

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

Prof. Dr. Ünal Halit ÖZDEN

Yönetim fonksiyonları

- Sanayi devrimi ile birlikte endüstri işletmelerinin hızla büyümeleri sonucunda bir kişinin bütün yöneticilik fonksiyonlarını tek başına yürütebilmesi imkansız hale gelmiştir
- Bunun doğal sonucu olarak yönetim fonksiyonları ayrılmış, böylece işletme bünyesinde üretim, pazarlama, finansman vb. farklı bölümler ortaya çıkmıştır

Çatışan amaçlar

- Yönetim fonksiyonunun gittikçe artan sayıda böümlere ayrıılması, yeni işletme sorunlarını da beraberinde getirmiştir
- Bir bölüm için en iyi olan davranış biçiminin bir başka bölüm için iyi olmak bir yana genellikle yıkıcı olması, bölümleri birbirlerinin amaç ve faaliyetlerini göz önünde bulundurmak zorunda bırakmıştır
- Bu tip sorunlar ve bunlara daha iyi çözüm bulma yaklaşımları da yüneylem araştırmasını doğurmuştur

Yöneylem araştırmasının tarihçesi

- Kayıtlı olan literatüre göre yönetim için bilimsel yaklaşım presipleri 1900'lu yılların başlarında Frederick Taylor tarafından ortaya konulmuştur
- Günümüz yöneylem araştırmasında kullanılan bazı model ve tekniklerin kullanılması çok eskiye dayansa da, “yöneylem araştırması” adı verilen ilk faaliyetin II. Dünya Savaşı sırasında gerçekleştirildiği kabul edilmektedir

Yöneylem araştırmasının tarihçesi

- II. Dünya Savaşı sırasında İngiltere askeri yönetimi, düşmanlarının hava akınları karşısında en iyi savunma şeklini belirlemek amacıyla farklı disiplinlerden bilim adamlarıyla bir ekip çalışması başlatmış ve böylece en iyi savunma şeklini bulmuştur
- Bu çalışma için bir araya gelen bilim adamlarından “yeni tip bombaların etkinliklerinin belirlenmesi ve radarların etkili biçimde kullanımlarının sağlanması” problemlerini çözmeleri istenmiştir
- Çözüm sonuçlarının uygulamada çok başarılı olması, savunma sisteminin diğer kesimlerinde; “radar denetim politikalari”, “uçaksavar yangın kontrolü”, “konvoy büyülüğu”, “düşman denizaltılarının yerlerinin saptanması” gibi çeşitli askeri problemlerin çözümünde benzer ekiplerin oluşturulması sağlanmıştır

Yöneylem araştırmasının tarihçesi

- İngiltere'de alınan başarılı sonuçlar müttefiklerin de dikkatini çekmiş, bu ülkeler de askeri problemlerini farklı disiplinlerden bilim adamlarıyla oluşturdukları ekipleriyle çözmeye girişmişlerdir
- Yöneylem araştırmasıyla İngiltere'den çok sonra tanışmış olmakla beraber, ABD'nin bu konudaki yoğun çabaları yöneylem araştırmasında önemli ilerlemeler kaydedilmesini sağlamıştır

Yöneylem araştırmasının tarihçesi

- ABD hava kuvvetlerinin kurduğu ekibin üyelerinden birisi olan Dantzig, büyük organizasyonların gerçekleştirdikleri faaliyetlerin büyük bir bölümünün dağıtım problemi olarak ele alınabileceğini ve en iyi plan-programma bir amaç fonksiyonunun en küçüklenmesi (minimizasyonu) ile ulaşabileceğini açıklamış, ayrıca doğrusal programlama problemlerinin klasik çözüm tekniği olan “**simpleks yöntemini**” önermiştir

Yöneylem araştırmasının tarihçesi

- Savaş sırasında, askeri problemlerin çözümü için oluşturulan ekiplerde aktif biçimde çalışan bilim adamları, savaş sonrasında dikkatlerini benzer yaklaşımın sivil yaşam problemlerine uygulanabilirliği üzerinde yoğunlaştırmışlardır:
 - Üniversitelerine dönüp mevcut teknikler için sağlam temel oluşturma konusunda çalışanlar
 - Yeni teknikler geliştirme çabasına girenler
 - Özel ekonominin değişik kesimlerindeki çalışmalarına dönerek buralarda karşılaşılan problemleri benzer yaklaşımla cozmeye çalışanlar
- Bütün bu çalışmalar bilimsel bir uğraşı alanının yanı “**Yöneylem Araştırması**”nın doğusuna yol açmıştır

Yöneylem araştırmasının uygulanması

- Yöneylem araştırmasını ilk uygulayan sivil kuruluşlar kar amacı büyük endüstriyel kuruluşlar olmuştur
- Küçük boyutlu kuruluşlar, yöneylem araştırmasının yalnızca büyük işletmeler için değil, kendileri için de yararlı olduğunun farkına biraz geç varmışlar ve araştırmacıların birbirlerinden farklı gibi görünümlerine karşın pek çok problemin “stok, dağıtım, sıralama, kuyruk, oyun” gibi belirli bir başlık altında incelenebileceklerini farketmeleri ve bunlar için standart çözüm teknikleri geliştirmelerinden çok sonra konuya ilgi göstermişlerdir

Yöneylem araştırmasının uygulanması

- Birkaç uygulama dışında yöneylem araştırmasının hizmet ağırlıklı endüstrilerde ve kamu kesiminde kullanılması 1960'lı yılların ortalarında gerçekleşmiştir
- Bugün, banka, kütüphane, hastane, otel, okul gibi hizmet ağırlıklı pek çok kuruluş hizmet verme etkinliğini artırmada yöneylem araştırmasından büyük yarar sağlamaktadır
- Devlet kuruluşları da plan, program ve politika belirleme çalışmalarında yöneylem araştırmasını yaygın bir biçimde kullanmaktadır
- Yöneylem araştırmasının çok geniş bir uygulama alanı bulması ve çok hızlı bir gelişme göstermesindeki en önemli faktör bilgisayar teknolojisindeki gelişme olmuştur

İlk yüneylem araştırması kuruluşu

- Yüneylem araştırması alanında çalışan bilimadamlarının ihtiyaçlarını karşılamak amacıyla kurulan ilk yüneylem araştırması kuruluşu, 1952 yılında ABD'de kurulan **ORSA (The Operational Research Society of America)** olmuştur
- Türkiye'de yüneylem araştırması çalışmalarının batıdan çok sonra başladığı bilinmektedir
- Ülkemizde de ilk yüneylem araştırması çalışmaları batıda olduğu gibi savunma kesiminde başlamıştır
- Savunma kesimi dışında ilk yüneylem araştırması ekibi 1965 yılında **Türkiye Bilimsel ve Teknik Araştırma Kurumu (TÜBİTAK)** bünyesinde kurulmuştur

Yöneylem araştırmasının tanımı

- Yöneylem araştırması, sistemlerin performansını optimize etmek için teknikler kullanan bir bilim dalıdır
- Yöneylem araştırması, bir sistemde ortaya çıkan problemlere, sistemin denetlenebilir elemanları cinsinden bilimsel yöntem, teknik ve araçların uygulanmasıyla en iyi çözümün bulunmasıdır
- Yöneylem araştırması, insan, makina, para ve malzemeden oluşan endüstriyel, ticari, resmi ve askeri sistemlerde yönetimlerde karşılaşılan problemlere bilimsel yaklaşımındır. Amacı, yönetime politika ve faaliyetlerini bilimsel olarak belirlemede yardımcı olmaktadır
- Yöneylem araştırması, mevcut imkanlardan en büyük faydayı sağlamak için girişilen bilimsel yaklaşımlar ve teknikler cümlesidir
- Yöneylem araştırmasının ana konusu, herhangi bir sistemin karmaşık operasyonlarını anlamak ve performansını iyileştirmek için bilimsel karar verme yöntemleridir

Yöneylem araştırmasının temel özelliklerি

- Sistem yaklaşımını kullanması:** Yöneylem araştırması problemi çözerken, o problemin ait olduğu organizasyonun bütün unsurlarını, çevresini ve aralarındaki etkileşimi göz önünde bulundurur
- Disiplinlerarası bir yaklaşım olması:** Problemin modellenmesinde ve çözümünde farklı bakış açılarından faydalananabilmek için problemlerin disiplinlerarası bir ekip tarafından incelenmesi gereklidir
- Bilimsel yöntemler kullanması:** Yöneylem araştırması problemi tanımlar, modeller, çözer, sonuçları test eder ve uygular

Yöneylem araştırmasının metodolojisi: İyi bir YA uygulamasının altı basamağı

Problemin Tanımlanması

Sistemin Gözlenmesi

Problemin Matematiksel Modelinin Geliştirilmesi

Modelin Çözülmesi

Modelin Geçerliliğinin Gösterilmesi

Çözümün Uygulanması ve Yorumlanması

- Her basamak arasında geribesleme bulunmaktadır

Problemin Tanımlanması

Sistemin Gözlenmesi

**Problemin Matematiksel
Modelinin Geliştirilmesi**

Modelin Çözülmesi

Modelin Geçerliliğinin Gösterilmesi

Çözümün Uygulanması ve Yorumlanması

- Amaçlar nelerdir?
- Problem çok dar kapsamlı mı ele alındı?
- Problem çok geniş kapsamlı mı ele alındı?

Problemin tanımlanması

- Mمungkin seçenekler arasından bir faaliyet veya faaliyetler dizisinin benimsenmesine **karar** denir
- **Karar verici**, alternatif stratejiler arasından en uygun olanını seçme konusunda karar verme yetkisine sahip birey ya da topluluğa verilen genel isimdir
- Karar vericinin ulaşmak istediği bir amacının olması, bu amaca ulaşmada izlenebilecek alternatif stratejilerin bulunması ve alternatifler içinden hangisinin amacı gerçekleştirebileceği konusunda kuşku içinde bulunulması gerekmektedir
- **Ancak bu koşullarda bir problem vardır** denir

Problemin Tanımlanması

Sistemin Gözlenmesi

**Problemin
Modelinin Geliştirilmesi**

Modelin Çözülmesi

Modelin Geçerliliğinin Gösterilmesi

Çözümün Uygulanması ve Yorumlanması

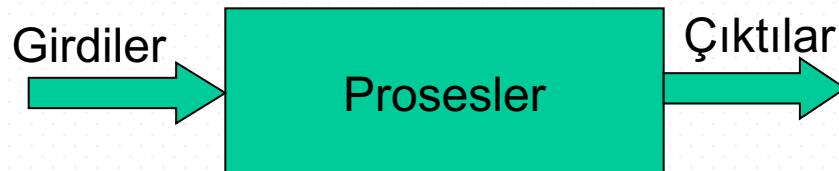
- Hangi veriler toplanmalıdır?
- Veriler nasıl toplanmalıdır?
- Sistemin farklı parçaları birbirleriyle nasıl etkileşmektedir?

Sistemin gözlenmesi

- Sistem gözlemlenir ve probleme etki eden parametreler tahmin edilmeye çalışılır
- Bu amaçla veri derlenmesi, bu adımın çok önemli bir kısmını oluşturur
- Tahmin değerleri sabit sayılar olarak işleme tabi tutulurlar ve matematiksel modelin geliştirilmesinde kullanılırlar
- Problem elemanlarının duruma en uygun biçimde belirlenebilmesi için **sistem yaklaşımı** kullanılır

Sistem nedir?

- Bir sınır içerisinde, birbirleriyle etkileşim içinde bulunan ve ortak bir amaca yönelikmiş olan öğeler topluluğudur
- Sistem, girdileri çıktılara dönüştüren birbirleriyle ilişkili faaliyetlerden ve öğelerden (elemanlardan) oluşmaktadır
- Sistemin çok sayıda girdisi ve çıktısı olabilir



Problemin Tanımlanması

Sistemin Gözlenmesi

**Problemin
Modelinin Geliştirilmesi**

Modelin Çözülmesi

Modelin Geçerliliğinin Gösterilmesi

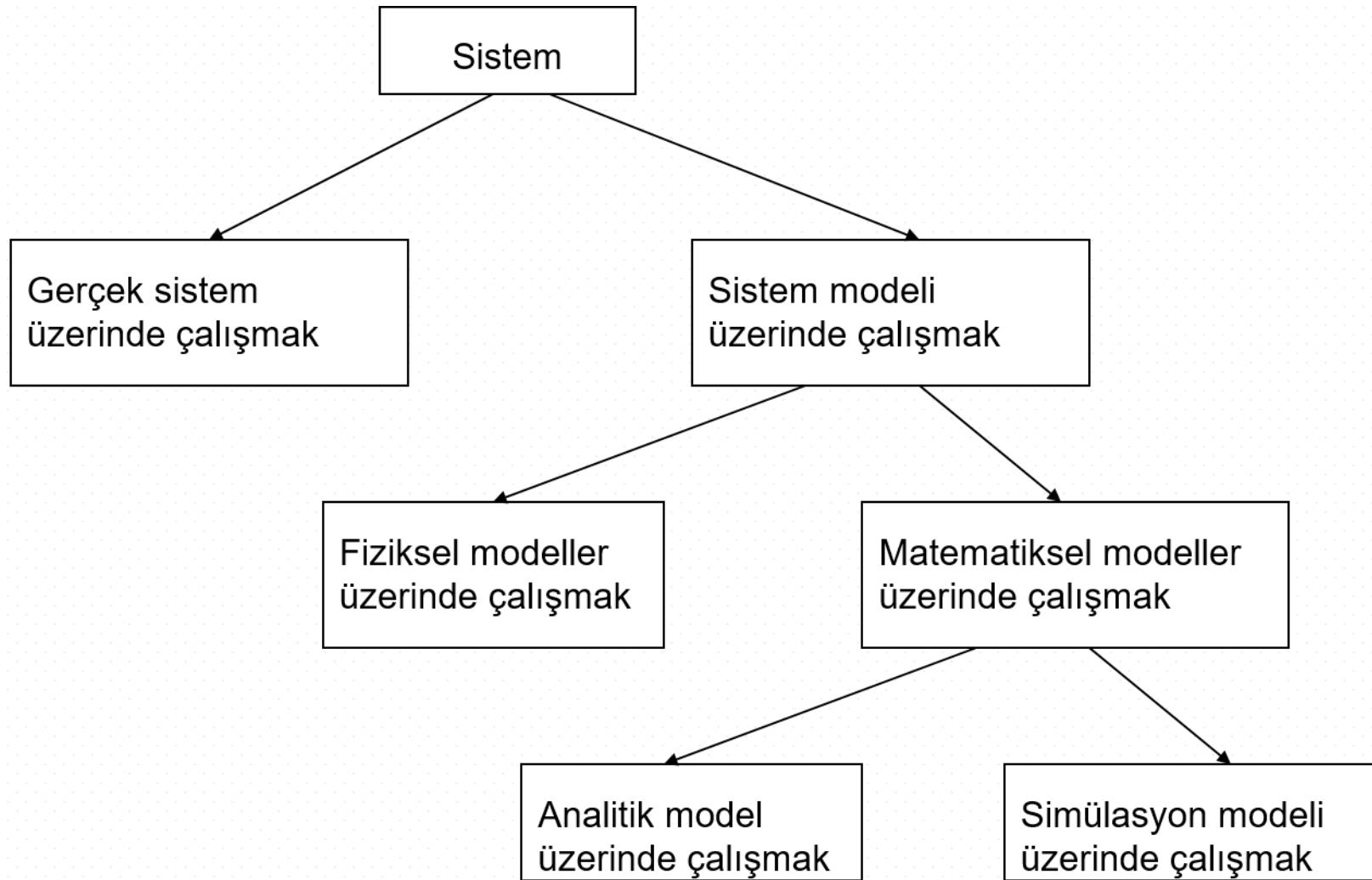
Çözümün Uygulanması ve Yorumlanması

- Hangi tür model kullanılmalı?
- Model, problemi tam olarak ifade ediyor mu?
- Model çok mu karmaşık?

Model geliştirmek

- Problemin kolayca çözülebilecek bir yapıya oturtulması gerekmektedir
- **Model nedir?**
- Bir sistemin değişen koşullar altındaki davranışlarını incelemek, kontrol etmek ve geleceği hakkında varsayımlarda bulunmak amacıyla elemanları arasındaki bağlantıları kelimeler veya matematiksek terimlerle belirleyen ifadeler topluluğuna model denir

Model geliştirmek



Model geliştirmek

- Her modelin kuruluş amacı, belirli bir ekonomik sistemi yönetmekte görevli kişi veya kişilere (karar vericiye) mümkün karar seçeneklerini sunmak, bunların sonuçlarını belirlemek ve karşılaştırmalar yapmaktadır
- Yöneylem araştırmasının karar vermeye en önemli katkısı matematiksel modellerdir
- Bir sistemin davranışlarıyla ilgili kuralların matematiksel olarak ifade edilmesiyle matematiksel modeller kurulur
- Eğer ele alınan sistem matematiksel modellerle çözülemeyecek kadar karmaşık bir yapıya sahipse sistemin bir simülasyon modeli kurulur.
- Simülasyon, bir sistemin tüm çalışma zamanı boyunca davranış şéklinin bilgisayar ortamında taklit edilmesidir

Matematiksel modellerin elemanları

- Ekonomik sistemlerin matematiksel modellerinde kullanılan elemanlarını üç ana grupta toplamak mümkündür:
 - Amaç fonksiyonu**
 - Karar değişkenleri**
 - Kısıtlar**
- Bir karar verme durumunda ilgilenilen sistem dikkatli bir şekilde gözlemlenir ve değerleri kontrol edilebilen ve sistemin performansını etkileyen parametreler belirlenir. Bu parametreler yöneticilerin kontrolü altındadır ve **karar değişkenleri** olarak tanımlanırlar. Bir üretim sisteminde farklı ürünlerin üretilecek miktarları, bir yerden başka yere taşınacak ürün miktarı, işçi sayısı, makina sayısı vb
- Karar değişkenlerinin amaç üzerindeki etkilerinin analitik olarak gösterilmesiyle **amaç fonksiyonu** oluşturulur
- Kısıtlar**, sistemin içinde bulunduğu koşullardan kaynaklanmaktadır (talep kısıtları, kapasite kısıtları gibi)

Problemin Tanımlanması

Sistemin Gözlenmesi

**Problemin
Modelinin Geliştirilmesi**

Modelin Çözülmesi

Modelin Geçerliliğinin Gösterilmesi

Çözümün Uygulanması ve Yorumlanması

- En uygun çözüm tekniği nedir?
 - Analitik çözüm
 - Algoritmalar
 - Simülasyon
 - Sezgisel

Modelin çözülmesi

- **Analitik çözüm:** Problemin Lagrange çarpanları, diferansiyel ve integral hesapları ile koşullu en iyi çözümünün bulunmasıdır. Analitik çözümde sadece matematiğin değil iktisat teorisinin de temel kuralları kullanılır
- **Algoritma çözümü:** Analitik çözüm bazen çok zor veya imkansız olabilir. Belirli bir sıra içerisinde gerçekleştirilen matematiksel ve mantıksal işlemler kümese “algoritma” denir. Yinelemeli olarak uygulanan algoritmalar her adımda optimuma daha yakın bir çözüme doğru ilerler
- **Simülasyon çözümü:** Problem, analitik olarak veya algoritmalarla çözülemiyorsa kullanılır. Sistemin davranış şekli bilgisayar ortamında taklit edilir
- **Sezgisel çözüm:** Problem optimum çözümü bulunamayacak kadar karmaşıksa, sezgisel yöntemler sezgiye veya bazı deneysel kayıtlara dayanan karar kuralları ile belirli sayıda adımdan sonra en iyi olmasa da tatminkar bir sonuç verirler

Problemin Tanımlanması

Sistemin Gözlenmesi

**Problemin
Modelinin Geliştirilmesi**

Modelin Çözülmesi

Modelin Geçerliliğinin Gösterilmesi

Çözümün Uygulanması ve Yorumlanması

- Modelden elde edilen çıktılar sistemin kendisinden elde edilen çıktılarla uyusuyor mu?
- Modelden elde edilen çıktılar mantıklı mı?
- Model hatalı olabilir mi?

Modelin geçerliliğinin gösterilmesi

- Modelden elde edilen çözümü uygulamaya koymadan önce gerçeğe uygunluğunun kanıtlanması gereklidir
- Eğer çözüm sistemin geçmiş dönem sonuçlarını aynen veya daha olumlu bir şekilde sağlıyorsa, modelin geçerli olduğu kabul edilir
- Eğer sistemin geçmiş dönem sonuçları yoksa simülasyondan yararlanılır
- Model geçerliliğinin kanıtlanması bir başka yol olarak da sistemdeki deneyimli kişilerin görüşlerine başvurulabilir

Problemin Tanımlanması

Sistemin Gözlenmesi

**Problemin
Modelinin Geliştirilmesi**

Modelin Çözülmesi

Modelin Geçerliliğinin Gösterilmesi

Çözümün Uygulanması ve Yorumlanması

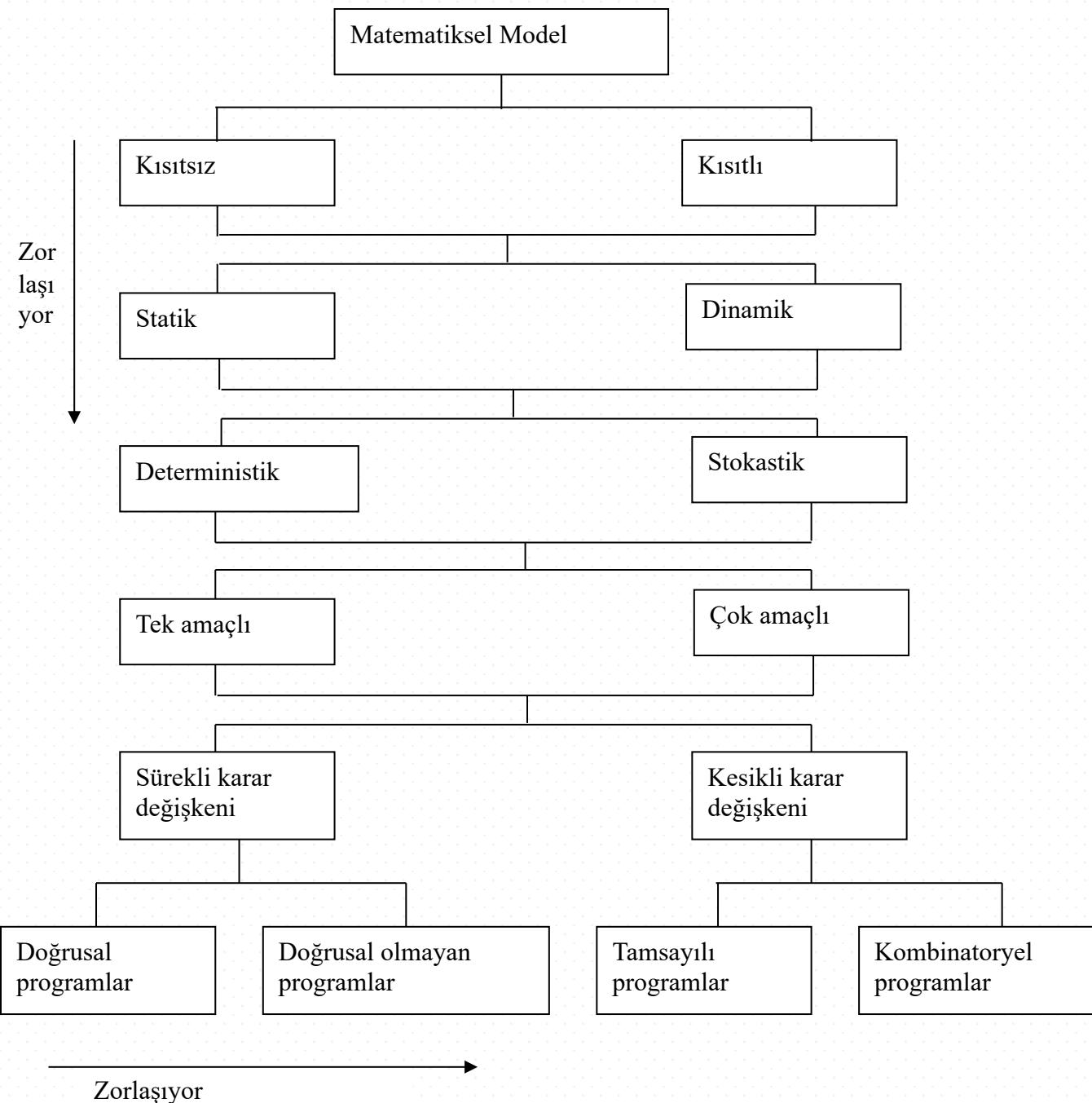
- Yöneylem araştırması ekibi, uygulama sürecini açıklamalı ve uygulamada yardımcı olmalıdır
- Uygulamanın nasıl yapılacağı bir rapor halinde yönetime sunulmalıdır

Başarılı Yöneylem Araştırması Uygulamaları

Şirket	Yıl	Problem	Kullanılan Teknik	Yıllık Tasarruf
Hewlett Packard	1998	Üretim hattında ara stok tasarımları	Kuyruk Modelleri	\$280 million
Taco Bell	1998	İşgücü çizelgelemesi	Tamsayılı Programlama, Tahmin, Simülasyon	\$13 million
Proctor & Gamble	1997	Üretim ve dağıtım sisteminin yeniden tasarlanması	Ulaştırma Modelleri	\$200 million
Delta Airlines	1994	Uçakların rotalara atanması	Tamsayılı Programlama	\$100 million
AT&T	1993	Çağrı merkezi tasarımları	Kuyruk modelleri, Simülasyon	\$750 million
Yellow Freight Systems, Inc.	1992	Nakliye şebekelerinin tasarımları	Şebeke Modelleri, Tahmin, Simülasyon	\$17.3 million
San Francisco Police Dept.	1989	Devriye çizelgeleme	Doğrusal Programlama	\$11 million
Bethlehem Steel	1989	Külçe kalıbü tasarımları	Tamsayılı Programlama	\$8 million
North American Van Lines	1988	Yükleri şoför'lere atamak	Şebeke Modelleme	\$2.5 million
Citgo Petroleum	1987	Rafineri operasyonları & dağıtım	Doğrusal Programlama, Tahmin	\$70 million
United Airlines	1986	Rezervasyon personelinin çizelgelenmesi	Doğrusal Programlama, Kuyruk, Tahmin	\$6 million
Dairyman's Creamery	1985	Optimum üretim seviyeleri	Doğrusal Programlama	\$48.000
Phillips Petroleum	1983	Ekipman yenileme	Şebeke Modelleme	\$90.000

Matematiksel model türleri

- Yöneylem araştırmasında karşılaşılabilecek matematiksel model türleri, ilgilenilen karar probleminin yapısına göre şekillenir



Matematiksel model türleri

- Eğer karar değişkenleri üzerinde hiçbir sınırlama yoksa kısıtsız modeller ortaya çıkar, en azından bir sınırlama olması kısıtlı modelleri ortaya çıkarır. Gerçek hayatı genellikle kısıtlı problemler karşımıza çıkar.
- Eğer problem tek bir dönem için çözülecekse statik model, birden fazla dönem göz önüne alınarak çözülecekse dinamik model ortaya çıkar.
- Eğer birden fazla amaç varsa çok amaçlı problemler ortaya çıkar.
- Eğer tüm karar değişkenleri pozitif reel (gerçel) değerler alıyorsa sürekli optimizasyon problemi söz konusudur
- Tüm karar değişkenlerinin tamsayı değerler alması gerekiyorsa kesikli optimizasyon problemi ortaya çıkar
- Bazı karar değişkenlerinin reel, bazılarının tamsayı değer alması durumunda ise karışık kesikli optimizasyon problemi ile karşılaşırız.
- Eğer karar değişkenlerinin kombinatoryal seçenekleri söz konusuysa kombinatoryal optimizasyon problemleri ortaya çıkar.

Matematiksel model türlerine göre kullanılan çözüm yaklaşımları

- Dinamik modeller için kullanılan yaklaşım dinamik programlamadır.
- Eğer optimize edilecek birden fazla amaç varsa genellikle kullanılan yaklaşım hedef programlamadır.
- Modeldeki tüm fonksiyonların doğrusal olması durumunda sürekli optimizasyon problemleri doğrusal programlama yöntemi ile çözülür. Sürekli optimizasyon modelinde en azından bir fonksiyonun doğrusal olmaması durumundaysa doğrusal olmayan programlama yöntemi kullanılır.
- Eğer kesikli optimizasyon problemlerinde karar değişkenleri herhangi bir tamsayı değer alıyorsa tamsayılı programlama yöntemi kullanılır.
- Kombinatoryal optimizasyon problemlerinin belirli bir boyuta kadar olanı tamsayılı programlama yöntemi ile çözülürken, orta ve büyük boyutlu problemlerin sezgisel yöntemlerle çözülmesi gerekmektedir.

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

TAMSAYILI PROGRAMLAMA

Tamsayılı Programlama

Doğrusal programlamanın bölünebilirlik varsayıımı göz ardı edildiğinde, diğer bütün varsayımlar aynı kalmak koşuluyla, doğrusal programlama tamsayılı doğrusal programlamaya dönüşür. Kısaca tamsayılı programlama, model değişkenlerinden bazılarının veya hepsinin tamsayı değerleri alması koşulunu içeren bir programlama türüdür.

Tamamen Tamsayılı Doğrusal Programlama

Bütün değişkenleri tamsayı olan doğrusal programlamaya "tamamen tamsayılı doğrusal programlama" denir. Tamamen tamsayılı programlamaya örnek olmak üzere aşağıdaki modeli göz önünde bulunduralım.

$$Z_{\text{enb}} = 3x_1 + 6x_2$$

$$4x_1 + 3x_2 \leq 10$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

x_1, x_2 tamsayı

Karma Tamsayılı Doğrusal Programlama

Değişkenlerden bazılarının tamsayı değerler alması durumunda "karma tamsayılı doğrusal programlama" söz konusu olur. Sözgelimi, aşağıdaki problemde x_2 tamsayı olmadığından, problem karma tamsayılı doğrusal programlama problemidir.

$$Z_{\text{enb}} = 3x_1 + 2x_2 + 4x_3$$

$$x_1 + x_2 \leq 4$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 6$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

x_1, x_3 tamsayı

Sıfır-1 Programlama

Tamsayılı programlama problemlerinin çoğunda değişkenlerin bir kısmı veya hepsi sıfır veya 1 değeri ile sınırlanır. Bunun nedeni, tamsayı karar değişkeninin (x_i) genellikle bir faaliyetin yapılması ($x_i = 1$) veya yapılmaması ($x_i = 0$) ile ilgili olmasıdır. Bu gibi durumlarda "sıfır-1 programlama" söz konusu olur.

Gevşek Biçim

Tamsayı olma koşulu göz ardı edildiğinde ortaya çıkan programlamaya, tamsayılı doğrusal programlamanın "doğrusal programlamaya gevşetilmiş biçimi" veya kısaca "gevşek biçim" denir.

Tamsayılı programlamanın en iyi çözümü ile buna ilişkin gevşek biçimin en iyi çözümü arasındaki ilişki tamsayı problemlerinin çözüm sonuçlarının incelenmesi bakımından çok önemlidir. Bu ilişki, "herhangi bir en küçükleme amaçlı tamsayılı programlamanın amaç fonksiyonunun en iyi değeri, kendisine karşılık gelen doğrusal programlamanın amaç fonksiyonunun en iyi değerine eşit veya küçüktür" şeklinde özetlenebilir. (Üst sınır)

Problem en küçükleme amaçlı olduğunda bu ilişki, tamsayılı programlama probleminin en iyi çözüm değeri kendisine karşılık gelen gevşek problemin en iyi çözüm değerine eşit veya ondan büyük olur şeklinde açıklanır. (Alt sınır)

Örnek

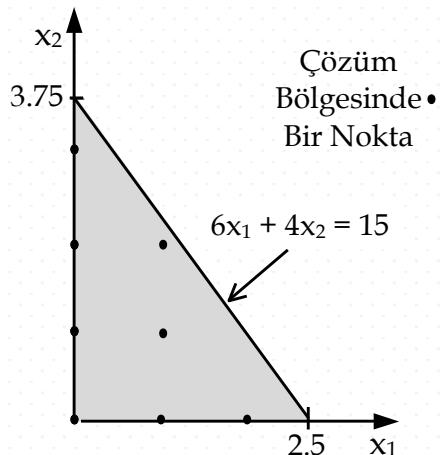
$$Z_{\text{enb}} = 10x_1 + 8x_2$$

$$6x_1 + 4x_2 \leq 15$$

negatif olmama ve tamsayıllılık koşulu,

$x_1, x_2 \geq 0$ ve tamsayı

Problemin grafik çözümü Şekil 5.1'de gösterilmiştir.



Şekil 5.1

Gevşek biçimin uygun çözüm bölgesi Şekil 5.1'deki gri alan olup, en iyi çözüm; $x_1 = 0, x_2 = 3.75, Z_{\text{enb}} = 30$ olarak belirlenmiştir. Buna göre 30, tamsayılı problemin en iyi çözümü için üst sınırdır. Şekil 5.1'den görüleceği gibi tamsayılı programlamanın çözüm bölgesi doğrusal programlamanın çözüm bölgesinden farklıdır.

Çözüm

Bu noktaların koordinatlarının belirlenmesiyle tamsayılı probleminin uygun çözüm kümesi,

$$S = \{(0, 0), (0, 1), (0, 2), (0, 3), (1, 0), (2, 0), (1, 1), (1, 2)\}$$

Olarak düzenlenir.

Problemin nitelidine göre, amaç fonksiyonu değerini en büyük veya en küçük yapan nokta en iyi çözüm noktasıdır. Hesaplanan Z değerleri, aşağıda gösterilmiştir.

$$Z(0, 0) = 10(0) + 8(0) = 0$$

$$Z(0, 1) = 10(0) + 8(1) = 8$$

$$Z(0, 2) = 10(0) + 8(2) = 16$$

$$Z(0, 3) = 10(0) + 8(3) = 24$$

$$\mathbf{Z(1, 2) = 10(1) + 8(2) = 26}$$

$$Z(1, 0) = 10(1) + 8(0) = 10$$

$$Z(2, 0) = 10(2) + 8(0) = 20$$

$$Z(1, 1) = 10(1) + 8(1) = 18$$

Tamsayılı Programlama Çözüm Yöntemleri

Tamsayılı doğrusal programlama problemlerinin çözümünde kullanılan belli başlı yöntemler; dal-sınır algoritması ile Gomory kesme düzlemi algoritmasıdır. Herhangi bir tamsayılı programlamanın gevşek biçiminin en iyi çözümünde tamsayı olması istenen değişkenlerin hepsi tamsayı ise, bu çözüm tamsayılı programlamanın da en iyi çözümü olur. Bu durumu aşağıdaki basit problemin çözümü üzerinde gösterelim.

$$Z_{\text{enb}} = 8x_1 + 12x_2$$

$$x_1 + x_2 \leq 3$$

$$x_1, x_2 \geq 0,$$

x_1, x_2 tamsayı

Gevşek problemin en iyi çözümü,

$x_1 = 0, x_2 = 3, Z_{\text{enb}} = 36$ şeklinde belirlenmiştir.

Gevşek problemin uygun çözüm bölgesi

Şekil 5.2'de OAB üçgen alanıyla, tamsayılı problemin çözüm noktaları ise (\square) ile gösterilmiştir.



Şekil 5.2

Dal-Sınır Algoritması

Dal-sınır algoritması hem tamamen tamsayılı hem de karma tamsayılı programlama problemlerinin çözümünde kullanılabilen genel bir yaklaşımındır.

Örnek 5.8: Aşağıdaki problemi dal-sınır algoritmasıyla çözünüz .

$$Z_{\text{enb}} = 7x_1 + 3x_2$$

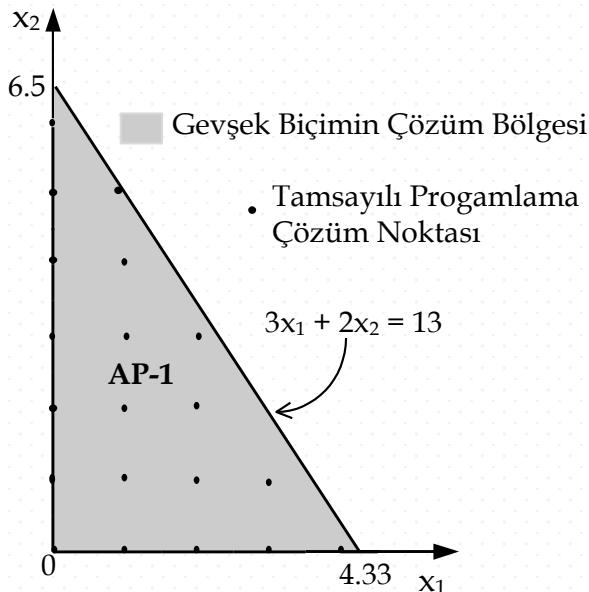
$$3x_1 + 2x_2 \leq 13$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

x_1, x_2 tamsayı

Çözüm 5.8

Çözüm 5.8: Dal-sınır algoritmasının ilk adımı tamsayılı problemi gevsetmek (tamsayı olma koşulunu göz ardı etmek) ve bu problemin en iyi çözümünü bulmaktadır. Problemin normal doğrusal programlamaya dönüştürülmüş biçimi alt problem 1 (AP-1) olarak isimlendirilir. AP-1'in en iyi çözümünde tamsayı olması istenen değişkenler tamsayı iseler, bu çözüm tamsayı problemin de en iyi çözümü olur. AP-1 için en iyi çözüm, $x_1 = 4.33$, $x_2 = 0$, $Z_{\text{enb}} = 30.333$ (bkz. Şekil 5.3) olarak elde edilmiştir.



