

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

GİRİŞ

Prof.Dr. Ünal H. ÖZDEN

Yönetim fonksiyonları

- Sanayi devrimi ile birlikte endüstri işletmelerinin hızla büyümeleri sonucunda bir kişinin bütün yöneticilik fonksiyonlarını tek başına yürütmesi imkansız hale gelmiştir
- Bunun doğal sonucu olarak yönetim fonksiyonları ayrılmış, böylece işletme bünyesinde üretim, pazarlama, finansman vb. farklı bölümler ortaya çıkmıştır

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

Çatışan amaçlar

- Yönetim fonksiyonunun gittikçe artan sayıda böümlere ayrılması, yeni işletme sorunlarını da beraberinde getirmiştir
- Bir bölüm için en iyi olan davranış biçiminin bir başka bölüm için iyi olmak bir yana genellikle yıkıcı olması, böümleri birbirlerinin amaç ve faaliyetlerini göz önünde bulundurmak zorunda bırakmıştır
- Bu tip sorunlar ve bunlara daha iyi çözüm bulma yaklaşımı da yöneylem araştırmasını doğurmuştur

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

Yöneylem araştırmasının tarihçesi

- Kayıtlı olan literatüre göre yönetim için bilimsel yaklaşım presipleri 1900'lü yılların başlarında Frederick Taylor tarafından ortaya konulmuştur
- Günümüz yöneylem araştırmasında kullanılan bazı model ve tekniklerin kullanılması çok eskiye dayansa da, “yöneylem araştırması” adı verilen ilk faaliyetin II. Dünya Savaşı sırasında gerçekleştirildiği kabul edilmektedir

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI**Yöneylem araştırmasının tarihçesi**

- II. Dünya Savaşı sırasında İngiltere askeri yönetimi, düşmanlarının hava akınları karşısında en iyi savunma şeklini belirlemek amacıyla farklı disiplinlerden bilim adamlarıyla bir ekip çalışması başlatmış ve böylece en iyi savunma şeklini bulmuştur
- Bu çalışma için bir araya gelen bilim adamlarından “yeni tip bombaların etkinliklerinin belirlenmesi ve radarların etkili biçimde kullanımlarının sağlanması” problemlerini çözmeleri istenmiştir
- Çözüm sonuçlarının uygulamada çok başarılı olması, savunma sisteminin diğer kesimlerinde; “radar denetim politikaları”, “uçaksavar yangın kontrolü”, “konvoy büyülüğu”, “düşman denizaltılarının yerlerinin saptanması” gibi çeşitli askeri problemlerin çözümünde benzer ekiplerin oluşturulması sağlanmıştır

Prof.Dr. Ünal H. ÖZDEN

5

©12 Ekim 2015 Pazartesi

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI**Yöneylem araştırmasının tarihçesi**

- İngiltere’de alınan başarılı sonuçlar müttefiklerin de dikkatini çekmiş, bu ülkeler de askeri problemlerini farklı disiplinlerden bilim adamlarıyla oluşturdukları ekipleriyle çözmeye girişmişlerdir
- Yöneylem araştırmasıyla İngiltere’den çok sonra tanışmış olmakla beraber, ABD’nin bu konudaki yoğun çabaları yöneylem araştırmasında önemli ilerlemeler kaydedilmesini sağlamıştır

Prof.Dr. Ünal H. ÖZDEN

6

©12 Ekim 2015 Pazartesi

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

Yöneylem araştırmasının tarihçesi

- ABD hava kuvvetlerinin kurduğu ekibin üyelerinden birisi olan Dantzig, büyük organizasyonların gerçekleştirdikleri faaliyetlerin büyük bir bölümünün dağıtım problemi olarak ele alınabileceğini ve en iyi plan-programa bir amaç fonksiyonunun en küçüklenmesi (minimizasyonu) ile ulaşabileceğini açıklamış, ayrıca doğrusal programlama problemlerinin klasik çözüm tekniği olan “**simpleks yöntemini**” önermiştir

Prof.Dr. Ünal H. ÖZDEN

7

©12 Ekim 2015 Pazartesi

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

Yöneylem araştırmasının tarihçesi

- Savaş sırasında, askeri problemlerin çözümü için oluşturulan ekiplerde aktif biçimde çalışan bilim adamları, savaş sonrasında dikkatlerini benzer yaklaşımın sivil yaşam problemlerine uygulanabilirliği üzerinde yoğunlaştırmışlardır:
 - Üniversitelerine dönüp mevcut teknikler için sağlam temel oluşturma konusunda çalışanlar
 - Yeni teknikler geliştirme çabasına girenler
 - Özel ekonominin değişik kesimlerindeki çalışmalarına dönerek buralarda karşılaşılan problemleri benzer yaklaşımla çözmeye çalışanlar
- Bütün bu çalışmalar bilimsel bir uğraş alanının yani “**Yöneylem Araştırması**”nın doğuşuna yol açmıştır

Prof.Dr. Ünal H. ÖZDEN

8

©12 Ekim 2015 Pazartesi

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

Yöneylem araştırmasının uygulanması

- Yöneylem araştırmasını ilk uygulayan sivil kuruluşlar kar amacı büyük endüstriyel kuruluşlar olmuştur
- Küçük boyutlu kuruluşlar, yöneylem araştırmasının yalnızca büyük işletmeler için değil, kendileri için de yararlı olduğunun farkına biraz geç varmışlar ve araştırmacıların birbirlerinden farklı gibi görünümlereine karşın pek çok problemin “stok, dağıtım, sıralama, kuyruk, oyun” gibi belirli bir başlık altında incelenebileceklerini farketmeleri ve bunlar için standart çözüm teknikleri geliştirmelerinden çok sonra konuya ilgi göstermişlerdir

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

Yöneylem araştırmasının uygulanması

- Birkaç uygulama dışında yöneylem araştırmasının hizmet ağırlıklı endüstrilerde ve kamu kesiminde kullanılması 1960'lı yılların ortalarında gerçekleşmiştir
- Bugün, banka, kütüphane, hastane, otel, okul gibi hizmet ağırlıklı pek çok kuruluş hizmet verme etkinliğini artırmada yöneylem araştırmasından büyük yarar sağlamaktadır
- Devlet kuruluşları da plan, program ve politika belirleme çalışmalarında yöneylem araştırmasını yaygın bir biçimde kullanmaktadır
- Yöneylem araştırmasının çok geniş bir uygulama alanı bulması ve çok hızlı bir gelişme göstermesindeki en önemli faktör bilgisayar teknolojisindeki gelişme olmuştur

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

İlk yüneylem araştırması kuruluşu

- Yüneylem araştırması alanında çalışan bilimadamlarının ihtiyaçlarını karşılamak amacıyla kurulan ilk yüneylem araştırması kuruluşu, 1952 yılında ABD'de kurulan **ORSA (The Operational Research Society of America)** olmuştur
- Türkiye'de yüneylem araştırması çalışmalarının batıdan çok sonra başladığı bilinmektedir
- Ülkemizde de ilk yüneylem araştırması çalışmaları batıda olduğu gibi savunma kesiminde başlamıştır
- Savunma kesimi dışında ilk yüneylem araştırması ekibi 1965 yılında **Türkiye Bilimsel ve Teknik Araştırma Kurumu (TÜBİTAK)** bünyesinde kurulmuştur

Prof.Dr. Ünal H. ÖZDEN

11

©12 Ekim 2015 Pazartesi

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

Yüneylem araştırmasının tanımı

- Yüneylem araştırması, sistemlerin performansını optimize etmek için teknikler kullanan bir bilim dalıdır
- Yüneylem araştırması, bir sistemde ortaya çıkan problemlere, sistemin denetlenebilir elemanları cinsinden bilimsel yöntem, teknik ve araçların uygulanmasıyla en iyi çözümün bulunmasıdır
- Yüneylem araştırması, insan, makina, para ve malzemeden oluşan endüstriyel, ticari, resmi ve askeri sistemlerde yönetimlerde karşılaşılan problemlere bilimsel yaklaşımındır. Amacı, yönetime politika ve faaliyetlerini bilimsel olarak belirlemede yardımcı olmaktadır
- Yüneylem araştırması, mevcut imkanlardan en büyük faydayı sağlamak için girişilen bilimsel yaklaşımlar ve teknikler cümlesidir
- Yüneylem araştırmasının ana konusu, herhangi bir sistemin karmaşık operasyonlarını anlamak ve performansını iyileştirmek için bilimsel karar verme yöntemleridir

Prof.Dr. Ünal H. ÖZDEN

12

©12 Ekim 2015 Pazartesi

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

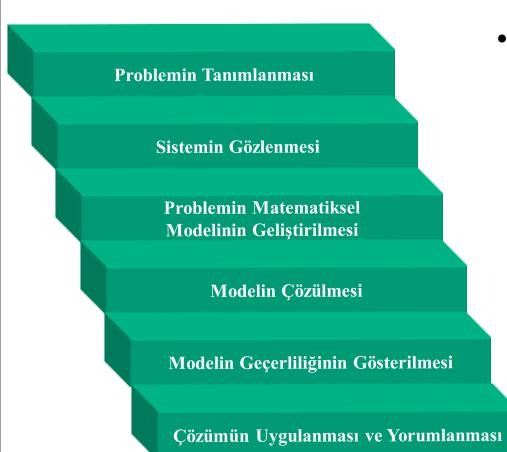
Yöneylem araştırmasının temel özelliklerি

- 1. Sistem yaklaşımını kullanması:** Yöneylem araştırması problemi çözerken, o problemin ait olduğu organizasyonun bütün unsurlarını, çevresini ve aralarındaki etkileşimi göz önünde bulundurur
- 2. Disiplinlerarası bir yaklaşım olması:** Problemin modellenmesinde ve çözümünde farklı bakış açılarından faydalananabilme için problemlerin disiplinlerarası bir ekip tarafından incelenmesi gerekir
- 3. Bilimsel yöntemler kullanması:** Yöneylem araştırması problemi tanımlar, modeller, çözer, sonuçları test eder ve uygular

Prof.Dr. Ünal H. ÖZDEN 13 ©12 Ekim 2015 Pazartesi

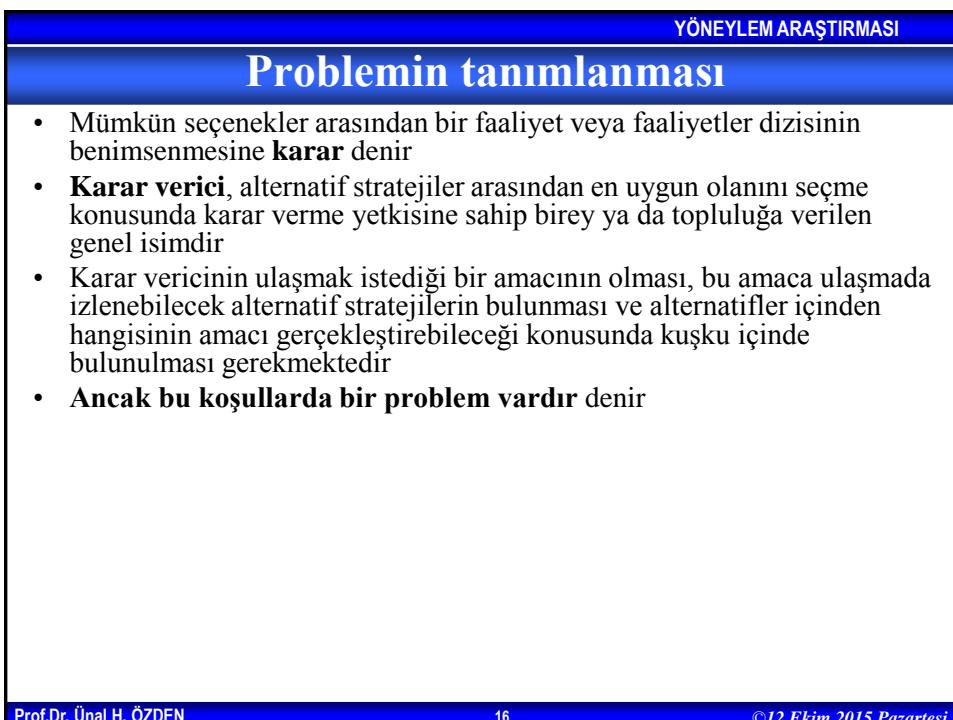
YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

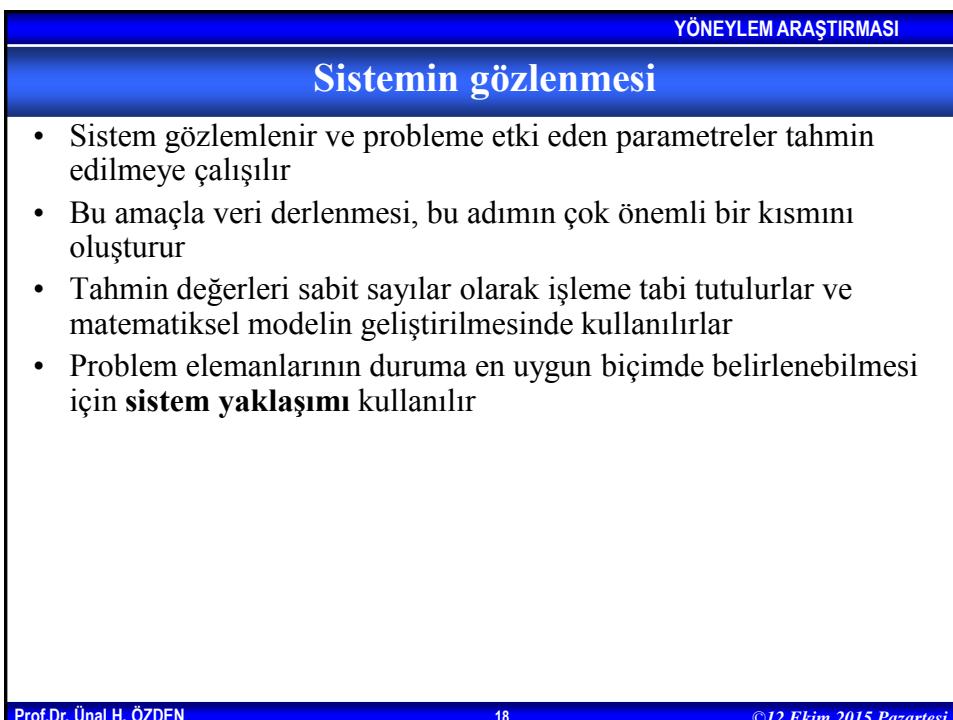
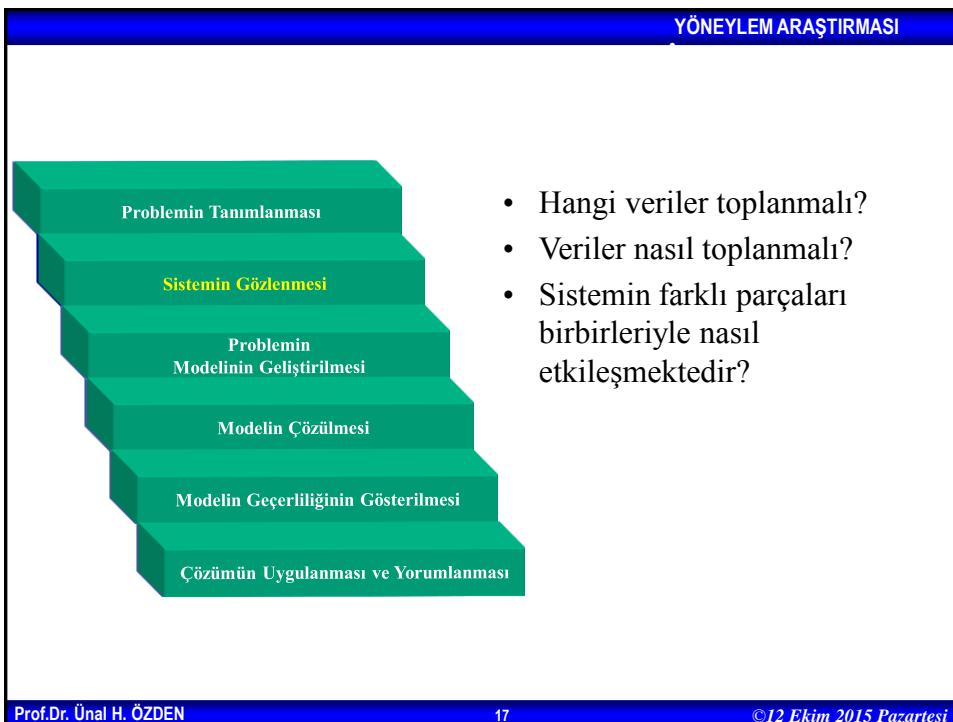
Yöneylem araştırmasının metodolojisi: İyi bir YA uygulamasının altı basamağı



- Her basamak arasında geribesleme bulunmaktadır

Prof.Dr. Ünal H. ÖZDEN 14 ©12 Ekim 2015 Pazartesi





YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

Sistem nedir?

- Bir sınır içerisinde, birbirleriyle etkileşim içinde bulunan ve ortak bir amaca yönelik olan öğeler topluluğudur
- Sistem, girdileri çıktılara dönüştüren birbirleriyle ilişkili faaliyetlerden ve öğelerden (elemanlardan) oluşmaktadır
- Sistemin çok sayıda girdisi ve çıktısı olabilir

```

    graph LR
      G[Girdiler] --> P[Prosesler]
      P --> C[Çıktılar]
  
```

Prof.Dr. Ünal H. ÖZDEN

19

©12 Ekim 2015 Pazartesi

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

Yöneylem araştırmasının metodolojisi

- Hangi tür model kullanılmalı?
- Model, problemi tam olarak ifade ediyor mu?
- Model çok mu karmaşık?

Prof.Dr. Ünal H. ÖZDEN

20

©12 Ekim 2015 Pazartesi

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

Model geliştirmek

- Problemin kolayca çözülebilecek bir yapıya oturtulması gerekmektedir
- **Model nedir?**
- Bir sistemin değişen koşullar altındaki davranışlarını incelemek, kontrol etmek ve geleceği hakkında varsayımlarda bulunmak amacıyla elemanları arasındaki bağlantıları kelimeler veya matematiksel terimlerle belirleyen ifadeler topluluğuna model denir

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

Model geliştirmek

```

graph TD
    Sistem[Sistem] --> G[Gerçek sistem üzerinde çalışmak]
    Sistem --> Sm[Sistem modeli üzerinde çalışmak]
    Sm --> Fiziksel[Fiziksel modeller üzerinde çalışmak]
    Sm --> Matematiksel[Matematiksel modeller üzerinde çalışmak]
    Matematiksel --> Analitik[Analitik model üzerinde çalışmak]
    Matematiksel --> Simülasyon[Simülasyon modeli üzerinde çalışmak]
  
```

The diagram illustrates the process of model development. It starts with a general box labeled "Sistem". Two arrows point from "Sistem" to two separate boxes: "Gerçek sistem üzerinde çalışmak" and "Sistem modeli üzerinde çalışmak". From the "Sistem modeli üzerinde çalışmak" box, two more arrows point to "Fiziksel modeller üzerinde çalışmak" and "Matematiksel modeller üzerinde çalışmak". Finally, an arrow points from "Matematiksel modeller üzerinde çalışmak" to two boxes: "Analitik model üzerinde çalışmak" and "Simülasyon modeli üzerinde çalışmak".

