

PRIMERA TAREA: Valores y vectores propios

Carlos Andrés Gallego Montoya - Gustavo Adolfo Pérez Pérez - Sebastián Pedraza Rendón

2024

(i) Método 1: Polinomio característico.

El polinomio característico de una matriz \mathbf{A} se define como sigue:

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0 \quad (1)$$

siendo \mathbf{I} la matriz identidad. Las raíces reales de dicho polinomio son valores propios de \mathbf{A} . Para hallar los vectores propios, se sustituyen cada uno de los λ en la ecuación $(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\vec{x} = 0$; así resultan sus respectivos \vec{x}_λ . El método requiere solucionar una ecuación polinomial que, computacionalmente, suele ser realmente demandante si se aplica en matrices de grandes dimensiones.

Análisis

Sean \mathbf{A} una matriz $n \times n$, $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ y $\lambda \in \mathbb{R}$.

Se tiene el problema: $\mathbf{A}\vec{x} = \lambda\vec{x}$. Se busca encontrar los escalares, λ , para los cuales el vector \vec{x} presenta el mismo cambio al operarle con dicho valor que al aplicarle la transformación dada por \mathbf{A} . Como \mathbf{A} es una transformación, ésta manipula \mathbb{R}^n en función de las entradas que posea. Por lo que cada axis es un objetivo de posible cambio.

De acuerdo con lo anterior, como se busca que λ represente escalarmente dicha transformación, se postula la siguiente idea:

$$\lambda \mathbf{I} = \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{pmatrix}$$

En esa situación, λ toma el valor canónico de cada eje; es decir, λ está relacionada con el cambio para cada base canónica de \mathbb{R}^n . Así que el problema se torna: $\mathbf{A}\vec{x} = (\lambda \mathbf{I})\vec{x}$. Entonces:

$$\mathbf{A}\vec{x} = (\lambda \mathbf{I})\vec{x} \rightarrow \mathbf{A}\vec{x} - (\lambda \mathbf{I})\vec{x} = \vec{0} \rightarrow (\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\vec{x} = \vec{0}$$

$$\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1} - \lambda & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} - \lambda & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} - \lambda \end{pmatrix}$$

Esta nueva matriz nos muestra la diferencia entre la transformación y el cambio escalar respecto a cada eje. Para la ecuación se necesitan soluciones no triviales (i.e. $\vec{x} \neq 0$); lo que conlleva a que $\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I} = 0$. Al ser

A una transformación, se sabe que $\det(\mathbf{A})$ nos muestra el efecto que produce en \mathbb{R}^n : ya sea que deforme el espacio (i.e. $\det(\mathbf{A}) = 0$) ó lo altere proporcionalmente (i.e. $\det(\mathbf{A}) \neq 0$).

Entonces, $\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0$, que es lo pedido para la respuesta, refleja un polinomio de la forma:

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = \sum_{i=0}^n r_i \lambda^i = 0$$

donde cada $r_i \in \mathbb{R}$ (en particular: $r_n = (-1)^n$) y λ^i es el escalar/incógnita buscada que soluciona la ecuación. Las λ que satisfagan dicha igualdad serán los valores propios que, a su vez, generarán los vectores propios $\lambda \vec{x}$.

Ejemplo: Aplicar el método a la siguiente matriz:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Aplicando la teoría anterior:

$$\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I} = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 2 & 3 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 2 & -2 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

Entonces tenemos lo siguiente:

$$(2-\lambda) \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 \\ -2 & 1-\lambda \end{pmatrix} - 2 \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1-\lambda \end{pmatrix} + 3 \det \begin{pmatrix} 1 & 2-\lambda \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = 0$$

Dejándonos con el polinomio:

$$(2-\lambda)[(2-\lambda)(1-\lambda)+2] - 2[(1-\lambda)-2] + 3[-2-2(2-\lambda)] = 0$$

$$-\lambda^3 + 5\lambda^2 - 2\lambda + 8 = 0$$

Luego, los valores propios son de la forma $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 2$ y $\lambda_3 = 4$. Respecto a los vectores propios:

$$\mathbf{A}\vec{x}_1 = \lambda_1 \vec{x}_1 \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -1 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}\vec{x}_2 = \lambda_2 \vec{x}_2 \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}\vec{x}_3 = \lambda_3 \vec{x}_3 \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Que son de la forma:

