R E P O R T

학 과 사학과

교수님 장재훈 교수님

학 번 1705817

이 름 엄윤상

제출일 2025.12.7 22:00까지

동아대학교
DONG-AUNIVERSITY

문제 1. p156. 05 (a) - 방향 도함수

> **문제**: 주어진 방향에 대해 방향 도함수를 구하세요. (방향벡터의 크기 유지)
>
> $$f(x, y) = \frac{2x^2}{y}, \quad \mathbf{u} = (1, 2)$$

풀이

Step 1: 편미분 계산

함수 $f(x, y) = \frac{2x^2}{y}$의 편미분을 구합니다.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{4x}{y}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-2x^2}{y^2}$$

Step 2: 그래디언트 벡터 구하기

$$\nabla f(x, y) = \left(\frac{4x}{y}, \frac{-2x^2}{y^2}\right)$$

Step 3: 방향 도함수 공식 적용

방향벡터의 크기를 유지하므로 $\mathbf{u} = (1, 2)$를 그대로 사용합니다.

방향 도함수는 다음과 같이 계산됩니다:

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{u}} f(x, y) &= \nabla f(x, y) \cdot \mathbf{u} \\ &= \left(\frac{4x}{y}, \frac{-2x^2}{y^2}\right) \cdot (1, 2) \\ &= \frac{4x}{y} \cdot 1 + \frac{-2x^2}{y^2} \cdot 2 \\ &= \frac{4x}{y} - \frac{4x^2}{y^2} \\ &= \frac{4xy - 4x^2}{y^2} \\ &= \frac{4x(y - x)}{y^2} \end{aligned}$$

답

$$\boxed{D_{\mathbf{u}} f(x, y) = \frac{4x(y - x)}{y^2}}$$

문제 2. p156. 05 (b) - 방향 도함수

> **문제**: 주어진 방향에 대해 방향 도함수를 구하세요. (방향벡터의 크기 유지)
>
> $$f(x, y, z) = x^2 e^{yz}, \quad \mathbf{u} = (1, -1, 3)$$

풀이

Step 1: 편미분 계산

함수 $f(x,y,z) = x^2 e^{yz}$의 편미분을 구합니다.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xe^{yz}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 z e^{yz}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = x^2 y e^{yz}$$

Step 2: 그래디언트 벡터 구하기

$$\nabla f(x,y,z) = \left(2xe^{yz}, x^2 z e^{yz}, x^2 y e^{yz}\right)$$

Step 3: 방향 도함수 공식 적용

방향벡터의 크기를 유지하므로 $\mathbf{u} = (1,-1,3)$를 그대로 사용합니다.

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{u}} f(x,y,z) &= \nabla f(x,y,z) \cdot \mathbf{u} \\ &= \left(2xe^{yz}, x^2 z e^{yz}, x^2 y e^{yz}\right) \cdot (1,-1,3) \\ &= 2xe^{yz} \cdot 1 + x^2 z e^{yz} \cdot (-1) + x^2 y e^{yz} \cdot 3 \\ &= 2xe^{yz} - x^2 z e^{yz} + 3x^2 y e^{yz} \\ &= e^{yz}(2x - x^2 z + 3x^2 y) \\ &= xe^{yz}(2 - xz + 3xy) \end{aligned}$$

답

$$\boxed{D_{\mathbf{u}} f(x,y,z) = xe^{yz}(2 - xz + 3xy)}$$

문제 3. p156. 06 (a) - 합성함수의 도함수

> 문제: 다음과 같은 함수에 대하여 도함수를 구하세요.
>
> $$z = x^2 + 2y^2 - 3xy, \quad x = \cos t, \quad y = \log t$$

풀이

Step 1: 연쇄 법칙(Chain Rule) 적용

z를 t에 대해 미분하기 위해 연쇄 법칙을 사용합니다:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}$$

Step 2: 편미분 계산

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x - 3y$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 4y - 3x$$

Step 3: x와 y의 도함수 계산

$$\frac{dx}{dt} = -\sin t$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{t}$$