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

Model geliştirmek

- Her modelin kuruluş amacı, belirli bir ekonomik sistemi yönetmekle görevli kişi veya kişilere (karar vericiye) mümkün karar seçeneklerini sunmak, bunların sonuçlarını belirlemek ve karşılaştırmalar yapmaktadır
- Yöneylem araştırmasının karar vermeye en önemli katkısı matematiksel modellerdir
- Bir sistemin davranışlarıyla ilgili kuralların matematiksel olarak ifade edilmesiyle matematiksel modeller kurulur
- Eğer ele alınan sistem matematiksel modellerle çözülemeyecek kadar karmaşık bir yapıya sahipse sistemin bir simülasyon modeli kurulur.
- Simülasyon, bir sistemin tüm çalışma zamanı boyunca davranışının şeşlinin bilgisayar ortamında taklit edilmesidir

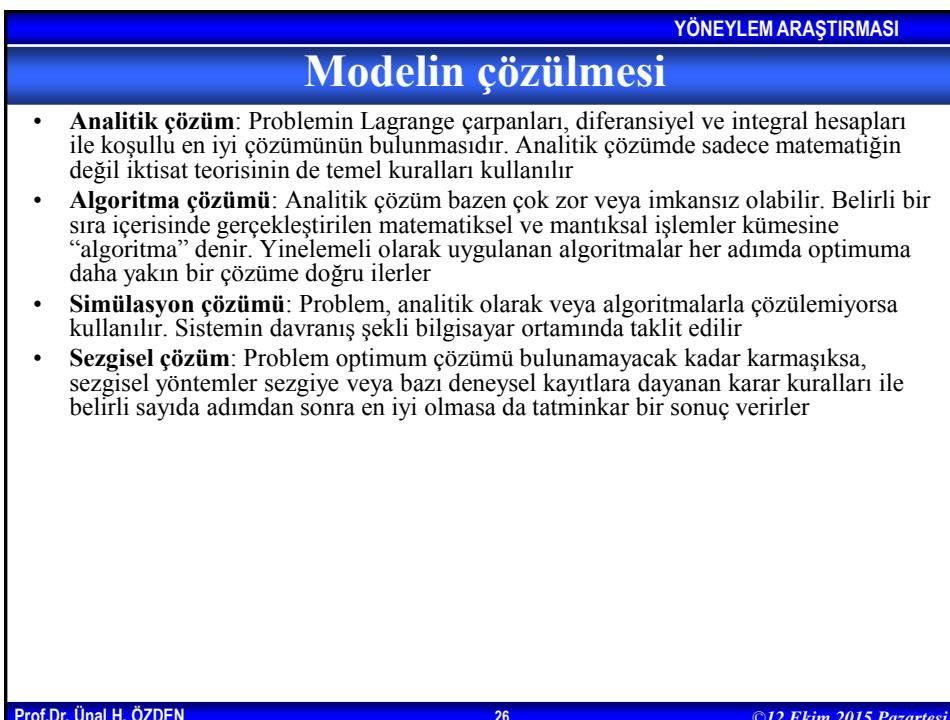
YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

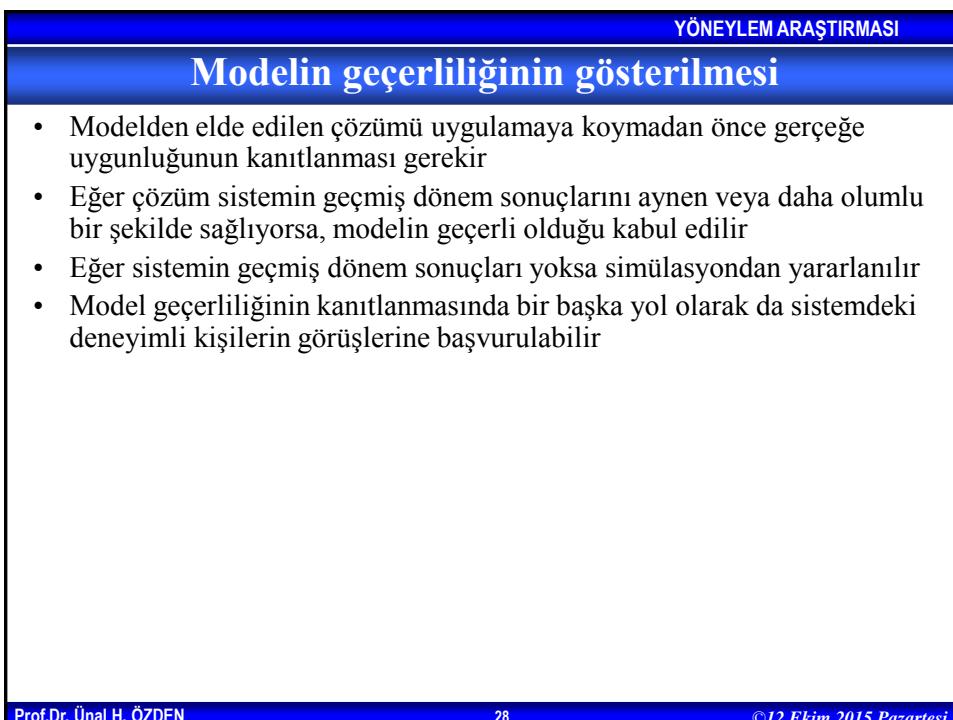
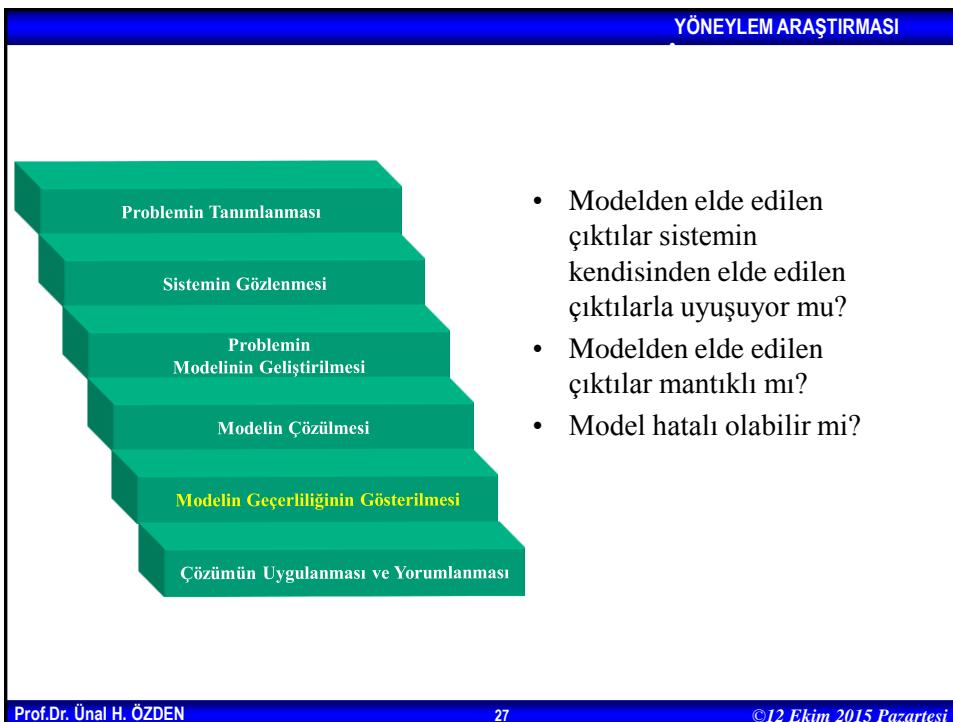
Matematiksel modellerin elemanları

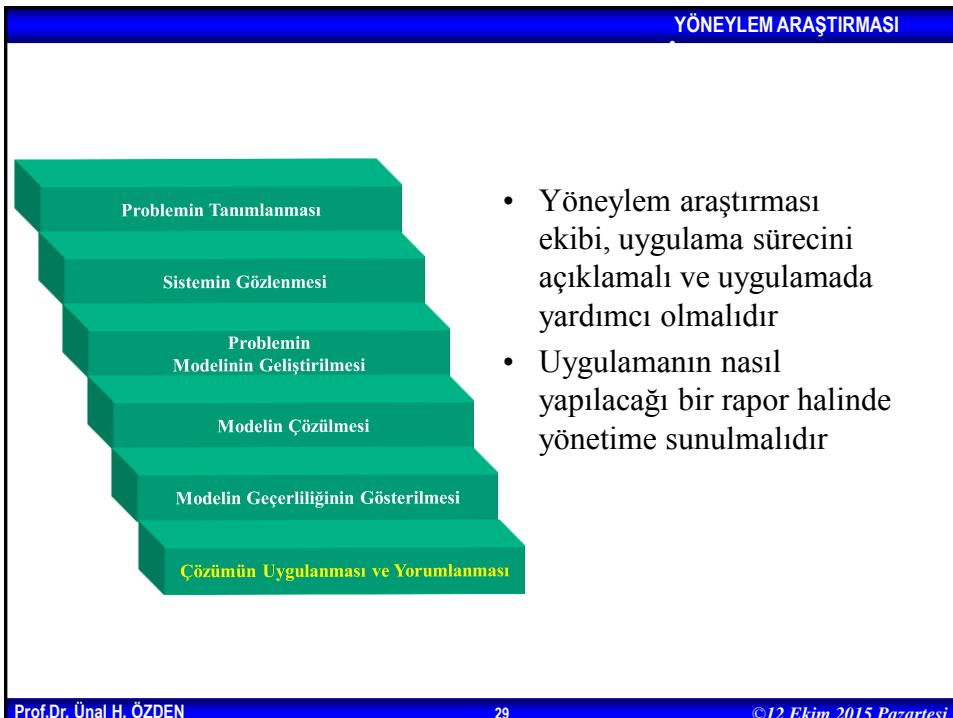
- Ekonomik sistemlerin matematiksel modellerinde kullanılan elemanlarını üç ana grupta toplamak mümkündür:

 - 1. Amaç fonksiyonu**
 - 2. Karar değişkenleri**
 - 3. Kısıtlar**

- Bir karar verme durumunda ilgilenilen sistem dikkatli bir şekilde gözlemlenir ve değerleri kontrol edilebilir ve sistemin performansını etkileyen parametreler belirlenir. Bu parametreler yöneticilerin kontrolü altındadır ve **karar değişkenleri** olarak tanımlanırlar. Bir üretim sisteminde farklı ürünlerin üretilecek miktarları, bir yerden başka yere taşınacak ürün miktarı, işçi sayısı, makina sayısı vb
- Karar değişkenlerinin amaç üzerindeki etkilerinin analitik olarak gösterilmesiyle **amaç fonksiyonu** oluşturulur
- **Kısıtlar**, sistemin içinde bulunduğu koşullardan kaynaklanmaktadır (talep kısıtları, kapasite kısıtları gibi)







Prof.Dr. Ünal H. ÖZDEN

29

©12 Ekim 2015 Pazartesi

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

Başarılı Yöneylem Araştırması Uygulamaları

Sirket	Yıl	Problem	Kullanılan Teknik	Yıllık Tasarruf
Hewlett Packard	1998	Üretim hattında ara stok tasarımlı	Kuyruk Modelleri	\$280 million
Taco Bell	1998	İşgücü çizelgelemesi	Tamsayılı Programlama, Tahmin, Simülasyon	\$13 million
Proctor & Gamble	1997	Üretim ve dağıtım sisteminin yeniden tasarılanması	Ulaştırma Modelleri	\$200 million
Delta Airlines	1994	Uçakların rotalara atanması	Tamsayılı Programlama	\$100 million
AT&T	1993	Çağrı merkezi tasarımlı	Kuyruk modelleri, Simülasyon	\$750 million
Yellow Freight Systems, Inc.	1992	Nakliye şebekelerinin tasarımı	Şebeke Modelleri, Tahmin, Simülasyon	\$17.3 million
San Francisco Police Dept.	1989	Devriye çizelgeleme	Doğrusal Programlama	\$11 million
Bethlehem Steel	1989	Külçe kalıbı tasarımlı	Tamsayılı Programlama	\$8 million
North American Van Lines	1988	Yükleri şoförlerle atamak	Şebeke Modelleme	\$2.5 million
Citgo Petroleum	1987	Rafineri operasyonları & dağıtım	Doğrusal Programlama, Tahmin	\$70 million
United Airlines	1986	Rezervasyon personelinin çizelgelenmesi	Doğrusal Programlama, Kuyruk, Tahmin	\$6 million
Dairyman's Creamery	1985	Optimum üretim seviyeleri	Doğrusal Programlama	\$48.000
Phillips Petroleum	1983	Ekipman yenileme	Şebeke Modelleme	\$90.000

Prof.Dr. Ünal H. ÖZDEN

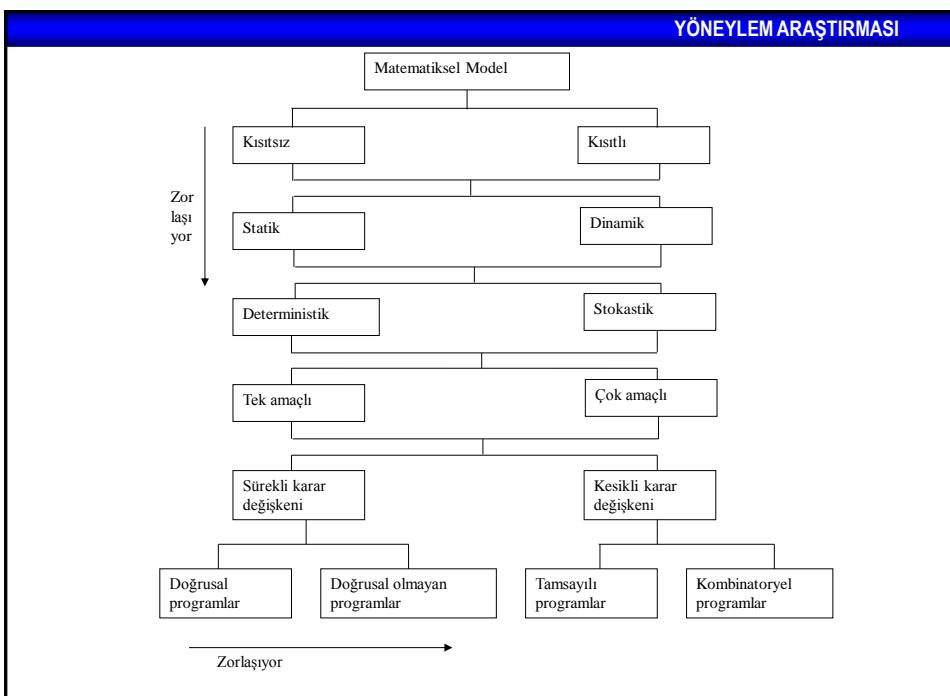
30

©12 Ekim 2015 Pazartesi

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

Matematiksel model türleri

- Yöneylem araştırmasında karşılaşılabilecek matematiksel model türleri, ilgilenilen karar probleminin yapısına göre şekillenir



YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

Matematiksel model türleri

- Eğer karar değişkenleri üzerinde hiçbir sınırlama yoksa kısıtsız modeller ortaya çıkar, en azından bir sınırlama olması kısıtlı modelleri ortaya çıkarır. Gerçek hayatı genellikle kısıtlı problemler konusuna çıkar.
- Eğer problem tek bir dönem için çözülecekse statik model, birden fazla dönem göz önüne alınarak çözülecekse dinamik model ortaya çıkar.
- Eğer birden fazla amaç varsa çok amaçlı problemler ortaya çıkar.
- Eğer tüm karar değişkenleri pozitif reel (gerçek) değerler alıyorsa sürekli optimizasyon problemi söz konusudur
- Tüm karar değişkenlerinin tamsayı değerler alması gerekiyorsa kesikli optimizasyon problemi ortaya çıkar
- Bazı karar değişkenlerinin reel, bazılarının tamsayı değer alması durumunda ise karışık kesikli optimizasyon problemi ile karşılaşırız.
- Eğer karar değişkenlerinin kombinatoryal seçenekleri söz konusuysa kombinatoryal optimizasyon problemleri ortaya çıkar.

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

Matematiksel model türlerine göre kullanılan çözüm yaklaşımları

- Dinamik modeller için kullanılan yaklaşım dinamik programlamadır.
- Eğer optimize edilecek birden fazla amaç varsa genellikle kullanılan yaklaşım hedef programlamadır.
- Modeldeki tüm fonksiyonların doğrusal olması durumunda sürekli optimizasyon problemleri doğrusal programlama yöntemi ile çözülür. Sürekli optimizasyon modelinde en azından bir fonksiyonun doğrusal olmaması durumundaysa doğrusal olmayan programlama yöntemi kullanılır.
- Eğer kesikli optimizasyon problemlerde karar değişkenleri herhangi bir tamsayı değer alıyorsa tamsayılı programlama yöntemi kullanılır.
- Kombinatoryal optimizasyon problemlerinin belirli bir boyuta kadar olan tamsayılı programlama yöntemi ile çözülürken, orta ve büyük boyutlu problemlerin sezgisel yöntemlerle çözülmeli gerekmektedir.

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

DOĞRUSAL PROGRAMLAMA KARAR VERME VE MODELLER

Prof.Dr. Ünal H. ÖZDEN

Prof.Dr. Ünal H. ÖZDEN

35

©12 Ekim 2015 Pazartesi

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

Karar Verme

“Algılanan ihtiyaçlara özgü kasıtlı ve düşünçeli seçim”
(Kleindorfer ve diğ., 1993)

“Karar Verici (KV)’nin mevcut tüm seçenekler arasından
amaçına veya amaçlarına en uygun bir veya birkaç
seçeneği seçme sürecine girmesi” (Evren ve Ülengin, 1992)

En genel hali ile karar verme; KV’nin mevcut seçenekler
arasından bir seçim, sıralama ya da sınıflandırma
yapması gibi bir sorunu çözmeye sürecidir

Prof.Dr. Ünal H. ÖZDEN

36

©12 Ekim 2015 Pazartesi

İyi Bir Karar

- Karar verme kalitesini ölçecek tek bir ortak ölçü saptanamamıştır (Olson ve Courtney, 1992)
- İyi karar verme sanatı sistematik düşünce ile oluşur (Hammond ve dig., 1999)
- İyi bir karar;
 - Mantığa dayanır
 - Tüm mevcut kaynakları kullanır
 - Tüm olası seçenekleri inceler
 - Sayısal bir yöntem uygular

Karar Verme Süreci

Dar anlamda karar verme, çeşitli alternatifler içinde en uygun olanının seçiminin yapıldığı bir süreç olarak tanımlanabilir.

