ITERA

Modul 4 Praktikum
Statistika Sains Data

Klasifikasi dengan Analisis Diskriminan

Program Studi Sains Data
Fakultas Sains
Institut Teknologi Sumatera

2024

A. Tujuan Praktikum

1. Mahasiswa mampu mengklasifikasikan objek baru ke dalam kelompok berdasarkan fungsi diskriminan yang terbentuk.
2. Mahasiswa mampu mengidentifikasi variabel prediktor yang berkontribusi terhadap pemisahan kelompok data.
3. Mahasiswa mampu membuat fungsi diskriminan yang terdiri atas kombinasi linear berbagai variabel prediktor yang dapat memisahkan objek ke dalam kelompok data.

B. Teori Dasar

Analisis Diskriminan merupakan salah satu analisis multivariat yang bertujuan untuk memisahkan beberapa objek ke dalam beberapa kelompok atau kategori dengan cara membentuk sebuah fungsi yang memaksimalkan pemisahan antar kelompok tersebut yang biasa disebut sebagai fungsi diskriminan. Fungsi diskrimininan merupakan fungsi yang terdiri atas kombinasi liniear berbagai variabel prediktor. Pada nantinya akan terbentuk fungsi diskrimininan sebanyak jumlah kelas atau kategori dikurangi satu yang dapat memisahkan data. Lebih lanjut lagi, analisis diskriminan merupakan teknik interdependensi dimana informasi kategori atau kelas data sudah diketahui dan ingin dilihat hubungan kategori atau kelas tersebut dengan variabel prediktor. Analisis diskriminan digunakan pada kasus dimana variabel respons berupa data kategorik dan variabel prediktor berupa data numerik.

Secara umum metode analisis diskriminan serupa dengan metode PCA namun tak sama. Persamaannya adalah kedua metode merupakan metode yang mereduksi dimensi data menjadi dimensi yang lebih kecil dengan cara membentuk sebuah persamaan yang terdiri atas kombinasi linear dari berbagai variabel. Perbedaanya adalah pada 1] analisis diskriminan berfokus untuk membentuk persamaan yang dapat memaksimalkan pemisahan antar kelompok dan analisis ini membutuhkan informasi variabel respons berupa data ketegorik guna membentuk persamaannya. Persamaan ini biasa dinyatakan dalam sebuah fungsi yang dinamakan sebagai **fungsi diskriminan**. Di sisi lain, pada 2] PCA berfokus untuk membentuk persamaan yang dapat memaksimalkan & menjelaskan keragaman data dan analisis ini tidak membutuhkan informasi variabel respons saat membentuk persamaannya. Persamaan ini biasa dinyatakan dalam sebuah fungsi yang dinamakan sebagai **principal component**.

Asumsi pada Analisis Diskriminan

Berbagai asumsi yang diterapkan ketika melakukan analisis diskriminan adalah :

1. **Variabel Prediktor berdistribusi Multivariate Normal.**

   Uji ini dapat dilakukan dengan mengamati grafik Chi-Square QQ Plot. Jika pada grafik terbentuk garis linear X = Y, maka dapat dikatakan variabel prediktor berdistribusi multivariate normal.

2. **Matriks Ragam-peragam Variabel Prediktor Antar Kelompok Sama.**

   Dalam prakteknya terdapat kelonggaran pada asumsi ini. Asumsi ini berlaku jika ingin membuat fungsi diskriminan yang linear, namun jika ia tidak terpenuhi atau matriks ragam-peragamnya tidak sama, maka solusi yang dapat dilakukan adalah dengan model diskriminan yang kuadratik. Hipotesis pada asumsi ini adalah :

$$H_0 : \sum_1 = \sum_2 = \ldots = \sum_p$$

$$H_1 : minimal\ terdapat\ satu\ matriks\ ragam - peragam\ yang\ berbeda$$

3. **Terdapat Perbedaan Rata-rata Antar Kelompok Data.**

   Untuk menguji apakah terdapat perbedaan antar kelompok data, dapat menggunakan Uji Manova atau statistik uji *Wilk's Lambda*. Hipotesis pada asumsi ini adalah

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_p$$

$$H_1 : minimal\ terdapat\ satu\ rata - rata\ yang\ berbeda$$

Ukuran Performa Model

Digunakan untuk mengetahui seberapa besar keakurasian model dalam mengklasifikasi suatu objek. Ukuran yang digunakan adalah *Hit Ratio* atau *Apparent Error Rate (APER)*. &*Hit Ratio* merupakan proporsi objek yang diklasifikasikan benar oleh model, sedangkan *APER* kebalikannya, yaitu proporsi objek yang diklasifikan salah oleh model. Untuk memudahkan dalam pengitungannya, perlu dibuat sebuah *Confusion Matrix*, yaitu matriks tabulasi silang antara kategori sebenarnya dengan kategori yang diprediksi oleh model.

		Predicted Group 1	Predicted Group 2
Actual	Group 1	n_{C1}	n_{M1}
Actual	Group 2	n_{M2}	n_{C2}

Nilai *Hit Ratio* dapat dihitung dengan rumus :

$$Hit\ Ratio\ = \frac{n_{C1} + n_{C2}}{n_{C1} + n_{M1} + n_{M2} + n_{C2}}$$

Sedangkan *APER* dapat dihitung dengan rumus :

$$APER\ = 1 - Hit\ Ratio$$

Contoh Kasus : Pengelompokkan Species Bunga pada Dataset Iris.

Data yang digunakan adalah data Iris yang sudah termuat di dalam R. Data Iris terdiri atas 150 pengamatan bunga Iris dengan variabel : 1] Sepal Length, 2] Sepal Width, 3] Petal Length, 4] Petal Width, dan 5] Species dari bunga Iris tersebut. Tujuan dilakukan analisis adalah untuk mengelompokkan spesies bunga Iris berdasarkan informasi yang tertera dengan metode Analisis Diskriminan.

Load Library dan Dataset

```
instal.package("ISLR")
instal.package("MASS")
instal.package("repr")
instal.package("ggplot2")
```

```
library(DT)     #Menampilkan tabel agar mudah dilihat di browser
library(MVN)    #Uji multivariate normal
library(MASS)   #Fungsi diskriminan analisis
library(biotools) #Melakukan uji Box-M
## ---
## biotools version 3.1
data("iris")
str(iris)
datatable(iris)
```

Show entries

Search:

	Sepal.Length	Sepal.Width	Petal.Length	Petal.Width	Species
14	4.3	3	1.1	0.1	setosa
9	4.4	2.9	1.4	0.2	setosa
39	4.4	3	1.3	0.2	setosa
43	4.4	3.2	1.3	0.2	setosa
42	4.5	2.3	1.3	0.3	setosa
4	4.6	3.1	1.5	0.2	setosa
7	4.6	3.4	1.4	0.3	setosa
23	4.6	3.6	1	0.2	setosa
48	4.6	3.2	1.4	0.2	setosa
3	4.7	3.2	1.3	0.2	setosa

