Resultados del Método de Descomposición QR

Autor: Carlos Andres Gallego Montoya - Gustavo Adolfo Perez Perez - Sebastian Pedraza Rendon

6 de diciembre de 2024

1. Introducción

El Método QR es un procedimiento iterativo para encontrar todos los autovalores (y, bajo ciertas condiciones, los autovectores) de una matriz. Este se basa en la factorización:

$$A = QR$$

donde Q es ortogonal y R es triangular superior. Al iterar el proceso con $A \leftarrow RQ$, se tiende hacia una forma cuasi-diagonal a partir de la cual se extraen los autovalores. Además, acumulando las matrices Q en cada iteración, se obtienen los autovectores correspondientes.

A continuación, se presentan los resultados obtenidos al aplicar este método a las matrices A, B, C, D, E, F, G y H.

2. Resultados del Método QR

Matriz A

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Autovalores: 5, 1 **Autovectores (columnas de la matriz resultante):**

$$\begin{pmatrix} 0{,}31622777 & -0{,}9486833 \\ 0{,}9486833 & 0{,}31622777 \end{pmatrix}$$

Matriz B

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Autovalores: 6, 1 **Autovectores:**

$$\begin{pmatrix} -0{,}5547002 & -0{,}83205029 \\ -0{,}83205029 & 0{,}5547002 \end{pmatrix}$$

Matriz C

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Autovalores: 5, 1 **Autovectores:**

$$\begin{pmatrix} 0{,}70710678 & -0{,}70710678 \\ 0{,}70710678 & 0{,}70710678 \end{pmatrix}$$

Matriz D

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Autovalores: 4.50701864, 0.77812384, -0.28514248 **Autovectores:**

$$\begin{pmatrix} 0{,}53231709 & 0{,}02525585 & -0{,}84616822 \\ 0{,}49863934 & 0{,}79839792 & 0{,}33751972 \\ 0{,}6841033 & -0{,}60160028 & 0{,}4124073 \end{pmatrix}$$

Matriz E

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Autovalores: 4.04891734, -0.69202147, -0.35689587 **Autovectores:**

$$\begin{pmatrix} 0{,}51769363 & 0{,}03900114 & -0{,}85467668 \\ 0{,}74808896 & 0{,}46410467 & 0{,}47430977 \\ 0{,}41515805 & -0{,}88492134 & 0{,}21108771 \end{pmatrix}$$

Matriz F

$$F = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Autovalores: 4.12488542, -0.76155718, 0.63667176 **Autovectores:**

$$\begin{pmatrix} 0{,}67550236 & 0{,}17865763 & 0{,}71538662 \\ 0{,}61159354 & -0{,}67770693 & -0{,}40824829 \\ 0{,}41188579 & 0{,}71329852 & -0{,}56705848 \end{pmatrix}$$

Matriz G

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Autovalores: 6.63453446, 1.50856334, -0.73564154, -0.40745627 **Autovectores:**

$$\begin{pmatrix} 0{,}38941594 & 0{,}0219299 & -0{,}90451878 & -0{,}17239516 \\ 0{,}35142164 & 0{,}48188185 & 0{,}01000497 & 0{,}80261611 \\ 0{,}55977506 & 0{,}50358664 & 0{,}35839565 & -0{,}55191026 \\ 0{,}6414904 & -0{,}71673528 & 0{,}23086412 & 0{,}14656861 \end{pmatrix}$$

Matriz H

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Autovalores: 6.82726225, 1.72811591, -1.08793492, -0.46744323 **Autovectores:**

$$\begin{pmatrix} -0{,}42853133 & 0{,}17904223 & 0{,}88280424 & -0{,}07043754 \\ -0{,}34899468 & 0{,}43534449 & -0{,}19330954 & 0{,}80703737 \\ -0{,}55406667 & 0{,}44398208 & -0{,}40496591 & -0{,}57610126 \\ -0{,}62255421 & -0{,}76242965 & -0{,}13889099 & 0{,}10879606 \end{pmatrix}$$

3. Ventajas y Desventajas del Método QR

Ventajas

- **Estabilidad numérica**: El método QR, especialmente con variaciones y desplazamientos (shifts), es numéricamente más estable que el método del polinomio característico.
- **Obtención de todos los autovalores**: A diferencia del método de la potencia, el método QR obtiene todos los autovalores y, con acumulación de Q, los autovectores correspondientes.
- **Aplicable a una amplia gama de matrices**: Es un método estándar en librerías de álgebra lineal numérica.

Desventajas

- **Costo computacional**: Más costoso que el método de la potencia cuando solo se necesita el autovalor dominante.
- **Convergencia**: Sin desplazamientos (shifts), la convergencia puede ser lenta para algunas matrices.
- **Complejidad de implementación**: Comparado con el método de la potencia, el QR es más complejo de implementar correctamente.

4. Conclusiones

El método QR se mostró efectivo en la obtención de todos los autovalores y autovectores de las matrices analizadas. Sus resultados son coherentes con los obtenidos por otros métodos, pero destaca por su capacidad de encontrar la descomposición completa del espectro. Aunque es más costoso, su estabilidad y completitud lo hacen preferible para problemas de tamaño moderado donde se requiera la información completa de autovalores y autovectores.