Şekil 5.3

AP-1'in en iyi çözümü tamsayılı olmadığından dal sınır algoritmasıyla orijinal problemin en iyi çözümü bulununcaya kadar çözüm bölgesinin düzenlenmesine devam edilir.

Çözüm 5.8

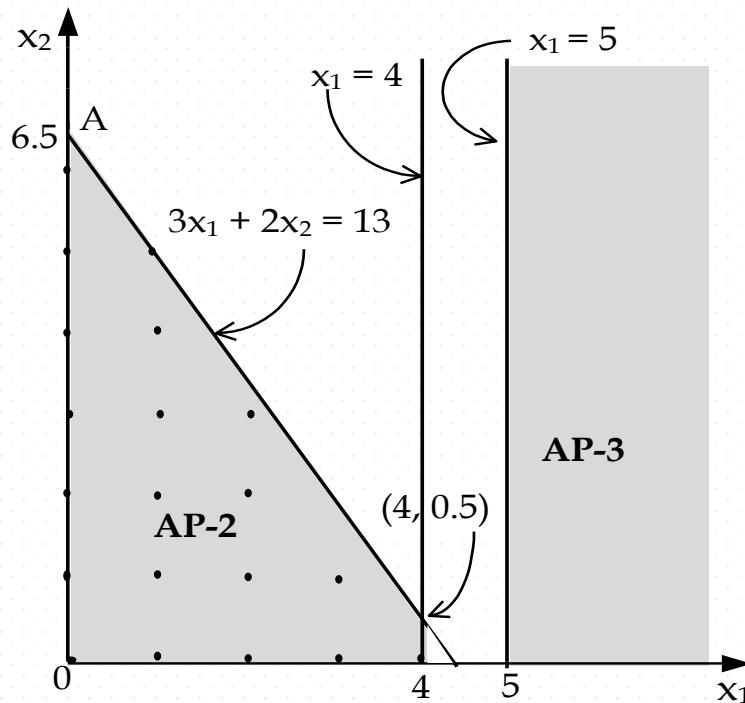
Yöntemin yeni adımı, gevşek problemin çözüm bölgesini parçalara ayırmaktır. Bu yolla tamsayılı problemin en iyi çözümünün araştırılacağı alan küçültülmüş olur. Parçalama işleminde, tamsayı olması istenen ama tamsayı olmayan değişkenlerin seçilmesi esastır. Gevşek biçimin en iyi çözümünde x_2 tamsayı olduğundan, parçalama işlemi için tamsayı olmayan x_1 'in seçilmesi gereklidir. x_1 'in tamsayı olmayan (4.333) çözüm değerine en yakın iki tamsayı 4 ve 5'dir. Tamsayılı programlananın çözüm bölgesindeki her nokta $x_1 \leq 4$ veya $x_1 \geq 5$ koşulunu sağlamalıdır. Bu ikiye ayırma koşulu dallanma kavramının öne çıkmasına neden olur. $x_1 \leq 4$ veya $x_1 \geq 5$ şeklindeki parçalama işlemi 4.333 değerine ikinci kez rastlama şansını ortadan kaldırır. Kısaca, $x_1 \leq 4$ veya $x_1 \geq 5$ belirlemesiyle, yani x_1 'in dallandırılmasıyla gevşek biçimin çözüm bölgesi iki parçaaya ayrılmış olur. Parçalar aşağıda tanımlanmış olan farklı alt problemlere karşılık gelir.

Çözüm 5.8

$$AP-2: AP-1 + x_1 \leq 4$$

$$AP-3: AP-1 + x_1 \geq 5$$

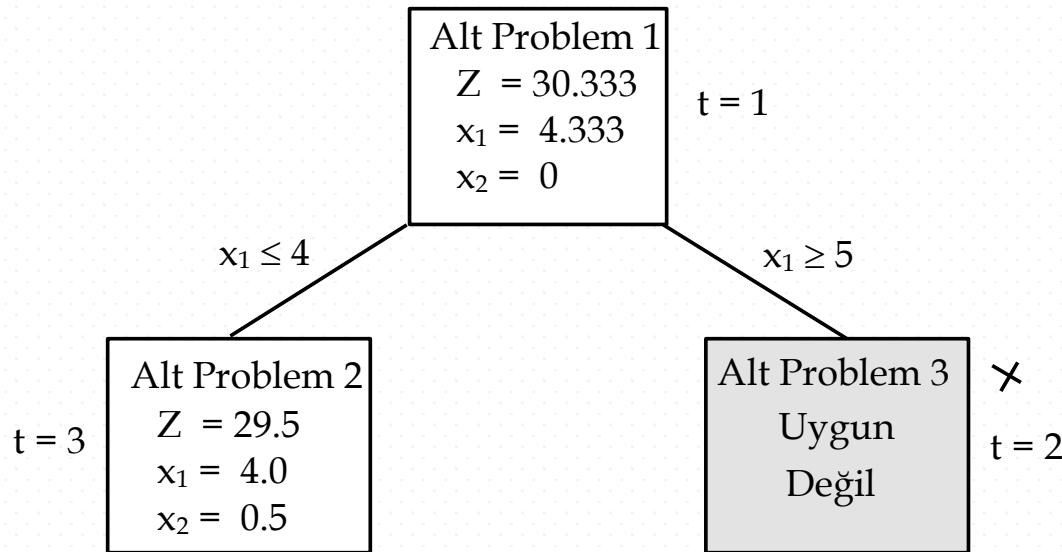
Özetle AP-1, biri AP-2 diğeri AP-3 olmak üzere iki problemle yer değiştirmiştir. Ne AP-2 ne de AP-3 $x_1 = 4.333$ değerini içerir. Şekil 5.4'de gösterildiği gibi gevşek biçimde en iyi çözümü bir daha ortaya çıkamaz.



Şekil 5.4

Şekilden görüldüğü gibi, AP-3'ün çözüm bölgesi ile AP-1'in çözüm bölgesinin hiçbir ortak noktası olmadığından AP-3'den elde edilecek herhangi bir çözüm uygun olmayacağındır. Bu nedenle, AP-3'den hareketle belirlenecek bir çözüm en iyi olamaz. Bunu ifade etmek için uygun çözümü olmayan alt problemler \times ile işaretlenir (bkz. Şekil 5.5). AP-3'ün dallandırılması tamsayı çözüm hakkında bilgi sağlamayacağından, bundan sonraki işlemlerde AP-3'ün dikkate alınmasına gerek yoktur. AP-2'ye geçelim. AP-2'nin en iyi çözümü; $x_1 = 4$, $x_2 = 0.5$ ve $Z_{\text{enb}} = 29.5$ olarak belirlenmiştir.

Su ana kadar yapılanlar Şekil 5.5'de özetlenmiştir. Görüldüğü gibi her bir alt probleme bir düğüm, alt problem yaratmada kullanılan her bir kısıtlayıcıya bir dal karşılık gelmektedir. Bir alt problemi diğerinden ayıran kısıtlayıcı, ilgili alt problemler arasındaki dal üzerine yazılmaktadır. Ayrıca alt problemlerin hangi sırada çözüldükleri düğümlerin yan taraflarına $t = \text{sıra no}$ şeklinde belirtilmektedir.



Şekil 5.5

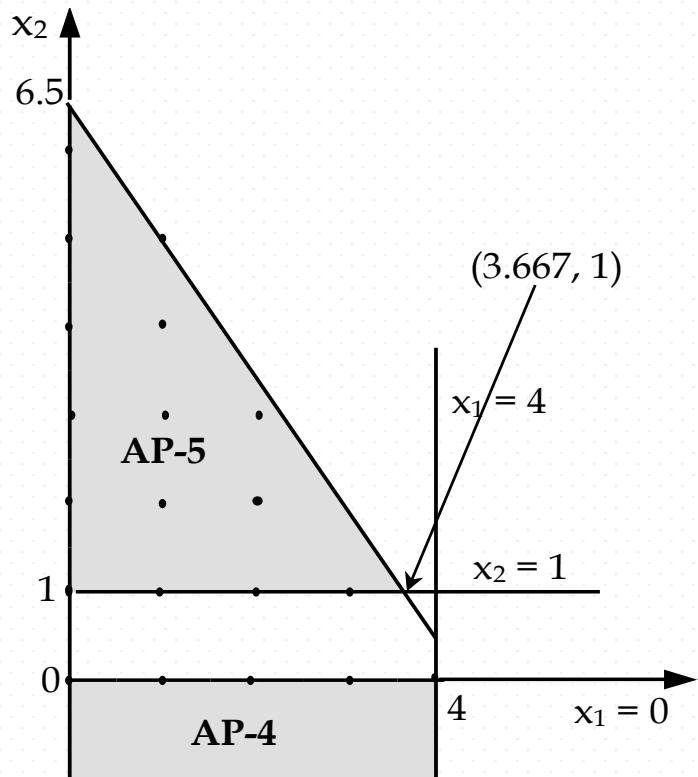
AP-2'nin en iyi çözümünde; x_2 tamsayı olmadığını, x_2 dallandırma değişkeni olur. Dallandırma ile AP-2'nin uygun çözüm bölgesi, $x_2 \leq 0$ ve $x_2 \geq 1$ noktalarını kapsayan iki bölgeye ayrıılır.

Bu yolla yaratılan yeni problemler (AP-4 ve AP-5) aşağıda ve bunların çözüm bölgeleri Şekil 5.6'da gösterilmiştir.

$$\text{AP-4: } \text{AP-1} + x_1 \leq 4 + x_2 \leq 0 = \text{AP-2} + x_2 \leq 0$$

$$\text{AP-5: } \text{AP-1} + x_1 \leq 4 + x_2 \geq 1 = \text{AP-2} + x_2 \geq 1$$

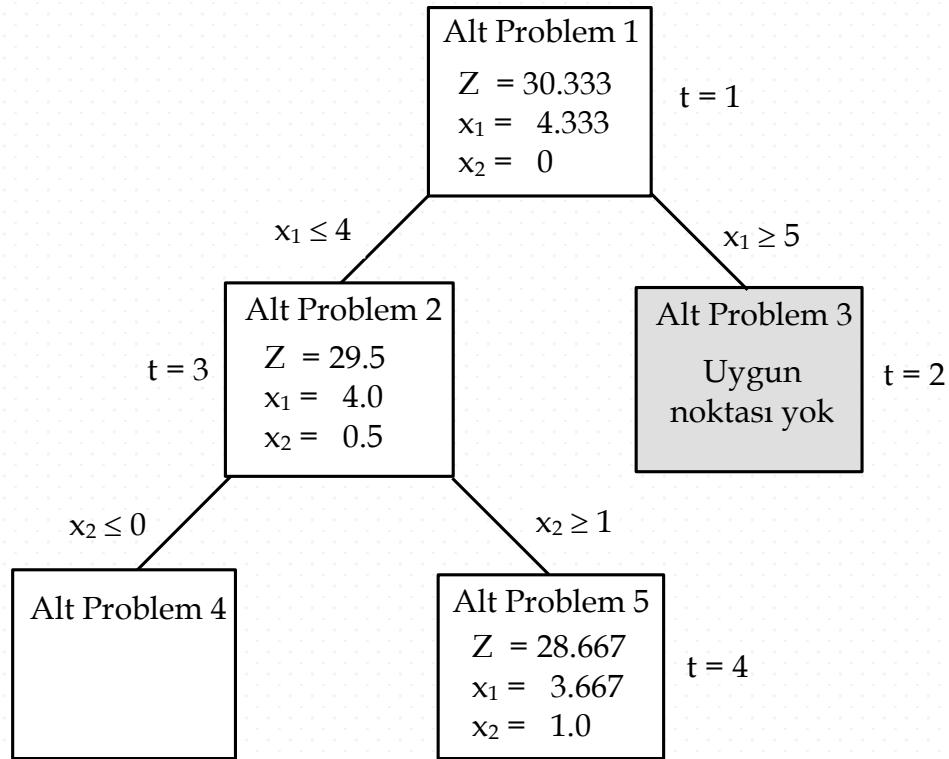
Çözülmemiş problemler AP-4 ile AP-5'dir. Çözüm için en yeni olan AP-5 seçilecektir.



Şekil 5.6

AP-5'in en iyi çözümü; $x_1 = 3.667$, $x_2 = 1$ ve $Z_{\text{enb}} = 28.667$ 'dir.

Alt problemler ve çözüm sonuçları Şekil 5.7'de gösterilmiştir.



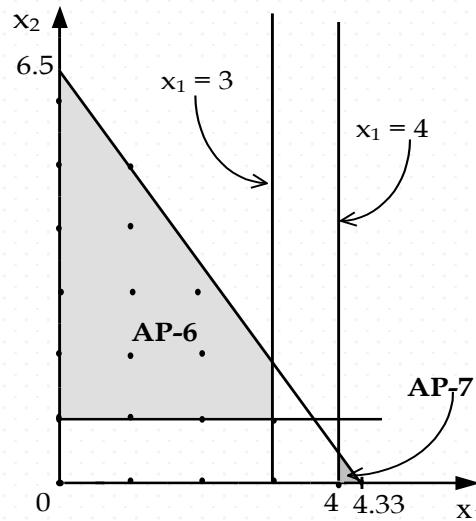
Şekil 5.7

AP-5'in çözümünde x_1 tamsayı olmadığından, ($x_1 = 3.667$) AP-4'ü çözmeden önce x_1 dallandırılır. $x_1 \leq 3$ 'le belirlenen AP-6 ve $x_1 \geq 4$ 'le belirlenen AP-7 aşağıda gösterilmiştir.

$$AP-6: AP-1 + x_1 \leq 4 + x_2 \geq 1 + x_1 \leq 3 = AP-5 + x_1 \leq 3$$

$$AP-7: AP-1 + x_1 \leq 4 + x_2 \geq 1 + x_1 \geq 4 = AP-5 + x_1 \geq 4$$

AP-6 ve AP-7'nin uygun çözüm bölgeleri Şekil 5.8'de gösterildiği gibidir.

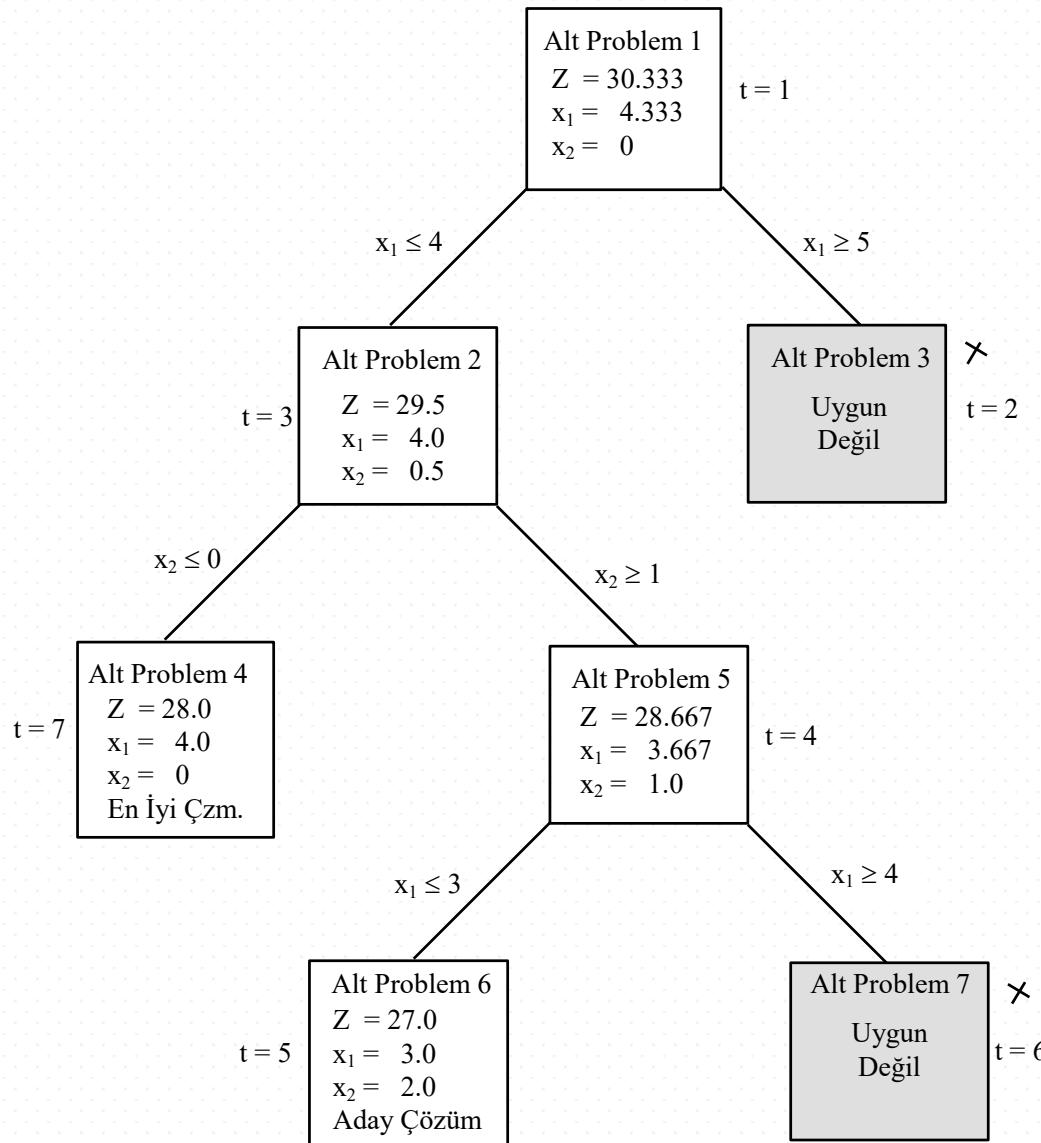


Şekil 5.8

İkisi yeni (AP-6 ve AP-7), diğeri önceden tanımlanmış ve hala çözülmemiş olan (AP-4) üç alt problem vardır. Yukarıda açıklandığı gibi alt problemlerin çözümüne en yeni olandan başlanır. En yeni olanlar arasından seçim rastgele yapılır. Biz AP-6'yı seçelim. AP-6'nın en iyi çözümü $x_1 = 3$, $x_2 = 2$ ve $Z_{\text{enb}} = 27$ olarak belirlenmiştir (bkz. Şekil 5.9). Çözümde değişkenler tamsayı olduklarından AP-6'dan sağlanan çözüm tamsayılı problemin en iyi çözümü olmaya adaydır. Z 'nin 27 olarak belirlenen değeri, bundan sonra çözülecek alt problemlerin Z değerleri için bir alt sınır oluşturur. Yani, bu aşamadan sonra elde edilecek bir çözümün en iyi olabilmesi için Z değeri en az 27'ye eşit olmalıdır.

Çözülmemiş iki alt problemin daha bulunduğu bu aşamada, son giren ilk çıkar kuralı doğrultusunda, AP-7 seçilmelidir. AP-7'nin çözümü uygun olmadığından, çözülmemiş tek alt problem olan AP-4'e geçilir. AP-4'ün en iyi çözümü $x_1 = 4$, $x_2 = 0$ ve $Z_{\text{enb}} = 28$ olarak belirlenmiştir. Bu çözüm de (değişkenler tamsayı olduğunu) tamsayılı problemin en iyi çözümü olmaya adaydır. Ayrıca AP-4 için belirlenen $Z = 28$ değeri AP-6 için belirlenen çözümün en iyi olmadığını işaret etmektedir. İki aday çözümün belirlendiği bu problemde en büyük Z değerini veren çözüm AP-4'ün çözümüdür.

Tüm alt problemler ve çözümleri Şekil 5.9'da özetlenmiştir.



Kesme Düzlemi Algoritması

Tamsayılı programlama problemlerinin çözümünde kullanılan diğer bir teknik kesme düzlemi algoritmasıdır. Dal-sınır algoritmasında olduğu gibi, kesme düzlemi algoritması uygulamasına da tamsayılı problemin gevşetilmiş biçiminin en iyi çözümüyle başlanır. Bu en iyi çözümde, tamsayı olması istenen değişkenler tamsayı iseler tamsayılı problem çözülmüş olur. Gevşek problemin en iyi çözümü tamsayılı programlamanın en iyi çözümü olma özelliğini taşımıyorsa, kesme düzlemi algoritması uygulamasına geçilebilir. Kesme düzlemi algoritmasında da, dal-sınır algoritmasında olduğu gibi, tekrarlı bir şekilde özel kısıtlayıcılar ekleyerek çözüm uzayında gerekli düzeltmeler yapılır. Özel kısıtlayıcı ekleme işlemi tamsayı olma koşulunu gerçekleyecek bir en iyi çözüme ulaşılincaya deðin sürdürülür.

Örnek 5.11

Kesme düzlemi algoritmasının nasıl kullanılacağını dal-sınır yöntemi ile çözülen örnek 5.8'deki problem üzerinde açıklayalım.

Örnek 5.11: Aşağıdaki problemi kesme düzlemi algoritmasıyla çözünüz.

$$Z_{\text{enb}} = 7x_1 + 3x_2$$

$$2x_1 + x_2 \leq 9$$

$$3x_1 + 2x_2 \leq 13$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

x_1, x_2 tamsayı

Çözüm 5.11

Çözüm 5.11: Kesme düzlemi algoritması klasik doğrusal programlama probleminin simpleks yöntemle elde edilen en iyi çözüm tablosundan işe başlar. Tamsayı olma koşulunun göz ardı edilmesiyle belirlenen gevşek problemin en iyi çözümünün yer aldığı simpleks çözüm tablosu aşağıda gösterilmiştir.

Tablo 5.10

TDV	x_1	x_2	S_1	S_2	ÇV
S_1	0	-0.333	1	-0.667	0.333
x_1	1	0.667	0	0.333	4.333
Z_j	7	4.669	0	2.331	30.333
$Z_j - C_j$	0	1.669	0	2.331	-

Elde edilen en iyi çözümde, $x_2 (= 0)$ tamsayı olmakla birlikte, $x_1 (= 4.333)$ tamsayı olmadığından bu çözüm aranan en iyi çözüm olamaz. Tamsayılı programlamanın en iyi çözümü için ek bir kısıtlayıcı koşul yaratılması gereklidir. Bunun için öncelikle tamsayı olması istenen ancak çözüm değeri tamsayı olmayan değişken(ler) belirlenir. Birden fazla değişken arasından seçim yapılacak olmasında, kesirli kısmı en büyük olan değişkenin seçilmesi uygun olur.

Çözüm 5.11

Burada yalnızca x_1 değişkeni temelde bulunduğuundan, bu değişkene ilişkin kısıtlayıcı koşul yaratılacağı açıktır. Tablo 5.10'daki sonuç değerlerinden yaratılan denklem aşağıda gösterilmiştir.

$$(1)x_1 + (0.667)x_2 + (0)S_1 + (0.333)S_2 = 4.333$$

Bu kısıt,

$$(1 + 0)x_1 + (0 + 0.667)x_2 + (0)S_1 + (0 + 0.333)S_2 = 4 + 0.333$$

veya

$$(1 + 0)x_1 + (0)x_2 + (0.667)x_2 + (0)S_1 + (0)S_2 + (0.333)S_2 = 4 + 0.333$$

Şeklinde yazılabilir.

Katsayıları tamsayı olan bütün terimlerin eşitliğin sol tarafında, diğerlerinin eşitliğin sağ tarafında gösterilmesiyle ulaşılan eşitlik aşağıda gösterilmiştir.

$$(1)x_1 + (0)x_2 + (0)S_1 + (0)S_2 - 4 = 0.333 - (0.667)x_2 - (0.333)S_2 \quad 5.7$$

5.7'nin sağ tarafı için,

$$0.333 - (0.667)x_2 - (0.333)S_2 \leq 0 \quad 5.8$$

yazılabilir.

Kesme

5.8 ile açıklanan fonksiyona "kesme" denir. Kesme düzlemi algoritmasının esasını oluşturan kesmenin iki önemli özelliği aşağıda açıklanmıştır.

1. Tamsayılı programlama için uygun olan bir nokta kesmeyi sağlar
2. Gevşek biçim için en iyi olduğu belirlenen nokta kesmeyi sağlamaz.

Bu iki özelliğinden dolayı bir kesme, gevşek problemin en iyi çözümünü dışında bırakırken, tamsayılı programmanın uygun çözümlerine dokunmaz. Kesme oluşturmada kullanılan değişkenin tamsayıya ulaşırılabilmesi için kesmenin, gevşek biçimin en iyi çözümünün bulunduğu simpleks tablosuna yeni bir kısıtlayıcı olarak eklenmesi gereklidir. Bu eklenmeden sonra simpleks yöntemin klasik işlemleriyle tamsayı en iyi çözüm elde edildiğinde, problem çözülmüş olur. Kesme eklenmesiyle düzenlenen problemin en iyi çözümünde hala tamsayı olmayan değişken var ise, yeni bir kesme tanımlanır. Bu işlemler istenen çözüme ulaşıncaya kadar tekrarlanır.

Çözüm 5.11

Kesmenin eklenmesiyle elde edilen simpleks çözüm tablosu aşağıda gösterilmiştir.

Tablo 5.11

TDV	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	ÇV
S_1	0	-0.333	1	-0.667	0	0.333
x_1	1	0.667	0	0.333	0	4.333
S_3	0	-0.667	0	-0.333	1	-0.333
Z_j	7	4.669	0	2.331	0	30.333
$Z_j - C_j$	0	1.669	0	2.331	0	-

Tablo 5.11'den görüldüğü gibi eklenen kesme çözümün en iyi olma olmasını (tüm $Z_j - C_j \geq 0$) etkilememiştir. Ancak, S_3 'ün negatif olması çözümün uygun olmamasına yol açmıştır. Uygun çözüm için dual simpleks yöntem uygulanmalıdır. Dual simpleks yöntemin değişken seçimi kuralına göre S_3 temeli terkedelecek, en küçük oran veren x_2 girecektir. Simpleks çözümün ardışık işlemleriyle oluşturulan tablo aşağıda gösterilmiştir.

Çözüm 5.11

Tablo 5.12

TDV	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	ζV
S_1	0	0	1	-0.501	-0.499	0.499
x_1	1	0	0	0	0.999	4.0
x_2	0	1	0	0.499	-1.499	0.499
Z_j	7	3	0	1.497	2.496	29.497
$Z_j - C_j$	0	0	0	1.497	2.496	-

Tablo 5.12'deki çözüm hem en iyi hem de uygun olmakla birlikte $x_2 = 0.5$ olduğundan, tamsayılı değildir. x_2 'nin esas alınmasıyla yeni bir kesme tanımlanması zorunludur.

Kesmenin oluşturulması ve çözüm için uygun şekilde dönüştürülmesi ile ilgili işlemler aşağıda gösterilmiştir.

$$(0)x_1 + (1)x_2 + (0)S_1 + (0.499)S_2 - (1.499)S_3 = 0.499$$

$$(0.499)S_2 + (0.501)S_3 = 0.499$$

$$(0.499) - (0.499)S_2 - (0.501)S_3 \leq 0$$

$$(-0.499)S_2 - (0.501)S_3 \leq -0.499$$

$$(-0.499)S_2 - (0.501)S_3 + (1) S_4 = -0.499$$

Çözüm 5.11

Bu kısıtlayıcı koşulun en iyi çözüm tablosuna eklenmesiyle yeni çözüm tablosu aşağıdaki gibi elde edilir.

Tablo 5.13

TDV	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	S_4	ÇV
S_1	0	0	1	-0.501	-0.499	0	0.499
x_1	1	0	0	0	0.999	0	4.0
x_2	0	1	0	0.499	-1.499	0	0.499
S_4	0	0	0	-0.499	-0.501	1	-0.499
Z_j	7	3	0	1.497	2.499	0	29.497
$Z_j - C_j$	0	0	0	1.497	2.499	0	-

Tablo 5.13'den görüldüğü gibi çözüm en iyi olmakla birlikte uygun değildir. Negatif çözüm değerli S_4 'ün temelden çıkması, yerine mutlak değerce en küçük oranı veren S_2 'nin girmesi gereklidir. Gerekli işlemlerden sonra aşağıdaki tabloda gösterilen yeni çözüme ulaşılır.

Çözüm 5.11

Tablo 5.14

TDV	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	S_4	ζV
S_1	0	0	1	0	0	-1	0.999
x_1	1	0	0	0	0.999	0	4.0
x_2	0	1	0	0	-1.998	0.998	0
S_2	0	0	0	1	1.0	-2	1.0
Z_j	7	3	0	0	0.999	2.994	28.0
$Z_j - C_j$	0	0	0	0	0.999	2.994	-

Tablo 5.14'de sunulan çözümde x_1 ve x_2 tamsayı bulunmuşlardır. Böylece tamsayı çözüme ulaşılmıştır. Kesme düzlemi algoritması ile ulaşılan çözümde, $x_1 = 4$, $x_2 = 0$, $Z_{\text{enb}} = 28$ dir. Böylece dal-sınır yöntemi ve kesme düzlemi algoritması çözüm sonuçları aynı olmaktadır.

Hangi Yöntem Kullanılmalı?

Dal-sınır ve kesme düzlemi algoritmalarının hangisinin tercih edileceği konusunda genel kabul görmüş bir kanı olmadığını belirtmeliyiz. İki yöntemden hiçbirini, sürekli daha iyi (az işlem, kısa zaman) sonuç vermemektedir. Yine de deneyimler, dal-sınır algoritmasının daha başarılı olduğunu göstermektedir.

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

KARAR KURAMI

Karar Kuramı

Karar kuramı, karar vericiye karar alma ve karar sürecini geliştirme konularında yol gösteren bir yaklaşımdır. Söz konusu yaklaşım, karar verilecek duruma ilişkin bilgi miktarına göre üç başlık altında incelenir.

- a. Belirlilik durumunda karar alma
- b. Risk durumunda karar alma
- c. Belirsizlik durumunda karar alma

a. Belirlilik durumunda karar alma

Belirlilik durumunda karar almada, karar vericinin aralarından seçim yapacağı karar seçeneklerine ilişkin sonuç değerleri ile olayın yapısı hakkındaki bilgisinin eksiksiz olduğu varsayıılır. Doğal olarak en iyi sonucu verecek olan alternatif seçilir. Doğrusal programlama belirlilik durumunda karar alma probleminin bir örneğidir.

Örnek: Bunun için beslenme gereksinmemizi en düşük maliyetle karşılayacak besin maddeleri miktarlarını belirlemek istediğimizi düşünelim. Besin maddelerinin birim maliyetleri (C_j) sabit sayılar olsun. j ürünü tüketim miktarı x_j , değeri bilinen bir sabit sayı olarak kabul edildiğinde, j ürününün maliyete olan katkısı $C_j x_j$ de sabit bir sayı olur.

b. Risk durumunda karar alma

Risk durumunda problemin seçeneklerine ilişkin değerler ve olayın yapısı olasılıklar ile açıklanırken, belirsizlik durumunda sonuç değerleri bir ölçüde bilinse de olayın yapısına ilişkin olasılıklar hakkında hiçbir bilgi edinilememektedir. Özette, "belirlilik" ve "belirsizlik" verilerle ilgili bilgi derecesi bakımından iki aşırı ucu temsil ederken, "risk" bu iki uç arasında bulunur.

Örnek: Risk ve belirsizlik durumlarını açıklamak için beslenme problemi örneğine dönelim. Risk durumunda maliyet katsayısı C_j sabit sayı olma özelliğini yitirir ve kesin değeri bilinmeyen ancak, istendiğinde değeri ilgili olasılık yoğunluk fonksiyonu cinsinden açıklanabilen bir rasgele değişken olur. Buna göre C_j , olasılık yoğunluk fonksiyonu $f(C_j)$ ile gösterilen bir rasgele değişken olarak tanımlanabilir. Bu durumda, kendisine ait bir olasılık yoğunluk fonksiyonu tanımlanmaksızın, C_j hakkında konuşmak fazla anlamlı olmaz. Bunun sonucunda, x_j 'nin belirli bir değeri için j 'inci değişkenin kara olan katkısı $C_j x_j$ 'de kesin değeri bilinmeyen bir rasgele değişken olur.

c. Belirsizlik durumunda karar alma

- Belirsizlik durumunda ise, $f(C_j)$ olasılık yoğunluk fonksiyonu bilinmez veya belirlenemez. Ancak, bu konudaki bilgi eksikliği problem hakkında hiçbir bilgi yoktur şeklinde yorumlanmamalıdır. Sözgelimi, karar verici C_j 'nin değerlerinden birine eşit olduğunu bilebilir ancak, bu bilgi duruma ilişkin olasılıkların belirlenmesinde yetersiz kalır. Bu durum belirsizlik ortamında karar alma durumudur. Karar probleminin nasıl formüle edileceği ve çözüleceği doğrudan doğruya karar verenin problemin bileşenleri hakkındaki bilgi derecesine bağlıdır.

Karşılaştırma

Belirlilik durumunda evrensel biçimde kabul görmüş karar alma ölçütü, kârin en büyüklenmesi veya maliyetin en küçüklenmesi iken, belirsizlik ve risk durumlarında karar almada değişik ölçütler söz konusu olur. Sözgelimi, risk ortamında karar almada ortalama (beklenen) kârin en büyüklenmesi karar ölçütü olarak kabul edilebilirse de bu ölçüt bütün durumlar için uygun olmayıabilir.

Karar Analizinin Temel Adımları

- Sorunun tanımlanması
- Tüm olası seçeneklerin listelenmesi
- KV'nin kontrolündeki olmayan / doğanın sunduğu tüm olası olayların listelenmesi
- Her seçeneğin her olay için elde edeceği sonuçları gösteren karar tablosunun oluşturulması
- Bir karar modelinin seçilmesi (doğa durumuna göre)
- Modelin uygulanması ve bir seçeneğin seçilerek karar verilmesi

Karar Problemi

Birden fazla olay ve birden fazla karar seçeneğinin (eylem biçimi, strateji) bulunması, sistemin davranış ölçüğünün her bir stratejiye göre farklı değer alması ve bu değerlerin bilinmemesi durumundaki bir probleme "karar problemi" denir.

Karar Probleminin Ortak Özellikleri

- Karar Verici: Sisteme maksadına göre hedefler koyan, bu hedeflere ulaşmak için amaçlar, stratejiler ve taktikler tanımlayan, bu tanımlar uyarınca sistemin davranışlarını planlayan, örgütleyen, denetleyen, sapmalar sırasında gerekli düzenlemeyi yapan birey ya da topluluğa karar verici denir.
- Strateji (Eylem Biçimi): Karar vericinin amaç veya amaçlarına ulaşmasını sağlayacak değişik yollar veya hareket tarzlarının her birine strateji veya eylem biçimi denir. Stratejilerin belirlenmesi ve tanımlanması karar vericinin en önemli görevlerindendir. Stratejiler karar vericinin kontrolünde olan faktörlerdir.
- Olay (Doğal Durum): Karar vericinin davranışını etkileyen ve alabileceği değerlerde karar vericinin hiçbir etkisi olmayan faktörlerdir. Olaylar, karar vericinin içinde bulunduğu karar ortamını oluştururlar. Sayıları ne olursa olsun gelecekte yalnızca bir olayın gerçekleşeceği unutulmamalıdır.
- Sonuç: Her bir strateji ve olay bileşimi sonucu ortaya çıkan değerdir. Sonuç değerlerine ödeme, yarar veya kayıp denir ve bunlar genellikle parasal değer cinsinden açıklanır.

Karar Matrisi

- Risk veya belirsizlik ortamındaki bir karar probleminin matris biçiminde gösterilmesi, problemin değerlendirilmesi ve çözülmesinde büyük kolaylıklar sağlar. Alternatif stratejiler, olası olaylar ve sonuç değerlerinden oluşan matrise "karar matrisi" denir. Karar matrisi kavramı son derece genel olup, bunun yerine sonuç, kazanç, ödeme veya kâr-zarar matrisi deyimleri de kullanılmaktadır. Matrisin a_{ij} elemanları $R(S_i, O_j)$ sonuç değerleridir.

Strateji	Olay					
	O_1	O_2	...	O_j	...	O_n
S_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1j}	...	a_{1n}
S_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2j}	...	a_{2n}
..
S_i	a_{i1}	a_{i2}	...	a_{ij}	...	a_{in}
..
S_m	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mj}	...	a_{mn}

Belirsizlik Durumunda Karar Alma

Belirsizlik durumunda karar vericinin değişik stratejiler arasından seçim yapmasında esas alabileceği belli başlı ölçütler şunlardır:

1. Laplace Ölçütü
2. Minimaks veya Maksimin Ölçütü
3. Maksimaks veya Minimin Ölçütü
4. Savage Ölçütü
5. Hurwicz Ölçütü

Uygun ölçütün seçilmesi karar ortamının yapısına, karar vericinin deneyim ve eğilimine bağlıdır. Sözgelimi, minimaks ölçütünü seçen karar verici ile karşılaştırıldığında, Laplace ölçütünü benimseyen karar vericinin daha iyimser olduğu söylenebilir. Hurwicz ölçütünü benimseyen karar vericinin ise minimaks ölçütü ile maksimaks ölçütü arasında bir denge bulmaya çalıştığı kabul edilir. Kısaca bu ölçütler arasında seçim yapmada genel kabul görmüş bir kural yoktur. Yukarıdaki ölçütlerden birini kullanacak olan karar vericinin zeki bir rakibinin bulunmadığı, tek rakibinin doğa olduğu kabul edilir.

1. Laplace Ölçütü

Laplace ölçütü muhtemel olayların ortaya çıkması ile ilgili olasılıkların birbirlerine eşit olduğu ilkesine dayanır. Olayların ortaya çıkması olasılıkları belirlenebildiğinden problem belirsizlik durumunda karar alma problemi olmaktan çıkarak, risk durumunda karar alma problemine dönüşür. Laplace ölçütü, olayların gerçekleşmesi olasılıklarının farklı olduğuna ilişkin bir kanıt olmaması durumunda kullanılabilir. Anılan olasılıkların eşit kabul edilmesi ilkesine "yetersiz sebep ilkesi" denir.

