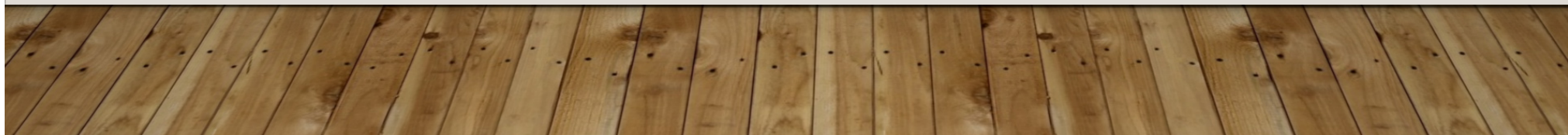


測定とデータの 扱い方（2）

情報工学基礎実験 I NO.0



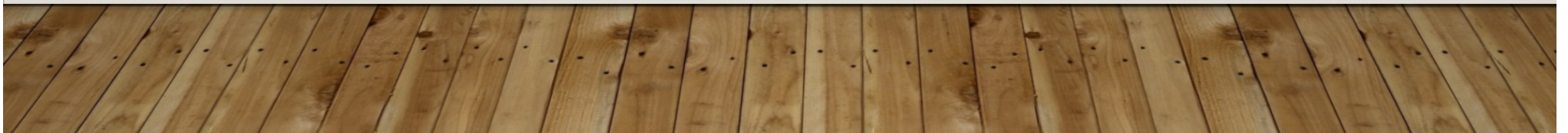
講義の目的、目標

前回

- 有効数字の桁数を自分で決められるようになる
- 誤差値を計算できるようになる
- 測定結果を 「最確値 \pm 誤差 単位」 で書けるようになる

今回

- 絶対誤差、相対誤差、誤差伝搬の法則
- 最小二乗法を使えるようになる



相対誤差とは

- 「誤差の大きさ／測定値の最確値」の比率
例) 誤差 (の大きさ) ／重力加速度

$$= \frac{\delta g}{g} = \frac{0.004 \left[\text{m/s}^2 \right]}{9.756 \left[\text{m/s}^2 \right]}, \quad -\log_{10} \frac{0.004}{9.756} = 3.38$$

- 直接測定できる量から関数によって値を得る測定（間接測定）の場合、便利なことも
 - 特に対数が出てくる場合

間接測定における誤差（誤差の伝搬）

- 直接測定できる量 x_1, x_2, \dots, x_n から得られる

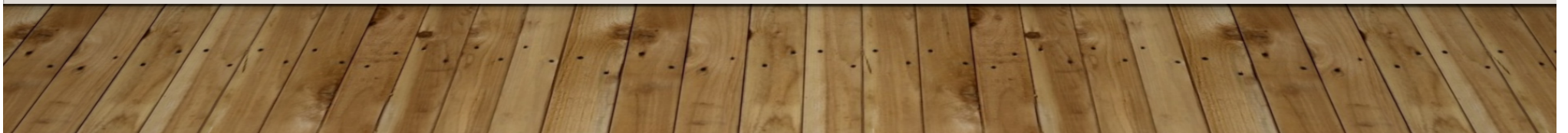
$$Y = F(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

なら、間接測定値は各直接測定量で微分可能

- 直接測定量の（絶対）誤差がそれぞれ

$$\delta x_1, \delta x_2, \dots, \delta x_n$$

なら、誤差を微小な変化とみなして、 Y の誤差は x_i の
変化量 \times Y の傾き の総和でおさえられる



間接測定における誤差（式）

- Y の誤差は

$$\begin{aligned} |\delta Y| &= \left| F(x_1 + \delta x_1, x_2 + \delta x_2, \dots, x_n + \delta x_n) - F(x_1, x_2, \dots, x_n) \right| \\ &\leq \left| \frac{\partial F}{\partial x_1} \right| \cdot |\delta x_1| + \left| \frac{\partial F}{\partial x_2} \right| \cdot |\delta x_2| + \dots + \left| \frac{\partial F}{\partial x_n} \right| \cdot |\delta x_n| = \left| \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial x_i} \delta x_i \right| \end{aligned}$$

でおさえられる

間接測定値の誤差についてのまとめ

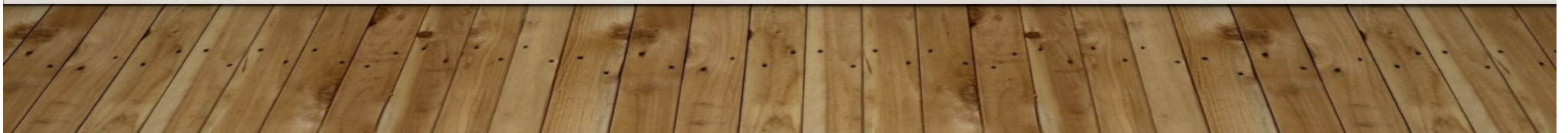
- 間接測定値の絶対誤差 δY について

$$|\delta Y| \leq \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial F}{\partial x_i} \delta x_i \right|$$

