測定とデータの扱い方

情報工学基礎実験Ｉ No. 0

講義の目的、目標

今回

- 有効数字の桁数を自分で決められるようになる
- 測定結果を　最確値 ± 誤差　で書けるようになる
- 演習タイム

次回

- 理解度確認テスト
- 絶対誤差、相対誤差、誤差伝搬の法則
- 最小二乗法を使えるようになる

測定とは？

- 単位を基準量にして物理的な量を数値化（情報に）する
  - MKS単位系では
    長さ・・・m
    質量・・・kg
    時間・・・sec
- 直接測定は、定測定器具で直接基準量と比較して得る
  - 測定器具や装置の使い方を学ぶ
- 間接測定は、直接測定で得た値から計算により得る
  - 例）体積、面積、加速度
  - 実験方法、理論、計算方法を学ぶ

補助単位

※理系なら、覚えましょう。

倍数	補助単位記号	よみ
$\times 10^{-12}$	p	ピコ
$\times 10^{-9}$	n	ナノ
$\times 10^{-6}$	µ	マイクロ
$\times 10^{-3}$	m	ミリ
$\times 1$		
$\times 10^{3}$	k	キロ
$\times 10^{6}$	M	メガ
$\times 10^{9}$	G	ギガ
$\times 10^{12}$	T	テラ

クイズ

１８世紀末に、世界基準となるべく考案され定義された長さの単位メートル。では、当時何の長さを基準として1メートルを定めたか？

有効数字とその桁数

- 測定値を表す数字のうち、意味があるもの
  - 10進法と2進法では文字数がかわる
  - 有効数字の桁数＝測定値の持つシャノン情報量 （→　情報理論）
- 最大何桁とれるかは、測定範囲での分解能で決まる
  - 巻き尺、ノギス、マイクロメーター、つまようじの太さを測定すると？
- 0でない最上位桁から、測定誤差にうもれない桁まで
  - 巻き尺でつまようじの太さを測ると 3 桁ムダに
  - ミリ単位で川の水位を測定するのは意味がない
  - 誤差のない測定はない （→　現代物理学（量子力学））

有効数字の計算での扱い：加減算

- 誤差の含まれる桁のうち、最上位の桁が有効数字を決める

例）　振り子の支点からおもりの重心までの長さ

- 鋼線の長さは巻き尺で、金属球の直径はノギスで測れるが．．．

$$
\begin{array}{rr}
 & a \\
+) & L \\
\hline
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{rr}
 & 18.44 \\
+) & 1015.7 \\
\hline
 & 1034.1\cancel{4}
\end{array}
$$

桁、補助単位をそろえたうえで、
絶対誤差が最大の測定値　に注意

半径 a とワイヤ長さ L
を mm で測定

有効数字の計算での扱い：剰余算

- 誤差の割合が大きい＝有効数字の桁数が小さい値が有効数字を決める

例）　円盤の体積

- 直径、厚み　ともにものさしではかれるが．．．

r　　17.8 mm

d　　2.7 mm

$$
\begin{array}{lr}
 & r^2 \\
 & 3.141592\ldots \\
\times) & d \\
\hline
\end{array}
\qquad
\begin{array}{lr}
 & 316.84 \\
 & 3.14 \\
\times) & 2.7 \\
\hline
 & 26\cancel{8}\text{~~6.16952~~}
\end{array}
$$

$$=2.7\times10^3$$

$$(17.8 \pm 0.?)^2 = 316.84 \pm ?\times2\times1.78 + 0.01\times?^2$$

最も精度の悪い値　に注意

有効数字の計算での扱い:
丸め誤差と桁落ち

「**丸める**」: ある桁で四捨五入すること

丸め誤差＝丸めて計算したために生じた値の変更

「**桁落ち**」: 同程度の値の引き算によって、

有効数字の桁数が少なくなること

影響を大きくしないためには、計算途中では桁数を有効数字より大きめにとる。

測定の誤差と精度

- 同じ測定でも繰り返すと値はばらつく
  - 精度：　ばらつきの度合い
    ばらつき「少ない」　→　「精度が高い」
  - 正確度：　偏りの度合い、測定値の中心と真の値の差
    偏り「小さい」　→　「正確度が高い」「不確かさが低い」

- 知りたい「真の値」は測定値から推測する
  - 測定値は誤差を含む
  - 誤差の大きさは測定ごとに変わる
    真の値　＝　測定値　ー　誤差
  - 知ることができるのは、ばらついた測定値の集合