Örnek-2 (Laplace Ölçütü)

Mağaza sahibinin; 100, 200 veya 300 adet sipariş vermek gibi üç stratejisi vardır. O1, O2, O3 ve O4 ile simgelenen olaylar sırasıyla, istemin 100, 150, 200 ve 250 adet olduğu karar ortamını açıklar. Karar matrisinin elemanları farklı sipariş ve istem miktarı birleşimlerinin sonucu elde edilecek kâr olarak tanımlanmıştır.

Karar matrisi mağaza sahibi Laplace ölçütüne göre hangi miktarda sipariş verir?

Sipariş Miktarı	İstem Miktarı			
	100	150	200	250
100	3000	2750	2500	2250
200	1500	4750	8000	7750
300	2000	5250	8500	11750

Çözüm-2 (Laplace Ölçütü)

Sipariş Miktarı	İstem Miktarı			
	100	150	200	250
100	3000	2750	2500	2250
200	1500	4750	8000	7750
300	2000	5250	8500	11750
Olasılık	1/4	1/4	1/4	1/4

- Karar matrisinin Laplace ölçütı için düzenlenen biçimi yukarıdaki tabloda verilmiştir. Görüldüğü gibi gerçekleşme olasılıkları eşit 4 olay vardır. Bu eşit olasılıkların kullanılmasıyla her bir stratejinin beklenen değeri aşağıdaki gibi hesaplanır.
- $E(100) = 1/4(3000) + 1/4(2750) + 1/4(2500) + 1/4(2250) = 2625 \text{ TL}$
- $E(200) = 1/4(1500) + 1/4(4750) + 1/4(8000) + 1/4(7750) = 5500 \text{ TL}$
- $E(300) = 1/4(2000) + 1/4(5250) + 1/4(8500) + 1/4(11750) = 6875 \text{ TL}$
- Kâr söz konusu olduğundan, beklenen değerlerden en büyük (6875 TL) olanının işaret ettiği miktarda, yani 300 birimlik sipariş verilmesi uygun olur.

2. Minimaks veya Maksimin Ölçütü

- Bu ölçüt yaklaşımlarında tutucu, **kötümser** karar vericilerin benimsedikleri karar ölçütüdür. Bu yaklaşım, hangi strateji seçilmiş olursa olsun daima o eylem için en kötü olan olayın gerçekleşeceği varsayımlına dayanır. Bu nedenle, her bir strateji için öncelikle o eylem için en kötü olan olayın ortaya çıkması nedeniyle oluşan en kötü sonuç belirlenir. Bu yolla bulunan en kötü sonuçlar arasından en iyi olanının işaret ettiği stratejinin seçilmesiyle en iyi hareket tarzı belirlenmiş olur. Karar matrisi elemanları; gelir, kâr, kazanç gibi büyük olması arzulanan değerlere karşılık geliyorsa ölçüt en küçüklerin en büyüğü anlamına gelen **maksimin (en küçüklerin en büyüğü)**; gider, zarar, kayıp gibi küçük olması arzulanan değerlere karşılık geliyorsa en büyüklerin en küçüğü anlamını ifade eden **minimaks (en büyüklerin en küçüğü)** ölçütü adını alır.

Örnek-3

- Maksimin (minimaks) ölçüyle karar matrisini oluşturan sonuç değerlerinin
- a. Kazançlara,
- b. Kayıplara karşılık gelmeleri durumunda en iyi stratejiyi belirleyiniz.

Strateji	Olay			
	O ₁	O ₂	O ₃	O ₄
S ₁	26	26	18	22
S ₂	22	34	30	18
S ₃	28	24	34	26
S ₄	22	30	28	20

Çözüm-3

- Sonuç değerlerinin kazançlara karşılık gelmesi durumunda, satır en küçüklerinin belirlenmesi ve bunlardan en büyük olanına karşılık gelen stratejinin uygulamaya konması gereklidir. Satır en küçük değerlerinin sırasıyla; 18, 18, 24 ve 20 olduğu görülebilir. Buna göre bu değerlerden en büyük olan 24'ün işaret ettiği üçüncü eylem (S3) maksimin ölçütüyle belirlenen en iyi stratejidir.
- Sonuç değerlerinin kayıplara karşılık gelmesi durumunda herhangi bir eylem için en kötü olay en büyük sonuç değeri sağlayandır. Bu nedenle satır en büyüklerinin belirlenmesi ve bunlardan en küçük olanına karşılık gelen stratejinin uygulamaya konması gereklidir. Satır en büyük değerlerinin sırasıyla; 26, 34, 34 ve 30 olduğu görülebilir. Buna göre bu değerlerden en küçük olan 26'nın işaret ettiği S1, minimaks ölçütüyle belirlenecek en iyi stratejidir.

3. Maksimaks veya Minimin Ölçütü

Bu ölçüte göre hangi strateji seçilirse seçilsin o strateji için en iyi olan olayın gerçekleşeceği düşünülür. Bu düşüncenin ürünü olarak belirlenen en iyi sonuçlardan en iyi olanının işaret ettiği strateji, karar vericinin en iyi seçimi olur. Karar matrisi elemanlarının büyük olması arzulanan değerlere karşılık gelmesi durumunda ölçüt maksimaks (**en büyüklerin en büyüğü**) ölçütüdür. Matris elemanlarının küçük olması arzulanan değerlere karşılık gelmesi durumunda ölçüt minimin (**en küçüklerin en küçüğü**) ölçütü adını alır. Bu ölçütün kullanılmasıyla en iyi stratejinin belirlenmesini aşağıdaki örnek yardımıyla açıklayalım.

Örnek-4

- Aşağıdaki karar matrisini kullanarak, maksimaks (minimin) ölçüfüyle sırasıyla, sonuç değerlerinin kazançlara ve sonuç değerlerinin kayıplara karşılık gelmeleri durumunda en iyi stratejiyi belirleyiniz.

Strateji	Olay			
	O ₁	O ₂	O ₃	O ₄
S ₁	26	26	18	22
S ₂	22	34	30	18
S ₃	28	24	34	26
S ₄	22	30	28	20

Çözüm-4

- Bu ölçüte göre hangi eylem uygulanırsa uygulansın çeşitli olaylar arasından en iyi olanı ile karşılaşılacağından; karar matrisi elemanlarının kazanç değerlerine karşılık gelmesi durumunda satır en büyüklerinin, karar matrisi elemanlarının kayıp değerlerine karşılık gelmesi durumunda satır en küçüklerinin bulunması gereklidir.
- Karar matrisinin en büyükleri ile satır en küçükleri enb ve enk sütun başlıklarını altında gösterilmiştir. Bu ölçüte göre stratejiler arasından seçim, en iyilerin en iyisinin seçilmesi biçiminde yapılacağından, kazanç durumunda en iyi seçenek karar vericiye 34 birim kazanç sağlayan S₂ ve S₃ seçenekleridir. En küçüklerin dikkate alınması durumunda en iyi seçenekler en düşük kaybı sağlayacak olan S₁ ve S₂ seçenekleridir.

Strateji	Enb	Enk
S ₁	26	18*
S ₂	34*	18*
S ₃	34*	26
S ₄	30	22

4. Savage Ölçütü

- Bu ölçüt en büyük fırsat kaybının en küçülmesi esasına dayanır. Bu nedenle minimaks fırsat kaybı ölçütü olarak da bilinir. Ölçütün uygulanması için öncelikle fırsat kaybı veya pişmanlık matrisinin oluşturulması gereklidir.
- Fırsat kaybı her bir olay için en iyi sonucu sağlayacak stratejinin seçilmemesi sonucu vazgeçilen kazanç veya katlanılan kayıp miktarıdır. Fırsat kayipları genellikle pozitif değerler ve rakamlarla açıklanır. Karar tablosu gelirler cinsinden ifade edildiğinde, ele alınan her bir olaya ilişkin fırsat kaybı değerleri; en iyi olan eylemin seçilmesi durumunda sağlanacak olan gelirden diğer seçeneklerin sağlayacağı gelirlerin çıkartılmasıyla hesaplanırlar.

Sütun Enbüyük Değeri – Sütun Değerleri

- Karar matrisinin maliyetleri göstermesi durumunda fırsat kaybı değerleri en iyi seçimin maliyet değerinin diğer eylemlerin maliyet rakamlarından çıkartılması ile belirlenirler.

Sütun Değerleri – Sütun Enküçük Değeri

Örnek-5

- Savage ölçütüyle sırasıyla;
- a. sonuç değerlerinin kazançlara
- b. sonuç değerlerinin kayıplara karşılık gelmeleri durumunda en iyi stratejiyi belirleyiniz.

Strateji	Olay			
	O ₁	O ₂	O ₃	O ₄
S ₁	26	26	18	22
S ₂	22	34	30	18
S ₃	28	24	34	26
S ₄	22	30	28	20

Çözüm-5

- a. Fırsat kaybı matrisi düzenlenmelidir. Önce, karar matrisi elemanlarının kazançları gösterdiğini düşünelim. Buna göre, ortaya çıkan olay O_1 ise, en yüksek kazancı sağlayan S_3 seçilmelidir. Bu durumda karar verici en yüksek kazancı sağlayacağından hiçbir fırsatı kaçırımayacaktır. Buna göre bu seçimden fırsat kaybı, $28 - 28 = 0$ olur. Aynı olay (O_1) için en yüksek kazancı sağlayan S_3 yerine S_1 seçilirse, 28 yerine 26 TL, yani 2 TL daha az kazanılacak böylece karar verici kaçıldığı 2 TL için pişmanlık duyacaktır. S_2 seçildiğinde, S_3 'ün seçilmemiş olması yüzünden, kaçan fırsat 6 TL olacak bu kez karar verici 6 TL daha az kazanmanın pişmanlığını duyacaktır. Bu işlemin karar matrisinin tüm elemanlarına uygulanması sonucu belirlenen fırsat kaybı değerleriyle düzenlenen fırsat kaybı matrisi satır en büyük değerleriyle birlikte aşağıda gösterilmiştir.

Çözüm-5

Strateji	Olay				Satır En Büyüüğü
	O ₁	O ₂	O ₃	O ₄	
S ₁	2	8	16	4	16
S ₂	6	0	4	8	8
S ₃	0	10	0	0	10
S ₄	6	4	6	6	6*

- Fırsat kaybı matrisinin düzenlenmesinden sonra sıra, her bir stratejiye ilişkin en yüksek fırsat kaybının saptanmasına gelir. En yüksek fırsat kayipları, fırsat kaybı matrisinin en sağına eklenen sütunda gösterilmiştir. Karar vericinin amacı fırsat kaybını en düşük düzeyde tutmak olduğundan en büyük pişmanlıklar arasından en küçük olanının işaret ettiği stratejinin seçilmesiyle en iyi hareket biçimini belirlenmiş olur. Savage ölçütüne göre en küçük değeri veren S4 seçilmelidir.

Çözüm-5

- Sonuç değerlerinin kayıplara karşılık gelmesi durumunda, her bir olay için en iyi strateji en düşük kaybı sağlayandır. Bu durumda her bir olay için kaybın en küçük değeri dikkate alınacak ve fırsat kaybı matrisi elemanları her bir olay için en iyi olan değerin diğer değerlerden çıkartılmasıyla belirlenecektir. Bunu karar matrisinin ilk sütununa uygulayalım. O1 gerçekleştiğinde, en iyi strateji 22 TL'lik kayıp gösteren S2 ve S4 seçenekleridir. Bu seçeneklerin fırsat kayipları sıfırdır. O1 gerçekleştiğinde S1'in fırsat kaybı $26 - 22 = 4$, S3'ün fırsat kaybı $28 - 22 = 6$ TL olur. Bu yaklaşımla oluşturulan fırsat kaybı matrisi aşağıda gösterilmiştir.

Çözüm-5

Strateji	Olay				Satır En Küçüğü
	O ₁	O ₂	O ₃	O ₄	
S ₁	4	2	0	4	4*
S ₂	0	10	12	0	12
S ₃	6	0	16	8	16
S ₄	0	6	10	2	16

- Pişmanlık matrisinin düzenlenmesinin ardından her bir strateji için en büyük fırsat kaybı belirlenir. En büyük fırsat kayipları, önceden olduğu gibi, fırsat kayipları matrisinin en sağına eklenen sütunda gösterilmiştir. Savage kuralına göre en büyük kayiplardan en küçük değerli olanının işaret ettiği S1 stratejisi en iyi hareket biçimidir. Savage ölçütı maliyet verilerinden oluşan orijinal matrise min-maks ölçütünün, kazanç verilerinden oluşan orijinal matrise maksimin ölçütünün uygulanmasına benzer. Bununla birlikte benimsenecek eylemlerin aynı olmak zorunda olmadıkları unutulmamalıdır.

5. Hurwicz Ölçütü

- Hurwicz'e göre, karar vericinin ne aşırı derecede iyimser, ne de aşırı derecede kötümser olmasını gerektiren güçlü gerekçeleri yoktur. Bu nedenle, karar vericinin maksimin ölçütünün aşırı kötümserliği ile maksimaks ölçütünün aşırı iyimserliği arasında bir denge kurması uygun olur. Bu nedenle bu ölçüte "ağırlıklı ortalama" veya "gerçekçilik ölçütü" de denir. Hurwicz ölçütü, seçilen her strateji için iyimserlik koşullarında ortaya çıkan sonuçlar ile kötümserlik koşullarında ortaya çıkan sonuçların ağırlıklandırılması esasına dayanır. Bunun için iyimserlik katsayısı olarak bilinen α kullanılır.
- $0 \leq \alpha \leq 1$.
- Çok kötümser bir karar vericinin α için seçeceği değer sıfır, aşırı derecede iyimser bir karar vericinin seçceği değer 1 olur.
- Karar verici α 'nın değeri hakkında kararsızsa, $\alpha = 0.5$ seçmesi akılcı olur.
- α 'nın belirlenmesinden sonra karar matrisindeki her bir strateji için en iyi ve en kötü sonuç değerlerinin sırasıyla α ve $(1 - \alpha)$ ile çarpılarak sonuçların toplanması gereklidir. Toplama işlemiyle belirlenen değerler stratejilerin beklenen değerleri olarak yorumlanır ve beklenen değerler taranarak; karar matrisi kazanç değerlerinden oluşmuşsa en büyük, maliyet değerlerinden oluşmuşsa en küçük beklenen değere sahip stratejinin uygulanması önerilir.

Örnek-6

- Aşağıdaki karar (kazanç) matrisine Hurwicz ölçütünü uygulayarak sırasıyla ; $\alpha = 0$, $\alpha = 1$ ve $\alpha = 0.6$ için en iyi stratejiyi belirleyiniz.

Strateji	Olay			
	O ₁	O ₂	O ₃	O ₄
S ₁	26	26	18	22
S ₂	22	34	30	18
S ₃	28	24	34	26
S ₄	22	30	28	20

Çözüm-6

- $\alpha = 0$ seçildiğinde her strateji için yalnızca en küçük değerli sonuçların dikkate alındığı görülebilir. Kural gereği bu en küçük değerlerden en büyük olanı seçileceğinden, $\alpha = 0$ için Hurwicz ölçütü maksimin ölçütüne eşdeğerdir. Buna göre, $\alpha = 0$ için S3 (bkz. Örnek 8.4) seçilecektir.
- $\alpha = 1$ seçildiğinde, her eylem seçeneği için yalnızca en büyük değerli sonuçların dikkate alındığı görülebilir. Kural gereği, en büyük değerlerden en büyük olanının seçilmesi gereğinden $\alpha = 1$ için, Hurwicz ölçütü maksimaks ölçütüne eşdeğerdir (bkz. Örnek 8.5). Buna göre, satır en büyük değerlerinden en büyüğünü sağlayan S2 ya da S3 seçilecektir.

Çözüm-6

Karar verici en yüksek beklenen kazancı hedeflediğinden, $\alpha = 0.6$ seçildiğinde, stratejilerin beklenen değerleri satır en büyüklerinin 0.6, satır en küçüklerinin 0.4 ile çarpımlarının toplamı olarak Tablo 8.10'daki gibi hesaplanacaklardır.

Strateji	Kazanç İçin		Beklenen Kazanç
	Enb	Enk	
S_1	26	18	22.8
S_2	34	18	27.6
S_3	34	24	30.0*
S_4	30	20	26.0

Karar verici en yüksek beklenen kazancı hedeflediğinden, S_3 'ü seçecektir.

Çözüm-6

Karar matrisi elemanlarının kayıplara karşılık gelmesi durumunda stratejilerin beklenen değerleri

- satır en küçüklerinin 0.6,
- satır en büyüklerinin 0.4 ile çarpımlarının toplamı olarak hesaplanacaklardır.
- Hesap sonuçları, aşağıdaki tabloda beklenen kayıp başlıklı sütunda gösterilmiştir. Buna göre beklenen kaybın en küçük olmasını sağlayan S_1 benimsenecektir.

Strateji	Kayıp İçin		Beklenen Kayıp
	Enb	Enk	
S_1	18	26	21.2*
S_2	18	34	24.4
S_3	24	34	28.0
S_4	20	30	24.0

Risk Durumunda Karar Alma

Daha önce açıklandığı gibi olayların gerçekleşme olasılıklarının bilinmesi durumundaki karar problemi, risk durumunda karar problemidir. Risk durumunda karar almada kullanılan başlıca ölçütler şunlardır:

- En yüksek olabilirlik
- Beklenen değer
- Beklenen fırsat kaybı veya beklenen pişmanlık

En Yüksek Olabilirlik Ölçütü

Bu ölçüte göre karar verici tüm dikkatini olabilirliği en yüksek olan olay üzerinde yoğunlaştırır. Gerçekleşme olasılığı en büyük olan olayın belirlenmesinden sonra bu olay için en yüksek (en büyüğeleme durumunda en büyük, en küçüğeleme durumunda en küçük) sonucu sağlayan stratejinin uygulanmasına karar verilir.

Örnek-7

En yüksek olabilirlik ölçütünü aşağıdaki kazanç matrisine uygulayarak en iyi stratejiyi kararlaştırınız. Olayların gerçekleşmesi olasılıkları aynı tablonun son satırında verilmiştir.

Strateji	Olay			
	O ₁	O ₂	O ₃	O ₄
S ₁	26	26	18	22
S ₂	22	34	30	18
S ₃	28	24	34	26
S ₄	22	30	28	20
Olasılık	0.2	0.5	0.2	0.1

Çözüm-7

- Tablonun son satırında görüldüğü gibi olabilirliği en yüksek olay O₂'dir. Karar verici gelecekte O₂'nin gerçekleşeceğini düşünerek kendisine en yüksek kazancı sağlayacak olan S₂ stratejisini uygulayacaktır.
- Bu kural özellikle mümkün olaylardan birine ilişkin olasılık diğer oylara ilişkin olasılıklardan önemli derecede büyükse uygundur. Diğer olayları ve bunların sonuçlarını göz ardı etmesi ölçütün zayıf tarafıdır.

Beklenen Değer Ölçütü

Beklenen değer ölçütü olayların ortaya çıkması olasılıklarının bilinmesi durumunda, her bir stratejiye ilişkin beklenen değerin hesaplanarak bunlar arasından en iyi olanın işaret ettiği stratejinin seçilmesi esasına dayanır.

Örnek-8

- Beklenen değer kuralını aşağıdaki 4×4 kazanç matrisine uygulayınız.

Strateji	Olay			
	O ₁	O ₂	O ₃	O ₄
S ₁	26	26	18	22
S ₂	22	34	30	18
S ₃	28	24	34	26
S ₄	22	30	28	20
Olasılık	0.2	0.5	0.2	0.1

Çözüm-8

- Olayların gerçekleşmesi olasılıkları sırasıyla; 0.2, 0.5, 0.2, ve 0.1 olarak verildiğinden stratejilerin beklenen değerleri aşağıdaki gibi hesaplanır.
- S_1 için $= 0.2(26) + 0.5(26) + 0.2(18) + 0.1(22) = 24.0$
- S_2 için $= 0.2(22) + 0.5(34) + 0.2(30) + 0.1(18) = 29.2$
- S_3 için $= 0.2(28) + 0.5(24) + 0.2(34) + 0.1(26) = 27.0$
- S_4 için $= 0.2(22) + 0.5(30) + 0.2(28) + 0.1(20) = 27.0$
- En yüksek beklenen kazancı S_2 seçeneği sağladığından, karar vericinin en iyi kararı S_2 'yi seçmek olacaktır. Sonuç değerleri kayıp değerlerine karşılık gelse idi karar verici en küçük beklenen değerli S_1 'i seçerdi.

Beklenen Fırsat Kaybı veya Beklenen Pişmanlık Ölçütü

Risk durumunda karar almada kullanılabilecek diğer bir ölçüt beklenen fırsat kaybı veya beklenen pişmanlık ölçütüdür. Bu ölçütün beklenen değer ölçütünden çok farklı olmadığı görülebilir. İki ölçüt arasındaki tek fark, dikkate aldıkları sonuç değerleridir. Fırsat kaybı sonuçlarının dikkate alınması durumunda beklenen değer ölçütü beklenen fırsat kaybı ölçütü adını alır.

Örnek

- Aşağıdaki kazanç matrisine beklenen fırsat kaybı ölçütünü uygulayarak karar vericinin en iyi stratejisini belirleyiniz.

Strateji	Olay			
	O ₁	O ₂	O ₃	O ₄
S ₁	26	26	18	22
S ₂	22	34	30	18
S ₃	28	24	34	26
S ₄	22	30	28	20
Olasılık	0.2	0.5	0.2	0.1

Cevap

Beklenen fırsat kaybı ölçütünde fırsat kayıpları esas alındığından önce fırsat kayıpları matrisinin düzenlenmesi gerekir.

Daha önce açıklandığı gibi orijinal karar matrisinin kazanç değerlerinden oluşması durumunda, fırsat kaybı matrisi, orijinal matrisin sütun değerlerinin her birinin, sütun en büyük değerinden çıkartılmasıyla aşağıdaki gibi düzenlenenecektir.

Tablo 8.13

Strateji	Olay			
	O ₁	O ₂	O ₃	O ₄
S ₁	2	8	16	4
S ₂	6	0	4	8
S ₃	0	10	0	0
S ₄	6	4	6	6
Olasılık	0.2	0.5	0.2	0.1

- Fırsat kaybı matrisinin oluşturulmasından sonra olayların gerçekleşmesi olasılıklarından yararlanarak her bir eylem için beklenen fırsat kaybı değerleri hesaplanmalıdır. Söz konusu değerler aşağıdaki gibi hesaplanacaktır.
- S1 için = $0.2(2) + 0.5(8) + 0.2(16) + 0.1(4) = 8.0$
- S2 için = $0.2(6) + 0.5(0) + 0.2(4) + 0.1(8) = 2.8$
- S3 için = $0.2(0) + 0.5(14) + 0.2(0) + 0.1(6) = 5.0$
- S4 için = $0.2(6) + 0.5(4) + 0.2(6) + 0.1(6) = 5.0$
- Sonuçta, beklenen fırsat kaybı ölçütüne göre en iyi strateji en küçük beklenen fırsat kaybı değerini veren S2 olacaktır. Bu ölçütle en iyi olduğu kararlaştırılan S2'nin daha önce beklenen değer ölçüyüle en iyi olduğu belirlenen strateji olduğuna dikkat edilmelidir.

Tam Bilginin Beklenen Değeri

- Tam bilgi sağlamak için katlanılması gereken maliyetin katlanmaya değer olup olmadığını araştırılması gereklidir. Bunun için tam bilgiden beklenen gelirle başka bir deyişle, tam bilginin beklenen değeriyle ek bilgiye ulaşmanın yaratacağı maliyetin karşılaştırılması uygun olur. Tam bilgi fayda sağlıyor ise tam bilgiye başvurmak, aksi halde eldeki bilgilerle yetinmek akılcı bir yaklaşım olur. Tam bilginin beklenen değeri kavramını açıklayıcı örnek problem üzerinde gösterelim.

Örnek

- Örnek 8.1'deki mağaza sahibinin tam bilgi durumundaki beklenen kârını hesaplayarak, tam bilgi altında kârdaki artışı bulunuz.

Tablo 8.14

Sipariş Miktarı	İstem Miktarı			
	100	150	200	250
100	3000	2750	2500	2250
200	1500	4750	8000	7750
300	2000	5250	8500	11750

- İstem miktarı ~~olasılık olarak~~ bilindiğinde; en iyi sipariş miktarı da aynı kesinlikle kolayca belirlenebilir. Sözgelimi, istemin 100 adet olacağından emin olunsa, 100 adet siparişle kazancın en büyük olması sağlanır. İstemin 100 adet olması olasılığı 0.2 olduğundan, 100 birimlik istem için beklenen kazanç şöyle olur:
- $0.2 \times 3000 = 600 \text{ TL}$

Çözüm

- Benzer şekilde istemin 150 olması durumunda en yüksek kâr 300 adet siparişle sağlanır. Bu olay-strateji çifti için en yüksek kazanç 5250 TL olduğundan beklenen kâr bu olayın gerçekleşme olasılığı (0.3) ile 5250'nin çarpılmasıyla 1575 TL olarak hesaplanır. Benzer işlemlerle istemin 200 ve 250 adet olması durumları için beklenen kârlar sırasıyla aşağıdaki gibi hesaplanır.
- $0.3 \times 8500 = 2550 \text{ TL}$
- $0.2 \times 11750 = 2350 \text{ TL}$
- Tam bilgi altında beklenen kâr her bir olay için en iyi stratejinin seçilmesi sonucu gerçekleşen beklenen kazançların toplamına eşittir. Buna göre tam bilgi altındaki beklenen kazanç (TBABK) aşağıdaki gibi elde edilir.
- $\begin{aligned} \text{TBABK} &= 0.2(3000) + 0.3(5250) + 0.3(8500) + 0.2(11750) \\ &= 7075 \text{ TL} \end{aligned}$

Çözüm-devam

- Tam bilgi altında hesaplanan 7075 TL'lik kazanç istemin değeri hakkında kesin bilgiye sahip olunması durumunda kazanılacak en yüksek miktardır. Bu yolla hangi stratejinin uygun olacağı konusunda bir öneride bulunulmadığına dikkat edilmelidir. Burada saptanan yalnızca belirlilik durumunda kârın en fazla 7075 TL olabileceğidir. Kârı bu düzeye çıkarmak için istem miktarlarının olasılıkları hakkında daha fazla bilgi edinmek istendiğini düşünelim. Bu durumda, ek bilginin kârda sağlayacağı artış ile gerçekleştirilmesi düşünülen çalışmanın maliyeti karşılaştırılmalıdır. Ek bilgiyle sağlanacak kâr ek bilgiye ulaşma maliyetinden fazla ise ek bilgiye başvurulacak aksi halde, eldeki veri ile yetinile-rek risk ortamında beklenen değer ölçütüyle karar verme benimsenecektir. Ek bilginin beklenen değeri, tam bilgi altındaki beklenen değer ile risk durumundaki beklenen değer arasındaki farka eşittir.
- Risk durumunda en yüksek kâr 6875 TL'dir. Tam bilgi altında en yüksek kâr 7075 TL olduğundan ek bilginin beklenen değeri aşağıdaki gibi hesaplanır.
- Ek Bilginin Beklenen Değeri = $7075 - 6875 = 200$ TL
- Bu değer tam bilgi durumunda kârdaki artışı gösterir. Buna göre ek bilgi sağlamak için yapılacak çalışmanın maliyeti 200 TL'den fazlaysa mağaza sahibinin ek bilgi sağlamaktan vazgeçmesi uygun olur. Açıklamalarımız için gerekli olduğundan problemi bir de beklenen fırsat kaybı ölçütünü kullanarak çözelim. Problemin fırsat kaybı tablosu aşağıda gösterilmiştir.

Çözüm-devam

Tablo 8.15

Strateji	Olay				Beklenen Fırsat Kaybı
	O ₁	O ₂	O ₃	O ₄	
S ₁	0	2500	6000	9500	4450
S ₂	1500	500	500	4000	1400
S ₃	1000	0	0	0	200
Olasılık	0.2	0.3	0.3	0.2	-

- Hesaplanan beklenen fırsat kayipları, fırsat kayipları tablosuna eklenen "Beklenen Fırsat Kaybı" başlıklı sütunda gösterilmiştir. Görüldüğü gibi en küçük beklenen fırsat kaybı ek bilginin beklenen değerine eşittir. Bu durum yalnızca bu problem için değil her zaman böyledir. En küçük beklenen fırsat kaybı belirsizliğin maliyeti olarak değerlendirilir. Her bir strateji için beklenen k \square r ile beklenen pişmanlık değerleri toplamının, tam bilginin beklenen değerine eşit olduğu gösterilebilir. Bu durumun açıklanmasına örnek olmasi için S₁'i inceleyelim. S₁ için beklenen k \square r olan 2625 TL ile S₁ için beklenen fırsat kaybı 4450 TL'nin toplamı 7075 TL'ye eşittir.

Karar Ağacı

- Simdiye kadar, sonuçların matris veya tablo biçiminde gösterilmesinin mümkün olduğu "bir olaylar kümesi-bir strateji seçimi" olarak özetlenebilecek durumların karar problemleri incelenmiştir. Oysa karar verme genellikle, birden fazla olaylar kümesinin bulunduğu, her kümeye için bir eylem seçiminin söz konusu olduğu çok aşamalı bir süreçtir. Bu, birden fazla noktada karar verme durumunda olmak demektir. Bu tip problemlerin matris veya tablo yaklaşımıyla çözümüne doğru değildir. Matris yerine karar ağacı oluşturulması uygun olur.
- Simdiye kadar, sonuçların matris veya tablo biçiminde gösterilmesinin mümkün olduğu "bir olaylar kümesi-bir strateji seçimi" olarak özetlenebilecek durumların karar problemleri incelenmiştir. Oysa karar verme genellikle, birden fazla olaylar kümesinin bulunduğu, her kümeye için bir eylem seçiminin söz konusu olduğu çok aşamalı bir süreçtir. Bu, birden fazla noktada karar verme durumunda olmak demektir. Bu tip problemlerin matris veya tablo yaklaşımıyla çözümüne doğru değildir. Matris yerine karar ağacı oluşturulması uygun olur.

Karar Ağacı-devam

- Karar vericinin karar aldığı her bir nokta karar noktası olup karar noktaları ağaç üzerinde bir kare ile gösterilir. Bu kareden çıkan dallar karar vericinin stratejilerine karşılık gelir. Karar vericinin kontrolü dışında olan olaylar ağaç üzerinde dairelerle gösterilirler. Bu noktalara "olay düğüm noktası" veya "şans noktası" denir. Daire biçimindeki olay düğüm noktalarından çıkan her dal, bir olayı simgeler. Olayı simgeleyen sembol ve olayın ortaya çıkma olasılığı ait olduğu dal üzerinde gösterilir. Şans noktasından çıkan dallar, karar vericiyi bir başka şans noktasına veya bir karar noktasına götürebilir.
- Karar probleminin karar ağacı ile çözümünde, dinamik programlamada^[1] olduğu gibi, sondan başa doğru hesaplama yaklaşımı uygulanır. Bunun için oluşturulan karar ağacının en son aşamasındaki üç noktalardan başlanır ve ağaç üzerinde başa doğru gidilir. Bu ilerleyiş sırasında karşılaşılan karar noktalarının her birinde o düğümün beklenen değeri hesaplanır. Beklenen değerlerden en iyi olanı o düğümün üzerine yazılır. Başlangıç noktasına ulaşıldığında çözüm işlemi tamamlanmış olur.

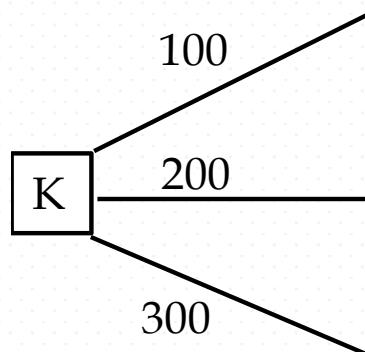
[1] Bkz. Onbirinci Bölüm.

Örnek

- Örnek 8.1'deki problemin karar ağacını düzenleyerek net karı en büyükleyen sipariş miktarını bulunuz.

Çözüm

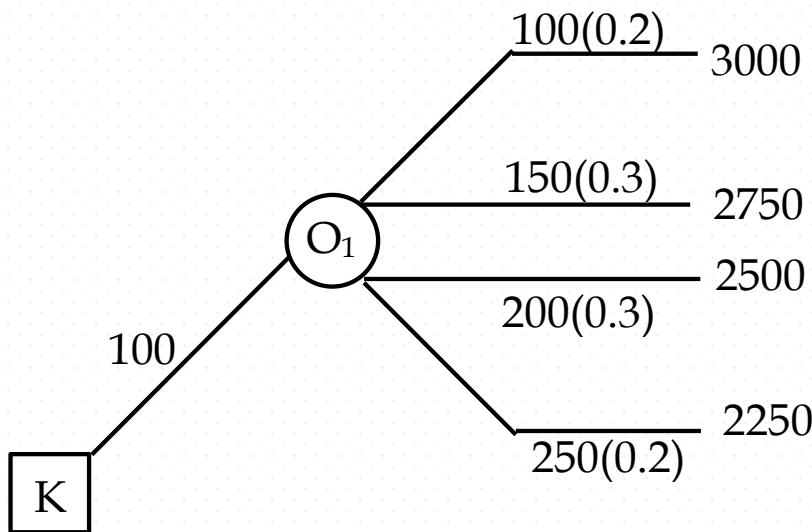
- Problemi karar ağacı yaklaşımıyla çözebilmek için öncelikle karar ağacı oluşturulmalıdır. Karar ağacının düzenlenenebilmesi için önce karar noktası sayısı belirlenir. Bilindiği gibi mağaza sahibinin sipariş miktarnı belirlemek gibi tek bir sorunu, yani almak istediği tek bir karar vardır. Bu nedenle karar noktası tektir. Bu nokta K ile işaretlenecektir. Sipariş miktarı için 100, 200 veya 300 olmak üzere 3 seçenek bulunduğuundan bu noktadan 3 dal çıkacaktır. Karar ağacının bu kısmını aşağıda gösterilmiştir.



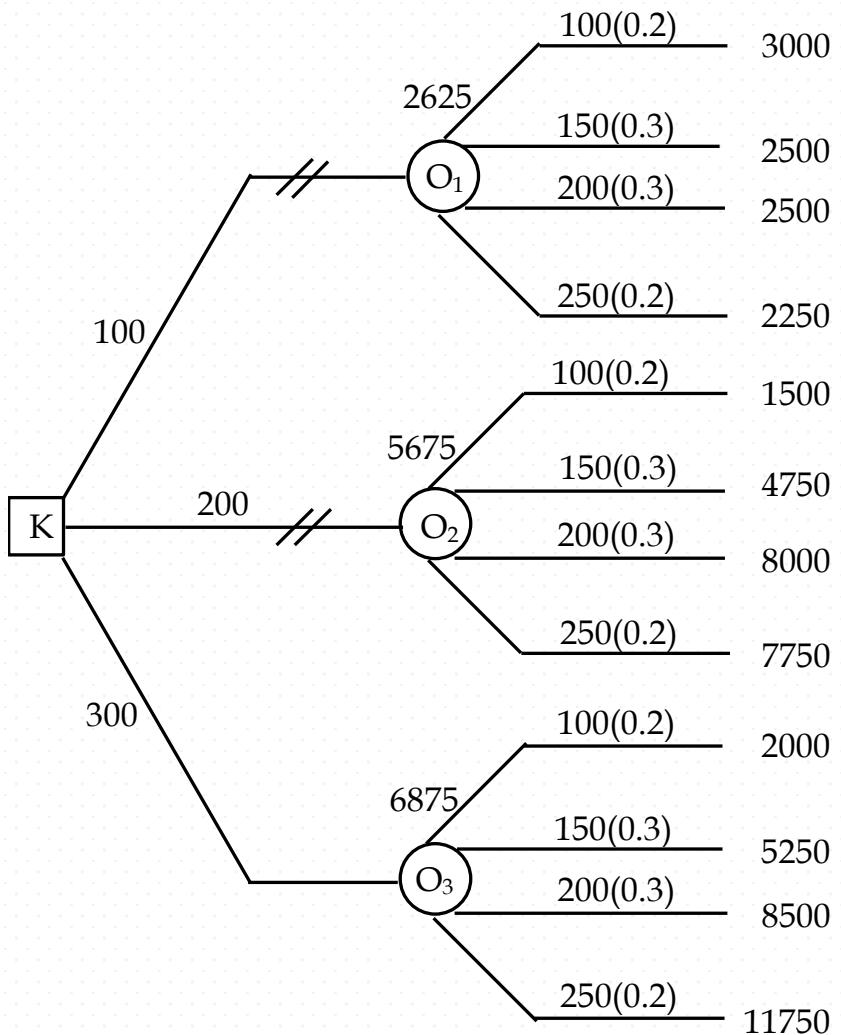
Şekil 8.1

Çözüm-devam

- Bir an için sipariş miktarının 100 olarak belirlendiğini düşünelim. İstem düzeyi 100, 150, 200 veya 250 olabilir. İstem düzeyindeki bu belirsizlik olay düğüm noktası olarak işaretlenir. Olay düğüm noktasından olay sayısı kadar dal çıkacak ve dalların her biri ayrı bir istem düzeyine karşılık gelecektir. Olaylara ilişkin olasılıkların ait oldukları dallar üzerinde, olaylara ilişkin kârların dalların uç noktalarında gösterilmesiyle karar ağacının 100 birimlik sipariş verilmesi durumunu açıklayan kısmını aşağıdaki gibi belirlenmiş olur.



