Les limites

Analyse - Cours

I Limites finies d'une fonction en $+\infty$

Définition :
Soit f une fonction et l un réel.
Dire que «$f(x)$ tend vers l quand x tend vers $+\infty$ » signifie $\forall \varepsilon > 0, \exists A \in \mathbb{R}, \forall x > A : l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon$. On note $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l$.

1. Théorème :
Pour toutes fonctions f et g et pour tous réel l et l' :
Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = l'$ et $l < l'$ alors $\exists A \in \mathbb{R}, \forall x > A : f(x) < g(x)$.

Remarque : Une conséquence de ce théorème est que la limite d'une fonction est unique si elle existe. En effet, si on applique ce théorème à une fonction f avec elle-même, on obtient $f(x) < f(x)$ ce qui n'a pas de sens.

2. Théorème de comparaison des limites :
Soient f et g deux fonctions et l et l' deux réel.
Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = l'$ et $\exists A \in \mathbb{R}, \forall x > A : f(x) \leq g(x)$ alors $l \leq l'$.

Remarque : Attention, même si $f(x) < g(x)$, leur limites peuvent quand même être égales (ex : $g(x) = \frac{1}{x}$ et $f(x) = \frac{-1}{x}$ tendent toutes les deux vers 0.)

3. Théorème des gendarmes (admis) :
Soient f, g et h trois fonctions et l un réel.
Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = l$ et $\exists A \in \mathbb{R}, \forall x > A,\ f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ alors $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = l$.

4. Théorème des limites de référence :

(i) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$

(ii) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = 0$

(iii) $\forall n \in \mathbb{N}^*, \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^n} = 0$

5. Théorème de linéarité :
Soient f et g deux fonctions et l, l' deux réels. Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = l'$ alors :

(i) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) + g(x) = l + l'$

(ii) $\forall k \in \mathbb{R} \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) \times k = k \times l$

(iii) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) \times g(x) = l \times l'$

(iv) Si $l' \neq 0$ et $\exists A \in \mathbb{R}, \forall x > A : g(x) \neq 0$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{l}{l'}$

II Limites de suites

II. 1 Limites finies (suites convergentes)

Définition :
Soient u une suite et l un réel.
On dit que la suite u tend vers l (quand n tend vers $+\infty$) lorsque la proposition (P) suivante est vérifiée : (P) : « $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{Z}, \forall n \geq N : l - \varepsilon < u_n < l + \varepsilon$ »
On dit que la suite u converge vers l et on note : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$

6. Théorème :
Soient u et v deux suites. Soient l et l' deux réels.
Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = l'$ et $l < l'$ alors $\exists N \in \mathbb{Z}, \forall n \leq N : u_n \leq v_n$

Remarque : Ce théorème a pour corollaire que la limite d'une suite est unique si elle existe.

7. Théorème de comparaison des limites :
Soient u et v deux suites. Soient l et l' deux réels.
Si $\exists N \in \mathbb{Z}, \forall n \geq N : u_n \geq v_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = l'$ alors $l \leq l'$.

8. Théorème des gendarmes :
Soient u ; v et w trois suites. Soient l un nombre réel.
Si $\exists N \in \mathbb{Z}, \forall n \geq N : u_n \leq v_n \leq w_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = l$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = l$

Remarque : Comme pour les fonctions, les deux théorèmes précédents permettent de comparer les limites de fonctions simples, appelées « limites de référence », avec des limites de fonctions plus élaborées.

9. Théorème des limites de référence :

(i) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}} = 0$

(ii) $\forall p \in \mathbb{N}, p \geq 1 : \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^p} = 0$

10. Théorème de linéarité :
Soient u et v deux suites. Soient l et l' deux réel.
Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = l'$ alors :

(i) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n + v_n = l + l'$

(ii) $\forall k \in \mathbb{R} : \lim\limits_{n\to+\infty} k \times u_n = k \times l$

11. Théorème produit et quotient :
Soient u et v deux suites. Soient l et l' deux réel.
Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = l'$ alors :

(i) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \times v_n = l \times l'$

(ii) Si $l \neq 0$ et $\exists N \in \mathbb{Z}, \forall n \geq N : v_n \neq 0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = \dfrac{l}{l'}$

12. Théorème :
Pour toute suite u :

(i) Si u est croissante et majorée alors u converge.

