Le second degré

Algebre - Cours

I Les fonctions polynômes du second degré

I. 1 Forme développée

Définitions :
On appelle fonction polynôme (ou trinôme) du second degré toute fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ où a, b et c sont trois réel avec $a \neq 0$.
Les réels a, b et c sont appelés coefficients de la fonction.

Remarque : L'expression $ax^2 + bx + c$ est dit forme développée de $f(x)$.

I. 2 Forme canonique

Théorème 1 :
Toute fonction trinôme du second degré définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$ peut s'écrire sous une forme appelée canonique $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$, avec $\alpha = -\dfrac{b}{2a}$ et $\beta = f(\alpha)$.

I. 3 Sens de variation

Propriété 1 :
Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$.

(i) Cas où $a > 0$: la fonction f est strictement décroissante sur $]-\infty; \alpha]$ puis strictement croissante sur $[\alpha; +\infty[$. La fonction f admet un minimum égal à β atteint en $x = \alpha$.

(ii) Cas où $a < 0$: la fonction f est strictement croissante sur $]-\infty; \alpha]$ puis strictement décroissante sur $[\alpha; +\infty[$. La fonction f admet un maximum égal à β atteint en $x = \alpha$.

On retient :

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$	β	$\nearrow$	

car $a > 0$

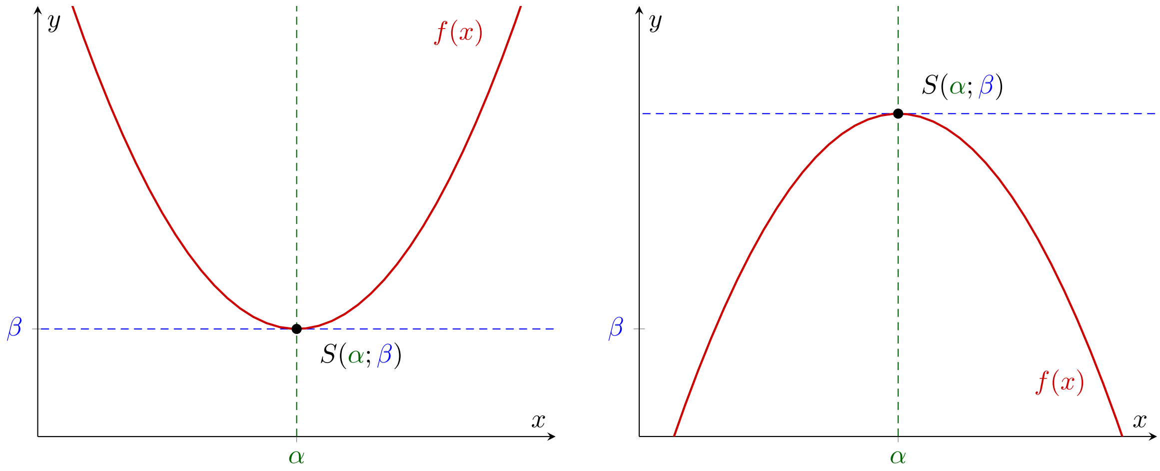
x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f(x)$		$\nearrow$	β	$\searrow$	

car $a < 0$

I. 4 Représentation graphique

Propriété 2 : conséquence
Soit f une fonction définie par $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$.
Dans un repère orthogonal d'origine O, la représentation graphique de la fonction f est une parabole de sommet $S(\alpha; \beta)$ qui admet pour axe de symétrie la droite d'équation $x = \alpha$.

On retient :



car $a > 0$ car $a < 0$

II Factorisation d'une fonction du second degré et résolution d'équation du second degré

II. 1 Factorisation

Définition : discriminant
On appelle discriminant de la fonction trinôme $f(x) = ax^2 + bx + c$ ou de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ le réel Δ défini par $\Delta = b^2 - 4ac$.

Théorème 2 : factorisation d'un trinôme du second degré
Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$.

(i) Si $\Delta < 0$, alors $f(x) = ax^2 + bx + c$ n'est pas factorisable.

(ii) Si $\Delta = 0$, alors $f(x) = a(x - \alpha)^2$ où $\alpha = -\dfrac{b}{2a}$.

(iii) Si $\Delta > 0$, alors $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ où $x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$.

II. 2 Résolution des équation du second degré

Théorème 3 :
Soit l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ avec $a \neq 0$.

(i) Si $\Delta < 0$, l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ n'admet aucune solution.

(ii) Si $\Delta = 0$, l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ admet une unique solution $\alpha = \dfrac{-b}{2a}$.

(iii) Si $\Delta > 0$, l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ admet deux solutions distinctes : $x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$.

II. 3 Somme et produit des racines

Propriété 3 :
Soit x_1 et x_2 les racines d'une fonction polynôme du second degré $f(x) = ax^2 + bx + c$, avec $a \neq 0$.
On a alors $x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}$ et $x_1 \times x_2 = \dfrac{c}{a}$

III Signe d'une fonction du second degré et inéquations

Propriété 4 :
Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$.

(i) Si $\Delta < 0$, alors pour tout réel x, $f(x)$ est du signe de a.

(ii) Si $\Delta = 0$, alors pour tout réel x, $f(x)$ est du signe de a sauf en α où $f(x) = 0$.

(iii) Si $\Delta > 0$, alors pour tout réel x, $f(x)$ s'annule en x_1 et x_2 et est du signe de a pour tout $x \in]-\infty; x_1[\cup]x_2; +\infty[$ avec $x_1 < x_2$ et du signe opposé à celui de a pour tout $x \in]x_1; x_2[$.

Remarque : On peut retenir que $f(x)$ est du signe de a sauf entre les racines lorsqu'elles existent.