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} -z \\ 0 \\ z \end{pmatrix}, \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} -z \\ \frac{-3z}{2} \\ z \end{pmatrix}, \vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 4z \\ \frac{5z}{2} \\ z \end{pmatrix}$$

Y esa es la forma de los vectores propios según la transformación. ■

Error: Sea λ'_i un valor aproximado de λ_i . Tómense \vec{x}' y \vec{x} como sus respectivos vectores propios.

El error absoluto para los valores propios viene dado por $e_i = |\lambda_i - \lambda'_i|$. Para los vectores propios se ejecuta el mismo orden de ideas, pero para \mathbb{R}^n :

$$e_{\vec{x}_i} = \|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}'_i\|$$

Luego, para el cómputo general de error:

$$\mathcal{E} = \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i - \lambda'_i \right)^{\frac{1}{2}}$$

donde la notación corresponde a:

$$\vec{\lambda} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}, \vec{\lambda}' = \begin{pmatrix} \lambda'_1 \\ \lambda'_2 \\ \vdots \\ \lambda'_n \end{pmatrix}$$

Siendo más específicos, el factor clave viene a ser la condición de la matriz. Si \mathbf{A} es invertible, su número de condición viene dado por:

$$\kappa(\mathbf{A}) = \|\mathbf{A}\|_{\infty} \|\mathbf{A}^{-1}\|_{\infty}$$

donde $\|\mathbf{A}\|_{\infty} = \max_{1 \leq i \leq n} \left(\sum_{j=1}^n |a_{ij}| \right)$. Entre más grande sea dicho número, más es de esperar que el error en sus valores y vectores propios sean grandes; el método depende en su totalidad del buen condicionamiento de la matriz. Si $\det(\mathbf{A}) = 0$, entonces la inversa no existe y se dice que $\kappa(\mathbf{A}) = \infty$; implicando que la solución sea inestable o que no exista.

Ejemplo: Verificar el condicionamiento de la matriz del ejemplo:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Primero es bueno verificar que la matriz sea invertible:

$$\det(\mathbf{A}) = 2(2 + 2) - 2(1 - 2) + 3(-2 - 4) = -8$$

Al comprobar que la matriz es invertible, procedemos con el error:

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{8} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{8} \\ \frac{3}{4} & -1 & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

Luego, $\|\mathbf{A}\|_{\infty} = 7$ y $\|\mathbf{A}^{-1}\|_{\infty} = 2$. Entonces $\kappa(\mathbf{A}) = 14$ nos muestra un buen acondicionamiento. ■

(ii) **Método 2: Potencias.**

El método de las potencias es un procedimiento iterativo que se encarga de encontrar el valor propio dominante de una matriz con su respectivo vector propio.

Partiendo desde un vector arbitrario \vec{x}_0 , el método opera reiteradamente la matriz a este vector para conseguir, eventualmente, la convergencia hacia el vector propio correspondiente al λ_{max} .

Una característica útil del método de las potencias es que no sólo produce un valor propio, sino también un vector propio asociado. En realidad el método de las potencias se aplica a menudo para encontrar un vector propio para un valor propio que se determina por otros medios.

Para aplicar el método de las potencias, suponemos que la matriz $n \times n$ tiene n valores propios asociados con una colección de vectores linealmente independientes, por tanto suponemos que la matriz \mathbf{A} tiene un valor propio de mayor magnitud.

