Produit scalaire et applications

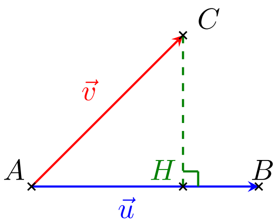
1re Spécialité mathématiques
Géométrie - Démonstrations

I. Premières expressions du produit scalaire de deux vecteurs

2. Formule du projeté orthogonal

Démonstration *(expression du produit sclaire n°2)* :

- Premier cas :

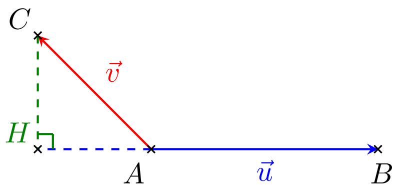


$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$
Dans le triangle ACH rectangle en H, $\cos(\widehat{BAC}) = \frac{AH}{AC}$

$$\text{Donc } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \frac{AH}{AC}$$
$$= AB \times AH$$

Or $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} = AB \times AH$
Donc $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH}$

- Deuxième cas :



$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$
Dans le triangle ACH rectangle en H, $\cos(\widehat{BAC}) = \frac{AH}{AC}$.
Or, $\widehat{CAH} = 180° - \widehat{BAC}$ et $\cos(\widehat{CAH}) = \cos(180° - \widehat{BAC}) = -\cos(\widehat{BAC})$

$$\text{Ainsi, } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times (-\cos(\widehat{CAH}))$$
$$= -AB \times AC \times \frac{AH}{AC}$$
$$= -AB \times AH$$

$$\text{Or, } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} = AB \times AH \times \cos(180°)$$
$$= -AB \times AH$$

Donc $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH}$

II. Propriétés du produit scalaire

1. Symétrie et bilinéarité

Démonstration *(symétrie)* :

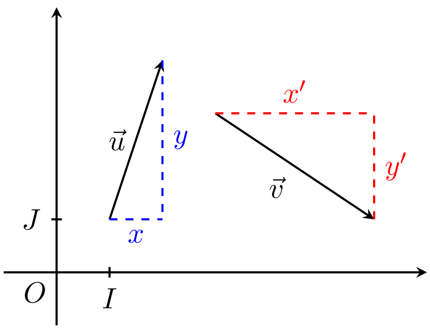
$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v})$
$\vec{v} \cdot \vec{u} = \|\vec{v}\| \times \|\vec{u}\| \times \cos(\vec{v}, \vec{u})$

$\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \cos(\vec{v}, \vec{u})$
Donc $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$

2. Expression du produit scalaire dans un repère orthonormé

Démonstration *(expression du produit scalaire n°3)* :

Soit $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ deux vecteurs dans un repère orthonormé (O, I, J).



On a $\vec{u} = x\overrightarrow{OI} + y\overrightarrow{OJ}$
$\vec{v} = x'\overrightarrow{OI} + y'\overrightarrow{OJ}$

$$\begin{aligned}
\text{Calculons } \vec{u} \cdot \vec{v} &= (x\overrightarrow{OI} + y\overrightarrow{OJ}) \cdot (x'\overrightarrow{OI} + y'\overrightarrow{OJ}) \\
&= x\overrightarrow{OI} \cdot x'\overrightarrow{OI} + x\overrightarrow{OI} \cdot y'\overrightarrow{OJ} + y\overrightarrow{OJ} \cdot x'\overrightarrow{OI} + y\overrightarrow{OJ} \cdot y'\overrightarrow{OJ} \\
&= xx'\overrightarrow{OI} \cdot \overrightarrow{OI} + xy'\overrightarrow{OI} \cdot \overrightarrow{OJ} + yx'\overrightarrow{OJ} \cdot \overrightarrow{OI} + yy'\overrightarrow{OJ} \cdot \overrightarrow{OJ} \\
&= xx' \times 1 + 0 + 0 + yy' \times 1 \\
&= xx' + yy'
\end{aligned}$$

3. Identités remarquables avec le produit scalaire

Démonstrations *(identités remarquables concernant le produit scalaire)* :

- Idendité remarquable n°1 :

$$\begin{aligned}
(\vec{u} + \vec{v})^2 &= (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) \\
&= \vec{u} \cdot \vec{u} + \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{u} + \vec{v} \cdot \vec{v} \\
&= \|\vec{u}\|^2 + \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{u} + \|\vec{v}\|^2 \\
&= \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2
\end{aligned}$$

- Idendité remarquable n°2 :

$$\begin{aligned}
(\vec{u} - \vec{v})^2 &= (\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) \\
&= \vec{u} \cdot \vec{u} + \vec{u} \cdot (-\vec{v}) - \vec{v} \cdot \vec{u} - \vec{v} \cdot (-\vec{v}) \\
&= \|\vec{u}\|^2 + \vec{u} \cdot (-\vec{v}) - \vec{v} \cdot \vec{u} + \|\vec{v}\|^2 \\
&= \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2
\end{aligned}$$

- Idendité remarquable n°3 :

$$\begin{aligned}
(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) &= \vec{u} \cdot \vec{u} + \vec{u} \cdot (-\vec{v}) + \vec{v} \cdot \vec{u} + \vec{v} \cdot (-\vec{v}) \\
&= \|\vec{u}\|^2 + \underbrace{\vec{u} \cdot (-\vec{v}) + \vec{v} \cdot \vec{u}}_{=0} - \|\vec{v}\|^2 \\
&= \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2
\end{aligned}$$

