Produit scalaire et applications

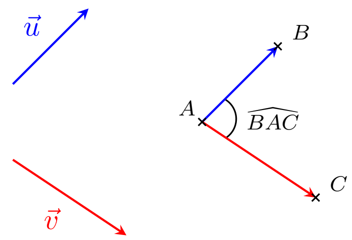
1re Spécialité mathématiques
Géométrie - Cours

I. Premières expressions du produit scalaire de deux vecteurs

1. Formule avec le cosinus

Définition ***(expression du produit scalaire n°1)*** **:**
Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs non nuls tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$, leurs produit scalaire est le nombre $\vec{u} \bullet \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(u, v) = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$

Schéma :



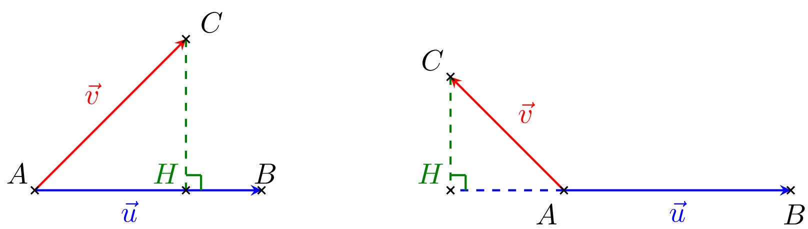
Cas particulier ***(produit scalaire de deux vecteurs colinéaires)*** **:**

Si $C \in [AB]$, alors $\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(0) = AB \times AC$.
Si $C \notin [AB]$, alors $\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(180) = -AB \times AC$.

Définition :
On appelle carré scalaire du vecteur $\vec{u}$ le nombre noté $\vec{u}^2$ et égal à $\vec{u}^2 = \vec{u} \bullet \vec{u} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{u}\| = \|\vec{u}\|^2$

2. Formule du projeté orthogonal

Propriété ***(expression du produit scalaire n°2)*** **:**
Soit $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ deux vecteurs du plan. H est le projeté orthogonal du point C sur la droite AB.
Alors $\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AH}$



II. Propriétés du produit scalaire

1. Symétrie et bilinéarité

Propriétés :
Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ des vecteurs du plan et k un réel.

- $\vec{u} \bullet \vec{v} = \vec{v} \bullet \vec{u}$ *(symétrie)*
- $\vec{u} \bullet (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \bullet \vec{v} + \vec{u} \bullet \vec{w}$ *(bilinéarité)*
- $(k\vec{u}) \bullet \vec{v} = \vec{u} \bullet (k\vec{v}) = k(\vec{u} \bullet \vec{v})$ *(bilinéarité)*

2. Expression du produit scalaire dans un repère orthonormé

Propriété ***(expression du produit scalaire n°3)*** **:**
Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs de coordonnées respectives $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ dans un repère orthonormé.
Alors $\vec{u} \bullet \vec{v} = xx' + yy'$

Remarque : Dans un repère orthonormé, on a $\|\vec{u}\|^2 = \vec{u} \bullet \vec{u} = x^2 + y^2$. D'où $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

3. Identités remarquables avec le produit scalaire

Théorème ***(identités remarquables concernant le produit scalaire)*** **:**

- $(\vec{u} + \vec{v})^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u} \bullet \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$
- $(\vec{u} - \vec{v})^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u} \bullet \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$
- $(\vec{u} + \vec{v}) \bullet (\vec{u} - \vec{v}) = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2$

Conséquences ***(nouvelles expressions du produit scalaire)*** **:**

- $\vec{u} \bullet \vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right)$ *(expression n°4)*
- $\vec{u} \bullet \vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2\right)$ *(expression n°5)*
- $\vec{u} \bullet \vec{v} = \frac{1}{4}\left(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2\right)$ *(expression n°6)*

4. Orthogonalité

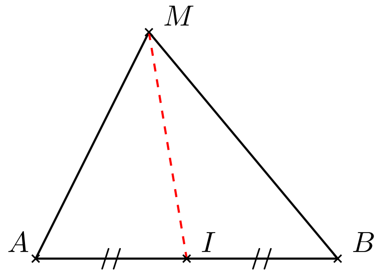
Définition :
On dit que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont orthogonaux lorsque les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires.

Propriété :
Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls.
Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\vec{u} \bullet \vec{v} = 0$.

Propriété ***(critères d'orthogonalité dans un repère orthonormé)*** **:**
Dans un repère orthonormé, les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ sont orthogonaux si et seulement si $xx' + yy' = 0$.

III. Application du produit scalaire

1. Théorème de la médiane



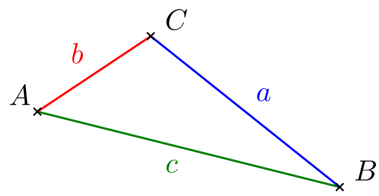
Définition :
Dans un triangle, la médiane issue d'un sommet est le segment qui joint un sommet et le milieu du côté opposé.

Théorème de la médiane :
Soit A, B deux points du plan et I le milieu de $[AB]$.
Pour tout point M du plan, on a $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MI^2 - \frac{AB^2}{4}$

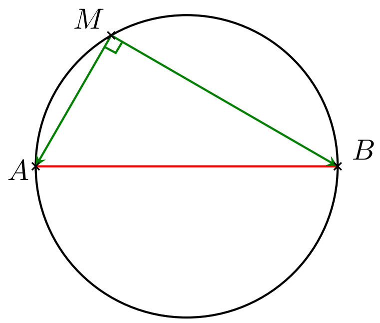
2. Théorème d'Al Kashi

Théorème d'Al Kashi *(ou théorème de Pythagore généralisé ou loi des cosinus)* :
Soit ABC un triangle. On pose $BC = a$, $CA = b$ et $AB = c$.
Alors :

- $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \times \cos(\hat{A})$
- $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \times \cos(\hat{B})$
- $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \times \cos(\hat{C})$



3. Caractérisation du cercle



Propriété :
Soit A, B et M trois points du plan. $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ si et seulement si M appartient au cercle de diamètre $[AB]$.

Remarque : Cela revient à dire que l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ est le cercle de diamètre $[AB]$.

Exemple :
Soit ABC un triangle tel que $AB = 3$, $AC = 4$ et $BC = 5$ (3, 4 et 5 est appelé triplet pythagoricien car ils vérifie la relation de Pythagore : $3^2 + 4^2 = 5^2$).

On a $5^2 = 3^2 + 4^2$
$\Leftrightarrow$ $BC^2 = AB^2 + AC^2$ donc le triangle ABC est rectangle en A.

Donc $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$ donc A appartient au cercle de diamètre $[BC]$.