Método de potencia

December 6, 2024

formulación y explicación matemática

El objetivo de este metodo es, dada una matriz cuadrada nxn hallar el autovalor dominante y el autovector asociado a este (recordemos que el autovalor dominante es el mayor valor propio en valor absoluto). Este mes eficiente para ciertos casos, sin embargo puede pasar que para otras matrices sea recomendable usar otros métodos, como por ejemplo el de descomposición qr. Veamos entonces para cuales casos es util nuestro método y para cuales no. Tambien es importante que los autovectores formen una base para el espacio.
Para el método de potencia, además de todo lo anterior pedido, pedimos qu al tomar vector inical aleatorio X donde X puede ser escrito como $X = \beta_1 V_1 +_2 V_2 + ... + \beta_n V_n$. Pedimos entonces para que el metodo funcione que se cumpla que $\beta_1 \neq 0$ y además, que $|\lambda_1| > |\lambda_2|$ donde $|\lambda_1|, |\lambda_2|$ son autovalores de la matriz.

Condiciones de convergencia

Para garantizar que el método de potencia funcione, tenemos que garantizar que las mtrices sean, cuadradas, diagonalizable, determinante sea distinto de cero. También es indispensable que la multiplicidad algebraica de la matriz sea 1, es decir, que no tenga valores propios repetidos. El metodo falla tambien cuando los valores propios se parecen mucho entre si pues es dificil identificar cual es el autovalor dominante.

Ventajas y desventajas del método

Las ventajas más significativas de nuestro método es que nos arroja el valor propio dominante y su vector asociado. Además, me funciona para matrices muy grandes(teniendo en cuenta la estructura de la matriz) para las cuales es dificil sacar a mano el atovalor dominante y autovector asociado. Sin embargo, las desventajas de este metodo es que solo me haya un solo autovalor y autovector asociado, para hallar otros autovalores es recomendable usar el método de descomposición qr u otros. Además, aveces el metodo falla para autovalores que se parecen mucho entre si.

PRUEBA DEL MÉTODO DE POTENCIA

Sea A una matriz nxn con n autovalores $L.I$ $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 ... \lambda_n$ (esto nos dice que A es diagonalizable) y un valor propio asociado dominante, es decir, si A tiene los valores propios $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 ... \lambda_n$ entonces tenemos que $|\lambda_1| \leq |\lambda_2| \leq |\lambda_3| \leq ... \leq |\lambda_n| \geq 0$. Estos autovalores tienen asociados un conjunto de autovectores $L.I$ $\{V^{(1)}, V^{(2)}, V^{(3)}, ..., V^{(n)}\} := V$.
Tomando un vector cualquiera no nula llamado X, por la independencia lineal de V podemos escribir

$$X = \beta_1 V^{(1)} + \beta_2 V^{(2)} + \beta_3 V^{(3)} + ... + \beta_n V^{(n)}$$

Es decir, $X = \sum_{k=1}^{n} \beta_k V^{(k)}$. Multipliquemos ambos lados por la matriz A, luego

$$Ax = A \sum_{k=1}^{n} \beta_k V^{(k)}$$

$$Ax = \sum_{k=1}^{n} A \beta_k V^{(k)}$$

Dado que β_k es un escalar lo puedo cambiar de posicion dentro de la sumatoria, luego

$$Ax = \sum_{k=1}^{n} \beta_k A V^{(k)}$$

Y aplicando definicion de valor propio obtenemos

$$Ax = \sum_{k=1}^{n} \beta_k \lambda_k V^{(k)}$$

multiplicando A j veces obtenemos

$$A^j x = \sum_{k=1}^{n} \beta_k \lambda_k^j V^{(k)}$$

si multiplicamos y dividimos la parte derecha por λ_1^j obtenemos

$$A^j x = \frac{\lambda_1^j}{\lambda_1^j} \sum_{k=1}^{n} \beta_k \lambda_k^j V^{(k)}$$

$$A^j x = \lambda_1^j \sum_{k=1}^{n} \beta_k (\frac{\lambda_k}{\lambda_1})^j V^{(k)}$$

sacando limite cuando $j \to \infty$

$$\lim_{j\to\infty} A^j x = \lim_{j\to\infty} (\lambda_1^j \sum_{k=1}^{n} \beta_k (\frac{\lambda_k}{\lambda_1})^j V^{(k)})$$

sacando el primer termino de la sumatoria y separando el limite, (esto lo podemos hacer puesto que el limite separa productos) tenemos que

$$\lim_{j\to\infty} A^j x = \lim_{j\to\infty} (\lambda_1^j) \lim_{j\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \beta_k \left(\frac{\lambda_k}{\lambda_1}\right)^j V^{(k)})$$

$$\lim_{j\to\infty} A^j x = \lim_{j\to\infty} (\lambda_1^j) \left(\lim_{j\to\infty} \beta_1 V^{(1)} + \sum_{k=1}^{n} \beta_k \left(\frac{\lambda_k}{\lambda_1}\right)^j V^{(k)} \right)$$

como el limite reparte sumas, obtenemos

$$\lim_{j\to\infty} A^j x = \lim_{j\to\infty} (\lambda_1^j) \left(\lim_{j\to\infty} \beta_1 V^{(1)} \right) + \left(\sum_{k=1}^{n} \lim_{j\to\infty} \beta_k \left(\frac{\lambda_k}{\lambda_1}\right)^j V^{(k)} \right)$$