Showing 1 to 10 of 150 entries

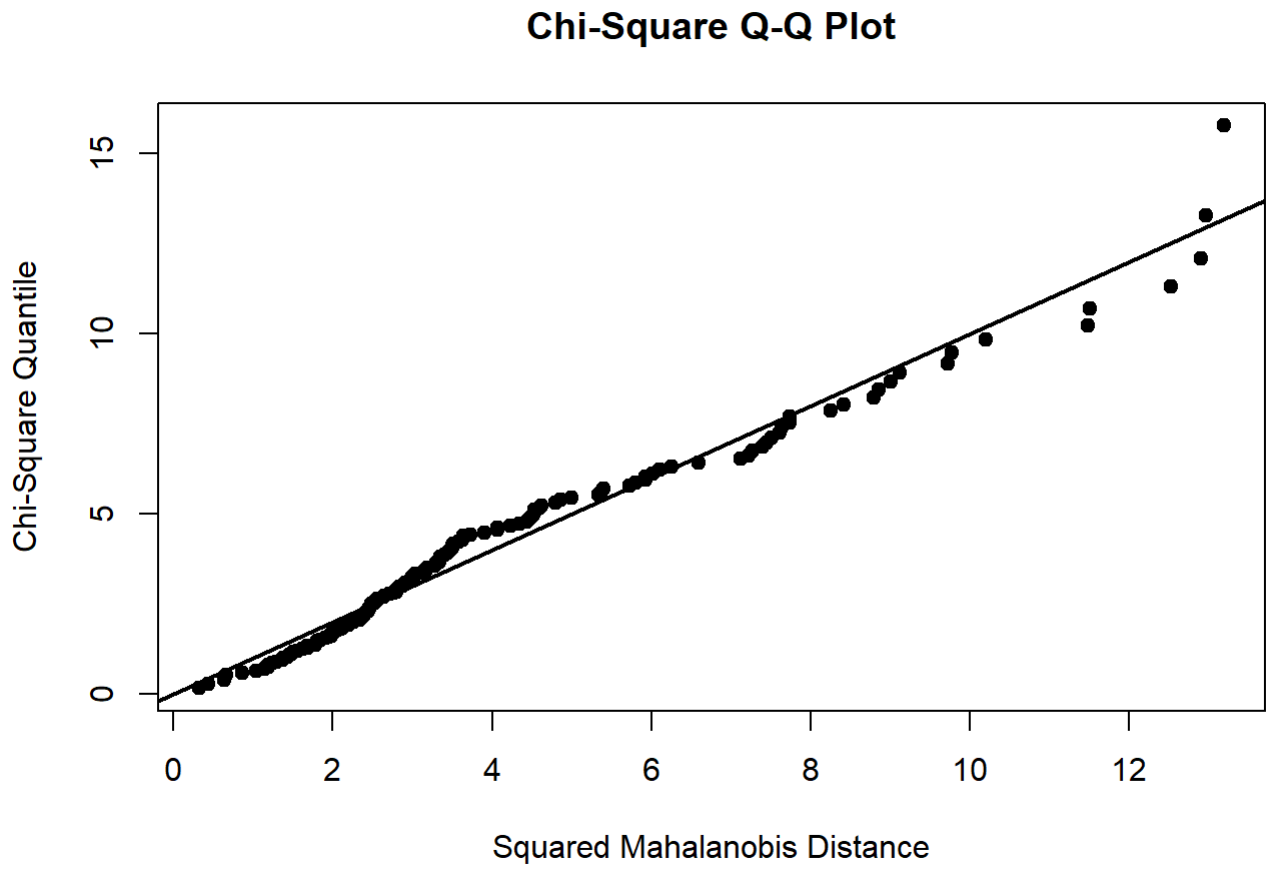
Previous12345…15Next

Pengujian Asumsi

Multivariate Normal

Ketika menguji apakah variabel prediktor berdistribusi multivariate normal, di R dapat menggunakan fungsi mvn. Pengujian dilakukan hanya pada variabel prediktor (berskala numerik).

```
mvn(data = iris[, c(1:4)], multivariatePlot = 'qq') #hanya mengambil kolom variabel prediktor
```



Dari grafik Chi-Square QQ Plot diatas, dapat dilihat bahwasanya secara umum terbentuk garis linear X = Y, maka dapat dikatakan bahwa data berdistribusi multivariate normal.

Matriks Ragam-peragam antar Kategori Spesies Sama

Untuk menguji apakah matriks ragam-peragam antar kategori spesies sama, digunakan statistik uji Box's M. untuk melakukan uji statistik Box's M di R dapat menggunakan fungsi boxM.

```
boxM(data = iris[, c(1:4)], grouping = iris[,5])
```

```
##
##  Box's M-test for Homogeneity of Covariance Matrices
##
## data:  iris[, c(1:4)]
## Chi-Sq (approx.) = 140.94, df = 20, p-value < 2.2e-16
```

Output diatas menunjukkan bahwa dengan tingkat signifikansi 5%, didapat keputusan untuk menolak hipotesis nol atau dengan kata lain terdapat perbedaan matriks ragam-peragam antar kategori spesies. Solusinya adalah menggunakan model diskriminan kuadratik, namun pada contoh ini mengabaikan asumsi ini sehingga tetap menggunakan model diskriminan linear.

Terdapat perbedaan rata-rata antar kategori spesies

Untuk menguji apakah terdapat perbedaan rata-rata (nilai variabel prediktor) antar kategori spesies, digunakan Uji Manova dengan statistik uji *Wilk's Lambda* . Untuk melakukan uji tersebut di R dapat menggunakan fungsi manova dan mengisikan Wilks pada parameter test.

```
m <- manova(formula = cbind(iris$Sepal.Length, iris$Sepal.Width, iris$Petal.Length,
                            iris$Petal.Width) ~ iris$Species)
summary(object = m, test = 'Wilks')
```

```
##                Df    Wilks approx F num Df den Df    Pr(>F)
## iris$Species   2 0.023439   199.15      8    288 < 2.2e-16 ***
## Residuals    147
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

Output diatas menunjukkan bahwa dengan tingkat signifikansi 5%, didapat keputusan untuk menolak hipotesis nol atau dengan kata lain terdapat perbedaan rata-rata (nilai variabel prediktor) antar kategori spesies.

Memulai Analisis Diskriminan

Membagi dataset ke dalam Training dan Test.

Training Data digunakan untuk membuat model diskriminan sedangkan Testing Data digunakan untuk mengevaluasi performa model diskriminan yang terbentuk. Pada contoh ini, dataset Iris akan dibagi menjadi 75% sebagai Training Data dan 25% sebagai Test Data.

```
set.seed(123)
train_index <- sample(seq(nrow(iris)), size = floor(0.75 * nrow(iris)), replace = F)
training_data <- iris[train_index, ]
test_data <- iris[-train_index, ]
```

Membentuk fungsi diskriminan

Di dalam R, untuk melakukan analisis diskriminan dapat menggunakan fungsi lda yang terdapat pada library MASS. Model yang dibentuk berdasarkan data yang terdapat pada Training Data.

```
linearDA <- lda(formula = Species ~., data = training_data)
```

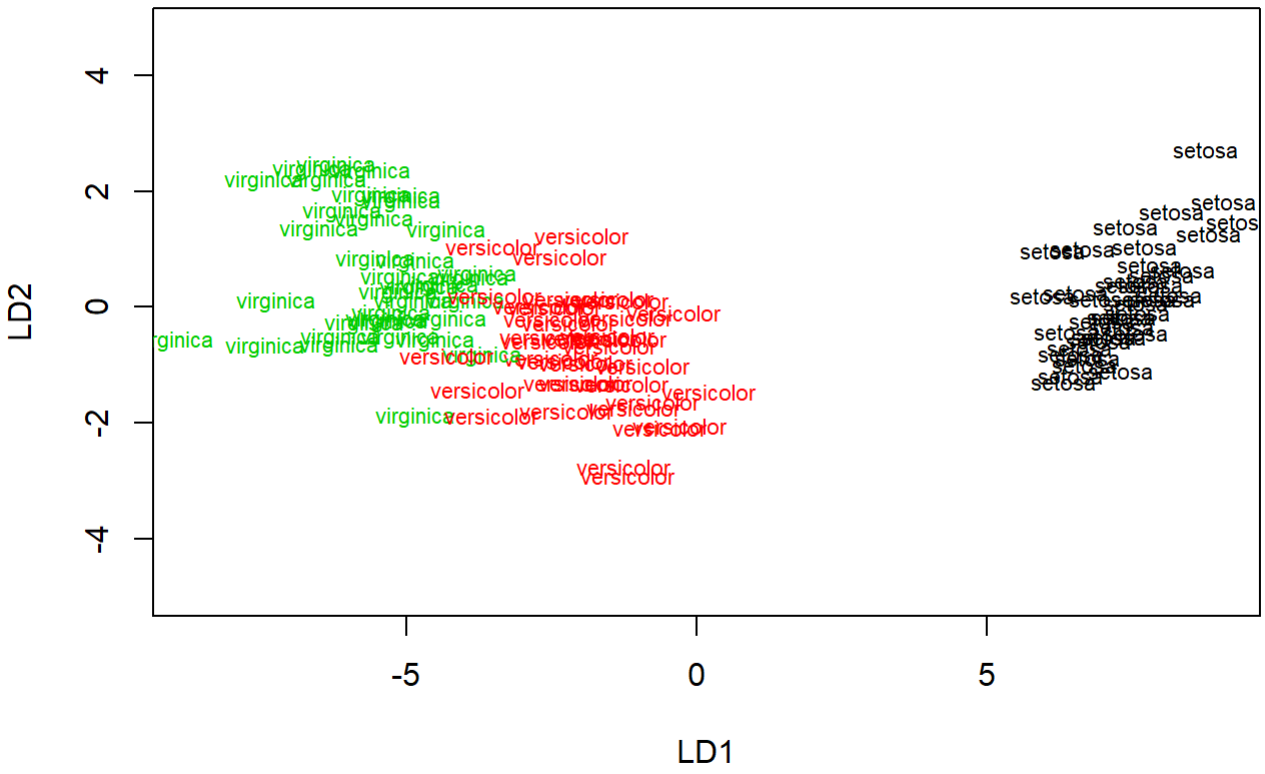
```
linearDA
## Call:
## lda(Species ~ ., data = training_data)
##
## Prior probabilities of groups:
##     setosa versicolor  virginica
##  0.3482143  0.3303571  0.3214286
##
## Group means:
##            Sepal.Length Sepal.Width Petal.Length Petal.Width
## setosa         4.997436    3.482051     1.448718   0.2487179
## versicolor     5.956757    2.770270     4.308108   1.3405405
## virginica      6.600000    2.997222     5.541667   2.0027778
##
## Coefficients of linear discriminants:
##                    LD1          LD2
## Sepal.Length  0.5867651  0.004753014
## Sepal.Width   1.6320591  2.388948706
## Petal.Length -1.9853968 -0.666265458
## Petal.Width  -2.7922397  2.419828272
##
## Proportion of trace:
##    LD1    LD2
## 0.9898 0.0102
```

Beberapa output dari fungsi lda adalah sebagai berikut =

- means = rata-rata nilai variabel prediktor pada tiap grup
- priors = peluang yang digunakan (jika tidak disebutkan, maka menggunakan proposi tiap grup)
- scalling = matriks yang berisikan fungsi diskriminan yang dinormalkan

Untuk mengetahui variabel mana yang berpengaruh terhadap perbedaan spesies bunga, salah satu caranya adalah dengan melihat plot antara fungsi diskriminan.