最確値:真の値の推定

- 偶然誤差は、測定値(と誤差)がガウス分布に従う
  - 仮定:多くの小さな「偶然」が合計され誤差になる
- 最確値は分布の中心
  - 同じ重みの直接測定なら、平均値(相加平均)になる
  - 線形の関係がある場合は、最小二乗法で求める

- 精度(↔ばらつき)の大きさが誤差 = ガウス分布の幅
  - 標準偏差、確率誤差　などを使って幅をあらわす
- 測定をくりかえせば最確値は真の値に近づく
- ガウス分布に従わない誤差=系統誤差からは逃げられない
  - 値のかたよりの原因

系統誤差はゼロにする

- 明確な理由で生じる偏りの原因
  - 偶然ではない、原因をみつけてなおすべき
- 系統誤差のよくある原因
  - 測定器に原因がある場合（機械誤差）
    例）定規の端がすり減っていた、ノギスのあごがまがって開いていた
  - 測定者のくせが原因の場合（個人誤差）
    例）めもりを右斜め上からみるのでいつも短めになっていた
  - 計算での不注意で値がずれていた
    例）桁落ちで値が 0 になっていた
- 測定方法、実験方法や理論の誤りも

誤差のある値の書き方

- 最確値が195.6 mm、誤差の幅（標準偏差）が 0.4 mm のとき

  195.6 ± 0.4 mm

  「真の値は 195.6 mm の ± 0.4 mm に約 68% 含まれる」

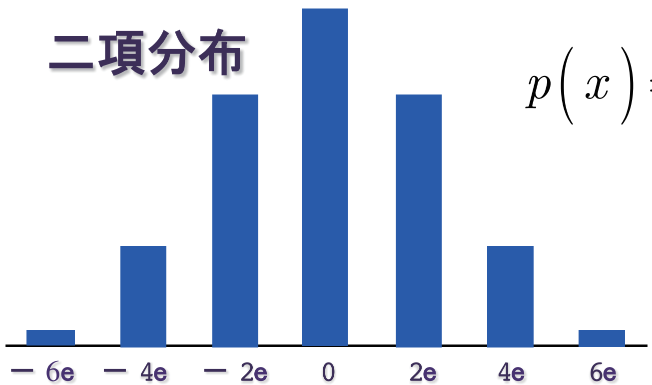
  ※誤差の幅になにを使うかは、書き手と読み手できめる

- 誤差は有効数字１桁（十進数で、情報工学基礎実験１ルール）
- 最確値の有効数字は誤差の桁まで
- 科学記法を使うときは、カッコでくくりまとめる

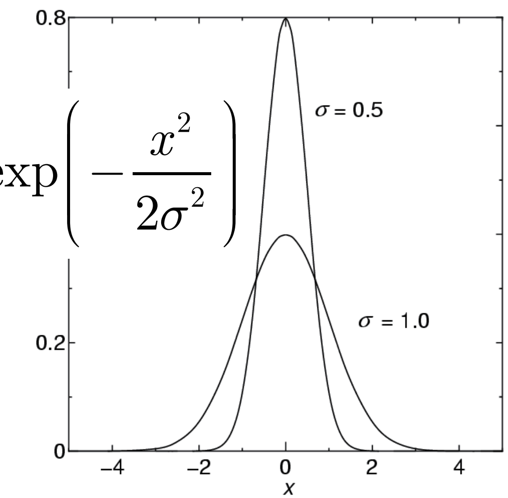
  $(1.956 \pm 0.004) \times 10^{-2}$ m

誤差の求め方

- 仮定: 複数の独立した原因があり、その和が誤差となる
  → 二項分布
- そのような原因が無数にある → ガウス分布
- 誤差は、ヒストグラムの幅（約68%ぶん）＝標準偏差として求める



$$p\left(x\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}\exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)$$



なぜ最確値が平均値に一致するのか

ある量を n 回測定した測定値 $M_1, M_2, \ldots, M_n$ と真の値 Z

誤差　$x_i = M_i - Z$

そんなことが起こる確率（それぞれの生起確率の積）

$$P(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} p(x_i) \quad = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\right)^n \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(M_i - Z)^2\right]$$

