02 불 대수

입력 A	B	출력 F
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

(a) 2입력인 경우: $F = AB$

입력 A	B	출력 F
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

(a) 2입력인 경우: $F = A + B$

입력 A	B	출력 F
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

(a) 2입력인 경우: $F = \overline{A}B + A\overline{B} = A \oplus B$

- 기본적인 불 대수식은 AND, OR, NOT을 이용하여 표현
- AND식은 곱셈의 형식으로 표현하고, OR 식은 덧셈의 형식으로 표현
- NOT식은 $\overline{A}$ 또는 A' 로 표현
- 완전한 논리식은 입력 항목들의 상태에 따른 출력을 결정하는 식

사람의 언어	개발자의 언어	컴퓨터의 언어
A=0 and B=1 일 때 출력을 1로 만들려는 경우 출력 논리식	$F = \overline{A}B$	if(!A && B) F = 1;
A=0 or B=1 일 때 출력을 1로 만들려는 경우 출력 논리식	$F = \overline{A} + B$	if(!A || B) F = 1;
(A=0 and B=1) or (A=1 and B=0) 일 때 출력을 1로 만들려는 경우 출력 논리식	$F = \overline{A}B + A\overline{B}$	if((!A && B) || (A && !B)) F = 1;

진리표에서 출력 F 가 1인 경우만 불 대수식으로 표현

*F가 1인 경우는 사용자가 정함

02 불 대수

1 불 대수 법칙

- 불 대수의 모든 항은 0 또는 1을 갖는다.
- [표 3-1]은 증명 없이 사용하기로 한 AND와 OR의 불 대수 공리다.

표 3-1 불 대수 공리

P1	$A = 0$ 또는 $A = 1$
P2	$0 \cdot 0 = 0$
P3	$1 \cdot 1 = 1$
P4	$0 + 0 = 0$
P5	$1 + 1 = 1$
P6	$1 \cdot 0 = 0 \cdot 1 = 0$
P7	$1 + 0 = 0 + 1 = 1$

02 불 대수

표 3-2 불 대수의 기본 법칙

항등 · 누승 · 보간 · 이중 부정 법칙

❶ $A+0=0+A=A$	❷ $A\cdot 1=1\cdot A=A$	
❸ $A+1=1+A=1$	❹ $A\cdot 0=0\cdot A=0$	
❺ $A+A=A$	❻ $A\cdot A=A$	
❼ $A+\overline{A}=1$	❽ $A\cdot\overline{A}=0$	❾ $\overline{\overline{A}}=A$

쌍대성duality

불 대수 공리나 기본 법칙에서 좌우 한 쌍에서 0과 1을 서로 바꾸고 ·과 +도 서로 바꾸면 다른 한쪽이 얻어지는 성질이다. 한쪽을 다른 쪽의 쌍대dual라고 한다. 예를 들어 ❶과 ❷는 쌍대성이 성립하며 ❸과 ❹, ❺와 ❻, ❼과 ❽도 마찬가지다.

교환 법칙commutative law

⑩ $A+B=B+A$

⑪ $A\cdot B=B\cdot A$

결합 법칙associate law

⑫ $(A+B)+C=A+(B+C)$

⑬ $(A\cdot B)\cdot C=A\cdot(B\cdot C)$

분배 법칙distributive law

⑭ $A\cdot(B+C)=A\cdot B+A\cdot C$

⑮ $A+(B\cdot C)=(A+B)\cdot(A+C)$

02 불 대수

드모르간의 정리De Morgan's theorem

⑯ $\overline{A+B}=\overline{A}\cdot\overline{B}$

⑰ $\overline{A\cdot B}=\overline{A}+\overline{B}$

흡수 법칙absorptive law

❸ $A+1=1+A=1$

⑱ $A+A\cdot B=A$ A+A·B = A·**(1+B)** = A·1 = A

⑲ $A\cdot(A+B)=A$ A·(A+B) = A·A+ A·B = A+A·B = A

합의合意의 정리consensus theorem

❼ $A+\overline{A}=1$ ❸ $A+1=1+A=1$

⑳ $AB+BC+\overline{A}C=AB+\overline{A}C$ AB+BC+A′C = AB+**(A+A′)**BC+A′C = AB+ABC+A′BC+A′C=AB(1+C)+A′C(B+1)