Análisis

Sean \mathbf{A} una matriz $n \times n$, diagonalizable, y $\{\lambda_i\}_{1 \leq i \leq n}$ el conjunto de sus valores propios ordenados de la siguiente forma:

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_n|$$

Sea $\vec{u}_0 \in \mathbb{R}^n$ no nulo. Sean $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ los vectores propios correspondientes a cada $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, respectivamente. Como los vectores propios forman una base respecto a la operación dada por $\mathbf{A}\vec{x}$, éstos son linealmente independientes. Así que se escribe \vec{u}_0 en función de los vectores propios:

$$\vec{u}_0 = r_1 \vec{v}_1 + \dots + r_n \vec{v}_n$$

Por lo que los vectores de la forma $\mathbf{A}^k \vec{u}_0$, con $k \in \mathbb{N}$, se pueden escribir como combinación lineal de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \vec{u}_0 &= \lambda_1(r_1 \vec{v}_1) + \dots + \lambda_n(r_n \vec{v}_n) \\ \mathbf{A}^2 \vec{u}_0 &= \lambda_1^2(r_1 \vec{v}_1) + \dots + \lambda_n^2(r_n \vec{v}_n) \\ &\vdots \\ \mathbf{A}^k \vec{u}_0 &= \lambda_1^k(r_1 \vec{v}_1) + \dots + \lambda_n^k(r_n \vec{v}_n) \end{aligned}$$

Siempre que $\lambda_1 \neq 0$, la ecuación se puede reinterpretar como sigue:

$$\frac{\mathbf{A}^k \vec{u}_0}{\lambda_1^k} = r_1 \vec{v}_1 + \dots + \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)^k r_n \vec{v}_n$$

Al asumir $|\lambda_1| > |\lambda_i|$ nos resulta: $\frac{|\lambda_i|}{|\lambda_1|} < 1$ para todo $1 \leq i \leq n$. Entonces, para $k \rightarrow \infty$, obtenemos:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{A}^k \vec{u}_0}{\lambda_1^k} = r_1 \vec{v}_1$$

Con tasa de convergencia menor o igual a $\frac{|\lambda_i|}{|\lambda_1|}$ siempre que $r_2 \neq 0$ (i.e. el coeficiente r_2 es el único que va junto a una tasa de convergencia demasiado cerca a 1). Por otra parte, si \vec{x}_1 se conociese con exactitud, entonces:

$$\lambda_1 = \frac{(\mathbf{A}\vec{x}_1) \cdot \vec{x}_1}{\vec{x}_1 \cdot \vec{x}_1}$$

entrega el valor propio esperado. Ahora, si solamente tenemos una aproximación \vec{x}'_1 de dicho vector propio:

$$\lambda_1 \approx \frac{(\mathbf{A}\vec{x}'_1) \cdot \vec{x}'_1}{\vec{x}'_1 \cdot \vec{x}'_1}$$

nos entrega un estimado de λ_1 . Luego, para continuar el método, $\vec{x}_k = \frac{1}{\|\vec{a}_{i,1}\|_\infty} (\mathbf{A}\vec{x}_{k-1})$.

Ejemplo: Aplicar el método a la siguiente matriz:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Como \mathbf{A} es diagonalizable, el método es aplicable. Sea $\vec{u}_0 = (1, 1)$ el vector inicial. Se tomarán hasta $k = 3$ iteraciones. Se empezará por buscar λ_{max} :

$$\mathbf{A}\vec{u}_0 = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix} = \vec{u}_1$$

Luego, $\vec{v}_1 = \frac{\vec{u}_1}{|\vec{u}_1|}$ nos entrega:

$$\frac{(\mathbf{A}\vec{v}_1) \cdot \vec{v}_1}{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_1} = 6.02703$$

Habiendo finalizado la primera iteración, se sigue como se muestra:

$$\mathbf{A}\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 6.14286 \\ 4.14286 \end{pmatrix} = \vec{u}_2$$

Luego, $\vec{v}_2 = \frac{\vec{u}_2}{|\vec{u}_2|}$ nos entrega:

$$\frac{(\mathbf{A}\vec{v}_2) \cdot \vec{v}_2}{\vec{v}_2 \cdot \vec{v}_2} = 6.0052$$