Step 4: 식에 대입

$$\frac{dz}{dt} = (2x - 3y)(-\sin t) + (4y - 3x)\left(\frac{1}{t}\right)$$

Step 5: $x = \cos t$, $y = \log t$를 대입

$$\begin{aligned}\frac{dz}{dt} &= (2\cos t - 3\log t)(-\sin t) + (4\log t - 3\cos t)\left(\frac{1}{t}\right) \\ &= -2\cos t \sin t + 3\log t \sin t + \frac{4\log t}{t} - \frac{3\cos t}{t} \\ &= -\sin(2t) + 3\log t \sin t + \frac{4\log t - 3\cos t}{t}\end{aligned}$$

답

$$\boxed{\frac{dz}{dt} = -\sin(2t) + 3\log t \sin t + \frac{4\log t - 3\cos t}{t}}$$

또는

$$\boxed{\frac{dz}{dt} = -2\cos t \sin t + 3\log t \sin t + \frac{4\log t - 3\cos t}{t}}$$

문제 4. p157. 09 (a) - 제약조건 하 최적화

> **문제**: 주어진 제약조건에서 다음 함수의 최대값과 최소값을 구하세요.
>
> $$f(x, y) = e^{2xy}, \quad x^2 + y^2 = 4$$

풀이

Step 1: 라그랑주 승수법(Lagrange Multiplier Method) 설정

제약조건: $g(x, y) = x^2 + y^2 - 4 = 0$

라그랑주 함수:

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = e^{2xy} - \lambda(x^2 + y^2 - 4)$$

Step 2: 편미분 = 0 조건

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} &= 2ye^{2xy} - 2\lambda x = 0 \quad \cdots (1) \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} &= 2xe^{2xy} - 2\lambda y = 0 \quad \cdots (2) \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} &= -(x^2 + y^2 - 4) = 0 \quad \cdots (3)\end{aligned}$$

Step 3: 식 (1), (2)로부터

(1): $ye^{2xy} = \lambda x$
(2): $xe^{2xy} = \lambda y$

(1)을 y로, (2)를 x로 나누면 (단, $x, y \neq 0$인 경우):

$$\begin{aligned}\frac{e^{2xy}}{1} &= \frac{\lambda x}{y} \\ \frac{e^{2xy}}{1} &= \frac{\lambda y}{x}\end{aligned}$$

따라서: $\frac{\lambda x}{y} = \frac{\lambda y}{x}$

$\lambda \neq 0$이면: $x^2 = y^2$, 즉 $y = \pm x$

Step 4: 경우의 수 분석

경우 1: $y = x$

제약조건에 대입: $x^2 + x^2 = 4 \Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$

임계점: $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$, $(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$

$$f(\sqrt{2}, \sqrt{2}) = e^{2\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = e^4$$

$$f(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = e^{2\cdot(-\sqrt{2})\cdot(-\sqrt{2})} = e^4$$

경우 2: $y = -x$

제약조건에 대입: $x^2 + x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$

임계점: $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$, $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$

$$f(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = e^{2\cdot\sqrt{2}\cdot(-\sqrt{2})} = e^{-4}$$

$$f(-\sqrt{2}, \sqrt{2}) = e^{2\cdot(-\sqrt{2})\cdot\sqrt{2}} = e^{-4}$$

Step 5: 특수 경우 ($x = 0$ 또는 $y = 0$)

- $x = 0$: $y^2 = 4 \Rightarrow y = \pm 2$, $f(0, \pm 2) = e^0 = 1$
- $y = 0$: $x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$, $f(\pm 2, 0) = e^0 = 1$

Step 6: 최대값과 최소값 결정

$$e^{-4} < 1 < e^4$$

답

$$\boxed{\text{최대값: } e^4 \text{ (at } (\sqrt{2}, \sqrt{2}), (-\sqrt{2}, -\sqrt{2}))}$$

$$\boxed{\text{최소값: } e^{-4} \text{ (at } (\sqrt{2}, -\sqrt{2}), (-\sqrt{2}, \sqrt{2}))}$$