Karar Verme Süreci, değişik kaynaklarda farklı aşamalarla sıralanmıştır. Ancak farklı yaklaşımların ortak noktaları dikkate alındığında, söz konusu sürecin aşamalarını aşağıdaki gibi ifade etmek yanlış olmaz.

1. Karar probleminin tanımlanması
 - Karar verecek kişi veya kişiler
 - Amaç
 - Alternatif eylem biçimleri
 - Belirsizlik
2. Karar probleminin modelinin kurulması

Problemin kolayca çözümlenebilmesi için diğer bir deyişle problemi en iyi biçimde temsil edecek ve problemin çözümündeki belirsizlikleri en aza indirecek bir modelin kurulması gereklidir.

Model: Bir sistemin değişen şartlar altındaki davranışlarını incelemek, kontrol etmek ve geleceği hakkında tahminlerde bulunmak amacıyla elemanları arasındaki bağıntıları kelimeler veya matematik terimlerle belirten ifadeler topluluğuna model denir.
3. Modelden çözüm elde edilmesi
4. Modelin çözümünün test edilmesi
5. Karar verme ve kararın uygulamaya konulması

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

Doğrusal Programlama

Günümüzde, işletme, ekonomi ve muhasebe dallarını en yakından ilgilendiren konulardan bir olan doğrusal programlama, aynı zamanda yöneylem araştırmasında da en önemli konulardan biridir. Doğrusal programlama, kaynakların optimal dağılımını elde etmeye, maliyetleri minimize, karı ise maksimize etmeye yarayan bir tekniktir.

Doğrusal Programlama, optimizasyon problemlerinin çözümünde kullanılan bir yöntemdir. 1947' de, George Dantzig, doğrusal Programlama problemlerinin çözümünde kullanılan etkin bir yol olan Simpleks Algoritma' yi buldu ve bu buluşla birlikte doğrusal Programlama, sıkılıkla ve hemen hemen her sektörde kullanılmaya başlandı.

Temel olarak, doğrusal Programlama, küt kaynakların optimum şekilde dağılımını içeren deterministik bir matematiksel tekniktir.

Doğrusal programlama, iyi tanımlanmış doğrusal eşitliklerin veya eşitsizliklerin kısıtlayıcı koşulları altında doğrusal bir amaç fonksiyonunu en iyi (optimum/maksimizasyon/minimizasyon) kıalan değişken değerlerinin belirlenmesinde kullanılan matematiksel programlama tekniğidir.

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

DP Modelinin Yapısal Unsurları-devam

1.Amaç fonksiyonu

Karar vericinin ulaşmak istediği hedef doğrusal bir denklem ile açıklanır. Amaç fonksiyonu olarak bilinen bu denklem, karar değişkenleri ile karar vericinin amacı arasındaki fonksiyonel ilişkiye gösterir.

$$Z_{\text{enk/enb}} = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \quad Z_{\text{enb/enk}} = \sum_{j=1}^n c_jx_j$$

2. Kısıtlayıcı fonksiyonlar (kısıtlayıcılar/kısıtlar)

Karar değişkenleri ve karar değişkenleriyle parametrelerin birbirleriyle olan ilişkilerinde sağlanması zorunlu olan ilişkilerin matematiksel olarak açıklanmasıyla elde edilen denklemlere kısıtlayıcı fonksiyonlar denir. Kısıtlayıcılarını değerleri kesin olarak önceden belirlenmiş olup sistemin tanımlanmasında kullanılır. Kısıtlayıcı fonksiyonlar sadece kaynakların sınırlarını değil, gereksinim ve yönetim kararlarını ifade etmekte kullanılır.

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &\leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &\leq b_2 \\ \dots & \dots \dots \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &\leq b_m \end{aligned} \quad \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq b_i \quad (i = 1, 2, 3, \dots, m)$$

3. Negatif olmama koşulları

Karar değişkenlerinin değerleri negatif olmaz.

$$x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0 \quad \text{veya kısaca } x_j \geq 0 \quad (j=1, 2, 3, \dots, n)$$

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

DP Modelinin Yapısal Unsurları-devam**4. Karar değişkenleri**

Karar vericinin denetimi altında olan niteliklere karar değişkenleri denir. Bunlar modele ilişkin bilinmeyenler olup değerleri modelin çözümünden sonra belirlenir. Bu değişkenler karar vericinin denetimi altında olduklarıdan bunlara kontrol değişkenleri de denir.

x_j : Belirli bir zaman döneminde j 'inci ürünün üretim miktarı veya faaliyet düzeyi.

$j=1, 2, 3, \dots, n$: Ürün çeşidi, faaliyet sayısı.

5. Parametreler

Alabileceğimiz değerlerde karar vericinin hiçbir etkisi olmayan niteliklere parametre veya kontrol dışı değişkenler denir. Belirli koşullarda belirli değerler alan parametreler problem için veri durumundadır.

C_j : j 'inci karar değişkeninin amaç fonksiyonu katsayısı (parametre)-(birim kar, birim fiyat, birim maliyet vs.).

a_{ij} : j 'inci üründen bir birim üretmek için i 'inci kaynaktan tüketilen kaynak miktarı veya girdi katsayısı

b_i : n sayındaki ürün için elde bulunan i 'inci sınırlı kaynak miktarı.

$i=1, 2, 3, \dots, m$: Üretim bölümlerinin veya üretim kaynaklarının sayısı.

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

DP Modelinin Genel Görünümü

Amaç Fonksiyon

$$Z_{\text{enk/enb}} = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$$

Kısıtlayıcı fonksiyonlar

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \leq b_2$$

...

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \leq b_m$$

Negatif Olmama Koşulu

$$x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$$

DP Modelinin Matris Gösterimi

Amaç Fonksiyonu

$$Z_{\text{enb/enk}} = [C_1 \quad C_2 \quad \dots \quad C_n] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \mathbf{Cx}$$

Kısıtlayıcı Fonksiyonlar

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} (\leq; =; \geq) \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} = \mathbf{Ax} (\leq; =; \geq) \mathbf{b}$$

DP'nin Varsayımları

1. Doğrusallık (veya Oransallık) Varsayımlı: Modeldeki fonksiyoların hepsi doğrusaldır. Bu varsayımlı gerçekleşmediği takdirde DOP söz konusudur.

2. Toplanabilirlik Varsayımlı

3. Kesinlik Varsayımlı:

Bu varsayımlı, tüm parametrelerin (amaç fonksiyonu katsayısi, sağ el tarafı ve teknolojik katsayı) kesin olarak bilindiğini ve ilgili dönemde değişmeyeceğini öngörür. Eğer bu değerler tam olarak bilinmiyorsa, sonuç güvenilir olmayacağından emin olmak gereklidir. Böyle bir durumda duyarlılık analizine başvurulabilir.

4. Negatif Olmama Varsayımlı

Karar değişkenleri negatif değerler alamaz.

5. Bölünebilirlik Varsayımlı

Bu varsayımlı, her karar değişkenlerinin ondalıklı bir sayı alabileceği anlamına gelir. Bu varsayımlı ortadan kalktıında tamsayılı programlama söz konusu olur.

DP'nin Uygulama Alanları

- Ulaştırma ve dağıtım kanallar
- Beslenme ve karıştırma problemleri
- Üretim planlaması
- Yatırım planlaması
- Görev dağılımı
- Arazi kullanımı planlaması
- Kuruluş yeri seçimi
- Oyun teorisi
- ...

DP Problemlerinin Modelinin Kurulması

DP Problemlerinin modelinin kurulmasında aşağıdaki adımların izlenmesi gerekmektedir.

1. Karar değişkenlerinin tanımlanması ve bunların sembolize edilmesi
2. Amacın belirlenerek amaç fonksiyonun karar değişkenlerinin doğrusal bir fonksiyonu olarak yazılması
3. Tüm kısıtlamaların karar değişkenlerinin doğrusal bir fonksiyonları olarak eşitlik veya eşitsizlik olarak yazılması
4. Negatif olmama koşullarının yazılması.

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

Örnek DP Modeli-1

- İnci kimya firması X ve Y gibi iki tip kimyasal madde üretmektedir. 1 litre X ürününün maliyeti 160 TL., 1 litre Y ürününün maliyeti ise 240 TL. dir. Müşteri talebine göre, firma, gelecek hafta için en az 6 litre X ve en az 2 litre Y ürünü üretmelidir. X ve Y kimyasal ürünlerinde kullanılan hammaddelerden birisinin sunumu azdır ve sadece 30 gr. sağlanabilmektedir. X ürününün bir litresinde bu hammaddeden 3 gr. ve Y nin litresinde de 5 gr. gerekli olmaktadır.
- İnci firması, toplam maliyetini minimize etmek için X ve Y ürünlerinden kaçar litre üretmesi gereği konusunda çok büyük bir kararsızlık içerisinde girmiştir. Bu soruyu yanıtlayacak modeli kurunuz.

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

Örnek DP Modeli-1-devam

- Problemde karar değişkenleri,**
- x_1 = Üretilen X ürününün miktarı (litre)
- x_2 = Üretilen Y ürününün miktarı (litre)
- Minimize edilmek istenen toplam maliyet**
- $160x_1 + 240x_2$ dir.
- İstenen gerekli minimum miktar ise**
- $x_1 \geq 6$ ve $x_2 \geq 2$ dir.
- Hammadde kısıtlayıcısı ise**
- $3x_1 + 5x_2 \leq 30$ dur.
- Böylece minimizasyon modeli şöyle olacaktır:**
- $\text{Min } z = 160x_1 + 240x_2$
- $x_1 \geq 6$
- $x_2 \geq 2$
- $3x_1 + 5x_2 \leq 30$
- $x_1, x_2 \geq 0$

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

Örnek DP Modeli-2

- Mügesüt şirketi kapasite sorunu yüzünden günde 120.000 kg. dan daha çok süt işleyememektedir. Yönetim, yağ veya işlenmiş süt için kullanılan sütün dengelenmesi için peynir fabrikasında en az 10.000 kg. lik günlük süt kullanmak istemektedir. Bir kg. sütün yağ üretimi için kullanıldığında, kara katkısı, 4 TL., şişe sütü olarak kullanıldığında katkısı 8 TL. ve peynir üretimi için kullanıldığında ise katkısı 6 TL. dir.
- Yağ bölümü günde 60.000 kg., süt şişeleme donanımı günde 40.000 kg., peynir donanımı ise günde 30.000 kg. süt işleyebilir.
- Şirket karını maksimize etmek istediği göre problemi doğrusal programlama modeli olarak ifade ediniz.

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

Örnek DP Modeli-2-devam

- Çözüm:**
- Karar Değişkenleri**
- $x_1 = \text{Yağ yapımında kullanılan süt miktarı (kg)}$
- $x_2 = \text{Şişelemede kullanılan süt miktarı (kg)}$
- $x_3 = \text{Peynir yapımında kullanılan süt miktarı (kg)}$
- İşletmenin karını maksimize edecek amaç fonksiyonu;**
- Maksimum $z = 4x_1 + 8x_2 + 6x_3$
- Kısıtlar ise;**
- $x_3 \geq 10.000$
- $x_1 \leq 60.000$
- $x_2 \leq 40.000$
- $x_3 \leq 30.000$
- $x_1 + x_2 + x_3 \leq 120.000$
- Negatif Olmama koşulu;**
- $x_1, x_2, x_3 \geq 0$

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

Ulaştırma Problemi Örnek DP Modeli-3

- Üç ayrı fabrikada beyaz eşya üreten bir işletme satışlarını değişik bölgelerdeki üç depo aracılığıyla yapmaktadır. İşletme yönetiminin temel sorunu beyaz eşyanın fabrikalardan satış depolarına ulaştırılmasında karşılaştığı yüksek ulaştırma giderleridir. Fabrikalardan depolara birim ulaştırma maliyetleri aşağıda verilmiştir.

Fabrika	Depo		
	A	B	C
1	30	25	15
2	16	45	29
3	25	10	16

- Üretim miktarları sırasıyla 150, 200 ve 400 adettir. Depoların aylık istemleri A için 220, B için 150, C için 380 adettir. Depoların gereksinimini tam olarak sağlamak isteyen işletme, tüm üretimi toplam ulaştırma maliyetini en küçük yapacak şekilde dağıtmak istemektedir. Problemin doğrusal programlama modelini kurunuz.

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

Örnek DP Modeli-3-devam

İlk olarak karar değişkenlerini, i 'inci fabrikadan j 'inci depoya taşınan beyaz eşya miktarı (adet olarak) olmak üzere x_{ij} ($i = 1, 2, 3$; $j = A, B, C$) şeklinde tanımlayalım. Buna göre, karar değişkenleri aşağıdaki gibi olur.

$x_{1A} = 1$ nolu fabrikadan A deposuna gönderilen beyaz eşya sayısı

$x_{1B} = 1$ nolu fabrikadan B deposuna gönderilen beyaz eşya sayısı

.....

$x_{3C} = 3$ nolu fabrikadan C deposuna gönderilen beyaz eşya sayısı

İşletmenin amacı aylık taşıma maliyetleri toplamını en küçükleşten değiştiren değerlerini belirlemek olduğuna göre, amaç fonksiyonu aşağıdaki gibi yazılır.

$$Z_{\text{enk}} = 30x_{1A} + 25x_{1B} + 15x_{1C} + 16x_{2A} + 45x_{2B} + 29x_{2C} + 25x_{3A} + 10x_{3B} + 16x_{3C}$$

Problemin kısıtlayıcıları, fabrikaların üretim miktarları ile depoların gereksinim miktarlarıdır.

Herhangi bir fabrikadan üretiminden fazla taşıma yapılamayacağından ve üretimin tamamı dağıtılmak istendiğinden,

$$x_{1A} + x_{1B} + x_{1C} = 150$$

$$x_{2A} + x_{2B} + x_{2C} = 200$$

$$x_{3A} + x_{3B} + x_{3C} = 400$$

olur.

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

Örnek DP Modeli-3-devam

- Bunlar üretim miktarı ile ilgili kısıtlayıcı fonksiyonlardır.
- Depoların beyaz eşya gereksiniminin eksiksiz karşılanması koşulu aşağıdaki eşitlikler sistemiyle açıklanabilir.

$$x_{1A} + x_{2A} + x_{3A} = 220$$

$$x_{1B} + x_{2B} + x_{3B} = 150$$

$$x_{1C} + x_{2C} + x_{3C} = 380$$

- Negatif taşıma olamayacağına göre,
- $x_{i,j} \geq 0$ ($i = 1, 2, 3$; $j = A, B, C$)

negatif olmama koşulunun yazılmasıyla model kurulmuş olur.

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

Beslenme Problemi Örnek DP Modeli 4

Bir çiftçi çiftliğindeki tavukların günlük karbonhidrat, protein ve vitamin gereksinimini en küçük maliyetle karşılamak amacıyla en uygun besin maddelerini ve bunların miktarlarını belirlemek istemektedir. Alternatif besin maddelerinin birim maliyetleri, içerdikleri karbonhidrat, protein ve vitamin miktarları ile bunlara olan günlük gereksinim aşağıdaki tabloda özetlenmiştir. Bu verilere göre, tavukların günlük besin gereksinimini tam olarak karşılayan en küçük maliyetli besin karışımının belirlenmesinde kullanılacak doğrusal programlama modelini kurunuz.

Besin Elemanı	Besin Türü (kg)			En Az Günlük Gereksinim
	Suni Yem	Buğday	Arpa	
Karbonhidrat (gr)	9	2	4	20
Protein (gr)	3	8	6	18
Vitamin (mgr)	1	2	6	15
Birim Fiyat (TL)	7	6	5	-

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

Örnek DP Modeli 4-devam

Karışım suni yem, buğday ve arpadan oluştugundan, karar değişkenleri aşağıdaki gibi tanımlanabilir.

x_1 : Suni yem tüketim miktarı (kg/gün)

x_2 : Buğday tüketim miktarı (kg/gün)

x_3 : Arpa tüketim miktarı (kg/gün)

Toplam maliyet tüketilen her bir besin türünün birim maliyeti ile o besinden tüketilen miktarın çarpımlarının toplamına eşittir. Buna göre toplam maliyet,

$$Z = 7x_1 + 6x_2 + 5x_3$$

biçiminde yazılır.

Amaç bu toplamı en küçüklemek olduğundan, amaç fonksiyonu amaca uygun olarak aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$Zenk = 7x_1 + 6x_2 + 5x_3$$

Problemin kısıtlayıcı fonksiyonları günlük besin elemanlarına aittir. Kısıtlayıcı koşulların ise sırasıyla karbonhidrat, protein ve vitamin gerekliliklerinin göz önünde bulundurulmasıyla aşağıdaki gibi yazılacakları açıklar.

$$9x_1 + 2x_2 + 4x_3 \geq 20 \text{ (Karbonhidrat kısıtı)}$$

$$3x_1 + 8x_2 + 6x_3 \geq 18 \text{ (Protein kısıtı)}$$

$$1x_1 + 2x_2 + 6x_3 \geq 15 \text{ (Vitamin kısıtı)}$$

\geq işaretini alınması gereken besin elemanlarının belirtilen miktarların altına düşmeyeceğini, fakat bu miktarlardan fazla olabileceğini belirtmektedir.

Negatif tüketim olamayacağından,

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$$

yazılmasıyla modelleme işlemi tamamlanmış olur.

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

Üretim Planlaması Örnek DP Modeli 5

- Bereket AŞ düşük ve yüksek fosfatlı olmak üzere iki çeşit gübre üretmektedir. Gübreler üç farklı hammaddenin (A, B, C) karışımından oluşmaktadır. 1 ton yüksek fosfatlı gübre üretiminde 2 ton A, 1'er ton B ve C; 1 ton düşük fosfatlı gübre üretiminde ise A ve B'den 1'er ton kullanılmaktadır. İşletmenin aylık hamaddenin kapasitesi 150 ton A, 120 ton B, 50 ton C'dir. Düşük fosfatlı gübre isteminin en çok 20 ton/ay olduğu bilinmektedir. Yüksek fosfatlı gübrenin satış fiyatı 150 TL/ton, düşük fosfatlı gübrenin satış fiyatı ise 100 TL/ton dur. İşletme, toplam satış gelirini en büyüğe maksimize etmek için her ay her bir üründen kaç ton üretemeli? Problemi doğrusal programlama olarak modelleyiniz.

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

Örnek DP Modeli 5-devam

Düşük ve yüksek fosfatlı gübre miktarlarının belirlenmesi gerekmektedir.

Dolayısıyla, model değişkenleri aşağıdaki gibi tanımlanmalıdır.

x_1 : Yüksek fosfatlı gübre üretim miktarı (ton/ay)

x_2 : Düşük fosfatlı gübre üretim miktarı (ton/ay)

Amaç toplam aylık satış gelirini en büyüğlemek olduğuna göre, amaç fonksiyonu aşağıdaki gibi olur.

$$\text{Zenb} = 150x_1 + 100x_2$$

Problemin kısıtlayıcı elemanları her iki gübre için gerekli ve sınırlı olan hammadde miktarları ile düşük fosfatlı gübreye olan istem miktarıdır. Buna göre, kısıtlayıcı fonksiyonlar aşağıdaki gibi olur.

$$2x_1 + 1x_2 \leq 150 \quad (\text{A hammadde kısıtı})$$

$$1x_1 + 1x_2 \leq 120 \quad (\text{B hammadde kısıtı})$$

$$1x_1 + 0x_2 \leq 50 \quad (\text{C hammadde kısıtı})$$

$$1x_1 \leq 20 \quad (\text{Düşük fosfatlı gübre istem miktarı kısıtı})$$

Son olarak, üretim miktarı negatif olamayacağından, $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$ yazılmasıyla model tamamlanmış olur.