- 間接測定値の相対誤差 ($\delta Y/Y$) について

$$\left| \frac{\delta Y}{Y} \right| \leq \sum_{i=1}^n \left| \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \ln F \right) \cdot \delta x_i \right|$$

※ただし各 x_i は直接測定値



誤差伝搬の法則：最確値と標準偏差

- 直接測定できる量 x_1, \dots, x_n から間接測定値

$$Y = F(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

を得るとする. x_i の最確値を Z_i とすると、 Y の最確値は

$$Y_m = F(Z_1, Z_2, \dots, Z_n)$$

- 各測定値 x_i の標準偏差 σ_i から、間接測定値の標準偏差 σ は

- $$\sigma^2 = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial F}{\partial x_i} \cdot \sigma_i \right)^2 \quad (\text{誤差伝搬の法則})$$

有効数字の扱い：加減算での誤差伝搬

例) 振り子の支点からおもりの重心まで
鋼線の長さは巻き尺で、金属球の直径はノギスで

$$\delta(L+a) = \delta L \cdot \frac{\partial(L+a)}{\partial L} + \delta a \cdot \frac{\partial(L+a)}{\partial a}$$

a	18.44
$+) L$	$+) 1015.7$
<hr/>	<hr/>
	1034.14

桁、補助単位をそろえたうえで、
絶対誤差が最大の測定値 に注意

半径 a とワイヤ長さ L
を mm で測定



有効数字の扱い：剰余算での誤差伝搬

例) 円盤の体積

直径、厚み ともにものさしではかれるが. . .

$$|\delta V / V| \leq \left| \delta r \cdot \frac{\partial}{\partial r} \ln(\pi d r^2) \right| + \left| \delta d \cdot \frac{\partial}{\partial d} \ln(\pi d r^2) \right| = 2 \cdot \frac{\delta r}{r} + \frac{\delta d}{d}$$



r 17.8 mm

d 2.7 mm

r^2		316.84
3.141592...		3.14
$\times) d$	$\times)$	2.7
		2686.16952
		$= 2.7 \times 10^3$

$$(17.8 \pm 0.?)^2 = 316.84 \pm ? \times 2 \times 1.78 + 0.01 \times ?^2$$

最も精度の悪い値 に注意

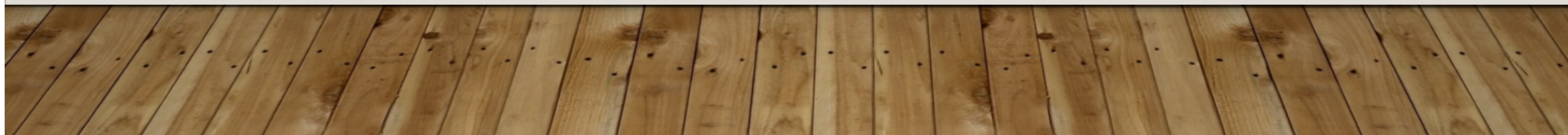
有効数字の計算での注意：丸め誤差と桁落ち

「**丸める**」: ある桁で四捨五入すること

丸め誤差＝丸めて計算したために生じた値の変更

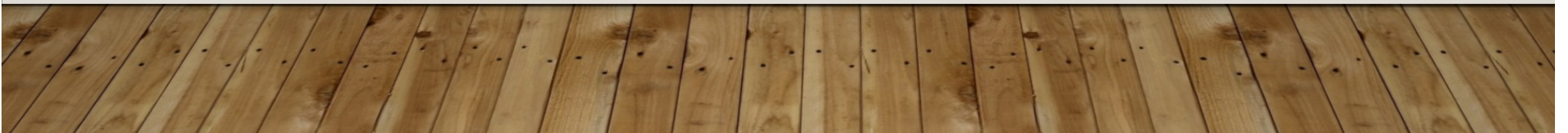
「**桁落ち**」: 同程度の値の引き算によって、
有効数字の桁数が少なくなること

影響を大きくしないためには、計算途中では桁数を有効数字より大きめにとる。



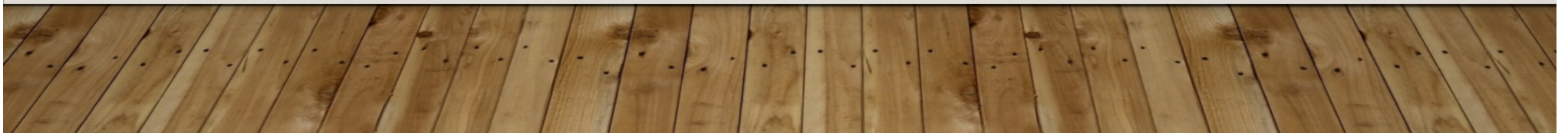
クイズ

- 振り子による重力加速度の測定 の実験について、次のことを考えてみよう.
 1. 重力加速度は、直接測定値？それとも間接測定値？
 2. 実験での直接測定値を、すべてあげよ.
 3. 単振り子の公式から、どのようにして手引きの式（??）が得られるのか、確認せよ.