문제 5. p157. 09 (b) - 제약조건 하 최적화

> **문제**: 주어진 제약조건에서 다음 함수의 최대값과 최소값을 구하세요.
>
> $$g(x, y, z) = 2x - y + 3z, \quad x + y - z = 1, \quad x^2 + y^2 = 1$$

풀이

Step 1: 제약조건 정리

두 개의 제약조건이 있습니다:

- $h_1(x, y, z) = x + y - z - 1 = 0$
- $h_2(x, y, z) = x^2 + y^2 - 1 = 0$

Step 2: 첫 번째 제약조건으로 z 소거

h_1로부터: $z = x + y - 1$

이를 목적함수에 대입:

$$g(x, y, z) = 2x - y + 3z = 2x - y + 3(x + y - 1)$$

$$= 2x - y + 3x + 3y - 3 = 5x + 2y - 3$$

Step 3: **단일 제약조건 최적화 문제로 변환**

새로운 목적함수: $f(x, y) = 5x + 2y - 3$
제약조건: $x^2 + y^2 = 1$

Step 4: **라그랑주 승수법 적용**

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = 5x + 2y - 3 - \lambda(x^2 + y^2 - 1)$$

편미분:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 5 - 2\lambda x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{5}{2\lambda}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = 2 - 2\lambda y = 0 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{1}{\lambda}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = -(x^2 + y^2 - 1) = 0$$

Step 5: λ **구하기**

제약조건에 대입:

$$\left(\frac{5}{2\lambda}\right)^2 + \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 = 1$$

$$\frac{25}{4\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2} = 1$$

$$\frac{25 + 4}{4\lambda^2} = 1$$

$$\frac{29}{4\lambda^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad \lambda^2 = \frac{29}{4}$$

$$\lambda = \pm\frac{\sqrt{29}}{2}$$

Step 6: **임계점 계산**

경우 1: $\lambda = \frac{\sqrt{29}}{2}$

$$x = \frac{5}{2 \cdot \frac{\sqrt{29}}{2}} = \frac{5}{\sqrt{29}}$$

$$y = \frac{1}{\frac{\sqrt{29}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{29}}$$

$$z = x + y - 1 = \frac{5}{\sqrt{29}} + \frac{2}{\sqrt{29}} - 1 = \frac{7}{\sqrt{29}} - 1 = \frac{7 - \sqrt{29}}{\sqrt{29}}$$

목적함수 값:

$$g = 5 \cdot \frac{5}{\sqrt{29}} + 2 \cdot \frac{2}{\sqrt{29}} - 3 = \frac{25 + 4}{\sqrt{29}} - 3 = \frac{29}{\sqrt{29}} - 3 = \sqrt{29} - 3$$

경우 2: $\lambda = -\frac{\sqrt{29}}{2}$

$$x = \frac{5}{2 \cdot (-\frac{\sqrt{29}}{2})} = -\frac{5}{\sqrt{29}}$$

$$y = \frac{1}{-\frac{\sqrt{29}}{2}} = -\frac{2}{\sqrt{29}}$$

$$z = -\frac{5}{\sqrt{29}} - \frac{2}{\sqrt{29}} - 1 = -\frac{7}{\sqrt{29}} - 1 = \frac{-7 - \sqrt{29}}{\sqrt{29}}$$

목적함수 값:

$$g = 5 \cdot \left(-\frac{5}{\sqrt{29}}\right) + 2 \cdot \left(-\frac{2}{\sqrt{29}}\right) - 3 = -\frac{29}{\sqrt{29}} - 3 = -\sqrt{29} - 3$$

Step 7: 최대값과 최소값

$$\sqrt{29} - 3 > -\sqrt{29} - 3$$

답

$$\boxed{\text{최대값: } \sqrt{29} - 3 \text{ (at } x = \frac{5}{\sqrt{29}}, y = \frac{2}{\sqrt{29}}, z = \frac{7 - \sqrt{29}}{\sqrt{29}})}$$

$$\boxed{\text{최소값: } -\sqrt{29} - 3 \text{ (at } x = -\frac{5}{\sqrt{29}}, y = -\frac{2}{\sqrt{29}}, z = \frac{-7 - \sqrt{29}}{\sqrt{29}})}$$

