La fonction exponentielle

1^{re} Spécialité mathématiques
Analyse - Cours

I. Généralités sur la fonction exponentielle

1. Introduction

Définition et propriété admise :
Il existe une unique fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$.
Cette fonction est appelée fonction exponentielle et se note $\exp$.
Ainsi, pour tout réel x, on a $\exp'(x) = \exp(x)$ et $\exp(0) = 1$.

2. Propriétés algébriques

Lemme :
Pour tout réel x, on a $\exp(x) \neq 0$.

Propriétés :

1. Pour tous réels x et y, on a $\exp(x+y) = \exp(x) \times \exp(y)$.
   Cette relation s'appelle relation fonctionnelle.
2. Pour tous réels x et y, on a :
   - $\exp(-x) = \dfrac{1}{\exp(x)}$
   - $\exp(x-y) = \dfrac{\exp(x)}{\exp(y)}$
   - $\exp(nx) = \exp(x)^n$

3. La notation e^x

Définition :
L'image de 1 par la fonction $\exp$ est le nombre noté e, appelé constante d'Euler.
Ainsi, $\exp(1) = e$.

Remarque : La fonction $\exp$ possède les mêmes propriété algébriques que les fonctions puissances. On notera donc $\exp(x) = e^x$ ($e \approx 2,7182\ldots$).

Propriété :
Pour tous réels x et y, on a :

- $e^{x+y} = e^x \times e^y$
- $e^{x-y} = \dfrac{e^x}{e^y}$
- $e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$
- $(e^x)^n = e^{nx}$

4. Lien avec les suites géométriques

Propriété :
Soit a un réel. Soit u la suite définie pour tout entier naturel n par $u_n = e^{na}$.
Alors la suite u est une suite géométrique.

II. Étude et applications de la fonction exponentielle

1. Signe de la fonction exponentielle

Propriété :
La fonction $\exp$ est strictement positive sur $\mathbb{R}$.
Autrement dit : pour tout nombre réel x, $e^x > 0$.

2. Variations de la fonction exponentielle

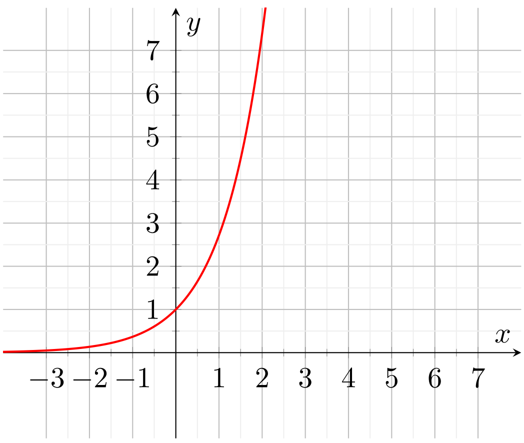
Propriété :
La fonction $\exp$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

On résume dans le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$+$	
Variations de $f(x) = e^x$		$\nearrow$	

3. Courbe de la fonction exponentielle

x	e^x
-2	$\approx 0,13$
$-1,5$	$\approx 0,22$
-1	$\approx 0,37$
$-0,5$	$\approx 0,61$
0	1
$0,5$	$\approx 1,65$
1	$\approx 2,72$
$1,5$	$\approx 4,48$
2	$\approx 7,39$



4. Fonctions définies par $f(t) = e^{kt}$ avec $k \in \mathbb{R}$

Propriété :
Pour $k > 0$, la fonction f définie par $f(t) = e^{kt}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
Pour $k < 0$, la fonction f définie par $f(t) = e^{kt}$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

5. Fonctions du type $f : x \mapsto e^{ax+b}$

Propriété :
Pour a et b fixés, la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{ax+b}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $f'(x) = a \times e^{ax+b}$.

6. Équations et inéquations

Propriété :
Pour tous réels a et b, on a :

- $e^a = e^b \Leftrightarrow a = b$
- $e^a < e^b \Leftrightarrow a < b$

Exemples :

- On résout dans $\mathbb{R}$ l'équation $e^{2x+1} = e^{x-3}$:

$$\begin{aligned} & e^{2x+1} = e^{x-3} \\ \Leftrightarrow\ & 2x+1 = x-3 \\ \Leftrightarrow\ & x+1 = -3 \\ \Leftrightarrow\ & x = -4 \\ \Leftrightarrow\ & S = \{-4\} \end{aligned}$$

- On résout dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $e^{x-3} < 1$:

$$\begin{aligned} & e^{x-3} < 1 \\ \Leftrightarrow\ & e^{x-3} < e^0 \\ \Leftrightarrow\ & x-3 < 0 \\ \Leftrightarrow\ & x < 3 \\ \Leftrightarrow\ & S =]-\infty; 3[\end{aligned}$$