```
plot(linearDA, col = as.integer(training_data$Species))
```



Dilihat dari plot diatas, dapat dikatakan secara umum model mampu mengelompokkan data dengan baik walaupun terdapat sedikit overlap pada kategori Versicolor dan Virginica. Dapat dilihat pula fungsi diskriminan LD1 berperan besar dalam membedakan antara kategori bunga, sedangkan fungsi diskriminan LD2 tidak berperan besar dalam membedakan kategori bunga.

Melakukan prediksi di Test Data dan Menguji Performa Model yang dibuat

Untuk melakukan prediksi menggunakan fungsi predict dari model yang diterapkan kepada Test Data.

```
predicted <- predict(object = linearDA, newdata = test_data)
table(actual = test_data$Species, predicted = predicted$class)
```

```
##            predicted
## actual      setosa versicolor virginica
##   setosa        11          0         0
##   versicolor     0         13         0
```

```
##  virginica      0       0       14
```

Secara keseluruhan model cocok diterapkan, karena model dapat mengklasifikasikan dengan benar seluruh objek yang berada pada Test Data. Nilai Hit Ratio yang diperoleh adalah 1.

C. Latihan Praktikum

Pada praktikum kali ini akan dilakukan klasifikasi pada dataset kriminal di Kota Boston, dengan algoritma Linear Discriminant Analysis (LDA).

Package

Silahkan install jika belum ada

```
instal.package("ISLR")
instal.package("MASS")
instal.package("repr")
instal.package("ggplot2")
```

Memanggil Package

```
library("ISLR")
library("MASS")
library("repr")
```

```
library("ggplot2")
library("ROCR")
library(class)
head(Boston)
```

```
##      crim zn indus chas   nox    rm  age    dis rad tax ptratio  black lstat
## 1 0.00632 18  2.31    0 0.538 6.575 65.2 4.0900   1 296    15.3 396.90  4.98
## 2 0.02731  0  7.07    0 0.469 6.421 78.9 4.9671   2 242    17.8 396.90  9.14
## 3 0.02729  0  7.07    0 0.469 7.185 61.1 4.9671   2 242    17.8 392.83  4.03
## 4 0.03237  0  2.18    0 0.458 6.998 45.8 6.0622   3 222    18.7 394.63  2.94
## 5 0.06905  0  2.18    0 0.458 7.147 54.2 6.0622   3 222    18.7 396.90  5.33
## 6 0.02985  0  2.18    0 0.458 6.430 58.7 6.0622   3 222    18.7 394.12  5.21
##   medv
## 1 24.0
## 2 21.6
## 3 34.7
## 4 33.4
## 5 36.2
## 6 28.7
```