㉑ $(A+B)(B+C)(\overline{A}+C)=(A+B)(\overline{A}+C)$ (A+B)(B+C)(A′+C)=(A+B)(**AA′**+B+C)(A′+C)=(A+B)(A+B+C)(A′+B+C)(A′+C)
= (A+B+**0**)(A+B+C)(A′+B+C)(A′+**0**+C)=((A+B)+**0·C**)((A′+C)+**B·0**)
=(A+B)(A′+C)

❽ $A\cdot\overline{A}=0$ ⑮ $A+B\cdot C=(A+B)\cdot(A+C)$

02 불 대수

❖ 진리표를 이용한 분배법칙 $A+BC=(A+B)(A+C)$의 증명

표 3-3 진리표를 이용한 분배 법칙 $A+B\cdot C=(A+B)\cdot(A+C)$의 증명

A	B	C	좌변식		우변식		
			$B\cdot C$	$A+B\cdot C$	$A+B$	$A+C$	$(A+B)\cdot(A+C)$
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	1	0
0	1	0	0	0	1	0	0
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1

동일한 결과

02 불 대수

❖ 진리표를 이용한 드모르간의 정리 증명

표 3-4 진리표를 이용한 드모르간의 정리 $\overline{A+B}=\overline{A}\cdot\overline{B}$의 증명

A	B	$A+B$	좌변식 $\overline{A+B}$	$\overline{A}$	$\overline{B}$	우변식 $\overline{A}\cdot\overline{B}$
0	0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0	0
1	0	1	0	0	1	0
1	1	1	0	0	0	0

동일한 결과

- 드모르간의 정리는 논리 게이트로 표현할 수 있고 항이 많아도 동일하게 적용할 수 있다.

(a) 드모르간의 정리 ⑯ $\overline{A+B}=\overline{A}\cdot\overline{B}$

(b) 드모르간의 정리 ⑰ $\overline{A\cdot B}=\overline{A}+\overline{B}$

$$\overline{A+B+C}=\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}$$
$$\overline{A\cdot B\cdot C}=\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}$$

(c) 3변수인 경우

$$\overline{A+B+C+D}=\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}\cdot\overline{D}$$
$$\overline{A\cdot B\cdot C\cdot D}=\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}+\overline{D}$$

(d) 4변수인 경우

그림 3-16 드모르간의 정리를 논리 게이트로 표현한 논리 기호와 일반식

02 불 대수

2 불 대수식의 표현 형태

❑ 곱의 합과 최소항

- **곱의 합**(SOP, Sum Of Product)은 1단계인 입력이 AND항(곱의 항)으로 구성되고, 2단계인 출력이 OR항(합의 항)으로 만들어진 논리식이다.

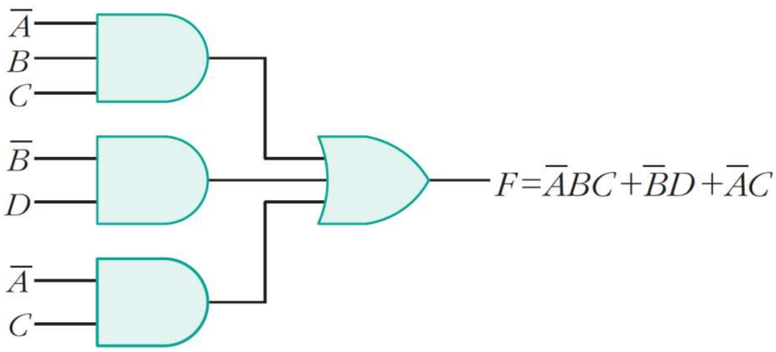

그림 3-17 $F=\overline{A}BC+\overline{B}D+\overline{A}C$의 회로도

02 불 대수

❖ 최소항

- **최소항**(minterm)은 입력 변수를 모두 포함하는 AND항이다.
- 최소항은 입력이 0이면 입력 변수의 부정을 쓰고, 입력이 1이면 입력 변수를 그대로 쓴 후 AND로 결합한다.
- 예를 들어 입력 변수가 A, B일 때 만들 수 있는 최소항은 $\overline{A}\overline{B}, \overline{A}B, A\overline{B}, AB$ 다.