문제 6. p158. 13 (a) - Hessian Matrix

> 문제: 주어진 점에서 다음 함수의 Hessian matrix를 구하세요.
>
> $$f(x, y) = x^2 + 3xy - y^3, \quad (1, 2)$$

풀이

Step 1: 1차 편미분 계산

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + 3y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 3x - 3y^2$$

Step 2: 2차 편미분 계산

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 3$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 3$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -6y$$

Step 3: Hessian Matrix 구성

$$H(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -6y \end{pmatrix}$$

Step 4: 점 (1,2)에서 계산

$$H(1, 2) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -6(2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -12 \end{pmatrix}$$

답

$$\boxed{H(1, 2) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -12 \end{pmatrix}}$$

문제 7. p158. 13 (b) - Hessian Matrix

> 문제: 주어진 점에서 다음 함수의 Hessian matrix를 구하세요.
>
> $$g(x,y,z) = e^x \sin y + \log(z^2+1), \quad (1,-2,3)$$

풀이

Step 1: 1차 편미분 계산

$$\frac{\partial g}{\partial x} = e^x \sin y$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} = e^x \cos y$$

$$\frac{\partial g}{\partial z} = \frac{2z}{z^2+1}$$

Step 2: 2차 편미분 계산

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = e^x \sin y$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} = e^x \cos y$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial z} = 0$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x} = e^x \cos y$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = -e^x \sin y$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial y \partial z} = 0$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial z \partial x} = 0$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial z \partial y} = 0$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial z^2} = \frac{2(z^2+1) - 2z \cdot 2z}{(z^2+1)^2} = \frac{2z^2+2-4z^2}{(z^2+1)^2} = \frac{2-2z^2}{(z^2+1)^2}$$

Step 3: Hessian Matrix 구성

$$H(x,y,z) = \begin{pmatrix} e^x \sin y & e^x \cos y & 0 \\ e^x \cos y & -e^x \sin y & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2-2z^2}{(z^2+1)^2} \end{pmatrix}$$

Step 4: 점 (1,-2,3)에서 계산

$$e^1 \sin(-2) = e \sin(-2) = -e \sin 2$$

$$e^1 \cos(-2) = e \cos(-2) = e \cos 2$$

$$\frac{2-2(3)^2}{(3^2+1)^2} = \frac{2-18}{(10)^2} = \frac{-16}{100} = -\frac{4}{25}$$

$$H(1,-2,3) = \begin{pmatrix} -e \sin 2 & e \cos 2 & 0 \\ e \cos 2 & e \sin 2 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{4}{25} \end{pmatrix}$$

답

$$\boxed{H(1,-2,3) = \begin{pmatrix} -e\sin 2 & e\cos 2 & 0 \\ e\cos 2 & e\sin 2 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{4}{25} \end{pmatrix}}$$

문제 8. p158. 14 (a) - 극값과 안장점

> **문제**: 다음과 같은 함수의 극대점, 극소점, 안장점을 구하세요.
>
> $$f(x,y) = x^2 + 4y^2 + 2x - 4y - 10$$

풀이

Step 1: 1차 편미분 = 0 (임계점 찾기)

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -1$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = 8y - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{1}{2}$$

임계점: $\left(-1, \frac{1}{2}\right)$

Step 2: 2차 편미분 계산 (Hessian Matrix)

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 8$$
$$H = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$$

Step 3: 2차 도함수 판정법

판별식: $D = f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2 = 2 \cdot 8 - 0^2 = 16 > 0$

$f_{xx} = 2 > 0$이므로 임계점은 **극소점**입니다.