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

Örnek DP Modeli 6

- Biri alüminyum diğeri ahşap çerçeveli olmak üzere iki tip pencere üretimi planlanmaktadır. Üretim atölyelerinin günlük çalışma kapasiteleri ve her üründen bir adet üretmek için gerekli zaman (saat olarak) aşağıdaki gibidir. Ahşap çerçeveli pencerenin kâra katkısı 300 TL, alüminyum çerçevelinin ise 500 TL'dir. İşletme, günlük karını en büyüğlemek için her üründen kaç birim üreteceğini belirlemek istediğiğine göre, problemi doğrusal programlama modeli olarak formüle ediniz.

Atölye	Pencere		Çalışma Kapasitesi (gün/saat)
	Alüminyum	Ahşap	
Alüminyum	1	0	4
Ahşap	0	2	12
Cam Üretim	3	2	18
Birim Kâr (TL)	300	500	-

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

Örnek DP Modeli 6-devam

Problemin karar değişkenleri aşağıdaki gibi tanımlanabilir.

x_1 : Ahşap çerçeveli pencere üretim miktarı (adet/gün)

x_2 : Alüminyum çerçeveli pencere üretim miktarı (adet/gün)

Amaç, günlük toplam kârı en büyütleyecek x_1 , x_2 değerlerini belirlemek olduğuna göre, amaç fonksiyonu aşağıdaki gibi yazılır.

$$Z_{\text{enb}} = 300x_1 + 500x_2$$

İşletmenin her iki ürünün üretimi için gerekli ve sınırlı olan kaynakları atölyelerinin günlük çalışma kapasiteleridir.

Buna göre kısıtlayıcı fonksiyonlar aşağıdaki gibi olur.

$$x_1 + 0x_2 \leq 4 \quad (\text{Alüminyum kaplama atölyesi çalışma zamanı kısıtı})$$

$$0x_1 + 2x_2 \leq 12 \quad (\text{Ahşap kaplama atölyesi çalışma zamanı kısıtı})$$

$$3x_1 + 2x_2 \leq 18 \quad (\text{Cam üretme atölyesi çalışma zamanı kısıtı})$$

Negatif üretim olamayacağına göre, $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$ yazılmasıyla model tamamlanır.

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

Örnek DP Model 7

- Hazır gıda AŞ kg'ı 0.85 TL' den 120000 kg domates alarak domates suyu ve domates salçası üretmektedir. Konserve edilen ürünler 12 kutuluk koliler halinde paketlenmektedir. Bir kutu domates suyu için 0.75 kg, 1 kutu salça için 1 kg domates kullanılmaktadır. Şirketin pazar payı 2500 koli domates suyu, 7500 koli domates salçası olarak belirlenmiştir. Bir koli domates suyunun satış fiyatı 36 TL, bir koli salçanın satış fiyatı 18 TL dir. Toplam satış gelirinin en büyük olmasını isteyen işletmenin üretim planını belirleyiniz.

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

Örnek DP Model 7-devam

Üretim domates suyu ve salçadan oluştugundan, modelin değişkenleri şöyle tanımlanır.

x_1 : Domates suyu kolisi miktarı (adet)

x_2 : Domates salçası kolisi miktarı (adet)

Toplam satış gelirinin en büyük olması amaçlandığından, amaç fonksiyonu aşağıdaki gibi olur.

$$Z_{\text{enb}} = 36x_1 + 18x_2$$

Üretimin planlanması, satın alınan domates miktarı ile ürünlerin pazar payları göz önünde bulundurulması gerektiğinden, kısıtlayıcı fonksiyonlar şöyle olur.

$$9x_1 + 12x_2 \leq 120000 \quad (\text{Domates miktarı kısıtı})$$

$$x_1 \leq 2500 \quad (\text{Domates suyu pazar payı kısıtı})$$

$$x_2 \leq 7500 \quad (\text{Salça pazar payı kısıtı})$$

$$x_1, x_2 \geq 0 \quad (\text{Negatif olmama koşulu})$$

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

Yatırım Planlaması Örnek DP Modeli 8

Cihan Bey 60 milyon TL tutarındaki emekli ikramiyesi ile yıllık gelirini en büyük yapacak yatırımlara girmeyi planlamaktadır. Cihan Bey için uygun yatırım seçenekleri ile bu yatırımların yıllık getiri oranları aşağıda verilmiştir. Cihan Bey'in amacı, yıllık getirisini en büyük olan yatırım planını belirlemektir. Cihan Bey karşılaşabileceği risklere karşı aşağıdaki prensip kararlarını almıştır.

- a. Banka mevduati, devlet tahvili ile altına yatırımların toplamına eşit olmalıdır.
- b. Altına yatırım, nakit olarak saklanan paranın %30'undan fazla olmamalıdır.
- c. Hisse senedi yatırımı 15 milyon TL'yi geçmemelidir.
- d. Devlet tahvili yatırımı en fazla 10 milyon TL olmalıdır.

Yatırım Seçeneği (Milyon TL)	Getiri Oranı (%)
Banka Mevduati	52
Hisse Senedi	40
Devlet Tahvili	32
Altın	16
Nakit	-5

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

Örnek DP Modeli 8-devam

Modelin değişkenleri j yatırım seçeneğine ayrılan para miktarı (milyon TL) olarak aşağıdaki gibi tanımlanır.

x_1 : Banka mevduatı yatırım miktarı

x_2 : Hisse senedi yatırım miktarı

x_3 : Devlet tahvilii yatırım miktarı

x_4 : Altına yatırım miktarı

x_5 : Nakit olarak ayrılan para miktarı

Cihan Bey'in amacı yıllık getirisini en büyük yapacak yatırım miktarlarını belirlemek olduğuna göre, problemin amaç fonksiyonu şöyle olacaktır.

$$Z_{\text{enb}} = 0.52x_1 + 0.40x_2 + 0.32x_3 + 0.16x_4 - 0.05x_5$$

Karar değişkenlerinin değerleri milyon TL olarak ifade edildiğinden, amaç fonksiyonunun değeri de milyon TL olacaktır.

Modelin kısıtlayıcı fonksiyonları, Cihan Bey'in prensip kararları doğrultusunda, aşağıdaki gibi belirlenecektir.

a. Banka mevduatı (x_1), devlet tahvilii (x_3) ile altına (x_4) yatırımların toplamına eşit olmalıdır. Buna göre,

$$x_1 = x_3 + x_4$$

yazılabilir. Doğrusal programlamadaki kısıtlayıcı fonksiyonların sağ taraflarında bir sabit olması gerektiği bilinmektedir. Bu koşulu sağlamak için, eşitliğin sağ tarafı sol taraftan çıkartılır. Bu yolla söz konusu kısıt doğru formda aşağıdaki gibi olur.

$$x_1 - (x_3 + x_4) = 0 \quad \text{veya} \quad x_1 - x_3 - x_4 = 0$$

b. Nakit olarak ayrılan paranın x_5 olduğu düşünülürse, altına yapılan yatırıma ilişkin kısıtlayıcı aşağıdaki gibi formüllenir.

$$x_4 \leq 0.30x_5 \quad \text{veya} \quad x_4 - 0.30x_5 \leq 0$$

c. $x_2 \leq 15$ (Hisse senedi yatırımı)

d. $x_3 \leq 10$ (Devlet tahvilii yatırımı)

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 60 \quad (\text{Paranın tamamının değerlendirilmesi kısıtı})$$

$x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, $x_3 \geq 0$, $x_4 \geq 0$, $x_5 \geq 0$ yazılmasıyla model kurulmuş olur.

Prof.Dr. Ünal H. ÖZDEN

63

©12 Ekim 2015 Pazartesi

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

Ödev

Gülüm AŞ kuru ciltlerin bakımı için KUR, yağlı ciltlerin bakımı için YAĞ ve normal ciltlerin bakımı için NOR marka krem üretmeyi planlamaktadır. Ürünlerin satışa hazır duruma gelmesi için dört ayrı işlem biriminde işlem görmesi gerekmektedir. İşletmenin işlem birimlerinin haftalık çalışma kapasiteleri (saat/hafta olarak) ve her ürünün 10 adetinin gerektirdiği işlem süreleri aşağıdaki gibidir.

Krem	İşlem Birimi			
	I	II	III	IV
KUR	3	2	1	-
YAĞ	4	2	3	1
NOR	6	8	1	3
Kapasite	80	40	25	35

İşletmenin elinde üç ürünün her birinden 300'er şişe üretecek hammaddesi bulunumasına karşın elindeki şişe adeti toplamı 850'dir. Diğer taraftan, yapılan pazar araştırmaları KUR marka kremin haftalık üretim miktarının en fazla 250 şişe, NOR marka kremin ise en az 250 şişe olması gerektiğini ortaya karışmıştır. KUR marka kremin şişesinden 75 TL, YAĞ marka kremin şişesinden 90 TL, NOR marka kremin şişesinden 60 TL kâr elde edilmektedir. İşletmenin kârını en büyütleyecek üretim planının belirlenmesinde kullanılacak doğrusal programlama modelini kurunuz.

Prof.Dr. Ünal H. ÖZDEN

64

©12 Ekim 2015 Pazartesi

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

DOĞRUSAL PROGRAMLAMA GRAFİK ÇÖZÜM YÖNTEMİ

Prof.Dr. Ünal H. ÖZDEN

Temel Kavramlar

- ***Çözüm***: Bir doğrusal programlama probleminin kısıtlayıcı fonksiyonlarının hepsini birden sağlayan karar değişkenlerinin (x_1, x_2, \dots, x_n) oluşturduğu kümeye *çözüm* denir.
- ***Uygun çözüm***: Negatif olmama koşulunu sağlayan çözüme *uygun çözüm* denir.
- ***En iyi çözüm***: Amaç fonksiyonuna en iyi değeri (en küçük veya en büyük) sağlayan uygun çözüme *en iyi çözüm* denir.

Grafik Çözüm Yönteminin Aşamaları

- Bir doğrusal programlama probleminin grafik çözümünde aşağıdaki adımlar izlenir:
 - Değişkenlerin koordinat sisteminin yatay ve dikey eksenlerine yerleştirilmesi,
 - Kısıtlayıcı fonksiyonların grafiğinin çizilmesi,
 - Uygun çözüm bölgesinin belirlenmesi,
 - En iyi çözümün araştırılması.

Örnek 1

Amaç fonksiyonu:

$$Z_{\text{enb}} = 6x_1 + 8x_2$$

Kısıtlayıcı fonksiyonları:

$$7x_1 + 3x_2 \leq 21 \quad (1)$$

$$6x_1 + 7x_2 \leq 42 \quad (2)$$

$$x_1 \leq 3 \quad (3)$$

$$x_2 \leq 4 \quad (4)$$

Negatif olmama koşulu:

$$x_1, x_2 \geq 0$$

olarak verilen doğrusal programlama probleminin en iyi çözümünü grafik çözüm yöntemiyle bulunuz.

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

Örnek 1-devam

x_1 değişkenini yatay, x_2 değişkenini dikey eksen üzerinde gösterelim. Negatif olmama ($x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$) koşulundan dolayı uygun çözümler x_1x_2 düzleminin birinci bölgesinde bulunacaktır. Kısıtlayıcı fonksiyonların oluşturduğu sınır, bu bölgeyi ($x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$) iki kısma ayırr. Bölgelerden biri negatif olmama koşulu dahil tüm kısıtlayıcıları sağlarken, diğerinin yalnızca negatif olmama koşulunu sağlayan noktalardan oluşur.

Çözüm bölgesini belirlemek için kısıtlayıcı fonksiyonları sırasıyla ele alalım ve kendilerine karşılık gelen doğruların x ve y eksenlerini kestikleri noktaların koordinatlarını belirleyelim.

Koordinat belirleme ilgili tüm işlemler aşağıda verilmiştir.

$$(1) 7x_1 + 3x_2 = 21 \text{ eşitliğinde,}$$

$$x_1 = 0 \text{ için } x_2 = 7, x_2 = 0 \text{ için } x_1 = 3$$

olar.

$$(2) 6x_1 + 7x_2 = 42 \text{ eşitliğinde,}$$

$$x_1 = 0 \text{ için } x_2 = 6, x_2 = 0 \text{ için } x_1 = 8$$

olar.

(3) $x_1 = 3$ eşitliği, yatay ekseni (3, 0) noktasında kesen ve dikey eksene paralel olan bir doğru tanımır.

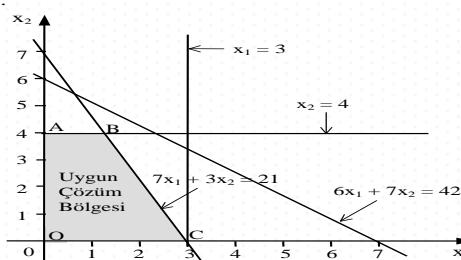
(4) $x_2 = 4$ eşitliği, dikey ekseni (0, 4) noktasında kesen ve yatay eksene paralel doğru denklemidir.

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

Örnek 1-devam

Bu belirlemelerden sonra kısıtlayıcı fonksiyonlarla ilgili doğruları çizebiliriz.

Sayıları dört olan kısıtlayıcı fonksiyonların her biri için bir doğru çizilmesi ve eşitsizliklerin yönlerinin dikkate alınmasıyla uygun çözüm bölgesi Şekil 3.5'deki taralı alan olarak belirir.



**Şekil 3.5
Örnek 3.5'in Gösterimi**

Şekil 3.5'deki taralı alanın içindeki (koyu renk çizilmiş sınırları dahil) tüm noktalar kısıtlayıcıları aynı anda sağladıklarından, OABC dörtgeni uygun çözüm bölgesidir. Bu alan içindeki sınırsız sayıdaki noktaların her biri uygun çözüm olarak nitelendirilir.

Şekilden görüldüğü gibi $6x_1 + 7x_2 \leq 42$ kısıtı olsa da olmasa da uygun çözüm bölgesi OABC alanı olacaktır. Çözüm bölgesini etkilememeksin modelden çıkartılabilen bu tür kısıtlayıcılara *gereksiz (szalalık) kısıtlayıcılar* denir. $x_1 \leq 3$ kısıtının da gereksiz olduğu görülebilir.

Taralı alanın içinde ve sınırları üzerindeki tüm noktalar bütün kısıtlayıcı fonksiyonları (negatif olmama koşulu dahil) sağladığından uygun çözüm bölgesi bir konveks (dişbükey) alan olarak ortaya çıkar. Geometrik olarak *konveks alan* kenarlarında çukurlasmalar olmayan ve içinde delikler bulunmayan bir alandır. Bu alanın A, B gibi herhangi iki noktası göz önüne alındığında AB doğru parçasının tamamı alan içinde kalır.

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

Örnek 3

Aşağıdaki doğrusal programlama problemini grafik yöntemiyle çözünüz.

$$Z_{\text{enb}} = x_1 + 3x_2$$

$$x_1 + x_2 \leq 8$$

$$x_1 + 2x_2 \geq 8$$

$$x_2 \geq 3$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

Örnek 3-devam

Doğruların çizilmesiyle ilgili aritmetik işlemler aşağıda topluca gösterilmiştir.

$x_1 + x_2 = 8$ eşitliğinde $x_1 = 0$ için $x_2 = 8$, $x_2 = 0$ için $x_1 = 8$ bulunur.

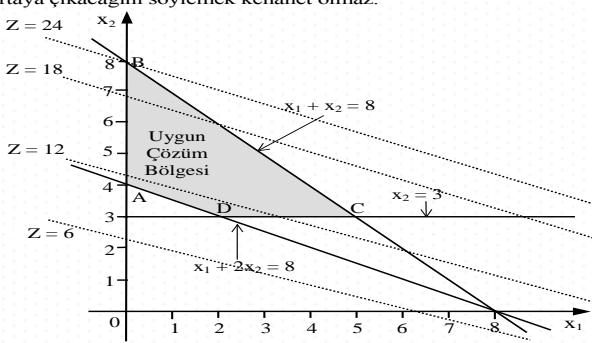
$x_1 + 2x_2 = 8$ eşitliğinde $x_1 = 0$ için $x_2 = 4$, $x_2 = 0$ için $x_1 = 8$ bulunur.

Şekilden görüldüğü gibi, uygun çözüm bölgesi ABCD konveks kümelerdir.

Bu bölgenin üç noktalarından en az bir tanesi amaç fonksiyonu değerini en büyükleyecektir.

$Z = 6$, $Z = 12$ ve $Z = 18$ eş kâr doğruları Şekil 3.9'da kesikli çizgi ile gösterilmiştir.

$Z = 18$ için çizilen eş kâr doğrusu incelendiğinde, bu doğrunun yukarısında tek bir üç noktanın (B) bulunduğu görülebilir. Bu durumda problemin en iyi çözümünün bu noktada ortaya çıkacağını söylemek kehanet olmaz.



Şekil 3.9

Örnek 3.8'in Uygun Çözüm Bölgesi ve Eş Kâr Doğruları

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

Örnek 3-devam

Gördüğü gibi, B amaç fonksiyonuna en büyük değeri sağlamaktadır. B'nin koordinatlarının $x_1 = 0$, $x_2 = 8$ olduğu göz önünde bulundurulduğunda $Z_B(Z_{\text{enb}})$ aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$Z_B = Z_{\text{enb}} = 0 + 3(8) = 24$$

Özetle, karar değişkenlerinin en iyi değerleri $x_1 = 0$, $x_2 = 8$ ve amaç fonksiyonunun en büyük değeri 24 olarak belirlenmiştir.

Uç noktaların koordinatlarının ayrı ayrı hesaplanıp amaç fonksiyonuna yerleştirilmesiyle hesaplanan Z değerleri aşağıda verilmiştir.

Bu hesaplama da amaç fonksiyonunun en büyük değerine B(0, 8) noktasında ulaştığını göstermektedir.

$$Z_A = Z_{(0, 4)} = 1(0) + 3(4) = 12$$

$$Z_B = Z_{(0, 8)} = 1(0) + 3(8) = 24$$

$$Z_C = Z_{(5, 3)} = 1(5) + 3(3) = 14$$

$$Z_D = Z_{(2, 3)} = 1(2) + 3(3) = 11$$

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

Örnek 4

Aşağıdaki doğrusal programlama problemini grafik yöntemiyle çözünüz

$$Z_{\text{enk}} = 3x_1 + 5x_2$$

$$3x_1 + x_2 \geq 9$$

$$x_1 + 2x_2 \geq 8$$

$$x_1 + 5x_2 \geq 10$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

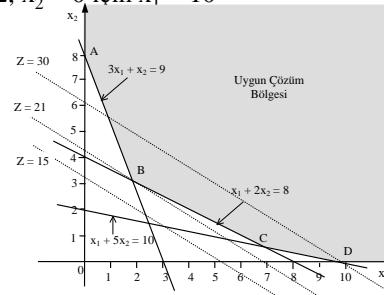
YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

Örnek 4-devam

Doğruların çizilmesiyle ilgili aritmetik işlemler aşağıda topluca gösterilmiştir.

