Nombres complexes

Algèbre - Cours

I Ensemble des nombres complexes

I. 1 Notion de nombre complexe

1. Propriété :
Il existe un ensemble des nombres complexes (noté $\mathbb{C}$) qui possède les propriétés suiante :

(i) $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

(ii) L'addition et la multiplication des réels se prolongent aux nombres complexes et les règles de calcul sont les mêmes.

(iii) Il existe un nombre complexe i tel que $i^2 = -1$.

(iv) Tout nombre complexe z s'écrit $z = a + ib$ avec a et b des réels.

Définitions (nombre complexe) :
L'écriture $z = a + ib$ d'un nombre complexe avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ est appelé forme algébrique (ou cartésienne) de z avec :

— a la partie réelle de z noté $a = \mathrm{Re}(z)$.

— b la partie imaginaire de z noté $a = \mathrm{Im}(z)$.

Remarques :

Soit z un nombre complexe.

— On a $z = \mathrm{Re}(z) + i \times \mathrm{Im}(z)$

— Si $\mathrm{Re}(z) = 0$, on dit que z est imaginaire pur. On note $i\mathbb{R}$ l'ensemble des imaginaires purs.

— Si $\mathrm{Im}(z) = 0$, z est réel.

1. Théorème :
Soient $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ deux nombres complexes avec a, b, a' et b' des réels. Alors : $z = z' \Leftrightarrow \begin{cases} a = a' \\ b = b' \end{cases}$.

Corrolaire :
Tout nombre complexe z s'écrit de manière unique $z = a + ib$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

2. Propriétés (conséquence) :
Soient $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ deux nombres complexes avec a, b, a' et b' des réels. Alors :

(i) $z \neq z' \Leftrightarrow a \neq a' \vee b \neq b'$

(ii) $z = 0 \Leftrightarrow a = 0 \wedge b = 0$

(iii) $z \neq 0 \Leftrightarrow a \neq 0 \vee b \neq 0$

I. 2 Opérations sur les nombres complexes

3. Propriétés (addition et multiplication) :
Soient $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ deux nombres complexes avec a, b, a' et b' des réels. Alors :

(i) $z + z' = (a + a') + i(b + b')$

(ii) $z \times z' = (aa' - bb') + i(ab' - a'b)$

Définition (opposé) :
Pour tout nombre complexe $z = a + ib$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, il existe un unique nombre complexe z' tel que $z + z' = 0$. On appelle z' l'opposé de z et on le note $-z = (-a) + i(-b)$.

Définition (soustraction) :
Soient $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ deux nombres complexes avec a, b, a' et b' des réels. Alors $z - z'$ est défini par $z + (-z')$ et on a $z - z' = (a - a') + i(b - b')$.

Définition (inverse) :
Pour tout nombre complexe $z = a + ib$ avec a, b des réels et $z \neq 0$, il existe un unique nombre complexe z' tel que $z \times z' = 1$. On appelle z' inverse de z et on le note $\dfrac{1}{z} = \dfrac{a}{a^2 + b^2} + i \times \dfrac{b}{a^2 + b^2}$.

Définition (quotient) :
Soient z et z' deux nombres complexes tels que $z' \neq 0$. Alors $\dfrac{z}{z'}$ est défini par $\dfrac{z}{z'} = z \times \dfrac{1}{z'}$.

II Conjugué d'un nombre complexe

Définition :
Soit z un nombre complexe tel que $z = a + ib$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Alors le conjugué de z, noté $\overline{z}$, est le nombre complexe défini par $\overline{z} = a - ib$.

