Logique

Séminaire - Cours

I Notions de logique

I. 1 Assertion, prédicat et négation

Définition (assertion) :
Une assertion ou proposition est une phrase qui est ou bien vraie ou bien fausse. On dira que cette assertion a deux valeurs de vérité.

Remarque : On appelle cette logique « logique du tiers exclu » puisqu'on exclu les phrases avec deux valeurs de vérité.
Exemples :

— « 2 est un nombre impaire » $\rightarrow$ FAUX.
— « 3 est un nombre premier » $\rightarrow$ VRAI.
— « n est un entier pair » $\rightarrow$ PROBLEME : la valeur de vérité dépend de n.

Définition (prédicat) :
Une assertion prenant en compte un paramètre n est appelé un prédicat. On le note $P(n)$.

Définition (négation) :
Si P est une assertion, on note $\neg P$ (ou non P) la négation de P.

P	$\neg P$
$Vrai$	$Faux$
$Faux$	$Vrai$

Remarque : Au lieu d'écrire « P est vraie », on écrit simplement « P ».

I. 2 Connecteurs logiques

À partir de deux propostions, on peut en former une troisième.

Définitions (conjonction et disjonction) :
Soit P et Q deux propositions. Alors :

(i) la proposition $P \wedge Q$ est vraie ssi P est vraie ET Q est vraie.
(ii) la proposition $P \vee Q$ est vraie ssi l'une des deux proposition (ou les deux) est vraie.

P	Q	$P \wedge Q$	$P \vee Q$
V	V	V	V
V	F	F	V
F	V	F	V
F	F	F	F

Définitions (implication et équivalence) :
Soient P et Q deux propositions.

(i) L'implication « $P \Rightarrow Q$ » (on lit « P implication Q ») est fausse lorsque P est vraie et Q est fausse.
(ii) L'équivalence « $P \Leftrightarrow Q$ » (on lit « P équivalence Q ») est vraie lorsque P et Q ont la même valeur de vérité.

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$P \Leftrightarrow Q$
V	V	V	V
V	F	F	F
F	V	V	F
F	F	V	V

Exemples :

— « 2 est pair $\Rightarrow$ 3 est pair » $\rightarrow$ Faux
— « 3 est pair $\Rightarrow$ 2 est pair » $\rightarrow$ Vrai

Définitions (implique, équivaut) :
Soient P et Q deux propositions.

(i) Lorsque $P \Rightarrow Q$ est vraie, on dit « P implique Q » ou « si P alors Q ».
(ii) Lorsque $P \Leftrightarrow Q$ est vraie, on dit « P équivaut à Q » ou « P si et seulement si Q ».

1. Théorèmes :
Soient P et Q deux propositions.

(i) $\neg(\neg P) \Leftrightarrow P$
(ii) $\neg(P \wedge Q) \Leftrightarrow \neg P \vee \neg Q$ ($1^{\text{ère}}$ loi de Morgan)
(iii) $\neg(P \vee Q) \Leftrightarrow \neg P \wedge \neg Q$ (2^{eme} loi de Morgan)
(iv) $P \Rightarrow Q \Leftrightarrow \neg P \vee Q$
(v) $\neg(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow P \wedge \neg Q$
(vi) $P \Leftrightarrow Q \Leftrightarrow (P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$
(vii) $P \Leftrightarrow Q \Leftrightarrow \neg P \Leftrightarrow \neg Q$

Définition (réciproque et contraposée) :
Soient P et Q deux propositions.

(i) La réciproque de l'implication $P \Rightarrow Q$ est l'implication $Q \Rightarrow P$.
(ii) La contraposée de l'implication $P \Rightarrow Q$ est l'implication $\neg Q \Rightarrow \neg P$.

Exemple : Pythagore

— Théorème : si ABC est un triangle rectangle en A alors $AB^2 + AC^2 = BC^2$.
— Réciproque : si $AB^2 + AC^2 = BC^2$ alors ABC est un triangle rectangle en A.
— Contraposée : si $AB^2 + AC^2 \neq BC^2$ alors ABC n'est un triangle rectangle en A.

2. Théorème :

— Une implication et sa contraposée sont équivalentes.
— Deux propositions sont équivalentes si les implications dans les deux sens sont vraies.

I. 3 Quantificateurs

Définition (universel et existenciel) :

(i) Le quantificateur universel « $\forall$ » se lit « pour tout ».
(ii) Le quantificateur existenciel « $\exists$ » se lit « il existe ».

Remarques :

— « $\exists!$ » signifie « il existe un unique »
— La négation de « $\forall$ » est « $\exists$ » et vice versa.
— On peut intervertir les quantificateur de même nature.