Dénombrement

Algèbre - Cours

I Vocabulaire et principes de base

Définition :
Soit E un ensemble fini. On appelle cardinal de E le nombre d'éléments appartenant à E. On note $Card(E)$.

Remarque : Il y existe différentes notations du cardinal : $Card(E) = n(E) = \#E = |E| = \bar{E} = \bar{\bar{E}}$

Axiomes (principe additif et multiplicatif) :
Soient E et F deux ensembles finis.
- $Card(E \cup F) = Card(E) + Card(F) - Card(E \cap F)$
- $Card(E \times F) = Card(E) \times Card(F)$

Exemple :

$E = \{A, B\} \qquad F = \{1, 2, 3\}$
$E \times F = \{(A,1),(A,2),(A,3),(B,1),(B,2),(B,3)\}$
$Card(E \times F) = 6 \qquad Card(E) \times Card(F) = 6$

Définition :
Soit E un ensemble fini. Soit un entier $n \geq 2$. On appelle n-uplet d'éléments de E une liste ordonnée $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ avec $x_1 \in E, x_2 \in E, \ldots, x_n \in E$. On note E^n l'ensemble de tous les n-uplets d'éléments de E.

Exemple :

$E = \{A, B\} \quad E^3 = \{(A,A,A),(A,A,B),(A,B,A),(A,B,B),(B,A,A),(B,A,B),(B,B,A),(B,B,B)\}$

1. Théorème :
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit E un ensemble de cardinal n. Pour tout entier naturel $k \geq 2$: $Card(E^k) = n^k$.

Remarque : On peut dire que le nombre de k-uplets de E est n^k.

II Arrangements et permutations

Définition :
Soit E un ensemble de cardinal $n \geq 2$. Pour tout $k \in [\![1; n]\!]$, on appelle arrangement de k éléments de E tout k-uplet sans répétitions d'éléments de E.

Exemple :

Si $E = \{a, b, c, d\}$, alors (a, d, c) est un arrangement de 3 éléments de E.

Définition :
Soit E un ensemble de cardinal n. Un arrangement des n éléments de E est appelé une permutation de E.

Exemple :

Si $E = \{a, b, c, d\}$, alors (d, a, b, c) et (a, b, c, d) sont deux permutation de E.

2. Théorèmes :

Soit E un ensemble de cardinal $n \geq 2$.

(i) Pour tout $k \in [\![1;n]\!]$, le nombre d'arrangements de k éléments de E est égal à $n \times (n-1) \times \cdots \times (n-k-1) = \dfrac{n!}{(n-k)!}$

(ii) Le nombre de permutations de E est égal à $n!$

Exemples :

On a $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.

— Le nombre de permutations de E est $8! = 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 40320$.

— Le nombre d'arrangements de 3 éléments de E est $8 \times 7 \times 6 = 336$.

III Parties d'un ensemble, coefficients binomiaux

Définition :

Soit E un ensemble. Tout ensemble A qui est inclus dans E est appelé une partie de E. L'ensemble des parties de E est noté $\mathcal{P}(E)$.

Remarque : Par convention, pour tout ensemble E : $\varnothing \in E$ ($\varnothing$ est donc une partie de E).

3. Théorème :

Soit E un ensemble fini. Soit $n = Card(E)$. On a $Card(\mathcal{P}(E)) = 2^n$.

Exemple :

$E = \{a, b, c\}$ $\quad$ $\mathcal{P}(E) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{a, c\}, E\}$

On a $Card(\mathcal{P}(E)) = 2^3 = 8$

Remarque : Un ensemble qui comprend exactement un élément est appelé un singleton.

Définition :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $k \in [\![0;n]\!]$. On note $\dbinom{n}{k}$ le nombre de parties à k éléments dans un ensemble à n éléments.

Exemple :

$E = \{a, b, c\}$ $\quad$ Il y a ici 3 parties à deux éléments : $\{a, b\}, \{b, c\}$ et $\{a, c\}$.

On note donc $\dbinom{2}{3} = 3$.

4. Théorèmes :

Soit $n \in [\![1;+\infty[\![$. Soit $k \in [\![0;n]\!]$.

(i) $\dbinom{n}{0} = \dbinom{n}{n} = 1$

(ii) $\dbinom{n}{1} = n$

(iii) $\dbinom{n}{k} = \dbinom{n}{n-k}$

5. Théorème :

$\forall n \in [\![1;+\infty[\![, \forall k \in [\![0;n]\!] : \dbinom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$

Exemple :

$$\binom{8}{3} = \frac{8!}{3! \times 5!} = \frac{8 \times 7 \times \cancel{6} \times \cancel{5} \times \cancel{4} \times \cancel{3} \times \cancel{2} \times \cancel{1}}{\cancel{3} \times \cancel{2} \times \cancel{1} \times \cancel{5} \times \cancel{4} \times \cancel{3} \times \cancel{2} \times \cancel{1}} = 8 \times 7 = 56$$

6. Théorème (Formule de Pascal) :
$\forall n \in [\![2;+\infty[\![, \forall k \in [\![1;n]\!] : \binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$

Exemple :

$$\binom{4}{2} = \binom{3}{2} + \binom{3}{1} = 3 + 3 = 6$$

Triangle de Pascal :

1					
1	1				
1	2	1			
1	3	3	1		
1	4	6	4	1	
1	5	10	10	5	1

$\binom{0}{0}$					
$\binom{1}{0}$	$\binom{1}{0}$				
$\binom{2}{0}$	$\binom{2}{1}$	$\binom{2}{0}$			
$\binom{3}{0}$	$\binom{3}{1}$	$\binom{3}{1}$	$\binom{3}{0}$		
$\binom{4}{0}$	$\binom{4}{1}$	$\binom{4}{2}$	$\binom{4}{1}$	$\binom{4}{0}$	
$\binom{5}{0}$	$\binom{5}{1}$	$\binom{5}{2}$	$\binom{5}{2}$	$\binom{5}{1}$	$\binom{5}{0}$