Continuité

Analyse - Cours

I Fonctions continues

I. 1 Fonction continue en un réel

Définitions :
Soient a un réel, I un intervalle contenant a et f une fonction définie sur I. On dit que f est continue en a si les limites à droite et à gauche, quand x tend vers a, de $f(x)$ existent et sont toutes égales à $f(a)$, autrement dit, si $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \lim\limits_{x \to a^-} f(x) = f(a)$.
Dans le cas contraire, on dit que f admet une discontinuité en a.

Remarque : Pour indiquer que les limites à droite et à gauche, quand x tend vers a, de $f(x)$ existent et sont égales à $f(a)$, on écrira simplement $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Exemple :

(1) La fonction valeur absolue est définie pour tout réel x par $\|x\| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$

Quand x tend vers 0 :
— la limite à droite est $\lim\limits_{x \to 0^+} \|x\| = \lim\limits_{x \to 0} x = 0$,
— la limite à gauche est $\lim\limits_{x \to 0^-} \|x\| = \lim\limits_{x \to 0} -x = 0$.
— De plus, l'image de 0 est $\|0\| = 0$.

La fonction valeur absolue est donc continue en 0.

(2) La partie entière d'un réel x est par définition l'unique entier relatif n tel que $n \leq x < n+1$. On la note $E(x)$. Pour tout entier relatif a, la fonction partie entière admet une discontinuité en a.
Démontrons par exemple que la fonction partie entière n'est pas continue en $a = 2$.
— Si $1 \leq x < 2$ alors $E(x) = 1$ dont la limite à gauche, quand x tend vers 2, de la fonction partie entière est $\lim\limits_{x \to 2^-} = 1$.
— Si $2 \leq x < 3$ alors $E(x) = 2$ dont la limite à droite, quand x tend vers 2, de la fonction partie entière est $\lim\limits_{x \to 2^+} = 2$.
La limite à gauche et la limité à droite sont différentes : cette fonction n'est donc pas continue en 2. La démonstration serait identique pour n'importe quel entier relatif.

I. 2 Fonction continue sur un intervalle

Définitions :
Soient I un intervalle et f une fonction définie sur I. On dit que f est continue sur I si pour tout réel a appartenant à I, f est continue en a.

1. Théorème (continuité des fonctions usuelles) :

1. Les fonctions affines, polynômes, racine carrée, valeur absolue, cosinus, sinus, exponentielles et logarithmes, sont continues sur chaque intervalle où elles sont définies.
2. Toute fonction construite à partir des précédentes par somme, produit, quotient ou composition, est continue sur chaque intervalle où elle est définie.

Exemple :

- La fonction f définie pour tout réel x par $f(x) = e^{3x-5}$, est continue sur $\mathbb{R}$ car elle est obtenue par la composition d'une fonction affine et de la fonction exponentielle.
- La fonction f définie pour tout réel x par $g(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x^2-1}$ est continue sur $]0;1[$ et sur $]1;+\infty[$ car elle est obtenue par quotient de la fonction racine carrée et d'une fonction polynôme.

2. Théorème (continuité des fonctions dérivables) :
Soient I un intervalle et f une fonction définie sur I. Si f est dérivable sur I alors f est continue sur I.

II Théorème des valeurs intermédiaires

3. Théorème des valeurs intermédiaires (TVI) :
Soit f une fonction définie sur un intervalle I. Soient a et b deux réels dans I. Pour tout k réel, si f est continue sur I et si $f(a) < k < f(b)$ alors il existe au moins un réel c dans l'intervalle $[a;b]$ tel que $f(x) = k$.

Corrolaire de la bijection :
Soit f une fonction définie sur un intervalle I. Soient a et b deux réels dans I. Il existe un réel k tel que si f est continue et strictement croissante et $f(a) < k < f(b)$ alors il existe un unique réel c dans l'intervalle $[a;b]$ tel que $f(c) = k$.

Définitions :
Soient I et J deux intervalles. Soit $f : I \mapsto J$. On dit que f est une bijection de I dans J si tout réel de J admet un unique antécédent dans I.

Exemple :

- Une fonction affine non constante est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
- La fonction exponentielle est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]0;+\infty[$.