Step 4: 극소값 계산

$$f\left(-1, \frac{1}{2}\right) = (-1)^2 + 4\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2(-1) - 4\left(\frac{1}{2}\right) - 10$$
$$= 1 + 1 - 2 - 2 - 10 = -12$$

답

$$\boxed{\text{극소점: } \left(-1, \frac{1}{2}\right), \quad \text{극솟값: } -12}$$

$$\boxed{\text{극대점: 없음}, \quad \text{안장점: 없음}}$$

문제 9. p158. 14 (b) - 극값과 안장점

> **문제**: 다음과 같은 함수의 극대점, 극소점, 안장점을 구하세요.
>
> $$g(x,y) = 6x^2 - y^3 - 3x^2y + 6y^2 - 3$$

풀이

Step 1: 1차 편미분 = 0 (임계점 찾기)

$$\frac{\partial g}{\partial x} = 12x - 6xy = 6x(2-y) = 0$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} = -3y^2 - 3x^2 + 12y = -3(y^2 - 4y + x^2) = 0$$

첫 번째 식으로부터: $x = 0$ 또는 $y = 2$

경우 1: $x = 0$

두 번째 식에 대입: $-3(y^2 - 4y) = 0 \Rightarrow y(y-4) = 0$

따라서 $y = 0$ 또는 $y = 4$

임계점: $(0,0)$, $(0,4)$

경우 2: $y = 2$

두 번째 식에 대입: $-3(4 - 8 + x^2) = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$

임계점: $(2,2)$, $(-2,2)$

Step 2: 2차 편미분 계산

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = 12 - 6y$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} = -6x$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = -6y + 12$$

Step 3: 각 임계점에서 판정

임계점 (0, 0):

$$H(0,0) = \begin{pmatrix} 12 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$$

$D = 12 \cdot 12 - 0 = 144 > 0$, $g_{xx} = 12 > 0 \rightarrow$ **극소점**

$$g(0,0) = -3$$

임계점 (0, 4):

$$H(0,4) = \begin{pmatrix} 12-24 & 0 \\ 0 & -24+12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 & 0 \\ 0 & -12 \end{pmatrix}$$

$D = (-12)(-12) - 0 = 144 > 0$, $g_{xx} = -12 < 0 \rightarrow$ **극대점**

$$g(0,4) = 0 - 64 - 0 + 96 - 3 = 29$$

임계점 (2, 2):

$$H(2,2) = \begin{pmatrix} 12-12 & -12 \\ -12 & -12+12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -12 \\ -12 & 0 \end{pmatrix}$$

$D = 0 \cdot 0 - (-12)^2 = -144 < 0 \rightarrow$ **안장점**

임계점 (-2, 2):

$$H(-2,2) = \begin{pmatrix} 0 & 12 \\ 12 & 0 \end{pmatrix}$$

$D = 0 \cdot 0 - 12^2 = -144 < 0 \to$ **안장점**

답

$$\boxed{\text{극소점: } (0, 0), \quad \text{극솟값: } -3}$$

$$\boxed{\text{극대점: } (0, 4), \quad \text{극댓값: } 29}$$

$$\boxed{\text{안장점: } (2, 2), (-2, 2)}$$

문제 10. p158. 15 (b) - 야코비 Matrix

> **문제**: 다음 변환의 야코비 matrix를 구하세요.
>
> $$x = u \sin v, \quad y = u \cos v$$

풀이

Step 1: 야코비 행렬의 정의

변환 $(u, v) \to (x, y)$의 야코비 행렬은 다음과 같이 정의됩니다:

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}$$

Step 2: 각 편미분 계산

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \sin v$$

$$\frac{\partial x}{\partial v} = u \cos v$$

$$\frac{\partial y}{\partial u} = \cos v$$

$$\frac{\partial y}{\partial v} = -u \sin v$$

Step 3: 야코비 행렬 구성

$$J = \begin{pmatrix} \sin v & u \cos v \\ \cos v & -u \sin v \end{pmatrix}$$

Step 4: 야코비안(Jacobian determinant) 계산 (참고)

$$\det(J) = \sin v \cdot (-u \sin v) - u \cos v \cdot \cos v$$

$$= -u \sin^2 v - u \cos^2 v = -u(\sin^2 v + \cos^2 v) = -u$$

답

$$\boxed{J = \begin{pmatrix} \sin v & u \cos v \\ \cos v & -u \sin v \end{pmatrix}}$$

야코비안: $\boxed{\det(J) = -u}$
