Fonctions dérivées et applications

1^{re} Spécialité mathématiques
Analyse22 - Cours

I. Fonctions dérivées

Définition :
Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
Si, pour tout réel a de I, le nombre dérivé $f'(a)$ existe, on dit que la fonction f est dérivable sur I.
On appelle fonction dérivée de f sur I la fonction qui, a tout réel $x \in I$ associe le réel $f'(x)$.
On la note f'.

Dérivées des fonctions usuelles

La fonction f est définie par...	f est définie sur...	f est dérivable sur...	La fonction dérivée f' est définie par...
$f(x) = k$ ($k \in \mathbb{R}$) Fonction constante	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 0$
$f(x) = ax + b$ (a et b réels) Fonction affine	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = a$
$f(x) = x^n$ ($x \in \mathbb{N}^*$) Fonction puissance	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = nx^{n-1}$
$f(x) = \dfrac{1}{x}$ Fonction inverse	$]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$	$]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$	$f'(x) = \dfrac{-1}{x^2}$
$f(x) = \dfrac{1}{x^n}$ Fonction inverse d'une puissance (avec $x \in \mathbb{N}^*$)	$]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$	$]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$	$f'(x) = \dfrac{-n}{x^{n+1}}$
$f(x) = \sqrt{x}$ Fonction racine carrée	$[0; +\infty[$	$]0; +\infty[$	$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
$f(x) = \cos x$ Fonction cosinus	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = -\sin x$
$f(x) = \sin x$ Fonction sinus	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = \cos x$

II. Opérations sur les fonctions dérivables

Propriété :
Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I, et k un nombre réel.
Les fonctions suivantes sont dérivables sur I de fonctions dérivées :

Fonction	**Fonction dérivée**
Somme $u+v$	$(u+v)' = u' + v'$
Produit par un réel ku	$(ku)' = ku'$
Produit uv	$(uv)' = u'v + uv'$
Quotient $\dfrac{u}{v}$ (avec $v \neq 0$)	$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$
Inverse $\dfrac{1}{u}$ (avec $u \neq 0$)	$\left(\dfrac{1}{u}\right)' = \dfrac{-u'}{u^2}$

Exemples :

Soit $f(x) = 3x\sqrt{x}$ sur $I =]0; +\infty[$.

Posons $u(x) = 3x$ et $v(x) = \sqrt{x}$.
On a $u(x)' = 3$ et $v(x)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.
On a $(uv)' = u'v + uv'$.

$$\begin{aligned}\text{Donc } f'(x) &= u'(x)v(x) + u(x)v'(x)\\ &= 3\sqrt{x} + 3x \times \frac{1}{2\sqrt{x}}\\ &= 3\sqrt{x} + \frac{3x}{2\sqrt{x}} \times \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\\ &= 3\sqrt{x} + \frac{3x\sqrt{x}}{2x}\\ &= 3\sqrt{x} + 1,5\sqrt{x} = 4,5\sqrt{x}\end{aligned}$$

Soit $g(x) = \frac{2x-1}{x-5}$ sur $I =]-\infty; 5[\cup]5; +\infty[$.

Posons $u(x) = 2x - 1$ et $v(x) = x - 5$.
On a $u(x)' = 2$ et $v(x)' = 1$.
On a $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$.

$$\begin{aligned}\text{Donc } g'(x) &= \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{(v(x))^2}\\ &= \frac{2(x-5) - (2x-1) \times 1}{(x-5)^2}\\ &= \frac{2x - 10 - 2x + 1}{(x-5)^2}\\ &= \frac{-9}{(x-5)^2}\end{aligned}$$

Propriété admise :
On considère un intervalle I et a et b deux réels.
Soit J l'intervalle formé des valeurs prises par $ax + b$ lorsque x décrit l'intervalle I.
Si la fonction g est dérivable sur J, alors la fonction f définie sur I par $f(x) = g(ax + b)$ est dérivable sur I et, pour tout réel x de I, on a $f'(x) = a \times g'(ax + b)$.

Exemple :
Soit f définie sur $[\frac{-2}{5}; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{5x+2}$
On a $f : x \longrightarrow 5x + 2 \longrightarrow \sqrt{5x+2}$
La fonction f est de la forme $f(x) = g(ax + b)$ avec $a = 5$, $b = 2$ et $g : x \mapsto \sqrt{x}$

$$\begin{aligned}\text{Donc } f'(x) &= ag'(ax+b) \text{ avec } g' : x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}\\ &= 5 \times \frac{1}{\sqrt{5x+2}} = \frac{5}{\sqrt{5x+2}}\end{aligned}$$

Pour tout $x \in [\frac{-2}{5}; +\infty[$, $5x + 2 \in [0; +\infty[$.
Or g est dérivable sur $]0; +\infty[$.
Donc f est dérivable sur $[\frac{-2}{5}; +\infty[$.

III. Applications de la dérivation

1. Étude des variations d'une fonction

Théorème admis :
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I, de fonction dérivée f'.

- Si f est croissante sur I, alors f' est positive sur I.
- Si f est décroissante sur I, alors f' est négative sur I.
- Si f est constante sur I, alors f' est nulle sur I.

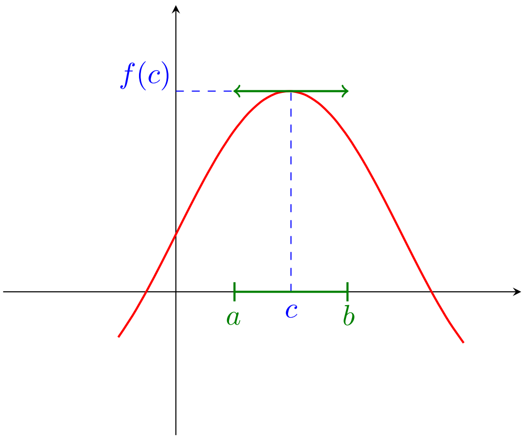
Théorème réciproque admis :
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I, de fonction dérivée f'.

- Si f' est strictement positive sur I, sauf pour un nombre fini de réel où elle s'annule, alors f est strictement croissante sur I.
- Si f' est strictement négative sur I, sauf pour un nombre fini de réel où elle s'annule, alors f est strictement décroissante sur I.
- Si f' est nulle sur I, alors f est constante sur I.

2. Étude des extrema d'une fonction

Définitions :
Soit f une fonction définie sur un intervalle I et c un réel de I et qui n'est pas une borne de I.

- Dire que $f(c)$ est un maximum local de f signifie qu'il existe deux réels a et b dans I tels que $c \in]a;b[$ et que pour tout réel $x \in]a;b[$, $f(x) \leq f(c)$.
- Dire que $f(c)$ est un minimum local de f signifie qu'il existe deux réels a et b dans I tels que $c \in]a;b[$ et que pour tout réel $x \in]a;b[$, $f(x) \geq f(c)$.
- Un extremum local est un minimum ou un maximum local.



Théorème de la condition nécessaire sur l'existence d'un extremum local *(admis)* :
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I et a un réel de I.
Si f présente un extremum local en a alors $f'(a) = 0$.

Remarque : La réciproque est fausse. En effet, pour $f : x \mapsto x^3$ on a $f : x \mapsto 3x^2$ donc $f'(0) = 0$ mais f n'admet pas d'extremum local en O.

Théorème de la condition suffisante sur l'existence d'un extremum local :
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I, de dérivée f' et $a \in I$. Si la dérivée f' s'annule en a en changeant de signe en a, alors la fonction f admet un extremum local en a.