Probabilités conditionnelles et indépendance

1^{re} Spécialité mathématiques
Probabilités et Statistiques - Cours

I. Notion de probabilité conditionnelle

1. Définition

Définition :
Soient A et B deux évènements d'un univers Ω tels que $p(A) \neq 0$. La probabilité de B sachant que A est réalisé (ou de B sachant A) est le nombre, noté $p_A(B)$ défini par $p_A(B) = \dfrac{p(A \cap B)}{p(A)}$.

Propriété :
La probabilité $p_A(B)$ vérifie bien $0 \leq p_A(B) \leq 1$ et $p_A(B) + p_A(\bar{B}) = 1$.

2. Probabilité de l'intersection

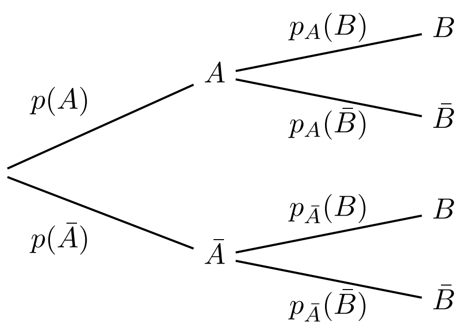
On en déduit une formule de calcul de la probabilité de l'intersection.

Propriété :
Si A et B sont deux évènements avec $p(A) \neq 0$ alors $p(A \cap B) = p_A(B) \times p(A)$.

Remarques :
- Si $p(B) \neq 0$ alors on a aussi $p(A \cap B) = p_B(A) \times p(B)$.
- Dans toutes les formules, les rôles de A et B peuvent être inversés.

3. Représentation à l'aide d'un arbre pondéré

Pour modéliser une situation de probabilité conditionnelle, on utilise souvent un arbe pondéré :



Propriétés ***(fonctionnement d'un arbre pondéré)*** **:**
- La somme des probabilités inscrites sur les branches partant d'un même nœud est égale à 1.
- La probabilité d'un chemin est le produit des probabilités inscrites sur ses branches.

Justifications :
- $p(A) + p(\bar{A}) = 1$
- $p_A(B) + p_A(\bar{B}) = 1$
- $p_{\bar{A}}(B) + p_{\bar{A}}(\bar{B}) = 1$
- $p(A \cap B) = p_A(B) \times p(A)$
- $p(A \cap \bar{B}) = p_A(\bar{B}) \times p(A)$
- et ainsi de suite avec les autres chemins

Exemple :
Dans un groupe de jeunes, 40% sont des filles. Parmi les filles, il y a 30% de skieuses. Parmi les garçons, il y a 50% de skieurs. Soit F l'évènement « la personne est une fille » et soit S l'évènement « la personne est fait du ski ».

On a $p(F) = 40\% = 0,4$
$p_F(S) = 30\% = 0,3$
$p_{\bar{F}}(S) = 50\% = 0,5$

On calcule $p(F \cap S) = p(F) \times p_F(S) = 0,4 \times 0,3 = 0,12$
La probabilité de rencontrer une fille skieuse est de $0,12$.

On calcule $p(\bar{F} \cap S) = p(\bar{F}) \times p_{\bar{F}}(S) = 0,6 \times 0,5 = 0,3$
La probabilité de rencontrer un garçon skieur est de $0,3$.

II. Formule des probabilité totales

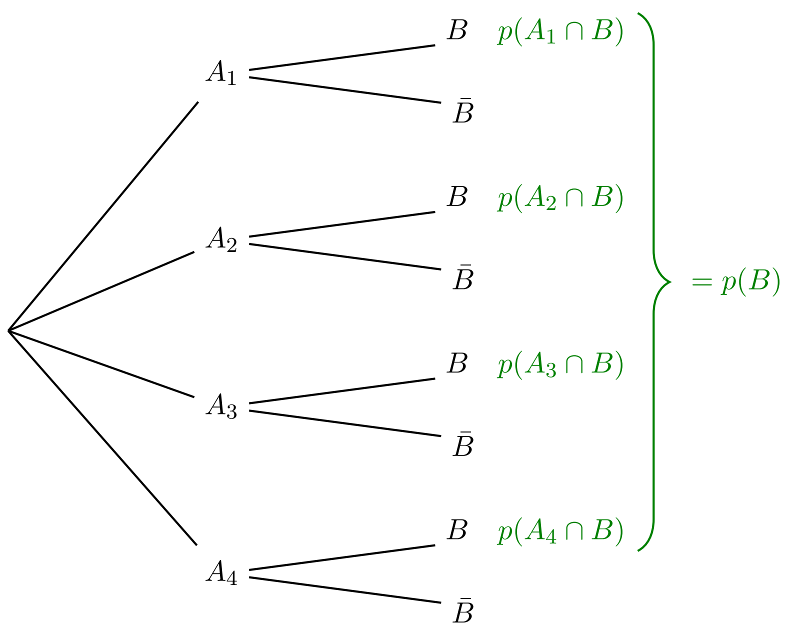
1. Système complet d'évènements

Définition :
Dans un univers Ω, on appelle système complet d'évènements (ou partition de Ω) un ensemble d'évènements de probabilités non nulles, deux à deux disjoints *(sans intersections)*, dont la réunion est égale à Ω.