표 3-5 최소항 표현 방법

(a) 2변수 최소항

A	B	최소항	기호
0	0	$\overline{A}\overline{B}$	m_0
0	1	$\overline{A}B$	m_1
1	0	$A\overline{B}$	m_2
1	1	AB	m_3

(b) 3변수 최소항

A	B	C	최소항	기호
0	0	0	$\overline{A}\overline{B}\overline{C}$	m_0
0	0	1	$\overline{A}\overline{B}C$	m_1
0	1	0	$\overline{A}B\overline{C}$	m_2
0	1	1	$\overline{A}BC$	m_3
1	0	0	$A\overline{B}\overline{C}$	m_4
1	0	1	$A\overline{B}C$	m_5
1	1	0	$AB\overline{C}$	m_6
1	1	1	ABC	m_7

02 불 대수

❖ 최소항 식

- 최소항 식은 출력이 1이 되는 항의 입력 변수를 AND 연산하고, 각 항을 OR 연산하는 식이다.

A	B	C	F	최소항	기호
0	0	0	1	$\overline{A}\overline{B}\overline{C}$	m_0
0	0	1	1	$\overline{A}\overline{B}C$	m_1
0	1	0	0	$\overline{A}B\overline{C}$	m_2
0	1	1	1	$\overline{A}BC$	m_3
1	0	0	0	$A\overline{B}\overline{C}$	m_4
1	0	1	1	$A\overline{B}C$	m_5
1	1	0	0	$AB\overline{C}$	m_6
1	1	1	1	ABC	m_7

(a) 진리표

요구사항: 입력 변수가 3개(A,B,C)이고, 원하는 출력(F)이 옆에 진리표처럼 0,1,3,5,7번째만 1로 되도록 함

$$
\begin{aligned}
F(A, B, C) &= \overline{A}\overline{B}\overline{C} + \overline{A}\overline{B}C + \overline{A}BC + A\overline{B}C + ABC \\
&= m_0 + m_1 + m_3 + m_5 + m_7 \\
&= \sum m(0, 1, 3, 5, 7)
\end{aligned}
$$

(b) 최소항 식

그림 3-18 $F(A, B, C) = \sum m(0, 1, 3, 5, 7)$의 진리표와 최소항 식

OR 게이트의 '곱의 합; minterm' 부울대수식 표현

입력 A	입력 B	출력 F
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

(a) 2입력인 경우: $F = A + B$

- $F = \sum m(1,2,3) = \bar{A}B + A\bar{B} + AB = \bar{A}B + AB + A\bar{B} + AB$
  $= (\bar{A} + A)B + A(\bar{B} + B) = B + A = A + B$

02 불 대수

❑ 합의 곱과 최대항

- **합의 곱**(POS, Product Of Sum)은 1단계인 입력이 OR항(합의 항)으로 구성되고, 2단계인 출력이 AND항(곱의 항)으로 만들어진 논리식이다.