4. Propriétés :
Pour tout nombre complexe z, on a :

(i) $z + \overline{z} = 2\text{Re}(z)$

(ii) $z - \overline{z} = 2i\text{Im}(z)$

(iii) $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z = \overline{z}$

(iv) $z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow z = -\overline{z}$

(v) $\overline{\overline{z}} = z$

(vi) $z\overline{z} = \text{Re}(z)^2 + \text{Im}(z)^2$

5. Propriétés (opérations et conjugué) :
Pour tous nombres complexes z et z', on a :

(i) $\overline{-z} = -\overline{z}$

(ii) $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$

(iii) $\overline{z \times z'} = \overline{z} \times \overline{z'}$

(iv) $\forall n \in \mathbb{N}, \overline{(z^n)} = (\overline{z})^n$

(i) Si $z \neq 0$, $\overline{\left(\dfrac{1}{z}\right)} = \dfrac{1}{\overline{z}}$

(ii) Si $z \neq 0$, $\overline{\left(\dfrac{z'}{z}\right)} = \dfrac{\overline{z'}}{\overline{z}}$

III Équations du second degré à coefficients réels

6. Propriété :
On considère l'équation $z^2 = a$ avec a un réel.

(i) Si $a > 0$, alors l'équation admet deux solutions réelles : $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$.
(ii) Si $a < 0$, alors l'équation admet deux solutions réelles : $i\sqrt{-a}$ et $-i\sqrt{-a}$.

7. Propriétés (solutions) :
On considère l'équation $az^2 + bz + c = 0$ avec a, b, c trois réels et $a \neq 0$. Soit $\Delta = b^2 - 4ac$ le discriminant de cette équation.

(i) Si $\Delta > 0$, alors l'équation admet deux solutions réelles distinctes :

$$z_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } z_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

(ii) Si $\Delta = 0$, alors l'équation admet une unique solution réelle :

$$z_0 = \frac{-b}{2a}$$

.

(iii) Si $\Delta < 0$, alors l'équation admet deux solutions complexes conjuguées :

$$z_1 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a} \text{ et } z_2 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

8. Propriétés (factorisation) :
On considère l'équation $az^2 + bz + c = 0$ avec a, b, c trois réels et $a \neq 0$. Soit $\Delta = b^2 - 4ac$ le discriminant de cette équation.

(i) Si $\Delta \neq 0$, alors on a $az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2)$.
(ii) Si $\Delta = 0$, alors on a $az^2 + bz + c = a(z - z_0)^2$.

IV Représentation dans le plan complexe

Dans toute la suite du chapitre, on munit le plan d'un repère $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ orthonormé direct.

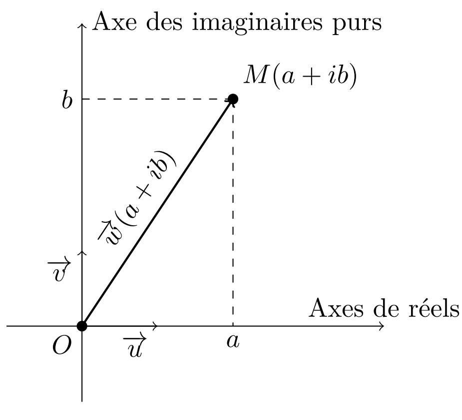
IV. 1 Définitions

Définitions :
À tout nombre complexe $z = a + ib$, avec a et b réels, on peut associer :

— L'unique point $M(a; b)$ appelé point image de z.
— L'unique vecteur $\overrightarrow{w} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ appelé vecteur image de z.

Réciproquement :

— À tout point $M(a; b)$ avec a et b deux réels, on peut associer l'unique nombre complexe $z = a + ib$ appelé affixe du point M.
— À tout vecteur vecteur $\overrightarrow{w} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ avec a et b deux réels, on peut associer l'unique nombre complexe $z = a + ib$ appelé affixe du vecteur $\overrightarrow{w}$.



