信号解析基礎
～フーリエ変換の性質と公式～

明治大学 森勢将雅

前半の内訳

- 序論（聴覚，正弦波，信号処理分野の概観）
- 線形システムと畳み込み
- フーリエ級数とフーリエ展開
- フーリエ変換
- フーリエ変換の性質と公式
- デルタ関数と窓関数
- ラプラス変換と伝達関数

フーリエ変換に関する公式

- 色々あるが主要なものに絞って紹介
  - 線形性に関する公式
  - 時間領域シフト
  - 周波数領域シフト
  - 畳み込み定理
- これらの公式を活用し，より複雑なフーリエ変換の公式を理解する
- 以下簡単のためにフーリエ変換・逆変換を
  - $X(\omega) = \mathcal{F}[x(t)], x(t) = \mathcal{F}^{-1}[X(\omega)]$
  - と表記する

Wordで数式を打つためのメモ

- テキストボックス内で「Alt+;」と打てば数式モードにできる
- 内部ではLaTeXに近い方法で数式を打てる
- フーリエ変換の記号は「¥scriptF」と打ちスペースを押せばOK

Wordで数式

- 数式モードではLaTeXに近い書式が可能
  - ¥omega でωを出せる．他の記号も対応．
  - a_0でa_0を出せる
  - a^2でa^2を出せる
  - 1/2で$\frac{1}{2}$を出せる
  - ¥leqで$\leq$を出せる（等号などを出す記号）
  - cosやsinやlogなどはそのまま入力しスペースを押せば良い（たまにイタリックで記載する人がいるが，それは間違いです）

線形性の説明

- フーリエ変換は線形の演算である
- $\mathcal{F}[\alpha x(t)+\beta y(t)]=\alpha X(\omega)+\beta Y(\omega)$
- 定数倍については以下で導ける
  - $\int_{-\infty}^{\infty}\alpha x(t)e^{-j\omega t}dt=\alpha\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-j\omega t}dt$
- 2関数の和についても以下のとおり
  - $\int_{-\infty}^{\infty}\big(x(t)+y(t)\big)e^{-j\omega t}dt$から
  - $\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-j\omega t}+y(t)e^{-j\omega t}\,dt$
  - $\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-j\omega t}dt+\int_{-\infty}^{\infty}y(t)e^{-j\omega t}\,dt$

時間領域シフト

- $\mathcal{F}[x(t-\tau)] = e^{-j\tau\omega}X(\omega)$
  - 導出してみよう（制限時間7分）
  - ヒント：置換積分を利用する

周波数領域シフト

- $\mathcal{F}\left[e^{i\omega_0 t}x(t)\right] = X(\omega - \omega_0)$
- 導出してみよう（制限時間3分）
  - ヒント：時間領域シフトの逆パターン

畳み込み定理

- $\mathcal{F}[x(t) * h(t)] = X(\omega)H(\omega)$
  - 時間領域の畳み込みは周波数領域での積になる
  - この定理はディジタル信号処理において革命的な意味を持つ
  - 導出してみよう（制限時間10分）
  - ヒント：フーリエ変換のexp関数に着目.

畳み込みに関する公式の説明

- 2回目講義の内容の再掲
  - 交換律：$x(t) * h(t) = h(t) * x(t)$
  - 結合律：$\left(x(t) * h(t)\right) * y(t) = x(t) * \left(h(t) * y(t)\right)$
  - 分配律：$x(t) * \left(h(t) + y(t)\right) = x(t) * h(t) + x(t) * y(t)$
  - スカラー倍：$a\left(x(t) * h(t)\right) = ax(t) * h(t) = x(t) * ah(t)$
- 周波数領域に置き換えれば一目瞭然

これらの定義を活用した問題

- 先週やった問題の別法
  - $x(t) = \begin{cases} t+1, & -1 < t < 0 \\ -t+1, & 0 \le t < 1 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$
  - 上記のスペクトル$X(\omega)$を計算してみよう（制限時間5分）
- $x(t)$は矩形波$y(t)$同士の畳み込みである.
  - $y(t) = \begin{cases} 1, & |t| < 0.5 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$

問題の解答

- 当日やります.

もう1問

- $x(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < 1 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$
- 上記のスペクトル$X(\omega)$を計算してみよう（制限時間5分）
- 以下の式の時間シフトとして計算可能
  - $x(t) = \begin{cases} 1, & |t| < 0.5 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$

問題の解答

- 当日やります.

本日のまとめ

- フーリエ変換に関する特性と計算力の強化
  - 特に畳み込み定理と正弦波のフーリエ変換周辺の知識は，ディジタル領域の演算をする際にも重要な意味を担う
- 次回予告
  - デルタ関数と窓関数
  - デルタ関数は前回説明したとおり
  - 窓関数を用いることで時系列信号の解析への応用範囲が大幅に広がる