測定とデータの扱い方（２）

情報工学基礎実験Ⅰ NO. 0

講義の目的、目標

前回

- 有効数字の桁数を自分で決められるようになる
- 誤差値を計算できるようになる
- 測定結果を　「最確値 ± 誤差　単位」で書けるようになる

今回

- 絶対誤差、相対誤差、誤差伝搬の法則
- 最小二乗法を使えるようになる

相対誤差とは

- 「誤差の大きさ／測定値の最確値」の比率

例）　誤差（の大きさ）／重力加速度

$$= \frac{\delta g}{g} = \frac{0.004\left[\mathrm{m/s^2}\right]}{9.756\left[\mathrm{m/s^2}\right]}, \quad -\log_{10}\frac{0.004}{9.756} = 3.38$$

- 直接測定できる量から関数によって値を得る測定（間接測定）の場合、便利なことも
  - 特に対数が出てくる場合

間接測定における誤差（誤差の伝搬）

- 直接測定できる量 $\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}$, ・・・, $\boldsymbol{x_n}$ から得られる

$$Y = F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

なら、間接測定値は各直接測定量で微分可能

- 直接測定量の（絶対）誤差がそれぞれ

$$\delta x_1, \delta x_2, \ldots, \delta x_n$$

なら、誤差を微少な変化とみなして、$\boldsymbol{Y}$ の誤差は x_i の変化量 × Y の傾き　の総和でおさえられる

間接測定における誤差（式）

- Y の誤差は

$$
\boxed{|\delta Y|} = \left| F\left(x_1 + \delta x_1, x_2 + \delta x_2 \ldots, x_n + \delta x_n\right) - F\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) \right|
$$

$$
\leq \left| \frac{\partial F}{\partial x_1} \right| \cdot |\delta x_1| + \left| \frac{\partial F}{\partial x_2} \right| \cdot |\delta x_2| + \cdots + \left| \frac{\partial F}{\partial x_n} \right| \cdot |\delta x_n| = \boxed{\left| \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_i} \delta x_i \right|}
$$

でおさえられる

間接測定値の誤差についてのまとめ

- 間接測定値の絶対誤差 δY について

$$\left|\delta Y\right| \le \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial F}{\partial x_i} \delta x_i \right|$$

- 間接測定値の相対誤差 (δY/Y) について

$$\left|\frac{\delta Y}{Y}\right| \le \sum_{i=1}^{n} \left| \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \ln F \right) \cdot \delta x_i \right|$$

※ただし各 x_i は直接測定値

誤差伝搬の法則：最確値と標準偏差

- 直接測定できる量 $x_i,\ldots,x_i$ から間接測定値

$$Y = F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

を得るとする． x_i の最確値を Z_i とすると、Y の最確値は

$$Y_{\mathrm{m}} = F\left(Z_1, Z_2, \cdots, Z_n\right)$$

- 各測定値 x_i の標準偏差 σ_i から、間接測定値の標準偏差 σ は
-

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial F}{\partial x_i}\cdot\sigma_i\right)^2$$

（誤差伝搬の法則）

有効数字の扱い：加減算での誤差伝搬

例）振り子の支点からおもりの重心まで
鋼線の長さは巻き尺で、金属球の直径はノギスで

$$\delta(L+a)=\delta L\cdot\frac{\partial(L+a)}{\partial L}+\delta a\cdot\frac{\partial(L+a)}{\partial a}$$

$$\begin{array}{rr} & a \\ +) & L \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{rr} & 18.44 \\ +) & 1015.7 \\ \hline & 1034.1\cancel{4} \end{array}$$

桁、補助単位をそろえたうえで、
絶対誤差が最大の測定値　に注意

半径 a とワイヤ長さ L
を mm で測定

有効数字の扱い：剰余算での誤差伝搬

例）円盤の体積

直径､厚み　ともにものさしではかれるが．．．

$$\left|\delta V / V\right| \leq \left|\delta r \cdot \frac{\partial}{\partial r} \ln\left(\pi d r^2\right)\right| + \left|\delta d \cdot \frac{\partial}{\partial d} \ln\left(\pi d r^2\right)\right| = 2 \cdot \frac{\delta r}{r} + \frac{\delta d}{d}$$

r	17.8 mm
d	2.7 mm

$$\begin{array}{rl} & r^2 \\ & 3.141592\ldots \\ \times\,) & d \\ \hline \end{array}
\qquad
\begin{array}{rr} & 316.84 \\ & 3.14 \\ \times\,) & 2.7 \\ \hline & 26\cancel{86.16952} \end{array}$$

