Universidad Nacional de Colombia

Facultad de Ciencias

Polinomio Característico

Tarea 1 Aálisis Númerico

Autor:
Shara Gallego Grisales

Diciembre 2024

Índice

1. Introducción

El polinomio característico es una herramienta fundamental en álgebra lineal, ya que permite asociar propiedades importantes de las matrices cuadradas $n \times n$ con sus valores y vectores propios. Este concepto surge del problema matemático de encontrar las raíces de polinomios, funciones que poseen propiedades muy útiles para resolver sistemas lineales y analizar transformaciones.
Cuando hablamos del polinomio característico de una matriz, nos referimos a un invariante que, a través de sus raíces, permite identificar los valores propios y, con ellos, determinar los vectores propios asociados. Esto es de gran relevancia en áreas como el análisis de estabilidad de sistemas, diagonalización de matrices y resolución de ecuaciones diferenciales.

El presente documento aborda, en primer lugar, la definición formal del polinomio característico, junto con la relación entre valores propios y vectores propios. Posteriormente, se describe el método del polinomio característico para calcularlos, destacando tanto su potencial como sus limitaciones. Finalmente, se analiza la eficiencia del método, proponiendo un algoritmo que, aunque restringido a ciertas condiciones, ofrece una solución programable.

A pesar de su precisión, el método del polinomio característico presenta desafíos significativos, especialmente cuando se aplica a matrices de dimensiones grandes o a aquellas con polinomios característicos con raíces múltiples. Este trabajo explora estos retos, presentando conclusiones sobre la aplicabilidad y viabilidad del método en distintos contextos.

2. Teoría

2.1. ¿Qué es el polinomio característico de una matriz?

Cuando hablamos de un polinomio característico debemos primero saber que matricez tienen uno, el polinomio característico esta definido para matrices cuadradas $n \times n$, ahora pensemos ¿Por qué son interesantes los polinomios característicos?

Un problema interesante de la matematicas es encontrar raices de funciones, y funciones bastantes buenas que tenemos son los polinomios.

El polinomio característico tiene la particularidad de que es un invariante que asocia la matriz con unos vectores a travez de sus valores propios. Es decir de forma formal: Sea A la matriz asociada a una trasformación lineal $T : V \to V$ donde V es un espacio vectorial de dimensión finita $n \in \mathbb{N}$. Entonces se define el polinimo característico de A como en cualquier base, y se denota por $P_A(\lambda)$.En otras palabras, el polinomio característico de A es un invariante de T que no depende de la base elegida en V

El polinomio característico esta dado por la siguiente fórmula

$$det(A - \lambda I) = P_A(\lambda) \tag{1}$$

Donde $P_c(\lambda)$ es el polinomio característico asociado a la matriz A

2.2. Vectores y Valores Propios

Como mencionamos anteriormente un problema interesante es encontrar raices de polinomios.

En particular las raíces del polinomios característico son lo que conocemos como valores propios, que son únicos y a los sumo existen n raíces en el cuerpo K asociado al espacio vetorial V

λ es llamado valor propio de A si exite algún vector propio x tal que lo siguiente se cumple

$$A\lambda x = \lambda x \tag{2}$$
$$(A - \lambda I)x = 0 \tag{3}$$

Naturalmente suge la duda

¿Existira algún método para encontrar las soluciones de la ecuación (1) y (3)?
La respuesta es que sí

3. Método del polinomio característico

1. Calcule el polinomio característico $P_A(\lambda)$ con la equación (1)

2. Factorice $P_A(\lambda)$ y solucione la ecuación $P_A(\lambda) = 0$

3. Las raíces halladas son los valores propios de A (no importa que se repitan)

4. Para cada valor propio solucione el sistema de ecuaciones de (3)

Así hemos encontrado todos los valore y vectores propios asociados a A.

Es justo preguntarse:

¿Es un buen método?¿Es programable?¿Cuán preciso es?

4. El Sueño del Matemático y la Pesadilla del Programador

4.1. ¿Por qué funciona?

