Modelamiento del sloshing de una taza de café

Pablo Andrés Úsuga Gómez, Juan Pablo Robledo Meza, Camilo Montoya Arango
Mateo Sebastián Mora Montero, Daniel Andrés Hernandez Pedraza

Febrero 15 de 2025

Contexto del problema:
El paper presenta un modelamiento del sloshing (movimiento oscilatorio en un contenedor) de una taza de café cuando una persona se desplaza con ella en la mano. A continuación vamos a realizar un esquema del modelamiento físico de dicho fenómeno y luego vamos a interpretar las ecuaciones diferenciales que surgen del modelo para describir la dinámica del sistema.

Modelamiento del fenómeno:
Inicialmente suponemos que el contacto de la taza con la mano se va a representar por un único punto. El café se modela como si fuese agua, esto implica una serie de propiedades del fluido van a facilitar la generación del modelo, entre ellas podemos identificar:

(1) **Incomprensibilidad:** Esto supone que los cambios de presión en el fluido no alteran su densidad, en consecuencia, las ecuaciones de la dinámica del fluido van a simplificarse, pues no es necesario introducir parámetros que cuantifiquen estas variaciones.

(2) **Viscosidad:** Esta propiedad representa la fricción interna del fluido que en el caso del agua es muy baja. En el modelamiento esto es muy conveniente pues el balance energético del fluido no tiene que considerar pérdidas energéticas derivadas de la viscosidad, en consecuencia, el sistema se va a comportar como un sistema conservativo que es más simple de modelar.

(3) **Frecuencias naturales:** Estas se refieren a las frecuencias con las que el fluido vibra tras ser sometido a una fuerza puntual, por ello el nombre de naturales, pues son las que el fluido adopta por sus propiedades innatas más las geométricas del contenedor. Si suponemos que el fluido es agua, dichas frecuencias se calculan de modo más sencillo, pues estas en general dependen de los cambios de densidad y la viscosidad del fluido.

El fenómeno se va a modelar como un sistema de un péndulo cuyo pivote se encuentra en movimiento en el eje horizontal y vertical. Para nuestro caso solo consideramos el modelo con movimiento vértical, aunque el paper también considera el caso combinado de ambos movimientos. El sistema se modela bajo un modelo lumped, lo que hace es suponer que la masa del fluido se concentra en un único punto que será el bob o masa que cuelga del péndulo, de este modo la dinámica del sistema se simplifica, pues no es necesario considerar toda la distribución del agua en la taza y ver cómo esta varía en el tiempo. A continuación se presenta un esquema con los parámetros básicos del modelo lumped.

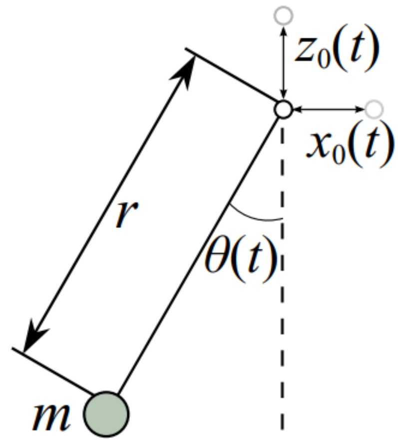

Figura 1: Modelo lumped para el sistema de taza y café. [1]

De modo analítico se plantea el análisis energético del sistema vía el Lagrangiano que representa la diferencia entre la energía cinética y la energía potencial del sistema.

$$L = T - V = \frac{m}{2}\left[(\dot{x} - \dot{x}_0)^2 + (\dot{z} + \dot{z}_0)^2\right] + mg\,(z + z_0) \tag{1}$$

A continuación se emplean las ecuaciones de Euler-Lagrange que enlaza el análisis energético del sistema con la dinámica que describe la evolución del sistema, como resultado se deriva la ecuación (2) del paper [1], y luego se hacen expansiones de Taylor de bajo grado para obtener la ecuación (3) de [1].

$$r^2\,\ddot{\theta} + r\,[g + \ddot{z}_0]\left(\theta - \frac{\theta^3}{6}\right) + r\,\ddot{x}_0\,\frac{\theta^2}{2} + 2r\,\dot{r}\,\dot{\theta} = -r\,\ddot{x}_0 \tag{2}$$

La ecuación obtenida no se puede resolver de modo analítico exacto, entonces se considera un método de aproximación a dicha ecuación diferencial para modelar el sistema. Como ya habíamos comentado, solo vamos a considerar el sistema sometido a movimientos vérticales y para este caso se emplea un método perturbativo conocido como el método de averaging que considera dos escalas temporales, una rápida y una lenta, y promedia el movimiento del sistema a lo largo de una iteración rápida para ajustar la evolución lenta. Aplicando este método de aproximación se llega a la ecuación (4) de [1]. Esta es adimensional, es decir, se han reescalado parámetros de modo que la ecuación no dependa de unidades físicas como segundos o metros, y esta permite modelar la dinámica del sistema en forma matemáticamente más pura.

$$u'' + \left[1 + \varepsilon\lambda\Omega^2\cos(\Omega\tau)\right]\left(u - \frac{\varepsilon^2 u^3}{6}\right) = 0, \tag{3}$$

donde se definen los parámetros:

$$\tau = \omega t, \quad \omega_0^2 = \frac{g}{r_0}, \quad \varepsilon\lambda = -\frac{\Delta z}{r_0}, \quad \Omega = \frac{\omega}{\omega_0}.$$

Aquí u es una cantidad adimensional que surge de un escalamiento del ángulo del péndulo, por tanto dicha ecuación diferencial describe cómo está cambiando dicha u respecto al tiempo adimensional τ, que a su vez está relacionado con el tiempo vía la ecuación $\tau = \omega t$. Por otro lado, r_0 es la longitud efectiva del péndulo, Δz es la amplitud del movimiento vertical del pivote, ε es un parámetro de "bookkeeping" para ordenar los términos perturbativos, y λ representa la razón entre la longitud efectiva y la amplitud de oscilación. ω representa la frecuencia de excitación del sistema, mientras que ω_o es la frecuencia natural de oscilación del péndulo. Note que las frecuencias son los parámetros predominantes del modelo, y esto es intuitivo pues como es un modelo lumped realmente el interés es conocer cómo están variando las oscilaciones del mismo.

Con esta ecuación uno puede analizar los rangos críticos de las frecuencias de exitación donde el sistema entra en resonancia, o sea, cuando la frecuencia de exitación y la natural entran en una coherencia tal que las vibraciones del sistema aumentan considerablemente, en particular para este fenómeno, van a generar mayor riesgo de derrame del café. Por último, vamos a expresar dicha ecuación como un sistema de dos ecuaciones diferenciales de grado inferior, para esto hacemos el cambio estándar $u' = v$, y de este modo obtenemos el sistema :

$$\frac{du}{d\tau} = u' = v, \tag{4}$$

$$\frac{dv}{d\tau} = v' = -\left[1 + \varepsilon\lambda\Omega^2 \cos(\Omega\tau)\right]\left(u - \frac{\varepsilon^2 u^3}{6}\right). \tag{5}$$

Referencias

1. Guarín-Zapata, N. (2021). Sloshing in coffee as a pumped pendulum. arXiv preprint arXiv:2106.11435.

2. H. C. Mayer and R. Krechetnikov, Walking with coffee: Why does it spill?, PHYSICAL REVIEW E 85, 046117 (2012).