Le second degré

1$^{\text{re}}$ Spécialité mathématiques
Algèbre - Cours

I. Les fonctions polynômes du second degré

Définition :
On appelle *fonction polynôme (ou trinôme) du second degré* toute fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ où a, b et c sont trois réel avec $a \neq 0$.
Les réels a, b et c sont appelés *coefficients de la fonction.*

Exemple :

- f définie sur $\mathbb{R}$ tel que $f(x) = 2x^2 - 4x + 1$
- g définie sur $\mathbb{R}$ tel que $g(x) = -x^2 + 9x - 12$

Remarque : L'expression $ax^2 + bx + c$ est dite forme développée de $f(x)$.

1. Forme canonique

Théorème :
Toute fonction trinôme du second degré définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$ peut s'écrire sous une forme appelée canonique $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$, avec $\alpha = -\frac{b}{2a}$ et $\beta = f(\alpha)$.

Exemple :

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 4x + 17$.
Donner sa forme canonique.

1. En utilisant le théorème :
   On a $a = 1$, $b = -4$ et $c = 17$
   Calculons $\alpha = -\frac{b}{2a} = -\frac{-4}{2\times 1} = \frac{4}{2} = 2$ et $\beta = f(\alpha) = f(2) = 2^2 - 4 \times 2 + 17 = 13$
   Donc la forme canonique de f est $f(x) = 1(x - 2)^2 + 13$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

2. En utilisant une identité remarquable :

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 - 4x + 17 \\ &= x^2 - 4x + 4 - 4 + 17 \\ &= (x-2)^2 + 13 \end{aligned}$$

   Donc la forme canonique de f est $f(x) = (x - 2)^2 + 13$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

2. Sens de variation

Propriété :
Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$.

- Cas où $a > 0$: la fonction f est strictement décroissante sur $]-\infty;\alpha]$ puis strictement croissante sur $[\alpha;+\infty[$. La fonction f admet un minimum égal à β atteint en $x = \alpha$.

- Cas où $a < 0$: la fonction f est strictement croissante sur $]-\infty;\alpha]$ puis strictement décroissante sur $[\alpha;+\infty[$. La fonction f admet un maximum égal à β atteint en $x = \alpha$.

On retient :

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	β	$\nearrow$

car $a > 0$

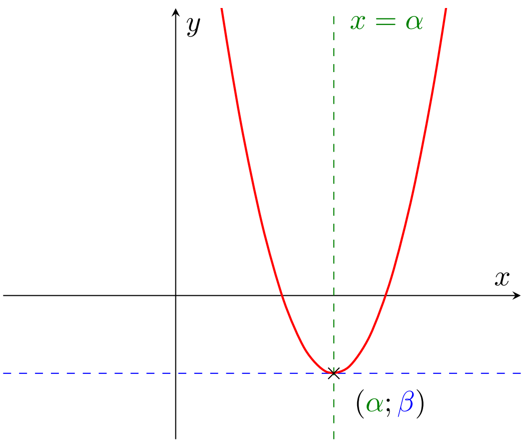
x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f(x)$	$\nearrow$	β	$\searrow$

car $a < 0$

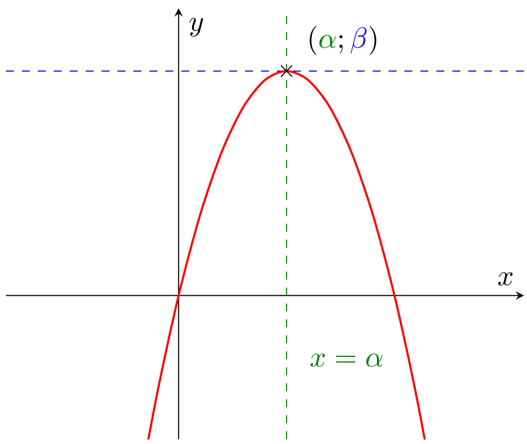
3. Représentation graphique

Propriété *(conséquence)* :
Soit f une fonction définie par $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$.
Dans un repère orthogonal d'origine O, la représentation graphique de la fonction f est une parabole de sommet $S(\alpha;\beta)$ qui admet pour axe de symétrie la droite d'équation $x = \alpha$.

On retient :



car $a > 0$



car $a < 0$

II. Factorisation d'une fonction du second degré et résolution d'équation du second degré

1. Factorisation

Définition :
On appelle discriminant de la fonction trinôme $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$ ou de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ le réel Δ défini par $\Delta = b^2 - 4ac$.

Exemple :
Soit l'équation $-3x^2 + 6x - 3 = 0$.
On a $a = -3$, $b = 6$ et $c = -3$.

$$\begin{aligned}\text{Calculons } \Delta &= b^2 - 4ac \\ &= 6^2 - 4 \times (-3) \times (-3) \\ &= 0\end{aligned}$$

Théorème ***(factorisation d'un trinôme du second degré)*** **:**
Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$.