最小二乗法：なぜ必要？

- 直接測定値の方程式の定数を求める場合
 - 測定値の組が直線にのる
 - 連立方程式「的」だが、誤差があり一般に解がない
 - 例) 電流と電圧を測定し、オームの法則で抵抗値を求める
 - 抵抗値 $R = (\text{電圧 } V - \text{電圧のずれ } V_0) / I$
- ※ 電圧のずれは、測定器の0点ずれ、導線接合部での熱電効果など
- 測定は、 V と I の組を複数得る作業。
測定点が3以上あるとき、直線上にならぶとは限らない。
- 直線をどのように引けばよいのか？
たくさん測定するとよりよい結果がえられるのではなかったか？

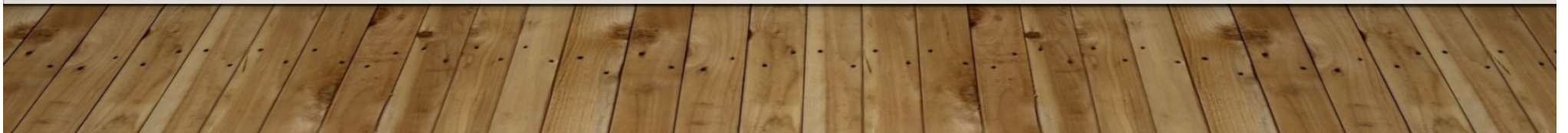


最小二乗法（考え方）

- 関係を表す関数の値と実測値の差（の二乗）の和を最小に
 - どの測定点も極端に直線からはなれない
 - 誤差の二乗の和を最小にする
- 測定値 P, x, y の間に、関係 $P = ax + by$ が成り立つとする.
各測定値 (P_i, x_i, y_i) について、差を r_i とおき

$$P_i - r_i = ax_i + by_i$$

と表すとする。 . . .



最小二乗法（導出）

- n 個の測定値について

$$r_1 = P_1 - (ax_1 + by_1)$$

$$\vdots$$

$$r_n = P_n - (ax_n + by_n)$$

とおく． この差の二乗和

$$\sum_{i=1}^n r_i^2$$

を最小にする a と b は、各 (x_i, y_i) の値について平面（直線）と測定点の差を小さくする．

最小二乗法（導出その2）

- 誤差の範囲で変化する a, b が最小 \Rightarrow 偏微分が $= 0$ になると考えると

$$\frac{\partial}{\partial a} \sum_{i=1}^n r_i^2 = 0, \quad \frac{\partial}{\partial b} \sum_{i=1}^n r_i^2 = 0$$

$$\frac{\partial r_i}{\partial a} = -x_i, \quad \frac{\partial r_i}{\partial b} = -y_i \quad \text{だから}$$

$$a = \frac{[yy][xP] - [xy][yP]}{[xx][yy] - [xy]^2},$$

$$b = \frac{[xy][xP] - [xx][yP]}{[xy]^2 - [xx][yy]}$$

ただし

$$[xy] = \sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i, \quad [yP] = \sum_{i=1}^n y_i \cdot P_i, \dots$$

あらかじめちょっと注意

- 測定で得られるのが2つの値の組である場合
例) 抵抗値 $R = (\text{電圧 } V - \text{電圧のずれ } V_0) / I$
測定するのは V と I だけ.

$P = V, x = I, b = V_0$ とすると $P = ax + by$
の y がない. どうする?

- より簡単なだけ. y は測定しなくても $= 1$ とわかっている、と考えよう.

$$[xy] = \sum_{i=1}^n x_i, \quad [yP] = \sum_{i=1}^n P_i, \dots$$

演習問題とレポート

- 硬貨の直径の測定、0-16 の問題 9（実験で得られた結果と違って）を報告
- 締め切りは来週火曜の13:00（実験の授業時間開始まえまで）.
- 提出は、C201 基礎実験室（学生実験室）前のレポートボックス、No. 0 のポストへ.
- A4 サイズ横書き、表紙には学生番号、氏名を課題名とともに忘れず書く.
- 締め切り厳守.

