Continuité

Analyse - Cours

I Fonctions continues

I. 1 Fonction continue en un réel

Définitions :
Soient a un réel, I un intervalle contenant a et f une fonction définie sur I. On dit que f est continue en a si les limites à droite et à gauche, quand x tend vers a, de $f(x)$ existent et sont toutes égales à $f(a)$, autrement dit, si $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \lim\limits_{x\to a^-} f(x) = f(a)$.
Dans le cas contraire, on dit que f admet une discontinuité en a.

Remarque : Pour indiquer que les limites à droite et à gauche, quand x tend vers a, de $f(x)$ existent et sont égales à $f(a)$, on écrira simplement $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Exemple :

(1) La fonction valeur absolue est définie pour tout réel x par $\|x\| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$

Quand x tend vers 0 :
— la limite à droite est $\lim\limits_{x\to 0^+} \|x\| = \lim\limits_{x\to 0} x = 0$,
— la limite à gauche est $\lim\limits_{x\to 0^-} \|x\| = \lim\limits_{x\to 0} -x = 0$.
— De plus, l'image de 0 est $\|0\| = 0$.

La fonction valeur absolue est donc continue en 0.

(2) La partie entière d'un réel x est par définition l'unique entier relatif n tel que $n \leq x < n+1$. On la note $E(x)$. Pour tout entier relatif a, la fonction partie entière admet une discontinuité en a.
Démontrons par exemple que la fonction partie entière n'est pas continue en $a = 2$.
— Si $1 \leq x < 2$ alors $E(x) = 1$ dont la limite à gauche, quand x tend vers 2, de la fonction partie entière est $\lim\limits_{x\to 2^-} = 1$.
— Si $2 \leq x < 3$ alors $E(x) = 2$ dont la limite à droite, quand x tend vers 2, de la fonction partie entière est $\lim\limits_{x\to 2^+} = 2$.
La limite à gauche et la limité à droite sont différentes : cette fonction n'est donc pas continue en 2. La démonstration serait identique pour n'importe quel entier relatif.

I. 2 Fonction continue sur un intervalle

Définitions :
Soient I un intervalle et f une fonction définie sur I. On dit que f est continue sur I si pour tout réel a appartenant à I, f est continue en a.

1. Théorème (continuité des fonctions usuelles) :

1. Les fonctions affines, polynômes, racine carrée, valeur absolue, cosinus, sinus, exponentielles et logarithmes, sont continues sur chaque intervalle où elles sont définies.
2. Toute fonction construite à partir des précédentes par somme, produit, quotient ou composition, est continue sur chaque intervalle où elle est définie.

Exemple :

- La fonction f définie pour tout réel x par $f(x) = e^{3x-5}$, est continue sur $\mathbb{R}$ car elle est obtenue par la composition d'une fonction affine et de la fonction exponentielle.
- La fonction f définie pour tout réel x par $g(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x^2 - 1}$ est continue sur $]0;1[$ et sur $]1;+\infty[$ car elle est obtenue par quotient de la fonction racine carrée et d'une fonction polynôme.

2. Théorème (continuité des fonctions dérivables) :
Soient I un intervalle et f une fonction définie sur I. Si f est dérivable sur I alors f est continue sur I.

II Théorème des valeurs intermédiaires

3. Théorème des valeurs intermédiaires (TVI) :
Soit f une fonction définie sur un intervalle I. Soient a et b deux réels dans I. Pour tout k réel, si f est continue sur I et si $f(a) < k < f(b)$ alors il existe au moins un réel c dans l'intervalle $[a;b]$ tel que $f(x) = k$.

Définitions :
Soient I et J deux intervalles. Soit $f : I \mapsto J$. On dit que f est une bijection de I dans J si tout réel de J admet un unique antécédent dans I.

Exemple :

- Une fonction affine non constante est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
- La fonction exponentielle est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]0;+\infty[$.

4. Théorème de la bijection (corrolaire) :
Soit f une fonction définie sur un intervalle I. Soient a et b deux réels dans I. Il existe un réel k tel que si f est continue et strictement croissante et $f(a) < k < f(b)$ alors il existe un unique réel c dans l'intervalle $[a;b]$ tel que $f(c) = k$.

Remarque : Le théorème de la bijection est également valable pour une fonction strictement décroissante.
Exemple : démontrons l'existence d'une solution pour l'équation $\cos(x) = x$

Comme $-1 \leq \cos(x) \leq 1$, les solutions éventuelles sont à chercher dans l'intervalle $[-1;1]$.
Si $\dfrac{-\pi}{2} < x < 0$, alors $\cos(x) > 0$ et donc $\cos(x) \neq x$ ce qui veut dire qu'on peut réduire l'intervalle de recherche à $[0;1]$.
Étudions la fonction $f(x) = \cos(x) - x$ sur $[0;1]$: $f'(x) = -\sin(x) - 1 < 0$ car $\forall x \in [0;1]$: $\sin(x) > 0$ donc f est strictement décroissante sur $[0;1]$. De plus, f est continue car c'est une somme de fonctions de référence.
Aussi, $f(0) = 1 > 0$ et $f(1) = \cos(1) - 1 < 0$ car $\cos(1) < 0$
Conclusion : d'après le théorème de la bijection, l'équation $f(x) = 0$ admet donc une unique solution dans l'intervalle $]0;1[$. Donc $\cos(x) = x$ admet une unique solution réelle.

III Limite d'une suite par récurrence

5. Théorème :
Soit f une fonction définie sur un intervalle I. Soit $a \in I$. Si f est continue en a, alors pour toute suite u_n convergeant vers a, la suite $(f(u_n))$ converge vers a.

6. Théorème du point fixe :
Soif f une fonction définie sur I. Soit u_n la suite définie par récurrence telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n \in I$ et $u_{n+1} = f(u_n)$. Si u_n converge vers un réel l, et f est continue en l alors $f(l) = l$.

Exemple : Soit (u_n) : $\begin{cases} u_n = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} = \sqrt{\dfrac{u_n}{2} + 1} \end{cases}$

On peut prouver que u_n est croissante et majorée par 2 donc u_n converge vers un réel l.
La fonction $f(x) = \sqrt{(\dfrac{x}{2} + 1)}$ étant continue sur l'intervalle où elle est définie, d'après le théorème du point fixe :

$$\begin{aligned} f(l) = l \Leftrightarrow l &= \sqrt{\frac{l}{2} + 1} \\ &\Leftrightarrow l^2 = \frac{l}{2} + 1 \qquad \text{avec } l > 0 \\ &\Leftrightarrow 2l^2 - l - 2 = 0 \qquad \text{avec } l > 0 \\ &\text{On calcule} \quad \Delta = 17 > 0 \quad \text{donc} \quad x_1 = \frac{1 - \sqrt{17}}{4} < 0 \quad ; \quad x_2 = \frac{1 + \sqrt{17}}{4} > 0 \\ &\Leftrightarrow l = x_2 = \frac{1 + \sqrt{17}}{4} \end{aligned}$$

Conclusion $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \dfrac{1 + \sqrt{17}}{4}$.