- Si $\Delta < 0$, alors $f(x) = ax^2 + bx + c$ n'est pas factorisable.
- Si $\Delta = 0$, alors $f(x) = a(x - \alpha)^2$ où $\alpha = -\frac{b}{2a}$.
- Si $\Delta > 0$, alors $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ où $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.

2. Résolution des équation du second degré

Théorème :
Soit l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ avec $a \neq 0$.

- Si $\Delta < 0$, l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ n'admet aucune solution.
- Si $\Delta = 0$, l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ admet une unique solution $\alpha = \frac{-b}{2a}$.
- Si $\Delta > 0$, l'équation $ax^2+bx+c = 0$ admet deux solutions distinctes : $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.

Exemple :
Soit l'équation $2x^2 + 19x + 42 = 0$.

On a $a = 2$, $b = 19$ et $c = 42$.
On calcule $\Delta = b^2 - 4ac = 25$.
$\Delta > 0$ donc l'équation admet deux solutions x_1 et x_2 telles que :

- $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-19-\sqrt{25}}{2\times 2} = -6$
- $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-19+\sqrt{25}}{2\times 2} = -\frac{7}{2}$

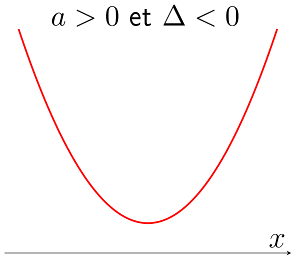
L'ensemble solution est $S = \left\{-\frac{7}{2}; -6\right\}$.

3. Somme et produit des racines

Propriété :
Soit x_1 et x_2 les racines d'une fonction polynôme du second degré $f(x) = ax^2 + bx + c$, avec $a \neq 0$.
On a alors $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ et $x_1 \times x_2 = \frac{c}{a}$

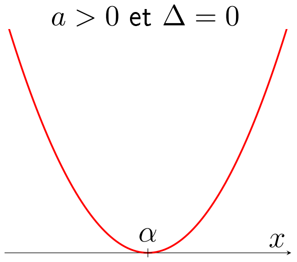
III. Signe d'une fonction du second degré et inéquations

$a > 0$ et $\Delta < 0$



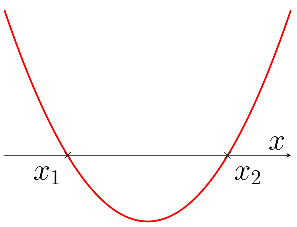
x	$-\infty$		$+\infty$
Signe de $f(x)$		$+$	

$a > 0$ et $\Delta = 0$



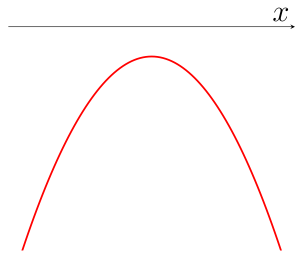
x	$-\infty$		α		$+\infty$
Signe de $f(x)$		$+$	0	$+$	

$a > 0$ et $\Delta > 0$



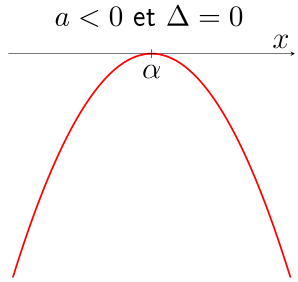
x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
Signe de $f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$a < 0$ et $\Delta < 0$



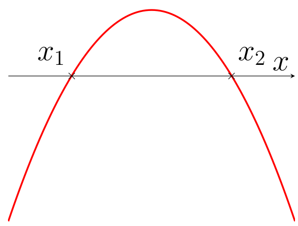
x	$-\infty$		$+\infty$
Signe de $f(x)$		$-$	

$a < 0$ et $\Delta = 0$



x	$-\infty$		α		$+\infty$
Signe de $f(x)$		$-$	0	$-$	

$a < 0$ et $\Delta > 0$



x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
Signe de $f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Propriété ***(signe d'une fonction trinôme du second degré)*** **:**
Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$.

- Si $\Delta < 0$, alors pour tout réel x, $f(x)$ est du signe de a.
- Si $\Delta = 0$, alors pour tout réel x, $f(x)$ est du signe de a sauf en α où $f(x) = 0$.
- Si $\Delta > 0$, alors pour tout réel x, $f(x)$ s'annule en x_1 et x_2 et est du signe de a pour tout $x \in]-\infty; x_1[\cup]x_2; +\infty[$ (avec $x_1 < x_2$) et du signe opposé à celui de a pour tout $x \in]x_1; x_2[$.

Remarque : On peut retenir que $f(x)$ est du signe de a sauf entre les racines lorsqu'elles existent.