```
summary(Boston)
```

```
##       crim                zn              indus            chas        
##  Min.   : 0.00632   Min.   :  0.00   Min.   : 0.46   Min.   :0.00000  
##  1st Qu.: 0.08205   1st Qu.:  0.00   1st Qu.: 5.19   1st Qu.:0.00000  
##  Median : 0.25651   Median :  0.00   Median : 9.69   Median :0.00000  
##  Mean   : 3.61352   Mean   : 11.36   Mean   :11.14   Mean   :0.06917  
##  3rd Qu.: 3.67708   3rd Qu.: 12.50   3rd Qu.:18.10   3rd Qu.:0.00000  
##  Max.   :88.97620   Max.   :100.00   Max.   :27.74   Max.   :1.00000  
##       nox               rm              age              dis        
##  Min.   :0.3850   Min.   :3.561   Min.   :  2.90   Min.   : 1.130  
##  1st Qu.:0.4490   1st Qu.:5.886   1st Qu.: 45.02   1st Qu.: 2.100  
```

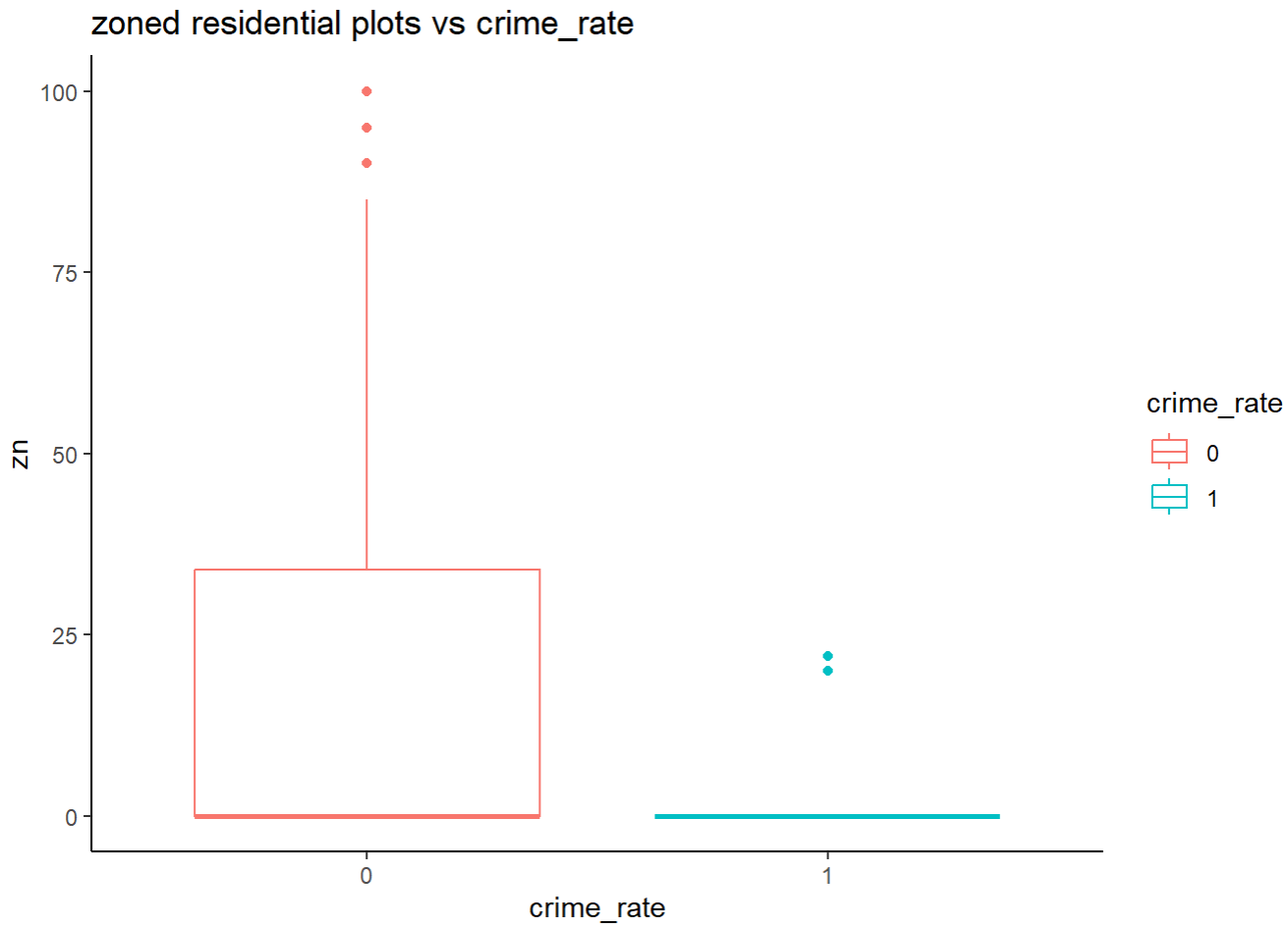
```
##  Median :0.5380   Median :6.208   Median : 77.50   Median : 3.207
##  Mean   :0.5547   Mean   :6.285   Mean   : 68.57   Mean   : 3.795
##  3rd Qu.:0.6240   3rd Qu.:6.623   3rd Qu.: 94.08   3rd Qu.: 5.188
##  Max.   :0.8710   Max.   :8.780   Max.   :100.00   Max.   :12.127
##       rad              tax           ptratio          black
##  Min.   : 1.000   Min.   :187.0   Min.   :12.60   Min.   :  0.32
##  1st Qu.: 4.000   1st Qu.:279.0   1st Qu.:17.40   1st Qu.:375.38
##  Median : 5.000   Median :330.0   Median :19.05   Median :391.44
##  Mean   : 9.549   Mean   :408.2   Mean   :18.46   Mean   :356.67
##  3rd Qu.:24.000   3rd Qu.:666.0   3rd Qu.:20.20   3rd Qu.:396.23
##  Max.   :24.000   Max.   :711.0   Max.   :22.00   Max.   :396.90
##      lstat            medv
##  Min.   : 1.73   Min.   : 5.00
##  1st Qu.: 6.95   1st Qu.:17.02
##  Median :11.36   Median :21.20
##  Mean   :12.65   Mean   :22.53
##  3rd Qu.:16.95   3rd Qu.:25.00
##  Max.   :37.97   Max.   :50.00
```

Generate the response variable

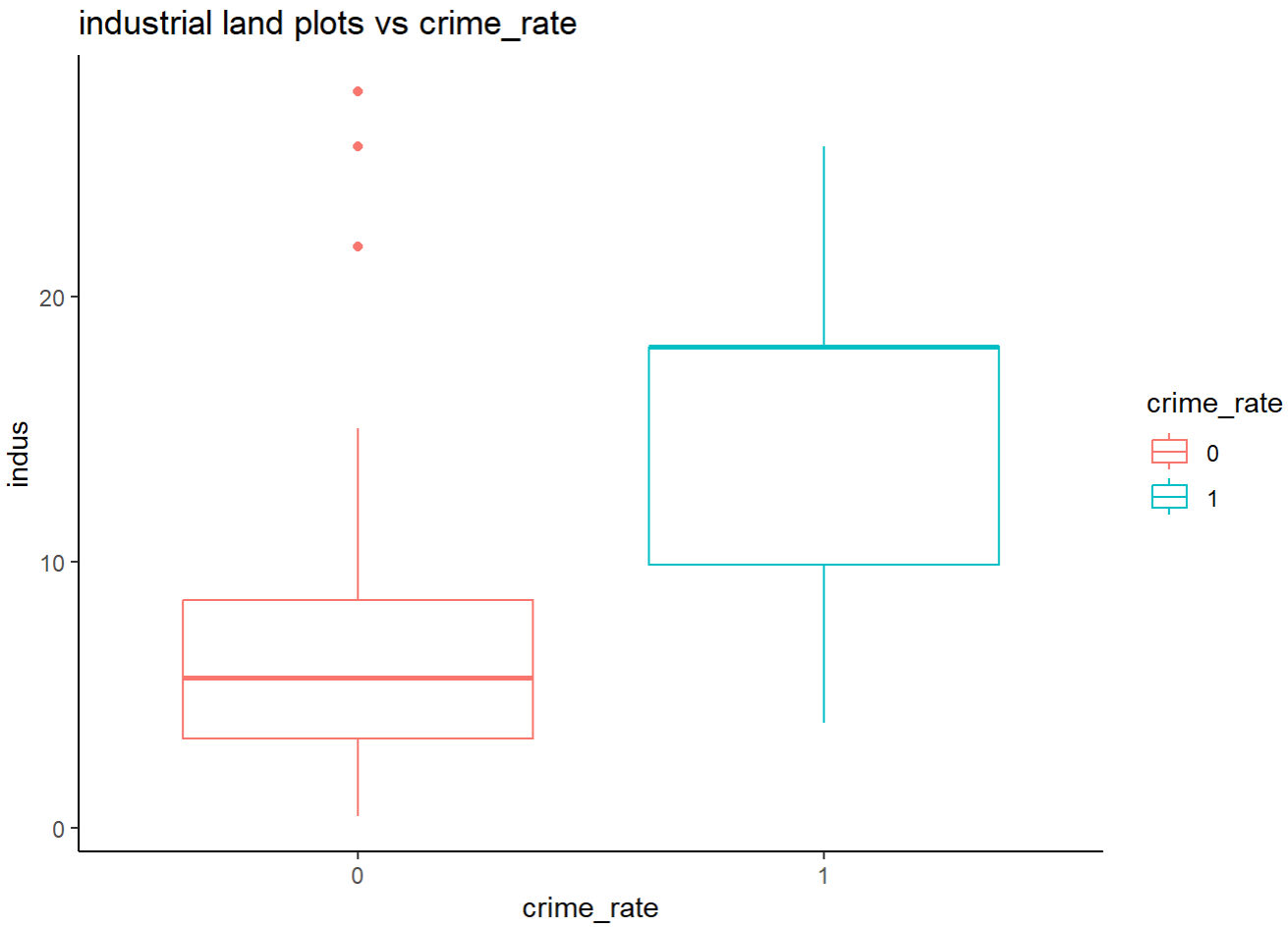
```
crime_rate <- rep(0,506)
crime_rate[Boston$crim >median(Boston$crim)]=1
df <- Boston[,-1]
df <- data.frame(df, crime_rate)
df$crime_rate <- as.factor(df$crime_rate)
```

Exploratory data analysis

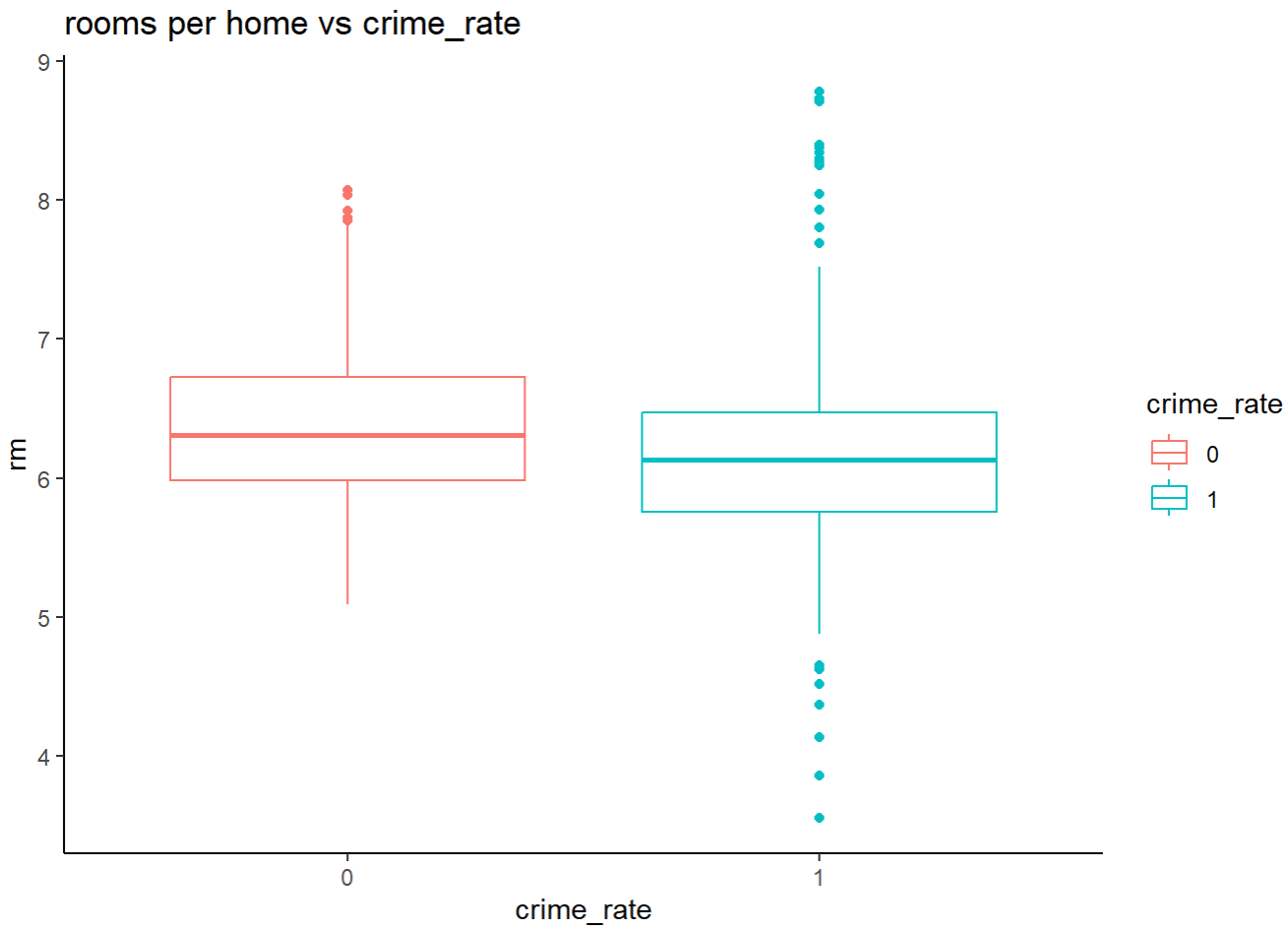
```
ggplot(df,aes(x=crime_rate,y=zn, color = crime_rate))+geom_boxplot()+theme_classic()+
  labs(title="zoned residential plots vs crime_rate")
```



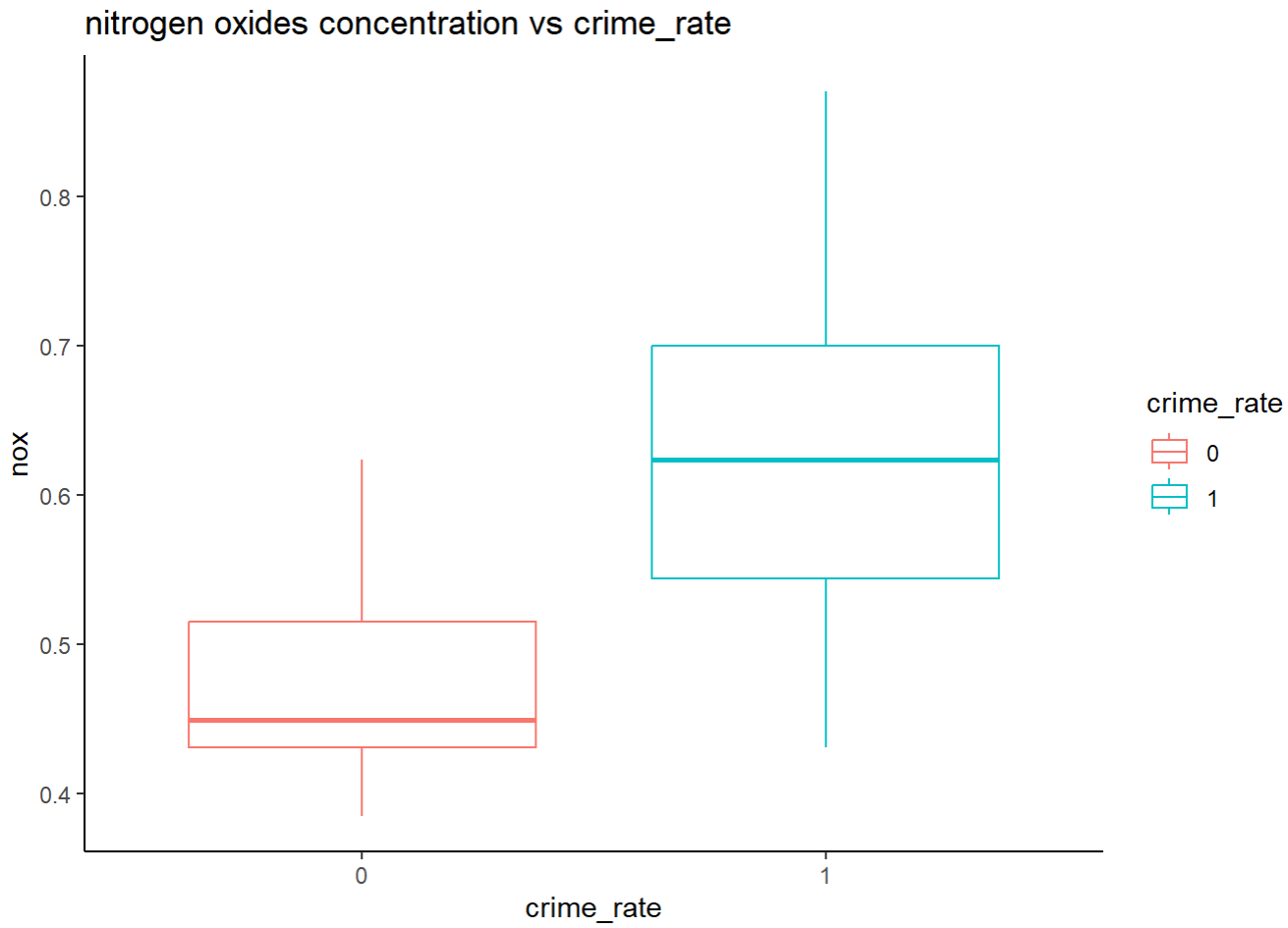

