Géométrie repérée

Géométrie - Démonstrations

Démonstration (Propriété 1) :

Soit (d) la droite passant par un point $A(x_A; y_A)$ et dont on connait le vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} M(x;y) \in (d) &\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \end{pmatrix} \text{ et } \vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \text{ sont orthogonaux} \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0 \\ &\Leftrightarrow a(x - x_A) + b(y - y_B) = 0 \\ &\Leftrightarrow ax + bx \underbrace{-ax_A - by_A}_{=c} = 0 \end{aligned}$$

Démonstration (Propriété 2) :

$$\begin{aligned} \text{Soit } M(x;y) \in C &\Leftrightarrow \Omega M = R \\ &\Leftrightarrow \Omega M^2 = R^2 \qquad\qquad \textit{avec } \Omega M = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \\ &\Leftrightarrow \Omega(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2 \end{aligned}$$

Démonstration (Propriété 3) :

$$\begin{aligned} M(x;y) \in C &\Leftrightarrow \text{le triangle } MAB \text{ est rectangle en } M \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = 0 \qquad\qquad \text{avec } \overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{BM}\begin{pmatrix} x - x_B \\ y - y_B \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow (x - x_A)(x - x_B) + (y - y_A)(y - y_B) = 0 \end{aligned}$$

Démonstration (Propriété 4) :

— On va montrer que pour tout point A appartenant à P et distinct de son sommet, il existe un point B distinct de A appartenant à P et ayant la même ordonnée que A.
Soient deux points $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ appartenant à P.

On a donc $y_A = a{x_A}^2 + bx_A + c$ et $y_B = a{x_B}^2 + bx_B + c$.

$$\begin{aligned} y_A = y_B &\Leftrightarrow a{x_A}^2 + bx_A + c = a{x_B}^2 + bx_B + c \\ &\Leftrightarrow a({x_A}^2 - {x_B}^2) + b(x_A - x_B) = 0 \\ &\Leftrightarrow (x_A - x_B)\left[a(x_A - x_B) + b\right] = 0 \\ &\Leftrightarrow (x_A - x_B) = 0 \text{ ou } a(x_A - x_B) + b = 0 \\ &\Leftrightarrow (x_A = x_B) \text{ ou } x_A + x_B = \frac{-b}{a} \end{aligned}$$

Donc, si un point $A(x_A; y_A)$ distinct du sommet de la parabole appartient à P, le point $B\left(-\frac{b}{a} - x_A; y_A\right)$ appartient à P, est distinct de A et a la même ordonnée que A.
La courbe admet donc bien deux points distincts d'ordonnée y_A.

— On va déterminer les coordonnées du milieu I de $[AB]$.
Les points A et B ont la même ordonnée donc $y_I = \dfrac{y_A + y_B}{2} = \dfrac{2y_A}{2} = y_A$.
De plus, d'après ce qui précède, $x_A + x_B = -\dfrac{b}{a}$, donc $\dfrac{x_A + x_B}{2} = -\dfrac{b}{2a}$, et donc $x_I = \dfrac{x_A + x_B}{2} = -\dfrac{b}{2a}$.
On en déduit donc que $I\left(-\dfrac{b}{2a}; y_A\right)$.

— Soit Δ la droite d'équation $x = -\dfrac{b}{2a}$. Les points A et B ont la même ordonnée, donc le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ 0 \end{pmatrix}$. Un vecteur directeur de Δ est $\vec{j}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Or $\overrightarrow{AB} \cdot \vec{j} = (x_B - x_A) \times 0 + 0 \times 1 = 0$. Les vecteurs sont donc orthogonaux, donc la droite Δ est orthogonale au segment $[AB]$. De plus, le point I, milieu de $[AB]$, appartient à Δ. Donc Δ est la médiatrice du segment $[AB]$. B est donc le symétrique de A par rapport à Δ.

— Si A est le point de la courbe d'abscisse $-\dfrac{b}{2a}$, alors A appartient à Δ, c'est le sommet de la parabole. Donc A invariant par symétrie par rapport à Δ. On a alors $x_A = x_B$.
Tout point de la parabole admet ainsi un symétrique par rapport à Δ, ce qui signifie que Δ est axe de symétrie de la parabole.