$=2.7\times10^3$

$(17.8 \pm 0.?)^2 = 316.84 \pm ?\times2\times1.78 + 0.01\times?^2$

最も精度の悪い値　に注意

有効数字の計算での注意：丸め誤差と桁落ち

「 **丸める** 」: ある桁で四捨五入すること
丸め誤差＝丸めて計算したために生じた値の変更

「 **桁落ち** 」: 同程度の値の引き算によって、
有効数字の桁数が少なくなること

影響を大きくしないためには、計算途中では桁数を有効数字より大きめにとる。

クイズ

- 振り子による重力加速度の測定　の実験について、次のことを考えてみよう.
  1. 重力加速度は、直接測定値？それとも間接測定値？
  2. 実験での直接測定値を、すべてあげよ.
  3. 単振り子の公式から、どのようにして手引きの式（？？）が得られるのか、確認せよ.

最小二乗法：なぜ必要？

- 直接測定値の方程式の定数を求める場合
  - 測定値の組が直線にのる
- 連立方程式「的」だが、誤差があり一般に解がない
- 例）電流と電圧を測定し、オームの法則で抵抗値を求める
  - 抵抗値 $R =$ （電圧 V - 電圧のずれ V_0 ）/ I

※ 電圧のずれは、測定器の 0 点ずれ、導線接合部での熱電効果など

  - 測定は、V と I の組を複数得る作業.
    測定点が 3 以上あるとき、直線上にならぶ　とは限らない.

    →　直線をどのように引けばよいのか？
    　たくさん測定するとよりよい結果がえられるのではなかったか？

最小二乗法（考え方）

- 関係を表す関数の値と実測値の差（の二乗）の和を最小に
  - どの測定点も極端に直線からはなれない
  - 誤差の二乗の和を最小にする
- 測定値 $P,\ x,\ y$ の間に、関係 $P = ax + by$ が成り立つとする.
  各測定値 $(P_i,\ x_i,\ y_i)$ について、差を r_i とおき

$$P_i - r_i = ax_i + by_i$$

と表すとすると. . .

最小二乗法（導出）

- n 個の測定値について

$$r_1 = P_1 - \left(ax_1 + by_1\right)$$
$$\vdots$$
$$r_n = P_n - \left(ax_n + by_n\right)$$

とおく．この差の二乗和

$$\sum_{i=1}^{n} {r_i}^2$$

を最小にする a と b は、各 $(x_i,\ y_i)$ の値について平面（直線）と測定点の差を小さくする．

最小二乗法（導出その２）

- 誤差の範囲で変化する $a,\ b$ が最小 $\Rightarrow$ 偏微分が $=0$ になると考えると

$$\frac{\partial}{\partial a}\sum_{i=1}^{n} r_i^2 = 0,\quad \frac{\partial}{\partial b}\sum_{i=1}^{n} r_i^2 = 0$$

$$\frac{\partial r_i}{\partial a} = -x_i,\ \frac{\partial r_i}{\partial b} = -y_i$$ だから

$$a = \frac{[yy][xP]-[xy][yP]}{[xx][yy]-[xy]^2},\quad b = \frac{[xy][xP]-[xx][yP]}{[xy]^2-[xx][yy]}$$

ただし

$$[xy] = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i\ ,\quad [yP] = \sum_{i=1}^{n} y_i \cdot P_i\ ,\ldots$$

あらかじめちょっと注意

- 測定で得られるのが 2 つの値の組である場
  例） 抵抗値 $R =$ （電圧 V - 電圧のずれ V_0 ）/ I
  測定するのは V と I だけ.
  $P = V, x = I, b = V_0$ とすると $P = ax + by$
  の y がない．どうする？
- より簡単なだけ．y は測定しなくても $= 1$ とわかっている、と考えよう.

$$[xy] = \sum_{i=1}^{n} x_i \;, \quad [yP] = \sum_{i=1}^{n} P_i \;, \ldots$$

演習問題とレポート

- 硬貨の直径の測定、0-16 の問題９（実験で得られた結果と思って）を報告
- 締め切りは来週火曜の13:00 （実験の授業時間開始まえまで）.
- 提出は、C201 基礎実験室（学生実験室）前のレポートボックス、No. 0 のポストへ.
- A4 サイズ横書き、表紙には学生番号、氏名を課題名とともに忘れず書く.
- 締め切り厳守.