- $3x_1 + x_2 = 9$ eşitliğinde $x_1 = 0$ için $x_2 = 9$, $x_2 = 0$ için $x_1 = 3$,
- $x_1 + 2x_2 = 8$ eşitliğinde $x_1 = 0$ için $x_2 = 4$, $x_2 = 0$ için $x_1 = 8$,
- $x_1 + 5x_2 = 10$ eşitliğinde $x_1 = 0$ için $x_2 = 2$, $x_2 = 0$ için $x_1 = 10$

- $Z_A = Z_{(0, 9)} = 3(0) + 5(9) = 45$
- $Z_{\text{enk}} = Z_B = Z_{(2, 3)} = 3(2) + 5(3) = 21^*$
- $Z_C = Z_{(20/3, 2/3)} = 3(20/3) + 5(2/3) = 23.3$
- $Z_D = Z_{(10, 0)} = 3(10) + 5(0) = 30$



YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

Örnek 5

- Aşağıdaki doğrusal programlama problemini grafik yöntemiyle çözünüz.

$$Z_{\text{enk}} = 2x_1 + 3x_2$$

$$3x_1 + 2x_2 \geq 6$$

$$x_1 - 2x_2 \leq 4$$

$$x_1 \leq 5$$

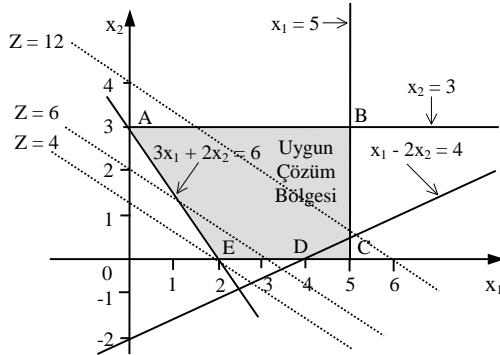
$$x_2 \leq 3$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

Örnek 5-devam

- Uç noktaların koordinatlarının ayrı ayrı hesaplanıp amaç fonksiyonunda yerine konulmasıyla ulaşılan değerler de (aşağıda topluca verilmiştir) E noktasının en iyi çözümü sağlayan nokta olduğunu göstermektedir.
- $Z_A = Z_{(0, 3)} = 2(0) + 3(3) = 9$
- $Z_B = Z_{(5, 3)} = 2(5) + 3(3) = 19$
- $Z_C = Z_{(5, 0, 5)} = 2(5) + 3(0.5) = 11.5$
- $Z_D = Z_{(4, 0)} = 2(4) + 3(0) = 8$
- $Z_E = Z_{(2, 0)} = 2(2) + 3(0) = 4$



Prof.Dr. Ünal H. ÖZDEN

77

©12 Ekim 2015 Pazartesi

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

Grafik Çözümde Karşılaşılan Özel Durumlar

- Eşitsizliklerin Tutarsız Olması
- Sınırsız Çözüm
- Uygun Çözüm Bölgesinin Bir nokta Olması
- Alternatif Eniyi Çözümün Bulunması

Prof.Dr. Ünal H. ÖZDEN

78

©12 Ekim 2015 Pazartesi

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

1. Eşitsizliklerin Tutarsız Olması

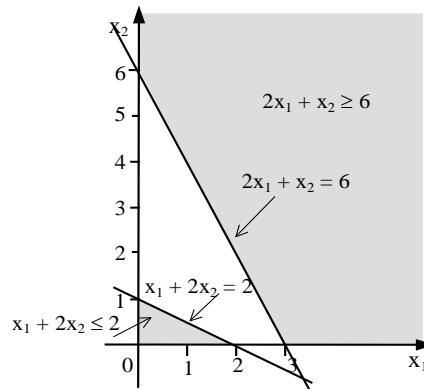
- Aşağıdaki doğrusal programlama problemini grafik yöntemiyle çözünüz.

$$Z_{\text{enb}} = 6x_1 + 3x_2$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 2$$

$$2x_1 + x_2 \geq 6$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$



Prof.Dr. Ünal H. ÖZDEN

79

©12 Ekim 2015 Pazartesi

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

1. Eşitsizliklerin Tutarsız Olması-devam

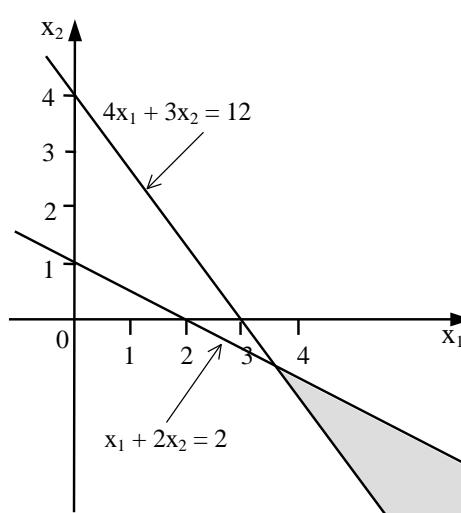
- Aşağıdaki doğrusal programlama problemini grafik yöntemiyle çözünüz.

$$Z_{\text{enb}} = 6x_1 + 3x_2$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 2$$

$$4x_1 + 3x_2 \geq 12$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$



Prof.Dr. Ünal H. ÖZDEN

80

©12 Ekim 2015 Pazartesi

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

2. Sınırsız Çözüm

- Aşağıdaki doğrusal programlama problemini grafik yöntemiyle çözünüz.

$$Z_{\text{enb}} = 2x_1 + x_2$$

$$-2x_1 + x_2 \leq 4$$

$$x_1 - x_2 \leq 1$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Prof.Dr. Ünal H. ÖZDEN

81

©12 Ekim 2015 Pazartesi

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

3. Uygun Çözüm Bölgesinin Bir Nokta Olması

Aşağıdaki doğrusal programlama problemini grafik yöntemiyle çözünüz.

$$Z_{\text{enb}} = 6x_1 + 3x_2$$

$$x_1 + x_2 \leq 6$$

$$3x_1 + 5x_2 \geq 24$$

$$x_2 = 3$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Üç doğrunun kesiştiği noktanın koordinatlarının belirlenmesi amacıyla bunlardan rasgele seçilen ikisi, $3x_1 + 5x_2 = 24$ ve $x_2 = 3$ olsun.

Bu iki denklemin çözümünden $x_1 = 3$, $x_2 = 3$ elde edilir. Buradan amaç fonksiyonunun en büyük değeri, Z 'de $x_1 = 3$, $x_2 = 3$ yerleştirilmesiyle, $Z_{\text{enb}} = 6(3) + 3(3) = 27$ olarak hesaplanır.

Prof.Dr. Ünal H. ÖZDEN

82

©12 Ekim 2015 Pazartesi

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

4. Alternatif Eniyi Çözümün Bulunması

Aşağıdaki doğrusal programlama problemini grafik yöntemiyle çözünüz.

$$Z_{\text{enb}} = 8x_1 + 8x_2$$

$$2x_1 + 3x_2 \geq 12$$

$$3x_1 + 2x_2 \geq 12$$

$$x_1 + x_2 \leq 6$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Problemin uygun çözüm bölgesi

ABC üçgen alamıdır.

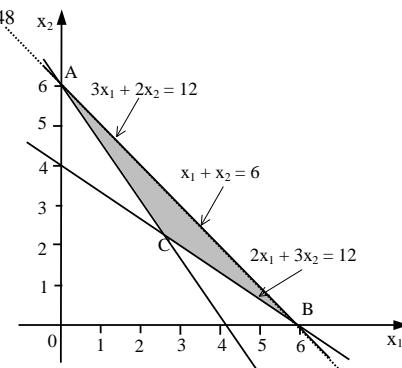
Amaç fonksiyonunun ABC üçgeninin
uç noktalarındaki değerleri aşağıda verilmiştir.

$$Z_A = Z_{(0, 6)} = 8(0) + 8(6) = 48$$

$$Z_B = Z_{(6, 0)} = 8(6) + 8(0) = 48$$

$$Z_C = Z_{(12/5, 12/5)} = 8(12/5) + 8(12/5) = 192/5$$

Amaç fonksiyonu en büyük değerine A(0, 6) ve B(6, 0) noktalarında ulaşmıştır. Dolayısıyla
A ve B noktalarındaki çözümler birbirlerine alternatif olan en iyi çözümlerdir.



YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

Ödev

Aşağıdaki DP problemini grafik çözüm yöntemi ile
çözünüz.

$$Z_{\text{enb}} = 3x_1 + 6x_2$$

$$x_1 + x_2 \leq 4$$

$$x_1 + x_2 \leq 1$$

$$x_1 - x_2 \leq -1$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

DOĞRUSAL PROGRAMLAMA SIMPLEKS ÇÖZÜM YÖNTEMİ

Prof.Dr. Ünal H. ÖZDEN

Prof.Dr. Ünal H. ÖZDEN

85

©12 Ekim 2015 Pazartesi

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

DP Simpleks Çözüm Yöntemi

- Grafikle çözümün uygulanamadığı çok değişkenli doğrusal programlama problemlerinin çözümünde yaygın biçimde kullanılan yöntem *simpleks yöntemidir*.
- George B. Dantzig tarafından geliştirilen bu yöntem tekrarlı bir yöntem olduğundan *simpleks algoritma* olarak da adlandırılmaktadır.

Prof.Dr. Ünal H. ÖZDEN

86

©12 Ekim 2015 Pazartesi

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

Kanonik Ve Standart Biçimler

1. Kanonik Bicim

$$Z_{\text{enb}} = C_1x_1 + C_2x_2 + \dots + C_nx_n$$

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \leq b_2$$

$$\dots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \leq b_m$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0$$

olarak formüle edilen doğrusal programlama aşağıdaki özelliklere sahipse, *kanonik* biçimde olduğu söylenir.

1. Tüm karar değişkenleri negatif değildir.
2. Amaç fonksiyonu en büyikleme tipindedir.
3. Tüm kısıtlayıcı fonksiyonlar (\leq) işaretlidir.

2. Standart Bicim

$$Z_{\text{enk/entb}} = C_1x_1 + C_2x_2 + \dots + C_nx_n$$

- $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$

$$\dots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0$$

olarak formüle edilen doğrusal programlama modeli aşağıdaki özelliklere sahipse, *standart* biçimde olduğu söylenir.

1. Tüm karar değişkenleri negatif değildir.
2. Amaç fonksiyonu en büyikleme veya en küçükleme tipindedir.
3. Tüm kısıtlayıcı fonksiyonlar (negatif olmama koşulu dışında) = işaretlidir.
4. Kısıtlayıcı fonksiyonların sağ tarafı sabitleri negatif değildir.

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

Standart ve Kanonik Biçim Dönüşümü İşlemleri

1. En iyilemenin anlamını değiştirme

• $Z_{\text{enb}} = C_1x_1 + C_2x_2 + \dots + C_nx_n$ olarak tanımlanmışken,

$$= (-Z_{\text{enb}}) = -C_1x_1 - C_2x_2 - \dots - C_nx_n$$

• veya

• $Z_{\text{enk}} = C_1x_1 + C_2x_2 + \dots + C_nx_n$ olarak verilmişken,

$$= (-Z_{\text{enk}}) = -C_1x_1 - C_2x_2 - \dots - C_nx_n$$

• yazılabilir.

• Örnek olması bakımından amaç fonksiyonunun aşağıdaki gibi formüle edildiğini düşünelim.

$$Z_{\text{enk}} = 3x_1 - 4x_2 + 2x_3 - 5x_4$$

• Amaç fonksiyonundaki tüm terimlerin işaretlerinin değiştirilmesiyle amaç fonksi- yonu aşağıdaki gibi yazılabılır.

$$= (-Z_{\text{enk}}) = -3x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 5x_4$$

• Dönüşümme işlemi, karar değişkenlerinin en iyi değerlerini değiştirmez.

Problemi çözüdükten sonra amaç fonksiyonunun en iyi değeri (-1) ile çarpılırsa orijinal problemin Zenk (Zenb) değeri bulunur.

Dönüştürme İşlemleri-devam

•2.Eşitsizliklerin yönünü değiştirme: Herhangi bir eşitsizliğin her iki tarafı (-1) ile çarpıldığında eşitsizlik yön değiştirir. Sözgelimi, $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \geq b_1$ ile her iki tarafının (-1) ile çarpılmasıyla elde edilen $-a_{11}x_1 - a_{12}x_2 \leq -b_1$ birbirlerine eşittir. Benzer biçimde, $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leq b_1$ yerine $-a_{11}x_1 - a_{12}x_2 \geq -b_1$ yazılabilir.

•3.Eşitliği eşitsizliğe dönüştürme: Eşitlik biçimindeki bir kısıtlayıcı fonksiyon iki eşitsizlikle açıklanabilir. Örneğin, $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1$ biçimindeki bir fonksiyon yerine, $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \geq b_1$ ve $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leq b_1$ veya $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leq b$ ve $-a_{11}x_1 - a_{12}x_2 \leq -b_1$ yazılabilir.

•4.İşareti sınırlandırılmamış değişkenler: İşareti sınırlandırılmamış bir değişken (pozitif, negatif veya sıfır) negatif olmayan iki değişken arasındaki fark olarak açıklanabilir. Sözgelimi, x işaretini sınırlandırılmamış bir değişken ise, x yerine ($x^+ - x^-$) kullanılabilir. Burada, $x^+ \geq 0$ ve $x^- \geq 0$ 'dır. Negatif olmayan x^+ ve x^- değişkenlerinden en fazla biri en iyi çözümde pozitif değerli olur.

Dönüştürme İşlemleri-devam

•5.Eşitsizlik biçimindeki kısıtlayıcı fonksiyonların eşitlik biçimine dönüştürülmesi: Simpleks yöntem bir eşitlikler sistemine, standart işlemlerin tekrar tekrar uygulanmasıyla çözüm arayan bir süreçtir. Bu nedenle yöntemin en önemli adımı kısıtlayıcı fonksiyonların eşitlik biçiminde yazılmasıdır. Eşitsizlik biçimindeki bir kısıtlayıcının eşitsizliğin yönü bakımından iki türlü olduğu bilinmektedir. Eşitsizlikler

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_{ij} \leq b_i \text{ veya } \sum_{j=1}^n a_{ij}x_{ij} \geq b_i \text{ biçimindedir.}$$

(≤) işaretli eşitsizlikleri eşitlik biçimine dönüştürmek için bunların sol taraflarına negatif olmayan birer değişken eklenir. *Aylak değişken* adı verilen bu değişkenler x_{n+1} , x_{n+2} , ..., x_{n+m} ile gösterilir. (≥) işaretli eşitsizlikler ise, sol taraflarından negatif olmayan birer değişken çıkartılmasıyla eşitlik biçimine dönüştürülür. Eşitsizliğin iki tarafı arasındaki farkı gösteren bu değişkene *artık değişken* denir. Bu değişkenler de aylak değişkenler gibi x_{n+1} , x_{n+2} , ..., x_{n+m} sembolleriley gösterilirler. Yukarıda açıklandığı gibi, negatif olmama koşulu karar değişkenlerinin yanı sıra aylak ve artık değişkenlere de uygulanmaktadır. Bunun nedeni, kısıtlayıcı fonksiyonlardaki (≥) ve (≤) şartlarının gerçekleşmesini sağlamaktr.

Dönüştürme İşlemleri-devam

- 6. Mutlak değerli kısıtlayıcı fonksiyonların eşitsizlik biçiminde yazılması:** Çok sık olmasa da mutlak değer içeren kısıtlayıcı fonksiyonlara rastlanabilir. Hangi yöntem uygulanırsa uygulansın bu tür kısıtlayıcılarla çözüme ulaşlamaz. Bu yüzden mutlak değerden kurtulmak gereklidir. Örnek olması bakımından, kısıtlayıcı fonksiyonun $|a_1x_1 + a_2x_2| \leq b$ şeklinde formüllendiğini düşünelim. Bu durumda yapılması gereken $|a_1x_1 + a_2x_2| \leq b$ yerine $a_1x_1 + a_2x_2 \geq -b$ ve $a_1x_1 + a_2x_2 \leq b$ ikilisini yerleştirmektir. Kısıtlayıcı $|a_1x_1 + a_2x_2| \geq b$ ise $|a_1x_1 + a_2x_2| \geq b$ yerine geçecek eşitsizlikler $a_1x_1 + a_2x_2 \geq b$ ve $a_1x_1 + a_2x_2 \leq -b$ biçimindedir.
- Herhangi bir doğrusal programlama modelinin standart veya kanonik biçimde yazılımasını bir örnek üzerinde açıklayalım.

Örnek 4.1

- Örnek 4.1:** Aşağıdaki gibi verilmiş olan doğrusal programlama problemini, **a.** Kanonik biçimde, **b.** Standart biçimde yazınız.

$$Z_{\text{enk}} = -6x_1 + 7x_2 + 7x_3 - x_4$$

$$x_1 + 2x_2 - 4x_3 \geq 30$$

$$2x_1 + 9x_2 + 6x_3 + x_4 \leq 60$$

$$6x_1 + x_3 + x_4 = 15$$

$$|3x_1 + 4x_2| \leq 80$$

$x_1, x_2, x_4 \geq 0, x_3$ sınırlanmadırılmış

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

Çözüm 4.1. a-

-

$$\begin{aligned}
 Z'_{\text{enb}} &= 6x_1 - 7x_2 - 7(x_3^+ - x_3^-) + x_4 \\
 -x_1 - 2x_2 + 4(x_3^+ - x_3^-) &\leq -30 \\
 2x_1 + 9x_2 + 6(x_3^+ - x_3^-) + x_4 &\leq 60 \\
 6x_1 + (x_3^+ - x_3^-) + x_4 &\leq 15 \\
 -6x_1 - (x_3^+ - x_3^-) - x_4 &\leq -15 \\
 3x_1 + 4x_2 &\leq 80 \\
 -3x_1 - 4x_2 &\leq 80 \\
 x_1, x_2, x_3^+, x_3^-, x_4 &\geq 0
 \end{aligned}$$

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

Çözüm 4.1. b-

-

$$\begin{aligned}
 Z_{\text{enk}} &= -6x_1 + 7x_2 + 7(x_3^+ - x_3^-) - x_4 \\
 x_1 + 2x_2 - 4(x_3^+ - x_3^-) - x_5 &= 30 \\
 2x_1 + 9x_2 + 6(x_3^+ - x_3^-) + x_4 + x_6 &= 60 \\
 6x_1 + (x_3^+ - x_3^-) + x_4 &= 15 \\
 -3x_1 - 4x_2 + x_7 &= 80 \\
 3x_1 + 4x_2 + x_8 &= 80 \\
 x_1, x_2, x_4, x_3^+, x_3^-, x_5, x_6, x_7, x_8 &\geq 0
 \end{aligned}$$

Simpleks Çözüm Yönteminin Açıklanması

- Aşağıdaki gibi bir modelin olduğunu varsayalım.

$$Z_{\text{enb}} = C_1x_1 + C_2x_2 + \dots + C_nx_n$$

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \leq b_2$$

...

