Dénombrement

Algèbre - Cours

I Vocabulaire et principes de base

Définition:

Soit E un ensemble fini. On appelle cardinal de E le nombre d'éléments appartenant à E. On note Card(E).

Remarque : Il y existe différentes notations du cardinal : $Card(E) = n(E) = \#E = |E| = \bar{E}$

Axiomes (principe additif et multiplicatif):

Soient E et F deux ensembles finis.

- $-- Card(E \cup F) = Card(E) + Card(F) Card(E \cap F)$
- $-- Card(E \times F) = Card(E) \times Card(F)$

Exemple:

$$E = \{A, B\} \qquad F = \{1, 2, 3\}$$

$$E \times F = \{(A, 1), (A, 2), (A, 3), (B, 1), (B, 2), (B, 3)\}$$

$$Card(E \times F) = 6 \qquad Card(E) \times Card(F) = 6$$

Définition:

Soit E un ensemble fini. Soit un entier $n \geq 2$. On appelle n-uplet d'éléments de E une liste ordonnée (x_1, x_2, \ldots, x_n) avec $x_1 \in E, x_2 \in E, \ldots, x_n \in E$. On note E^n l'ensemble de tous les n-uplets d'éléments de E.

Exemple:

$$E = \{A, B\}$$
 $E^3 = \{(A, A, A), (A, A, B), (A, B, A), (A, B, B), (B, A, A), (B, A, B), (B, B, B)\}$

1. Théorème:

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit E un ensemble de cardinal n. Pour tout entier naturel $k \geq 2$: $Card(E^k) = n^k$.

Remarque : On peut dire que le nombre de k-uplets de E est n^k .

II Arrangements et permutations

Définition:

Soit E un ensemble de cardinal $n \ge 2$. Pour tout $k \in [1; n]$, on appelle arrangement de k éléments de E tout k-uplet sans répétitions d'éléments de E.

Exemple:

Si $E = \{a, b, c, d\}$, alors (a, d, c) est un arrangement de 3 éléments de E.

Définition :

Soit E un ensemble de cardinal n. Un arrangement des n éléments de E est appelé une permutation de E.

Exemple:

Si $E = \{a, b, c, d\}$, alors (d, a, b, c) et (a, b, c, d) sont deux permutation de E.

2. Théorèmes:

Soit E un ensemble de cardinal $n \geq 2$.

- (i) Pour tout $k \in [1; n]$, le nombre d'arrangements de k éléments de E est égal à $n \times (n-1) \times \cdots \times (n-k-1) = \frac{n!}{(n-k)!}$
- (ii) Le nombre de permutations de E est égal à n!

Exemples:

On a $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}.$

- Le nombre de permutations de E est $8! = 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 40320$.
- Le nombre d'arrangements de 3 éléments de E est $8 \times 7 \times 6 = 336$.

III Parties d'un ensemble, coefficients binomiaux

Définition:

Soit E un ensemble. Tout ensemble A qui est inclus dans E est appelé une partie de E. L'ensemble des parties de E est noté $\mathcal{P}(E)$.

Remarque: Par convention, pour tout ensemble $E: \emptyset \in E$ (\emptyset est donc une partie de E).

3. Théorème:

Soit E un ensemble fini. Soit n = Card(E). On a $Card(\mathcal{P}(E)) = 2^n$.

Exemple:

Remarque: Un ensemble qui comprend exactement un élément est appelé un singleton.

Définition:

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $k \in [0; n]$. On note $\binom{n}{k}$ le nombre de parties à k éléments dans un ensemble à n éléments.

Exemple:

$$E=\{a,b,c\}$$
 Il y a ici 3 parties à deux éléments : $\{a,b\},\{b,c\}$ et $\{a,c\}$. On note donc $\binom{2}{3}=3$.

4. Théorèmes :

Soit $n \in [1; +\infty[$. Soit $k \in [0; n]$.

(i)
$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$$

(ii)
$$\binom{n}{1} = r$$

(iii)
$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

5. Théorème:

$$\forall n \in \llbracket 1; +\infty \llbracket, \forall k \in \llbracket 0; n \rrbracket : \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Exemple:

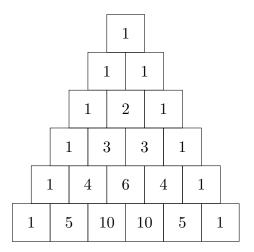
$$\binom{8}{3} = \frac{8!}{3! \times 5!} = \frac{8 \times 7 \times \cancel{0} \times \cancel{3} \times \cancel{4} \times \cancel{3} \times \cancel{2} \times \cancel{1}}{\cancel{3} \times \cancel{2} \times \cancel{1} \times \cancel{3} \times \cancel{2} \times \cancel{1}} = 8 \times 7 = 56$$

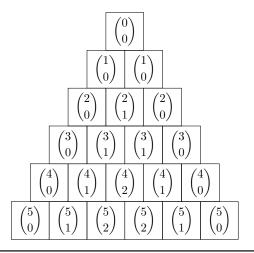
$$\forall n \in [\![2;+\infty[\![,\forall k \in [\![1;n]\!]:\binom{n}{k}=\binom{n-1}{k}+\binom{n-1}{k-1}$$

Exemple:

$$\binom{4}{2} = \binom{3}{2} + \binom{3}{1} = 3 + 3 = 6$$

Triangle de Pascal:





7. Théorème:

Soit n un entier naturel. Soit $k \in [0; n]$. On considère une répétitions de n épreuves de Bernoulli identiques. Le nombre d'issues comptant k succès est égal à $\binom{n}{k}$.

Exemple: n = 6 et k = 3

L'issue ESSESE correspond à la partie $\{2;3;5\}$ de l'ensemble $\{1;2;3;4;5;6\}$. Ici, le nombre total d'issues est $\binom{6}{3}=20$.