end{pmatrix}$.

Propriétés : On peut définir pour les transformations géométriques suivantes des matrices de transformation $T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ qui à tout point $M(x; y)$ du plan, associe son point image $M'(x'; y')$ tel que $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

(i) Matrice de rotation de centre O et d'angle θ : $R_{(O;\theta)} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$

(ii) Matrice d'homothétie de centre O et de rapport $k \in \mathbb{R}$: $H_{(O;k)} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$.

(iii) Matrice de la symétrie axiale par rapport à l'axe des abscisses : $S_{((Ox))} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

(iv) Matrice de la symétrie axiale par rapport à l'axe des ordonnées : $S_{((Oy))} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(v) Matrice de la symétrie centrale de centre O : $S_0 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Démonstration : Admises.

Exemple : Soit $\vec{u}\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $A(-2;3)$ et $\theta = \dfrac{\pi}{6}$. Déterminer par calcul matriciel :

a. Les coordonnées de B image de A par la translation de vecteur $\vec{u}$

b. Les coordonnées de C image de B par la rotation de centre O et d'angle θ.

c. Les coordonnées de D image de C par l'homothétie de centre O et rapport $k = 2$.

d. Les coordonnées de E image de D par la symétrie axiale par rapport à l'axe des ordonnées.