Soient a, b, c et d des réels : -

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + bc = 1 \\ b(a+d) = 0 \\ c(a+d) = 0 \\ bc + d^2 = 1 \end{cases}$$

réécriture

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = 1 - bc \\ b(a+d) = 0 \\ c(a+d) = 0 \\ d^2 = 1 - bc \end{cases}$$

substitution de $1-bc$ par d^2

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = d^2 \\ b(a+d) = 0 \\ c(a+d) = 0 \\ d^2 = 1 - bc \end{cases}$$

réécriture

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - d^2 = 0 \\ b(a+d) = 0 \\ c(a+d) = 0 \\ d^2 = 1 - bc \end{cases}$$

identité remarquable n°3 : $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (a+d)(a-d) = 0 \\ b(a+d) = 0 \\ c(a+d) = 0 \\ d^2 = 1 - bc \end{cases}$$

- Supposons $a+d = 0$ et $a-d \neq 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} a+d = 0 \\ b\,\underline{(a+d)} = 0 \\ c\,\underline{(a+d)} = 0 \\ d^2 = 1 - bc \end{cases}$$

substitution de $a+d$ par 0

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+d = 0 \\ b \times \underline{0} = 0 \\ c \times \underline{0} = 0 \\ d^2 = 1 - bc \end{cases}$$

réécriture sans les expressions inutiles

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+d = 0 \\ d^2 = 1 - bc \end{cases}$$

solutions après application de la fonction racine carrée

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+d=0 \\ d=\sqrt{1-bc} \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} a+d=0 \\ d=-\sqrt{1-bc} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} d=-a \\ d=\sqrt{1-bc} \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \begin{cases} d=-a \\ d=-\sqrt{1-bc} \end{cases}$$

substitution de d par $-a$

$$\Leftrightarrow -a = \sqrt{1-bc}$$

$$\Leftrightarrow a = -\sqrt{1-bc} \qquad \times(-1)$$

substitution de d par $-a$

$$\Leftrightarrow -a = -\sqrt{1-bc}$$

$$\Leftrightarrow a = \sqrt{1-bc} \qquad \times(-1)$$

CONDITIONS 1

$$A = \begin{pmatrix} -\sqrt{1-bc} & b \\ c & \sqrt{1-bc} \end{pmatrix}$$ avec $a+d=0$ et $bc \leq 1$

$$A = \begin{pmatrix} \sqrt{1-bc} & b \\ c & -\sqrt{1-bc} \end{pmatrix}$$ avec $a+d=0$ et $bc \leq 1$

- Supposons $a-d=0$ et $a+d \neq 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} a-d=0 \\ b(a+d)=0 \\ c(a+d)=0 \\ d^2 = 1-bc \end{cases}$$

réécriture de $a-d=0$ et substitution de a par d

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=d \\ b(d+d)=0 \\ c(d+d)=0 \\ d^2 = 1-bc \end{cases}$$

développement

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=d \\ bd+bd=0 \\ cd+cd=0 \\ d^2 = 1-bc \end{cases}$$

réécriture

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=d \\ 2bd=0 \\ 2cd=0 \\ d^2 = 1-bc \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = d \\ \underline{bd} = 0 \\ \underline{cd} = 0 \\ d^2 = 1 - bc \end{cases} \quad \div 2$$

∘ Supposons que $d \neq 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} d = a \\ db = 0 \\ dc = 0 \\ d^2 = 1 - bc \end{cases}$$

substitution de bc par 0

$$\Leftrightarrow \begin{cases} d = a \\ b = 0 \\ c = 0 \\ d^2 = 1 \end{cases} \xrightarrow{\text{réécriture des solutions de } d^2 = 1} \Leftrightarrow \begin{cases} d = a \\ b = 0 \\ c = 0 \\ \begin{cases} d = -1 \\ \text{ou} \\ d = 1 \end{cases} \end{cases}$$

CONDITIONS 2

$$\boxed{A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}$$

- Supposons que $d = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ bd = 0 \\ cd = 0 \\ 0 = 1 - bc \end{cases}$$

réécriture

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ bd = 0 \\ cd = 0 \\ bc = 1 \end{cases}$$

réécriture des solutions de $bc = 1$

$$\begin{cases} a = 0 \\ bd = 0 \\ cd = 0 \\ \begin{cases} b = 1 \\ c = 1 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \text{OU} \quad \begin{cases} a = 0 \\ bd = 0 \\ cd = 0 \\ \begin{cases} b = -1 \\ c = -1 \end{cases} \end{cases}$$

CONDITIONS 3

$$\boxed{A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}}$$