Şekil 8.1



Şekil 8.1

Çözüm-devam

- Dallardan geriye doğru giderek 1 nolu düğüm noktasındaki beklenen kârı (BK1) hesaplayalım.
- $BK1 = 3000(0.2) + 2750(0.3) + 2500(0.3) + 2250(0.2)$
= 2625 TL
- Saptanan 2625 TL tutarındaki beklenen kâr 1 nolu olay düğüm noktasının üzerine yazılır.
- Aynı yöntemle 200 ve 300 birimlik sipariş miktarları için 2 ve 3 nolu olay düğüm noktalarındaki beklenen kârlar aşağıdaki gibi hesaplanır.
- $BK2 = 1500(0.2) + 4750(0.3) + 8000(0.3) + 7750(0.2) = 5675$ TL
- $BK3 = 2000(0.2) + 5250(0.3) + 8500(0.3) + 11750(0.2) = 6875$ TL
- Beklenen kârların O2 ve O3 noktalarına yazılmasıyla karar ağacı aşağıdaki gibi tamamlanmış olur.
- Her bir olay düğüm noktasının beklenen değerleri hesaplandıktan sonra K ile simgelenen karar noktasına ulaşırız. Bu nokta; sipariş miktarının 100, 200 veya 300 olması eylemlerinden birinin seçilmesi durumunu gösterir. 300 dalı 100 ve 200 dallarından daha fazla kâr sağladığından mağaza sahibi 100 ve 200 dalarını değil, 300 dalını seçecektir. Seçilmeyen dallar "://" ile işaretlenir.

Ödev

- Bir yatırımcı A ve B seçeneklerinden hangisine yatırım yapmasının uygun olacağını araştırmaktadır. Yatırımcının alternatif stratejileri yatırım yapmamak da dahil olmak üzere şöyledir: A'yi seçmek. A'nın seçilmesi ve başarılı olunması durumunda yatırımcı ya hiçbir şey yapmadan beklemekte ya da elde ettiği kazançla B'ye yatırım yapmaktadır. Bunun tersi de geçerlidir. A'da başarılı olma olasılığı 0.70, B'de başarılı olma olasılığı 0.40'dır. Her iki yatırım seçenekinin gerektirdiği yatırım miktarı da 2000 TL olup, başarısız olunması durumunda kazanç -2000 TL olmaktadır. A'nın başarılı olması durumunda 3000 TL (yatırım miktarı dahil), B'nin başarılı olması durumunda 5000 TL (yatırım miktarı dahil) elde edilmektedir. Karar ağacını çizerek en uygun stratejiyi belirleyiniz.

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

OYUN KURAMI

Oyun

Samuel Johnson (1755) “oyun” kelimesini, *herhangi bir şeyin eğlencesi* olarak tanımlar. Modern düşüneler, bu tanıma ek olarak belirli kuralları da birleştirmiştir. Oyunlardan çoğu karşılıklı etkileşimi ve rekabeti getirir, oyuncu oyundaki diğer oyuncudan üstün olmak için çabalar ve onun başarısı, diğer oyuncuların hareketlerine ve kendi hareketlerine bağlıdır. Bu tanımlama ve örnekler oyun kelimesinin ilk algılanışı olup, gündelik hayatta kullanışına denk düşer.

Oyun: birbirleriyle rekabet eden ve her biri kazanmayı isteyen iki veya daha fazla sayıda karar vericinin (oyuncunun) bulunduğu karar ortamı şeklinde tanımlanabilir.

Oyun Kuramı

Oyun kuramı ilk kez Fransız matematikçisi Emile Borel tarafından 1921 yılında ortaya atılmış olmakla birlikte, sistematik olarak matematikçi John von Neumann ile iktisatçı Oscar Morgenstern tarafından geliştirilmiştir. Oyun kuramının temel ilkeleri bu iki yazarın 1944 yılında yayınladıkları "The Theory of Games and Economic Behaviour" isimli çalışmalarında açıklanmıştır. O günden bu yana oyun kuramı büyük gelişmeler kaydetmiş, John Nash oyun kuramına yaptığı katkılar için 1994 ekonomi nobel ödülüyle ödüllendirilmiştir. Nash tarafından geliştirilen "Nash dengesi ve Nash pazarlık problemi" modern oyun kuramının köşe taşları kabul edilmektedir.

Oyun Kuramının Özellikleri

- İki veya daha fazla karar verici vardır.
- Karar vericilerin her biri bir oyuncudur.
- Oyuncuların birey olması gerekmektedir.
- Oyuncuların rasyonel davranışları varsayılmaktadır: Kazançlarını mümkün olduğu kadar artırma veya kayıplarını mümkün olduğu kadar azaltmak isterler.
- Her karar vericinin bir amaç fonksiyonu vardır.
- Amaç fonksiyonlarının en iyi değerleri yalnızca ait olduğu karar vericinin benimseyeceği stratejiye değil, diğer karar verici(ler)nin strateji(ler)sine de bağlıdır.
- İki-kİŞili sıfır-toplamlı oyunların en önemli varsayıımı, her oyuncunun rakibinin kendisinin hangi stratejiyi seçeceğini hakkında tam bilgisi olmasına karşın, kendisi için en iyi olan stratejiyi seçme şansına sahip olduğunu söylemektedir.

Uygulama Alanları

Oyun teorisi iş sorunlarının çözümünde yaygın olarak kullanılmamaktadır. Buna karşın rekabet unsurları içinde önemli bir görüş açıklığı sağlamıştır. Yöneticinin işi, rekabete etki eden faktörler içindeki hal tarzını göz önüne alarak, mevcut en iyi stratejiyi seçmektir. Böylece stratejinin onaylanması ve anlaşılmasında çok faydalıdır.

İşletme problemlerinden örnekler ise rekabete dayanan problemler veya doğaya karşı verilecek karar problemleri sunlardır:

- Teklif verme politikalarının saptanması,
- Reklam planları,
- Satın alma politikasının belirlenmesi,
- Yeni mamuller arasından seçim yapma,
- Araştırma stratejilerinin belirlenmesi,
- Talebin belirsiz olması halinde üretim programlama,
- Fiyatlama.

Oyun Çeşitleri

1. Oyun Çeşitleri: Oyunlar çeşitli özelliklerine göre farklı gruplarda sınıflandırılır.

Temelde oyunlar

- a. şans oyunları
- b. strateji oyunları

Oyunlar oyuncu sayısına göre

- a. iki kişili
- b. n kişili

Oyunun sayısal sonucuna göre

- a. Sıfır Toplamlı Oyun: Oyuncuların kazançlarının toplamı sıfır ise yani, oyunculardan biri tam diğer tarafın kaybettiği kadar kazanıyorsa oyun, "sıfır toplamlı" bir oyundur. Sıfır toplamlı oyunlarda oyuncuların çıkarları birbirine tamamıyla zittir.
- b. Sabit Toplamlı Oyunlar: Sayısal sonucu sıfırdan farklı oyunlara sabit toplamlı oyunlar denir. Sabit toplamlı bir oyunda da tarafların çıkarları tamamıyla birbirine zittir. Çünkü taraflardan birinin kazancındaki bir birim artış diğer tarafın kazancında bir birim azalış demektir.
- c. Sabit Toplamlı Olmayan Oyun: Oyuncuların kazançları toplamının sabit bir sayı olmaması durumunda oyun sabit toplamlı olmayan bir oyundur. Bu tür oyunlarda tarafların çıkarları tamamıyla zit değildir. Taraflar birlikte hareket ederek çıkar sağlayabilirler.

Strateji sayılarına göre

- a. Sonsuz Oyun: Herhangi bir oyuncunun stratejilerinin sayısı belirsiz ise oyun "sonsuz oyun" olur.
- b. Sonlu oyun: Her oyuncunun strateji sayısı sonlu ise oyun "sonlu oyun" dur.

Oyuncunun rakibinin hareketleri hakkındaki bilgisinin derecesi ve cinsine göre

- a. Tam Bilgili Oyun: Eğer bir oyunda her oyuncu her hamleyi yaparken daha önce yapılmış olan bütün kişisel veya talih hareketlerinin sonuçlarını biliyorsa "tam bilgili" oyun söz konusu olur. Sözgelimi satranç ve dama tam bilgili oyunlardır.
- b. Tam Bilgili Olmayan Oyun: Tam bilgili olmayan oyunlarda oyuncular böyle bir tam bilgiden yoksundurlar. Örneğin pokerde oyuncular rakiplerinin ellerindeki kağıtları bilmezler. Uygulamada genellikle tam bilgili olmayan oyunlarla karşılaşılır. Çünkü, çatışma durumunun esas bileşeni tarafların birbirlerinin hareketlerini bilmemesidir.

Oyun Kuramı İle İlgili Temel Kavramlar

2. **Stratejiler:** Oyunun devamı sırasında ortaya çıkabilecek bütün durumlar için oyuncuların seçeneklerini belirten kuralları kapsayan kümeye strateji denir.
3. **Kazanç veya Ödemeler Matrisi:** Oyuncuların farklı stratejileri sonucu kazanç, kayıp veya çekilme olabilir. Her bir oyuncunun stratejisi sonucu ortaya çıkan değerlerden oluşan matrise kazanç veya ödemeler matrisi denir. Ödemeler matrisindeki değerler negatif, pozitif veya sıfır olmak üzere her oyuncunun rakibine karşı kazancını veya kaybını belirler.

İki Kişiili Sıfır Toplamlı Oyunlar

Daha önce açıklandığı gibi bir oyunda iki oyuncu varsa oyun iki kişili bir oyundur. İki kişili bir oyunda oyuncuların kazançları toplamı sıfırsa oyun iki-kİŞili sıfır-toplamlıdır. İki-kİŞili sıfır-toplamlı sonlu bir oyunda,

1. Biri satır oyuncusu, diğeri sütun oyuncusu olarak isimlendirilen iki oyuncu vardır. Satır oyuncusu yerine bizim taraf, sütun oyuncusu yerine de karşı taraf deyimlerine rastlanabilir.
2. Satır oyuncusu için m , sütun oyuncusu için n tane mümkün strateji vardır. Bu oyun kısaca mxn oyun olarak isimlendirilir.
3. Satır oyuncusunun stratejileri R_1, R_2, \dots, R_m ile sütun oyuncusunun stratejileri C_1, C_2, \dots, C_n ile gösterilsin. Oyuncuların strateji seçimlerinin türlü birleşimlerinden sonuçlanan kazanç veya kayıplarını bildiğimizi varsayılar. Satır oyuncusunun stratejileri R_i ve sütun oyuncusunun stratejileri (C_j) sonucu ortaya çıkan değerler bir tablo (matris) şeklinde yazılabilir. Bu tabloya ödül, ödeme, kazanç veya kısaca "oyun matrisi" denir. Bir mxn oyunun kazanç matrisi Tablo 9.1'de gösterildiği gibidir.

Tablo 9.1

Satır Oyuncusu Stratejisi	Sütun Oyuncusu Stratejisi					
	C_1	C_2	...	C_j	...	C_n
R_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1j}	...	a_{1n}
R_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2j}	...	a_{2n}
..
R_i	a_{i1}	a_{i2}	...	a_{ij}	...	a_{in}
..
R_m	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mj}	...	a_{mn}

İki Kişiili Sıfır Toplamlı Oyunlar-devam

- Oyunculardan birinin kazanç matrisi diğer oyuncunun kazanç matrisinden belirlenebilir. Bir oyuncunun kazanç matrisinin tüm elemanlarının ters işaretlilerinden oluşan matris diğer oyuncunun kazanç matrisidir.
- Satır oyuncusunun R_i , sütun oyuncusunun C_j gibi belirli bir stratejiyi kabul ettiklerini varsayıyalım. Oyun matrisi satır oyuncusuna göre düzenlenmiş ise a_{ij} satır oyuncusunun kazancını (sütun oyuncusunun kaybını) gösterir.

Örnek 9.1

Örnek 9.1: Satır oyuncusunun iki (R_1, R_2), sütun oyuncusunun dört (C_1, C_2, C_3, C_4) stratejisinin bulunduğu bir oyunun, satır oyuncusunun kazançlarına göre düzenlenen matrisi aşağıda gösterilmiştir. Oyuncuların stratejilerinin değişik birleşimlerinden herhangi iki tanesi için oyuncuların kazanç ve kayıplarını bulunuz.

Tablo 9.2

Satır Oyuncusu Stratejisi	Sütun Oyuncusu Stratejisi			
	C_1	C_2	C_3	C_4
R_1	3	-2	5	6
R_2	2	1	-2	4

Çözüm 9.1: Satırdaki oyuncunun R_2 'yi sütundaki oyuncunun C_3 'ü seçmesi durumunda satır oyuncusunun kazancı $a_{23} = -2$ olur. $a_{23} = -2$ olduğundan satır oyuncusu için negatif kazanç yani kayıp, sütun oyuncusu için negatif kayıp yani, kazanç söz konusudur. Satır oyuncusunun R_1 , sütun oyuncusunun C_4 'ü seçmeleri durumunda satır oyuncusunun kazancı a_{14} kadar, yani 6 birim olacaktır. Bu sütun oyuncusunun 6 birim kaybetmesi demektir.

Örnek 9.2

Örnek 9.2: Oyunculardan her birinin üçer stratejisinin bulunduğu bir 3×3 oyunun kazanç matrisi Tablo 9.3'de verildiği gibidir. Söz konusu kazanç matrisini dikkate alarak, oyuncuların oyunu hangi stratejilerle oynayacağını belirleyiniz.

Tablo 9.3

Satır Oyuncusu Stratejisi	Sütun Oyuncusu Stratejisi			Satır En Küçüğü
	C ₁	C ₂	C ₃	
R ₁	16	10	7	7
R ₂	8	9	4	4
R ₃	9	1	2	1
Sütun En Büyüüğü	16	10	7	-

Çözüm 9.2

Tablo 9.3

Satır Oyuncusu Stratejisi	Sütun Oyuncusu Stratejisi			Satır En Küçüğü
	C ₁	C ₂	C ₃	
R ₁	16	10	7	7
R ₂	8	9	4	4
R ₃	9	1	2	1
Sütun En Büyübü	16	10	7	-

Tablo 9.3'den görüleceği gibi her bir oyuncunun üçer stratejisi bulunduğuundan oyun bir 3x3 oyundur. İlk önce satır oyucusunu ele alalım. Bu oyuncu R₁ stratejisini seçerse, sütun oyuncusu C₃ stratejisini seçerek kendi kaybını, dolayısıyla rakibinin kazancını mümkün olan en düşük düzeyde tutar. Bu değer yukarıdaki oyun matrisine eklenen "satır en küçüğü" başlıklı sütunda gösterildiği gibi 7'dir. Satır oyucusunun ikinci stratejiyi seçmesi durumunda sütundaki oyuncu yine kendisi için en az (4) kayıp sağlayacak olan stratejiyi yani, üçüncü stratejiyi seçecektir. Satır oyuncusu üçüncü stratejiyi seçerse sütun oyuncusu ikinci stratejiyi seçerek yine kendi kaybını dolayısıyla rakibinin kazancını en düşük kazanç olan 1'de tutmayı başarır. Bu açıklamaların ortaya koyduğu gibi satır oyuncusu dikkatini satır en küçüklerinin en büyüğüne karşılık gelen strateji üzerinde yoğunlaştırmak durumundadır. Böylece, kendisinin her stratejisi için rakibinin seçimi ne olursa olsun rakibinin kendisine garanti ettiği en düşük kazancı en büyüklemiş olur.

Satır oyucusunun kazancı sütun oyucusunun kaybına eşit olduğundan, sütun oyuncusu kaybını en düşük düzeyde tutmak için sütun en büyüklerinin en küçüğünü sağlayan stratejiyi seçmek durumundadır. Sütun en büyükleri Tablo 9.3'ün en alt satırında "sütun en büyüğü" başlığı altında gösterilmiştir.

Kısaca, $\text{enb}(7, 4, 1) = 7$ olduğundan satır oyuncusu için en iyi strateji R₁'dir.

- Oyunun "alt değeri" (maksimin): α ile gösterilen değer sütundaki oyuncu ne yaparsa yapsın satırdaki oyuncunun kazanacağından emin olduğu miktarıdır. Bu değere karşılık gelen stratejiye de "maksimin strateji" denir. Maksimin strateji satır oyuncusunun en iyi stratejisidir.
- Oyunun "üst değeri" (minimaksi): β ile gösterilen bu değer, satırdaki oyuncu ne yaparsa yapsın sütundaki oyuncunun kaybının en az olacağından emin olduğu değerdir β 'ya karşılık gelen stratejiye "minimaks strateji" denir. Minimaks strateji sütun oyuncusunun en iyi stratejisidir.
- Oyun Değeri: $\alpha = \beta$ ise bunların ortak değerine "oyunun değeri" denir. Oyunun değeri g ile gösterilecektir. Oyun matrisinin satır oyuncusuna göre düzenlendiğini kabul edelim. g pozitif ise oyunun sonunda satır oyuncusu ortalama g birim kazanacağı anlamına gelir.
- Tepe Noktalı Oyunlar: Stratejilerin kararlı olduğu bazı oyunlar vardır. Bunlar alt ve üst değerleri eşit olan oyunlardır. Bu tür oyunlara "tepe noktalı oyun"lar denir. Tepe noktası aynı zamanda bir denge noktası olup hiç bir oyuncu denge durumunu bozmadı. Bir oyunun birden fazla tepe noktası olabilir.
- Ari (Sade) Strateji: Oyun kaç kez tekrar edilirse edilsin oyunun her bir tekrarında hep aynı strateji seçiliyorsa bu stratejiye sade strateji denir. Sade stratejiler tepe noktasının belirlediği stratejilerdir.
- Karma Stratejiler: Oyunlarda genellikle daha etkili olan karma stratejiler kullanılır. Karma strateji, tam strateji takımındaki olasılık dağılımıyla tanımlanır.

Örnek 9.3

Örnek 9.3: Aşağıdaki kazanç matrisine sahip 4×4 oyunun tepe noktasını bulunuz.

Tablo 9.4

Satır Oyuncusu Stratejisi	Sütun Oyuncusu Stratejisi				Satır En Küçüğü
	C ₁	C ₂	C ₃	C ₄	
R ₁	-8	7	2	3	-8
R ₂	1	-6	-2	5	-6
R ₃	7	5	3	4	3
R ₄	4	-4	-8	6	-8
Sütun En Büyübü	7	7	3	6	3 = 3

Çözüm 9.3

Tablo 9.4

Satır Oyuncusu Stratejisi	Sütun Oyuncusu Stratejisi				Satır En Küçüğü
	C ₁	C ₂	C ₃	C ₄	
R ₁	-8	7	2	3	-8
R ₂	1	-6	-2	5	-6
R ₃	7	5	3	4	3
R ₄	4	-4	-8	6	-8
Sütun En Büyübü	7	7	3	6	3 = 3

- **Çözüm 9.3:** Oyunda tepe noktası bulunup bulunmadığını belirleyebilmek için önce her satırın en küçük değeriyle satır en küçüğü başlıklı sütunu, daha sonra her sütunun en büyük değeriyle sütun en büyüğü başlıklı satırı oluşturalım. Oluşturulan sütunu oyun matrisinin sütunlarına, satırı ise satırlarına ekleyelim. Şimdi de sırasıyla oyunun alt değeri (α) ile üst değerini (β) bulalım. Oyunun alt ve üst değerleri aşağıda gösterilmiştir.
- Oyunun alt değeri = $\alpha = \text{enb}(-8, -6, 3, -8) = 3$
- Oyunun üst değeri = $\beta = \text{enk}(7, 6, 3, 6) = 3$
- $3 = 3$ olduğundan, oyunun tepe noktası vardır. Bu noktada kesişen iki stratejiden R3 satır oyuncusunun, C3 sütun oyuncusunun en iyi stratejileridir. Oyunun ortalama değeri $g = 3$ olduğundan oyun satır oyuncusu için çekicidir.

Örnek 9.5

- **Örnek 9.5:** Satır oyuncusu sütun oyuncusuna göstermeden elindeki kağıda 1 ile 20 arasında bir sayı yazar ve sütun oyuncusuna sayıyla ilgili doğru veya yalan söyler. Sütun oyuncusu ya buna inanır veya rakibinin doğru söylemediğini düşünerek sayıyı kendisine göstermesini ister. Satır oyuncusunu suçsuz yere suçlaması durumunda sütun oyuncusu satır oyuncusuna 15 TL öder. Sütun oyuncusunun satır oyuncusunun kendisine yalan söylediğini doğru tesbit etmesi durumundaki kazancı 20 TL'dir. Sütun oyuncusu satır oyuncusunun doğru söylediğini kabul ederse satır oyuncusu sütun oyuncusuna 5 TL öder. Satır oyuncusu yalan söyledişi halde sütun oyuncusu buna inanırsa satır oyuncusu 5 TL kazanır. Oyun matrisini düzenleyiniz ve oyuncuların sade stratejilerini bulunuz.

Çözüm 9.5

Çözüm 9.5: Görüldüğü gibi satır oyuncusunun doğru veya yalan söylemek gibi iki stratejisi vardır. Sütun oyuncusunun da satır oyuncusuna inanmak veya inanmamak gibi iki stratejisi vardır. Dolayısıyla oyun 2×2 boyutundadır. Bu belirlemenin ardından düzenlenen ödemeler matrisi Tablo 9.6'da gösterilmiştir. Sütun en büyükleriyle oluşturulan satır ve satır en küçükleriyle oluşturulan sütun da tabloda gösterilmiştir.

Tablo 9.6

Satır Oyuncusu Strateji	Sütun Oyuncusu Stratejisi		Satır En Küçüğü
	İnanmak	İnanmamak	
Doğru Söylemek	-5	15	-5
Yalan Söylemek	5	-20	-20
Sütun En Büyüüğü	5	15	$-5 \neq 5$

$\alpha = \text{enb}(-5, -20) = -5 \neq \beta = \text{enk}(5, 15) = 5$ olduğundan oyunun tepe noktası yoktur. Dolayısıyla oyuncuların sade stratejilerinden söz edilemez.

Örnek 9.6

- **Örnek 9.6:** İki oyuncu aynı anda taş, kağıt veya makas demektedirler. Söylenen kelimeler aynı olduğunda beraberlik söz konusu olmaktadır. Aksi halde, diğerinden daha güçlü olan nesnenin adını söyleyen oyuncu rakibinden 1 TL almaktadır. Makas kağıdı kestiğinden makas kağıttan, kağıt taşı sardığından kağıt taştan, taş makası kırdığından taş makastan güçlündür. Oyunun kazanç matrisini düzenleyerek oyuncuların sade stratejilerini belirleyiniz.

Çözüm 9.6

Çözüm 9.6: Her iki oyuncunun taş, kağıt veya makas demek üzere üçer stratejisi vardır. Yani oyun 3×3 boyutundadır. Buna göre ödemeler matrisi aşağıdaki gibi düzenlenecektir.

Tablo 9.7

Satır Oyuncusu Stratejisi	Sütun Oyuncusu Stratejisi			Satır En Küçüğü
	Taş	Kağıt	Makas	
Taş	0	-1	1	-1
Kağıt	1	0	-1	-1
Makas	-1	1	0	-1
Sütun En Büyükü	1	1	1	-1 \neq 1

$\alpha = \text{enb}(-1, -1, -1) = -1 \neq \beta = \text{enk}(1, 1, 1) = 1$ olduğundan oyunun tepe noktası yoktur. Dolayısıyla oyuncuların sade stratejilerinden söz edilemez.

Tepe Noktasız Oyunlar ve Karma Stratejiler

- Bir $m \times n$ oyunun tepe noktası yoksa, özellikle m ve n 'nin büyük değerleri için çözüm zor olabilir. Genel olarak bir oyunun tepe noktası yoksa oyunu çözmeden önce mümkünse m ve n değerlerinin küçültülmesi, yani bazı stratejilerin devre dışı bırakılmaları uygun olur. Bu işlem ancak bazı özel stratejilerin belirlenmesiyle gerçekleştirilir.
- Boyut küçültmede kullanılabilecek iki çeşit strateji vardır:
- 1. Eş stratejiler: Biri diğerine tercih edilemeyen stratejilere "eş strateji" ler denir. Genel olarak bir oyun matrisinin bir satır/sütunun tüm elemanları başka bir satır/sütunun karşılıklı elemanlarına eşit ise bu stratejilere eş stratejiler denir. Eş stratejilerden rasgele seçilen biri dışındakiler matristen çıkartılarak oyunun çözümü kolaylaştırılır. Boyut indirgenmesi sonucu ulaşılan çözüm orijinal problemin de çözümüdür.
- 2. Üstün stratejiler: Oyunda tercih edilen ve stratejilerden bazlarını devre dışı bırakan stratejilere "üstün stratejiler", bu yolla devre dışı kalan stratejilere ise "mahkum stratejiler" denir. Genel olarak bir oyunun tepe noktası yoksa, oyunu çözmeden önce yapılacak ilk iş varsa bütün eş ve mahkum stratejileri devre dışı bırakmaktır.

Örnek 9.7-Örnek 9.8

Örnek 9.7: Kazanç matrisi aşağıda verilen oyunun eş stratejilerini belirleyiniz.

Tablo 9.8

Satır Oyuncusu Stratejisi	Sütun Oyuncusu Stratejisi			
	C_1	C_2	C_3	C_4
R_1	1	2	3	1
R_2	3	6	1	3
R_3	0	5	4	0
R_4	1	2	3	1

Örnek 9.8: Aşağıdaki kazanç matrisine sahip oyunun üstün stratejilerini bulunuz.

Tablo 9.9

Satır Oyuncusu Stratejisi	Sütun Oyuncusu Stratejisi				Satır En Küçüğü
	C_1	C_2	C_3	C_4	
R_1	1	0	3	1	0
R_2	7	-1	6	3	-1
R_3	-3	0	5	1	-3
R_4	2	3	4	5	2
Sütun En Büyübü	7	3	6	5	$2 \neq 3$

Örnek 9.9

Örnek 9.9: Kazanç matrisi aşağıda gösterilen oyunun tepe noktasını belirleyerek oyuncuların en iyi stratejilerini bulunuz.

Tablo 9.13

Satır Oyuncusu Stratejisi	Sütun Oyuncusu Stratejisi				Satır En Küçük ü
	C ₁	C ₂	C ₃	C ₄	
R ₁	10	10	8	17	8
R ₂	17	-13	26	23	-13
R ₃	-30	30	25	13	-30
R ₄	24	32	14	25	14
Sütun En Büyübü	24	32	26	25	14 ≠ 24

Çözüm 9.9: Tablo 9.13'ün son gözesinde gösterildiği gibi oyunun alt değeri (14) ile üst değeri (24) eşit olmadıklarından oyunun tepe noktası yoktur. Bu durumda maksimin ve minimaks stratejilerden dolayısıyla, sade stratejilerden söz edilemez.

Örnek 9.10

Örnek 9.10: Kazanç matrisi aşağıda gösterilen oyunun sade stratejilerini belirleyiniz.

Tablo 9.14

Satır Oyuncusu Stratejisi	Sütun Oyuncusu Stratejisi		Satır En Küçüğü
	C ₁	C ₂	
R ₁	3	5	3
R ₂	6	4	4
Sütun En Büyüüğü	6	5	4 ≠ 5

Çözüm 9.10: Tablo 9.14'ün son gözesinde gösterildiği gibi oyunun tepe noktası yoktur. Bu durumda sade stratejilerden söz edilemez. Bu nedenle, karma strateji kavramının açıklanması gereklidir.

Karma Strateji

- Karma Strateji: Belirli bir oranda kullanılmış sade stratejilerin rasgele sıralanışından ibaret birleşik stratejilere karma strateji denir. Buna göre bir sade strateji, stratejilerden birinin kullanılma olasılığı 1, ötekilerin kullanılma olasılığı sıfır olan bir karma stratejinin özel bir durumu olarak düşünülebilir.

Örnek 9.10-Satır Oyuncusu Açısından

- Örnek 9.10'daki oyunu oynayan oyuncuların karma stratejilerini belirleyiniz.

Tablo 9.14

Satır Oyuncusu Stratejisi	Sütun Oyuncusu Stratejisi		Satır En Küçüğü
	C ₁	C ₂	
R ₁	3	5	3
R ₂	6	4	4
Sütun En Büyübü	6	5	4 ≠ 5

- Soruna önce satır oyuncusu açısından bakalım. Satır oyuncusunun birinci stratejiyi seçmesi olasılığına p dersek, ikinci stratejiyi seçmesi olasılığı (1 - p) olur. Satır oyuncusunun amacı kazancını en büyük yapacak p değerini belirlemektir. p'nin hesaplanmasıında izlenen yaklaşım aşağıda açıklanmıştır.
- Sütun oyuncusu daima birinci stratejiyi (C₁) oynarsa, satır oyuncusunun kazancının beklenen değeri (E₁) aşağıdaki gibi olur.
- $E_1 = 3p + 6(1 - p) = 3p + 6 - 6p = 6 - 3p$
- Sütun oyuncusu daima ikinci stratejiyi (C₂) oynarsa, satır oyuncusunun kazancının beklenen değeri (E₂) aşağıdaki gibi elde edilir.

$$E_2 = 5p + 4(1 - p) = 5p + 4 - 4p = p + 4$$

- E₁ ve E₂'nin birlikte çözülmesiyle bulunur. E₁ ve E₂'nin eşitlenmesi ve çözülmesiyle p aşağıdaki gibi hesaplanacaktır.

$$E_1 = E_2 \Rightarrow p + 4 = 6 - 3p \Rightarrow p = 1/2 \text{ ve } 1 - p = 1/2$$

- Buna göre, oyunun n kez tekrarlanması durumunda oyunun değeri (E₁ veya E₂'den) 4.5 ((E₁ = 1/2 + 4 veya E₂ = 6 - 3(1/2))) olarak bulunur. Satır oyuncusu ortalama 4.5 birim kazanmayı umar.

Grafik Çözümü-Satır Oyuncusu Açısından

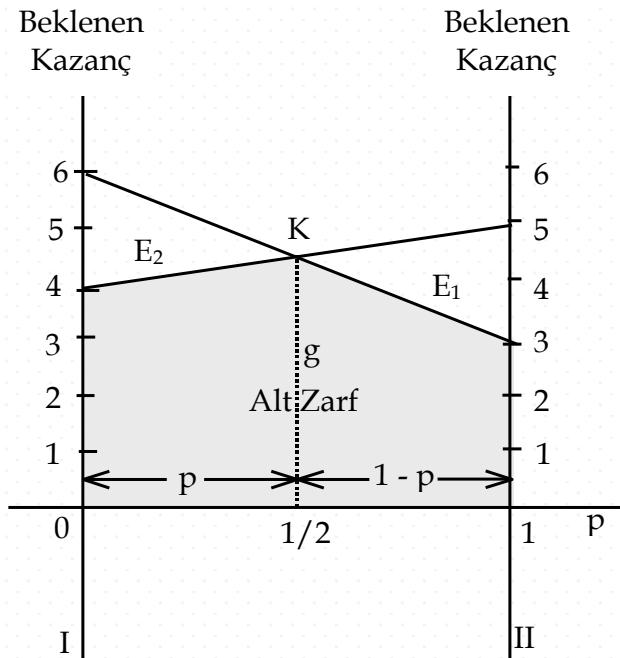
Örnek 9.10: Aşağıda gösterilen oyunun değerini grafik yöntemi ile bulunuz

Tablo 9.14

Satır Oyuncusu Stratejisi	Sütun Oyuncusu Stratejisi		Satır En Küçüğü
	C ₁	C ₂	
R ₁	3	5	3
R ₂	6	4	4
Sütun En Büyübü	6	5	4 ≠ 5

Grafik Çözümü-Satır Oyuncusu Açısından

Bulgularımızı şekil üzerinde gösterelim. Bunun için yatay eksen p 'yi, dikey eksen beklenen kazanç göstermek üzere bir koordinat sistemi oluşturalım. p 'nin sıfır ile 1 arasında değiştiği göz önünde bulundurulduğunda ilgilenilen alan $p = 0$ ve $p = 1$ dikmeleri (I, II) ile belirlenecektir.



Şekil 9.1

Şekil 9.1'den görüldüğü gibi satır oyuncusu için en iyi durum, E_1 ve E_2 doğrularının belirlediği alt zarfın K ile gösterilen en üst noktasıdır. Satır oyuncusu $E_1 = E_2$ olmasını sağlayan olasılıklardan uzaklaşırsa sütun oyuncusu oyunun değerinin 4.5'den daha düşük olmasını sağlayacak sade bir stratejiye sahip olur.

Örnek 9.10-Sütun Oyuncusu Açısından

Tablo 9.14

Satır Oyuncusu Stratejisi	Sütun Oyuncusu Stratejisi		Satır En Küçüğü
	C_1	C_2	
R_1	3	5	3
R_2	6	4	4
Sütun En Büyübü	6	5	$4 \neq 5$

- Oyuna bir de sütun oyuncusu açısından bakalım. Sütun oyuncusunun birinci stratejiyi seçmesi olasılığı q dersek, ikinci stratejiyi seçmesi olasılığı $(1 - q)$ olur. Sütun oyuncusunun amacı kaybını en küçük yapacak q değerini belirlemektir. q 'nun belirlenmesinde izlenen yaklaşım aşağıda açıklanmıştır.
- Satır oyuncusu daima birinci stratejiyi (R_1) oynarsa, sütun oyuncusunun kaybının beklenen değeri (F_1) aşağıdaki gibi olur.

$$F_1 = 3q + 5(1 - q) = 3q + 5 - 5q = -2q + 5$$

- Satır oyuncusu daima ikinci stratejiyi (R_2) oynarsa, sütun oyuncusunun kaybının beklenen değeri aşağıdaki gibi olur.

$$F_2 = 6q + 4(1 - q) = 6q - 4q + 4 = 2q + 4$$

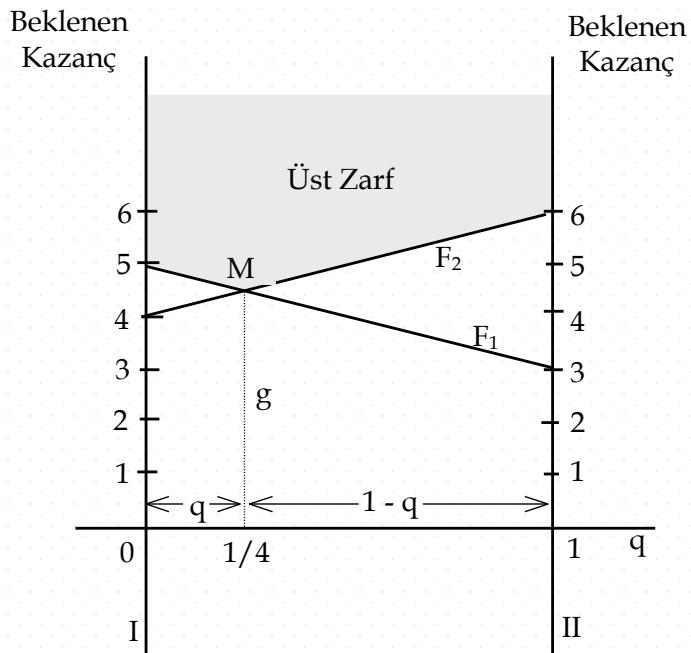
- Oyunun her bir tekrarında satır oyuncusu F_1 ve F_2 'yi daha yüksek düzeyde tutacak stratejiyi sefer. Bu nedenle sütun oyuncusunun amacı, bu en büyük değerleri mümkün olduğunda küçültmektir. Çözüm, F_1 ve F_2 'nin birlikte çözülmesiyle bulunur. Çözüm aşağıda gösterilmiştir.

$$F_1 = F_2 \Rightarrow 5 - 2q = 2q + 4 \Rightarrow q = 1/4, 1 - q = 3/4$$

Buradan da g , F_1 veya F_2 'den 4.5 (satır oyuncusu için gerçekleştirilen çözümde olduğu gibi) olarak bulunur.

Grafik Çözümü-Sütun Oyuncusu Açısından

Bulgularımızı şekil üzerinde gösterelim. Bunun için yatay eksen q 'yu, dikey eksen beklenen kazanç göstermek üzere bir koordinat sistemi oluşturalım. q 'nın 0 ile 1 arasında değiştiği dikkate alındığında ilgilenilen alan $q = 0$ ve $q = 1$ dikmeleri (I, II) ile belirlenecektir.



Şekil 9.2

Şekil 9.2'den görüldüğü gibi sütun oyuncusu için en iyi durum F_1 ve F_2 doğrularının belirlediği üst zarfın en alt noktasıdır. Sütun oyuncusu $F_1 = F_2$ olmasını sağlayan olasılıklardan M ile işaretlenen noktadan uzaklaşmamalıdır. Özetle, sütun oyuncusunun amacı F_1 ve F_2 'nin en büyüğünün en küçüklenmesi iken, satır oyuncusunun amacı E_1 ve E_2 'nin en küçüğünün en büyüklenmesidir. Her iki oyuncu bunu yaparsa oyunda denge kurulmuş olur.

mx2 ve 2xn Oyunların Çözümü

Önceki kesimde herhangi bir 2×2 oyunun basit bir grafik kullanarak nasıl kolayca çözülebileceğini açıkladık. Aynı yöntem oyunculardan birinin iki, diğerinin ikiden fazla stratejisinin bulunduğu oyun problemlerinin çözümünde de kullanılabilir. Grafik yaklaşımı ile herhangi bir $2 \times n$ veya $m \times 2$ oyunun 2×2 oyuna indirgenmesi amaçlanmaktadır. Boyutun 2×2 'ye indirgenmesinden sonra problem 2×2 durumunda olduğu gibi çözülebilmektedir.

