Variables aléatoires réelles

1$^{\text{re}}$ Spécialité mathématiques
Probabilités et Statistiques - Cours

I. Variable aléatoire et loi de probabilité

1. Définition d'une variable aléatoire discrète

Définition :
Soit $\Omega = \{\omega_1; \omega_2; \ldots; \omega_k\}$ l'univers associé à une expérience aléatoire.
Une variable aléatoire X sur l'univers Ω est une fonction définie sur Ω et à valeurs dans $\mathbb{R}$. Définir une variable aléatoire consiste donc à associer, à chaque issue ω_i de l'expérience aléatoire, un nombre réel x_i.
On note alors $(X = x_i)$ l'évènement formé des issues qui ont pour image x_i par X.

Exemple :
On lance un dé équilibré à 6 faces.
On gagne 2€ si le « 2 » sort, 1€ si le « 1 » sort et on perd 1€ dans tous les autres cas. On appelle X la variable aléatoire qui à chaque issue associe le gain obtenu.
On a $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ et $\Omega(X) = \{2; 1; -1\}$.
On précise les évènements de X :

- $(X = 2) = \{2\}$
- $(X = 1) = \{1\}$
- $(X = -1) = \{3; 4; 5; 6\}$

Loi de probabilité d'une variable aléatoire discrète

Définition :
Soit X une variable aléatoire qui prend les valeurs $\{x_1; x_2; \ldots; x_k\}$.
Donner la loi de probabilité de X, c'est donner la valeur $p(X = x_i)$, pour tout i avec $1 \leq i \leq k$.

Les résultats sont généralement présentés sous forme d'un tableau :

Valeurs de X	x_1	x_2	$\ldots$	x_k
Probabilité	$p(X = x_1)$	$p(X = x_2)$	$\ldots$	$p(X = x_k)$

Remarque : La somme des probabilités $p(X = x_i)$, pour i allant de 1 à k, est égal à 1.

Exemple *(suite)* :

Valeurs de X	2	1	-1
Probabilité $p(X = x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

II. Espérance, variance et écart-type d'une variable aléatoire

Soit X une variable aléatoire qui prend en valeurs $x_1; x_2; \ldots; x_k$ et dont la loi de probabilité est donnée par le tableau suivant :

Valeurs x_i de X	x_1	x_2	$\ldots$	x_k
Probabilité	p_1	p_2	$\ldots$	p_k

Définition *(espérance)* :
L'espérance de la variable aléatoire X est le réel noté $E(X)$ définie par :
$$E(x) = \sum_{i=1}^{k} x_i p_i$$

Remarques : L'espérance d'une variable aléatoire représente la valeur moyenne prise par X.

Lorsque les valeurs prises par X représentent les gains ou les pertes à un jeu, alors $E(X)$ représente le gain moyen par partie :

- Si $E(X) > 0$ alors le jeu est favorable au joueur.
- Si $E(X) < 0$ alors le jeu est défavorable au joueur.
- Si $E(X) = 0$ alors le jeu est équitable.

Définition *(variance)* :
La variance de la variable aléatoire X est le réel noté $V(X)$ définie par :
$$V(x) = \sum_{i=1}^{k} [x_i - E(X)]^2 \times p_i$$

Remarque : La variance d'une variable aléatoire X se calcule aussi avec la formule $V(X) = \sum_{i=1}^{k} p_i x_i^2 - E(X)^2$

Définition *(l'écart-type)* :
L'écart-type $\sigma(X)$ est défini comme la racine carrée de la variance $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

Remarque : Par analogie avec les statistiques, de la même façon que $E(X)$ représente une moyenne, $V(X)$ et $\sigma(X)$ sont des indicateurs de dispersion des valeurs de X autour de $E(X)$.
Plus la variance et l'écart-type sont grands, plus les valeurs sont dispersés autour de la moyenne (espérance).

Exemple :
On calcule l'espérance de X : $E(X) = 2 \times \frac{1}{6} + 1 \times \frac{1}{6} - 1 \times \frac{2}{3} = -\frac{1}{6} \simeq -0,17$.
Sur un grand nombre de parties, le gain moyen par partie pour le joueur est $-0,17$. Donc le jeu n'est pas favorable au joueur.

On calcule la variance et l'écart-type :

- $V(X) = \left[2 - \left(-\frac{1}{6}\right)\right]^2 \times \frac{1}{6} + \left[1 - \left(-\frac{1}{6}\right)\right]^2 \times \frac{1}{6} + \left[-1 - \left(-\frac{1}{6}\right)\right]^2 \times \frac{2}{3} = \frac{53}{36} \simeq 1,47$
- $\sigma(X) = \sqrt{\frac{53}{36}} \simeq 1,21$