```
ggplot(df,aes(x=crime_rate,y=indus, color = crime_rate))+geom_boxplot()+theme_classic
()+
  labs(title="industrial land plots vs crime_rate")
```



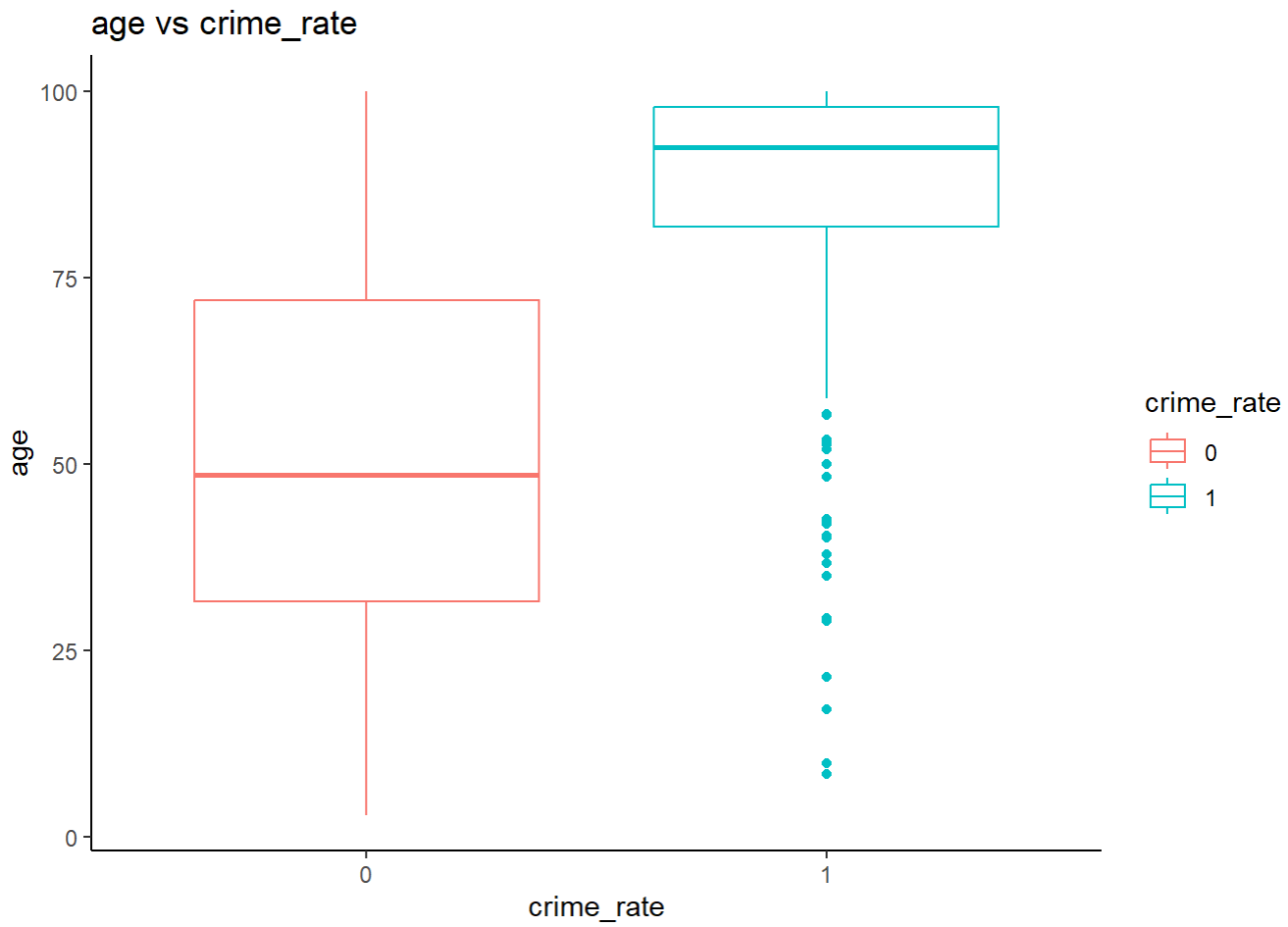

```
ggplot(df,aes(x=crime_rate,y=rm, color = crime_rate))+geom_boxplot()+theme_classic()+
  labs(title="rooms per home vs crime_rate")
```



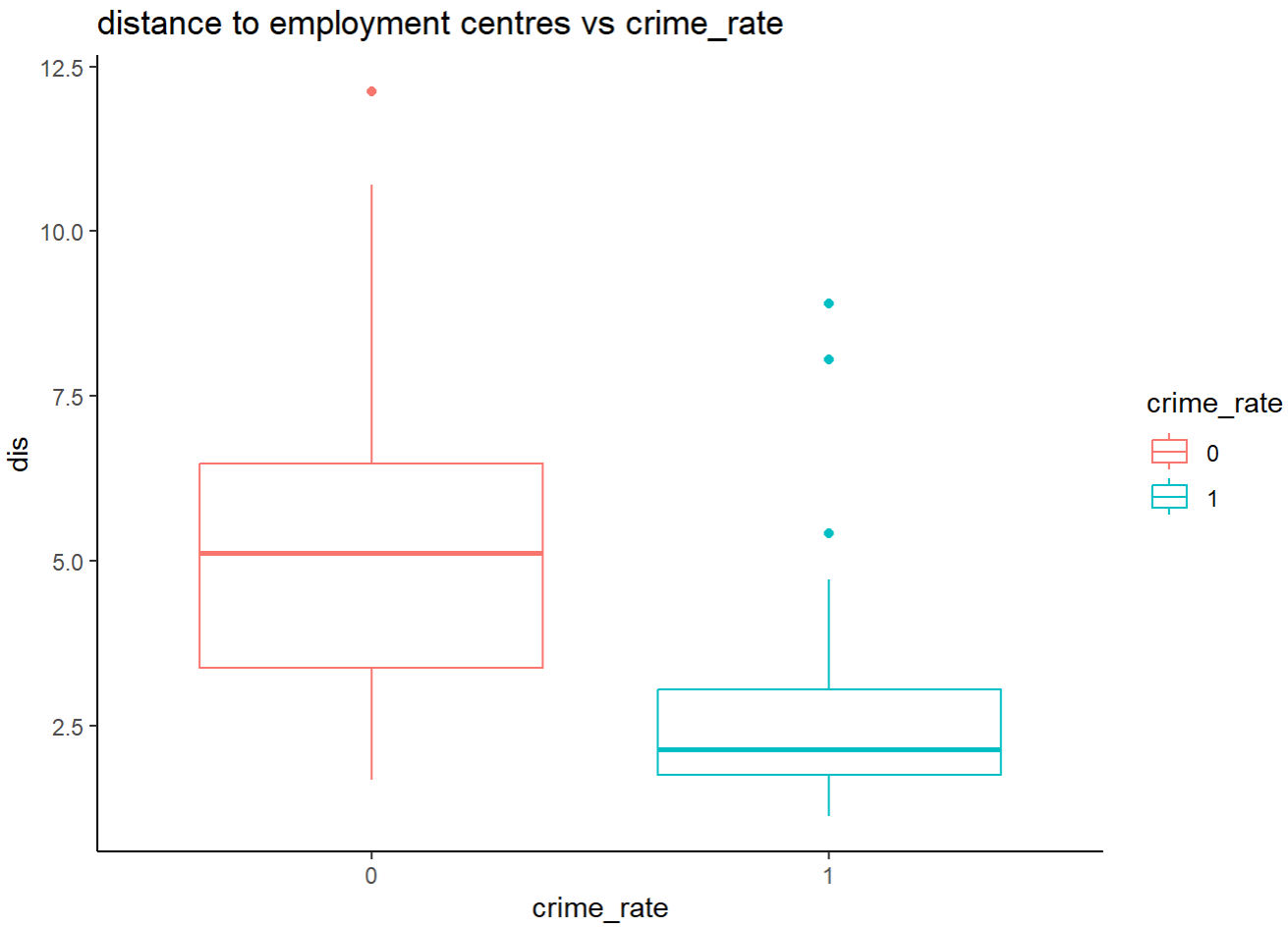

