測定とデータの扱い方（2）

情報工学基礎実験Ⅰ No. 0

講義の目的、目標

前回

- 有効数字の桁数を自分で決められるようになる
- 測定結果を　最確値 ± 誤差　で書けるようになる

今回

- 理解度確認テスト
- 相対誤差、誤差伝搬の法則
- 最小二乗法を使えるようになる

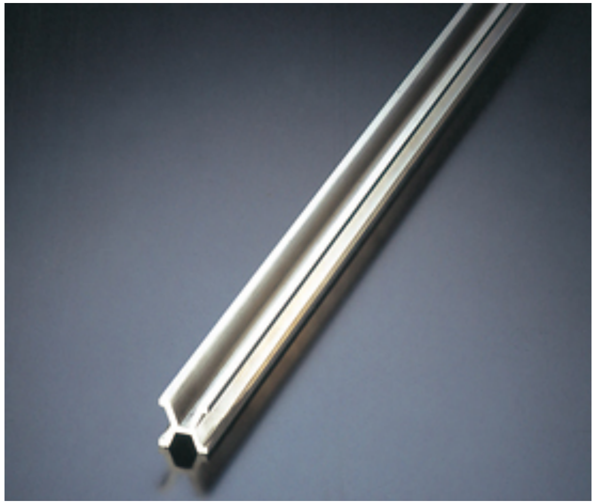
理解度確認テスト

① メートル法が制定された当時の「1メートル」の基準はなに？

② しんちゅう製ドーナツ型円盤の直径をノギスで測定し、右の測定値を得た. 最確値と誤差（標準偏差）を求め、測定結果としてまとめよ.

回	直径(mm)
1	39.97
2	40.00
3	40.02
4	39.98
5	39.96
6	40.02

長さの単位「メートル」の進歩



- パリを通過する子午線（北極点↔南極点）の北極点から赤道までの距離の1千万分の1と定める
- 白金＋イリジウムのメートル原器を各国で保有
- 光が1秒で伝わる距離の 299792458 分の1

相対誤差とは

- 測定値の 「最確値 ± 誤差　単位」 で使うのは絶対誤差

- 「誤差の大きさ／測定値の最確値」の比率を相対誤差という
例）　誤差（の大きさ）／重力加速度

$$= \frac{\delta g}{g} = \frac{0.004\left[\mathrm{m/s^2}\right]}{9.756\left[\mathrm{m/s^2}\right]}, \quad -\log_{10}\frac{0.004}{9.756} = 3.44$$

- 直接測定できる量から関数によって値を得る測定（間接測定）の場合、便利なことも
  - 特に対数が出てくる場合

間接測定における誤差（誤差の伝搬）

- 直接測定できる量 $x_1, x_2, \cdot\cdot\cdot, x_n$ から

$$Y = F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

が得られるなら、間接測定値は各直接測定量で微分可能

- 直接測定量の誤差がそれぞれ

$$\delta x_1, \delta x_2, \ldots, \delta x_n$$

であるなら、誤差を微少な変化とみなして、Y の誤差（の最大値）は　x_i の変化量 × Y の傾き　の総和で得られる

間接測定における誤差（式）

- 直接測定できる量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ から

$$Y = F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

を得る場合、直接測定量それぞれの誤差が

$$\delta x_1, \delta x_2, \ldots, \delta x_n$$

なら Y の誤差（の最大値）は

$$\delta Y = F(x_1 + \delta x_1, x_2 + \delta x_2 \ldots, x_n + \delta x_n) - F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

$$\simeq \frac{\partial F}{\partial x_1}\delta x_1 + \frac{\partial F}{\partial x_2}\delta x_2 + \cdots + \frac{\partial F}{\partial x_n}\delta x_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_i}\delta x_i$$

間接測定値の誤差についてのまとめ

- 間接測定値の絶対誤差 δY について

$$|\delta Y| \le \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial F}{\partial x_i} \delta x_i \right|$$

- 間接測定値の相対誤差 $(\delta Y/Y)$ について

$$\left| \frac{\delta Y}{Y} \right| \le \sum_{i=1}^{n} \left| \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \ln F \right) \cdot \delta x_i \right|$$