Y repetimos por última vez:

$$\mathbf{A}\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 6.02325 \\ 4.02325 \end{pmatrix} = \vec{u}_3$$

Luego, $\vec{v}_3 = \frac{\vec{u}_3}{|\vec{u}_3|}$ nos entrega:

$$\frac{(\mathbf{A}\vec{v}_3) \cdot \vec{v}_3}{\vec{v}_3 \cdot \vec{v}_3} = 6.00089$$

Lo que nos entrega que $\lambda_{max} \approx 6.00089$ junto con un vector propio estimado: $\vec{x}'_{6.00089} \approx (1, 0.667953)$. Tenga en cuenta que las respuestas legítimas son $\lambda = 6$ y $\vec{x}_6 = (0.83205, 0.5547)$. ■

Error: Al ser un método de iteración de punto fijo, éste converge linealmente; es decir, el error se reduce a medida constante entre el avance de las iteraciones:

$$e_i = \frac{\|v_i - v_{i-1}\|}{\|v_i\|}$$

En particular, la tasa de convergencia $S = |\frac{\lambda_2}{\lambda_1}|$ está dada por los valores propios más grandes. También se puede calcular el error en la iteración de la matriz:

$$\mathcal{E}_{\mathbf{A}\vec{x}^k} = \|\mathbf{A}\vec{x}^k - \lambda^k \vec{x}^k\|$$

Para postular un criterio de parada se puede usar:

$$\left| \frac{\lambda^k - \lambda^{k-1}}{\lambda^k} \right| < \epsilon$$

Ejemplo: Verificar el error del ejemplo:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Nos resultan:

$$e_3 = \frac{\|v_3 - v_2\|}{\|v_3\|} = 0.005376$$

$$\mathcal{E}_{A\vec{v}^3} = \|\mathbf{A}\vec{v}^3 - \lambda^3 \vec{v}^3\| = 0.005354$$

Y el criterio de parada vendría, como siempre, a regular las iteraciones. ■

(iii) **Método 3: factorización QR.**

La descomposición **QR** es un método de factorización matricial que se emplea para hallar todos los valores propios de una matriz. La matriz **A** se descompone como **A = QR**; donde **Q** es una matriz ortogonal y **R** es una matriz triangular superior.

Iterando la descomposición (i.e. el proceso), la matriz terminará adaptando cierta forma similar a la diagonalización, que es la que nos dará los valores propios.

Una ventaja de este método es que permite aproximar todos los valores propios de la matriz, como desventaja se tiene el hecho de que es un proceso costoso de realizar.

— **Análisis** —

Sea **A** una matriz $m \times n$ con columnas linealmente independientes.

Sean $\vec{u}_{A_1}, \dots, \vec{u}_{A_n}$ los vectores que representan las columnas de la matriz. Por lo que $\{\vec{u}_{A_i}\}_{1 \leq i \leq n}$ es una base para el espacio generado por las columnas de **A** (todas estas componentes son no nulas). Mediante el Proceso de Gram-Schmidt, existe una base ortonormal $\vec{w}_{u_1}, \dots, \vec{w}_{u_n}$ para dicho espacio.

CONSTRUCCIÓN DE BASE ORTONORMAL: Tómese $\vec{w}_{u_1} = \vec{u}_{A_1}$. Luego se construye la siguiente componente:

$$\vec{w}_{u_2} = \vec{u}_{A_2} - \left(\frac{\vec{u}_{A_2} \cdot \vec{w}_{u_1}}{\vec{w}_{u_1} \cdot \vec{w}_{u_1}} \right) \vec{w}_{u_1}$$

La idea de hacer este proceso es garantizar la ortogonalidad de la misma:

$$\vec{w}_{u_3} = \vec{u}_{A_3} - \left(\frac{\vec{u}_{A_3} \cdot \vec{w}_{u_1}}{\vec{w}_{u_1} \cdot \vec{w}_{u_1}} \right) \vec{w}_{u_1} - \left(\frac{\vec{u}_{A_3} \cdot \vec{w}_{u_2}}{\vec{w}_{u_2} \cdot \vec{w}_{u_2}} \right) \vec{w}_{u_2}$$