2. Théorème

Théorème *(formule des probabilités totales)* :
Soit $A_1, A_2, \dots, A_n$ un système complet d'évènements de l'univers Ω.
Alors la probabilité d'un évènement quelconque B est donné par :
$$p(B) = p(B \cap A_1) + p(B \cap A_2) + \dots + p(B \cap A_n)$$
$$= p(A_1) \times p_{A_1}(B) + p(A_2) \times p_{A_2}(B) + ... + p(A_n) \times p_{A_n}(B)$$

Illustration du théorème avec un arbre pondéré :



Propriété *(fonctionnement d'un arbre pondéré)* :
La probabilité d'un évènement correspondant à plusieurs chemins est la sommes des probabilités de ces chemins.

Exemple *(suite)* :
On cherche $p(S) = p(F \cap S) + p(\bar{F} \cap S)$ d'après la formule des probabilités totales et car $\{F; \bar{F}\}$ forment un système complet d'évènements. On calcule $p(S) = 0,12 + 0,3 = 0,42$.

On cherche $p_S(F) = \dfrac{p(S \cap F)}{p(S)} = \dfrac{0,12}{0,42} = \dfrac{12}{42} = \dfrac{2}{7}$.

III. Indépendance de deux évènements

Définition :
On dit que deux évènements A et B sont indépendants lorsque $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$.

Propriété :
On suppose que $p(A) \neq 0$. A et B sont indépendants si et seulement si $p_A(B) = p(B)$.

Exemple :
Une urne contient 3 boules rouges numérotées 1, 2 et 3 et 6 boules noires numérotés 1, 1, 1, 2, 2 et 3.
Les boules sont indiscernables au toucher.

On tire une boule au hasard et on note :

- R « tirer une boule rouge »
- P « tirer une boule dont le numéro est pair »
- U « tirer une boule dont le numéro est 1 »

1. Avec la première méthode :
   Calculons $p(R \cap P) = \frac{1}{9}$.
   D'autre part $p(R) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$ et $p(P) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$.
   On a $p(R \cap P) = p(R) \times p(P)$ donc les évènements R et P sont indépendants.
2. Avec la deuxième méthode :
   Calculons $p_R(P) = \frac{1}{3}$.
   Or $p(P) = \frac{1}{3}$.
   On a $p_R(P) = p(P)$ donc les évènements R et P sont indépendants.

Propriété :
Si A et B sont deux évènements indépendants, alors $\bar{A}$ et B le sont aussi.

IV. Succession de deux épreuves indépendantes

Définition :
Lorsque deux expériences aléatoires se succèdent et que les résultats de la première n'ont aucune influence sur les résultats de la seconde, ont dit qu'il s'agit d'une succession de deux épreuves indépendantes.

Exemple :
On tire successivement deux cartes dans un jeu et on note les cartes obtenues.

- Si on remet la carte dans le paquet après le premier tirage, les deux tirages sont indépendants.
- Si on ne remet pas la carte dans le paquet après le premier tirage, le contenu du paquet après le premier tirage dépend de la carte tirée en premier, donc les tirages ne sont pas indépendants.

Propriété ***(admise)*** **:**
Lorsque deux épreuves sont indépendantes, la probabilité d'un couple de résultat est égal au produit des probabilités de chacun d'entre eux.

Exemple :
Un automobiliste rencontre deux feux tricolores. Ces deux feux fonctionnent de façon indépendante.

- Le cycle du premier feu est : vert $\rightarrow$ 35s, orange $\rightarrow$ 5s et rouge $\rightarrow$ 20s.
- Le cycle du deuxième feu est : vert $\rightarrow$ 25s, orange $\rightarrow$ 5s et rouge $\rightarrow$ 30s.

Quelle est la probabilité que l'automobiliste croise un feu vert et un feu orange ?

On calcule $p(V \cap O) = \frac{35}{60} \times \frac{5}{60} + \frac{35}{60} \times \frac{25}{60} = \frac{1}{12}$.
La probabilité que l'automobiliste croise un feu vert et un feux orange est $\frac{1}{12}$.