Proposición: Sea $T : V \to V$ una transformación lineal de un espacio V de dimensión finita y sea $a \in K$ Entonces, a es valor propio de A si y solo si $P(a) = 0$

Para probar esto se necesita algebra multilineal y teoría de formas canonicas para esto refierase a **Acceso al documento PDF**
y como el concepto de vector propio depende directamente del valor propio entonces dada mi matriz y teniendo ya los valores propios siempre puedo encontrar lo vectores propios.

4.2. Análisis de Error

El método del polinomio característico es un método exacto es decir por medio de este se llaga a los valores y vectores propios reales"salvo tal vez por errores de redpndeo de sumas y mulriplicaciones, de resto el error es casi nulo.

Pero más interesante que su error es preguntarse que tan eficiente es y si es programable

4.3. Algoritmo de programación y su eficiencia

Realmente este método podemos considerarlo poco eficiente, pues requiere de muchos pasos y operaciones intermedias para lograr su solución.

El problema principal que afecta su eficiencia es que cada paso que se menciona en la seccion 3 requiere de operaciones,nada triviales para su resolución computancional, o de mucho tiempo para su resolución matemática manual por lo tanto es una buena idea buscar un algoritmo que lo resulva pero este proceso lleva a prblemas complicados

El mayor problema al programar un algoritmo que resuelva la ecuación $P_A(\lambda) = 0$ es que no existe un método lo suficientemente sencillo o efectivo para encontrar raíces multiples en un intervalo $[a, b]$, hasta ahora hemos explorado métodos para encontra una única raíz de una funcion en un intervalo cerrado, pero para raíces multiples estos métodos quedan cortos, lo que hace a este un problema dificíl de resolver, pues no solo debemos encontrar las raices sino también "localizar"donde están en el intervalo para poder "descartarlas y aplicar los métodos que conocemos para solucionar una única raíz.

Nuestro algoritmo

El algoritmo que presentamos acá solo funciona para matrices cuyo polinomio característico tengan todas sus raíces reales y con multiplicidad 1
El algoritmo que nosotros programamos se basa en definir el polinomio característico, acotar el polinomio en un intervalo $[-B, B]$ donde existan todas las raices $[-B, B]$, aislar cada una de las raíces mediante un criterio en intervalos $[a, b]$ donde exista una única de las raíces, para en este intervalo aplicar bisección y encontrar cada uno de los valores propios, para luego solucionar el sistema de ecuaciones (3).

- **Paso 1:Definir el polinomio caracteristico** Se soluciona la ecuación (1)

- **Paso 2:Definir la cota** B Necesitamos una cota de $P_A(\lambda)$ donde sepamos que existen todas sus raíces para esto usaremos la cota de cachy para definir a B

  La cota de cauchy es
  $$1 + |max_{i=1}^{n} \frac{a_{n-i}}{a_n}|$$
  Prueba de la cota de Cauchy

  Para la cota de Cauchy, se tiene que, si $|z| \geq 1$:

  $$|a_n||z|^n = \left|\sum_{i=0}^{n-1} a_i z^i\right| \leq \sum_{i=0}^{n-1} |a_i||z|^i \leq \max |a_i| \sum_{i=0}^{n-1} |z|^i = \frac{|z|^n - 1}{|z| - 1} \max |a_i| \leq \frac{|z|^n}{|z| - 1} \max |a_i|.$$

Por lo tanto,

$$|a_n|(|z|-1) \leq \max |a_i|.$$

Resolviendo en $|z|$, se obtiene la cota de Cauchy si existe una raíz cuyo valor absoluto sea mayor que 1. De lo contrario, la cota también es correcta, ya que la cota de Cauchy es mayor que 1.

Así acotamos el polinomio por B

- **Paso 3:Parametrizar el polinomio** La cota encontrada en el paso anterior puede se muy grande por lo tanto reparametrzaremos el polinomio con el siguiente cambio de variable $P_A(B\lambda)$ de esta manera mi polinomio se movera entres $[-1, 1]$ y hara mas fácil la partición de este

- **Paso 4:Localizar raices** Primero partiremos el intervalo $[-1, 1]$ a la mitad y contaremos cuantas raices del polinomio hay en cada subintervalo dado por esta partición con el criterio dado por el teorema de strums, ahora este crítero solo funciona para raíces con multuplicidad uno .