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \leq b_m$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0$$

Simpleks Çözüm Yönteminin Açıklanması-devam

- Simpleks yöntemin ilk adımı tüm eşitsizliklerin (negatif olmama koşulu hariç) eşitlik biçimine dönüştürülmesidir. Kesim 4.2'de açıkladığı gibi (\leq) işaretli bir eşitsizliği eşitliğe dönüştürmek için eşitsizliğin sol tarafına negatif olmayan bir aylak değişken eklenir. Her bir eşitsizlik için bir aylak değişken kullanılmasıyla yukarıdaki kısıtlayıcı fonksiyonlar aşağıdaki gibi olur.

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + 1x_{n+1} + 0x_{n+2} + \dots + 0x_{n+m} = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n + 0x_{n+1} + 1x_{n+2} + \dots + 0x_{n+m} = b_2$$

...

...

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n + 0x_{n+1} + 0x_{n+2} + \dots + 1x_{n+m} = b_m$$

Aylak değişkenlerin eklendikleri kısıtlayıcı fonksiyonlardaki katsayılarının +1, diğerlerinde sıfır olduğı görülebilir.

Karar değişkenleri ile aylak değişkenler negatif olmadığından, standart biçimde negatif olmama koşulu aşağıdaki gibi olur.

$$x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{n+m} \geq 0$$

Aylak değişkenlerin amaç fonksiyonu katsayıları, bir başka deyişle bu değişkenlerin amaç fonksiyonuna birim katıları (birim kârları) sıfırdır

Bu durumda amaç fonksiyonu aşağıdaki gibi olur.

$$Z_{\text{enb}} = C_1x_1 + C_2x_2 + \dots + C_nx_n + 0x_{n+1} + 0x_{n+2} + \dots + 0x_{n+m}$$

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

Standart Biçimin Matris Gösterimi

- Standart biçimdeki doğrusal programlama modelinin kısıtlayıcı fonksiyonları matrislerle şöyle gösterilir.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{12} & \dots & a_{mn} & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \\ x_{n+1} \\ x_{n+2} \\ \vdots \\ x_{n+m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

Başlangıç Çözüm Tablosu

- Standart biçimin oluşturulmasından sonra en iyi çözümün araştırılması işlemine geçilebilir. Simpleks yöntemin ardışık tekrarları *başlangıç çözüm tablosu* adı verilen bir tablonun düzenlenmesinden sonra başlar. Başlangıç çözüm tablosu, aşağıdaki tablo esasına göre düzenlenir.
-

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI																																																		
•	<p style="text-align: center;">Tablo 4.1 Simpleks Başlangıç Çözüm Tablosu</p> <table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr> <th style="width: 10%;">1 →</th><th style="width: 10%;">TDV</th><th style="width: 10%;">x₁</th><th style="width: 10%;">x₂</th><th style="width: 10%;">...</th><th style="width: 10%;">x_n</th><th style="width: 10%;">x_{n+1}</th><th style="width: 10%;">x_{n+2}</th><th style="width: 10%;">...</th><th style="width: 10%;">x_{n+m}</th><th style="width: 10%;">ÇV</th></tr> </thead> <tbody> <tr> <td style="text-align: center;">2 ↓</td><td colspan="3" style="text-align: center; border-bottom: none;">3</td><td colspan="3" style="text-align: center; border-bottom: none;">4</td><td colspan="3" style="text-align: center; border-bottom: none;">5 ↓</td></tr> <tr> <td style="text-align: center;">6 →</td><td>Z_j</td><td>0</td><td>0</td><td>...</td><td>0</td><td>0</td><td>...</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr> <td style="text-align: center;">7 →</td><td>Z_j - C_j</td><td>-C₁</td><td>-C₂</td><td>...</td><td>-C_n</td><td>0</td><td>0</td><td>...</td><td>0</td></tr> </tbody> </table>									1 →	TDV	x ₁	x ₂	...	x _n	x _{n+1}	x _{n+2}	...	x _{n+m}	ÇV	2 ↓	3			4			5 ↓			6 →	Z _j	0	0	...	0	0	...	0	0	7 →	Z _j - C _j	-C ₁	-C ₂	...	-C _n	0	0	...	0
1 →	TDV	x ₁	x ₂	...	x _n	x _{n+1}	x _{n+2}	...	x _{n+m}	ÇV																																								
2 ↓	3			4			5 ↓																																											
6 →	Z _j	0	0	...	0	0	...	0	0																																									
7 →	Z _j - C _j	-C ₁	-C ₂	...	-C _n	0	0	...	0																																									

Tablo 4.1 kapsamındaki bölümler aşağıda açıklanmıştır.

1. Değişkenler satırı: Tablonun ilk satırıdır. Standart biçimin tüm değişkenleri önce karar değişkenleri, sonra diğer değişkenler olmak üzere bu satırda gösterilir.

2. Temel değişkenler sütunu: Tablonun ilk sütunudur. Tablodaki çözüme karşılık gelen temel çözümün değişkenleri ile bu değişkenlerin amaç fonksiyonu katsayılarını gösterir.

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI									
•	<p>3. Gövde: Problemin orijinal karar değişkenlerinin kısıtlayıcı fonksiyonlardaki katsayılarından (a_{ij}, $i = 1, 2, \dots, m$; $j = 1, 2, \dots, n$) oluşan $m \times n$ matristir.</p> <p>4. Birim matris: Aylak değişkenlerin kısıtlayıcı fonksiyon katsayılarının oluşturduğu $m \times m$ birim matristir.</p> <p>5. Çözüm vektörü: Temeldeki değişkenlerin çözüm değerlerini gösteren $m \times 1$ sütun vektördür. Başlangıçta, kısıtlayıcı fonksiyonların sağ taraf sabitlerinden oluşur.</p> <p>6. Z_j satırı: Yürütlükteki temelde bulunan değişkenlerin amaç fonksiyonu katsayıları ile x_j sütunundaki katsayıların karşılıklı çarpımlarının toplamından oluşur. Buna göre örneğin, $Z_1 = 0(a_{11}) + 0(a_{21}) + \dots + 0(a_{m1}) = 0$ olur.</p> <p>3. Gövde: Problemin orijinal karar değişkenlerinin kısıtlayıcı fonksiyonlardaki katsayılarından (a_{ij}, $i = 1, 2, \dots, m$; $j = 1, 2, \dots, n$) oluşan $m \times n$ matristir.</p> <p>4. Birim matris: Aylak değişkenlerin kısıtlayıcı fonksiyon katsayılarının oluşturduğu $m \times m$ birim matristir.</p> <p>5. Çözüm vektörü: Temeldeki değişkenlerin çözüm değerlerini gösteren $m \times 1$ sütun vektördür. Başlangıçta, kısıtlayıcı fonksiyonların sağ taraf sabitlerinden oluşur.</p> <p>6. Z_j satırı: Yürütlükteki temelde bulunan değişkenlerin amaç fonksiyonu katsayıları ile x_j sütunundaki katsayıların karşılıklı çarpımlarının toplamından oluşur. Buna göre örneğin, $Z_1 = 0(a_{11}) + 0(a_{21}) + \dots + 0(a_{m1}) = 0$ olur.</p> <p>7. Z_j - C_j satırı: Tablonun son satırıdır. Elemanları, Z_j ile o sütunla ilgili değişkenin amaç fonksiyonu katsayıları arasındaki farka eşittir. Z_j - C_j farkları x_j değişkeninin temele alınmasının amaç fonksiyonunda yol açacağı değişikliği ters işaretle gösterir.</p>								

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

- Anahtar Sütun: Simpleks yönteminde, temeli terkeden değişkenin bulunduğu satır *anahtar satır* denir.
- Anahtar satır: Simpleks yönteminde, temeli terkeden değişkenin bulunduğu satır *anahtar satır* denir.
- Anahtar Sayı: Anahtar sütun ile anahtar satırın kesiştiği gözdeki değere *anahtar sayı* denir.
- Temele girecek değişkenin yeni değerlerinin hesaplanması:
- (Anahtar Satır Değerleri/Anahtar Sayı)
- Diger Satır Değerlerinin Değerleri:

$$\begin{bmatrix} \text{Eski} \\ \text{Satır} \\ \text{Elemanları} \end{bmatrix} - \begin{pmatrix} \text{Eski Satırla} \\ \text{Anahtar Sütunun} \\ \text{Kesiştiği Gözdeki Sayı} \end{pmatrix} \times \begin{matrix} \text{Anahtar} \\ \text{Satırın Yeni} \\ \text{Elemanları} \end{matrix}$$

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

Örnek 4.2

•**Örnek 4.2:** Bir sanayii işletmesi bakır, alüminyum ve çinko metallerinin farklı alaşımlarını kullanarak A ve B gibi iki çeşit ürün üretmektedir. İşletmenin elinde 20 ton bakır, 30 ton alüminyum ve 40 ton çinko vardır. Bir birim A ve bir birim B'nin üretiminde kullanılan bakır, alüminyum ve çinko miktarları (ton) ile A ve B'nin bir biriminden elde edilen karlar (TL) aşağıdaki tabloda gösterilmiştir.

•Bu bilgileri ve tablodaki verileri kullanarak problemin doğrusal programlama modelini kurunuz ve işletmenin karını en büyütleyen üretim miktarlarını simpleks yöntemle bulunuz.

Ürün	Hammadde			Kâr
	Bakır	Alüminyum	Cinko	
A	6	3	1	2
B	4	1	1	3

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

Çözüm 4.2

Cözüm 4.2: Problemin doğrusal programlama modeli aşağıda gösterilmiştir.

$$Z_{\text{enb}} = 2x_1 + 3x_2$$

$$\begin{aligned} 6x_1 + 4x_2 &\leq 20 \quad (\text{Bakır kısıtı}) \\ 3x_1 + x_2 &\leq 30 \quad (\text{Alüminyum kısıtı}) \\ x_1 + x_2 &\leq 40 \quad (\text{Çinko kısıtı}) \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Standart Biçim

$$Z_{\text{enb}} = 2x_1 + 3x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5$$

$$\begin{aligned} 6x_1 + 4x_2 + x_3 + 0x_4 + 0x_5 &= 20 \\ 3x_1 + x_2 + 0x_3 + x_4 + 0x_5 &= 30 \\ x_1 + x_2 + 0x_3 + 0x_4 + x_5 &= 40 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 &\geq 0 \end{aligned}$$

Tablo 4.2

Simpleks Başlangıç Çözüm Tablosu

TDV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\bar{C}V$	Oran
0 x_3	6	4	1	0	0	20	20/4 → AS
0 x_4	3	1	0	1	0	30	30/1
0 x_5	1	1	0	0	1	40	40/1
Z_j	0	0	0	0	0	0	
$Z_j - C_i$	-2	-3	0	0	0	-	

AS

Z_j satır elemanları, bulundukları sütündeki katsayılarla temel değişkenlerin amaç fonksiyonu katsayılarının karşılıklı çarpımlarının toplamı olarak aşağıdaki gibi hesaplanmıştır.

$$\begin{aligned} Z_1 &= 0(6) + 0(3) + 0(1) = 0 \\ Z_2 &= 0(4) + 0(1) + 0(1) = 0 \\ Z_3 &= 0(1) + 0(0) + 0(0) = 0 \\ Z_4 &= 0(0) + 0(1) + 0(0) = 0 \\ Z_5 &= 0(0) + 0(0) + 0(1) = 0 \\ Z_6 &= 0(20) + 0(30) + 0(40) = 0 \end{aligned}$$

Yukarıdaki Z_j değerlerinin kullanılmasıyla $Z_j - C_i$ değerleri aşağıdaki gibi bulunur.

$$\begin{aligned} Z_1 - C_1 &= 0 - 2 = -2 \\ Z_2 - C_2 &= 0 - 3 = -3 \\ Z_3 - C_3 &= 0 - 0 = 0 \\ Z_4 - C_4 &= 0 - 0 = 0 \\ Z_5 - C_5 &= 0 - 0 = 0 \end{aligned}$$

Prof.Dr. Ünal H. ÖZDEN

103

©12 Ekim 2015 Pazartesi

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

Çözüm 4.2

Anahtar satırın yeni elemanları,

$$[6/4 \quad 4/4 \quad 1/4 \quad 0/4 \quad 0/4 \quad 20/4]$$

veya gerekli aritmetik işlemlerin yapılmasıyla aşağıdaki gibi olur.

$$[3/2 \quad 1 \quad 1/4 \quad 0 \quad 0 \quad 5]$$

Bu değerlerin yeni çözüm tablosuna yerleştirilmesinden sonra tablonun diğer elemanları hesaplanabilir.

x_4 değişken satırından başlayarak diğer satır elemanlarını hesaplayalım. x_4 değişken satırının eski elemanları aşağı gösterildiği gibidir.

$$[3 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 30]$$

Bu satırda anahtar sütunun kesiştiği yerdeki sayı 1 ve anahtar satırın yeni elemanları,

$$[3/2 \quad 1 \quad 1/4 \quad 0 \quad 0 \quad 5]$$

olduğuuna göre, x_4 değişken satırının yeni elemanları,

$$\begin{aligned} [3 &\quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 30] \\ (-1)[3/2 &\quad 1 \quad 1/4 \quad 0 \quad 0 \quad 5] \\ [3/2 &\quad 0 \quad -1/4 \quad 1 \quad 0 \quad 25] \end{aligned}$$

olarak hesaplanır.

Aynı yaklaşımla x_3 değişken satırının yeni elemanlarının,

$$\begin{aligned} [1 &\quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 40] \\ (-1)[3/2 &\quad 1 \quad 1/4 \quad 0 \quad 0 \quad 5] \\ [-1/2 &\quad 0 \quad -1/4 \quad 0 \quad 1 \quad 35] \end{aligned}$$

Bu durumda $Z = 15$, amaç fonksiyonu için bulunabilecek en büyük değerdir. Bu çözümde $x_1 = 0$, $x_2 = 5$, $x_3 = 0$, $x_4 = 25$, $x_5 = 35$ 'dir. Bu durumda, işletme B'den 5 birim üretirken A'dan hiç üretmeyecek, böylece en yüksek karı 15 TL olacaktır.

Aylak değişkenlerin en iyi çözümdeki değerleri $x_3 = 0$, $x_4 = 25$, $x_5 = 35$ 'dir.

Tablo 4.3

Simpleks Birinci (En İyi) Çözüm Tablosu

TDV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\bar{C}V$
3 x_2	3/2	1	1/4	0	0	5
0 x_4	3/2	0	-1/4	1	0	25
0 x_5	-1/2	0	-1/4	0	1	35
Z_j	9/2	3	3/4	0	0	15
$Z_j - C_i$	5/2	0	3/4	0	0	-

Prof.Dr. Ünal H. ÖZDEN

104

©12 Ekim 2015 Pazartesi

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

Örnek 4.3

Örnek 4.3: Aşağıdaki doğrusal programlama problemini simpleks yöntemle çözünüz.

$$Z_{\text{enb}} = 10x_1 + 22x_2 + 18x_3$$

$$x_1 + 4x_2 + 3x_3 \leq 24$$

$$2x_1 + 2x_2 + 4x_3 \leq 46$$

$$3x_1 + 5x_2 + 6x_3 \leq 60$$

$$4x_1 + 8x_2 + 3x_3 \leq 120$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Prof.Dr. Ünal H. ÖZDEN

105

©12 Ekim 2015 Pazartesi

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

Çözüm 4.3

•**Çözüm 4.3:** Problemin standart biçimde aşağıda gösterilmiştir.

$$Z_{\text{enb}} = 10x_1 + 22x_2 + 18x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 + 0x_7$$

$$x_1 + 4x_2 + 3x_3 + x_4 + 0x_5 + 0x_6 + 0x_7 = 24$$

$$2x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 0x_4 + x_5 + 0x_6 + 0x_7 = 46$$

$$3x_1 + 5x_2 + 6x_3 + 0x_4 + 0x_5 + x_6 + 0x_7 = 60$$

$$4x_1 + 8x_2 + 3x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 + x_7 = 120$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geq 0$$

Problemin simpleks başlangıç çözüm tablosu şöyledir.