Démonstrations *(conséquence des nouvelles expressions du produit scalaire)* :

- D'après l'identité remarquable n°1 :

$$\begin{aligned} & (\vec{u}+\vec{v})^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u}\bullet\vec{v} + \|\vec{v}\|^2 \\ \Leftrightarrow\ & \|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u}\bullet\vec{v} + \|\vec{v}\|^2 \\ \Leftrightarrow\ & \|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 = -2\vec{u}\bullet\vec{v} \\ \Leftrightarrow\ & \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right) = \vec{u}\bullet\vec{v} \end{aligned}$$

- D'après l'identité remarquable n°2 :

$$\begin{aligned} & (\vec{u}-\vec{v})^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u}\bullet\vec{v} + \|\vec{v}\|^2 \\ \Leftrightarrow\ & \|\vec{u}-\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u}\bullet\vec{v} + \|\vec{v}\|^2 \\ \Leftrightarrow\ & \|\vec{u}-\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 = -2\vec{u}\bullet\vec{v} \\ \Leftrightarrow\ & -\|\vec{u}-\vec{v}\|^2 + \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 = 2\vec{u}\bullet\vec{v} \\ \Leftrightarrow\ & \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}-\vec{v}\|^2\right) = \vec{u}\bullet\vec{v} \end{aligned}$$

- D'après les identités remarquables n°1 et n°2 :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}-\vec{v}\|^2\right) \\ =& \frac{1}{4}\left(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2\vec{u}\bullet\vec{v} - \left(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\vec{u}\bullet\vec{v}\right)\right) \\ =& \frac{1}{4}\left(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2\vec{u}\bullet\vec{v} - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 + 2\vec{u}\bullet\vec{v}\right) \\ =& \frac{1}{4}\left(4\vec{u}\bullet\vec{v}\right) = \vec{u}\bullet\vec{v} \end{aligned}$$

4. Orthogonalité

Démonstration :

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls et A, B et C trois points distincts tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$.

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux alors $\widehat{BAC} = 90°$ donc $\cos(\widehat{BAC}) = 0$ donc $\vec{u}\bullet\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\widehat{BAC}) = 0$.

Si $\vec{u}\bullet\vec{v} = 0$ alors $\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\widehat{BAC}) = 0$.
Or $\|\vec{u}\| \neq 0$ et $\|\vec{v}\| \neq 0$.
Donc $\cos(\widehat{BAC}) = 0$.
Donc $\widehat{BAC} = 90°$.

Donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

Démonstration *(critère d'orthogonalité dans un repère orthonormé)* :

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux
$\Leftrightarrow$ $\vec{u}\bullet\vec{v} = 0$
$\Leftrightarrow$ $xx' + yy' = 0$ *(Expression n°3 du produit scalaire)*

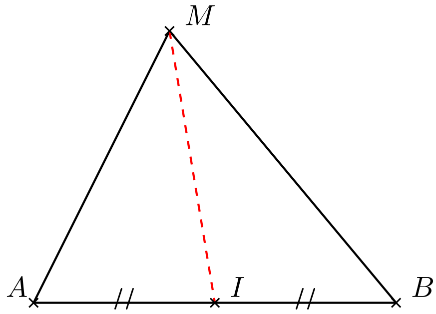
III. Application du produit scalaire

1. Théorème de la médiane

Démonstration *(théorème de la médiane)* :

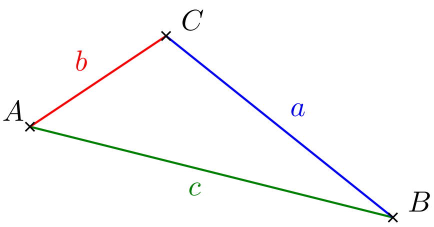
Calculons $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$

$$\begin{aligned}
&= (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) \cdot (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}) \\
&= \overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IB} \\
&= \overrightarrow{MI}^2 + \overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IA} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \cdot \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \\
&= \overrightarrow{MI}^2 + \underbrace{\overrightarrow{MI} \cdot (\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IA})}_{\vec{0} \text{ car } \overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IA} = \vec{0}} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}^2 \\
&= \overrightarrow{MI}^2 - \frac{\overrightarrow{AB}^2}{4}
\end{aligned}$$



2. Théorème d'Al Kashi

Démonstration *(théorème d'Al Kashi ou théorème de Pythagore généralisé ou loi des cosinus)* :



Calculons $a^2 = BC^2$

$$\begin{aligned}
&= \overrightarrow{BC}^2 \\
&= (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC})^2 \\
&= \|\overrightarrow{BA}\|^2 + 2\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC} + \|\overrightarrow{AC}\|^2 \\
&= c^2 + 2(-\overrightarrow{AB}) \cdot \overrightarrow{AC} + b^2 \\
&= c^2 - 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + b^2 \\
&= b^2 + c^2 - 2bc \times \cos(\widehat{A})
\end{aligned}$$

3. Caractérisation du cercle

Démonstration :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0 &\Leftrightarrow MI^2 - \frac{AB^2}{4} = 0 \text{ avec } I \text{ milieu de } [AB] \\
&\Leftrightarrow MI^2 = \frac{AB^2}{4} \\
&\Leftrightarrow MI = \sqrt{\frac{AB^2}{4}} \\
&\Leftrightarrow MI = \frac{AB}{2} \\
&\Leftrightarrow M \text{ appartient au cercle de centre } I \text{ et de rayon } \frac{AB}{2}, \text{ c'est à dire au cercle de diamètre } [AB].
\end{aligned}$$