Remarques :

- Les nombres réels sont les affixes des points de l'axe des abscisses aussi appelé : axe des réels.
- Les nombres imaginaires purs sont les affixes des points de l'axe des ordonnées aussi appelé : axe des imaginaires purs.
- Lorsqu'un point ou un vecteur est repéré par son affixe, le plan est appelé le plan complexe.
- L'affixe de M est souvent noté z_M et la donnée d'un point M d'affixe z_M est souvent notée $M(z_M)$.
- L'affixe de $\overrightarrow{w}$ est souvent noté $z_{\overrightarrow{w}}$, et la donnée d'un vecteur w d'affixe $z_{\overrightarrow{w}}$ est souvent notée $\overrightarrow{w}(z_{\overrightarrow{w}})$.

IV. 2 Propriétés

Des propriétés connues de géométrie sur les vecteurs et points donnent les propriétés suivantes.

9. Propriétés :
Soient $A(z_A)$ et $B(z_B)$ deux points du plan complexe. Soient $\overrightarrow{w_1}(z_{\overrightarrow{w_1}})$ et $\overrightarrow{w_2}(z_{\overrightarrow{w_2}})$ deux vecteurs du plan complexe. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

(i) $A = B \Leftrightarrow z_A = z_B$.

(ii) $\overrightarrow{w_1} = \overrightarrow{w_2} \Leftrightarrow z_{\overrightarrow{w_1}} = z_{\overrightarrow{w_2}}$.

(iii) $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe $z_B - z_A$.

(iv) Le milieu du segment $[AB]$ a pour affixe $\dfrac{z_A + z_B}{2}$.

(v) Le vecteur $\overrightarrow{w_1} + \overrightarrow{w_2}$ a pour affixe $z_1 + z_2$.

(vi) $\lambda\overrightarrow{w_1}$ a pour affixe λz_1.

IV. 3 Conjugué et opposé

10. Propriété :

(i) Les points M d'affixe z et M' d'affixe $\overline{z}$ sont symétriques par rapport à l'axe des réels.

(ii) Les points M d'affixe z et M'' d'affixe $-z$ sont symétriques par rapport à l'origine du repère.

V Module et argument d'un nombre complexe

V. 1 Module

Définition :
Soit M un point d'affixe z. Le module de z, noté $|z|$ est le réel positif défini par $|z| = OM$. Si $z = a + ib$ avec a et b deux réels. Alors $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Remarque : Si $z = z'$, alors $|z| = |z'|$. Mais la réciproque est fausse. Contre-exemple avec $z = 1 + i$ et $z' = 1 - i$. $|z| = |z'| = \sqrt{2}$ et $z \neq z'$.

11. Propriétés :
Soit z un nombre complexe.

(i) $|z|^2 = z\overline{z}$

(ii) $|\overline{z}| = |z|$

(iii) $|-z| = |z|$

(iv) $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$

Remarque : corrolaire de (i) : $|z| = \sqrt{z\overline{z}}$ (utile en pratique).

12. Propriété :
Soit $A(z_A)$ et $B(z_B)$. On a $AB = |z_B - z_A| = |z_A - z_B|$

13. Propriétés :

(i) Produit : $|zz'| = |z||z'|$

(ii) Puissance : $|z^n| = |z|^n$

(iii) Inverse : $\left|\dfrac{1}{z}\right| = \dfrac{1}{|z|}$

(iv) Quotient : $\left|\dfrac{z}{z'}\right| = \dfrac{|z|}{|z'|}$

14. Propriété (inégalité triangulaire) :
Soient z et z' deux nombres complexes, on a $|z+z'| \leq |z| + |z'|$

V. 2 Argument

Définition :
Soit un point M d'affixe non nulle z. On appelle argument de z, noté $\arg(z)$ une mesure, en radians, de l'angle $(\overrightarrow{u}; OM)$.

Remarques :

- Un nombre complexe non nul possède une infinité d'arguments de la forme $\arg(z)[2\pi]$.
- 0 n'a pas d'argument car dans ce cas l'angle $(\overrightarrow{u}; OM)$ n'est pas défini.