Örnek 9.13

Örnek 9.13: Bir 4×3 oyunun kazanç matrisi aşağıda verilmiştir. Oyunu grafik yöntemiyle çözerek oyuncuların strateji seçimlerini ve oyunun değerini bulunuz.

Tablo 9.18

Satır Oyuncusu Stratejisi	Sütun Oyuncusu Stratejisi		Satır En Küçüğü
	C ₁	C ₂	
R ₁	3	4	3
R ₂	2	4	2
R ₃	6	2	2
R ₄	4	-2	-2
Sütun En Büyüüğü	6	4	$3 \neq 4$

Çözüm 9.13

Çözüm 9.13: Oyunun alt değeri 3, üst değeri 4 olduğundan, tepe noktası yoktur. Bu yüzden çözüm bir karma strateji çifti olacaktır. Strateji sayısı iki olan oyuncu sütun oyuncusu olduğundan çözüm bu oyuncunun stratejileri ile başlatılır. Sütun oyuncusunun C_1 'i seçme olasılığına q dersek, C_2 'yi seçme olasılığı $(1 - q)$ olur. Buna göre satır oyuncusunun R_1, R_2, R_3 ve R_4 strateji seçimlerine bağlı olarak sütun oyuncusunun beklenen kazancı şöyledir:

$$\begin{aligned}R_1 \text{ için, } F_1 &= 3q + 4(1 - q) \\&= 3q + 4 - 4q \\&= -q + 4\end{aligned}$$

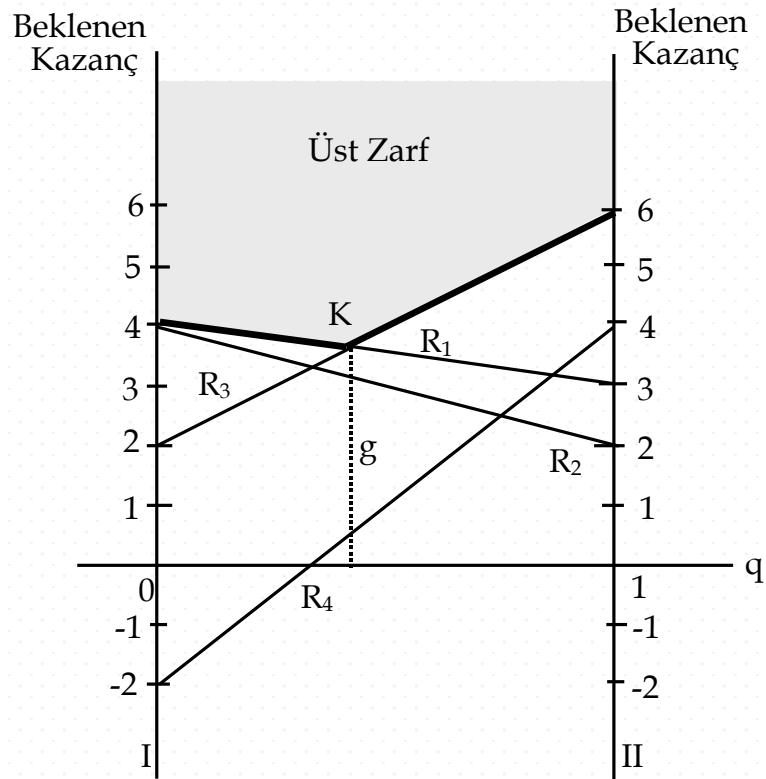
$$\begin{aligned}R_2 \text{ için, } F_2 &= 2q + 4(1 - q) \\&= 2q + 4 - 4q \\&= -2q + 4\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}R_3 \text{ için, } F_3 &= 6q + 2(1 - q) \\&= 6q + 2 - 2q \\&= 4q + 2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}R_4 \text{ için, } F_4 &= 4q - 2(1 - q) \\&= 4q - 2 + 2q \\&= 6q - 2\end{aligned}$$

Yukarıdaki gibi belirlenen beklenen kazançların temsil ettiğleri doğrular Şekil 9.4'deki gibi çizilmiştir. Şekil 9.4'de gösterildiği gibi oyunun çözümü kazançların üst sınırı (kalın çizgiyle çizilmiş) ile belirlenen üst zarfin alt noktasında ortaya çıkar.

Çözüm 9.13



Şekil 9.4

K ile gösterilen noktanın yatay eksene olan uzaklığının oyunun değerine eşit olduğu bilinmektedir. K, R_3 ve R_1 stratejilerine karşı gelen doğrularla belirlendiğinden, satır oyuncusu oyunu R_2 ve R_4 stratejilerini devre dışı bırakarak oynayacaktır. Bu stratejilerin devre dışı bırakılmasıyla, 4x2oyun 2x2 oyuna dönüştürülmüştür. 2x2 oyunun kazanç matrisi Tablo 9.19'da gösterilmiştir.

Çözüm 9.13

Tablo 9.19

Satır Oyuncusu Stratejisi	Sütun Oyuncusu Stratejisi		Satır En Küçüğü
	C_1	C_2	
R_1	3	4	3
R_3	6	2	2
Sütun En Büyübü	6	4	$3 \neq 4$

Şimdi bu basit oyunu çözelim. Satır oyuncusunun stratejisine bağlı olarak sütun oyuncusunun beklenen kazancı aşağıdaki gibi elde edilir.

$$R_1 \text{ için, } F_1 = 3q + 4(1 - q)$$

$$= -q + 4$$

$$R_3 \text{ için, } F_3 = 6q + 2(1 - q)$$

$$= 4q + 2$$

$F_1 = F_3$ bağıntısından $q = 2/5$, $1 - q = 3/5$ olarak hesaplanır. $q = 2/5$ olduğu göz önünde bulundurulduğunda, $g = 18/5$ olur.

Benzer şekilde, sütun oyuncusunun strateji seçimine bağlı olarak satır oyuncusunun kazancı aşağıdaki gibi olur.

$$C_1 \text{ için, } E_1 = 3p + 6(1 - p)$$

$$= -3p + 6$$

$$C_2 \text{ için, } E_2 = 4p + 2(1 - p)$$

$$= 2p + 2$$

Bu iki kazancın eşit oldukları dikkate alındığında satır oyuncusunun strateji seçimine ilişkin olasılıklar, $p = 4/5$, $(1 - p) = 1/5$, $g = 18/5$ olarak belirlenir.

mxn Oyunların Doğrusal Programlama İle Çözümü

Genel olarak, oyuncuların strateji sayıları büydüükçe oyunun çözümü güçleşir. Artan güçlük kesinlikle teoride değil işlem sayısının hızla artmasındadır. Orjinalinde $2 \times n$ veya $m \times 2$ olmayan ya da bu boyutlardan birine indirgenemeyen mxn oyunlar doğrusal programlama ile çözülürler. Bilindiği gibi bir mxn oyunda satır oyuncusunun R_1, R_2, \dots, R_m gibi m stratejisi, rakibinin C_1, C_2, \dots, C_n gibi n stratejisi vardır

Örnek 9.14

Örnek 9.14: Kazanç matrisi aşağıda verilen 3x3 oyunu doğrusal programlama olarak formülleyerek simpleks yöntemle çözünüz.

Tablo 9.21

Satır Oyuncusu Stratejisi	Sütun Oyuncusu Stratejisi			Satır En Küçüğü
	C ₁	C ₂	C ₃	
R ₁	-2	6	3	-2
R ₂	3	-4	7	-4
R ₃	-1	2	4	-1
Sütun En Büyüüğü	3	6	7	-1 ≠ 3

Çözüm 9.14

Çözüm 9.14: Doğrusal programlama ile çözüme geçmeden önce matrisin negatif elemanlarını pozitif değerlere dönüştürmek için kazanç matrisinin her bir elemanına $L = 4$ ekleyelim. Tablo 9.21'deki kazanç matrisinin her bir değerine 4 eklenmesiyle problemin orijinal kazanç matrisi, Tablo 9.22'deki gibi olur. Bu ekleme oyunun değerini 4 artırır ama çözümü değiştirmez.

Tablo 9.22

Sütun Oyuncusu Stratejisi	Satır Oyuncusu Stratejisi			Satır En Küçüğü
	C ₁	C ₂	C ₃	
R ₁	2	10	7	2
R ₂	7	0	11	0
R ₃	3	6	8	3
Sütun En Büyüüğü	7	10	11	3 ≠ 7

Oyunu önce satır oyuncusu için çözelim.

Çözüm 9.14

Bu oyuncunun doğrusal programlama formülasyonu aşağıda gösterilmiştir.

$$Z_{\text{enk}} = 1/g = x_1 + x_2 + x_3$$

$$2x_1 + 7x_2 + 3x_3 \geq 1$$

$$10x_1 + 0x_2 + 6x_3 \geq 1$$

$$7x_1 + 11x_2 + 8x_3 \geq 1$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Burada g oyunun değeri ve $x_i = p_i/g$ olarak tanımlanmıştır.

Simpleks çözüm için artık ve yapay değişkenlerin modele sokulması ile,

$$Z_{\text{enk}} = x_1 + x_2 + x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 + MA_1 + MA_2 + MA_3$$

$$2x_1 + 7x_2 + 3x_3 - x_4 + A_1 = 1$$

$$10x_1 + 0x_2 + 6x_3 - x_5 + A_2 = 1$$

$$7x_1 + 11x_2 + 8x_3 - x_6 + A_3 = 1$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, A_1, A_2, A_3 \geq 0$$

elde edilir.

Problemin başlangıç çözüm tablosu aşağıda gösterilmiştir.

Çözüm 9.14

Tablo 9.23

TDV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	A_1	A_2	A_3	$\mathcal{C}V$
A_1	2	7	3	-1	0	0	1	0	0	1
A_2	10	0	6	0	-1	0	0	1	0	1
A_3	7	11	8	0	0	-1	0	0	1	1
Z_j	$19M$	$18M$	$17M$	$-M$	$-M$	$-M$	M	M	M	$3M$
$Z_j - C_j$	$19M-1$	$18M-1$	$17M-1$	$-M$	$-M$	$-M$	0	0	0	-



Tablo 9.24

TDV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	A_1	A_2	A_3	$\mathcal{C}V$
A_1	0	7	$9/5$	-1	$1/5$	0	1	$-1/5$	0	$4/5$
x_1	1	0	$3/5$	0	$-1/10$	0	0	$1/10$	0	$1/10$
A_3	0	11	$19/5$	0	$7/10$	-1	0	$-7/10$	1	$1/3$
Z_j	1	$18M$	$\frac{28M+3}{5}$	$-M$	$\frac{9M-1}{10}$	$-M$	M	$\frac{-9M+1}{10}$	M	$\frac{11M+1}{10}$
$Z_j - C_j$	0	$18M-1$	$\frac{28M-2}{5}$	$-M$	$\frac{9M-1}{10}$	$-M$	0	$\frac{-19M}{10}$	0	-



Çözüm 9.14

Tablo 9.25

TDV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	A_1	A_2	A_3	ζV
A_1	0	0	$-34/55$	-1	$-27/110$	$7/11$	1	$27/110$	$-7/11$	$67/110$
x_1	1	0	$3/5$	0	$-1/10$	0	0	$1/10$	0	$1/10$
x_2	0	1	$19/55$	0	$7/110$	$-1/11$	0	$-7/10$	$1/11$	$3/110$
Z_j	1	1	$\frac{52 - 34M}{55}$	$-M$	$\frac{-4 - 27M}{110}$	$\frac{7M - 1}{11}$	M	$\frac{27M - 4}{110}$	$\frac{1 - 7M}{11}$	$\frac{67M - 14}{110}$
$Z_j - C_j$	0	0	$\frac{-34M - 3}{55}$	$-M$	$\frac{-4 - 27M}{110}$	$\frac{7M - 1}{11}$	0	$\frac{-83M - 4}{110}$	$\frac{1 - 18M}{11}$	-



Tablo 9.26

TDV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	A_1	A_2	A_3	ζV
x_6	0	0	$-34/35$	$-11/7$	$-27/70$	1	$11/7$	$27/70$	-1	$67/70$
x_1	1	0	$3/5$	0	$-1/10$	0	0	$1/10$	0	$1/10$
x_2	0	1	$9/35$	$-1/7$	$1/35$	0	$1/7$	$-1/35$	0	$4/35$
Z_j	1	1	$6/7$	$-1/7$	$-1/14$	0	$1/7$	$1/14$	0	$3/14$
$Z_j - C_j$	0	0	$-1/7$	$-1/7$	$-1/14$	0	$\frac{1 - 7M}{7}$	$\frac{1 - 14M}{14}$	$-M$	-

Tüm $Z_j - C_j \leq 0$ olduğundan yürürlükteki çözüm en iyidir. En iyi çözümün yer aldığı tablodan görüldüğü gibi, $x_1 = 1/10$, $x_2 = 4/35$, $x_3 = 0$ 'dır

İki Kişiili Sabit Toplamlı Oyunlar

İki-kİŞili sabit-toplamlı bir oyunda oyuncuların kazançları toplamı c ($c \neq 0$) sabitine eşittir. Genel olarak iki-kİŞili sabit-toplamlı oyunlar iki-kİŞili sıfır-toplamlı oyunların çözümünde kullanılan yöntemlerle çözülür.

Örnek 9.15: Yörede yayın yapan iki TV kanalı vardır. 20:00-21:00 saatleri arasında tam 50 milyon kişi bu iki kanalı izlemektedir. Kanallar 20:00-21:00 saatleri arasında yapacakları yayının türünü önceden aynı anda anons etmek zorundadırlar. Yayın türünün sonradan değiştirilmesi mümkün değildir. Kanalların mümkün seçimleri ve birinci kanalı seyredeceklerin sayısı Tablo 9.30'da verilmiştir. Oyunun tepe noktası bulunup bulunmadığını ve birinci kanal için oyunun değerini bulunuz.

Tablo 9.30

Kanal 1 Yayın Türü	Kanal 2 Yayın Türü			Satır En Küçüğü
	Yarışma	Arkası Yarın	Komedi	
Yarışma	25	25	40	25
Arkası Yarın	25	40	18	18
Komedi	18	24	30	18
Sütun En Büyübü	25	40	40	25 = 25

Çözüm 9.15: Tablonun satır en küçükleriyle oluşturulan son sütunu incelendiğinde $enb(25, 18, 18) = 25$ olduğu görülecektir. Bu, birinci kanalı en az 25 milyon kişinin izleyeceği anlamına gelir. Diğer taraftan, sütun en büyükleriyle oluşturulan son satır incelendiğinde $enk(25, 40, 40) = 25$ olduğu görülecektir. Bu ise ikinci kanalı en az 25 milyon kişinin izleyeceği anlamına gelir. $Enb(\text{satır en küçükleri}) = enk(\text{sütun en büyükleri})$ olduğundan, oyun tepe noktalı bir oyundur. Buna göre 25 milyon kişi birinci kanaldaki yarışma programını, kalan 25 milyon kişi ikinci kanaldaki yarışma programını izleyecektir. Özette oyunun satır oyuncusu için değeri 25, sütun oyuncusu için 25 ($= 50 - 25$) dir.

İki Kişiili Sabit Olmayan Toplamlı Oyunlar

- Uygulamada sabit olmayan toplamlı oyunlarla karşılaşmak daha olağandır. Rakip işletmelerin tam anlamıyla çatışma durumunda olmaları genellikle beklenmez. Bu kesimde oyuncuların işbirliği yapmalarının söz konusu olmadığı iki kişili sabit olmayan toplamlı oyun problemleri üzerinde durulacaktır.
- **Örnek 9.16:** Soygun yapan iki kişi yakalanmış ve tutukevine konmuştur. Suçlu olduklarının bilinmesine karşın yargının elinde suçu kanıtlayacak yeterli delil yoktur. Bu nedenle savcı sanıkları birbirlerine karşı tanıklık etmeleri konusunda ikna etmeye çalışmaktadır. Savcı sanıkların suçlarını itiraf etmelerini sağlamak için her birine ayrı ayrı şunları söyler: Suçu biriniz itiraf eder diğerine karşı tanıklık ederse itiraf eden serbest kalır, itiraf etmeyen 9 yıl ceza alır. Her ikiniz birden suçlu olduğunuzu kabul ederseniz 6'şar yıl ceza alırsınız. Her ikiniz birden suçu reddederseniz 1'er yıl ceza alırsınız. Sizce sanıklar için en uygun davranış ne olur?

Çözüm 9.16

Çözüm 9.16: Sanıkların birbirleriyle haberleşmelerinin mümkün olmadığını varsayalım. Buna göre sanıkların kazanç (ceza almak istenmeyen bir durum olduğu için - değerli) matrisleri aşağıdaki gibi düzenlenir.

Birinci sanık için düzenlenen kazanç (ceza) matrisi aşağıda gösterilmiştir. İkinci sanığın ceza matrisine geçmeden önce birinci sanık için en iyi davranış biçiminin ne olacağını araştıralım. Birinci sanığın, ikinci sanığın itiraf edeceğini umduğumu düşünelim. Bu durumda kendisi için en iyi strateji suçu kabul etmek olur (-6, -9'dan daha iyidir). Birinci sanığın, ikinci sanığın reddedeceğini düşündüğünü varsayıyalım. Bu durumda birinci sanık için en iyi seçenek suçu kabul etmek olur (0, -1'den iyidir). Özette ikinci sanığın tavrı ne olursa olsun birinci sanık için en iyi davranış biçimini suçu kabul etmektir. Birinci sanığın ceza matrisi Tablo 9.31'de gösterilmiştir.

Tablo 9.31

Birinci Sanık	İkinci Sanık	
	İtiraf	Red
İtiraf	-6	0
Red	-9	-1

Şimdi de ikinci sanık için en iyi davranış biçiminin ne olacağını araştıralım. İkinci sanığın durumunu özetleyen ceza matrisi Tablo 9.32'de gösterilmiştir.

Tablo 9.32

Birinci Sanık	İkinci Sanık	
	İtiraf	Red
İtiraf	-6	-9
Red	0	-1

İkinci sanığın, birinci sanığın suçu kabul edeceğini umduğunu düşünelim. Tablo 9.32'den görüleceği gibi, bu durumda kendisi için en iyi strateji suçu kabul etmek olur (-6, -9'dan iyidir). İkinci sanığın, birinci sanığın reddedeceğini düşündüğünü varsayıyalım. Bu durumda kendisi için en iyi seçenek suçu kabul etmek olur (0, -1'den iyidir). Özette birinci sanığın tavrı ne olursa olsun ikinci sanık için en iyi davranış biçimini suçu kabul etmektir. Sabit olmayan toplamlı oyunlarda oyuncuların oyun matrisleri yukarıdaki gibi ayrı matrisler olarak değil tek matris halinde gösterilir. Birinci ve ikinci suçluların ceza matrislerinin göz önünde bulundurulmasıyla oluşturulan ceza matrisi aşağıda gösterilmiştir.

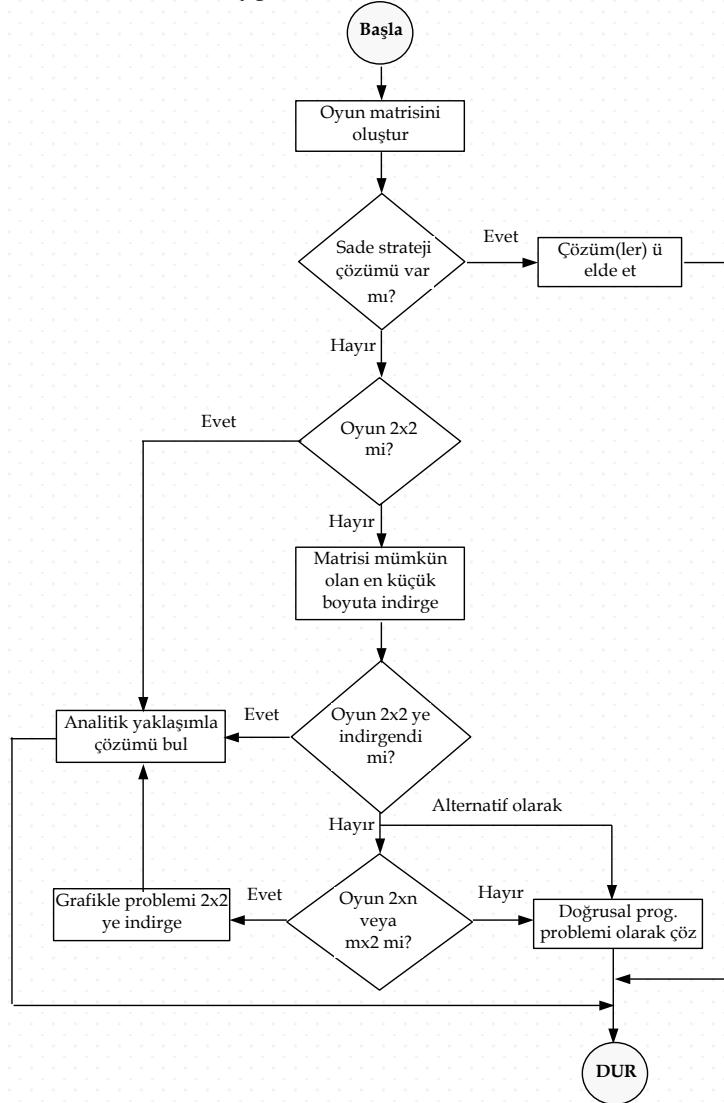
Tablo 9.33

Birinci Suçlu	İkinci Suçlu	
	İtiraf	Red
İtiraf	(-6, -6)	(0, -9)
Red	(-9, 0)	(-1, -1)

- Yukarıdaki açıklamaların ortaya koyduğu gibi oyunun tepe noktası (-6, -6) gözesinde ortaya çıkmaktadır. Bunun anlamı her iki sanığın suçu kabul etmesi ve 6'şar yıl ceza almaları (toplam 12 yıl ceza)'dır.
- Tablo 9.33 incelendiğinde (-1, -1) gözesinin işaret ettiği stratejilerin diğerlerinden daha iyi olduğu düşünülebilir. Çünkü bu sanıkların 6'şar yıl yerine 1'er yıl ceza almaları demektir. Ancak, (-1, -1) sonucu hiç gerçekleşmeyebilir. Çünkü sanıklardan biri bu gözenin işaret ettiği stratejiyi benimsemişken diğerini bundan vazgeçerse cezasının 1 yıl yerine sıfır yıl olmasını sağlayabilir. Bu yüzden (-1, -1) tepe noktası olamaz. İki-kİŞili sıfır-toplamlı oyunlarda olduğu gibi, iki-kİŞili sabit olmayan-toplamlı oyunların tepe noktası oyuncuların strateji seçimlerini tek başına değiştirmelerinin oyunculara hiçbir yarar sağlamadığı noktada ortaya çıkar.

Oyun Teorisi Akış Çizelgesi

Oyun problemlerinin çözümünde aşağıdaki akış çizelgesinin göz önünde bulundurulmasının uygun olur.



Oyun Teorisinin Türkiye'deki Durumu

Türkiye'de Oyun Teorisi üzerine çalışan ve dünya bilimsel platformlarında göz ardı edilmeyen bir akademisyenler grubu bulunmaktadır. Bunlar ülkemizin çeşitli üniversitelerinde, genellikle İktisat ve Matematik bölümlerinde çalışmaktadır. Bu kişiler uygulamalı projelere katkıda bulunabilecek birikime de sahiptirler. Ne var ki Türkiye'de bu birikime kayda değer bir talep bulunmamaktadır. Oysa ki dünyada Oyun Teorisi üzerine çalışan bilim adamlarından açık artırmaların tasarılanmasından kirliliğin önlenmesine kadar bir çok konuda entelektüel destek istenmektedir.

Türkiye'deki durumu, Oyun Teorisi'nin kamuoyunun gündemine nispeten gecikerek girmesiyle açıklamak mümkün olabilir.

İhale Ve Oyun Teorisi

Son aylarda ülkemizde ve Avrupa'da birçok cep telefonu lisans ihalesi gerçekleşmektedir. Başarının ölçüsü vergi mükellefleri açısından ihalenin getirişi, tüketiciler açısından ise ihalenin yol açtığı rekabetçi ortam sonucu telefon ücretlerinin düşüklüğü olarak belirlenebilir. Her iki kesimi de korumakla sorumlu olan hükümetlerin de bu iki amaç arasında bir denge kurması beklenmektedir. Bazı ihalelerin her iki açıdan da başarısız olması bir şanssızlık değil, ihalenin kurallarını koyan hükümetlerin oyun teorisini yeterince hesaba katmamalarının sonucudur. Örneğin, Hollanda hükümetinin açtığı ihalenin kuralları İngiltere'de uygulanan kuralların benzeri olmasına rağmen ihalenin “fiyasko” denilecek bir sonuçla bitmiştir. İngiltere'nin beş lisans için \$34 milyar kazandığı ihalenin göz önüne alındığında kişi başına benzer bir lisans ücretinin Hollanda hükümetine \$9 milyar kazandırması beklenirken ihalenin sonucunda \$2.5 milyar elde edildi.

Bu sonuç, önemli olanın benzer kuralların uygulanması değil, şartlara uygun kuralların uygulanması olduğunu vurgulamaktadır. Bir başka ifade ile oyunun kurgusunun başlangıç şartlarına göre düzenlenmesi gerekmektedir. İngiltere'de cep telefonu alanında faaliyet gösteren dört oyuncu varken beş lisans için ihaleye çıktı ve daha baştan en az bir yeni oyuncunun piyasaya gireceği belirlendi. İhale dokuz yeni oyuncunun teklif vermesiyle büyük bir rekabet içerisinde geçti ve İngiltere hükümetine \$34 milyar getiri sağladı.

Hollanda'da ise zaten beş oyuncu vardı ve yine beş lisans ihaleye çıkarıldı. Yeni oyuncuların piyasaya giriş maliyetleri sadece ihale bedeli ile sınırlı olmadığından mevcut oyunculara göre daha yüksektir. Hollanda ihalesi tamamen açık artırma ile yürütüldüğünden, yeni oyuncular hangi teklifi verirlerse versinler mevcut oyuncuların fiyatı yeni bir oyuncu için cazip olmayacak noktaya kadar artırabileceklerini düşündüklerinden ihaleye bağımsız olarak girmekten çekindiler ve mevcut oyuncularla ortaklıklar kurarak ihaleye girdiler. Dolayısı ile rekabet azaldığından Hollanda beklediği geliri elde edemedi. Aynı zamanda piyasaya yeni oyuncu girmesini ve rekabetin artmasını da sağlayamadı.

Ülkemizdeki GSM 1800 ihalesindeki ikinci lisansın birincisinden yüksek olması şartı İş Bankası-Telecom Italia ortaklığının, yaratıcı bir strateji uygulayarak ve ikinci lisans için cazip olacak bir ortamı ortadan kaldırarak, GSM 1800 teknolojisinde tek oyuncu olmalarına fırsat sağladı. Belki hükümetin iki lisanstan elde edilecek gelir beklentilerine yaklaşındı, ama piyasadaki oyuncu sayısı sınırlı kaldı.

Sonuç olarak; hükümetlerin, yeterince talep yaratabilmek, potansiyel oyuncuların anlaşmalarına fırsat tanıtmamak ve ihale sonucunda rekabetçi bir piyasa yapısına kavuşabilmek için, ihale şartlarını mevcut piyasa konumunu göz önüne alarak ve oyun teorisinden faydalananarak belirlemeleri gerekmektedir.

Sonuç

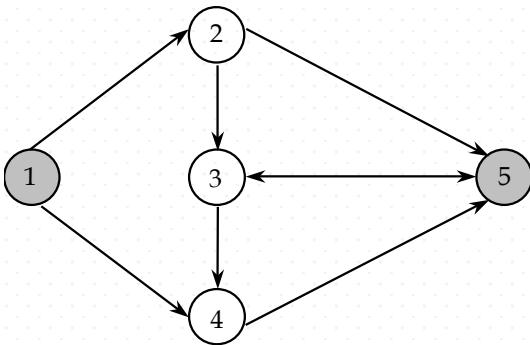
Bugünün dünyası, çok hızlı değişim ve gelişim içerisindeidir. Böyle bir ortamda işletmelerin ayakta kalabilmeleri, yapacakları iç ve dış işletme analizlerine ve bu analizler ışığında alınacak kararlara bağlıdır.

Karar alma tekniklerinden biri de oyun teorisidir. Oyun teorisini tarihsel gelişimi irdelendiğinde, oyunların şans kuramının 17. yüzyılda ortaya atılmış olduğu ve olasılık kuramı adı verilen matematik dalının gelişmesinde kaynak olduğu görülür. Çıkarları çatışan tarafların akılçıl davranış kurallarının belirlenmesi olan oyun teorisi, bu tür karar ortamlarını açıklayan matematiksel bir yaklaşımındır.

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

AĞ MODELLERİ

Temel Kavramlar



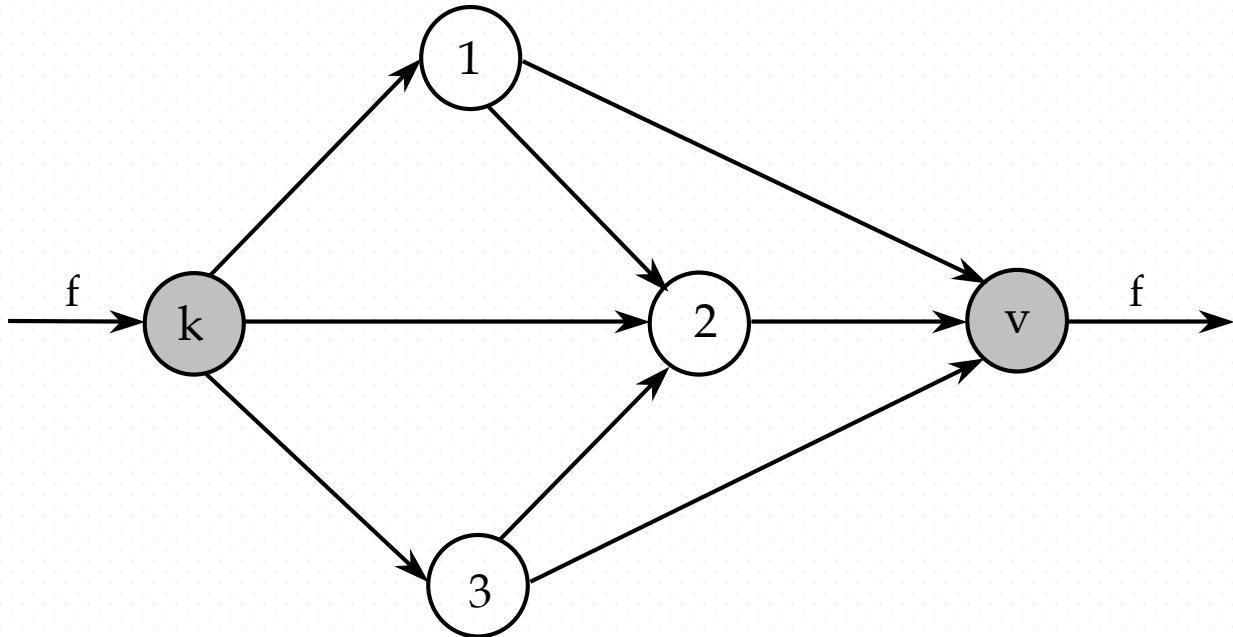
Şekil 4.1

- Grafik: Belirli sayıda nokta ve bu noktaları birbirine birleştiren çizgi ve/veya eğrilerden oluşan kümeye grafik denir.
- Düğüm: Grafikte bulunan noktaların her birine düğüm denir. Düğümler, içlerine kendilerini tanımlayan sembollerin (harf veya rakam) yazıldığı küçük dairelerle gösterilirler.
- Dal: Herhangi iki düğümü birbirine birleştiren çizgi veya eğriye dal denir. Bir dal okla gösterildiğinde yönlendirilmiş olur. Okla birleştirilen iki düğüm i ve j olmak üzere, bunları birleştiren dal (i, j) ile gösterilir. Bu sembolde i, (i, j) dalının başlangıç j ise bitiş düğümüdür. Böyle bir dal üzerinde bir akış söz konusuya, akışın yönü i'den j'ye olmak üzere tektir. Yönlendirilmemiş bir (i, j) dalı, biri (i, j) diğeri (j, i) olmak üzere yönlendirilmiş iki dal yerine geçer.
- Ağ: Grafiğin dalları üzerinde bir akış olması durumunda grafik, akış ağı veya kısaca ağ (serim, network, şebeke) ismini alır.
- Yol: Başlangıç düğümü, kendisinden önce gelen dalın bitiş düğümü ile aynı olan dallar dizisine yol denir.
- Zincir: Kendisinden önce gelen dalla tek bir ortak noktası olan dallar dizisine zincir denir.
- Çevrim: Başlangıç düğümü ile bitiş düğümü aynı olan yola çevrim denir.

En Yüksek Akış Problemleri

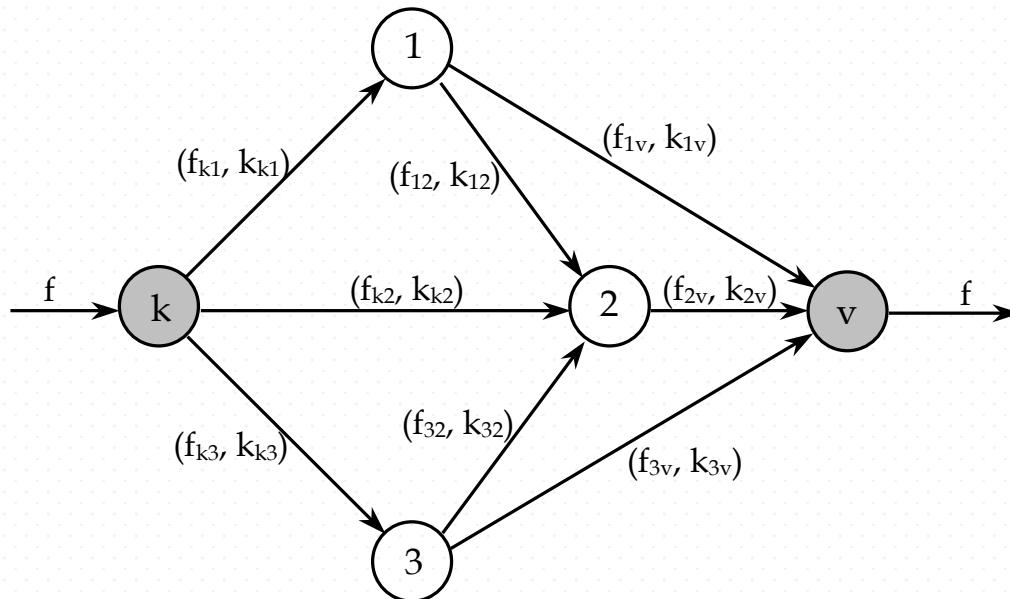
Bu bölümde, belirli bir zaman aralığında birbirlerine doğrudan değil ara noktalarla bağlı olan iki nokta arasında taşınan malzeme veya akış miktarının en büyütülebilmesi problemi üzerinde durulacaktır. Örneğin en yüksek trafik akışının sağlanmasına ilişkin problemlerin çözümünde EYA algoritması kullanılabilir.

İlk bakışta ulaşım problemi gibi görünen bu tip problemlerin ulaşım problemlerinden en önemli farkı, kaynak (başlangıç) ile varış (bitiş) arasındaki bağlantının doğrudan değil ara noktalar aracılığı ile sağlanmasıdır.



- Şekil 4.6'daki akış ağı, ürünün k ile gösterilen kaynaktan v ile gösterilen bitişe hangi dallar üzerinden, hangi yöne doğru gönderilebileceğini göstermektedir.
- Ara noktalar 1, 2, 3 ile işaretlenmiştir. Kaynak ve bitiş dahil ağdaki beş düğüm birbirlerine $(k, 1)$, $(k, 2)$, $(k, 3)$, $(1, 2)$, $(1, v)$, $(2, v)$, $(3, 2)$ ve $(3, v)$ olmak üzere 8 dalla bağlıdır.
- Yanıtlanmak istenen k'dan v'ye gönderilmek istenen malzemenin, hangi dallar üzerinden hangi miktarlarda taşınması durumunda, v'ye aktarılan kısmın en büyük olacağıdır.

- Her dalın k_{ij} ile gösterilen belirli bir taşıma kapasitesi vardır. (i, j) dalı üzerinden taşınabilecek en yüksek miktarı ifade eden k_{ij} aynı zamanda, akışın i 'den j 'ye doğru gerçekleştiğini göstermektedir.
- Taşınan miktarın en büyük olmasının amaçlandığı bu tip problemlerde, en yüksek akış miktarı f ile gösterilir.
- Diğer taraftan, kapasitesi k_{ij} ile gösterilen (i, j) dalı üzerinden taşınan miktar f_{ij} ile açıklanır. Bu sembol de k_{ij} 'ye benzer şekilde akışın i 'den j 'ye doğru olduğunu göstermektedir.
- En yüksek akış problemleri doğrusal programlama problemi olarak da formüle edilip çözülebilir. Bunun için öncelikle ağı oluşturan dalların taşıma kapasitelerinin belirlenmesi gereklidir.



