Relations

Séminaire - Cours

I Quelques définitions

> **Définition (relation) :**
> Soient E et F des ensembles non vides. Soit $\mathcal{R}$ une partie de $E \times F$. On considère tous les couples (a, b) de $E \times F$ tels que $(a, b) \in \mathcal{R}$. On note $a\mathcal{R}b \Leftrightarrow (a, b) \in \mathcal{R}$ et on appelle $\mathcal{R}$ correspondance de E vers F.

> **Définition (relation binaire) :**
> On appelle relation binaire toute correspondance de E sur lui-même.

Exemple :

Dans $\mathcal{P}(E)$: $(A, B) \in \mathcal{P}(E), A\mathcal{R}B \Leftrightarrow A \subset B$

II Relation d'équivalence

> **Définition (réflexivité) :**
> Soit E un ensemble et $\mathcal{R}$ une relation binaire. La relation $\mathcal{R}$ est dit réflexive si :
>
> $$\forall x \in E, x\mathcal{R}x$$

Exemples :

- Dans $\mathcal{P}(E)$: $\forall A \in \mathcal{P}(E), A \subset A \to$ Relation réflexive
- Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2, x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x < y \to$ Relation non réflexive

Remarque : Soit $\mathcal{R}$ une relation réflexive sur E ($\mathcal{R} \subset E \times E$). Alors $\mathcal{R}$ est réflexive $\Leftrightarrow \forall x \in E, (x, y) \in \mathcal{R}$.

> **Définition (symétrie) :**
> La relation $\mathcal{R}$ est dite symétrique si :
>
> $$\forall (x, y) \in E^2, x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x$$

Exemples :

- Soit E l'ensemble des droites du plan. Alors $(d, d') \in E^2, d\mathcal{R}d' \Leftrightarrow d \perp d'$ est une relation symétrique.
- L'inclusion n'est pas symétrique.

> **Définition (transitivité) :**
> Soient $(x, y, z) \in E^3$. La relation $\mathcal{R}$ est transitive si :
>
> $$\forall (x, y, z) \in E^3, (x\mathcal{R}y) \wedge (y\mathcal{R}z) \Rightarrow x\mathcal{R}z$$

Exemple :

- L'inclusion est transitive.
- $d \mathbin{/\!/} d'$ est transitif.
- $d \perp d'$ n'est pas transitif.

Définition (équivalence) :
Soit E un ensemble non vide et $\mathcal{R}$ une relation binaire. On dit que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence si :
- $\mathcal{R}$ est réflexive,
- et $\mathcal{R}$ est transitive.
- $\mathcal{R}$ est symétrique,

Définition (antisymétrique) :
Soit E un ensemble non vide et $\mathcal{R}$ une relation binaire. La relation $\mathcal{R}$ est dite antisymétrique si :

$$\forall (x, y) \in E^2, (x\mathcal{R}y) \wedge (y\mathcal{R}x) \Rightarrow x = y$$

Exemple :

L'inclusion est une relation antisymétrique (si $A \subset B$ et $B \subset A$, alors $A = B$).

III Relation d'ordre

Définition (relation d'ordre) :
Soit E un ensemble non vide et $\mathcal{R}$ une relation binaire. On dit que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre si :
- $\mathcal{R}$ est réflexive,
- $\mathcal{R}$ est transitive,
- et $\mathcal{R}$ est antisymétrique.

Définition (ordre total, ordre partiel) :
On dit que la relation d'ordre $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre total si :

$$\forall (x, y) \in E^2, (x\mathcal{R}y) \vee (y\mathcal{R}x)$$

Sinon, on dit que l'ordre est partiel.

Définition (diagramme de Hasse) :
Soit $\mathcal{R}$ une relation d'ordre sur un ensemble fini E. Le diagramme de Hasse de $\mathcal{R}$ est le graphe dont les sommets sont les éléments de E et dont les arcs (ou arêtes) satisfont la propriété suivante.
Il existe un arc de x à y si et seulement si :
- $x \leq y$
- et $\exists z \in E, x \leq y \leq z \Rightarrow x = z \vee y = y$.

Exemple :