(ii) Si u est décroissante et minorée alors u converge.

II. 2 Limites infinies

Définition :
On dit que la suite u tend vers $+\infty$ (quand n tend vers $+\infty$) lorsque la propostion (P) suivante est vérifiée : (P) : « $\forall A \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{Z}, \forall n \geq N : u_n > A$ ».
On dit que la suite u diverge vers $+\infty$ et on note $\lim\limits_{n\to+\infty} = +\infty$.

13. Théorème de comparaison :
Soient u et v deux suites.
Si $\exists N \in \mathbb{Z}, \forall n \geq N : u_n \geq v_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

14. Théorème des suites croissantes :
Soit u une suite. Si u est croissante et non majorée, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Remarque : Une suite non majorée ne diverge pas forcément vers $+\infty$ (ex : $\forall n \in \mathbb{N} : u_n = (-1)^n$).

15. Théorème des limites de référence :

(i) $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$

(ii) $\forall p \in \mathbb{N}, p \geq 1 : \lim\limits_{n\to+\infty} n^p = +\infty$

16. Théorème somme et produit :
Soient u et v deux suites. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$ alors :

(i) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n + v_n = +\infty$

(ii) $\forall k \in \mathbb{R}^{*+} : \lim\limits_{n\to+\infty} k \times u_n = +\infty$

(iii) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \times v_n = +\infty$

Remarque : Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$, on ne peut rien déduire de la limite du quotient $\dfrac{u_n}{u_v}$!

17. Théorème des limites de référence :
Soit u une suite à termes strictement positifs.

(i) Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{u_n} = 0$

(ii) Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{u_n} = +\infty$

18. Théorème :
Soit u une suite. Soient r et q deux réel.

(i) Si u est arithmétique de raison r :
1. Si $r > 0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$
2. Si $r < 0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$

(ii) Si u est géométrique de raison q et $u_0 \not> 0$:
1. Si $q > 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$
2. Si $-1 < q < 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$
3. Si $q \leq -1$ alors u diverge sans limite

II. 3 Complément sur les suites divergeant vers $-\infty$

Définition :
On dit que la suite u tend vers $-\infty$ (quand n tend vers $+\infty$) lorsque la propostion (P) suivante est vérifiée : (P) : « $\forall A \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{Z}, \forall n \geq N : u_n < A$ ».
On dit que la suite u diverge vers $-\infty$ et on note $\lim\limits_{n\to+\infty} = -\infty$.

19. Théorème :
Soit u une suite : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} -(u_n) = +\infty$

20. Théorème de comparaison :
Soient u et v deux suites.
Si $\exists N \in \mathbb{Z}, \forall n \geq N : u_n \leq v_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

21. Théorème :
Soit u une suite. Si u est décroissante et non minorée alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

22. Théorème somme et produit :
Soient u et v deux suites.

(i) Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n + v_n = -\infty$

(ii) $\forall k \in \mathbb{R}^{*+}$: Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} k \times u_n = -\infty$

(iii) Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \times v_n = +\infty$

(iv) Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \times v_n = -\infty$

23. Théorème de la limite de l'inverse :
Soit u une suite à termes strictement négatifs.

(i) Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{u_n} = 0$

(ii) Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{u_n} = -\infty$

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n =$	$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n =$	$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n + v_n =$	$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \times v_n =$	$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} =$
$L \neq 0$	0	L	0	Forme indéterminée
0	0	0	0	Forme indéterminée
$L \neq 0$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$ (règle des signes)	0
0	$\pm\infty$	$\pm\infty$	Forme indéterminée	0
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	Forme indéterminée
$+\infty$	0 avec $\forall n, v_n > 0$	$+\infty$	Forme indéterminée	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	Forme indéterminée	$-\infty$	Forme indéterminée
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	Forme indéterminée
$-\infty$	0 avec $\forall n, v_n > 0$	$-\infty$	Forme indéterminée	$-\infty$

Remarque : Dans le cas où il existe plusieurs exemples donnant des limites différentes, on parle de forme indéterminée

