Fonction exponentielle et logarithme népérien

1^{re} Spécialité mathématiques
Analyse - Cours

1 Généralités sur la fonction exponentielle

Définition et propriété admise :
Il existe une unique fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$.
Cette fonction est appelée fonction exponentielle et se note exp.
Ainsi, pour tout réel x, on a $\exp'(x) = \exp(x)$ et $\exp(0) = 1$.

1.1 Propriétés algébriques

Lemme :
Pour tout réel x, on a $\exp(x) \neq 0$.

Propriétés :

1. Pour tous réels x et y, on a $\exp(x + y) = \exp(x) \times \exp(y)$ qu'on appelle relation fonctionnelle.
2. Pour tous réels x et y, on a :
   - $\exp(-x) = \dfrac{1}{\exp(x)}$
   - $\exp(x - y) = \dfrac{\exp(x)}{\exp(y)}$
   - $\exp(nx) = \exp(x)^n$

1.2 La notation de l'exponentielle

Définition :
L'image de 1 par la fonction exp est le nombre noté e, appelé constante d'Euler. Ainsi, $\exp(1) = e$.

Remarque : La fonction exp possède les mêmes propriété algébriques que les fonctions puissances. On notera donc $\exp(x) = e^x$ ($e \approx 2,7182\dots$).

Propriété :
Pour tous réels x et y, on a :

- $e^{x+y} = e^x \times e^y$
- $e^{x-y} = \dfrac{e^x}{e^y}$
- $e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$
- $(e^x)^n = e^{nx}$

1.3 Lien avec les suites géométriques

Propriété :
Soit a un réel. Soit u la suite définie pour tout entier naturel n par $u_n = e^{na}$.
Alors la suite u est une suite géométrique.

2 Étude et applications de la fonction exponentielle

2.1 Signe de la fonction exponentielle

Propriété :
La fonction exp est strictement positive sur $\mathbb{R}$.
Autrement dit : pour tout nombre réel x, $e^x > 0$.

2.2 Variations de la fonction exponentielle

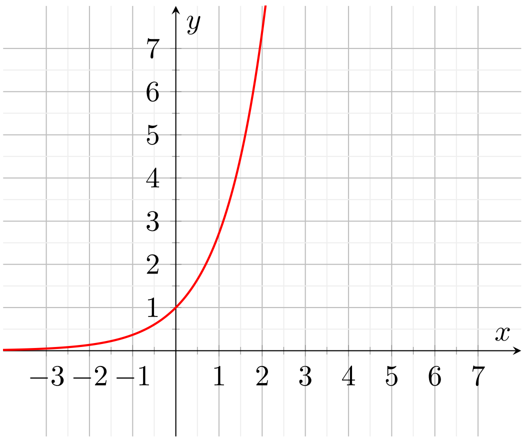
Propriété :
La fonction exp est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

On résume dans le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
Signe de $f'(x)$	$+$
Variations de $f(x) = e^x$	$\nearrow$

2.3 Courbe de la fonction exponentielle

x	e^x
-2	$\approx 0,13$
$-1,5$	$\approx 0,22$
-1	$\approx 0,37$
$-0,5$	$\approx 0,61$
0	1
$0,5$	$\approx 1,65$
1	$\approx 2,72$
$1,5$	$\approx 4,48$
2	$\approx 7,39$



2.4 Fonctions définies par $f(t) = e^{kt}$ avec $k \in \mathbb{R}$

Propriété :
Pour $k > 0$, la fonction f définie par $f(t) = e^{kt}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
Pour $k < 0$, la fonction f définie par $f(t) = e^{kt}$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

2.5 Fonctions du type $f : x \mapsto e^{ax+b}$

Propriété :
Pour a et b fixés, la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{ax+b}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $f'(x) = a \times e^{ax+b}$.

2.6 Équations et inéquations

Propriété :
Pour tous réels a et b, on a :

- $e^a = e^b \Leftrightarrow a = b$
- $e^a < e^b \Leftrightarrow a < b$

Exemples :

- On résout dans $\mathbb{R}$ l'équation $e^{2x+1} = e^{x-3}$:

$$\begin{aligned} & e^{2x+1} = e^{x-3} \\ \Leftrightarrow\ & 2x+1 = x-3 \\ \Leftrightarrow\ & x+1 = -3 \\ \Leftrightarrow\ & x = -4 \\ \Leftrightarrow\ & S = \{-4\} \end{aligned}$$

- On résout dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $e^{x-3} < 1$:

$$\begin{aligned} & e^{x-3} < 1 \\ \Leftrightarrow\ & e^{x-3} < e^0 \\ \Leftrightarrow\ & x-3 < 0 \\ \Leftrightarrow\ & x < 3 \\ \Leftrightarrow\ & S =]-\infty; 3[\end{aligned}$$

3 Généralités sur la fonction logarithme

3.1 Introduction

Théorème :
Pour tout réel $a > 0$, il existe un unique réel b tel que $a = e^b$.

3.2 Définition et notation

Définition :
On appelle logarithme népérien d'un réel $a > 0$, le nombre réel b tel que $e^b = a$.
On le note $\ln(a) = b$.

Exemple :

- $\ln(1) = 0$ (car $e^0 = 1$)
- $\ln(e) = 1$ (car $e^1 = e$)

Remarques :

- $\ln(0)$ n'existe pas. En effet, $e^x \neq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$
- Pour tout entier $n \geq 2$, $\ln(n)$ n'est pas rationel.

3.3 Propriétés algébriques

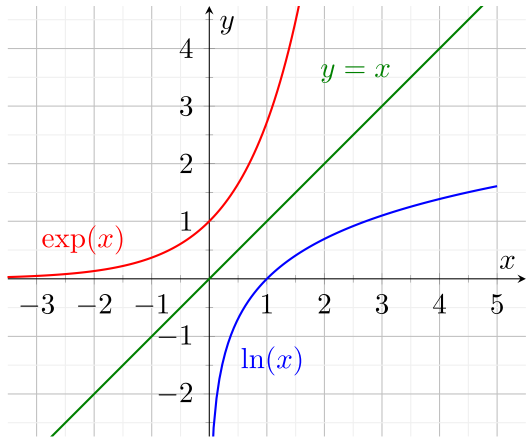
Théorème :
Pour tout réel $x > 0$, $y > 0$ et pour tout entier relatif n,

- $e^{\ln(x)} = x$
- $\ln(e^x) = x$
- $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$
- $\ln(\frac{x}{y}) = \ln(x) - \ln(y)$
- $\ln(x^n) = n\ln(x)$

4 Propriétés graphiques

4.1 Symétrie des courbes représentatives de l'exponentielle et du logarithme

Dans un repère orthonormé, on note d la droite d'équation $x = y$.
La symétrie axiale par rapport à la droite d a pour effet d'échanger les abscisses et les ordonnées, c'est à dire qu'elle transforme tout point de coordonnées $(x; y)$ en un point de coordonnées $(x; y)$.



Théorème :
Les courbes représentatives de la fonction exp et ln sont symétriques l'une de l'autre par rapport à la droite d.

4.2 Dérivation de la fonction logarithme

Théorème :
Si pour tout réel $x > 0$, $f(x) = \ln(x)$ alors f est dérivable, et pour tout $x > 0$: $f'(x) = \dfrac{1}{x}$

Corrolaire :

- La fonction $\ln(x)$ est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.
- Pour tous réels a et b strictements positifs, $\ln(a) < \ln(b) \Leftrightarrow a < b$.