Tablo 4.4

Simpleks Başlangıç Çözüm Tablosu

TDV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	ÇV
0 x_4	1	4	3	1	0	0	0	24
0 x_5	2	2	4	0	1	0	0	46
0 x_6	3	5	6	0	0	1	0	60
0 x_7	4	8	3	0	0	0	1	120
Z_j	0	0	0	0	0	0	0	0
$Z_j - C_j$	-10	-22	-18	0	0	0	0	-

AS

$$\begin{aligned} & \text{Oran} \\ & 24/4 = 6 \rightarrow \text{AS} \\ & 46/2 = 23 \\ & 60/5 = 12 \\ & 120/8 = 15 \end{aligned}$$

Prof.Dr. Ünal H. ÖZDEN

106

©12 Ekim 2015 Pazartesi

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

Çözüm 4.3

- Anahtar satırın yeni değerleri:

$$[1 \quad 4 \quad 3 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 24]$$

olduğuna göre, anahtar satırın yeni elemanları,

$$[1/4 \quad 4/4 \quad 3/4 \quad 1/4 \quad 0/4 \quad 0/4 \quad 0/4 \quad 24/4]$$

veya gerekli aritmetik işlemlerin yapılmasıyla aşağıdaki gibi bulunur.

$$[1/4 \quad 1 \quad 3/4 \quad 1/4 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 6]$$

Bu değerlerin yeni çözüm tablosuna yerleştirilmesinden sonra bu tablonun diğer elemanları hesaplanabilir.

x_5 değişken satırından başlayarak diğer satır elemanlarını hesaplayalım. Söz konusu değerler aşağıdaki gibi bulunur.

x_5 değişken satırının yeni elemanlarının hesaplanması:

$$[2 \quad 2 \quad 4 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 46]$$

$$(2)[1/4 \quad 1 \quad 3/4 \quad 1/4 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 6]$$

$$\underline{[3/2 \quad 0 \quad 5/2 \quad -1/2 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 34]}$$

x_6 değişken satırının yeni elemanlarının hesaplanması:

$$[3 \quad 5 \quad 6 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 60]$$

$$(-5)[1/4 \quad 1 \quad 3/4 \quad 1/4 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 6]$$

$$\underline{[7/4 \quad 0 \quad 9/4 \quad -5/4 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 30]}$$

x_7 değişken satırının yeni elemanlarının hesaplanması:

$$[4 \quad 8 \quad 3 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 120]$$

$$(-8)[1/4 \quad 1 \quad 3/4 \quad 1/4 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 6]$$

$$\underline{[2 \quad 0 \quad -3 \quad -2 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 72]}$$

Prof.Dr. Ünal H. ÖZDEN

107

©12 Ekim 2015 Pazartesi

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

Çözüm 4.3

- Tablo 4.5
Simpleks Birinci Çözüm Tablosu*

TDV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	ÇV
22 x_2	1/4	1	3/4	1/4	0	0	0	6
0 x_5	3/2	0	5/2	-1/2	1	0	0	34
0 x_6	7/4	0	9/4	-5/4	0	1	0	30
0 x_7	2	0	-3	-2	0	0	1	72
Z_j	11/2	22	33/2	11/2	0	0	0	132
$Z_j - C_j$	-9/2	0	-3/2	11/2	0	0	0	-

Oran
 $6/(1/4) = 24.00$
 $34/(3/2) = 22.33$
 $30/(7/4) = 17.11 \rightarrow$

-

*Tablo 4.6
Simpleks İkinci (En iyi) Çözüm Tablosu*

TDV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	ÇV
22 x_2	0	1	3/7	3/7	0	-1/7	0	12/7
0 x_5	0	0	4/7	4/7	1	-6/7	0	58/7
10 x_1	1	0	9/7	-5/7	0	4/7	0	120/7
0 x_7	0	0	-39/7	-4/7	0	-8/7	1	264/7
Z_j	10	22	156/7	16/7	0	18/7	0	1464/7
$Z_j - C_j$	0	0	30/7	16/7	0	18/7	0	-

Prof.Dr. Ünal H. ÖZDEN

108

©12 Ekim 2015 Pazartesi

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

Örnek 4.4

Örnek 4.4: Aşağıdaki doğrusal programlama problemini simpleks yöntemle çözünüz.

$$Z_{\text{enb}} = -2x_1 - 3x_2 - x_3$$

$$x_1 + 4x_2 + 2x_3 \geq 8$$

$$3x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 6$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Çözüm 4.4: Simpleks yönteme göre çözüm yapabilmek için önce eşitsizlikleri eşitlik biçiminde yazalım. Her bir kısıtlayıcı fonksiyona birer yapay değişken eklenir, aynı kısıtlayıcılarından birer artıktır. Değişken eklenmesi sonucunda örnek problemin modeli simpleks yöntem için uygun biçimde dönüştürülmüş olur.

$$Z_{\text{enb}} = -2x_1 - 3x_2 - x_3 + 0x_4 + 0x_5 - MA_1 - MA_2$$

$$x_1 + 4x_2 + 2x_3 - x_4 + A_1 = 8$$

$$3x_1 + 2x_2 + x_3 - x_5 + A_2 = 6$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, A_1, A_2 \geq 0$$

Standart biçimdeki bilgilerin kullanılarak oluşturulan tablo aşağıda gösterilmiştir.

Tablo 4.7

Simpleks Başlangıç Çözüm Tablosu

TDV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	A_1	A_2	ÇV	Oran
-M A_1	1	4	2	-1	0	1	0	8	8/4 = 2 → AS
-M A_2	3	2	1	0	-1	0	1	6	6/2 = 3
Z_j	-4M	-6M	-3M	M	M	M	M	-14M	
$Z_j - C_j$	-4M+2	-6M+3	-3M+1	M	M	0	0	-	

AS

$$Z_1 = (-M)(1) + (-M)(3) = -4M$$

$$Z_2 = (-M)(4) + (-M)(2) = -6M$$

$$Z_3 = (-M)(2) + (-M)(1) = -3M$$

$$Z_4 = (-M)(-1) + (-M)(0) = M$$

$$Z_5 = (-M)(0) + (-M)(-1) = M$$

$$Z_6 = (-M)(1) + (-M)(0) = -M$$

$$Z_7 = (-M)(0) + (-M)(1) = -M$$

$$Z_8 = (-M)(8) + (-M)(6) = -14M$$

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

Çözüm 4.4

• Tablo 4.8
Simpleks Birinci Çözüm Tablosu

TDV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	A_1	A_2	ÇV	
-3 x_2	1/4	1	1/2	-1/4	0	1/4	0	2	
-M A_2	5/2	0	0	1/2	-1	-1/2	1	2	→
Z_j	$\frac{-3-10M}{4}$	-3	-3/2	$\frac{3-2M}{4}$	M	$\frac{-3+2M}{4}$	-M	-2M-6	
$Z_j - C_j$	$\frac{5-10M}{4}$	0	-1/2	$\frac{3-2M}{4}$	M	$\frac{-3+6M}{4}$	0	-	

Tablo 4.9
Simpleks İkinci Çözüm Tablosu

TDV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	A_1	A_2	ÇV	
-3 x_2	0	1	1/2	-3/10	1/10	3/10	-1/10	9/5	→
-2 x_1	1	0	0	1/5	-2/5	-1/5	2/5	4/5	
Z_j	-2	-3	-3/2	1/2	1/2	-1/2	-1/2	-7	
$Z_j - C_j$	0	0	-1/2	1/2	1/2	$\frac{2M-1}{2}$	$\frac{2M-1}{2}$	-	

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

Cözüm 4.4**Tablo 4.10****Simpleks Üçüncü (En iyi) Çözüm Tablosu**

TDV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	A_1	A_2	ÇV
-1	x_3	0	2	1	-3/5	1/5	3/5	-1/5
-2	x_1	1	0	0	1/5	-2/5	-1/5	2/5
Z_j	-2	-2	-1	1/5	3/5	-1/5	-3/5	-26/5
$Z_j - C_j$	0	1	0	1/5	3/5	$\frac{5M-1}{5}$	$\frac{5M-3}{5}$	-

Tablo 4.10'daki temel uygun çözümde tüm $Z_j - C_j \geq 0$ olduğundan çözüm en iyidir. Bu çözümde, $x_1 = 4/5$, $x_2 = 0$, $x_3 = 18/5$, $x_4 = 0$, $x_5 = 0$, $A_1 = 0$, $A_2 = 0$ olarak belirlenmiştir. Amaç fonksiyonunun en büyük değeri $Z_{\text{enb}} = -26/5$ 'dir.

Prof.Dr. Ünal H. ÖZDEN

111

©12 Ekim 2015 Pazartesi

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

Örnek 4.5

Örnek 4.5: Aşağıdaki doğrusal programlama problemini simpleks yöntemle çözünüz.

$$Z_{\text{enb}} = 21x_1 + x_2 + x_3$$

$$2x_1 + x_2 + 4x_3 = 20$$

$$x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 30$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Çözüm 4.5: Kısıtlayıcılar eşitlik biçiminde olduğundan, her birine (+1) katsayılı yapay değişken eklenmesi gereklidir. Bu yolla elde edilen model aşağıda gösterilmiştir.

$$Z_{\text{enb}} = 21x_1 + x_2 + x_3 - MA_1 - MA_2$$

$$2x_1 + x_2 + 4x_3 + A_1 = 20$$

$$x_1 + 3x_2 + 4x_3 + A_2 = 30$$

$$x_1, x_2, x_3, A_1, A_2 \geq 0$$

Tablo 4.11
Simpleks Başlangıç Çözüm Tablosu

TDV	x_1	x_2	x_3	A_1	A_2	ÇV
-M	2	1	4	1	0	20
A_1						
-M	1	3	4	0	1	30
A_2						
Z_j	-3M	-4M	-8M	-M	-M	-50M
$Z_j - C_j$	-3M-21	-4M-1	-8M-1	0	0	-

Prof.Dr. Ünal H. ÖZDEN

112

©12 Ekim 2015 Pazartesi

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

Cözüm 4.5

• *Tablo 4.14**Simpleks Üçüncü (En İyi) Çözüm Tablosu*

TDV	x_1	x_2	x_3	A_1	A_2	ÇV
21 x_1	1	0	8/5	3/5	-1/5	6
1 x_2	0	1	4/5	-1/5	2/5	8
Z_j	21	1	172/5	62/5	-19/5	134
$Z_j - C_j$	0	0	167/2	$\frac{5M + 62}{8}$	$\frac{5M - 19}{5}$	-

Son satırın tüm elemanları ≥ 0 olduğundan, en iyi çözüm elde edilmiştir. Bu en iyi çözümde, $x_1 = 6$, $x_2 = 8$, $x_3 = x_4 = x_5 = 0$ ve $Z_{\text{enb}} = 134$ 'dür.

Prof.Dr. Ünal H. ÖZDEN

113

©12 Ekim 2015 Pazartesi

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

Enküçükleme Problemleri

Örnek 4.6: Aşağıdaki doğrusal programlama problemini simpleks yöntemle çözünüz.

$$Z_{\text{enb}} = 3x_1 + 2x_2 + x_3$$

$$2x_1 + 3x_2 + x_3 \geq 21$$

$$x_1 + x_2 + x_3 \geq 12$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Cözüm 4.6: Önceden olduğu gibi öncelikle problemin standart biçimde yazılması gerekmektedir. Yukarıda yapılan açıklamalar doğrultusunda eklenen ve çıkartılan değişkenlerle problemin standart biçimde aşağıdaki gibi elde edilir.

$$Z_{\text{enb}} = 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 0x_4 + 0x_5 + MA_1 + MA_2$$

$$2x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 + A_1 = 21$$

$$x_1 + x_2 + x_3 - x_5 + A_2 = 12$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, A_1, A_2 \geq 0$$

Problemin standart biçimindeki bilgilerin kullanılmasıyla düzenlenen başlangıç çözüm tablosu aşağıda gösterilmiştir.

• *Tablo 4.15**Simpleks Başlangıç Çözüm Tablosu*

TDV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	A_1	A_2	ÇV
M A_1	2	3	1	-1	0	1	0	21
M A_2	1	1	1	0	-1	0	1	12
Z_j	3M	4M	2M	-M	-M	M	M	33M
$Z_j - C_j$	3M-3	4M-2	2M-1	-M	-M	0	0	-

Prof.Dr. Ünal H. ÖZDEN

114

©12 Ekim 2015 Pazartesi

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

Çözüm 4.6

Tablo 4.16
Simpleks Birinci Çözüm Tablosu

TDV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	A_1	A_2	$\bar{C}V$
2 x_2	2/3	1	1/3	-1/3	0	1/3	0	7
M A_2	1/3	0	2/3	1/3	-1	-1/3	1	5
Z_j	$\frac{M+4}{3}$	2	$\frac{2M+2}{3}$	$\frac{M-2}{3}$	-M	$\frac{-M+2}{3}$	M	$5M+14$
$Z_j - C_j$	$\frac{M-5}{3}$	0	$\frac{2M-1}{3}$	$\frac{M-2}{3}$	-M	$\frac{-4M+2}{3}$	0	-

Tablo 4.17
Simpleks İkinci (En İyi) Çözüm Tablosu

TDV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	A_1	A_2	$\bar{C}V$
2 x_2	1/2	1	0	-1/2	1/2	1/2	-1/2	9/2
1 x_3	1/2	0	1	1/2	-3/2	-1/2	3/2	15/2
Z_j	3/2	2	1	-1/2	-1/2	1/2	1/2	33/2
$Z_j - C_j$	-3/2	0	0	-1/2	-1/2	$\frac{-2M+1}{2}$	$\frac{-2M+1}{2}$	-

Tüm $Z_j - C_j \leq 0$ olduğundan, en iyi çözüme ulaşılmış ve $x_1 = 0$, $x_2 = 9/2$, $x_3 = 15/2$, $x_4 = 0$, $x_5 = 0$, $A_1 = 0$, $A_2 = 0$ ve Zenk = 33/2 olarak belirlenmiştir.

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

Temele Girecek Değişken Katsayılarının Eşit Olması

Örnek 4.7: Aşağıdaki doğrusal programlama problemini simpleks yöntemle çözünüz.

$$Z_{\text{enb}} = 8x_1 + 8x_2 + 6x_3$$

$$2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \leq 12$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 4$$

$$3x_1 + 5x_2 \leq 10$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Cözüm 4.7: Problemin standart biçimde aşağıda verilmiştir.

$$Z_{\text{enb}} = 8x_1 + 8x_2 + 6x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6$$

$$2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 = 12$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 + x_5 = 4$$

$$3x_1 + 5x_2 + x_6 = 10$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$$

Tablo 4.18
Simpleks Başlangıç Çözüm Tablosu

TDV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$\bar{C}V$
0 x_4	2	3	4	1	0	0	12
0 x_5	1	2	1	0	1	0	4
0 x_6	3	5	0	0	0	1	10
Z_j	0	0	0	0	0	0	0
$Z_j - C_j$	-8	-8	-6	0	0	0	-

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

Çözüm 4.7

*Tablo 4.19
Simpleks Birinci Çözüm Tablosu*

TDV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	ÇV
0 x_4	0	-1/3	4	1	0	-2/3	16/3
0 x_5	0	1/3	1	0	1	-1/3	2/3
8 x_1	1	5/3	0	0	0	1/3	10/3
Z_j	8	40/3	0	0	0	8/3	80/3
$Z_j - C_j$	0	16/3	-6	0	0	8/3	-



*Tablo 4.20
Simpleks İkinci (En İyi) Çözüm Tablosu*

TDV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	ÇV
0 x_4	0	-5/3	0	1	-4	2/3	8/3
6 x_3	0	1/3	1	0	1	-1/3	2/3
8 x_1	1	5/3	0	0	0	1/3	10/3
Z_j	8	46/3	6	0	6	2/3	92/3
$Z_j - C_j$	0	22/3	0	0	6	2/3	-

Prof.Dr. Ünal H. ÖZDEN

117

©12 Ekim 2015 Pazartesi

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

Bozulma Durumu

Örnek 4.8: Aşağıdaki doğrusal programlama problemini simpleks yöntemle çözünüz.

$$Z_{\text{enb}} = 8x_1 + 6x_2 + 5x_3$$

$$3x_1 + 4x_2 + 5x_3 \leq 12$$

$$2x_1 + 5x_3 \leq 8$$

$$x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 4$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Cözüm 4.8: Problemin standart biçimini aşağıda gösterilmiştir.

$$Z_{\text{enb}} = 8x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6$$

$$3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + x_4 = 12$$

$$2x_1 + 5x_3 + x_5 = 8$$

$$x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_6 = 4$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$$

Tablo 4.21

Simpleks Başlangıç Çözüm Tablosu

TDV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	ÇV	Oran
0 x_4	3	4	5	1	0	0	16/3	12/3 = 4 →
0 x_5	2	0	5	0	1	0	2/3	8/2 = 4 →
0 x_6	1	4	2	0	0	1	10/3	4/1 = 4 →
Z_j	0	0	0	0	0	0	80/3	
$Z_j - C_j$	-8	-6	-5	0	0	0	-	



TDV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_4	3/3	4/3	5/3	1/3	0/3	0/3
x_5	2/2	0/2	5/2	0/2	1/2	0/2
x_6	1/1	4/1	2/1	0/1	0/1	1/1

↑ Gövde ↑ Birim Matris ↑

Prof.Dr. Ünal H. ÖZDEN

118

©12 Ekim 2015 Pazartesi

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

Cözüm 4.8

Tablo 4.22

Simpleks Birinci Çözüm Tablosu

TDV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	ÇV
0 x_4	0	4	-5/2	1	-3/2	0	0
8 x_1	1	0	5/2	0	1/2	0	4
0 x_6	0	4	-1/2	0	-1/2	1	0
Z_j	8	0	20	0	4	0	32
$Z_j - C_j$	0	-6	15	0	0	0	-

Tablo 4.23

Simpleks İkinci (En iyi) Çözüm Tablosu

TDV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	ÇV
0 x_4	0	0	-2	1	-1	-1	0
8 x_1	1	0	5/2	0	1/2	0	4
6 x_2	0	1	-1/8	0	-1/8	1/4	0
Z_j	8	6	77/4	0	13/4	3/2	32
$Z_j - C_j$	0	0	57/4	0	13/4	3/2	-

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

Sınırsız Çözüm

Örnek 4.9: Aşağıdaki doğrusal programlama problemini simpleks yöntemle çözünüz.

$$Z_{\text{enb}} = 2x_1 + 5x_2 + 9x_3$$

$$x_1 + x_2 + 4x_3 \geq 12$$

$$x_1 + x_2 + x_3 \geq 4$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Cözüm 4.9: Problemin standart biçimde aşağıda verilmiştir.

$$Z_{\text{enb}} = 2x_1 + 5x_2 + 9x_3 + 0x_4 + 0x_5 - MA_1 - MA_2$$

$$x_1 + x_2 + 4x_3 - x_4 + A_1 = 12$$

$$x_1 + x_2 + x_3 - x_5 + A_2 = 4$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, A_1, A_2 \geq 0$$

Tablo 4.24

Simpleks Başlangıç Çözüm Tablosu

TDV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	A_1	A_2	ÇV
-M A_1	1	1	4	-1	0	1	1	12
-M A_2	1	1	1	0	-1	0	0	4
Z_j	-2M	-2M	-5M	M	M	-M	-M	-16M
$Z_j - C_j$	-2M-2	-2M-5	-5M-9	M	M	0	0	-

Tablo 4.25

Simpleks Birinci Çözüm Tablosu

TDV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	A_1	A_2	ÇV
9 x_3	1/4	1/4	1	-1/4	0	1/4	0	3
-M A_2	3/4	3/4	0	1/4	-1	-1/4	1	1
Z_j	$\frac{-3M+9}{4}$	$\frac{-3M+9}{4}$	9	$\frac{-M-9}{4}$	M	$\frac{M+9}{4}$	-M	27-M
$Z_j - C_j$	$\frac{-3M+1}{4}$	$\frac{-3M-11}{4}$	0	$\frac{-M-9}{4}$	M	$\frac{5M+9}{4}$	0	-

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

Çözüm 4.9

• *Tablo 4.26
Simpleks İkinci Çözüm Tablosu*

TDV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	A_1	A_2	ÇV
9 x_3	0	0	1	-1/3	1/3	1/3	-1/3	8/3
5 x_2	1	1	0	1/3	-4/3	-1/3	4/3	4/3
Z_j	5	5	9	-4/3	-11/3	4/3	11/3	92/3
$Z_j - C_j$	3	0	0	-4/3	-11/3	$\frac{3M+4}{3}$	$\frac{3M+11}{3}$	-

*Tablo 4.27
Simpleks Üçüncü Çözüm Tablosu*

TDV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	A_1	A_2	ÇV
0 x_5	0	0	3	-1	1	1	-1	8/3
5 x_2	1	1	4	-1	0	1	0	12
Z_j	5	5	20	-5	0	5	0	60
$Z_j - C_j$	3	0	11	-5	0	M+5	M	-

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

Alternatif En iyi Çözümler

- **Örnek 4.10:** Aşağıdaki problemi simpleks yöntemle çözerek problemin en iyi çözümünü bulunuz.

$$Z_{\text{enb}} = 2x_1 + 4x_2 + 6x_3$$

$$4x_1 + 8x_2 + 12x_3 \leq 36$$

$$x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 12$$

$$2x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 20$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Çözüm 4.10: Aylak değişkenlerin modele sokulmasıyla elde edilen standart biçim aşağıda gösterilmiştir.

