Géométrie dans l'espace

Géométrie - Cours

I Droites, plans et vecteurs de l'espace

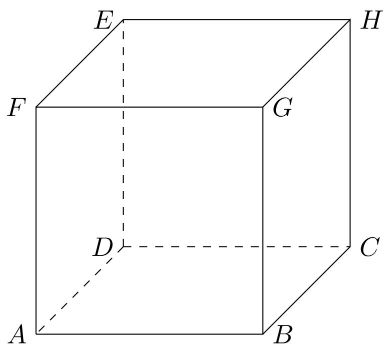
I. 1 Droites et plans

Axiomes :

— Par deux points distincts de l'espace passe une unique droite.
— Par trois points non alignés de l'espace passe un unique plan.
— L'intersection de deux plans distincts est soit une droite, soit l'ensemble vide.
— Si une droite a au moins deux points d'intersections avec un plan, alors elle est incluse dans ce plan.

Définitions :

— Des points de l'espace sont dits coplanaires s'il existe un plan les contenant tous.
— Des droites de l'espace sont dites coplanaires s'il existe un plan les contenant toutes.
— Deux droites de l'espace sont dites sécantes si elles ont un unique point d'intersection.
— Deux droites de l'espace sont dites parallèles si elles sont coplanaires et non-sécantes.



Exemple :

Dans le cube $ABCDEFGH$ ci-contre, les droites (AB) et (ED) ne sont ni sécantes ni parallèles : elles sont coplanaires.

I. 2 Décomposition d'un vecteur et repérage dans un plan

1. Théorèmes / Définitions :
Dans un plan, soient A, B et C trois points non alignés.

(i) Pour tout vecteur $\vec{u}$ du plan, il existe un unique couple de réels (x, y) tel que $\vec{u} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$.
— On dit que $\vec{u}$ est écrit sous la forme d'une combinaison linéaire de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
— Les réels x et y sont appelés les coordonnées de $\vec{u}$ dans la base $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

(ii) Pour tout point M du plan, il existe un unique couple de réels (x, y) tel que $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$.
— Les réels x et y sont appelés les coordonnées de M dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

I. 3 Vecteurs de l'espace

Soient A, B, C et D quatre points de l'espace. On dit que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux si les points A, B, C et D sont coplanaires et si $ABDC$ est un parallélogramme. On note $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

Un vecteur de l'espace est caractérisé par sa direction, son sens et sa norme.
On définit (de la même façon que dans un plan) les sommes de vecteurs et la multiplication d'un vecteur par un réel. Les mêmes règles de calcul restent valables dans l'espace.

La notion de colinéarité des vecteurs se généralise aussi à l'espace :

— Deux vecteurs de l'espace $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont dits colinéaires s'il existe un réel k tel que $\vec{u} = k\vec{v}$.

— Si A et B sont deux points de l'espace et si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires, on dit alors que $\vec{u}$ dirige la droite (AB), ou encore que $\vec{u}$ est un vecteur directeur de la droite (AB).

2. Théorème du parallélisme de deux droites :
Deux droites de l'espace sont parallèles si et seulement si elles sont dirigées par des vecteurs colinéaires.

II Repérage dans l'espace

II. 1 Bases et repères dans l'espace

3. Théorèmes / Définitions :
Soient A, B, C et D quatre points non coplanaires de l'espace :

(i) Pour tout vecteur de l'espace $\vec{u}$, il existe trois réels x, y et z tels que $\vec{u} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC} + z\overrightarrow{AD}$.

— Le triplet (x, y, z) est unique et x, y, z sont appelés coordonnées du vecteur $\vec{u}$ dans la base $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$.

— On note $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

(ii) Pour tout point de l'espace M, il existe des réels (x, y, z) tels que $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC} + z\overrightarrow{AD}$.

— Le triplet (x, y, z) est unique et x, y, z sont appelés coordonnées du point M dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$.

— On note $M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

4. Théorèmes :
Dans une base de l'espace :

(i) Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, si $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ alors $\vec{u} + \vec{v}\begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \\ z + z' \end{pmatrix}$.

(ii) Pour tout réel k et pour tout vecteur $\vec{u}$, si $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ alors $k\vec{u}\begin{pmatrix} kx \\ ky \\ kz \end{pmatrix}$.

5. Théorème :
Dans un repère de l'espace : pour tous points A et B, si $A(x_A, y_A, z_A)$ et $B(x_B, y_B, z_B)$ alors $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$.

II. 2 Représentation paramétrique d'une droite

6. Théorèmes / Définitions :
Soient A un point et $\vec{u}$ un vecteur de l'espace. On note (d) la droite dirigée par $\vec{u}$ et passant par A.

(i) Dans un repère de l'espace, pour tout point $M(x, y, z)$: $M \in (d) \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R}, \overrightarrow{AM} = k\vec{u}$.

(ii) Si de plus on note $A(x_A, y_A, z_A)$ et $\vec{u} \begin{pmatrix} x_{\vec{u}} \\ y_{\vec{u}} \\ z_{\vec{u}} \end{pmatrix}$ alors $M \in (d) \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = x_A + kx_{\vec{u}} \\ y = y_A + ky_{\vec{u}} \\ z = z_A + kz_{\vec{u}} \end{cases}$

Ce système d'équations est appelé une représentation paramétrique de la droite (d). On appelle k le paramètre.

Remarque : Il existe une infinité de représentations paramétriques d'une même droite.

