Fonctions dérivées et applications

1[re] Spécialité mathématiques
Analyse - Cours

I. Fonctions dérivées

1. Définition

Définition :
Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
Si, pour tout réel a de I, le nombre dérivé $f'(a)$ existe, on dit que la fonction f est dérivable sur I.
On appelle fonction dérivée de f sur I la fonction qui, a tout réel $x \in I$ associe le réel $f'(x)$.
On la note f'.

2. Dérivées des fonctions usuelles

Propriétés :

La fonction f est définie par...	f est définie sur...	f est dérivable sur...	La fonction dérivable f' est définie par...
$f(x) = k$ ($k \in \mathbb{R}$) Fonction constante	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 0$
$f(x) = ax + b$ (a et b réels) Fonction affine	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = a$
$f(x) = x^2$ Fonction carrée	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 2x$
$f(x) = x^3$ Fonction cube	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 3x^2$
$f(x) = x^n$ ($x \in \mathbb{N}^*$) Fonction puissance	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = nx^{n-1}$
$f(x) = \frac{1}{x}$ Fonction inverse	$]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$	$]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$	$f'(x) = \frac{-1}{x^2}$
$f(x) = \frac{1}{x^n}$ ($x \in \mathbb{N}^*$) Fonction inverse d'une puissance	$]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$	$]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$	$f'(x) = \frac{-n}{x^{n+1}}$
$f(x) = \sqrt{x}$ Fonction racine carrée	$[0;+\infty[$	$]0;+\infty[$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

II. Opérations sur les fonctions dérivables

Propriété :
Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I, et k un nombre réel.
Les fonctions suivantes sont dérivables sur I de fonctions dérivées :

Fonction	**Fonction dérivée**
Somme $u+v$	$(u+v)'=u'+v'$
Produit par un réel ku	$(ku)'=ku'$
Produit uv	$(uv)'=u'v+uv'$
Quotient $\dfrac{u}{v}$	$\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$

Exemples :
Soit $f(x)=3x\sqrt{x}$ sur $I=]0;+\infty[$.

Posons $u(x)=3x$ et $v(x)=\sqrt{x}$.
On a $u(x)'=3$ et $v(x)'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$.
On a $(uv)'=u'v+uv'$.

$$\begin{aligned}\text{Donc } f'(x)&=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)\\&=3\sqrt{x}+3x\times\frac{1}{2\sqrt{x}}\\&=3\sqrt{x}+\frac{3x}{2\sqrt{x}}\times\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\\&=3\sqrt{x}+\frac{3x\sqrt{x}}{2x}\\&=3\sqrt{x}+1,5\sqrt{x}=4,5\sqrt{x}\end{aligned}$$

Soit $g(x)=\frac{2x-1}{x-5}$ sur $I=]-\infty;5[\cup]5;+\infty[$.

Posons $u(x)=2x-1$ et $v(x)=x-5$.
On a $u(x)'=2$ et $v(x)'=1$.
On a $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$.

$$\begin{aligned}\text{Donc } g'(x)&=\frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{[v(x)]^2}\\&=\frac{2(x-5)-(2x-1)\times 1}{(x-5)^2}\\&=\frac{2x-10-2x+1}{(x-5)^2}\\&=\frac{-9}{(x-5)^2}\end{aligned}$$

Propriété admise :
On considère un intervalle I et a et b deux réels.
Soit J l'intervalle formé des valeurs prises par $ax+b$ lorsque x décrit l'intervalle I.
Si la fonction g est dérivable sur J, alors la fonction f définie sur I par $f(x)=g(ax+b)$ est dérivable sur I et, pour tout réel x de I, on a $f'(x)=a\times g'(ax+b)$.

Exemple :
Soit f définie sur $[\frac{-2}{5};+\infty[$ par $f(x)=\sqrt{5x+2}$
On a $f: x\longrightarrow 5x+2\longrightarrow\sqrt{5x+2}$
La fonction f est de la forme $f(x)=g(ax+b)$ avec $a=5$, $b=2$ et $g: x\mapsto\sqrt{x}$

$$\begin{aligned}\text{Donc } f'(x)&=ag'(ax+b)\text{ avec } g': x\mapsto\frac{1}{2\sqrt{x}}\\&=5\times\frac{1}{\sqrt{5x+2}}\\&=\frac{5}{\sqrt{5x+2}}\end{aligned}$$

Pour tout $x\in[\frac{-2}{5};+\infty[$, $5x+2\in[0;+\infty[$.
Or g est dérivable sur $]0;+\infty[$.
Donc f est dérivable sur $[\frac{-2}{5};+\infty[$.

III. Application de la dérivation

1. Étude des variations d'une fonction

Théorème admis :
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I, de fonction dérivée f'.

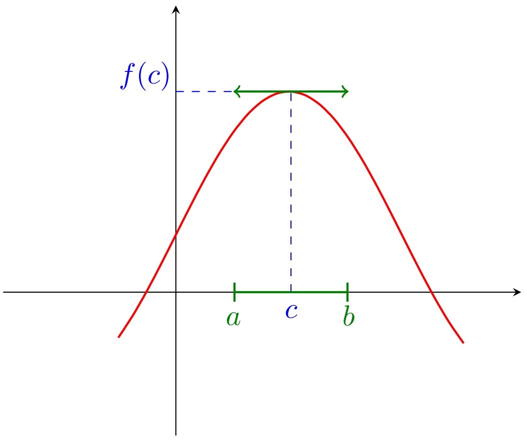
- Si f est croissante sur I, alors f' est positive sur I.
- Si f est décroissante sur I, alors f' est négative sur I.
- Si f est constante sur I, alors f' est nulle sur I.

Théorème réciproque admis :
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I, de fonction dérivée f'.

- Si f' est strictement positive sur I, sauf pour un nombre fini de réel où elle s'annule, alors f est strictement croissante sur I.
- Si f' est strictement négative sur I, sauf pour un nombre fini de réel où elle s'annule, alors f est strictement décroissante sur I.
- Si f' est nulle sur I, alors f est constante sur I.

2. Étude des extrema d'une fonction

Définition :
Soit f une fonction définie sur un intervalle I et c un réel de I et qui n'est pas une borne de I.
Dire que $f(c)$ est un maximum local de f signifie qu'il existe deux réels a et b dans I tels que $c \in]a;b[$ et que pour tout réel $x \in]a;b[$, $f(x) \leq f(c)$.
Dire que $f(c)$ est un minimum local de f signifie qu'il existe deux réels a et b dans I tels que $c \in]a;b[$ et que pour tout réel $x \in]a;b[$, $f(x) \geq f(c)$.
Un extremum local est un minimum ou un maximum local.



Théorème admis *(condition nécessaire d'un extremum local)* :
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I et a un réel de I.
Si f présente un extremum local en a alors $f'(a) = 0$.

Remarque : La réciproque est fausse. En effet, pour $f : x \mapsto x^3$ on a $f : x \mapsto 3x^2$ donc $f'(0) = 0$ mais f n'admet pas d'extremum local en O.

Théorème *(condition suffisante sur l'existence d'un extremum local)* :
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I, de dérivée f' et $a \in I$. Si la dérivée f' s'annule en a en changeant de signe en a, alors la fonction f admet un extremum local en a.