Notese que $\left(\sum_{k=1}^{n} \lim_{j\to\infty} \beta_k \left(\frac{\lambda_k}{\lambda_1}\right)^j V^{(k)} \right)$ vale 0, por lo tanto

$$\lim_{j\to\infty} A^j x = \lim_{j\to\infty} (\lambda_1^j)(\beta_1 V^{(1)})$$

Como $\beta_1 V^{(1)}$ no depende de j entonces

$$\lim_{j\to\infty} A^j x = \lim_{j\to\infty} \lambda_1^j \beta_1 V^{(1)} \quad (*)$$

Notese que si $|\lambda_1| > 1$ y $\beta_1 \neq 0$ entonces el limite se va al infinito y no podremos hallar los valores propios. Lo mismo sucede si $|\lambda_1| < 1$ pues el limite se va a 0. Para solucionar este problema, en cada iteracion, normalizamos respecto a la norma infinito. Esto nos servira para escalar las potencias de $A^k X$ de una manera apropiada tal que $(*)$ sea finita y diferente de cero.
Lo anterior fue una motivación para la prueba.
Para la prueba en si, desarrollemos primerola idea para la primera iteración.
Seleccionemos a X como un vector unitario X$^{(0)} relativoa \ \| \cdot \|_\infty$. Recordemos que $X = \beta_1 V^{(1)} + \beta_2 V^{(2)} + \beta_3 V^{(3)} + ... + \beta_n V^{(n)}$ y seleccionamos una componente $X_{Po}^{(0)}$ de X_0 que cumpla que

$$X_{Po}^{(0)} = 1 = \|X^{(0)}\|_\infty$$

definamos además $Y^{(1)} := AX^{(0)}$ (Es decir, multiplicar A con mi primer vector aleatorio) y $\mu^{(1)} = Y_{Po}^{(1)}$ (es decir, tomar el primer autovalor mayor en valor absoluto. Por tanto, obtenemos como primera iteración

$$\mu^{(1)} = Y_{Po}^{(1)} = \frac{Y_{Po}^{(1)}}{X_{Po}^{(0)}}$$

(pues $X_{Po}^{(0)} = 1$)
expandiendo $X^{(0)}$ y $Y^{(1)}$ según la base V y fijando en las coordenadas P_0 tenemos

$$\frac{\beta_1 \lambda_1 V_{Po}^{(1)} + \sum_{j=2}^n \beta_j \lambda_j V_{Po}^j}{\beta_1 V_{Po}^{(1)} + \sum_{j=2}^n \beta_j V_{Po}^j}$$

Multiplicando y dividiendo por λ_1 y reorganizando

$$\lambda_1 \frac{\beta_1 \lambda_1 V_{Po}^{(1)} + \sum_{j=2}^n \beta_j \left(\frac{\lambda_j}{\lambda_1}\right) V_{po}^j}{\beta_1 V_{Po}^{(1)} + \sum_{j=2}^n \beta_j V_{Po}^j}$$

Ahora, tomamos P_1 el entero mínimo tal que la entrada del vector donde el valor absoluto es más grande (es decir, normalizamos) obtenemos

$$|Y_{P1}^{(1)}| = \|Y^{(1)}\|_\infty$$

y definiendo $X^{(1)}$ (vector Y_1 normalizado) obtenemos

$$X^{(1)} = \frac{1}{Y_{P_1}^{(1)}} Y^{(1)} = \frac{1}{Y_{P_1}^{(1)}} AX^{(0)}$$

Luego

$$|X_{P1}^{(1)}| = 1 = \|X^{(1)}\|_\infty$$

Es decir, $X^{(1)}$ queda normalizado. Con esto terminamos la primera iteración. Para la segunda iteración, nótese que sucede exactamente lo mismo solo que para la P_i componente. Entonces nuevamente, se define

$$Y^{(2)} = AX^{(1)} = \frac{1}{Y_{P_1}^{(1)}} A^2 X^{(0)}$$

y

$$\mu^{(2)} = Y_{P_1}^{(2)} = \frac{Y_{P_1}^{(2)}}{x_{P_1}^{(2)}} = \frac{[\beta_1 \lambda_1^2 V_{P1}^{(1)} + \sum_{j=2}^{n} \beta_j \lambda_j^2 V_{p1}^{j}]/Y_{P_1}^{(1)}}{[\beta_1 \lambda^1 V_{P1}^{(1)} + \sum_{j=2}^{n} \beta_j \lambda_j V_{P1}^{j}]/Y_{P_1}^{(1)}}$$

