

Fonctions dérivées et applications

1^{re} Spécialité mathématiques
Analyse - Cours

I. Fonctions dérivées

Définition :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I .

Si, pour tout réel a de I , le nombre dérivé $f'(a)$ existe, on dit que la fonction f est dérivable sur I .

On appelle fonction dérivée de f sur I la fonction qui, à tout réel $x \in I$ associe le réel $f'(x)$.

On la note f' .

Dérivées des fonctions usuelles

La fonction f est définie par...	f est définie sur...	f est dérivable sur...	La fonction dérivée f' est définie par...
$f(x) = k$ ($k \in \mathbb{R}$) Fonction constante	\mathbb{R}	\mathbb{R}	$f'(x) = 0$
$f(x) = ax + b$ (a et b réels) Fonction affine	\mathbb{R}	\mathbb{R}	$f'(x) = a$
$f(x) = x^n$ ($x \in \mathbb{N}^*$) Fonction puissance	\mathbb{R}	\mathbb{R}	$f'(x) = nx^{n-1}$
$f(x) = \frac{1}{x}$ Fonction inverse	$] - \infty; 0[\cup] 0; +\infty[$	$] - \infty; 0[\cup] 0; +\infty[$	$f'(x) = \frac{-1}{x^2}$
$f(x) = \frac{1}{x^n}$ Fonction inverse d'une puissance (avec $x \in \mathbb{N}^*$)	$] - \infty; 0[\cup] 0; +\infty[$	$] - \infty; 0[\cup] 0; +\infty[$	$f'(x) = \frac{-n}{x^{n+1}}$
$f(x) = \sqrt{x}$ Fonction racine carrée	$[0; +\infty[$	$] 0; +\infty[$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$f(x) = \cos x$ Fonction cosinus	\mathbb{R}	\mathbb{R}	$f'(x) = -\sin x$
$f(x) = \sin x$ Fonction sinus	\mathbb{R}	\mathbb{R}	$f'(x) = \cos x$

II. Opérations sur les fonctions dérivables

Propriété :

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I , et k un nombre réel.

Les fonctions suivantes sont dérivables sur I de fonctions dérivées :

Fonction	Fonction dérivée
Somme $u + v$	$(u + v)' = u' + v'$
Produit par un réel ku	$(ku)' = ku'$
Produit uv	$(uv)' = u'v + uv'$
Quotient $\frac{u}{v}$ (avec $v \neq 0$)	$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$
Inverse $\frac{1}{u}$ (avec $u \neq 0$)	$\left(\frac{1}{u}\right)' = \frac{-u'}{u^2}$

Exemples :

Soit $f(x) = 3x\sqrt{x}$ sur $I =]0; +\infty[$.

Posons $u(x) = 3x$ et $v(x) = \sqrt{x}$.

On a $u(x)' = 3$ et $v(x)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

On a $(uv)' = u'v + uv'$.

Donc $f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$

$$\begin{aligned}
 &= 3\sqrt{x} + 3x \times \frac{1}{2\sqrt{x}} \\
 &= 3\sqrt{x} + \frac{3x}{2\sqrt{x}} \times \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \\
 &= 3\sqrt{x} + \frac{3x\sqrt{x}}{2x} \\
 &= 3\sqrt{x} + 1,5\sqrt{x} = 4,5\sqrt{x}
 \end{aligned}$$

Soit $g(x) = \frac{2x-1}{x-5}$ sur $I =]-\infty; 5[\cup]5; +\infty[$.

Posons $u(x) = 2x - 1$ et $v(x) = x - 5$.

On a $u(x)' = 2$ et $v(x)' = 1$.

On a $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$.

$$\begin{aligned}
 \text{Donc } g'(x) &= \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{(v(x))^2} \\
 &= \frac{2(x-5) - (2x-1) \times 1}{(x-5)^2} \\
 &= \frac{2x - 10 - 2x + 1}{(x-5)^2} \\
 &= \frac{-9}{(x-5)^2}
 \end{aligned}$$

Propriété admise :

On considère un intervalle I et a et b deux réels.

