1　分割統治法による多項式の評価

$A(x)$ を $n-1$ 次の多項式 $A(x) = a_0 + a_1x^1 + a_2x^2 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1}$, $\vec{a}$ を A の係数列 $\vec{a} = (a_0, a_1, \ldots, a_{n-1})$ とする．ここで一般性を失うことなく n は偶数であると仮定してよい；そうでないなら $n' = n+1$ 次の A' ただし $a' = (a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, 0)$, つまり n 次の係数は 0, を考える．

すると,

$$\begin{aligned} A(x) &= a_0 + a_2x^2 + \cdots + a_{n-2}x^{n-2} + a_1x^1 + a_3x^3 + \cdots + a_{n-1}x^{x-1} \\ &= \sum_{i=0}^{n/2-1} a_{2i}x^{2i} + x \cdot \sum_{i=0}^{n/2-1} a_{2i+1}x^{2i} \end{aligned}$$

と書ける．ここで係数列 $(a_0, a_2, \ldots, a_{n-2})$ の多項式 A_0 と $(a_1, a_3, \ldots, a_{n-1})$ の A_1, 二つの多項式を導入すれば, 上の式は

$$A(x) = A_0(x^2) + x \cdot A_1(x^2)$$

と書き換えられる．したがって，$x^2, x^4, x^6, \ldots, x^{n/2}$ と x 倍の計算で，$n-1$ 次の多項式 $A(x)$ の値を求めることができる．

さらに, もし n が 2 のべきであるなら, $x, x^2, x^4, \ldots, x^{\log_2 n}$ について再帰的に評価をすることで時間計算量

$$T(n) = \begin{cases} 2 & n \leq 1\,, \\ 2T(n/2) + 2 & \text{otherwise}\,, \end{cases}$$

つまり $O(\log_2 n)$ で計算ができる．これを $x = \mathrm{e}^{-\iota \frac{2\pi}{n} i}$ にもちいるのが高速フーリエ変換 FFT である．ι は虚数単位.

2　多項式の評価による文字列パタン照合

有限アルファベットを Σ とし, その大きさを $N = |\Sigma|$ とする．有限アルファベット Σ 上の文字列 $t = t_0 \cdot t_1 \cdot \cdots \cdot t_{n-1}$, $p = p_0 \cdot \cdots \cdot p_{m-1}$ ただし $n \geq m$ を, それぞれテキスト, パタンと呼ぶこととする．有限アルファベットの要素 $a_1, \ldots, a_N$ は, 多項式に現れるときそれぞれを整数値 $1, \ldots, N$ とみなすことにする．

ここでテキストとパタンそれぞれの x の多項式 T, P を

$$T(i) = t_i \cdot x^{n-1-i},\ P(i) = p_i \cdot w_p(i)\,,$$

ただし

$$w_p(i) = \begin{cases} x^i & 0 \leq i < m\,, \\ 0 & i \geq m \end{cases}$$

としよう．するとたとえばパタン $p = p_0p_1p_2$ がテキスト $t = t_0t_1t_2t_3t_4\cdots t_{n-1}$ の位置 2 に出現する，すなわち $0 \le i < m$ について $p_i = t_{2+i}$ であるかどうかは，多項式

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^{n-1} T(i) \cdot P((i-2) \bmod n) \\ = \; & t_2 \cdot x^{n-1-2} \cdot p_0 \cdot w_p(0) + t_3 \cdot x^{n-1-3} \cdot p_1 \cdot w_p(1) + t_4 \cdot x^{n-1-4} \cdot p_2 \cdot w_p(2) \\ = \; & x^{n-3} \sum_{i=0}^{2} t_{i+2} \cdot p_i \end{aligned}$$

を評価することで知ることができる; ここで P の添え字を $i \bmod n$ としているのは，ただ添え字を定義域の中に収めるためである．上式の値は，$t_{[2,4]}$ と p をベクトル $\vec{t_{[2,4]}} = (t_2, t_3, t_4)$ と $\vec{p} = (p_0, p_1, p_2)$ の内積に x^{n-3} を乗じたものに等しく，

$$\frac{\vec{t_{[2,4]}} \cdot \vec{p}}{|\vec{t_{[2,4]}}| \cdot |\vec{p}|} = 1$$

であるとき，またそのときに限り $t_{[2,4]} = p$ であることを使うと，上式が $x^{n-3} \cdot |\vec{t_{[2,4]}}| \cdot |\vec{p}|$ に等しいとき，位置 2 に出現しているとわかる．

このテキストの部分列のノルム $|\vec{t_{[2,4]}}|$ が位置によって異なるのは，計算量の点で都合がわるい．そこで，文字 $a_i \in \Sigma$ を複素数 $a_i = \mathrm{e}^{-\iota \frac{2\pi}{N} i}$ で表すことにする．すると，ベクトルのノルムは含まれる文字によらず，文字列長に等しくなる．すなわち，$t_{[j,j+m-1]} = p$ のとき，またそのときに限り

$${t_{[j,j+m-1]}}^{\dagger} \cdot p = m$$

となる．ただし $\dagger$ は複素共役なベクトル．

以上から，

$$M(i) = \sum_{k=0}^{n-1} T(i+k) \cdot P(k) = x^{n-1-i} \sum_{k=0}^{k<|p|} t_{i+k} \cdot p_i$$

を $0 \le i < n$ について求めれば，$M(i) = m$ のとき $i+1$ に p が出現しているとわかる．この $M(0), \ldots, M(n-1)$ の計算は，離散フーリエ変換，もしくは n が 2 のべきのとき高速フーリエ変換で行う．

3　FFT による文字列パタン照合

入力: 有限アルファベット $\Sigma = \{a_0, a_{N-1}\}$ 上のテキスト $t \in \Sigma^*$ と パターン $p \in \Sigma^*$，ただし $|t| \le |p|$.

1. $n = 2^{\lceil \log |t| \rceil}$ とする．

2. 文字 a_i を $\omega^i = \mathrm{e}^{\imath \frac{2\pi}{N} i}$ で置き換えた長さ n の列 $\vec{t}$ と複素共役な列 $t^\dagger$ と, p の逆順の文字を ω^i で置き換えた長さ n の列 p^R を作る. 文字列の長さが満たない部分の要素は 0 でうめておく.

3. $t^\dagger$ と p^R それぞれを高速フーリエ変換した列 T, P を求める.

4. T と P の要素ごとの積からなる列 Q を求める. $(Q(i) = T(i) \cdot P(i))$

5. Q を逆高速フーリエ変換した列 M を求める.

6. $M(i) = |p|$ となる位置 i を枚挙する. $i + 1$ が出現位置である.

以上により, p の長さにかかわらず $O(n \log n)$ 時間で終了する.