```
ggplot(df,aes(x=crime_rate,y=nox, color = crime_rate))+geom_boxplot()+theme_classic()
+
  labs(title = "nitrogen oxides concentration vs crime_rate")
```



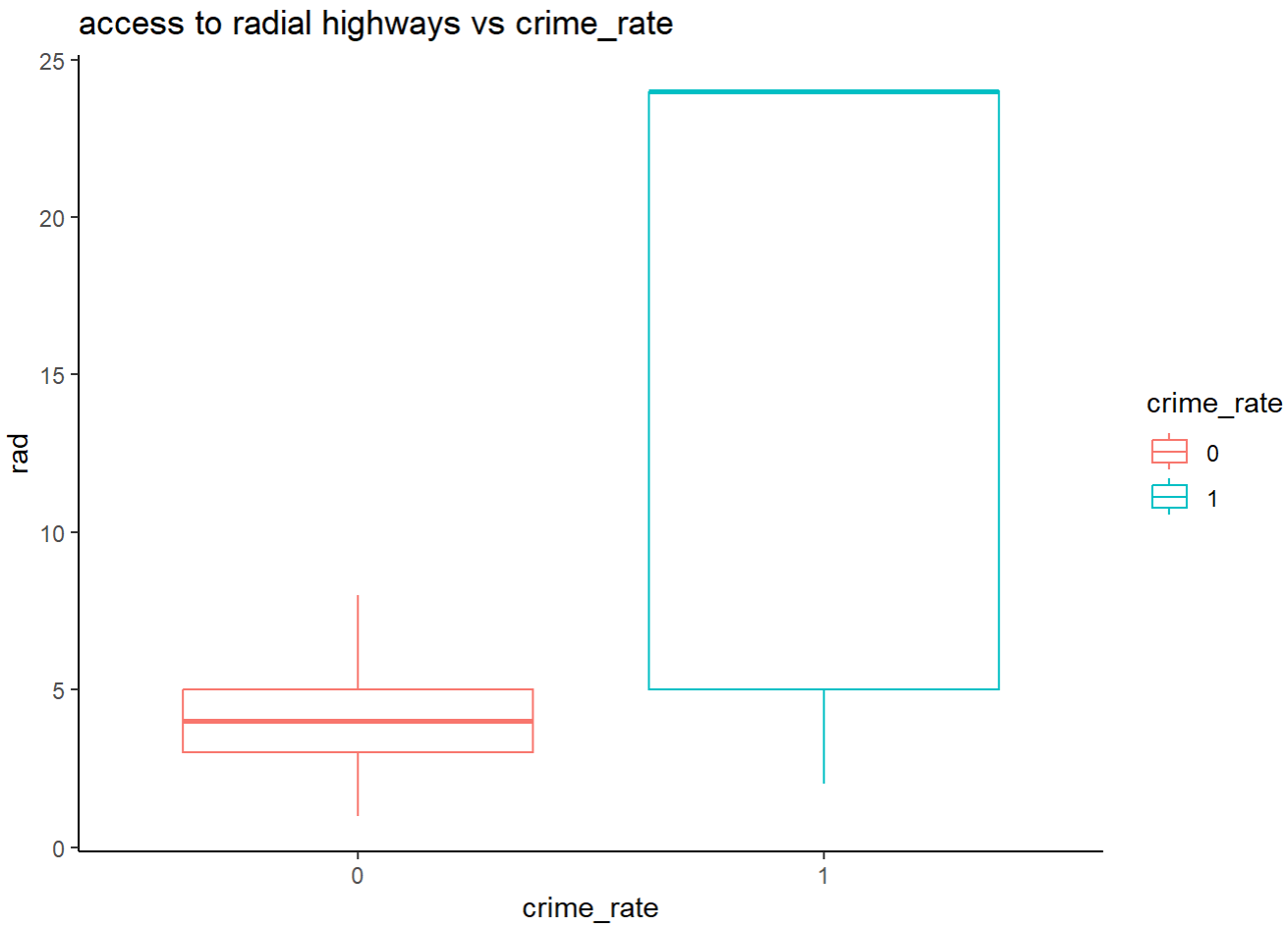

```
ggplot(df,aes(x=crime_rate,y=age, color = crime_rate))+geom_boxplot()+theme_classic()
+
  labs(title = "age vs crime_rate")
```



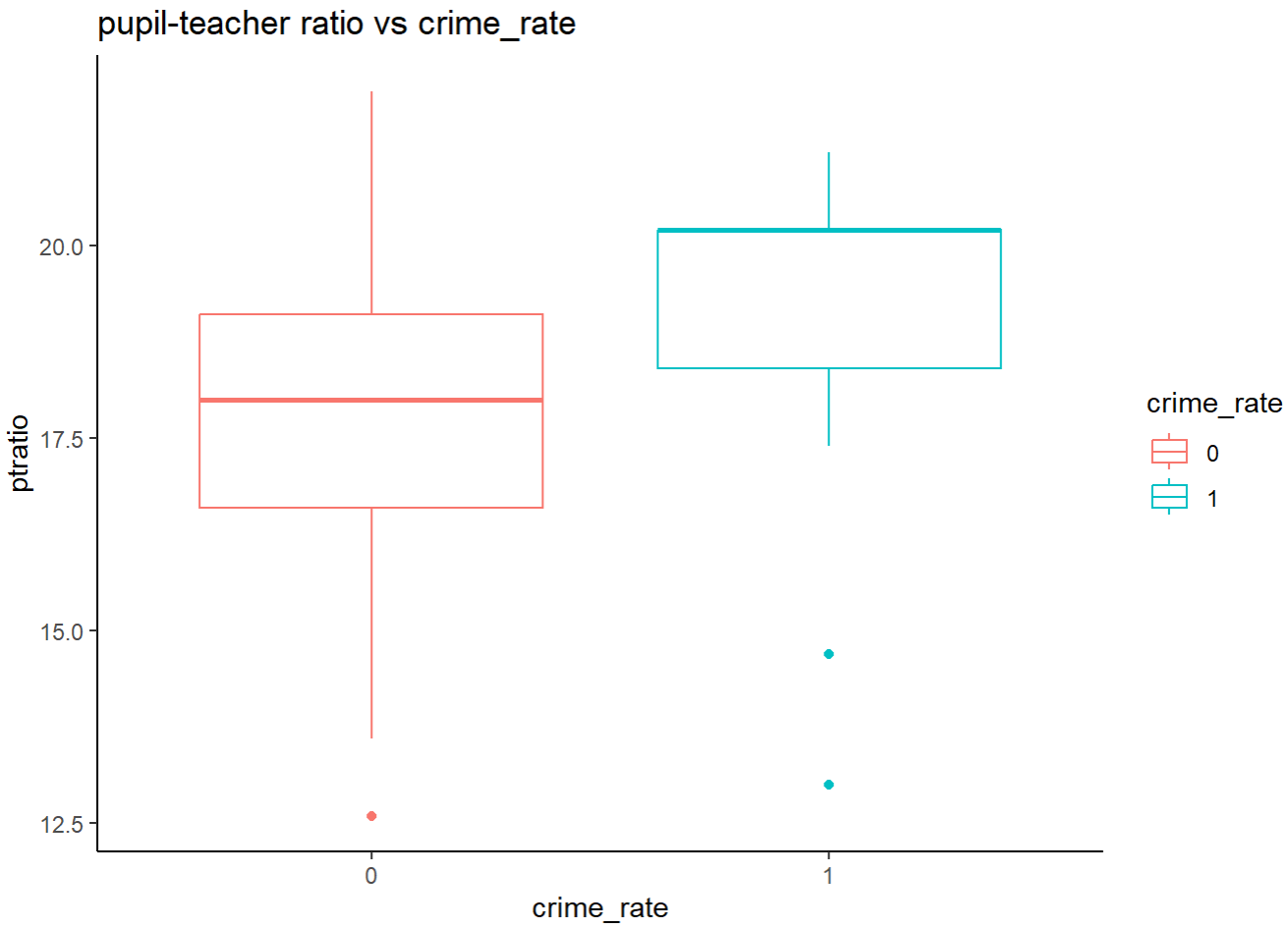