Soit J l'intervalle formé des valeurs prises par $ax + b$ lorsque x décrit l'intervalle I .

Si la fonction g est dérivable sur J , alors la fonction f définie sur I par $f(x) = g(ax + b)$ est dérivable sur I et, pour tout réel x de I , on a $f'(x) = a \times g'(ax + b)$.

Exemple :

Soit f définie sur $[-\frac{2}{5}; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{5x + 2}$

On a $f : x \rightarrow 5x + 2 \rightarrow \sqrt{5x + 2}$

La fonction f est de la forme $f(x) = g(ax + b)$ avec $a = 5$, $b = 2$ et $g : x \mapsto \sqrt{x}$

$$\begin{aligned}
 \text{Donc } f'(x) &= ag'(ax + b) \text{ avec } g' : x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}} \\
 &= 5 \times \frac{1}{\sqrt{5x + 2}} = \frac{5}{\sqrt{5x + 2}}
 \end{aligned}$$

Pour tout $x \in [-\frac{2}{5}; +\infty[$, $5x + 2 \in [0; +\infty[$.

Or g est dérivable sur $]0; +\infty[$.

Donc f est dérivable sur $[-\frac{2}{5}; +\infty[$.

III. Applications de la dérivation

1. Étude des variations d'une fonction

Théorème admis :

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I , de fonction dérivée f' .

- Si f est croissante sur I , alors f' est positive sur I .
- Si f est décroissante sur I , alors f' est négative sur I .
- Si f est constante sur I , alors f' est nulle sur I .

Théorème réciproque admis :

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I , de fonction dérivée f' .

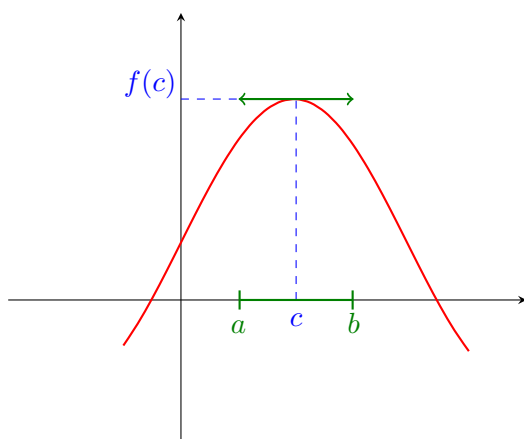
- Si f' est strictement positive sur I , sauf pour un nombre fini de réel où elle s'annule, alors f est strictement croissante sur I .
- Si f' est strictement négative sur I , sauf pour un nombre fini de réel où elle s'annule, alors f est strictement décroissante sur I .
- Si f' est nulle sur I , alors f est constante sur I .

2. Étude des extrema d'une fonction

Définitions :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et c un réel de I et qui n'est pas une borne de I .

- Dire que $f(c)$ est un maximum local de f signifie qu'il existe deux réels a et b dans I tels que $c \in]a; b[$ et que pour tout réel $x \in]a; b[$, $f(x) \leq f(c)$.
- Dire que $f(c)$ est un minimum local de f signifie qu'il existe deux réels a et b dans I tels que $c \in]a; b[$ et que pour tout réel $x \in]a; b[$, $f(x) \geq f(c)$.
- Un extremum local est un minimum ou un maximum local.

**Théorème de la condition nécessaire sur l'existence d'un extremum local (admis) :**

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I et a un réel de I .

Si f présente un extremum local en a alors $f'(a) = 0$.

Remarque : La réciproque est fausse. En effet, pour $f : x \mapsto x^3$ on a $f : x \mapsto 3x^2$ donc $f'(0) = 0$ mais f n'admet pas d'extremum local en O .

Théorème de la condition suffisante sur l'existence d'un extremum local :

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I , de dérivée f' et $a \in I$. Si la dérivée f' s'annule en a en changeant de signe en a , alors la fonction f admet un extremum local en a .