※ただし各 x_i は直接測定値

誤差伝搬の法則:最確値と標準偏差

- 直接測定できる量 $x_i,\dots,x_i$ から間接測定値

$$Y = F(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

を得るとする. x_i の最確値を Z_i とすると、Y の最確値は

$$Y_{\mathrm{m}} = F\left(Z_1, Z_2, \cdots, Z_n\right)$$

- 各測定値の標準偏差 σ_i から、間接測定値の標準偏差 σ は

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial F}{\partial x_i} \cdot \sigma_i \right)^2$$

（誤差伝搬の法則）

クイズ

- 振り子による重力加速度の測定　の実験について、次のことを考えてみよう.
  1. 重力加速度は、直接測定値か、それとも間接測定値か？
  2. 実験での直接測定値を、すべてあげよ.
  3. 単振り子の公式から、どのようにして手引きの式（？？）が得られるのか、確認せよ.

最小二乗法(なぜ必要？)

- 直接測定値の方程式の定数を求める場合
  - ➢測定値の組が直線にのる
- 連立方程式「的」だが、誤差があるので一般には解がない
- 例） 電流と電圧を測定し、オームの法則で抵抗値を求める
  - ➢抵抗値 $R =$ (電圧 V - 電圧のずれ V_0)/ I

※ 電圧のずれは、測定器の 0 点ずれ、導線接合部での熱電効果など

➢測定は、V と I の組を複数得る作業.
測定点が3以上あるとき、直線上にならぶ とは限らない.

$\rightarrow$ 直線をどのように引くのか？
たくさん測定するとよい結果がえられるのではなかったのか？

最小二乗法（考え方）

- 関係を表す関数の値と実測値の差（の二乗）の和を最小に
  - どの測定点も極端に直線からはなれない
  - 誤差の二乗の和を最小にする
- 測定値 P, x, y の間には、本来関係 $P = ax + by$ が成り立つとする.
  各測定値 (P_i, x_i, y_i) について、差を r_i とおき

$$P_i - r_i = ax_i + by_i$$

と表すとすると. . .

最小二乗法(導出)

- n 個の測定値について

$$r_1 = P_1 - \left(ax_1 + by_1\right)$$
$$\vdots$$
$$r_n = P_n - \left(ax_n + by_n\right)$$

とおく. この差の二乗和

$$\sum_{i=1}^{n} {r_i}^2$$

を最小にする a と b が、各 $(x_i,\ y_i)$ の値について平面(直線)と測定点の差を小さくする.

最小二乗法(導出その2)

- 誤差の範囲で変化する a, b が最小 ⇒ 偏微分が $= 0$ になると考え

$$\frac{\partial}{\partial a}\sum_{i=1}^{n} r_i^2 = 0, \quad \frac{\partial}{\partial b}\sum_{i=1}^{n} r_i^2 = 0$$

とおくと、$\dfrac{\partial r_i}{\partial a} = -x_i, \dfrac{\partial r_i}{\partial b} = -y_i$ だから

$$a = \frac{[yy][xP]-[xy][yP]}{[xx][yy]-[xy]^2}, \quad b = \frac{[xy][xP]-[xx][yP]}{[xy]^2-[xx][yy]}$$

ただし $[xy] = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i$, $[yP] = \sum_{i=1}^{n} y_i \cdot P_i$,…

あらかじめちょっと注意

- 測定で得られるのが2つの値の組である場合

例）抵抗値 $R =$（電圧 V - 電圧のずれ V_0)/ I
　　の場合、測定するのは V と I だけ.
　　$P = V,\ x = I,\ b = V_0$ とすると $P = ax + by$ の y がない.
　　どうする？

- より簡単なだけ. y は測定しなくても $= 1$ とわかっている、
と考えよう.

$$[xy] = \sum_{i=1}^{n} x_i\ ,\quad [yP] = \sum_{i=1}^{n} P_i\ ,\ldots$$

演習問題を解きましょう

- 0-15 の問題2、0-16 の問題9をとけ.
- レポート課題とする. 締め切りは来週火曜の13:00.
- 提出は、基礎実験室（学生実験室）前のレポートボックス、
  No. 0 のポストへ.
- 普通に A4 横書き、このレポートは特別な表紙は不要.
  番号、氏名を忘れず書くこと.
- 締め切り厳守. 再提出は、みとめない（機会をもうけない）.

この資料の置き場所

- 前回分とともに
https://github.com/una1veritas/Students-Experiments
に置いてあります.