- Açıklamalar doğrultusunda çizilen ağ aşağıdaki şekilde gösterilmiştir.
- Şeklin ortaya koyduğu gibi ürün akışı kaynaktan 1, 2 ve 3 nolu düğümlere doğrudur. Buna göre,

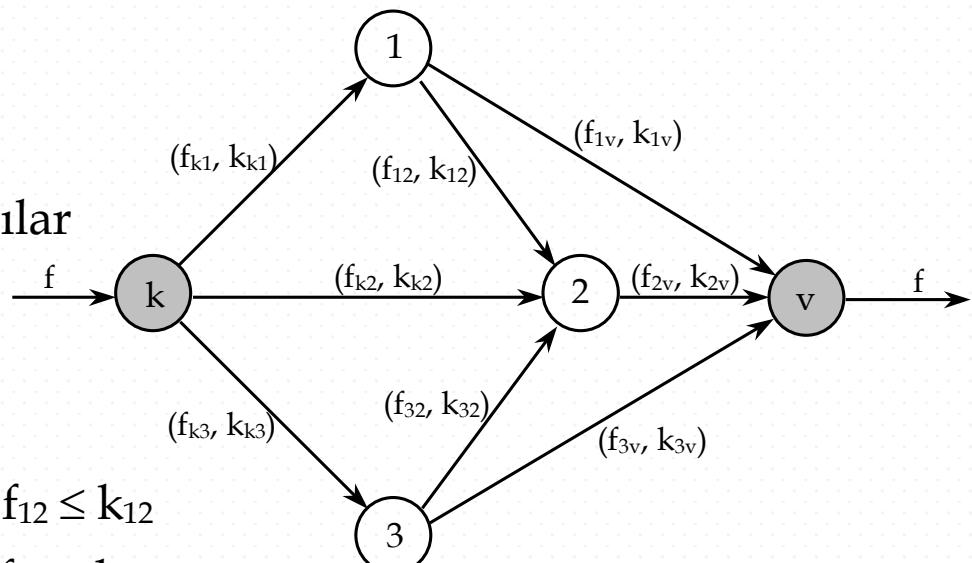
$$f_{k1} + f_{k2} + f_{k3} = f \text{ yazılabilir.}$$

- Kaynaktan varışa olan akışlar toplamının kaynaktaki akış miktarına eşitliğini gösteren bu denkleme "denge denklemi" denir.

• Amaç fonksiyonunun $Z_{\text{enb}} = f$ şeklinde formüllenmesiyle, yukarıdaki ağın doğrusal programlama modeli aşağıdaki gibi formüle edilebilir.

$$Z_{\text{enb}} = f \quad \text{"Amaç fonksiyonu"}$$

$$\left. \begin{array}{l} f_{k1} + f_{k2} + f_{k3} = f \\ f_{12} + f_{1v} = f_{k1} \\ f_{12} + f_{k2} + f_{32} = f_{2v} \\ f_{32} + f_{3v} = f_{k3} \\ f_{1v} + f_{2v} + f_{3v} = f \end{array} \right\} \text{Kısıtlayıcılar}$$



Negatif olmama koşulları

$$0 \leq f_{k1} \leq k_{k1}, 0 \leq f_{k2} \leq k_{k2}, 0 \leq f_{k3} \leq k_{k3}, 0 \leq f_{12} \leq k_{12}$$

$$0 \leq f_{32} \leq k_{32}, 0 \leq f_{1v} \leq k_{1v}, 0 \leq f_{2v} \leq k_{2v}, 0 \leq f_{3v} \leq k_{3v}$$

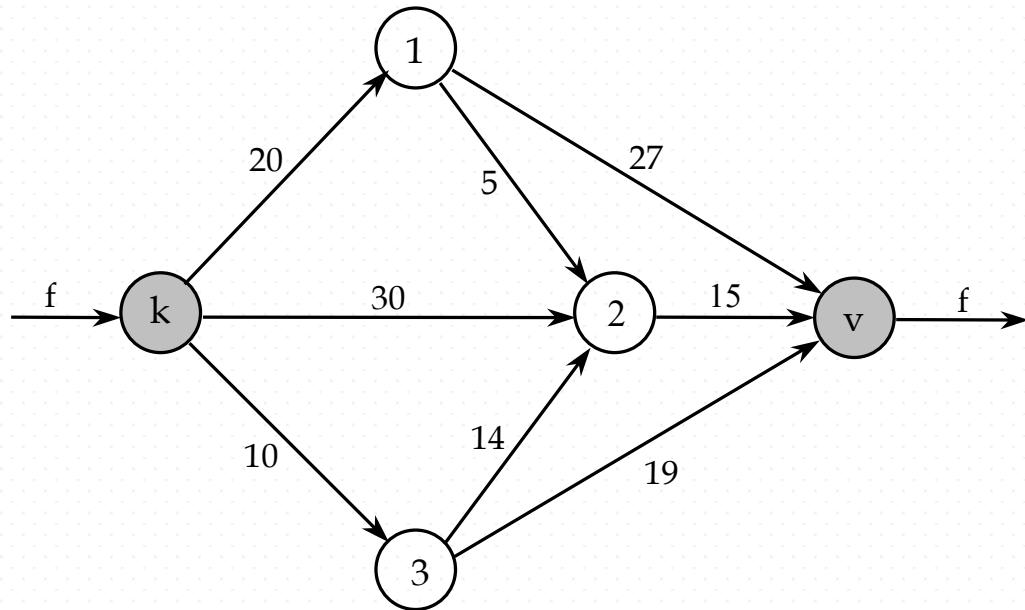
En Yüksek Akış Algoritması

- En yüksek akış algoritmasının esası, kaynaktan bitişe pozitif akışın söz konusu olduğu bir yol bulmaktır. Böyle bir yol "akış artırıcı yol" olarak isimlendirilir. Akış artırıcı yol bulma çabalarının sonuçsuz kalması durumunda en yüksek akış bulunmuş olur.
- Rota Etiketleme İşlemi: Kaynaktan bitişe akış artırıcı yol bulmada kullanılan etiketleme işlemi kaynağın etiketlenmesiyle başlar. k' dan j' ye pozitif akış söz konusu ise j düğümü etiketlenir.
- Genel olarak, aşağıdaki koşullardan birinin sağlanması durumunda j etiketlenir.
 - i ve j düğümlerini birleştiren dal ileri doğrudur ve (i, j) üzerindeki akış miktarı dalgın akış kapasitesinden küçüktür ($f_{ij} < k_{ij}$).
 - i ve j düğümlerini birleştiren dal (j, i) geriye doğrudur ve (j, i) üzerindeki akış miktarı sıfırdan büyütür ($f_{ji} > 0$).
- Etiketleme işlemi bitiş noktası etiketleninceye degen sürdürülür. Bitiş etiketlendiğinde akışı artırıcı bir yol belirlenmiş olur.

- En yüksek akış algoritması, kapasite kısıtları ile birlikte düğümlerdeki akışın korunumunu da sağlayan uygun bir akışla başlar. Başlangıç akış planı (doğrusal programmanın başlangıç çözümüne benzer) olarak isimlendirilen bu plan, akış miktarının 0 olduğu duruma karşılık gelir. Bu akışın geliştirilebilmesi için öncelikle kaynak (başlangıç düğümü) etiketlenir. Etiketlenen düğüm * ile işaretlenir. Kaynağın etiketlenmesinden sonra yukarıda açıklanan rota etiketleme işlemiyle başka bir düğüm etiketlenir. Bitiş etiketlendiğinde pozitif akışın söz konusu olduğu akış artırıcı bir yol belirlenmiş olur. Belirlenen bu yol üzerindeki düğümlerin etiketleri yardımıyla yol üzerinden aktarılacak en yüksek akış (d) hesaplanır. d 'nin hesaplanmasıдан sonra yolun ileri dallarındaki akışlar d kadar artırılırken, geriye doğru dallardaki akışlar d kadar azaltılır. Bu işlemler yeni akış artırıcı yolların bulunması için tekrarlanır.

Örnek 4.1

Örnek 4.1: Dallarının akış kapasiteleri (f_{ij}) oklar üzerinde gösterildiği gibi olan ağda k 'dan v 'ye taşınacak en yüksek ürün miktarını ve taşıma planını belirleyiniz. Problemin akış ağı Şekil 4.11'de gösterilmiştir.

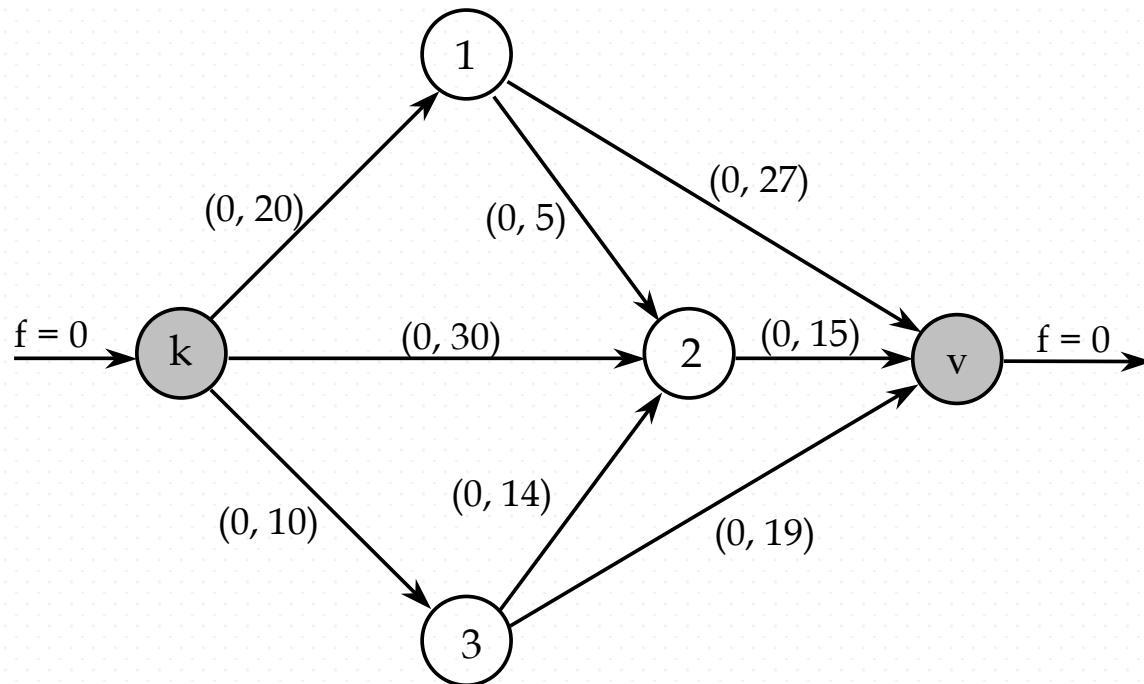


Çözüm 4.1

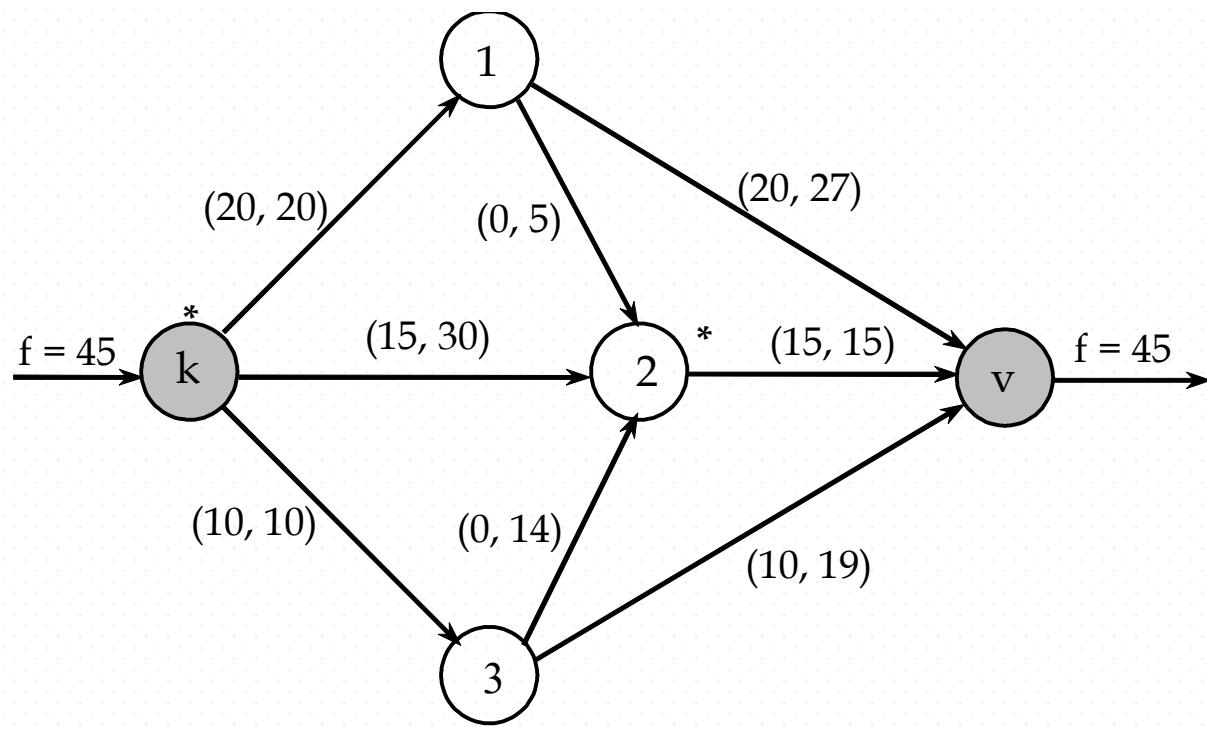
Çözüm 4.1: Problemin çözümüne herhangi bir akışın olmadığı durumla başlayalım. Başlangıç akış planını yansıtan bu durum için aşağıdaki gibi bir eşitlik yazılabilir.

$$f_{k1} = f_{k2} = f_{k3} = f_{12} = f_{32} = f_{1v} = f_{2v} = f_{3v} = 0$$

Bu durum orijinal ağ üzerinde aşağıdaki gibi gösterilir. (i, j) dalları üzerindeki sayılar (f_{ij}, k_{ij}) 'leri göstermektedir.



Çözüm 4.1



Yönlendirilmemiş Dallar

Yönlendirilmemiş Dalların Olması Durumu: En yüksek akış algoritması için ağıın yönlendirilmiş olması gerekmekle birlikte, ağıın yönlendirilmemiş olması en yüksek akışın belirlenmesini engellemez. Söz konusu algoritmanın yönlendirilmemiş bir ya da birkaç dalın bulunduğu ağlarda uygulanabilmesi için öncelikle yönlendirilmemiş dalların bulunduğu orijinal ağıın yönlendirilmesi, daha sonra en yüksek akış algoritmasının orijinaline eşdeğer olan bu ağa uygulanmasına geçilir. i ve j düğümlerini birleştiren K kapasiteli yönlendirilmemiş bir dal aşağıdaki gibi yorumlanabilir.

$$f_{ij} \leq K$$

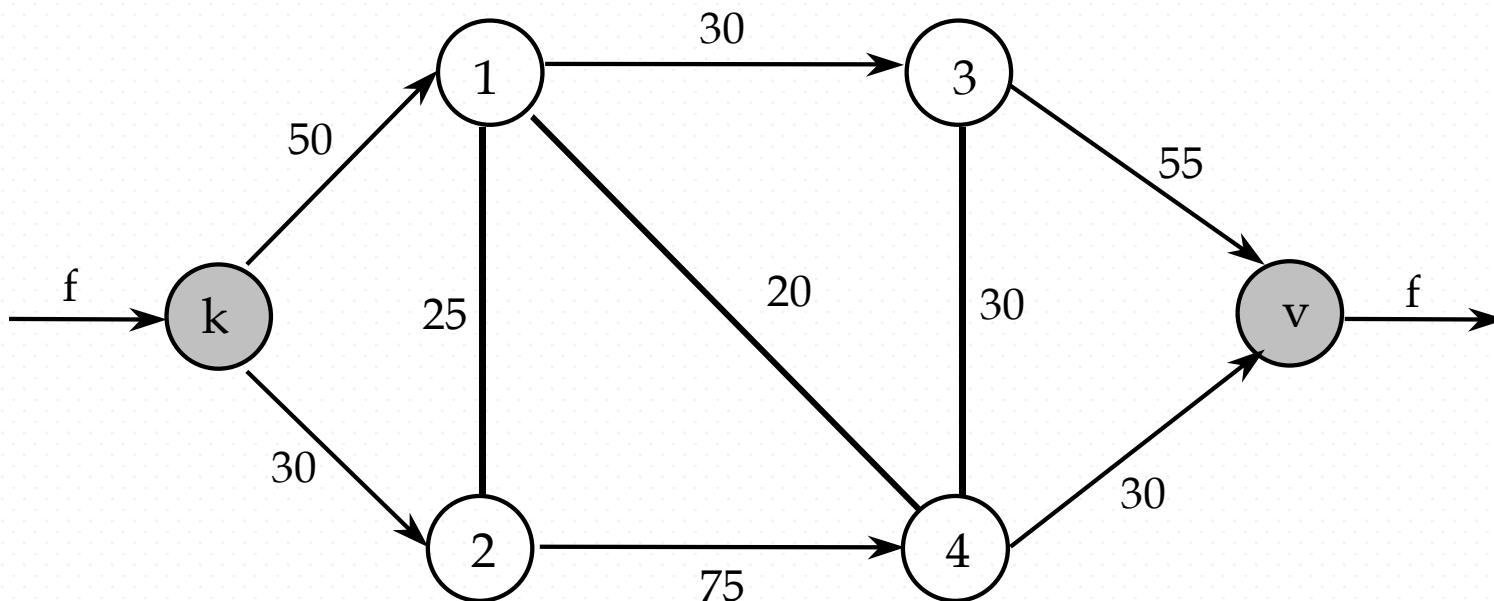
$$f_{ji} \leq K$$

$$(f_{ij})(f_{ji}) = 0$$

Yukarıdaki eşitsizlikler (i, j) üzerinden en yüksek K birimlik akışın hem i 'den j 'ye hem de j 'den i 'ye doğru olabileceğini göstermektedir. $(f_{ij})(f_{ji}) = 0$ eşitliğiyle akışın tek yönde olması sağlanmaktadır.

Örnek 4.2

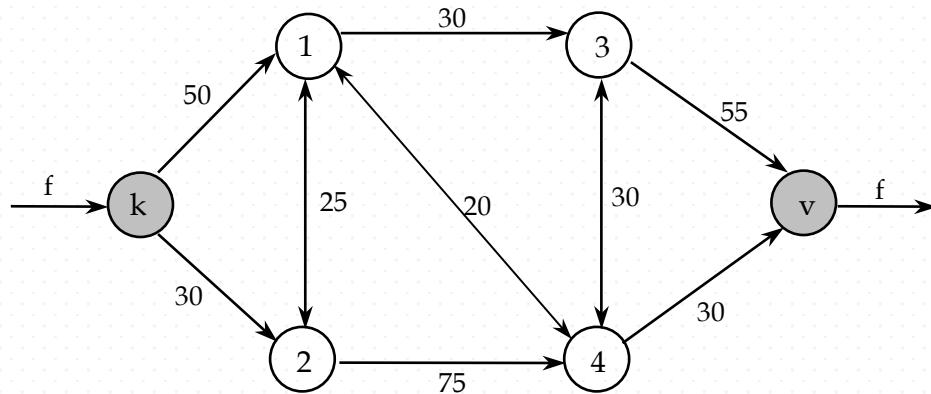
Örnek 4.2: Aşağıdaki gibi bir yol ağını ele alalım. Dallar üzerindeki sayılar trafik akış kapasitelerini göstermektedir. Problem, en yüksek trafik akışını sağlayabilmek için henüz yönlendirilmemiş dallar üzerine tek yön işaretinin hangi istikamette konulacağının belirlenmesidir.



Şekil 4.23

Çözüm 4.2

Çözüm 4.2: Öncelikle yönlendirilmemiş her bir dalın ters yönlü ve eşit kapasiteli iki dalla değiştirilmesi gereklidir. Bu düzenlemeyle, Şekil 4.24'de gösterilen yönlendirilmiş ağ elde edilir.



Şekil 4.24

En yüksek akış algoritmasının, orijinaline eşdeğer olan bu ağ üzerinde uygulanmasıyla, k' dan v' ye en yüksek akış miktarı ve en yüksek akışı sağlayan rota belirlenir.

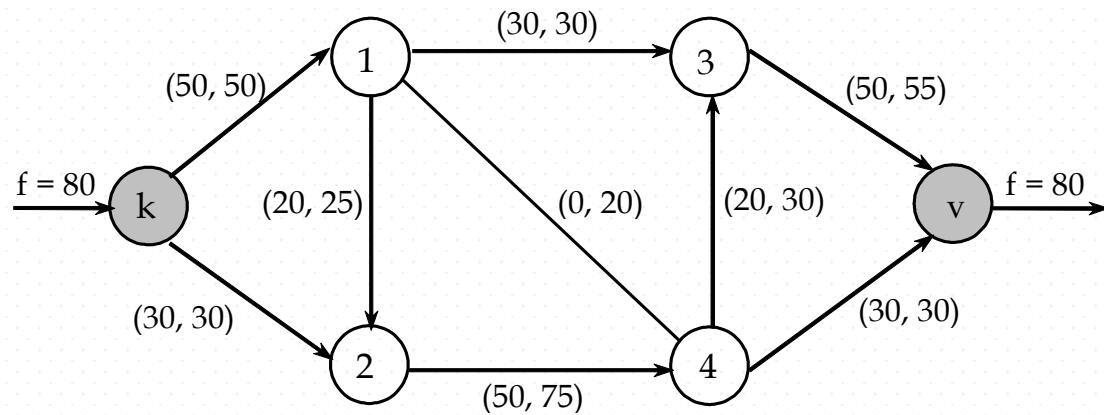
En iyi çözümün bulunmasından sonra her iki yönde akışın söz konusu olduğu dallar belirlenir ve aşağıdaki inceleme gerçekleştirilebilir.

i ve j düğümlerini birleştiren yönlendirilmemiş bir dal üzerinde,

$f_{ij} > f_{ji}$ ise, (i, j) dalındaki akış $(f_{ij} - f_{ji})$ olur, yani yönlendirilmemiş (i, j) dalı i' den j' ye doğru yönlendirilir.

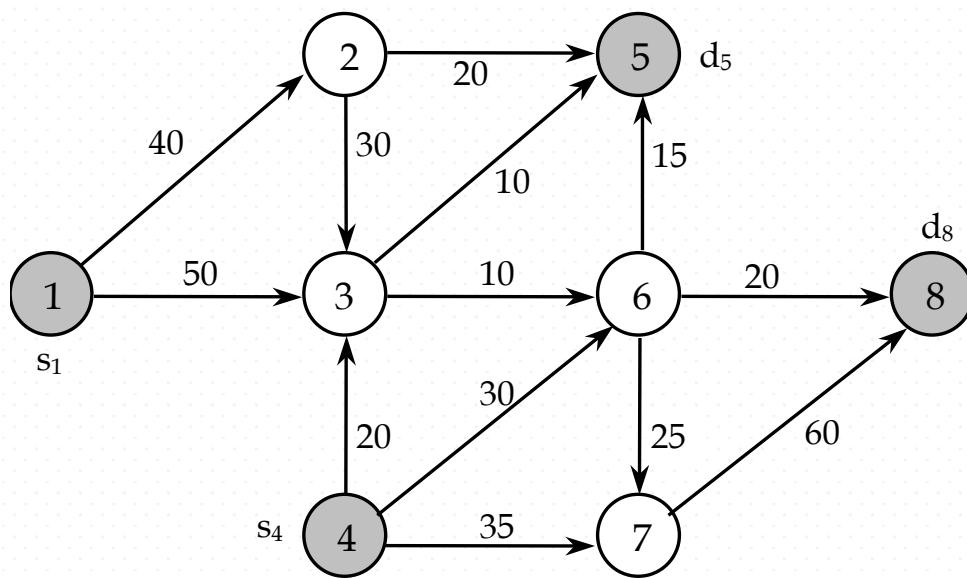
$f_{ji} > f_{ij}$ ise, (j, i) dalındaki akış $(f_{ji} - f_{ij})$ olur, yani yönlendirilmemiş (i, j) dalı j' den i' ye doğru yönlendirilir.

Çözüm 4.2



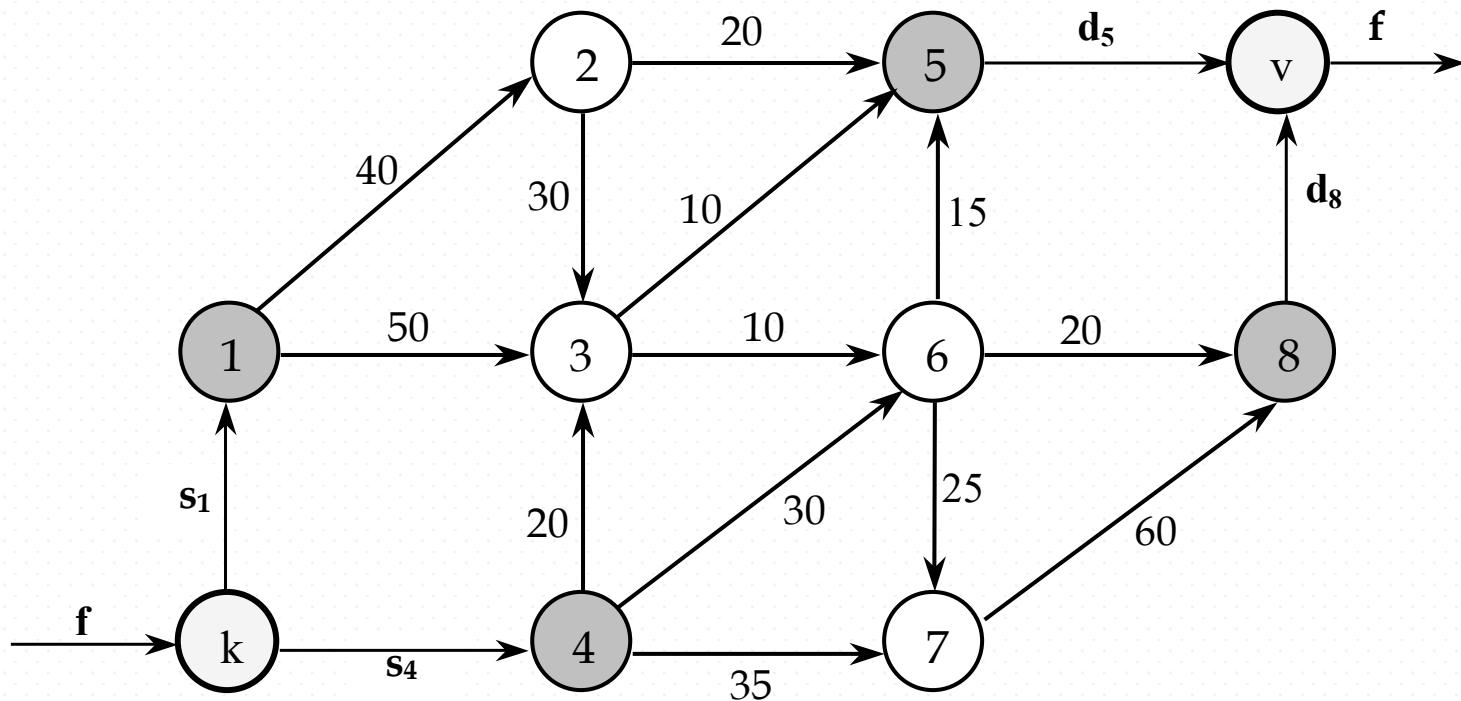
Şekil 4.25

- *Çok Kaynak-Çok Bitiş Olması*: Ağ üzerinde birden fazla kaynak ve/veya birden fazla bitiş noktası bulunduğu düşünelim. Bu durumda en yüksek akışın belirlenebilmesi için hayali bir kaynak ile hayali bir bitiş noktasının oluşturulması zorunludur. Yaratılan hayali kaynak gerçek kaynaklara, gerçek bitiş noktaları hayali bitiş noktasına birer dala bağlanır. Ağa eklenen hayali dalların tümü ileriye doğrudur. Hayali dalların akış kapasitelerinin belirlenmesinden sonra problem en yüksek akış problemine dönüşmüş olur.
- **Örnek 4.3:**



Şekil 4.26

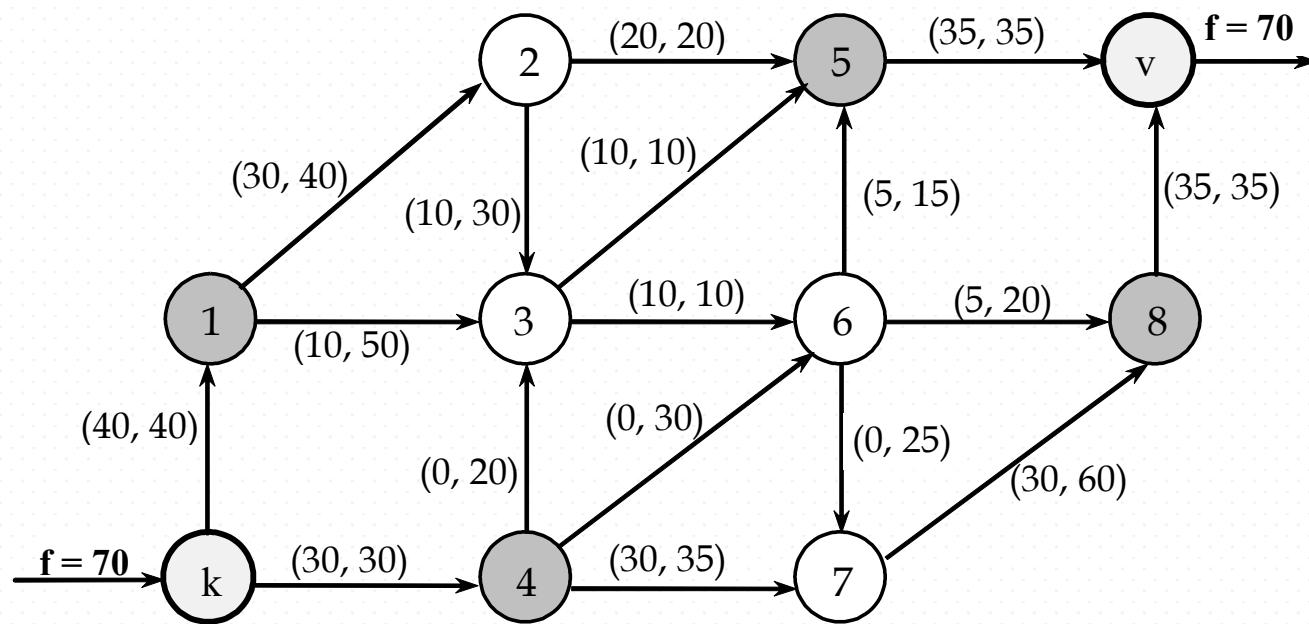
Çözüm 4.3



Şekil 4.27

Gördüğü gibi k 'yı 1 nolu düğüme bağlayan dalın kapasitesi s_1 'e, 4 nolu düğüme bağlayan dalın kapasitesi ise s_4 'e eşittir. Gerçek bitiş noktalarını hayali bitiş noktasına bağlayan dalların taşıma kapasiteleri ise çıkış noktalarının istem miktarlarıyla bağlantılı olarak sırasıyla d_5 ve d_8 'dır.

Bu düzenlemenin ardından hayali kaynaktan bitiş noktasına en yüksek akışın sağlanması gerekebilir. $s_1 = 40$, $s_4 = 30$, $d_5 = 35$, $d_8 = 35$ olarak verilmiş olsun. Bu durumda en iyi çözüm Şekil 4.28'deki gibi elde edilecektir.



Şekil 4.28

En Kısa Yol Problemleri

- Başlangıç ve bitiş düğümleri arasındaki en kısa yolun belirlenmesi problemi, en kısa yol problemi olarak bilinir.
- Ağ problemlerinin çoğu doğrusal programlama problemi olarak değerlendirilerek simpleks yöntemle çözülebilir. Bu durum en kısa yol problemleri için de geçerlidir. Bir en kısa yol问题mini doğrusal programlama olarak inceleyebilmek için dallar üzerindeki akışların 1 birime, i 'den j 'ye malzeme taşıma maliyetinin ise (i, j) dalının uzunluğuna eşit olduğu düşünülür.
- Çözüm İçin Kullanılan Yöntemler:
 - Simpleks Yöntemi
 - Listeleme Yöntemi
 - Dijkstra Algoritması

- **Dijkstra Algoritması**: Dijkstra Algoritması, n düğümlü ağ kapsamındaki tüm dalların negatif olmayan ve bilinen uzunluklara (d_{ij}) sahip olduğu varsayımlına dayanır. d_{ij} , (i, j) dalının uzunluğu, i'den j'ye gitmenin maliyeti veya (i, j) dalını katetme zamanı olabilir. i ve j düğümleri birbirlerine doğrudan, yani tek bir dalla bağlı degillerse $d_{ij} = \infty$ kabul edilir. $d_{ij} \neq d_{ji}$ olabilir. Ayrıca, bir düğümün kendine uzaklığı sıfır olduğundan, $d_{ii} = 0$ 'dır. Bu varsayımlar altında, düğümlerin önce geçici, sonra kalıcı olarak etiketlenmesi esasına dayanan Dijkstra algoritması, en kısa yol belirleninceye kadar aşağıdaki adımların tekrarlanmasını gerektirir.
- Ön adım: Başlangıç düğümüne sıfır ($d_{11} = 0$) kalıcı etiketi verilir. Sıfır ile kalıcı olarak etiketlenen başlangıç düğümü dışındaki bütün düğümlere, birer geçici etiket verilir. Geçici etiketi hesaplanacak düğüm başlangıç düğümüne tek bir dalla bağlı ise geçici etiketin değeri o dalın uzunluğuna, değilse $+\infty$ 'a eşittir. Geçici etiketlerin belirlenmesinden sonra en küçük olan araştırılır. Araştırma sonucu belirlenen en küçük değer ait olduğu düğümün kalıcı etiketi olur. En küçük değerli geçici etiket sayısı birden çok ise seçim, düğümlerden yalnızca birinin seçilmesi kaydıyla, rasgele yapılır. Kısaca, her seferinde yalnızca bir düğüm kalıcı olarak etiketlenir.

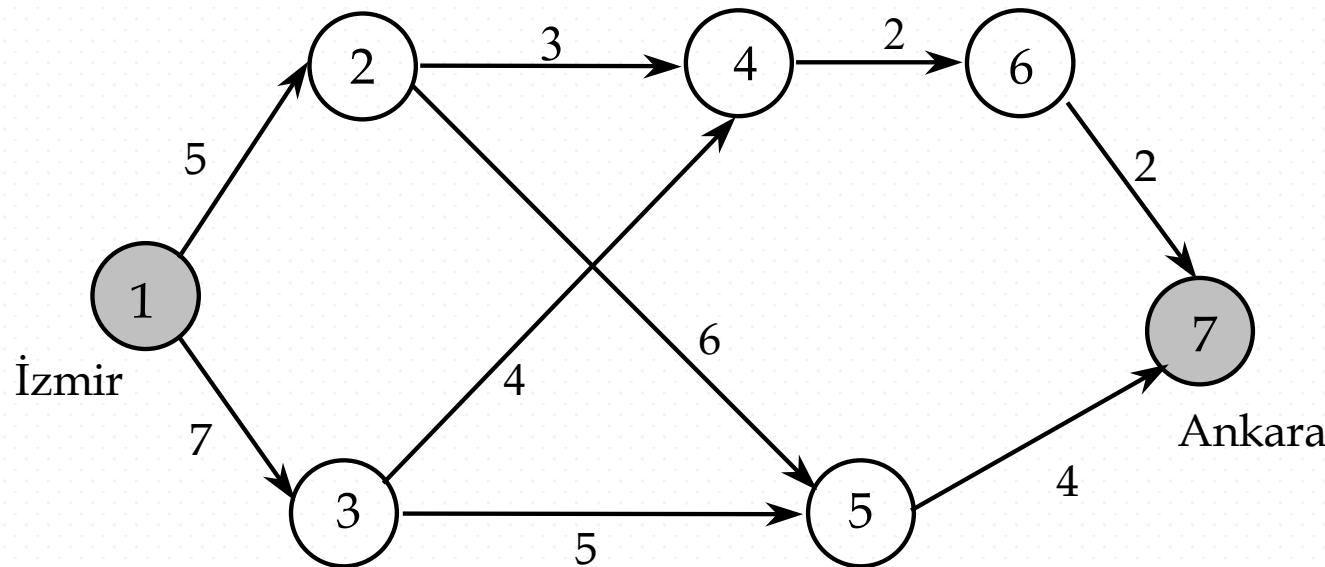
Birinci Adım: Kalıcı etiketi en yeni olan düğüm belirlenir. Bu düğüm K olsun. Ön adımdaki başlangıç düğümüne karşılık gelen bu düğüme bağlı olarak tüm geçici etiketlerin yeni değerleri aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$\text{Enk} \begin{cases} i \text{ düğümünün halihazırdağı geçici etiketi} \\ K \text{ düğümünün kalıcı etiketi } \square(j, K) \text{ dalının uzunluğu} \end{cases}$$

İkinci adım: Birinci adımda hesaplanan geçici etiketlerden en küçük olanı ait olduğu düğümün kalıcı etiketi olur ve * ile işaretlenir. Önceden olduğu gibi, en küçük değerli etiket birden fazla olduğunda düğüm seçimi, her seferinde yalnızca bir düğüm olmak üzere, rasgele yapılır. Son düğüm kalıcı olarak etiketlendiğinde en kısa yol belirlenmiş olur. Son düğümün kalıcı etiketinin değeri en kısa yolun uzunluğuna eşittir.

En kısa yolu oluşturan dalların belirlenmesi için son düğümden başlanarak geriye doğru hareket edilir ve düğümlerin kalıcı etiketleri arasındaki farklar incelenir. Etiketler arasındaki fark iki düğüm arasındaki dalın uzunluğuna eşitse ilgili dal en kısa yol üzerinde, aksi halde değildir.