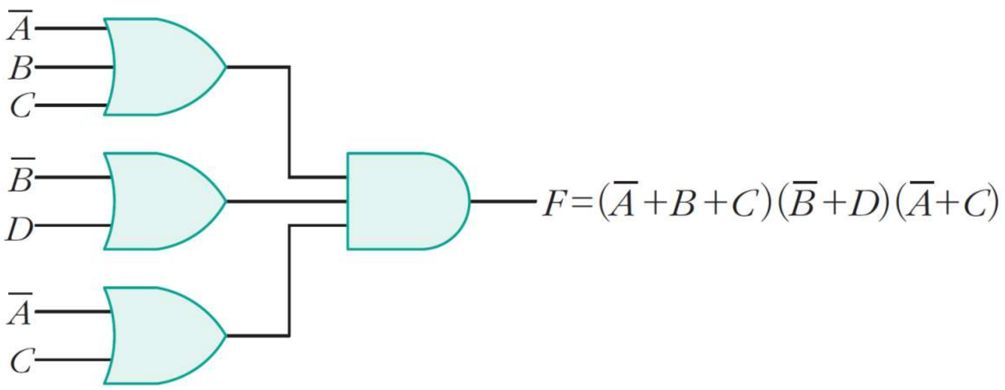

그림 3-19 $F=(\bar{A}+B+C)(\bar{B}+D)(\bar{A}+C)$의 회로도

02 불 대수

❖ 최대항

- 최대항(maxterm)은 입력 변수를 모두 포함하는 OR항이다.
- 최대항은 입력이 0이면 입력 변수를 그대로 쓰고, 입력이 1이면 입력 변수의 부정을 쓴 후 OR로 결합한다.
- 예를 들어 논리 변수가 A, B일 때 만들 수 있는 최대항은 $(A+B)$, $(A+\overline{B})$, $(\overline{A}+B)$, $(\overline{A}+\overline{B})$ 다.

표 3-6 최대항 표현 방법

(a) 2변수 최대항

A	B	최대항	기호
0	0	$A+B$	M_0
0	1	$A+\overline{B}$	M_1
1	0	$\overline{A}+B$	M_2
1	1	$\overline{A}+\overline{B}$	M_3

(b) 3변수 최대항

A	B	C	최대항	기호
0	0	0	$A+B+C$	M_0
0	0	1	$A+B+\overline{C}$	M_1
0	1	0	$A+\overline{B}+C$	M_2
0	1	1	$A+\overline{B}+\overline{C}$	M_3
1	0	0	$\overline{A}+B+C$	M_4
1	0	1	$\overline{A}+B+\overline{C}$	M_5
1	1	0	$\overline{A}+\overline{B}+C$	M_6
1	1	1	$\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}$	M_7

02 불 대수

❖ 최대항 식

- 최대항 식은 출력이 0이 되는 항의 입력 변수를 OR 연산하고, 각 항을 AND 연산하는 식이다.

A	B	C	F	최대항	기호
0	0	0	0	$A+B+C$	M_0
0	0	1	0	$A+B+\overline{C}$	M_1
0	1	0	1	$A+\overline{B}+C$	M_2
0	1	1	0	$A+\overline{B}+\overline{C}$	M_3
1	0	0	1	$\overline{A}+B+C$	M_4
1	0	1	0	$\overline{A}+B+\overline{C}$	M_5
1	1	0	1	$\overline{A}+\overline{B}+C$	M_6
1	1	1	0	$\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}$	M_7

(a) 진리표

$$\begin{aligned} F(A, B, C) &= (A+B+C)(A+B+\overline{C})(A+\overline{B}+\overline{C})(\overline{A}+B+\overline{C})(\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}) \\ &= M_0 \cdot M_1 \cdot M_3 \cdot M_5 \cdot M_7 \\ &= \prod M(0, 1, 3, 5, 7) \end{aligned}$$

(b) 최대항 식

그림 3-20 $F(A, B, C) = \prod M(0, 1, 3, 5, 7)$의 진리표와 최대항 식

❑ 최소항과 최대항의 관계

- 최소항 식은 출력이 1인 항을 곱의 합(SOP)으로 나타낸 것이고,
  최대항 식은 출력이 0인 항을 합의 곱(POS)으로 나타낸 것이다.
- 따라서 최소항과 최대항은 서로 보수의 성질을 띤다고 할 수 있다.