Y en general, para $i = 2, \dots, n$, nos resulta:

$$\vec{w}_{u_i} = \vec{u}_{A_i} - \left(\frac{\vec{u}_{A_i} \cdot \vec{w}_{u_1}}{\vec{w}_{u_1} \cdot \vec{w}_{u_1}} \right) \vec{w}_{u_1} - \left(\frac{\vec{u}_{A_i} \cdot \vec{w}_{u_2}}{\vec{w}_{u_2} \cdot \vec{w}_{u_2}} \right) \vec{w}_{u_2} - \dots - \left(\frac{\vec{u}_{A_i} \cdot \vec{w}_{u_{i-1}}}{\vec{w}_{u_{i-1}} \cdot \vec{w}_{u_{i-1}}} \right) \vec{w}_{u_{i-1}}$$

Para garantizar la normalidad, al final bastará con tomar \vec{w}_{u_i} como $\frac{1}{\|\vec{w}_{u_i}\|} \vec{w}_{u_i}$.

Al tener una base ortonormal, los vectores de la misma se pueden escribir como combinación lineal de sus elementos (combinación L.I.):

$$\begin{aligned}\vec{u}_{A_1} &= r_{1,1}\vec{w}_{u_1} + r_{2,1}\vec{w}_{u_2} + \cdots + r_{n,1}\vec{w}_{u_n} \\ \vec{u}_{A_2} &= r_{1,2}\vec{w}_{u_1} + r_{2,2}\vec{w}_{u_2} + \cdots + r_{n,2}\vec{w}_{u_n} \\ &\vdots \\ \vec{u}_{A_n} &= r_{1,n}\vec{w}_{u_1} + r_{2,n}\vec{w}_{u_2} + \cdots + r_{n,n}\vec{w}_{u_n}\end{aligned}$$

donde cada $r_{j,i} = \vec{u}_{A_i} \cdot \vec{w}_{u_j}$.

Como \vec{w}_{u_j} es ortogonal a $\text{gen}\{\vec{w}_{u_1}, \vec{w}_{u_2}, \dots, \vec{w}_{u_i}\}$ para todo $i < j$, entonces es ortogonal a \vec{u}_{A_i} . Por lo que el producto punto en cada $r_{j,i}$ es nulo para $j > i$. Sea \mathbf{Q} la matriz que tiene como columnas los vectores \vec{w}_{u_i} :

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vec{w}_{u_1} & \vdots & \vec{w}_{u_i} & \vdots & \vec{w}_{u_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

Sea \vec{r}_j el siguiente vector:

$$\vec{r}_j = \begin{pmatrix} r_{1,j} \\ r_{2,j} \\ \vdots \\ r_{n,j} \end{pmatrix}$$

Lo que nos permite reescribir la matriz inicial como:

$$\mathbf{A} = \mathbf{Q}\mathbf{R}$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vec{w}_{u_1} & \vdots & \vec{w}_{u_i} & \vdots & \vec{w}_{u_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_{1,1} & r_{1,2} & r_{1,3} & \cdots & r_{1,n} \\ 0 & r_{2,2} & r_{2,3} & \cdots & r_{2,n} \\ 0 & 0 & \ddots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & r_{n,n} \end{pmatrix}$$

Para concluir basta con demostrar la no singularidad de \mathbf{R} ; es decir, veamos que \mathbf{R} es invertible:

$$\mathbf{R}\vec{x} = \vec{0} \rightarrow \mathbf{Q}(\mathbf{R}\vec{x}) = \vec{0} \rightarrow \mathbf{A}\vec{x} = \vec{0}$$

Como \mathbf{A} tiene columnas L.I., entonces $\mathbf{A}\vec{x} = \vec{0}$ implica que $\vec{x} = \vec{0}$. Por lo que \mathbf{R} es invertible y el sistema tiene única solución.