Teorema de Strum

La **cadena de Sturm** o **sucesión de Sturm** de un polinomio univariante $P(x)$ con coeficientes reales es la sucesión de polinomios $P_0, P_1, \ldots,$ tal que:

$$P_0 = P,$$
$$P_1 = P',$$
$$P_{i+1} = -\operatorname{rem}(P_{i-1}, P_i),$$

para $i \geq 1$, donde P' es la derivada de P, y $\operatorname{rem}(P_{i-1}, P_i)$ es el resto de la división euclidiana de P_{i-1} por P_i. La longitud de la sucesión de Sturm es, como máximo, igual al grado de P.

El número de variaciones de signo en ζ de la sucesión de Sturm de P es el número de cambios de signo (ignorando ceros) en la sucesión de números reales:

$$P_0(\zeta), P_1(\zeta), P_2(\zeta), \ldots$$

Este número de variaciones de signo se denota como $V(\zeta)$.

El **teorema de Sturm** establece que, si P es un polinomio libre de cuadrados, el número de raíces reales distintas de P en el intervalo semiabierto $(a, b]$ es $V(a) - V(b)$, donde a y b son números reales tales que $a < b$.

1.Si cuenta que en un subintervalo hay una raíz lo guarda en una lista.

2.Si no cuenta ninguna raíz descarta el intervalo y para

3.Si cuenta más de una raíz vuelve a partir el intervalo a la mitad y repite de nuevo losn pasos 1. y 2.

- **Paso 5: Aislar las raíces** En los intervalos que quedan en la lista sabemos que existe una única raíz del polinomio parametrizado en estos intervalos aplicamos el método de bisección y encontramos las raíces del polinomio parametrizado en $[-1, 1]$ al enocontra las raices las enivia a una lista y las multiplica por B dando como resultado los valores propios de A.
- **Paso 6:Calcular los vectores propios** Pata calcular los vectores propios aplicamos el método del gradiente conjugado para la resolver el sistema de ecuaciones (3) donde λ toma cada valor propipo de la lista del paso anterior y para cada uno resuelve el sistema dando como resultado el vector propio asociado a cada valor propio de la matriz A

El algoritmo puedee ser poco eficiente y en algunos caso como para matrices de dimensiones muy grandes no converger, además del evidente problema que solo resuelve el problema para algunas matrices con propiedades muy favorables,

5. Conclusiones

- El método del polinomio caracteristico es muy bueno en el sentido que es un método exacto con el eventualemente puedo llegar a soluciones reales del problema de encontrar vectores y valores propios

- Es malo en el sentido que es ineficiente pues requiere mucgos calculos o de un algoritmo muy pesado que puede no funcionar para todas las matrices

- Es un método que nos muestra que aunque tiene bases teoríca muy fuerte que no da espacio a error, puede llegar a ser problematico y complicado aplicarlo

Bibliografía

1. **Propiedades geométricas de las raíces de polinomios - Curso de Ciencias (UNAL)**. Disponible en: https://red.unal.edu.co/cursos/ciencias/2001004/lecciones_html/cap5/cap5s1.html. Último acceso: diciembre de 2024.

2. **Geometrical Properties of Polynomial Roots - Wikipedia**. Disponible en: https://en.wikipedia.org/wiki/Geometrical_properties_of_polynomial_roots. Último acceso: diciembre de 2024.

3. **Sturm's Theorem - Wikipedia**. Disponible en: https://en.wikipedia.org/wiki/Sturm%27s_theorem. Último acceso: diciembre de 2024.

4. **Clase 21, Parte 1 - Álgebra Lineal (UNAL)**. Disponible en: https://ciencias.medellin.unal.edu.co/cursos/algebra-lineal/clases/8-clases/121-clase-21-parte1.html. Último acceso: diciembre de 2024.