

Le second degré

Algebre - Cours

I Les fonctions polynômes du second degré

I. 1 Forme développée

Définitions :

On appelle fonction polynôme (ou trinôme) du second degré toute fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = ax^2 + bx + c$ où a , b et c sont trois réels avec $a \neq 0$.

Les réels a , b et c sont appelés coefficients de la fonction.

Remarque : L'expression $ax^2 + bx + c$ est dite forme développée de $f(x)$.

I. 2 Forme canonique

1. Théorème :

Toute fonction trinôme du second degré définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$ peut s'écrire sous une forme appelée canonique $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$, avec $\alpha = -\frac{b}{2a}$ et $\beta = f(\alpha)$.

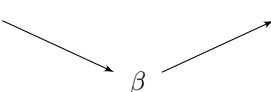
I. 3 Sens de variation

1. Propriété :

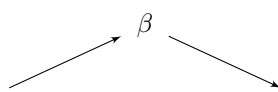
Soit f une fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$.

- (i) Cas où $a > 0$: la fonction f est strictement décroissante sur $]-\infty; \alpha]$ puis strictement croissante sur $[\alpha; +\infty[$. La fonction f admet un minimum égal à β atteint en $x = \alpha$.
- (ii) Cas où $a < 0$: la fonction f est strictement croissante sur $]-\infty; \alpha]$ puis strictement décroissante sur $[\alpha; +\infty[$. La fonction f admet un maximum égal à β atteint en $x = \alpha$.

On retient :

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f(x)$			

car $a > 0$

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f(x)$			

car $a < 0$

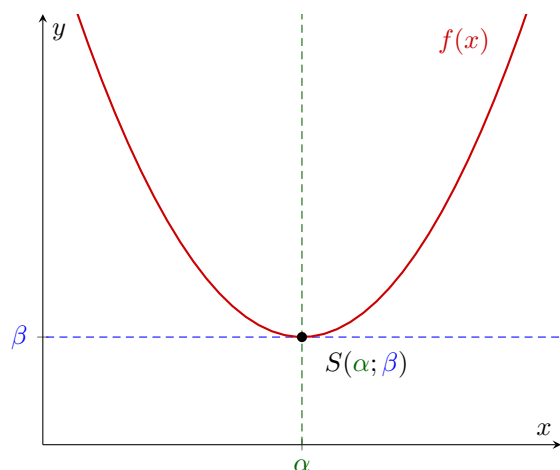
I. 4 Représentation graphique

2. Propriété (conséquence) :

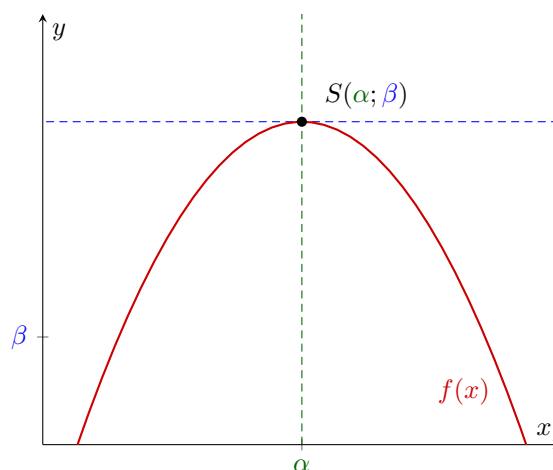
Soit f une fonction définie par $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$.

Dans un repère orthogonal d'origine O , la représentation graphique de la fonction f est une parabole de sommet $S(\alpha; \beta)$ qui admet pour axe de symétrie la droite d'équation $x = \alpha$.

On retient :



car $a > 0$



car $a < 0$

II Factorisation d'une fonction du second degré et résolution d'équation du second degré

II. 1 Factorisation

Définition :

On appelle discriminant de la fonction trinôme $f(x) = ax^2 + bx + c$ ou de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ le réel Δ défini par $\Delta = b^2 - 4ac$.

2. Théorème de factorisation d'un trinôme du second degré :

Soit f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = ax^2 + bx + c$.

(i) Si $\Delta < 0$, alors $f(x) = ax^2 + bx + c$ n'est pas factorisable.

(ii) Si $\Delta = 0$, alors $f(x) = a(x - \alpha)^2$ où $\alpha = -\frac{b}{2a}$.

(iii) Si $\Delta > 0$, alors $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ où $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$.

II. 2 Résolution des équation du second degré

3. Théorème :

Soit l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ avec $a \neq 0$.

(i) Si $\Delta < 0$, l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ n'admet aucune solution.

(ii) Si $\Delta = 0$, l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ admet une unique solution $\alpha = -\frac{b}{2a}$.

(iii) Si $\Delta > 0$, l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ admet deux solutions distinctes : $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$.

II. 3 Somme et produit des racines

3. Propriété :

Soit x_1 et x_2 les racines d'une fonction polynôme du second degré $f(x) = ax^2 + bx + c$, avec $a \neq 0$.

On a alors $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ et $x_1 \times x_2 = \frac{c}{a}$

III Signe d'une fonction du second degré et inéquations

4. Propriété :

Soit f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = ax^2 + bx + c$.

- (i) Si $\Delta < 0$, alors pour tout réel x , $f(x)$ est du signe de a .
- (ii) Si $\Delta = 0$, alors pour tout réel x , $f(x)$ est du signe de a sauf en α où $f(x) = 0$.
- (iii) Si $\Delta > 0$, alors pour tout réel x , $f(x)$ s'annule en x_1 et x_2 et est du signe de a pour tout $x \in]-\infty; x_1[\cup]x_2; +\infty[$ avec $x_1 < x_2$ et du signe opposé à celui de a pour tout $x \in]x_1; x_2[$.

Remarque : On peut retenir que $f(x)$ est du signe de a sauf entre les racines lorsqu'elles existent.