Nótese que para la segunda iteración dividimos arriba y abajo de la expresión por el resultado de la iteración anterior, la cual está normalizada.

$$\lambda_1 \frac{\beta_1 V_{P1}^{(1)} + \sum_{j=2}^{n} \beta_j \left(\frac{\lambda_j}{\lambda_1}\right) V_{P1}^{j}}{\beta_1 V_{P1}^{(1)} + \sum_{j=2}^{n} \beta_j \left(\frac{\lambda_j}{\lambda_1}\right) V_{P1}^{j}}$$

Nuevamente, normalizando obtenemos

$$|Y_{P2}^{(2)}| = \|Y^{(2)}\|_\infty$$

y definiendo $X^{(2)}$ (Vector Y_2 normalizado)

$$X^{(2)} = \frac{1}{Y_{P_2}^{(2)}} Y^{(2)} = \frac{2}{Y_{P_2}^{(2)}} AX^{(1)} = \frac{1}{Y_{P_1}^{(1)} Y_{P_2}^{(2)}} A^2 X^{(0)}$$

Ahora bien, Para la m-ésima iteración se define las sucesiones de vectores $\{X^{(m)}\}_{m=0}^{\infty}$ y $\{Y^{(m)}\}_{m=0}^{\infty}$ y las sucesiones de escalares $\{\mu^{(m)}\}_{m=0}^{\infty}$ (Estas sucesiones salen de cada iteración, pues nótese que con cada iteración que hago me voy acercando al valor propio y vector propio asociado, entonces es completamente sensato construir dichas susesiones donde los términos son cada iteración que voy haciendo) tenemos que

$$Y^{(m)} = AX^{m-1}$$

$$\mu^{(m)} = Y_{Pm-1}^{(m)} = \lambda_1 \left[\frac{\beta_1 V_{Pm-1}^{(1)} + \sum_{j=2}^{n} \left(\frac{\lambda_j}{\lambda_1}\right)^m \beta_j V_{P_{m-1}}^{j}}{\beta_1 V_{p_{m-1}}^{(1)} + \sum_{j=2}^{n} \beta_j \left(\frac{\lambda_j}{\lambda_1}\right)^{m-1} V_{P_{m-1}}^{j}} \right]$$

Y además,

$X^{(m)} = \frac{Y^{(m)}}{Y_{P\,m}^{(m)}} = \frac{A^m X(0)}{\prod_{(k=1)}^{m} Y_{P\,k}^{(k)}}$
Donde en cada iteración se toma el entero mínimo tal que la entrada del vector donde el valor absoluto sea más grande obteniendo así

$$|Y_{Pm}^{(m)}| = \|Y^{(m)}\|_\infty$$

Por tanto, podemos observar que nos estamos acercando por medio de las iteraciones a la sucesi on de vectores $\{X^{(m)}\}_{m=0}^{\infty}$ a un autovector asociado a λ_1 que tiene norma 1, lo que completa la demostración del teorema.

Análisis de error para método potencia

Para este método, el error se va reduciendo a medida que avanzo en las iteraciones, es decir, la convergencia es lineal.
La tasa de convergencia del método de potencia depende de la relación entre los autovalores más grandes (dominantes) y los más pequeños. Supongamos que el autovalor dominante λ_1 es estrictamente mayor en magnitud que los demás autovalores $\lambda_2, \lambda_3 ... \lambda_n$ La convergencia del método de potencia está influenciada principalmente por el cociente entre λ_1 y λ_2.
En la $k-$ésima iteración del método de potencia, el error relativo en el autovalor calculado es:

$$\epsilon_\lambda^k = \frac{|\lambda_1 - \lambda_k|}{\lambda_1}$$

donde λ_k es la estimacion del autovalor en la $k-$ésima iteración Este error depende de la relación entre los autovalores. en cada paso, el error en la estimación de λ_1 disminuye según la siguiente fórmula aproximada:

$$\epsilon_\lambda^k = \left(\left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|\right)^k$$

.
Notese que si $|\lambda_1| > 1$ y $\beta_1 \neq 0$ entonces el limite se va al infinito y no podremos hallar los valores propios. Lo mismo sucede si $|\lambda_1| < 1$ pues el limite se va a

0. Para solucionar este problema, en cada iteracion, normalizamos respecto a la norma infinito. Esto nos servira para escalar las potencias de $A^k X$ de una manera apropiada tal que $(*)$ sea finita y diferente de cero.