Z の最確値 Z_{m} は、確率 P を最大（微分係数 = 0）にするはず

$$\left.\frac{\partial P}{\partial Z}\right|_{Z=Z_{\mathrm{m}}} = 0$$

$$左辺 \propto \underbrace{\sum_{i=1}^{n}(M_i - Z_{\mathrm{m}})}_{=0\ でないといけない.}\exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(M_i - Z_{\mathrm{m}})^2\right]$$

$$\therefore \boxed{Z_{\mathrm{m}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} M_i}$$

誤差（試料平均の標準偏差）σ の求め方

- 真の値を Z 、i 回目の測定値を M_i、最確値を Z_m とする. 測定回数 n が非常に大きい場合の母集団の標準偏差 σ は

$$\sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(M_i - Z)^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(M_i - Z_m)^2$$

- 測定で得られる試料分散（測定値の分散）σ_s は

$$\sigma_s^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(M_i - Z_m)^2$$

- 試料平均（最確値）の標準偏差 σ_m が

$$\sigma_m = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(M_i - Z_m)^2} = \frac{1}{\sqrt{n}}\sigma = \frac{1}{\sqrt{n-1}}\sigma_s$$

確率誤差 ε の求め方

- 誤差の大きさが ε より大きい確率と小さい確率が等しくなる幅
- 試料平均の標準偏差（平均誤差）に係数を乗じて求める.
  測定回数が十分大きいとき、ほぼ

$$\varepsilon = 0.6745 \cdot \sigma_m \ .$$

  - 情報工学基礎実験 I では，上記の式で求めることとする.
- 実際に行う程度の測定回数の場合には下表の係数が示されている（Jeffrey, 1932）が、情報工学基礎実験 I ではそこまで考えないことにする.

測定回数	2	3	4	5	6	7	8	9	10	···	∞
係数	1.00	0.816	0.766	0.740	0.728	0.718	0.713	0.708	0.703	···	0.675

誤差(標準偏差、確率誤差)を求める手順

1. 実験ノートに記録した測定値を表にして確認

金属球の直径

測定	直径 (mm)		
1	38.13		
2	38.15		
3	38.16		
4	38.13		
5	38.14		
6	38.12		
7	38.16		

- なにかおかしなことがおきていないか？
- 単位は間違っていないか？
- 写し間違いはないか？
- 桁数はそろっているか？

誤差(標準偏差、確率誤差)を求める手順

2. 最確値を求め、最確値と各測定値の残差も求める

金属球の直径　38.14 mm

測定	直径 (mm)	残差	
1	38.13	-0.01	
2	38.15	0.01	
3	38.16	0.02	
4	38.13	-0.01	
5	38.14	0.00	
6	38.12	-0.02	
7	38.16	0.02	

誤差（標準偏差、確率誤差）を求める手順

3. 残差の2乗から試料分散を求め、最確値の標準偏差を得る

金属球の直径　　38.14 ± 0.01 mm

測定	直径 (mm)	残差	残差の2乗 ($\times 10^{-4}$)
1	38.13	-0.01	1.00
2	38.15	0.01	1.00
3	38.16	0.02	4.00
4	38.13	-0.01	1.00
5	38.14	0.00	0.00
6	38.12	-0.02	4.00
7	38.16	0.02	4.00

1

試料分散の2乗 = 2.14~~29~~ x 10^{-4}、標準偏差 = 0.0~~065~~

誤差(標準偏差、確率誤差)を求める手順

4. 確率誤差は測定回数大での比率 0.6745 を乗じて

金属球の直径(確率誤差の場合)　38.14 ± 0.01 mm

測定	直径 (mm)	残差	残差の2乗 (x10^{-4})
1	38.13	-0.01	1.00
2	38.15	0.01	1.00
3	38.16	0.02	4.00
4	38.13	-0.01	1.00
5	38.14	0.00	0.00
6	38.12	-0.02	4.00
7	38.16	0.02	4.00

1

標準偏差×0.6745 = 0.0~~06745~~

参考書など

- N.C. バーフォード 著（訳　酒井英行）
  「実験精度と誤差」、丸善
  ISBN978–4–621–04380–6
- 吉川 泰三　編
  「改訂新版　物理学実験」、学術図書出版社
  ISBN978–4–87361–058–0
- 入江 捷廣 著
  「評価Aが取れる基礎物理実験レポート」、講談社
  ISBN978–4–06–153271–7

演習問題をときましょう

§ 問題(p. 0–15〜17)
問題1、問題5、問題6、問題7

—— 次回：

- 関数で値を得る場合・・・誤差伝搬の法則
- 絶対誤差、相対誤差
- 最小二乗法・・・同等でない測定、直接測定でない場合