```
ggplot(df,aes(x=crime_rate,y=dis, color = crime_rate))+geom_boxplot()+theme_classic()
+
  labs(title = "distance to employment centres vs crime_rate")
```



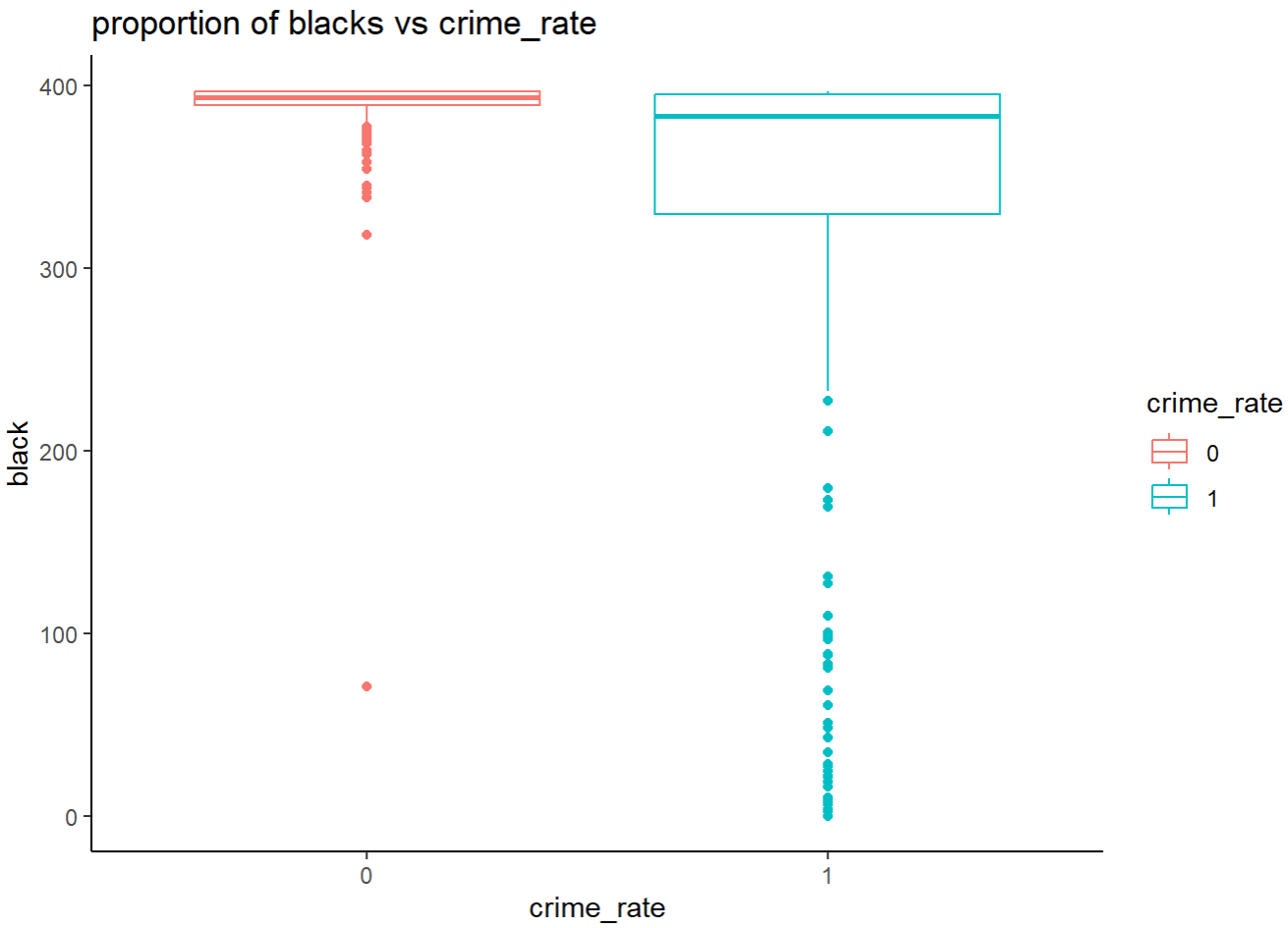

```
ggplot(df,aes(x=crime_rate,y=rad,color = crime_rate))+geom_boxplot()+theme_classic()
+
  labs(title = "access to radial highways vs crime_rate")
```



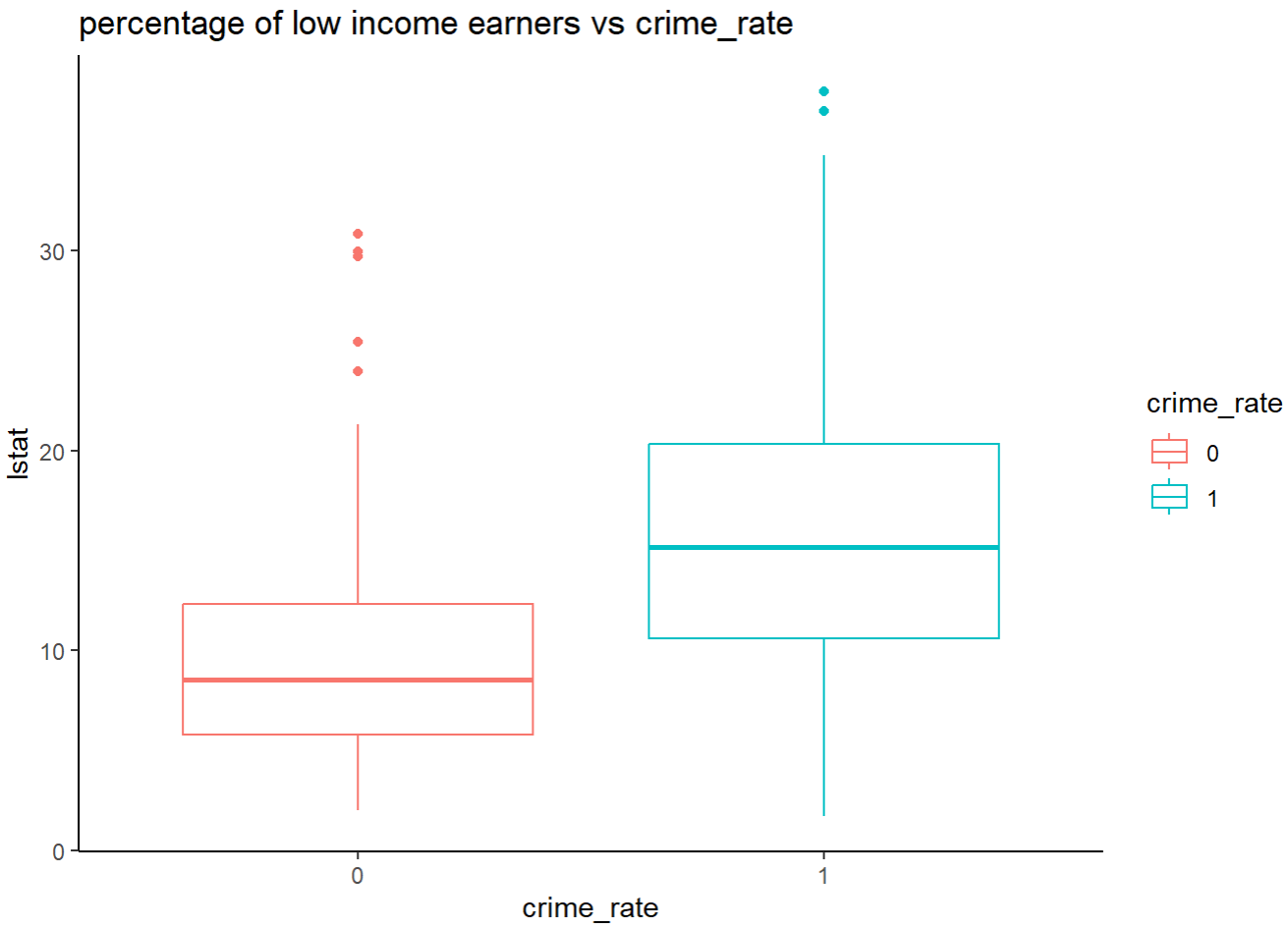

