Theory of Least Squares

Emanuel Vélez Mariaca

2024-2

1 Teoría del método:

El objetivo de este método es el de hallar la función continua que mas se adecuado a unos datos dados de la forma (x, y), de donde, x es la variable independiente y y es una variable que depende de x. Y se determina la función mas adecuada por medio del criterio de mínimo error cuadrático.

Sea $A := \{(x_k, y_k)\}_{k=1}^{n}$ el conjunto de par ordenados de los datos dados, donde y_k depende de x_k. Y sea $\{f_j(x)\}_{j=0}^{m}$ un conjunto de funciones linealmente independiente.

Queremos hallar una función $f(x)$ continua tal que:

$$f(x) = \sum_{j=0}^{m} c_j f_j(x)$$

$$f(x_k) \approx y_k$$

De donde, $c_j \in \mathbb{R}$ y el criterio de aproximación esta dado por el "Criterio mínimo error cuadrático".

1.0.1 Mínimo error cuadrático:

Definimos el residuo para cada punto como

$$e_k := y_k - f(x_k)$$

El criterio de mínimo error cuadrático nos dice que minimicemos la expresión dada por:

$$E_{cm}(f) = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} e_k^2}$$

Lo cual es equivalente a minimizar la expresión:

$$E_c(f) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} e_k^2$$

2 Perspectiva algebraica:

Para implementar el método debemos tener en cuenta que es lo que queremos hallar, y en reducidas cuentas, podemos decir que queremos llegar a hallar los coeficientes en la suma que define a la función a la que queremos llegar, en otras palabras, queremos hallar $c_j \in \mathbb{R}\ \forall j \in \{1, 2, ..., m\}$ tal que $E_c(f)$ sea el mínimo. Esto lo podemos hacer através de derivar la expresión de $E_c(f)$ con respecto a cada coeficiente c_j.

Primero escribamos $E_c(f)$ en términos de las funciones $\{f_j(x)\}_{j=1}^m$ tales que $f = \sum_{j=1}^m c_j f_j$

$$E_C(f) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} e_k^2 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(y_k - f(x_k))^2 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(y_k - \sum_{j=1}^{m} c_j f_j(x_k)\right)^2$$

Ahora, derivemos esta expresión con respecto a c_i para cada $i \in \{1, 2, ...m\}$. Es fácil ver que queda de la siguiente forma:

$$\frac{\partial E_c}{\partial c_i} = -\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(y_k - \sum_{j=0}^{m} c_j f_j(x_k)\right)(f_i(x_k))$$

Luego, al igual a cero $\frac{\partial E_c}{\partial c_i} = 0$ para $i \in \{1, 2, ...m\}$, quedamos con m ecuaciones y m incógnitas de la forma:

$$\sum_{k=1}^{n} y_k f_i(x_k) = \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m} c_j f_j(x_k)\right) f_i(x_k) = \sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{k=1}^{n} f_j(x_k) f_i(x_k)\right) c_j$$

Que es equivalente a resolver la siguiente ecuación de matrices y vectores:

$$\begin{bmatrix} \sum_{k=1}^n (f_1(x_k))^2 & \sum_{k=1}^n f_1(x_k)f_2(x_k) & \dots & \sum_{k=1}^n f_1(x_k)f_m(x_k) \\ \sum_{k=1}^n f_2(x_k)f_1(x_k) & \sum_{k=1}^n (f_2(x_k))^2 & \dots & \sum_{k=1}^n f_2(x_k)f_m(x_k) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{k=1}^n f_m(x_k)f_1(x_k) & \sum_{k=1}^n f_m(x_k)f_2(x_k) & \dots & \sum_{k=1}^n (f_m(x_k))^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^n f_1(x_k)y_k \\ \sum_{k=1}^n f_2(x_k)y_k \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^n f_m(x_k)y_k \end{bmatrix}$$

Hallando el vector del lado izquierdo de la ecuación, podemos obtener los valores deseados para hallar f la mejor aproximación según el criterio de aproximación cuadrático.