Démonstration :

$$\begin{aligned}
M \in (d) &\Leftrightarrow (AM) \text{ parallèle à } (d) \\
&\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \text{ et } \vec{u} \text{ sont colinéaires} \\
&\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R}, \overrightarrow{AM} = k\vec{u} \\
&\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R}, \begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \\ z - z_A \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} x_{\vec{u}} \\ y_{\vec{u}} \\ z_{\vec{u}} \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R}, \begin{cases} x - x_A = kx_{\vec{u}} \\ y - y_A = ky_{\vec{u}} \\ z - z_A = kz_{\vec{u}} \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = x_A + kx_{\vec{u}} \\ y = y_A + ky_{\vec{u}} \\ z =_A + kz_{\vec{u}} \end{cases}
\end{aligned}$$

Exemple :

Soient $A(0; 4; 0)$ et $B(1; 4; 2)$. On calcule $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 1-0 \\ 4-4 \\ 2-0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Une représentation paramétrique de la droite (AB) : $\begin{cases} x = 0 + 1k \\ y = 4 + 0k \\ z = 0 + 2k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k \\ y = 4 \\ z = 2k \end{cases}$

III Position relative d'une droite et d'un plan

Définitions :

— Une droite (d) est parallèle à un plan (P) s'il existe une droite (d') incluse dans (P) et parallèle à (d).
— Une droite (d) est strictement parallèle à (P) si elle est parallèle à (P) et non incluse dans (P).
— Une droite est sécante à un plan (P) si elle a un unique point d'intersection avec (P).
— Un vecteur $\vec{u}$ est directeur d'un plan (P) s'il existe une droite (d) incluse dans (P) et dirigée par $\vec{u}$.

7. Théorème :
Pour tous points A, B, C et D de l'espace : A, B, C et D sont coplanaires $\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R}, \exists k' \in \mathbb{R}$: $\overrightarrow{AD} = k\overrightarrow{AB} + k'\overrightarrow{AC}$.

Définitions :
Trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, et $\vec{w}$ sont dits coplanaires s'il existe deux réels k et k' tels que $\vec{w} = k\vec{u} + k'\vec{v}$

Remarque : Si $\vec{w} = k\vec{u} + k'\vec{v}$, on dit aussi que $\vec{w}$ est une combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

8. Théorème :
Soit (d) une droite et soit (P) un plan. On suppose que $\vec{u}$ est un vecteur directeur de (d) et que $(\vec{v}, \vec{w})$ est un couple de vecteurs directeurs non colinéaires de (P) alors on a :
(d) est parallèle à $(P) \Leftrightarrow \vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires.

IV Produit scalaire dans l'espace

Définition :
Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace. On pose $\vec{u} \cdot \vec{v} = \dfrac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{v} - \vec{u}\|^2\right)$

9. Théorèmes :
Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de l'espace :

(i) $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux $\Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

(ii) $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos\left(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}\right)$

(iii) Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires

  (a) et de même sens, alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$

  (b) et de sens opposés, alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = -\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$

(iv) $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$

(v) $\forall k \in \mathbb{R} : (k\vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (k\vec{v}) = k(\vec{u} \cdot \vec{v})$

10. Théorème :
Pour tous points A, B et C de l'espace : si H est le projeté orthogonal de B sur (AC) alors $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{AC}$.

11. Théorème :
Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ de l'espace : $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$.

Définition :
On appelle repère orthonormé de l'espace, la donnée d'un point O et de trois vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ avec :
— $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ orthogonaux deux à deux,
— $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = \|\vec{k}\| = 1$

Remarque : On dit que les vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ sont des vecteurs unitaires.

12. Théorème :
Dans un repère orthonormé de l'espace $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$: si $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{u}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$

Démonstration :

On suppose $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$, c'est à dire $\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$.

On calcule
$$\begin{aligned}\vec{u}\cdot\vec{i}&=(x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k})\cdot\vec{i}\\&=x(\vec{i}\cdot\vec{i})+y\underbrace{(\vec{j}\cdot\vec{i})}_{=0}+z\underbrace{(\vec{k}\cdot\vec{i})}_{=0}\\&=x\times\|\vec{i}\|^2\\&=x\end{aligned}$$

De façon analogue, $\vec{u}\cdot\vec{j}=y$ et $\vec{u}\cdot\vec{k}=z$.

On suppose $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$, c'est à dire $\vec{v}=x'\vec{i}+y'\vec{j}+z'\vec{k}$.

On calcule
$$\begin{aligned}\vec{u}\cdot\vec{v}&=\vec{u}\cdot(x'\vec{i}+y'\vec{j}+z'\vec{k})\\&=\vec{u}\cdot(x'\vec{i})+\vec{u}\cdot(y'\vec{j})+\vec{u}\cdot(z'\vec{k})\\&=x'(\vec{u}\cdot\vec{i})+y'(\vec{u}\cdot\vec{j})+z'(\vec{u}\cdot\vec{k})\\&=x'x+y'y+z'z\end{aligned}$$

Corrolaire :

Dans un repère orthonormé de l'espace : si $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ alors $\|\vec{u}\|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

Démonstration :

On a
$$\begin{aligned}\|\vec{u}\|^2&=\|u\|\times\|u\|\\&=\vec{u}\cdot\vec{u}&&\textit{d'après le théorème 9.(iii).(a)}\\&=xx+yy+zz&&\textit{d'après le théorème 12}\end{aligned}$$

Donc $\|\vec{u}\|^2=x^2+y^2+z^2$ donc $\|\vec{u}\|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

Remarque : Si $A(x_A,y_A,z_A)$ et $B(x_B,y_B,z_B)$ alors on déduit $AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}$.