Örnek 4.3: İzmir'den Ankara'ya gitmek isteyen bir kişi gidebileceği yolları araştırmış ve iki şehri birbirine bağlayan yolları ve bunların uzaklıklarını Şekil 4.29'daki gibi belirlemiştir. Sürücünün amacı İzmir'den Ankara'ya en kısa yoldan gitmektir. İki şehir arasındaki en kısa yolu bulunuz.



Şekil 4.29

Çözüm 4.3

Çözüm 4.3: Ön adım: Başlangıç düğümünün sıfırla kalıcı olarak etiketlenmesinden sonra diğer düğümlerin etiketlenmesine geçilir.

Şekil 4.29'dan görüldüğü gibi başlangıç düğümüne doğrudan bağlı iki düğüm (2 ve 3) vardır. Bu düğümlerin başlangıç düğümüne uzaklıkları sırasıyla 5 ve 7 olduğundan bunların geçici etiketleri sırasıyla, 5 ve 7 olarak belirlenir. Bu iki düğümün dışındaki düğümlerin hepsi başlangıç düğümüne dolaylı olarak bağlı olduklarından etiketleri $+\infty$ 'a eşittir. Bu yolla belirlenen etiket değerleri aşağıda, ait oldukları düğüm numaraları altında gösterilmiştir.

Düğüm No: 1 2 3 4 5 6 7□

Etiket No : 0* 5 7 ∞ ∞ ∞ ∞]

Geçici etiketlerden en küçük (5) olanı 2 nolu düşüme ait olduğundan, bu düşüm 5 ile kalıcı olarak etiketlenir. Böylece etiketler aşağıdaki gibi belirlenmiş ve ön adım tamamlanmış olur.

Düğüm No: 1 2 3 4 5 6 7□

Etiket No : 0* 5* 7 ∞ ∞ ∞ ∞ □

Birinci adım: En yeni kalıcı etiket 2 nolu düğüme aittir. Bu düğüme doğrudan bağlı olan 4 ve 5 nolu düğümlerin yeni geçici etiketlerinin hesaplanması gereklidir. Yeni etiket değerleri aşağıdaki gibi hesaplanmıştır.

Dördüncü düğümün geçici etiketi: $\text{Enk}\{\infty, 5 + 3\} = 8$

Beşinci düğümün geçici etiketi : $\text{Enk}\{\infty, 5 + 6\} = 11$

Hesaplanan değerlerin dikkate alınmasıyla düğüm etiketlerinin yeni değerleri aşağıdaki gibi olur.

Dügüm No: 1 2 3 4 5 6 7

Etiket No : 0* 5* 7 8 11 ∞ ∞

İkinci adım: Birinci adımda belirlenen geçici etiketlerden en küçük olanın 7 olduğu ve bunun üçüncü düğüme ait olduğu görülebilir. Buna göre üçüncü düğüm etiketinin 7 olarak kalıcı kılınmasıyla düğüm etiketleri aşağıdaki gibi belirlenmiş olacaktır.

Dügüm No: 1 2 3 4 5 6 7

Etiket No : 0* 5* 7* 8 11 ∞ ∞

Henüz tüm etiketler kalıcı olmadığından tekrar birinci adıma dönülür.

Birinci adım: Kalıcı etiketi en yeni olan üçüncü düğüme doğrudan bağlı 4 ve 5 nolu düğümlerin yeni geçici etiketleri,

Dördüncü düğümün geçici etiketi: $\text{Enk}\{8, 7 + 4\} = 8$

Beşinci düğümün geçici etiketi : $\text{Enk}\{11, 7 + 5\} = 11$

olarak hesaplanacak böylece düğüm etiketleri, aşağıdaki gibi belirlenecektir.

Düğüm No: 1 2 3 4 5 6 7□

Etiket No : 0* 5* 7* 8 11 ∞ □

İkinci adım: Geçici etiketlerden en küçüğü dördüncü düğüme ait olduğundan, anılan düğüm 8 ile kalıcı biçimde etiketlenir. Buna göre,

Düğüm No: 1 2 3 4 5 6 7□

Etiket No : 0* 5* 7* 8* 11 ∞ □

olur. Henüz tüm etiketler kalıcı olmadığından tekrar birinci adıma dönelim.

Birinci adım: En yeni kalıcı etiket 4 nolu düğüme aittir. Bu düğüme doğrudan bağlı tek düğüm olan 6 nolu düğümün yeni geçici etiketinin hesaplanması gereklidir. Bu işlem aşağıda gösterilmiştir.

Altıncı düğümün geçici etiketi: $\text{Enk}\{\infty, 8 + 2\} = 10$

Bu sonucun kullanılmasıyla belirlenen düğüm etiketleri aşağıda gösterilmiştir.

Düğüm No:	1	2	3	4	5	6	7
Etiket No :	0*	5*	7*	8*	11	10	∞

İkinci adım: Geçici etiketlerden en küçüğü altıncı düğüme ait olduğundan anılan düğümün kalıcı etiketi 10 olur. Buna göre etiketler,

Düğüm No:	1	2	3	4	5	6	7
Etiket No :	0*	5*	7*	8*	11	10*	∞

olur. Etiketleme işlemi henüz tamamlanmadığından birinci adım tekrarlanır.

Birinci adım: Altıncı düğüme bağlı tek düğüm yedinci düğüm olduğundan anılan düğümün geçici etiketi,

Yedinci düğümün geçici etiketi: $\text{Enk}\{\infty, 10 + 2\} = 12$

olarak hesaplanır ve düğüm etiketleri aşağıdaki gibi belirlenmiş olur.

Düğüm No: 1 2 3 4 5 6 7

Etiket No : 0* 5* 7* 8* 11 10* 12

İkinci adım: En küçük değerli (11) geçici etiket beşinci düğüme aittir. Bu nedenle 11, beşinci düğümün kalıcı etiketi olur ve sonuçta düğüm etiketleri aşağıdaki gibi belirlenmiş olur.

Düğüm No: 1 2 3 4 5 6 7

Etiket No : 0* 5* 7* 8* 11* 10* 12

Bu noktada etiketi geçici olan bir düğüm bulunduğuundan birinci adıma dönülür.

Birinci adım: Kalıcı etiketi en yeni olan beşinci düğüme doğrudan bağlı tek düğüm olan yedinci düğümün geçici etiketinin yeni değeri,

Yedinci düğümün geçici etiketi: $\text{Enk}\{12, 11 + 4\} = 12$

olarak hesaplanmıştır.

Sonuçta etiketleme işlemi aşağıdaki gibi tamamlanmıştır.

Düğüm No : 1 2 3 4 5 6 7

Etiket No : 0* 5* 7* 8* 11* 10* 12*

Etiketlerin hepsi kalıcı olduğundan en kısa yol bulunmuştur. Şimdi de toplam uzunluğu 12 birim olan en kısa yol üzerindeki dalları belirleyelim. Bunun için son düğümden başlayarak geriye doğru düğüm düğüm gidelim. 7 ve 6 nolu düğümlerin kalıcı etiketleri arasındaki fark (2) anılan düğümleri birbirine birleştiren dalın uzunluğuna eşit olduğundan (6, 7) dalı en kısa yol üzerindedir. 6 nolu düğümden 5 nolu düğüme gidilemez. 6 ve 4 nolu düğümlerin kalıcı etiketleri arasındaki fark (2), (4, 6)'nın uzunluğuna eşit olduğundan, bu dal en kısa yol üzerindedir. (4, 3) dalının uzunluğu bu düğümlerin etiketleri arasındaki farka eşit olmadığından, (4, 3) dalı en kısa yol üzerinde degildir. 4 ve 2 nolu düğümlerin kalıcı etiketleri arasındaki fark (2, 4)'ün uzunluğuna eşit olduğundan bu dal en kısa yol üzerindedir. Son olarak (2, 1)'in uzunluğu bu dalı tanımlayan düğümlerin etiketleri arasındaki farka eşittir. Dolayısıyla bu dal en kısa yol üzerindedir. Buna göre İzmir'den yola çıkan sürücü sırasıyla, 2, 4, 6 nolu düğümlere uğrayarak İzmir'den Ankara'ya en kısa yoldan ulaşmış olur.

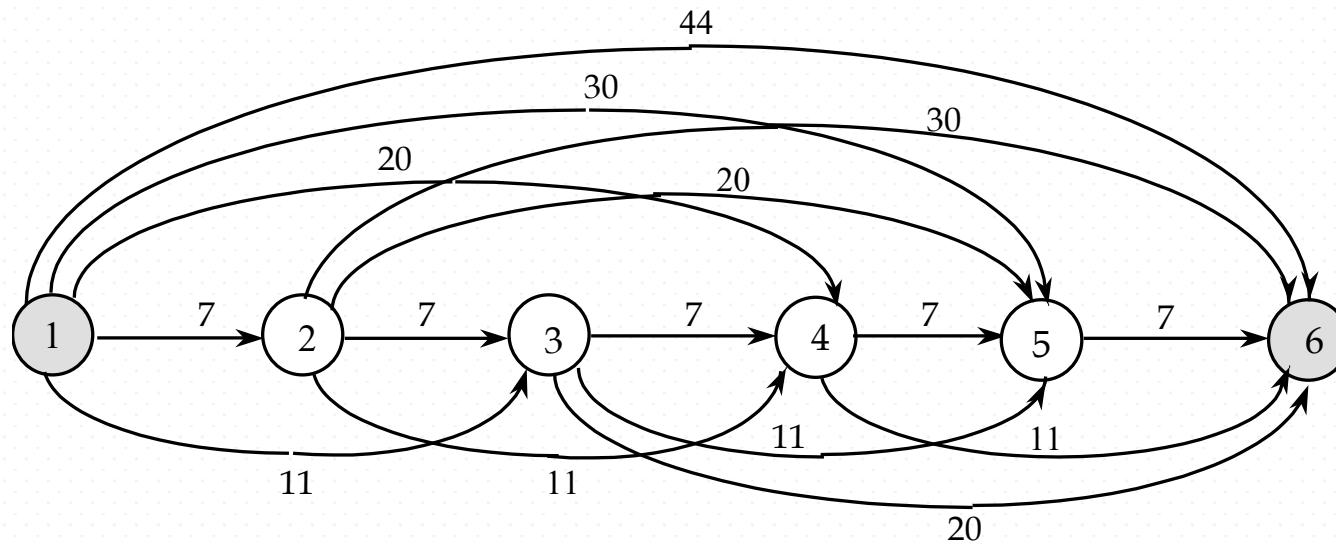
Araç Yenileme Problemi

- **Araç Yenileme Problemi:** Gerek işletmelerin gerekse kişilerin kullandıkları araçların çoğu ilerleyen yaşlarına bağlı olarak sürekli artan bakımonarım harcamalarına yol açarlar. Eskiyen araçların belirli aralıklarla yenilenmesi, araçların her bir yenilenişinde katlanılması gereken yüksek satın alma maliyetine rağmen toplam maliyeti düşürebilir.
- **Örnek 4.4:** Tek araca sahip bir işletme gelecek beş yıl için araç yenileme planını geliştirmek istemektedir. Aracın yıllık bakım-onarım masrafı (TL), aracın incelenen yılın başındaki yaşına bağlı olup aşağıdaki gibi tahmin edilmiştir. Aracın yaşına bağlı olarak her yıl biraz daha artan bakım-onarım masraflarından kurtulmak için eskiyen aracı satıp yerine yenisini almak da mümkündür. Eskiyen aracın satış fiyatı (TL), satıldığı yıldaki yaşına bağlı olup aşağıdaki tabloda gösterilmiştir.
- Hesaplamalarda basitlik sağlamak için araç satın alma maliyetinin değişmediği ve 15 TL olduğu kabul edilmiştir. Buna göre 5 yıllık planlama dönemi için en iyi araç yenileme programını oluşturunuz.

Tablo 4.1

Aracın Yaşı	Bakım Masrafi	Satış Fiyatı
0	2	-
1	3	10
2	5	9
3	8	5
4	12	3
5	-	1

Çözüm 4.4: Önce, aracın satın alındığı yıl başlangıç, planlama döneminin sonu bitiş olmak üzere 6 düğümlü ağı oluşturalım. Ara noktalar ($j = 1, 2, 3, 4, 5$) araç yenilemenin mümkün olduğu yılın başına karşılık gelmektedir.



Şekil 4.30

$i < j$ için (i, j) dalı, i yılı başında satın alınan aracın j yılında satılarak yerine yenisinin alınmasına karşılık gelir. (i, j) dalının uzunluğu (d_{ij}) ise, i yılında satın alınan aracın j yılında satılmasına kadar geçen süre içinde bakım ve onarımını yapmak, j yılının başında aracı satmak ve yerine yenisini almanın net maliyetine eşittir.

Buna göre $i \geq j$ için $d_{ij} = \infty$ ve $i < j$ için,

$d_{ij} = (i, i+1, \dots, j-1)$ yıllarında araç bakım-onarım harcaması + (i yılı başında araç satın alma maliyeti) - (j yılı başında eski araç satışından elde edilen gelir)

olarak tanımlandığında, her bir (i, j) dalının uzunluğu (net maliyet olarak) aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$d_{12} = d_{23} = d_{34} = d_{45} = d_{56} = 15 + 2 - 10 = 7$$

$$d_{13} = d_{24} = d_{35} = d_{46} = 15 + 2 + 3 - 9 = 11$$

$$d_{14} = d_{25} = d_{36} = 15 + 2 + 3 + 5 - 5 = 20$$

$$d_{15} = d_{26} = 15 + 2 + 3 + 5 + 8 - 3 = 30$$

$$d_{16} = 15 + 2 + 3 + 5 + 8 + 12 - 1 = 44$$

Hesaplama sonuçları Şekil 4.30'da gösterilmiştir. Artık Dijkstra Algoritmasını uygulayabiliriz. Algoritmanın uygulanmasıyla elde edilen hesaplama sonuçları aşağıda arka arkaya verilmiştir.

Ön adım:

Düğüm No:	[1	2	3	4	5	6]	} Ön adım
Etiket :	[0*	7	11	20	30	44]	
Düğüm No:	[1	2	3	4	5	6]	} Ön adım
Etiket :	[0*	7*	11	20	30	44]	

Birinci adım:

Düğüm No: [1 2 3 4 5 6]
Etiket : [0* 7* 11 18 27 37]

Birinci tekrar

İkinci adım:
Düğüm No: [1 2 3 4 5 6]
Etiket : [0* 7* 11* 18 27 37]

Birinci adım:

Düğüm No: [1 2 3 4 5 6]
Etiket : [0* 7* 11* 18 22 31]

İkinci tekrar

İkinci adım:
Düğüm No: [1 2 3 4 5 6]
Etiket : [0* 7* 11* 18* 22 31]

Birinci adım:

Düğüm No: [1 2 3 4 5 6]
Etiket : [0* 7* 11* 18* 22 29]

Üçüncü tekrar

İkinci adım:
Düğüm No: [1 2 3 4 5 6]
Etiket : [0* 7* 11* 18* 22* 29]

Birinci adım:

Düğüm No: [1 2 3 4 5 6]
Etiket : [0* 7* 11* 18* 22* 29]

Dördüncü tekrar

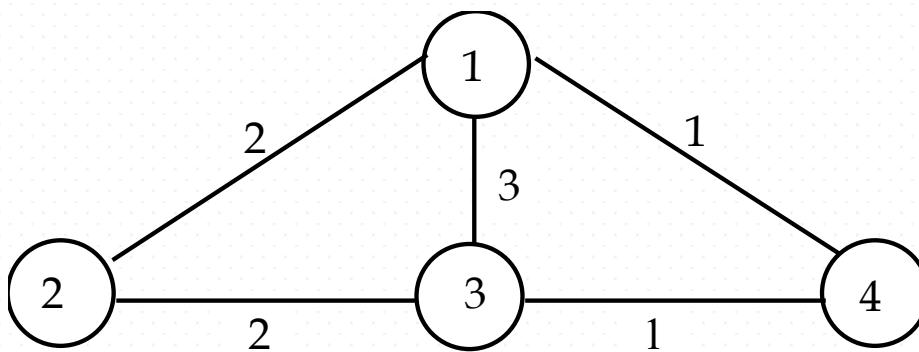
İkinci adım:
Düğüm No: [1 2 3 4 5 6]
Etiket : [0* 7* 11* 18* 22* 29*]

Etiketlerin hepsi kalıcı olduğundan en kısa yol daha doğrusu, en düşük maliyetli araç yenileme planı belirlenmiş olur. En düşük net maliyet 29 TL'dir. Şimdi de işletmenin hangi yıllarda araç yenileyeceğini belirleyelim. 5 ve 6 nolu düğümlerin etiketleri arasındaki fark (5, 6) dalının uzunluğuna eşit olduğundan bu dal en kısa yol üzerindedir. 5 ve 4 nolu düğümlerin kalıcı etiketleri arasındaki fark, bu iki düğümü birleştiren dalın uzunluğuna eşit olmadığından, bu dal en kısa yol üzerinde değildir. 5 ve 3 nolu düğümlerin etiketleri arasındaki fark (3, 5) dalının uzunluğuna eşit olduğundan, bu dal en kısa yol üzerindedir. 3 ve 2 nolu düğümlerin etiketleri arasındaki fark bu düğümleri birleştiren dalın uzunluğuna eşit değildir. Dolayısıyla, (2, 3) dalı en kısa yol üzerinde değildir. 3 ve 1 nolu düğümlerin etiketleri arasındaki fark (1, 3) dalının uzunluğuna eşit olduğundan, bu dal da en kısa yol üzerindedir. Buna göre çözüm, (1, 3), (3, 5), (5, 6) dallar dizisi olarak belirlenmiş olur. En kısa yolu oluşturan dalları inceleyelim. Dalların ortaya koyduğu gibi, planlama dönemi başında satın alınan araç 2 yıl kullanıldıktan sonra satılarak yerine yenişi alınacaktır. Yeni araç iki yıl kullanıldıktan sonra satılacak, yerine yenişi alınacak ve yeni araç 1 yıl kullanıldıktan sonra satılacak ve planlama dönemi tamamlanacaktır.

En Küçük Yayılmalı Ağaç Problemleri

En küçük yayılmalı ağaç problemleri, en kısa yol problemelerinin özel bir biçimidir. En küçük yayılmalı ağaç problemlerinde dal uzunluklarının bilindiği varsayıılır. İki problem arasındaki en önemli fark en küçük yayılmalı ağaç probleminde düğümlerin tümünü, en kısa yol probleminde düğümlerin bazılarını birleştiren dallar dizisinin bulunmasıdır. Ayrıca en kısa yol probleminde ağın yönlendirilmiş olması şart iken, yayılmalı ağaç probleminde ağın yönlendirilmemiş olması gereklidir. Uygulamada çok sık karşılaşılan bu tür problemlere örnek olması bakımından belirli bir yerdeki bilgisayarlar topluluğunun birbirlerine bağlanmak istendiklerini düşünelim. Burada, bilgisayarların her biri bir düğüm ve bunları birbirlerine bağlayan yeraltı kabloları dal olarak ele alınabilir. Bilgisayarlar arasındaki bağlantıyı sağlayan yeraltı kablolarının toplam uzunluğunun en kısa olması amaçlanabilir. Bu amaca ulaşmak için belirlenen dallar topluluğunun herhangi bir çevrim kapsamaması gereklidir.

- En Küçük Yayılmalı Ağaç: Kapsadığı dalların uzunlukları toplamı en küçük olan yayılan ağaca en küçük yayılmalı ağaç denir.
- Yayılan Ağaç: n düğümlü bir ağda tüm düğümler arasında bağlantı kuran ve $(n - 1)$ sayıda daldan oluşan çevrim içermeyen dallar dizisidir.
- Dört düğümlü bir ağ ile bu ağa ait yayılan ağaçların listesi aşağıda verilmiştir.



Şekil 4.33

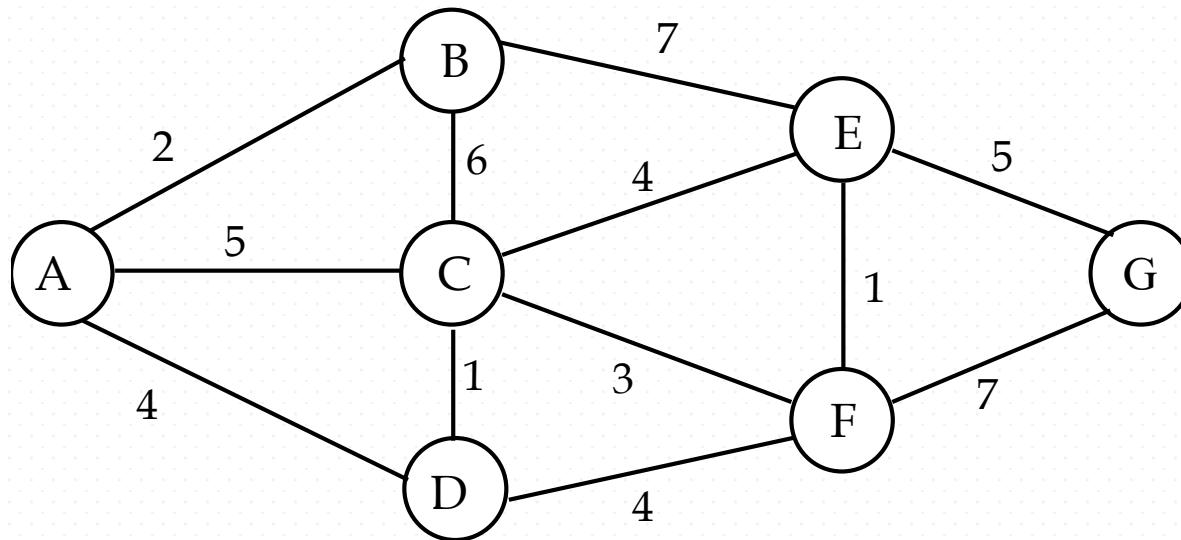
- $(1, 2), (1, 3), (1, 4)$ - $(1, 2), (1, 4), (2, 3)$ - $(1, 2), (1, 3), (3, 4)$
- $(1, 2), (1, 4), (3, 4)$ - $(1, 2), (2, 3), (3, 4)$ - $(1, 3), (1, 4), (2, 3)$
- $(1, 3), (2, 3), (3, 4)$ - $(1, 4), (2, 3), (3, 4)$

En Küçük Yayılmalı Ağaç Algoritması: En küçük yayılmalı ağaç, aşağıda açıklanan üç adımlık bir algoritmanın tekrarı ile saptanabilir.

1. adım: Ağ kapsamındaki düğümlerin oluşturduğu küme N olsun. Bu kümeden rastgele bir düğüm (i) seçilerek bu düğüme en yakın olan düğüm (j) belirlenir. Bu iki düğümü birleştiren (i, j) dalı en küçük yayılmalı ağacın bir dalı olur. Bu yolla ağıın düğümleri, birinde birleştirilmiş (i ve j), diğerinde birleştirilmemiş (i ve j dışındakiler) düğümlerin bulunduğu iki alt kümeye ayrılmış olur. Birleştirilmiş düğümlerin oluşturduğu küme C , birleştirilmemiş düğümlerin oluşturduğu küme \tilde{C} ile gösterilir. Algoritmanın tüm adımlarında $N = C \cup \tilde{C}$, dolayısıyla $C \cap \tilde{C} = \{\}$ olduğu unutulmamalıdır.
2. adım: \tilde{C} 'daki düğümlerden (n), C 'deki düğümlerden (m) herhangi birine en yakın olan düğüm belirlenir. Bu kez, bu iki düğümü birleştiren (m, n) dalı en küçük yayılmalı ağaca eklenir. Bu durumda $C = \{i, j, n\}$ olacağından, C 'ye eklenen düğüm (n) \tilde{C} kümesinden çıkarılır.
3. adım: İkinci adımdaki işlemler tüm düğümler birleştirilinceye degen tekrarlanır. Birleştirilecek düğüm kalmadığında, yani $\tilde{C} = \{\}$ olduğunda en küçük yayılmalı ağaç belirlenmiş olur.

Örnek 4.6

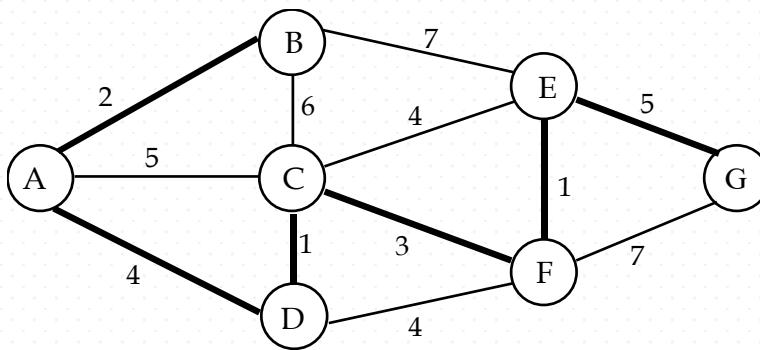
Örnek 4.6: Bir işletmenin, çalışanlarının hizmetine sunduğu 7 adet bilgisayarı vardır. Bilgisayarlar arasındaki uzaklıklar aşağıda gösterilmiştir.



Şekil 4.34

Bilgisayarlar yeraltı kabloları ile birbirlerine bağlanmak istenmektedir. Bu amacı gerçekleştirecek en kısa kablo uzunluğu nedir?

Çözüm 4.6



Şekil 4.40

Başlangıçta hangi düğümün ilk düğüm alınmasının bir önemi yoktur. İlk düğüm olarak E'yi seçelim. Bu kez işlemler ayrıntılıyla değil aşağıdaki gibi küme gösterimiyle açıklanacaktır.

Birinci adım: $C = \{E, F\}$, $\tilde{C} = \{A, B, C, D, G\}$; (E, F) ağaçta.

İkinci adım: $C = \{E, F, C\}$, $\tilde{C} = \{A, B, D, G\}$; (F, C) ağaçta.

Üçüncü adım: $C = \{E, F, C, D\}$, $\tilde{C} = \{A, B, G\}$; (C, D) ağaçta.

Dördüncü adım: $C = \{E, F, C, D, A\}$, $\tilde{C} = \{B, G\}$; (D, A) ağaçta.

Beşinci adım: $C = \{E, F, C, D, A, B\}$, $\tilde{C} = \{G\}$; (A, B) ağaçta.

Altıncı adım: $C = \{E, F, C, D, A, B, G\}$, $\tilde{C} = \{\}$; (E, G) ağaçta.

$C = \{A, B, C, D, E, F, G\}$, $\tilde{C} = \{\}$ olur. $\tilde{C} = \{\}$ olduğundan problem çözülmüştür.

Şekil 4.40'da koyu renkle çizilmiş ve beklentiği gibi sayıları ağdaki düğüm sayısının 1 eksigine (6) eşit olan (A, B), (A, D), (C, D), (C, F), (F, E), (F, G) dallarından oluşan en küçük yayılmalı ağacın uzunluğu 16 birimdir.

Proje Çizelgeleme Problemleri

- Proje yönetiminde, planlama tekniklerinden kritik yol yöntemi (CPM[1]) ile proje değerlendirme ve gözden geçirme tekniği (PERT[2]) gelişmiş ülkelerde çok geniş bir uygulama alanı olan proje çizelgeleme teknikleridir. Anılan yöntemler eldeki sınırlı kaynaklar ölçüsünde projenin tamamlanma süresinin belirlenmesi, toplam maliyeti en düşük yapacak proje süresinin saptanması, sürenin kısaltılması amacıyla kaynak aktarımı yapılması vb. konularda yöneticiler için hayatı önem taşıyan sorunlara etkili çözüm yolları ararlar ve bulurlar. Anılan yöntemler ülkemizde de birçok büyük projede kullanılmıştır. II. Fatih Sultan Mehmet Köprüsü ve Güney Doğu Anadolu Projesi CPM, Keban Barajı ve İstanbul Boğaz Köprüsü PERT'in uygulandığı projelere örnek gösterilebilir.
[1] Critical Path Method kelimelerinin ilk harfleri.
• [2] Program Evaluation and Review Techniques kelimelerinin ilk harfleri.

- CPM ve PERT, birbirine bağlı çok sayıda faaliyetten oluşan büyük ve projelerin programlanmasıında kullanılan yöntemlerdir. Birbirlerinden bağımsız geliştirilmelerine karşın birbirlerine çok benzeyen bu iki yöntem arasındaki en önemli fark faaliyet sürelerine ilişkindir. PERT'de faaliyetlere ilişkin süreler belirsiz olup bir takım olasılık hesaplamaları ile tanımlandığı halde, CPM'de bu sürelerin kesinlikle bilindiği varsayılmaktadır. Yöntemleri açıklamadan önce konuya ilgili temel kavramların açıklanması uygun olur.

Faaliyet: Bir iş ya da projenin tamamlanması için gerçekleştirilen eylemlerin her birine faaliyet denir.

Her faaliyetin bir süresi vardır ve gerçekleşmesi genellikle belirli kaynakların kullanılmasını gerektirir. Örneğin, bir ürünün bir yerden başka bir yere taşınması, temel atılması, duvarın sıvanması, bahçenin sulanması vb. birer faaliyettir. Projedeki faaliyetler ağ üzerinde oklarla gösterilir. Okların yönü faaliyetlerin akışını, yeri ise faaliyetlerin proje içindeki sırasını gösterir.

Olay: Bir iş veya projenin zaman akışı içindeki belirli noktalarda varılması gereken aşamalarına olay denir.

Süreleri olmamakla birlikte her olayın birer tarih ya da saatı vardır. Örneğin duvarın sıvanmaya başlanması tarihi, kamyonun depoya varış saati gibi. Olaylar okların birleşikleri yerlerde birer daire ile gösterilirler.

Olay ve faaliyetlerin ağda nasıl gösterildikleri Şekil 4.41'de açıklanmıştır.



Şekil 4.41

Kukla Faaliyet: Zaman ve kaynak kullanımı gerektirmeyen, yalnızca iki veya daha fazla sayıdaki gerçek faaliyet arasındaki ilişkileri göstermek amacıyla kullanılan faaliyetlere kukla faaliyet denir.

Kukla faaliyetler kesik çizgili oklarla gösterilirler ve paralel (aynı noktada başlayıp aynı noktada biten) faaliyetlerin ayırt edilmesinde kullanılırlar.



Şekil 4.42

- Süreli Kukla Faaliyet: Belirli bir süresi olmakla birlikte kaynak kullanımı gerektirmeyen faaliyete, süreli kukla faaliyet denir.
- Örneğin, sulanan veya boyanan bir yerin kuruması için bekletilmesi. Süreli kuklalar bazan kukla faaliyetler gibi kesik çizgi ile bazan gerçek faaliyetler gibi dolu çizgi ile gösterilirler.
- **Gantt Çizelgesi**
- Faaliyetler arasındaki zaman ve maliyet faktörlerini de dikkate alarak gösterme fikri yeni değildir. Özellikle Henry Gantt bu konuda daha 1900'lü yılların başlarında önemli çalışmalar yapmış, planlama ve kontrol faaliyetleri için kendi adıyla anılan çizelgeyi (Gantt çizelgesi) geliştirmiştir.

A, B, C ve D olmak üzere dört faaliyetten oluşan bir projenin uygulama programı (Gantt Çizelgesi) Tablo 4.3'de verilmiştir.

Tablo 4.3

Faaliyet	H A F T A													
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
A											
B												
C											
D												

Tablo 4.3 incelendiğinde, A'nın 4, B'nin 3, C'nin 6 ve D'nin 2 haftada tamamlandıkları görülecektir. Buna göre örneğin, 10. haftanın sonunda A ve B faaliyetlerinin bitmiş, C faaliyetinin yarısının tamamlanmış ve D faaliyetine hiç başlanmamış olması gerekmektedir.

Bu amaçla oluşturulan Tablo 4.4 incelendiğinde 10. hafta sonunda A ve B faaliyetlerinin programa uygun olarak tamamlanmış, D faaliyetinin henüz başlamamış olduğu, C faaliyetinin ise programın 2 hafta gerisinde olduğu görülür.

Tablo 4.4

Faaliyet	H A F T A														
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
A															
B															
C															
D															

Basit ve küçük çapta projeler için kullanışlı olmasına karşın, büyük projeler için kullanışlı olmayan Gantt çizelgesi, faaliyetler arasındaki bağımlılıkları da tam olarak açıklayamamaktadır. Hangi faaliyetlerin geciktirilebileceği, hangilerinin geciktirilemeyeceği hakkında bilgi de vermemektedir. Zaman-maliyet analizi yapabilmek için gerekli bilgi Gantt çizelgesinde yoktur. Söz konusu çizelgenin bu olumsuz özellikleri ağ yaklaşımını ortaya çıkarmıştır.

Ağ Yaklaşımı

Proje söz konusu olduğunda ağ şu şekilde tanımlanmaktadır. "Program amacına ulaşabilmek için gerçekleşmesi gereken faaliyetlerden ve olaylardan meydana gelen, faaliyet ve olayların birbirleriyle olan bağlantı ve ilişkilerini gösteren şemaya ağ" denir. Ağ yaklaşımının sağladığı yararlar aşağıdaki gibi özetlenebilir.

- Bir ya da daha fazla sayıda projenin aynı anda ve istenen ayrıntıda planlama ve denetiminin yapılmasına olanak sağlar.
- Faaliyetler arasındaki karmaşık ilişkiler oldukça basit ve açık biçimde gösterilir.
- İşlemler oldukça basit olup, bilgisayarda kolayca programlanabilir.
- Kritik faaliyetlerin saptanması sonucunda önemli olan bir grup faaliyete dikkat çekilir.
- Bazı faaliyetlerin gecikme ve/veya hızlandırılmalarının etkileri ve bunlara bağlı olarak oluşacak darboğazların kolayca saptanabileceği bir ortam oluşturulur.
- Değişik proje tarihlerine ilişkin toplam proje maliyetleri hesaplanarak en düşük toplam maliyetli proje planı seçilebilir.
- Kaynaklar, aynı kaynağı kullanan faaliyetler arasında en düşük toplam maliyete neden olacak şekilde bölüştürülebilir.
- Projenin uygulanması sırasında güncelleştirmeye önem verilerek projenin günü güne izlenmesi sağlanır.

Kritik Yol Yöntemi CPM

Kritik yol yöntemi (CPM), bir projenin erçekleştirilmesinde insan gücü, makina ve zamandan en yüksek düzeyde yararlanmayı sağlayan ağ tekniklerini kullanma bilimidir. CPM formülasyon, planlama, gözlem ve kontrol olmak üzere başlıca üç bölüm içerir.

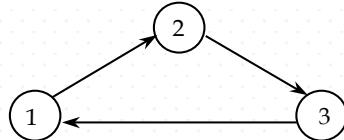
- Formülasyon sürecinde, projenin belirli faaliyet ve olaylara ayrılmasından sonra bunlar (faaliyetler ve olaylar) arasındaki öncelik ilişkilerinin belirlenmesi gereklidir. Bir faaliyetin kendisinden önce bitirmesi gereken faaliyete "önceki faaliyet", kendisinin tamamlanması ile başlayan faaliyete de "sonraki faaliyet" denir.
- Faaliyetlerin öncelik ilişkilerinde istenen önemli bilgiler aşağıdaki üç sorunun yanıtlaması ile gerçekleştirilebilir.
 1. Herhangi bir faaliyet başlamadan önce hangi faaliyet(ler) tamamlanmalıdır?
 2. Hangi faaliyetler paralel yürütülmelidir?
 3. Bu faaliyetleri hangi faaliyetler izlemelidir?

Proje Ağının Oluşturulması

Proje ağının çizilmesinde uyulması gereken kurallar şöyledir.

- Her ağda tek bir başlama olayı ile tek bir bitiş olayı olmalıdır. Gerekirse bu olaylar yapay olarak yaratılırlar.
- Bir faaliyet, kendisinden önceki faaliyet(ler) bitmeden başlayamaz.
- Bir okun uzunluğu önemli olmayıp oklar yalnızca öncelikleri belirtir.
- İki olay en fazla bir faaliyet ile doğrudan bağlanabilir.
- Her olayın bir numarası olmalıdır. Olaylar okların küçük numaralı bir noktadan daha büyük numaralı bir noktaya gitmesini sağlayacak biçimde numaralandırılır. Böylece ağ üzerinde çevrim oluşması engellenmiş olur.

Şekil 4.43'deki faaliyetlerin bir çevrim meydana getirdiği görülmektedir.



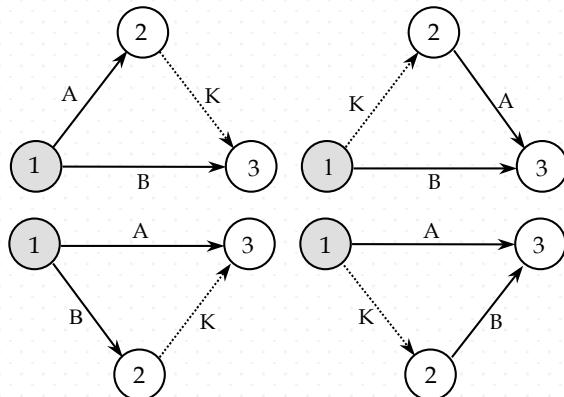
Şekil 4.43

Şekil 4.44'de 1 ve 2 numaralı olaylar birden fazla faaliyetle doğrudan bağlanmış olup bu yasaktır.

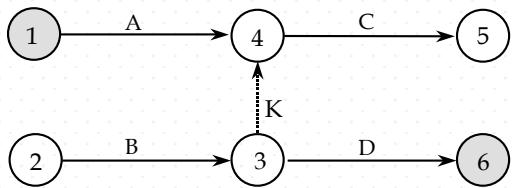


Şekil 4.44

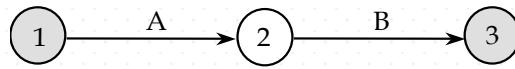
Kural 4'e ters düşen bu durumdan kurtulmak için kukla faaliyet kullanılır. Bu duruma uygun alternatif kukla faaliyetler Şekil 4.45'de gösterilmiştir.



