Nombre dérivé et applications

1^{re} Spécialité mathématiques
Analyse - Cours et démonstrations

Pour la suite du cours, on a f une fonction définie sur un intervalle I et on note C_f sa courbe représentative ainsi que a un réel appartenant à I et on note A le point de C_f d'abscisse a.

I. Taux de variation et nombre dérivé d'une fonction

1. Taux de variation d'une fonction entre deux réels

Définition :
Soit f une fonction définie sur un intervalle I et a et b sont deux réels de I.
On appelle taux de variation ou taux d'accroissement de f entre a et b le nombre $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Interprétation géométrique : Le taux de variation de f entre a et b correspond au coefficient directeur de la droite (AB) avec $A(a;f(a))$ et $B(b;f(b))$.

Interprétation cinématique : Si la fonction f représente la distance parcourue par un mobile en fonction du temps, le taux de variation de f entre a et b représente la vitesse moyenne entre les instants a et b.

2. Notion de nombre dérivé

Définition :
On considère une fonction f définie sur un intervalle I.
Soit a un réel de I et h un réel non nul tel que $a+h \in I$.
On dit que la fonction f est dérivable en a lorsque le taux de variation de f entre les réels a et $a+h$ tend vers un nombre réel L lorsque h se rapproche de 0.
Dans ce cas, ce réel est appelé nombre dérivé de f en a et on le note $f'(a)$.
On écrit alors $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a)$.

Interprétation cinématique :
Lorsque f est une fonction représentant la distance parcourue par un mobile en fonction du temps :

- le quotient $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ représente la vitesse moyenne entre les instants a et $a+h$.
- le nombre dérivé $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a)$ représente la vitesse instantanée à l'instant $t=a$.

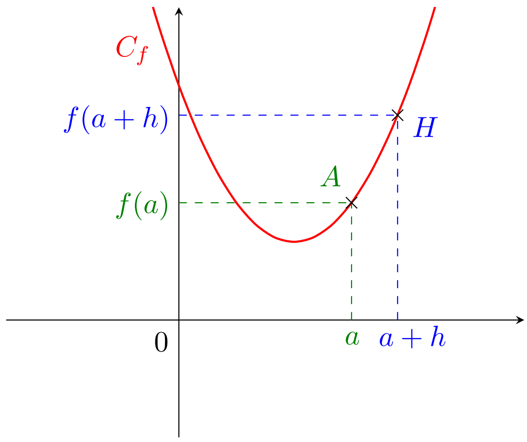
II. Tangente à une courbe en un point A

Sur la figure ci-contre : $A(a; f(a))$ et $H(a+h; f(a+h))$.

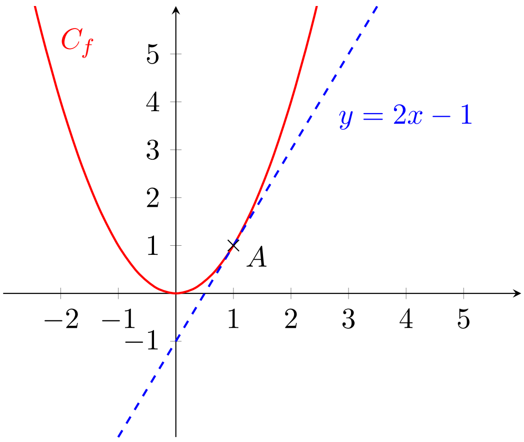
Le coefficient directeur de la droite (AH) est $\frac{y_H - y_A}{x_H - x_A} = \frac{f(a+h)-f(a)}{a+h-a} = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

Que se passe-t-il lorsque H se rapproche de plus en plus du point A, autrement dit lorsque h se rapproche de plus en plus de 0 ?

Si h tend vers 0, la droite (AM) se rapproche de la tangente à la courbe en A. Donc $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ noté $f'(a)$ correspond au coefficient directeur de la tangente.



Définition :
Lorsque f est dérivable en a, on appelle tangente à la courbe C_f au point d'abscisse a, la droite T passant par $A(a; f(a))$ dont le coefficient directeur est $f'(a)$.



Exemple : Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$ et C_f sa courbe représentative.

L'équation de la tangente à la courbe C_f au point A d'abscisse 1 est de la forme $y = mx+p$ avec $m = f'(1) = 2$.

L'équation devient $y = 2x + p$. On peut remplacer x par 1 et y par $f(1) = 1^2 = 1$.

Ainsi, $1 = 2 \times 1 + p \Leftrightarrow 1 = 2 + p \Leftrightarrow p = -1$. L'équation de la tangente est $y = 2x - 1$.

Propriété :
Soit f une fonction dérivable en a, de courbe représentative C_f.
L'équation de la tangente à C_f au point A d'abscisse a est donné par la formule $y = f'(a)(x-a) + f(a)$.

Démonstration :

L'équation de la tangente à la courbe C_f au point A d'abscisse a est de la forme $y = mx+p$ avec $m = f'(a)$.
L'équation devient $y = f'(a)x + p$.
On peut remplacer x par a et y par $f(a)$.

Ainsi, $f(a) = f'(a)a + p$

$\Leftrightarrow \ f(a) - f'(a)a = p$

L'équation de la tangente est donc $y = f'(a)x + f(a) - f'(a)a$

$$\Leftrightarrow \ y = f'(a)(x-a) + f(a)$$