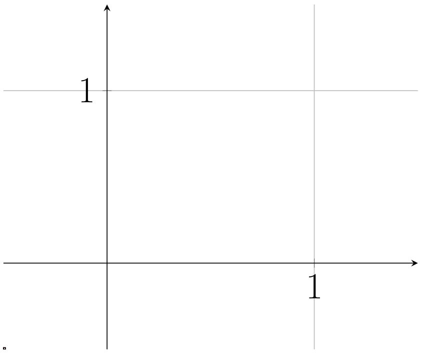
# Calcul intégral

Analyse - Cours

## I Itégrale d'une fonction positive

Dans tout le cours, on se place dans un repère orthonormé et on choisit comme unité d'aire (u.a.) l'aire d'un carrée de coté 1.




On admettra les axiomes de l'aire suivants :

(i) Pour toute surface $S$, $\text{aire}\,(S) \geq 0$.

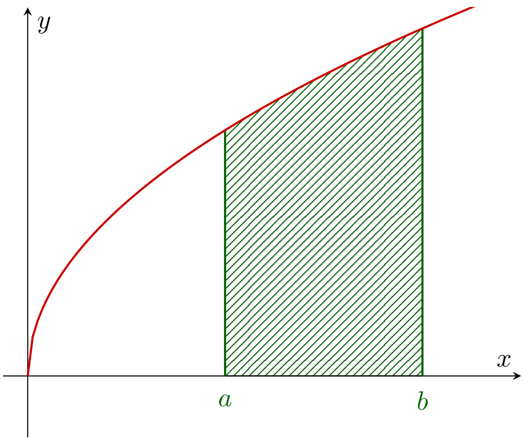
(ii) Pour toutes surfaces $S_1$ et $S_2$, $S_1 \subset S_2 \Rightarrow \text{aire}\,(S_1) \leq \text{aire}\,(S_2)$.

(iii) Pour toutes surfaces $S_1$ et $S_2$, $\text{aire}\,(S_1 \cup S_2) = \text{aire}\,(S_1) + \text{aire}\,(S_2) - \text{aire}\,(S_1 \cap S_2)$.

(iv) Pour tout segment $S$, $\text{aire}\,(S) = 0$

.

**Définition :**
Soit $f$ une fonction définie et positive sur un intervalle $I$. Soient $a$ et $b$ deux réels dans $I$ tels que $a \leq b$. On appelle intégrale de $f$ entre $a$ et $b$ l'aire de la surface délimitée par l'axe des abscisses, la courbe de $f$ et les droites vertiales d'équations $x = a$ et $x = b$. On la note $\displaystyle\int_a^b f$ ou $\displaystyle\int_a^b f(x)\ dx$.




**Remarque :** En mathématiques, l'aire est représenté par un nombre tandis qu'une surface est représentée par une partie d'un plan

**Exemple :**

-> AJOUTER SCHEMA

**1. Théorème (relation de Chasles) :**
Soit $f$ une fonction définie et positive sur un intervalle $I$. Pour tous réels $a$, $b$, $c$ de l'intervalle $I$, tels que $a \leq b \leq c$ : $\displaystyle\int_a^c f(t)\ dt = \int_a^b f(t)\ dt + \int_b^c f(t)\ dt$.

-> AJOUTER SCHEMA

**2. Théorème (croissance de l'intégrale) :**
Soit $f$ une fonction définie et positive sur un intervalle $I$. Soient $a$ et $b$ des réels dans $I$ tels que $a \leq b$. Si pour tout réels $x$ de l'intervalle $[a;b]$, $f(x) \leq g(x)$ alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\ dt \leq \int_a^b g(t)\ dt$.

**3. Théorème (inégalités de la moyenne) :**
Soit $f$ une fonction définie et positive sur un intervalle $I$. Soient $a$ et $b$ des réels dans $I$ tels que $a < b$. S'il existe deux réels $m$ et $M$ tels que pour tout $x$ dans $[a;b]$, $m \leq f(x) \leq M$ alors $\displaystyle m(b-a) \leq \int_a^b f \leq M(b-a)$

-> AJOUTER SCHEMA

**Corrolaire :**
Soit $f$ une fonction définie et positive sur un intervalle $I$. Soient $a$ et $b$ des réels dans $I$ tels que $a < b$. Si $f$ est croissante sur $I$, alors $f(a)(b-a) \leq \int_a^b f(t)\ dt \leq f(b)(b-a)$.

## II Théorème fondamental de l'analyse et conséquences sur le calcul intégral

**4. Théorème fondamental de l'analyse (TFA) :**
Soit $f$ une fonction définie et positive sur un intervalle $I = [a; b]$. Si pour tout $x$ dans $I$, $F_a(x) = \int_a^x f(t)\ dt$ alors pour tout $x$ dans $I$, $F_a$ est dérivable en $x$ et $F_a'(x) = f(x)$.

**Définition :**
Soit $f$ une fonction définie sur $I$. On dit que $F$ est une primitive de $f$ sur $I$ si pour tout $x$ dans $I$, $F$ est dérivable en $x$ et $F'(x) = f(x)$.

**Corrolaire :**
Soit $f$ une fonction continue et positive sur un intervalle $I = [a; b]$. Si $F$ est une primitive de $f$ sur $I$, alors $\int_a^b f(t)\ dt = F(b) - F(a)$.

**5. Théorème :**
Soient $F$ et $G$ deux fonctions définies sur un intervalle $I$. Si $F$ et $G$ sont deux primitives sur $I$ d'une même fonction $f$ alors il existe $k$ réel tel que pour tout $x$ dans $I$, $G(x) = F(x) + k$.

-> AJOUTER SCHEMA
**Remarque :** La conséquence de ce théorème est que pour deux primitives $F$ et $G$ d'une même fonction $f$, on aura pour tous réels $a$ et $b$ : $G(b) - G(a) = F(b) - F(a)$. En effet, si $G(x) = F(x) + k$ alors $G(b) - G(a) = (F(b) + k) - (F(a) + k) = F(b) - F(a)$
**Exemple :**

On pose $f(x) = x^2$. Une primitive de $f$ est $F(x) = \frac{x^3}{3}$.

$$\begin{aligned}\text{On a donc } \int_2^3 t^2\ dt &= F(3) - F(2) \\ &= \frac{3^3}{3} - \frac{2^3}{3} \\ &= \frac{19}{3}\end{aligned}$$