III Compléments sur les limites de fonctions

III. 1 Limite infinie d'une fonction en $+\infty$

Définitions :
- $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ signifie « $\forall A \in \mathbb{R}, \exists B \in \mathbb{R}, \forall x \geq B : f(x) > A$ »
- $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ signifie « $\forall A \in \mathbb{R}, \exists B \in \mathbb{R}, \forall x \geq B : f(x) < A$ »

24. Théorème de comparaison :
Soient f et g deux fonctions.
Si $\exists A \in \mathbb{R}, \forall x > A, f(x) \leq g(x)$

(i) et si $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ alors $\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$

(ii) et si $\lim_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$ alors $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

Remarque : On admet que les règles à propos des opérations sur les limites infinies de suite (tableau page précédente) reste valable pour les limites infinies de fonctions.

III. 2 Limites d'une fonction en $-\infty$

Définitions :
- $\lim_{x \to -\infty} f(x) = l$ signifie « $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{*+}, \exists A \in \mathbb{R}, \forall x < A : l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon$ »
- $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ signifie « $\forall A \in \mathbb{R}, \exists B \in \mathbb{R}, \forall x \leq B : f(x) > A$ »
- $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ signifie « $\forall A \in \mathbb{R}, \exists B \in \mathbb{R}, \forall x \leq B : f(x) < A$ »

25. Théorème des limites de référence en $-\infty$:
Pour tout entier $p \geq 1$:

(i) $\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^p} = 0$

(ii) Si p est pair alors $\lim_{x \to -\infty} x^p = +\infty$

(iii) Si p est impair alors $\lim_{x \to -\infty} x^p = -\infty$

Remarque : On admet que tous les théorème de comparaison (ex : théorème des gendarmes) ainsi que toutes les règles à propos des opérations restent valables pour les limites quand x tend vers $-\infty$.

III. 3 Limite à gauche et à droite d'une fonction en un réel

On considère un réel a et un intervalle I contenant a, ainsi qu'une fonction f définie partout sur I sauf en a. Quand x tend vers a, la limite de $f(x)$ peut être différente si $x < a$ et si $x > a$.

Définitions :
On peut étudier la limite d'une fonction en un réel a :
- par valeurs inférieures à ce réel. On parle de limite à gauche en a et on note $\lim_{x \to a^-}$
- par valeurs supérieures à ce réel. On parle de limite à droite en a et on note $\lim_{x \to a^+}$

III. 4 Limites de fonctions composées

Dans le théorème qui suit, les lettre a, b et c peuvent désigner soit des nombres réels, soit $-\infty$, soit $+\infty$.

26. Théorème de composition des limites :
Soit I un intervalle dont l'une des bornes est a. Soit u une fonction définie sur I. Soient f et g deux fonctions telles que $\forall x \in I : f(x) = g(u(x))$.
Si $\lim\limits_{x\to a} u(x) = b$ et $\lim\limits_{x\to b} g(x) = c$ alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) = c$.

IV Limites de fonctions exponentielle et logarithme népérien

IV. 1 Fonction exponentielle

27. Théorème :

(i) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$

(ii) $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$

28. Théorème des croissances comparées :

(i) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$

(ii) $\lim\limits_{x\to-\infty} x \times e^x = 0$

Remarques :
- Ce sont des formes indéterminée.
- On peut généraliser ce théorème à n'importe quelle puissance de x :
  $\forall n \in [\![1;+\infty]\!] : \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n \times e^x = 0$

IV. 2 Fonction logarithme népérien

29. Théorème :

(i) $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$

(ii) $\lim\limits_{x\to 0} \ln(x) = -\infty$

30. Théorème des croissances comparées :

(i) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$

(ii) $\lim\limits_{x\to-\infty} x \times \ln(x) = 0$

Remarques :
- Ce sont des formes indéterminée.
- On peut généraliser ce théorème à n'importe quelle puissance de x :
  $\forall n \in [\![1;+\infty]\!] : \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x^n} = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n \times \ln(x) = 0$
- L'ordre de vitesse de croissance des fonctions est le suivant : $\ln(x)$, $\sqrt{x}$, x, x^2, x^3, $\ldots$, x^n, e^x.