표 3-7 3변수 최소항과 최대항의 관계

A	B	C	F	최소항	기호	최대항	기호	관계
0	0	0	0	$\overline{A}\overline{B}\overline{C}$	m_0	$A+B+C$	M_0	$M_0=\overline{m_0}$
0	0	1	1	$\overline{A}\overline{B}C$	m_1	$A+B+\overline{C}$	M_1	$M_1=\overline{m_1}$
0	1	0	1	$\overline{A}B\overline{C}$	m_2	$A+\overline{B}+C$	M_2	$M_2=\overline{m_2}$
0	1	1	1	$\overline{A}BC$	m_3	$A+\overline{B}+\overline{C}$	M_3	$M_3=\overline{m_3}$
1	0	0	1	$A\overline{B}\overline{C}$	m_4	$\overline{A}+B+C$	M_4	$M_4=\overline{m_4}$
1	0	1	1	$A\overline{B}C$	m_5	$\overline{A}+B+\overline{C}$	M_5	$M_5=\overline{m_5}$
1	1	0	0	$AB\overline{C}$	m_6	$\overline{A}+\overline{B}+C$	M_6	$M_6=\overline{m_6}$
1	1	1	0	ABC	m_7	$\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}$	M_7	$M_7=\overline{m_7}$

동일한 로직을
최소한의 유니버셜 로직(NAND, NOR)으로 구현하라

3 논리식의 간소화

- 주어진 논리식에서 불필요한 항과 변수를 제거하고 간소화해서 등가 회로로 만드는 것을 논리식의 **간소화**라고 한다.

❶ **불 대수 법칙 이용** : 불 대수의 공리와 기본 법칙을 이용해 대수적으로 간소화한다. 비교적 단순한 논리식에 사용한다.

❷ **카르노 맵 이용** : 논리 변수의 개수가 4개 이하일 때 주로 사용한다. 불 대수를 이용하는 방법보다 복잡한 논리식에 사용한다.

❸ **도표법 이용** : 퀸-맥클러스키(Quine Mc-Cluskey) 방법이라고도 한다. 지루하고 단조로운 절차 등으로 에러가 발생할 가능성이 높아 잘 사용하지 않지만 소프트웨어로 만들기는 적합한 방법이다.

❑ 불 대수 법칙을 이용한 간소화

- 대수식이 단순하면 쉽게 간소화할 수 있지만, 식이 복잡해지면 이용하기 어렵다.
- 어떤 항끼리 결합할지 결정하기 힘들고 결과가 최적인지 판단하기도 쉽지 않다.
- 따라서 이 방법은 드물게 사용하고 카르노 맵 방법을 주로 이용한다.

```
if((!A)&&(!B)&&C)
else if((!A)&&B&&(!C))
else if((!A)&&B&&C)
else if(A&&(!B)&&(!C))
else if(A&&(!B)&&C)
    F = 1
```

(b) 3변수 최소항

A	B	C	최소항	기호
0	0	0	$\bar{A}\bar{B}\bar{C}$	m_0
0	0	1	$\bar{A}\bar{B}C$	m_1
0	1	0	$\bar{A}B\bar{C}$	m_2
0	1	1	$\bar{A}BC$	m_3
1	0	0	$A\bar{B}\bar{C}$	m_4
1	0	1	$A\bar{B}C$	m_5
1	1	0	$AB\bar{C}$	m_6
1	1	1	ABC	m_7

$$F(A,B,C) = \sum m(1,2,3,4,5)$$

$$\boxed{= \bar{A}\bar{B}C + \bar{A}B\bar{C} + \bar{A}BC + A\bar{B}\bar{C} + A\bar{B}C}$$

$$= \bar{A}\bar{B}C + A\bar{B}C + \bar{A}B\bar{C} + \bar{A}BC + A\bar{B}\bar{C} + A\bar{B}C \quad \leftarrow A+A=A \text{ 이용}$$

$$= (\bar{A}+A)\bar{B}C + \bar{A}B(\bar{C}+C) + A\bar{B}(\bar{C}+C)$$

$$\boxed{= \bar{B}C + \bar{A}B + A\bar{B}}$$

NOT 3개, AND 5개, OR 4개
→ 간소화
NOT 2개, AND 3개, OR 2개

*NAND 게이트 수
NOT(=NAND 1개), AND(=NAND 2개), OR(=NAND 3개)

```
if((!B)&&C)
else if((!A)&&B)
else if(A)&&(!B))
    F = 1
```