```
ggplot(df,aes(x=crime_rate,y=ptratio, color = crime_rate))+geom_boxplot()+theme_class
ic()+
  labs(title = "pupil-teacher ratio vs crime_rate")
```



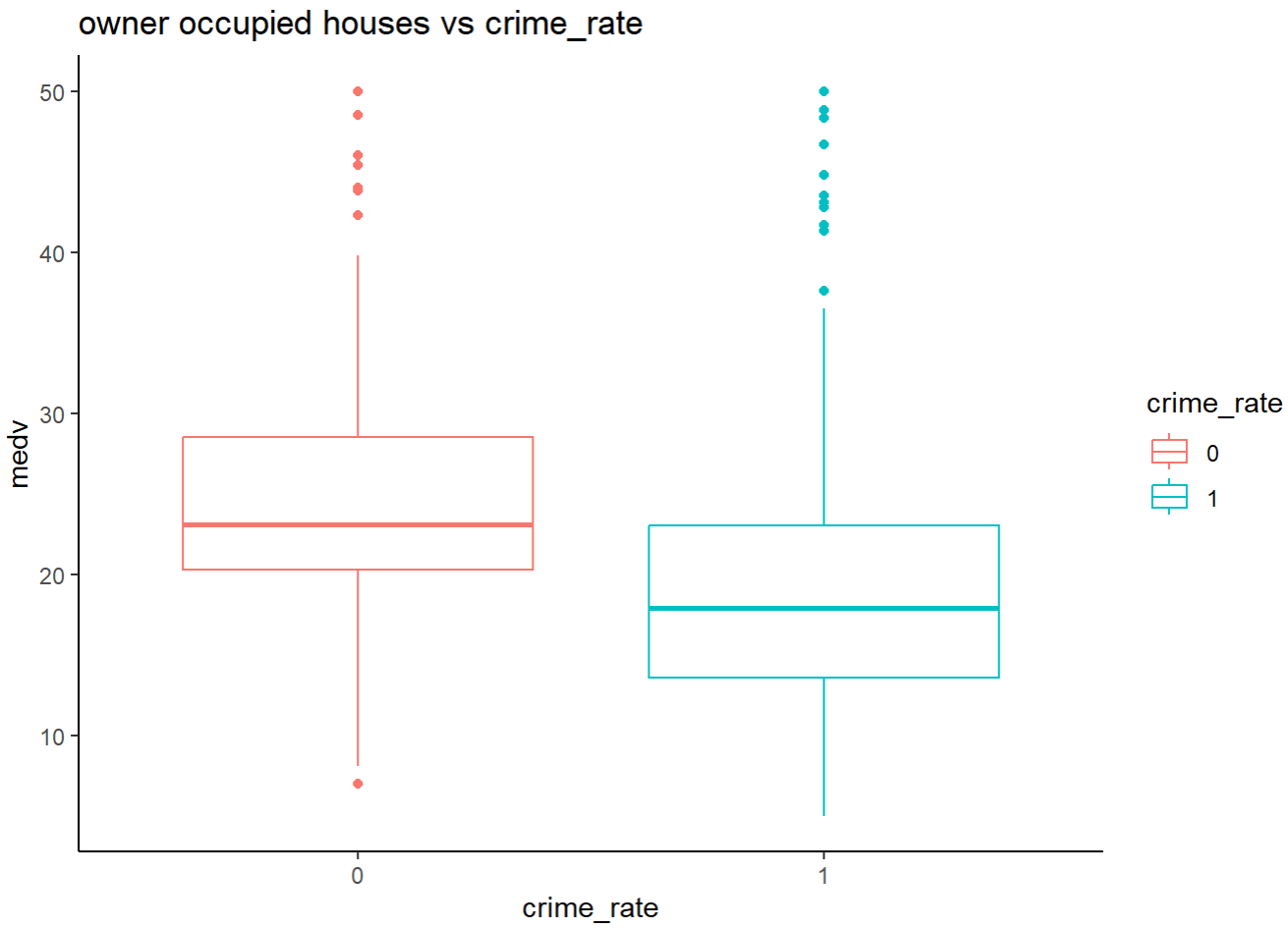

```
ggplot(df,aes(x=crime_rate,y=black, color = crime_rate))+geom_boxplot()+theme_classic
() +
  labs(title = "proportion of blacks vs crime_rate")
```



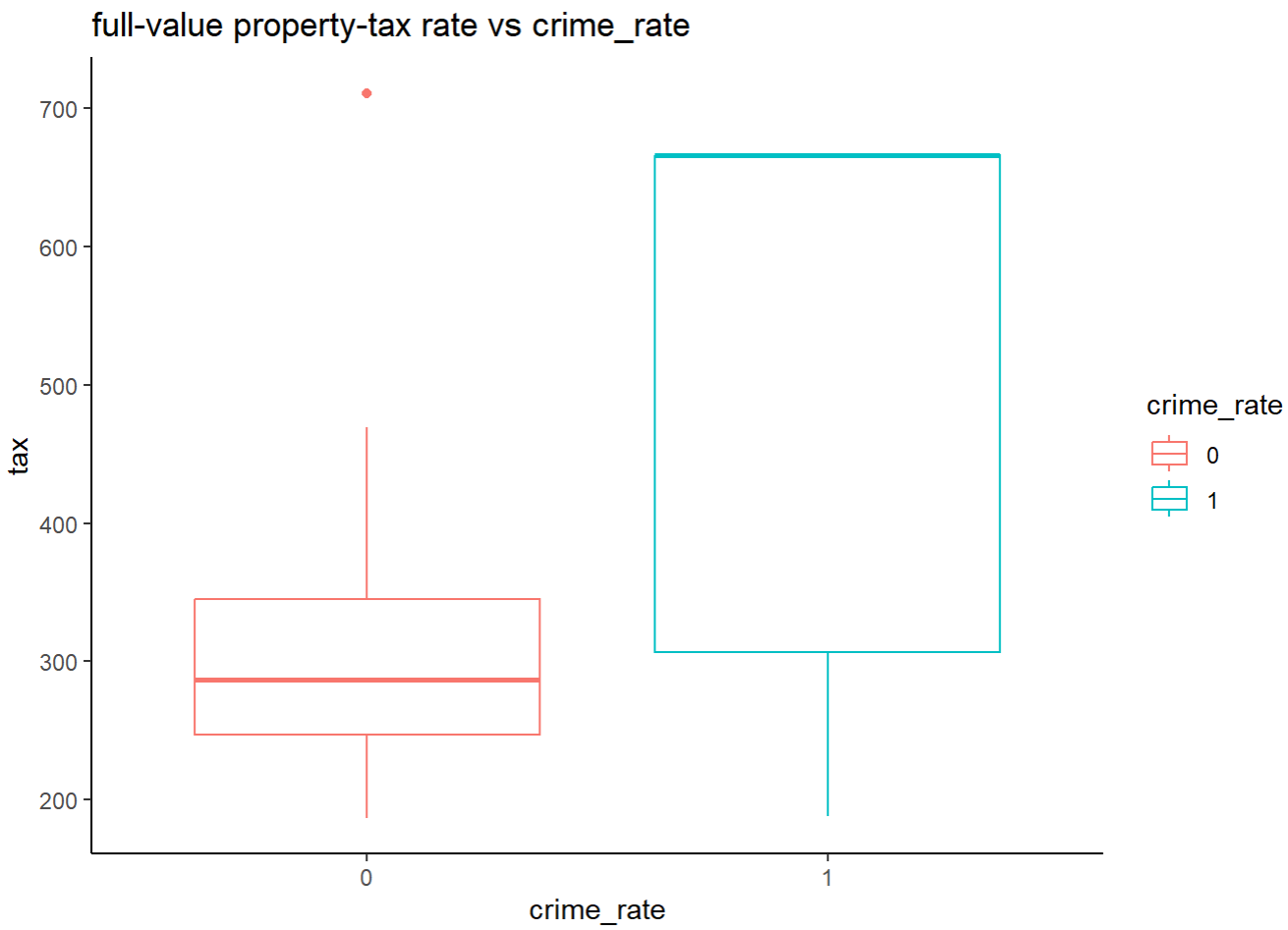

```
ggplot(df,aes(x=crime_rate,y=lstat, color = crime_rate))+geom_boxplot()+theme_classic
()+
  labs(title = "percentage of low income earners vs crime_rate")
```




```
ggplot(df,aes(x=crime_rate,y=medv, color = crime_rate))+geom_boxplot()+theme_classic(
)+
  labs(title = "owner occupied houses vs crime_rate")
```




```
ggplot(df,aes(x=crime_rate,y=tax, color = crime_rate))+geom_boxplot()+theme_classic()
+
  labs(title = "full-value property-tax rate vs crime_rate")
```



Split the dataset into test and training sets

```
set.seed(1110)

df_split = sort(sample(nrow(df), nrow(df)*0.8)) ## 80% of the dataset randomly select
ed

train<-df[df_split,]

test<-df[-df_split,]
```

Linear discriminant analysis (LDA)

```
lda.fit=lda(crime_rate~., data = train)

lda.fit
```

```
## Call:

## lda(crime_rate ~ ., data = train)
```

```
##
## Prior probabilities of groups:
##         0         1
## 0.4851485 0.5148515
##
## Group means:
##          zn     indus       chas       nox       rm      age      dis       rad
## 0 20.596939  6.985561 0.06122449 0.4720398 6.397255 52.23776 5.073745  4.234694
## 1  1.173077 15.388173 0.08653846 0.6407115 6.172274 86.05337 2.500149 15.658654
##        tax  ptratio    black     lstat     medv
## 0 307.5918 17.89592 389.5360  9.471327 24.96378
## 1 522.7163 19.01202 317.7923 15.791202 19.86827
##
## Coefficients of linear discriminants:
##                  LD1
## zn      -0.006174668
## indus    0.018537416
## chas    -0.194227131
## nox      7.434305549
## rm       0.057830566
## age      0.014213350
## dis      0.040855575
## rad      0.091546526
## tax     -0.001468892
## ptratio  0.013551006
## black   -0.001298476
## lstat   -0.004459225
## medv     0.031586482
```

```
lda.pred=predict(lda.fit,test)
lda.class =lda.pred$class
table(lda.class, test$crime_rate)
```

```
##
## lda.class  0  1
##          0 54 15
##          1  3 30
```

Predictive accuracy of LDA model

```
accuracy.lda <- round(mean(lda.class == test$crime_rate), digits =2)*100
print(paste('Accuracy is ',accuracy.lda,"%"))
```

```
## [1] "Accuracy is  82 %"
```

```
print(paste('Test error is ',100-accuracy.lda,"%"))
```

```
## [1] "Test error is  18 %"
```