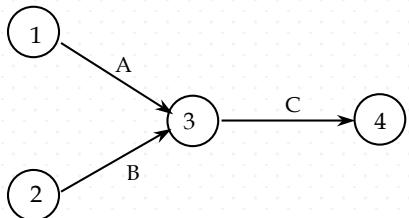
Şekil 4.45



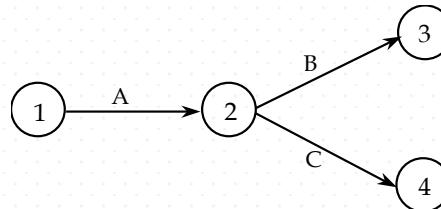
Şekil 4.47



Şekil 4.48



Şekil 4.49



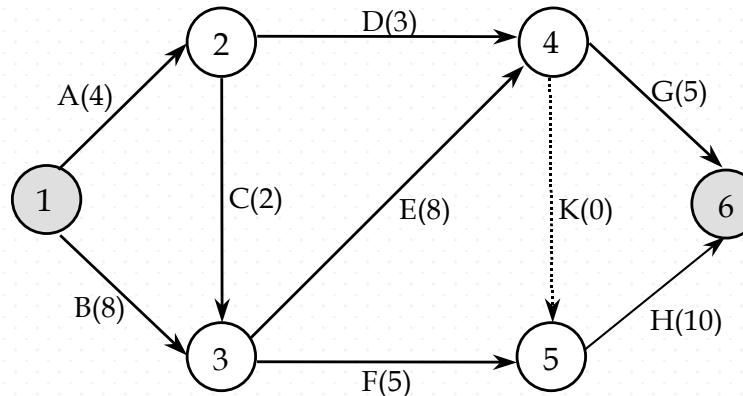
Şekil 4.50

Örnek 4.7: Süre ve öncelik ilişkileri aşağıda verilen A, B, ..., G, H faaliyetlerinden oluşan projenin ağını çiziniz.

Tablo 4.6

Faaliyet	Süre (gün)	Önceki Faaliyet
A	4	-
B	8	-
C	2	A
D	3	A
E	8	B, C
F	5	B, C
G	5	D, E
H	10	D, E, F

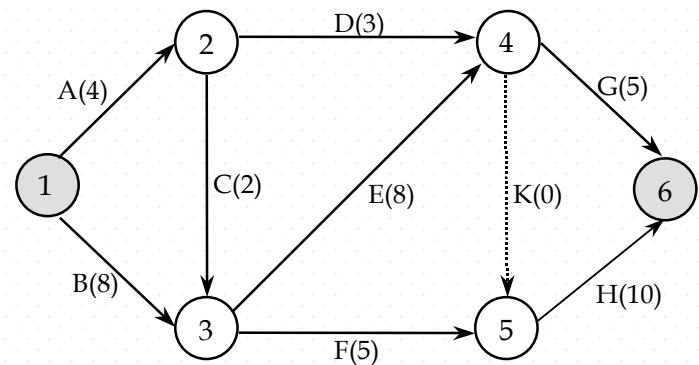
- Çözüm 4.7:** Tablodaki verilerden hareketle kurulan proje ağı Şekil 4.51'de gösterilmiştir.



Şekil 4.51

- Herhangi bir proje yönetim problemi doğrusal programlama olarak tanımlanabilir ve simpleks yöntemle çözülebilir. Bu durumu açıklamak için Örnek 4.7'deki problemi ele alalım.
- d_i ($i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$) i olayının gerçekleşme zamanı olsun. Buna göre sözgelimi, d_6 projenin, d_3 ise B ve C faaliyetlerinin tamamlanma zamanlarını gösterir. Bu durumda ($d_6 - d_1$), projenin tamamlanması için geçen süreye karşılık gelir. Amaç projenin en kısa sürede tamamlanmasıdır. Buna göre amaç fonksiyonu
- $Z_{enk} = d_6 - d_1$
- şeklinde formüle edilebilir. Herhangi bir (i, j) faaliyeti için j 'nin ortaya çıkması i 'nin gerçekleşmesine ve (i, j) 'nin tamamlanmış olmasına bağlıdır. Yani, herhangi bir faaliyet belirli bir süreden daha kısa zamanda tamamlanamaz.

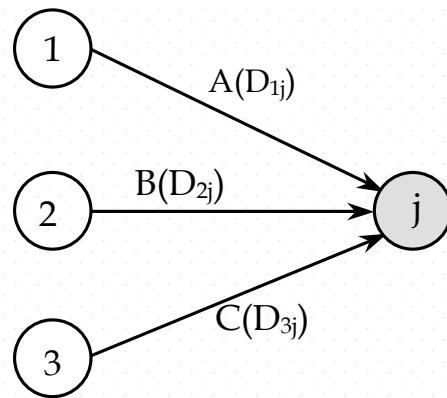
- Buna göre faaliyetlerin tamamlanma süreleri dikkate alınarak aşağıdaki süre kısıtlayıcıları yazılır.
- $Z_{enk} = d_6 - d_1$
- $d_6 - d_5 \geq 10$ H faaliyeti kısıtlayıcısı
- $d_6 - d_4 \geq 5$ G faaliyeti kısıtlayıcısı
- $d_5 - d_4 \geq 0$ Kukla faaliyet kısıtlayıcısı
- $d_5 - d_3 \geq 5$ F faaliyeti kısıtlayıcısı
- $d_4 - d_3 \geq 8$ E faaliyeti kısıtlayıcısı
- $d_4 - d_2 \geq 3$ D faaliyeti kısıtlayıcısı
- $d_3 - d_2 \geq 2$ C faaliyeti kısıtlayıcısı
- $d_2 - d_1 \geq 4$ A faaliyeti kısıtlayıcısı
- $d_3 - d_1 \geq 8$ B faaliyeti kısıtlayıcısı
- Negatif olmama koşulu; $d_i \geq 0$ 'ın eklenmesiyle kritik yol belirleme probleminin doğrusal programlama formülasyonu tamamlanmış olur.
- Yukarıdaki gibi formüllenen problem, simpleks yöntemle çözüлerek projenin en kısa tamamlanma süresi belirlenebilir. Nitekim, yukarıdaki problem simpleks yöntemle çözülmüş ve projenin en erken 26 günde ($Z_{enk} = 26$) tamamlanacağı belirlenmiştir. En iyi olduğu belirlenen çözümde $d_1 = 0$, $d_2 = 4$, $d_3 = 8$, $d_4 = 16$, $d_5 = 16$, $d_6 = 26$ olarak elde edilmiştir.



Şekil 4.51

- Ağ analizi yaklaşımıyla kritik yolu belirlenmesi konusuna geçmeden önce, bundan sonra sıkça kullanılacak olan, bazı semboller tanımlayalım.
- $D_{ij} = (i, j)$ faaliyetinin tamamlanma süresi
- $E_i = i$ olayının en erken ortaya çıkma zamanı
- $L_i = i$ olayının en geç ortaya çıkma zamanı
- E_i , i olayından kaynaklanacak faaliyetlerin en erken başlama zamanını, L_i ise aynı faaliyetlerin en geç başlama zamanını verir. Kritik yol üzerindeki olayların en erken başlama ile en geç başlama zamanları aynı olmak zorundadır. $E_i \neq L_i$ olması durumunda bu olayları kritik yolu uzatmadan geciktirmek mümkün olur ki bu, kritik yol tanımına aykırıdır.
- E_i değerleri aşağıda açıklanan 3 adımlık bir algoritmayla belirlenir.
 - 1. $E_1 = 0$ 'dır.
 - 2. Her faaliyet önceki olay meydana gelir gelmez başlatılır.
 - 3. En erken ortaya çıkış veya başlama zamanı, o olayı oluşturan faaliyetlerin en geç tamamlananın bitiş zamanına eşittir.
- Bu adımlar ağın başlangıç noktasından başlayarak bitiş noktasına kadar olan her olay için uygulanır.

- Bir olay noktasının en erken meydana geliş zamanının hesaplanabilmesi için o olayı oluşturan tüm faaliyetlerin başlangıç olaylarının E_j değerlerinin hesaplanmış olması gereklidir. E_j değerlerinin hesaplanmasına örnek olmak üzere Şekil 4.54'ü dikkate alalım. Şekil 4.54'den görüldüğü gibi, j olayının gerçekleşmesi için A, B ve C faaliyetleri tamamlanmış olmalıdır.

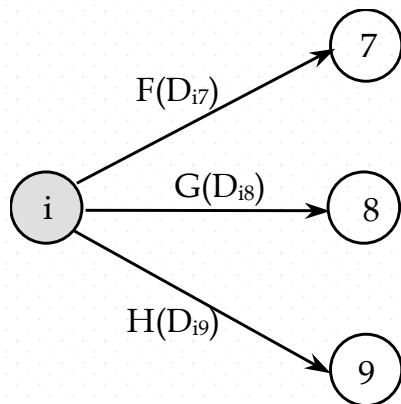


Şekil 4.54

- j olayının gerçekleşmesi için kendisinden önce gelen faaliyetlerin tamamlanmış olması gerektiğinden, j'nin en erken ortaya çıkış zamanı aşağıdaki bağıntıdan bulunur.
- Yukarıdaki bağıntının genel formu aşağıdaki gibi açıklanabilir.

- Projenin son olayının en erken ortaya çıkış zamanı hesaplandığında, projenin en erken tamamlanma süresi belirlenmiş olur. En erken tamamlanma süresinin ilk ve son olaylar arasındaki en uzun yoluun uzunluğuna eşit olduğu gösterilebilir.
- L_i değerleri de E_i 'ler gibi üç adımlık bir algoritma ile hesaplanırlar.
- $L_n = E_n$ 'dir
- Her faaliyet bir sonraki olay noktasının en geç meydana geliş zamanından faaliyet süresi çıkarıldığında elde edilen zamanda başlatılır.
- En geç meydana geliş zamanı, o olaydan kaynaklanan faaliyetlerin en küçük başlama zamanı olarak belirlenir.
- Bu adımlar bitiş noktasından başlayıp geriye doğru giderek başlangıç noktasına kadar olan her olay için uygulanır.
- Bir olay noktasının en geç meydana geliş zamanının hesaplanabilmesi için o olaydan kaynaklanan faaliyetlerin sona erdiği noktaların tümünün L_i değerlerinin hesaplanmış olması gereklidir.

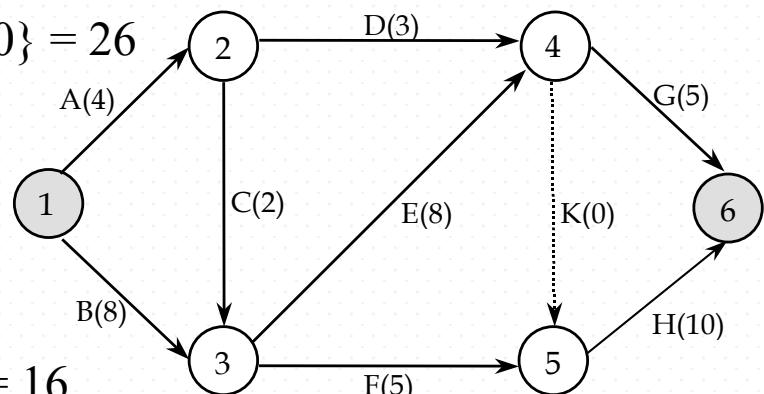
- En geç meydana geliş zamanı kavramını aşağıdaki şekilde açıklayalım.
- Şekil 4.55'den görüldüğü gibi $F; L_7$, $G; L_8$ ve $H; L_9$ sürelerinde tamamlandıklarında projenin tamamlanması ertelenmeyecektir.



Şekil 4.55

- Yukarıdaki şeklärin ortaya koyduğu gibi, projenin tamamlanma süresinin uzamaması, olmasına bağlıdır.
- Bu bağıntı aşağıdaki gibi genellenebilir.

- Bu açıklamaların ardından örnek 4.7'deki 6 olayın en erken başlama (E_i) zamanları aşağıdaki gibi hesaplanmıştır.
- $E_1 = 0$
- $E_2 = E_1 + D_{12} = 0 + 4 = 4$
- $E_3 = \text{enb}\{E_1 + D_{13}, E_2 + D_{23}\} = \text{enb}\{0 + 8, 4 + 2\} = 8$
- $E_4 = \text{enb}\{E_2 + D_{24}, E_3 + D_{34}\} = \text{enb}\{4 + 3, 8 + 8\} = 16$
- $E_5 = \text{enb}\{E_3 + D_{35}, E_4 + D_{45}\} = \text{enb}\{8 + 5, 16 + 0\} = 16$
- $E_6 = \text{enb}\{E_4 + D_{46}, E_5 + D_{56}\} = \text{enb}\{16 + 5, 16 + 10\} = 26$
- En geç tamamlama zamanları (L_i) aşağıdaki gibi hesaplanmıştır.
- $L_6 = 26$
- $L_5 = L_6 - D_{56} = 26 - 10 = 16$
- $L_4 = \text{enk}\{L_5 - D_{45}, L_6 - D_{46}\} = \text{enk}\{16 - 0, 26 - 5\} = 16$
- $L_3 = \text{enk}\{L_4 - D_{34}, L_5 - D_{35}\} = \text{enk}\{16 - 8, 16 - 5\} = 8$
- $L_2 = \text{enk}\{L_3 - D_{23}, L_4 - D_{24}\} = \text{enk}\{8 - 2, 16 - 30\} = 6$
- $L_1 = \text{enk}\{L_2 - D_{12}, L_3 - D_{13}\} = \text{enk}\{6 - 4, 8 - 8\} = 0$



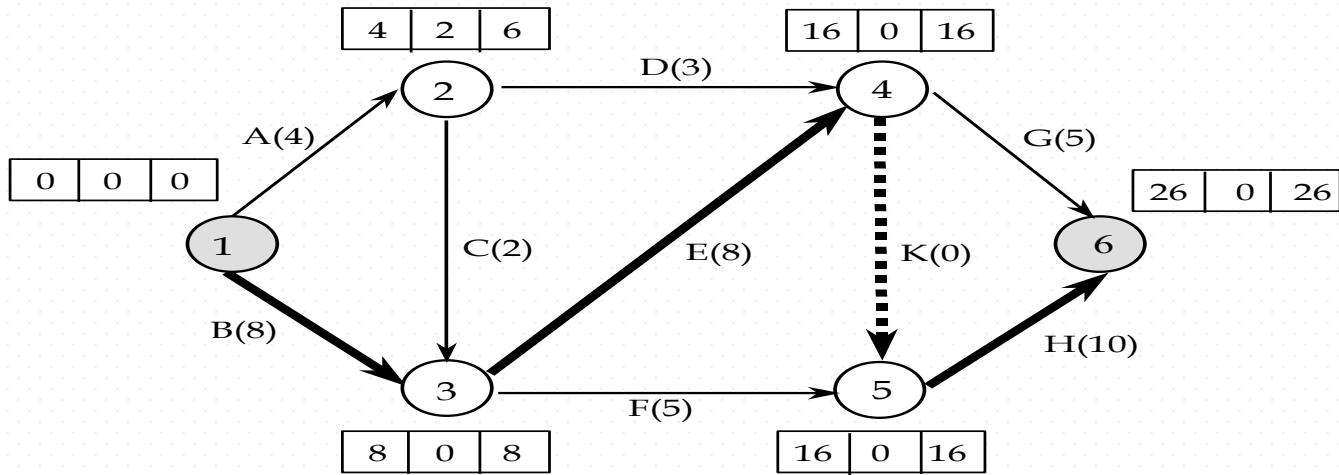
Şekil 4.51

- İleriye ve geriye doğru hesaplamalarla elde edilen E_i ve L_i değerleri proje ağında kendilerine ait olay noktaları üzerinde gösterilirler. Gösterim Şekil 4.56'da açıklandığı gibidir.



Şekil 4.56

- Olayların en erken başlama zamanları ile en geç başlama zamanlarının hesaplanmasıından sonra kritik faaliyetler belirlenebilir. Herhangi bir (i, j) faaliyetinin kritik olabilmesi için aşağıdaki koşulları sağlaması gereklidir.
 - 1. $E_i = L_i$
 - 2. $E_j = L_j$
 - 3. $E_j - E_i = L_j - L_i = D_{ij}$
 Bu koşullar faaliyetin en geç başlama (tamamlanma) ve en erken başlama (tamamlanma) zamanları arasında aylak süre veya boşluk bulunmadığını göstermektedir. Bu nedenle faaliyet kritiktir. Örnek projeyi oluşturan faaliyetlerden kritik olanların B, E, K ve H faaliyetleri oldukları görülebilir. Kritik faaliyetler Şekil 4.57'de dolu çizgi ile gösterilmiştir.



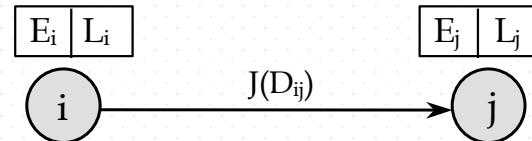
Şekil 4.57

Kritik yolun belirlenmesinden sonra kritik olmayan faaliyetler için boşlukların hesaplanması gereklidir. Bilindiği gibi, kritik bir faaliyet için boşluk değeri sıfırdır. Zaten faaliyetin kritik olmasına yol açan da boşluk değerinin sıfır olmasıdır.

Boşlukların belirlenmesinden önce olaylara ilişkin zamanlardan hareketle projeyi oluşturan her bir faaliyete aşağıdaki bilgilerin elde edilmesi gereklidir.

1. En erken başlama zamanı (EB_{ij})
2. En geç başlama zamanı (GB_{ij})
3. En erken tamamlama zamanı (ET_{ij})
4. En geç tamamlama zamanı (GT_{ij})
5. Aylak süre

- Bu zamanları açıklamak için J faaliyetine karşılık gelen herhangi bir (i, j) dalını ele alalım. Açıklamalarda kullanılacak faaliyet Şekil 4.58'de gösterilmiştir.



Şekil 4.58

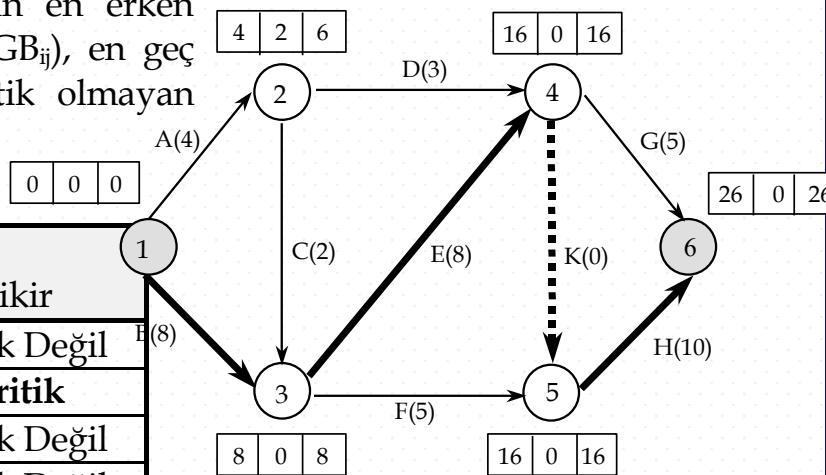
- Önceden olduğu gibi E_i ; i olayının en erken ortaya çıkma zamanı, L_j ; j olayının en geç ortaya çıkma zamanı ve D_{ij} ; J faaliyetinin tamamlanma süresini göstermektedir. Açıktır ki, J faaliyeti en erken E_i zamanında başlar ve tamamlanması L_j 'den geç olamaz. Buna göre $(L_j - D_{ij})$, J faaliyetinin en geç başlama zamanını, $(E_i + D_{ij})$ aynı faaliyetin en erken tamamlanma zamanını verir. Başka bir deyişle $(L_j - E_i)$, J faaliyeti için tanınan en uzun süredir. Buna göre J faaliyetinin aylak süresi $(L_j - E_i - D_{ij})$ 'ye eşittir. Dolayısıyla, J faaliyeti kritik ise, $L_j - E_i = D_{ij}$ 'dir.

Örnek 4.7'deki proje kapsamındaki faaliyetler için hesaplanan en erken başlama (EB_{ij}), en erken tamamlanma (ET_{ij}), en geç başlama (GB_{ij}), en geç tamamlanma (GT_{ij}) ve aylak süre değerleri ile kritik ve kritik olmayan faaliyetler Tablo 4.9'da gösterilmiştir.

Tablo 4.9

Faaliyet	Süre	EB_{ij}	ET_{ij}	GB_{ij}	GT_{ij}	Aylak Süre	Fikir
A	4	0	4	2	6	2	Kritik Değil
B	8	0	8	0	8	0	Kritik
C	2	4	6	6	8	2	Kritik Değil
D	3	4	7	13	16	9	Kritik Değil
E	8	8	16	8	16	0	Kritik
F	5	8	13	11	16	3	Kritik Değil
K	0	16	16	16	16	0	Kritik
G	5	16	21	21	26	5	Kritik Değil
H	10	16	26	16	26	0	Kritik

Tablo incelendiğinde, B, E ve H faaliyetlerinin kritik oldukları ve projenin tamamlanma süresinin 26 gün olarak hesaplandığı görülebilir. Bu yolla da aynı sonuca ulaşılmış olmasına karşın hesaplamalar önceki yaklaşımına göre fazla zaman alıcıdır. Bu özelliği bu yöntemin en zayıf tarafıdır.



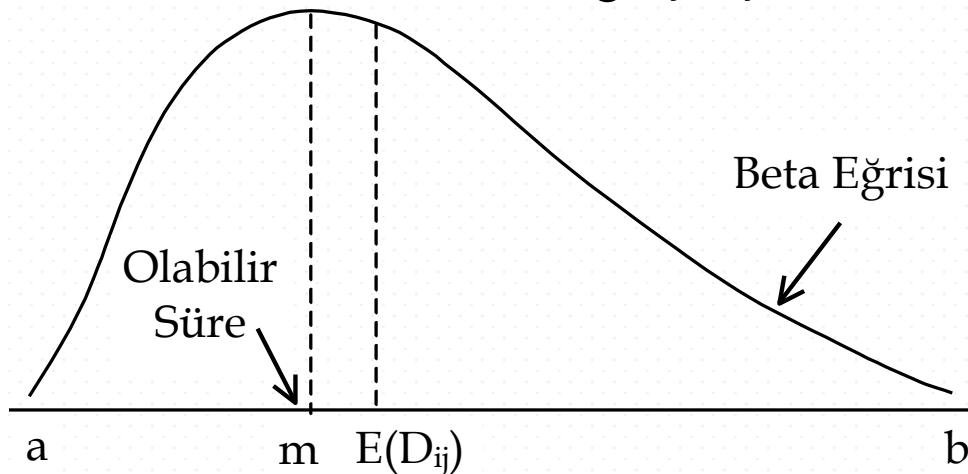
Şekil 4.57

PERT

- CPM'de sürelerin kesin olarak bilindiği, ayrıca faaliyetlere ayrılan kaynak miktarlarının değişmesi durumunda faaliyetin süresinin de değişeboleceği kabul edilmektedir. Oysa, araştırma ve geliştirme projelerinin her biri özel projeler olup bu projelerdeki faaliyetlerin pek çoğu yalnızca bir kez gerçekleştirildiğinden, benzer faaliyetlerden süre ile ilgili önsel bilgiler elde edilemez. Bu tür projelerin yönetimi faaliyetlerin tamamlanma sürelerindeki belirsizlikleri dikkate alan PERT tekniği ile gerçekleştirilir.
- PERT'de faaliyetlerin tamamlanma süreleri ile değil, bunların beklenen değerleri ($E(D_{ij})$) ile işlem yapılır. Bir başka deyişle, faaliyetin süresinin rasgele değişkenler oldukları ve bir olasılık dağılımına göre ortaya çıktıları varsayılar. Herhangi bir faaliyetin beklenen tamamlanma süresi, faaliyetin %50 olasılıkla tamamlanacağı süre demektir. Bu sürenin belirlenebilmesi için her bir faaliyete ilişkin üç ayrı tamamlanma süresinin tahmin edilmesi gereklidir. Bu süreler aşağıda açıklanmışlardır.

PERT-(Devam)

- İyimser Süre (a): Faaliyetin en erken tamamlanacağı süredir. Bu sürenin tahmininde bütün herşeyin planlandığı gibi gideceği, bütün etmenlerin faaliyeti iyi yönde etkileyebilecekleri kabul edilir. İyimser tahminin gerçekleşmesi olasılığı %1'dir.
- 2. Kötümser Süre (b): Faaliyetin en geç tamamlanma süresidir. Bu sürenin tahmininde hiçbir şeyin planlandığı gibi gitmeyeceği, beklenmedik olaylarınfaaliyete kötü yönde etki edeceği varsayıılır.
- 3. Olabilir Süre (m): Varsa daha önceki uygulamalardan elde edilen önsel bilgilerin veya tahmin çalışmaları sonuçlarının kullanılmasıyla normal koşullar altında faaliyetin tamamlanacağı süreye en yüksek olasılıkla tamamlanma süresi veya olabilir süre denir. Olabilir süre en gerçekçi süredir.



Herhangi bir faaliyetin (D_{ij}) faaliyetinin tamamlanma süresinin beta dağılıma uyan rasgele bir değişken olduğu varsayılar. Bu varsayıım altında herhangi bir faaliyetin (D_{ij}) **beklenen değeri** (ortalaması) $E(D_{ij})$ aşağıdaki .

$$E(D_{ij}) \square \frac{(a \square b) / 2 \square 2m}{3} \square \frac{a \square 4m \square b}{6}$$

Benzer şekilde herhangi bir faaliyetin varyansı $V(D_{ij})$ aşağıdaki gibi elde edilir.

$$V(D_{ij}) \square \frac{(b - a)^2}{36}$$

Kritik yolun beklenen değeri (ortalaması) = $E(X) = \sum_{(i,j) \in Y_{01}} E(D_{ij})$

Kritik yolun varyansı = $V(X) = \sum_{(i,j) \in Y_{01}} V(D_{ij})$

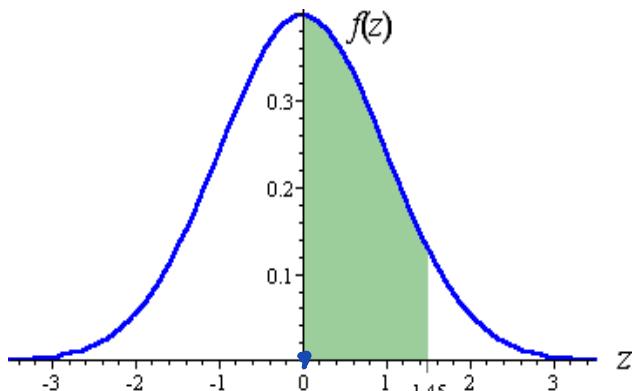
- Bir kritik yolun bitiş sürelerinin normal dağıldığı kabul edilir. Bu nedenle bir projenin belirli bir sürede bitme olasılığı, standart normal dağılım yardımı ile kolayca bulunabilir.

$$Z = \frac{X - E(X)}{\sqrt{V(X)}}$$

$Z = ((x-\mu)/\sigma)$ standart normal dağılır.

$$((x-\mu)/\sigma) \sim Z(0,1) \quad (\mu = 0 \text{ ve } \sigma = 1)$$

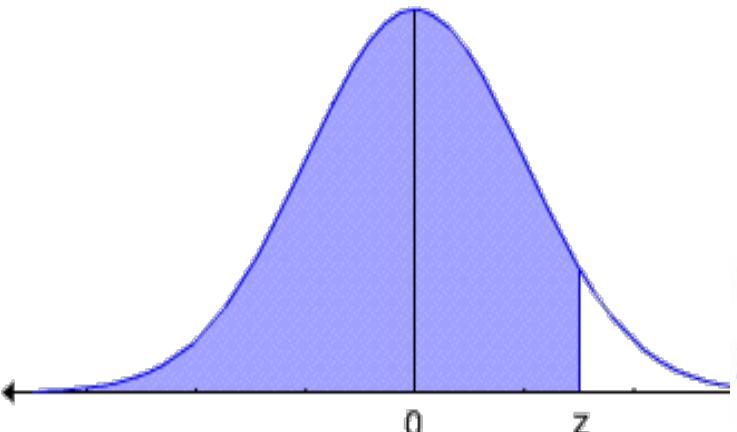
Bazı tablolar 0 ile z değerleri arasındaki alanı verir



Area under the Normal Curve from 0 to X

X	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.00000	-0.00386	-0.00796	-0.01197	-0.01585	-0.01994	-0.02392	-0.02790	-0.03188	-0.03586
0.1	0.02983	0.04386	0.04776	0.05172	0.05567	0.05962	0.06356	0.06749	0.07142	0.07535
0.2	0.07926	0.09317	0.09706	0.09995	0.09995	0.09973	0.10037	0.10042	0.10028	0.10409
0.3	0.11791	0.12172	0.12352	0.12530	0.12387	0.13863	0.14038	0.14431	0.14803	0.15173
0.4	0.15542	0.15933	0.16276	0.16640	0.17003	0.17364	0.17724	0.18082	0.18439	0.18793
0.5	0.19346	0.19497	0.19847	0.20194	0.20540	0.20884	0.21226	0.21569	0.21904	0.22240
0.6	0.22971	0.22907	0.23237	0.23345	0.23881	0.24215	0.24537	0.24857	0.25173	0.25489
0.7	0.25604	0.26115	0.26424	0.26730	0.27035	0.27337	0.27637	0.27935	0.28239	0.28534
0.8	0.28134	0.29100	0.29089	0.29473	0.29965	0.30254	0.30541	0.30795	0.31037	0.31327
0.9	0.31161	0.31658	0.32121	0.32381	0.32469	0.32894	0.33147	0.33388	0.33646	0.33981
1.0	0.34134	0.34373	0.34614	0.34849	0.34863	0.35114	0.35143	0.35169	0.35093	0.36214
1.1	0.36433	0.36460	0.36584	0.37036	0.37286	0.37493	0.37988	0.37900	0.38100	0.38298
1.2	0.38493	0.38698	0.38877	0.39065	0.39212	0.39415	0.39612	0.39796	0.39973	0.40147
1.3	0.40320	0.40490	0.40654	0.40824	0.40988	0.41149	0.41308	0.41460	0.41611	0.41774
1.4	0.42134	0.42373	0.42339	0.42364	0.42397	0.42567	0.42735	0.42902	0.43056	0.43189
1.5	0.43319	0.43348	0.43374	0.43409	0.43422	0.43493	0.44062	0.44179	0.44295	0.44608
1.6	0.44520	0.44630	0.44738	0.44840	0.44950	0.45053	0.45154	0.45154	0.45353	0.45449
1.7	0.45543	0.45637	0.45729	0.45818	0.45867	0.45994	0.46080	0.46164	0.46346	0.46537
1.8	0.46401	0.46540	0.46650	0.46803	0.46712	0.46784	0.46895	0.46925	0.46993	0.47062
1.9	0.47218	0.47193	0.47257	0.47320	0.47381	0.47441	0.47500	0.47558	0.47613	0.47670
2.0	0.47725	0.47779	0.47831	0.47882	0.47932	0.47982	0.48030	0.48077	0.48124	0.48169
2.1	0.48214	0.48237	0.48308	0.48340	0.48382	0.48422	0.48463	0.48500	0.48537	0.48574
2.2	0.48610	0.48645	0.48679	0.48713	0.48745	0.48778	0.48809	0.48840	0.48870	0.48899
2.3	0.48924	0.48956	0.48983	0.49009	0.49036	0.49065	0.49131	0.49134	0.49158	0.49181
2.4	0.49180	0.49200	0.49234	0.49245	0.49266	0.49295	0.49324	0.49343	0.49361	0.49381
2.5	0.49379	0.49396	0.49413	0.49430	0.49446	0.49461	0.49477	0.49492	0.49506	0.49520
2.6	0.49534	0.49547	0.49560	0.49573	0.49585	0.49598	0.49609	0.49621	0.49632	0.49643
2.7	0.49652	0.49664	0.49674	0.49683	0.49693	0.49702	0.49711	0.49720	0.49728	0.49736
2.8	0.49744	0.49752	0.49768	0.49782	0.49794	0.49791	0.49798	0.49795	0.49801	0.49807
2.9	0.49813	0.49819	0.49825	0.49833	0.49836	0.49841	0.49845	0.49851	0.49856	0.49861
3.0	0.49842	0.49848	0.49854	0.49858	0.49862	0.49866	0.49869	0.49873	0.49886	0.49890
3.1	0.49893	0.49896	0.49898	0.49913	0.49915	0.49918	0.49921	0.49924	0.49926	0.49929
3.2	0.49931	0.49934	0.49936	0.49938	0.49940	0.49942	0.49944	0.49946	0.49948	0.49950
3.3	0.49952	0.49953	0.49952	0.49957	0.49958	0.49960	0.49961	0.49962	0.49964	0.49965
3.4	0.49966	0.49968	0.49969	0.49970	0.49971	0.49972	0.49973	0.49974	0.49975	0.49976
3.5	0.49977	0.49979	0.49987	0.49979	0.49980	0.49983	0.49984	0.49982	0.49983	0.49983
3.6	0.49984	0.49985	0.49986	0.49986	0.49986	0.49987	0.49987	0.49988	0.49988	0.49988
3.7	0.49989	0.49990	0.49990	0.49990	0.49991	0.49991	0.49992	0.49992	0.49992	0.49992
3.8	0.49993	0.49993	0.49993	0.49994	0.49994	0.49994	0.49994	0.49995	0.49995	0.49995
3.9	0.49995	0.49995	0.49995	0.49996	0.49996	0.49996	0.49996	0.49996	0.49997	0.49997
4.0	0.49997	0.49997	0.49997	0.49997	0.49997	0.49997	0.49998	0.49998	0.49998	0.49998

Bazı tablolar $-\infty$ ile z değerleri arasındaki alanı verir



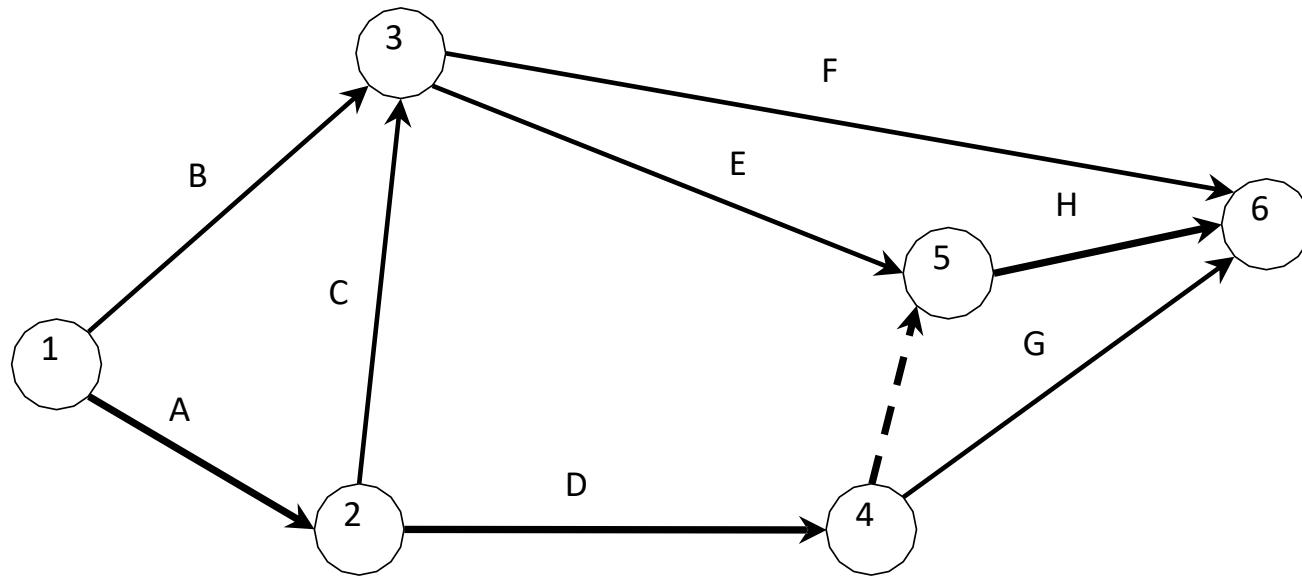
**Probability Content
from $-\infty$ to Z**

Z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990

ÖRNEK

- a) Aşağıdaki projenin ağını çiziniz.
- b) Kritik yolu bulunuz.
- c) Boşluk Sürelerinin hesaplayınız.
- d) Projenin 26 haftadan önce bitme olasılığını bulunuz.
- e) 23 haftadan fazla sürme olasılığını bulunuz.

Faaliyet	Önceki Faaliyet	İyimser Süre (a)	Olabilir Süre (m)	Kötümser Süre (b)
A	-	3	5	7
B	-	4	6	8
C	A	1	3	5
D	A	5	8	11
E	B, C	1	2	3
F	B, C	9	11	13
G	D	1	1	1
H	D, E	10	12	14



Faaliyet	Önceki Faaliyet	İyimser Süre (a)	Olabilir Süre (m)	Kötümser Süre (b)				Kiritik Faliyetlerin Beklenen Tamamlanma Süreleri	Kiritik Faliyetlerin Varyansları
					E(Dij)	V(Dij)	Kritik Yol		
A	-	3	5	7	5	0,444	Kritik	5	0,444
B	-	4	6	8	6	0,444	-		
C	A	1	3	5	3	0,444	-		
D	A	5	8	11	8	1,000	-		
E	B, C	1	2	3	2	0,111	Kritik	2	0,111
F	B, C	9	11	13	11	0,444	-		
G	D	1	1	1	1	0,000	-		
H	D, E	10	12	14	12	0,444	Krtik	12	0,444