Ejemplo: Aplicar el método a la siguiente matriz:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -3 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Aplicando la teoría anterior:

Es fácil verificar que las columnas son L.I. y que forman una base. Ahora hallamos la base ortonormal asociada:

$$\vec{w}_{u_1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{-1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}, \vec{w}_{u_2} = \begin{pmatrix} \frac{4}{\sqrt{21}} \\ \frac{-1}{\sqrt{21}} \\ \frac{2}{\sqrt{21}} \end{pmatrix}, \vec{w}_{u_3} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{14}} \\ \frac{2}{\sqrt{14}} \\ \frac{3}{\sqrt{14}} \end{pmatrix},$$

Lo que nos entrega la matriz:

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{4}{\sqrt{21}} & \frac{-1}{\sqrt{14}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{21}} & \frac{2}{\sqrt{14}} \\ \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{21}} & \frac{3}{\sqrt{14}} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0.408248 & 0.872872 & -1 \\ 0.816497 & -0.218218 & 0.534522 \\ -0.408248 & 0.436436 & 0.801784 \end{pmatrix}$$

Ahora procedemos a hallar los respectivos $r_{i,j}$ para construir la matriz triangular superior:

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \sqrt{6} & \frac{-8}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{7}{\sqrt{21}} & \frac{1}{\sqrt{21}} \\ 0 & 0 & 1 + \frac{18}{\sqrt{14}} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 2.44949 & 0.872872 & 0.408248 \\ 0 & 1.52753 & 0.218218 \\ 0 & 0 & 5.8107 \end{pmatrix}$$

Luego, se comprueba que:

$$\mathbf{A} \approx \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{4}{\sqrt{21}} & \frac{-1}{\sqrt{14}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{21}} & \frac{2}{\sqrt{14}} \\ \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{21}} & \frac{3}{\sqrt{14}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{6} & \frac{-8}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{7}{\sqrt{21}} & \frac{1}{\sqrt{21}} \\ 0 & 0 & 1 + \frac{18}{\sqrt{14}} \end{pmatrix}$$

Y así se consigue la factorización deseada. ■

Error: Para el caso de matrices \mathbf{A} , $m \times m$, simétricas, con valores propios satisfaciendo una cadena de desigualdad (i.e. hipótesis del caso del método de las potencias). La factorización \mathbf{QR} converge uniformemente a los vectores propios de \mathbf{A} . Además, para la j -ésima iteración de la forma: $\mathbf{A}_{j-1} = \mathbf{Q}_j \mathbf{A}_j \mathbf{Q}_j^T$, si $j \rightarrow \infty$, entonces \mathbf{A}_j converge a una matriz diagonal con sus entradas siendo los valores propios y su respectiva \mathbf{Q}_j converge a una matriz ortogonal con sus columnas siendo sus vectores propios. En particular, para $\epsilon > 0$, se puede postular:

$$\|\mathbf{A}_k - \text{diag}(\mathbf{A}_k)\|_\infty < \epsilon$$

$$\max_{1 \leq i \leq m} \sum_{j=1}^n |a_{ij} - \text{diag}(a_{ij})| < \epsilon$$

donde la primera ecuación se usa para matrices cuadradas y la segunda para matrices $m \times n$.

Ejemplo: Verificar el error del ejemplo:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -3 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Aplicamos las fórmulas dadas y verificamos:

$$\|\mathbf{A}_k - \text{diag}(\mathbf{A}_k)\|_{\infty} = \|\mathbf{A} - \text{diag}(\mathbf{QR})\|_{\infty} = 3.37936$$

Que nos resulta un error algo alto. Lo que nos alerta sobre un error en la descomposición de la matriz. ■

BIBLIOGRAFÍA :

- Sauer, T. (2012). *Numerical Analysis, second edition*. PEARSON.
- Burden, L. R.; Faires, J. D.; Burden, M. A. (2016). *Numerical Analysis, tenth edition*. CENGAGE Learning.
- Kolman, B. (1999). *Álgebra lineal con aplicaciones y MatLab, sexta edición*. PEARSON education.