15. Propriété :
Soit z un nombre complexe non nul.

(i) $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \arg(z) = 0 \ \ [\pi]$

(ii) $z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \arg(z) = \dfrac{\pi}{2} \ \ [\pi]$

(iii) $\arg(\overline{z}) = -\arg(z) \ \ [2\pi]$

(iv) $\arg(-z) = \arg(z) + \pi \ \ [2\pi]$

VI Forme trigonométrique d'un nombre complexe

VI. 1 Définition

16. Propriété :
Soit $z = a + ib$ un nombre complexe non nul. On pose : $\theta = \arg(z)$.
On a alors : $a = |z|\cos(\theta)$ et $b = |z|\sin(\theta)$.

Définition :
On appelle forme trigonométrique d'un nombre complexe non nul l'écriture : $z = |z|(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$ avec $\theta = \arg(z)$.

17. Propriété :
Deux nombres complexes non nuls sont égaux si, et seulement si, ils ont le même module et le même argument (modulo 2π).

VI. 2 Relations trigonométrique et propriétés des arguments

18. Propriété (formule d'addition) :
Pour tous réel a et b,

(i) $\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$

(ii) $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$

(iii) $\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b)$

(iv) $\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$

19. Propriété (formule de duplication) :
Pour tous réel a,

(i) $\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a) = 1 - 2\sin^2(a) = 2\cos^2(a) - 1$

(ii) $\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a)$

20. Propriété (argument et opérations) :
Soient z et z' deux nombres complexes non nuls et n un entier naturel non nul.

(i) $\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z') \quad [2\pi]$

(ii) $\arg(z^n) = n\arg(z) \quad [2\pi]$

(iii) $\arg\left(\dfrac{1}{z}\right) = -\arg(z) \quad [2\pi]$

(iv) $\arg\left(\dfrac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z') \quad [2\pi]$

Remarques :

A l'aide des arguments, on peut gérer différentes situations em géométrie, par exemple, avec A, B, C et D quatre points d'affixes respectives a, b, c et d :
- Situation d'alignement :
  A, B et C alignés $\Leftrightarrow \arg(b-a) = \arg(c-a) \quad [\pi]$
- Situation de parallèlisme :
  $(AB) \parallel (CD) \Leftrightarrow \arg(b-a) = \arg(d-c) \quad [\pi]$
- Situation de perpendicularité :
  $(AB) \perp (CD) \Leftrightarrow \arg(b-a) = \arg(d-c) + \dfrac{\pi}{2} \quad [\pi]$

VII Forme exponentielle

VII. 1 Définition

2. Théorème (fonction exponentielle complexe) :
Soit f la fonction défini sur $\mathbb{R}$ par $f(\theta) = \cos\theta + i\sin\theta$.
- Pour tous réels θ et θ' on a $f(\theta+\theta') = f(\theta) \times f(\theta')$. De plus, $f(0) = 1$.
- Par analogie avec la fonction exponentielle dans $\mathbb{R}$, on pose $f(\theta) = e^{i\theta}$, soit $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$.
- On a $|e^{i\theta}| = 1$

Remarque : On peut écrire $e^{i\pi} - 1 = 0$. Cette relation possède la particularité de relier les grandes branches des mathématiques : l'analyse (avec la fonction e), l'algèbre (avec le nombre i) et la géométrie (avec le nombre π)

Définition :
Tout nombre complexe z non nul de module r et d'argument θ s'écrit sous sa forme exponentielle $z = re^{i\theta}$.

21. Propriétés :
Pour tous nombres réels θ et θ', on a :

(i) $e^{i\theta}e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$

(ii) $\dfrac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$

(iii) $\dfrac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')}$

(iv) $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$

22. Propriété (formule de Moivre) :
$\forall \theta \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{Z} : \left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}$ c'est à dire $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$

23. Propriété (formule d'Euler) :
$$\forall \theta \in \mathbb{R} : \begin{cases} \cos\theta = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \\ \sin\theta = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2} \end{cases}$$