$$Z_{\text{enb}} = 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6$$

$$4x_1 + 8x_2 + 12x_3 + x_4 = 36$$

$$x_1 + x_2 + 3x_3 + x_5 = 12$$

$$2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_6 = 20$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$$

*Tablo 4.28
Simpleks Başlangıç Çözüm Tablosu*

TDV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	ÇV
0 x_4	4	8	12	1	0	0	36
0 x_5	1	1	3	0	1	0	12
0 x_6	2	2	1	0	0	1	20
Z_j	0	0	0	0	0	0	0
$Z_j - C_j$	-2	-4	-6	0	0	0	-

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

Uygun Olmayan Çözüm

Örnek 4.11: Aşağıdaki problemi simpleks yöntemle çözünüz.

$$Z_{\text{enb}} = 2x_1 + 2x_2$$

$$-x_1 + x_2 \leq 4$$

$$x_1 + 2x_2 \geq 5$$

$$3x_1 + 4x_2 \leq 6$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Çözüm 4.11: Uygun değişkenlerin eklenip çıkartılmasıyla belirlenen standart biçim aşağıda verildiği gibidir.

$$Z_{\text{enb}} = 2x_1 + 2x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 + MA_1$$

$$-x_1 + x_2 + x_3 = 4$$

$$x_1 + 2x_2 - x_4 + A_1 = 5$$

$$3x_1 + 4x_2 + x_5 = 6$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, A_1 \geq 0$$

Tablo 4.31
Simpleks Başlangıç Çözüm Tablosu

TDV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	A_1	ÇV
0 x_3	-1	1	0	1	0	0	4
M A_1	1	2	-1	0	0	1	5
0 x_5	3	4	0	0	1	0	6
Z_i	M	2M	-M	0	0	M	5M
$Z_j - C_j$	M-2	2M-2	-M	0	0	0	-

Tablo 4.32

Simpleks Birinci Çözüm Tablosu

TDV	x_1	x_2	x_4	x_3	x_5	A_1	ÇV
0 x_3	-7/4	0	0	1	-1/4	0	5/2
M A_1	-1/2	0	-1	0	-1/2	1	2
2 x_2	3/4	1	0	0	1/4	0	3/2
Z_j	$\frac{3-M}{2}$	2	-M	0	$\frac{1-M}{2}$	M	$2M+3$
$Z_j - C_j$	$\frac{-M-1}{2}$	0	-M	0	$\frac{1-M}{2}$	0	-

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

Sınırlandırılmamış Değişkenlerle Çözüm

Örnek 4.12: Aşağıdaki problemi simpleks yöntemle çözünüz.

$$Z_{\text{enb}} = 2x_1 + x_2$$

$$3x_1 + x_2 \leq 6$$

$$x_1 + x_2 \leq 4$$

$$x_1 > 0, x_2 \text{ işaret} \rightarrow \text{sınırlandırılmamış}$$

Çözüm 4.12: Simpleks yöntem için önce işaretri sınırlandırılmamış x_2 değişkeni yerine, $x_2 = x_2^+ - x_2^-$ yazalım. Bu durumda yukarıda verilen doğrusal programlama problemi aşağıdaki gibi olur.

$$Z_{\text{enb}} = 2x_1 + (x_2^+ - x_2^-)$$

$$3x_1 + (x_2^+ - x_2^-) \leq 6$$

$$x_1 + (x_2^+ - x_2^-) \leq 4$$

$$x_1, x_2^+, x_2^- \geq 0$$

$$Z_{\text{enb}} = 2x_1 + (x_2^+ - x_2^-)$$

$$3x_1 + (x_2^+ - x_2^-) + x_3 = 6$$

$$x_1 + (x_2^+ - x_2^-) + x_4 = 4$$

$$x_1, x_2^+, x_2^-, x_3, x_4 \geq 0$$

Tablo 4.33
Simpleks Başlangıç Çözüm Tablosu

TDV	x_1	x_2^+	x_2^-	x_3	x_4	ÇV
x_3	3	1	2	-1	0	6
x_4	1	1	1	0	-1	4
Z_i	0	0	0	0	0	0
$Z_j - C_j$	-2	-1	1	0	0	-

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI						
Çözüm 4.12						
• Tablo 4.34 Simpleks Birinci Çözüm Tablosu						
TDV	x_1	x_2^+	x_2^-	x_3	x_4	ÇV
x_3	3	1	-1	1	0	6
x_4	1	1	-1	0	1	4
Z_j	0	0	0	0	0	0
$Z_j - C_j$	-2	-1	1	0	0	-

Tablo 4.35 Simpleks İkinci Çözüm Tablosu						
Tablo 4.36 Simpleks Üçüncü (En iyi) Çözüm Tablosu						
TDV	x_1	x_2^+	x_2^-	x_3	x_4	ÇV
x_1	1	1/3	-1/3	1/3	0	2
x_4	0	2/3	-2/3	-1/3	1	2
Z_j	2	2/3	-2/3	2/3	0	4
$Z_j - C_j$	0	-1/3	1/3	2/3	0	-

Tablo 4.36'daki temel uygun çözümde tüm $Z_j - C_j \geq 0$ olduğundan çözüm en iyidir. Bu çözümde, $x_1 = 1$, $x_2^+ = 3$, $x_2^- = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$ olarak belirlenmiştir. Amaç fonksiyonunun en büyük değeri $Z_{\text{enb}} = 5$ dir. $x_2 = x_2^+ - x_2^-$ olduğu göz önünde bulundurulduğunda $x_2 = 3$ olarak belirlenir. Diğer taraftan en iyi çözümün temelde bulunmayan değişkenlerinden x_2^- ye ait $Z_j - C_j$ değerinin sıfır eşit olduğu, dolayısıyla bir alternatif çözüm bulunduğu görülebilir.

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

DOĞRUSAL PROGRAMLAMA
İKİ AŞAMALI SIMPLEKS ÇÖZÜM YÖNTEMİ

Prof.Dr. Ünal H. ÖZDEN

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

- Büyük M yöntemi, yapay değişkenlerin kullanıldığı problemlerin çözümünde en çok kullanılan yöntem olmakla birlikte, diğer çözüm yöntemleri de araştırmacılar tarafından ele alınmıştır. Değişik çözüm tekniklerinden birisi de *iki aşamalı simpleks yöntemidir*. Büyük M yönteminin sakıncalarını gidermek ve hesaplamanın etkinliğini artırmak amacıyla geliştirilen iki aşamalı yöntem hesaplamada iki aşama gerektirdiğinden bu isimle anılmaktadır.

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

Birinci Aşama

- **Birinci aşama:** Problemin kısıtlayıcı fonksiyonları uygun değişkenlerle standart biçim kısıtlayıcı fonksiyonlarına dönüştürülür. Bu işlemden sonra problemin orijinal amaç fonksiyonu yerine kullanılacak yeni bir amaç fonksiyonu tanımlanır ve problem klasik simpleks yöntemin bilinen kural ve işlemleriyle aynı süreç izlenerek çözülür.

Birinci Aşama

Gerçek amaç fonksiyonu yerine geçirilen değiştirilmiş amaç fonksiyonunda, yapay değişkenler dışında kalan tüm değişkenlerin katsayıları sıfır, yapay değişkenlerin katsayıları ise en büyükleme problemlerinde (-1), en küçükleme problemlerinde (+1) kabul edilir.

$$Z_{\text{enb}}^* = -A_1 - A_2 - \dots - A_r$$

en küçükleme problemlerinin değiştirilmiş amaç fonksiyonu,

$$Z_{\text{enk}}^* = A_1 + A_2 + \dots + A_r$$

olur.

Birinci Aşama

- Değiştirilmiş amaç fonksiyonunun değeri sıfır ise bu durumda yapay değişkenlerin değerinin sıfır olduğu anlamına gelir ve ikinci aşamaya geçilir. Aksi takdirde uygun çözüm yoktur.
- Bir ya da birden fazla yapay değişken sıfır değerli olarak temelde kalmış olabilir. Çözüm değeri sıfır olan yapay değişkenlerin temelde bulunması orijinal problemin çözümüne ulaşmayı engellememekle birlikte, kısıtlayıcı fonksiyonlarda fazlalık bulunması söz konusu olabilir.

İkinci Aşama

- ***İkinci aşama:*** Birinci aşamada belirlenen çözüm, orijinal problemin çözümü için temel oluşturur. Temelde hiçbir yapay değişken bulunmadığı durumda birinci aşamanın çözüm tablosundaki yapay değişken sütunları devre dışı bırakılır. Bu, çözüm tablosunda gerçekleştirilmesi gereken ilk değişikliktir. Diğer bir değişiklik, Z_j ve $Z_j - C_j$ değerlerinde ortaya çıkar. Değişkenlerin orijinal amaç fonksiyonu katsayıları kullanılarak Z_j ve $Z_j - C_j$ 'nin yeni değerleri hesaplanır ve ikinci aşamanın başlangıç tablosu oluşturulur. Bundan sonra simpleks yöntemin bilinen işlemleriyle problemin en iyi çözümü elde edilir.

İkinci Aşama

- Birinci aşamanın temelde sıfır değerli bir yapay değişken olması durumunda ikinci aşamanın başlangıç tablosunun Z_j ve $Z_j - C_j$ değerlerinin hesaplanabilmesi için sıfır değerli yapay değişkenlerin amaç fonksiyonundaki katsayıları sıfır, diğer değişkenlerin ise orijinal amaç fonksiyonundaki katsayıları esas alınır.

Örnek-1

- Aşağıdaki doğrusal programlama probleminin iki aşamalı simpleks yöntemle çözümü.
- $Z_{\text{enk}} = 2x_1 + 3x_2 + x_3$
- $x_1 + 4x_2 + 2x_3 \geq 8$
- $3x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 6$
- $x_1 + x_2 \geq 3$
- $x_1, x_2, x_3 \geq 0$

Örnek-1 (Devam)

- $= A_1 + A_2 + A_3$
- $x_1 + 4x_2 + 2x_3 - x_4 + A_1 = 8$
- $3x_1 + 2x_2 + x_3 - x_5 + A_2 = 6$
- $x_1 + x_2 - x_6 + A_3 = 3$
- negatif olmama koşulu,
- $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, A_1, A_2, A_3 \geq 0$

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

Örnek-1 (Devam)

Tablo 6.7

İki Aşamalı Simpleks Birinci Aşama Başlangıç Çözüm Tablosu

TDV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	A_1	A_2	A_3	ÇV
1 A_1	1	4	2	-1	0	0	1	0	0	8
1 A_2	3	2	1	0	-1	0	0	1	0	6
1 A_3	1	1	0	0	0	-1	0	0	1	3
Z_j^*	5	7	3	-1	-1	-1	1	1	1	17
$Z_j^* - C_j^*$	5	7	3	-1	-1	-1	0	0	0	-

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

Örnek-1 (Devam)

Tablo 6.8

İki Aşamalı Simpleks Birinci Aşama Birinci Çözüm Tablosu

TDV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	A_1	A_2	A_3	ÇV
0 x_2	1/4	1	1/2	-1/4	0	0	1/4	0	0	2
1 A_2	5/2	0	0	1/2	-1	0	-1/2	1	0	2
1 A_3	3/4	0	-1/2	1/4	0	-1	-1/4	0	1	1
Z_j^*	13/4	0	-1/2	3/4	-1	-1	-3/4	1	1	3
$Z_j^* - C_j^*$	13/4	0	-1/2	3/4	-1	-1	-7/4	0	0	-

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

Örnek-1 (Devam)*Tablo 6.9**İki Aşamalı Simpleks Birinci Aşama İkinci Çözüm Tablosu*

TDV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	A_1	A_2	A_3	ÇV
0 x_2	0	1	1/2	-3/10	1/10	0	3/10	-1/10	0	9/5
0 x_1	1	0	0	1/5	-2/5	0	-1/5	2/5	0	4/5
1 A_3	0	0	-1/2	1/10	3/10	-1	-1/10	-3/10	1	2/5
Z_j^*	0	0	-1/2	1/10	3/10	-1	-1/10	-3/10	1	2/5
$Z_j^* - C_j^*$	0	0	-1/2	1/10	3/10	-1	-11/10	-13/10	0	-

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

Örnek-1 (Devam)*Tablo 6.10**İki Aşamalı Simpleks Birinci Aşama Üçüncü (En İyi) Çözüm Tablosu*

TDV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	A_1	A_2	A_3	ÇV
0 x_2	0	1	2/3	-1/3	0	1/3	1/3	0	-1/3	5/3
0 x_1	1	0	-2/3	1/3	0	-4/3	-1/3	0	4/3	4/3
0 x_5	0	0	-5/3	1/3	1	-10/3	-1/3	-1	10/3	4/3
Z_j^*	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$Z_j^* - C_j^*$	0	0	0	0	0	0	-1	-1	-1	-

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

Örnek-1 (Devam)

*Tablo 6.11
İki Aşamalı Simpleks İkinci Aşama
Başlangıç (En İyi) Çözüm Tablosu*

TDV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	ÇV
3 x_2	0	1	2/3	-1/3	0	1/3	5/3
2 x_1	1	0	-2/3	1/3	0	-4/3	4/3
0 x_5	0	0	-5/3	1/3	1	-10/3	4/3
Z_j	2	3	2/3	-1/3	0	-5/3	23/3
$Z_j - C_j$	0	0	-1/3	-1/3	0	-5/3	-

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

Örnek-2

- $Z_{\text{enb}} = 5x_1 + x_2$
- $x_1 - x_2 \geq 3$
- $-x_1 + 4x_2 \geq 1$
- $x_1 + 2x_2 \leq 8$
- $x_1, x_2 \geq 0$

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

Örnek-2 (Devam)

- $Z^*_{\text{enb}} = -A_1 - A_2$
- $x_1 - x_2 - x_3 + A_1 = 3$
- $-x_1 + 4x_2 - x_4 + A_2 = 1$
- $x_1 + 2x_2 + x_5 = 8$
- $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, A_1, A_2 \geq 0$

Prof.Dr. Ünal H. ÖZDEN

141

©12 Ekim 2015 Pazartesi

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

Örnek-2 (Devam)

*Tablo 6.12
İki Aşamalı Simpleks Birinci Aşama Başlangıç Tablosu*

TDV	x_1	x_2	x_3	x_4	A_1	A_2	x_5	ÇV
-1 A_1	1	-1	-1	0	1	0	0	3
-1 A_2	-1	4	0	-1	0	1	0	1
0 x_5	1	2	0	0	0	0	1	8
Z_j^*	0	-3	1	1	-1	-1	0	-4
$Z_j^* - C_j^*$	0	-3	1	1	0	0	0	-

Prof.Dr. Ünal H. ÖZDEN

142

©12 Ekim 2015 Pazartesi

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

Örnek-2 (Devam)*Tablo 6.13**İki Aşamalı Simpleks Birinci Aşama Birinci Çözüm Tablosu*

TDV	x_1	x_2	x_3	x_4	A_1	A_2	x_5	ÇV	
-1	A_1	3/4	0	-1	-1/4	1	1/4	0	13/4
0	x_2	-1/4	1	0	-1/4	0	1/4	0	1/4
0	x_5	3/2	0	0	1/2	0	-1/2	1	15/2
	Z_j^*	-3/4	0	1	1/4	-1	-1/4	0	-13/4
	$Z_j^* - C_j^*$	-3/4	0	1	1/4	0	3/4	0	-

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

Örnek-2 (Devam)*Tablo 6.14**İki Aşamalı Simpleks Birinci Aşama İkinci (En İyi) Çözüm Tablosu*

TDV	x_1	x_2	x_3	x_4	A_1	A_2	x_5	ÇV	
0	x_1	1	0	-4/3	-1/3	4/3	1/3	0	13/3
0	x_2	0	1	-1/3	-1/3	1/3	1/3	0	4/3
0	x_5	0	0	2	1	-2	-1	1	1
	Z_j^*	0	0	0	0	0	0	0	0
	$Z_j^* - C_j^*$	0	0	0	0	1	1	0	-

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

Örnek-2 (Devam)

*Tablo 6.15
İki Aşamalı Simpleks İkinci Aşama Başlangıç Çözüm Tablosu*

TDV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	ÇV
5 x_1	1	0	-4/3	-1/3	0	13/3
1 x_2	0	1	-1/3	-1/3	0	4/3
0 x_5	0	0	2	1	1	1
Z_i	5	1	-7	-2	0	23
$Z_i - C_i$	0	0	-7	-2	0	-

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

Örnek-2 (Devam)

*Tablo 6.16
İki Aşamalı Simpleks İkinci Aşama
Birinci (En İyi) Çözüm Tablosu*

TDV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	ÇV
5 x_1	1	1	0	1/3	2/3	5
1 x_2	0	1	0	-1/6	1/6	3/2
0 x_3	0	0	1	1/2	1/2	1/2
Z_i	5	1	0	3/2	7/2	53/2
$Z_i - C_i$	0	0	0	3/2	7/2	-

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

DOĞRUSAL PROGRAMLAMA DUAL SİMPLEKS ÇÖZÜM YÖNTEMİ

Prof.Dr. Ünal H. ÖZDEN

Prof.Dr. Ünal H. ÖZDEN

147

©12 Ekim 2015 Pazartesi

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

Açıklama

- Simpleks yöntemin tekrarlı bir hesaplama yöntemi olduğundan ve hesaplama işlemlerini başlatabilmek için bir *başlangıç temel uygun çözümün* belirlenmesinin zorunludur.

Prof.Dr. Ünal H. ÖZDEN

148

©12 Ekim 2015 Pazartesi

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

- Açıklamaların ortaya koyduğu gibi dual simpleks yöntem, en iyi olmakla birlikte uygun olmayan başlangıç çözümünün söz konusu olduğu doğrusal programlama problemlerine uygulanır.

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

Aşamaları

- Başlangıçtaki temel çözümün uygun olup olmadığıının incelenmesi için öncelikle (\leq) biçiminde olmayan kısıtlayıcı fonksiyonların (\leq) biçimine dönüştürülmesi gereklidir.

1. Başlangıç çözümünün en iyi olup olmadığıının incelenmesi: Başlangıç çözümü en iyi ise buna karşılık gelen dual çözüm uygun olduğundan, ikinci adıma geçilir. Aksi halde işlemlere son verilir.

Aşamaları-devam

- 2. Çözüm vektörü elemanlarının incelenmesi:** Çözüm vektörü elemanlarının tümü ≥ 0 ise, yürürlükteki en iyi çözüm aynı zamanda uygun olduğundan, işlemlere son verilir. Çözüm vektörü elemanlarının bir ya da birkaçının negatif ise çözümün uygun olmaması koşulu sağlanından üçüncü adıma geçilir.
- 3. Temeli terkedeyecek değişkenin belirlenmesi:** Temeli terkedeyecek değişkenin belirlenmesinde kullanılan ölçüt temeldeki değişkenlerin çözüm değerlerine dayanır. Temeli terkedeyecek değişken en yüksek negatif (mutlak değerce en büyük negatif sayı) çözüm değerine sahip olan değişkendir. Bu değişkenin bulunduğu satır anahtar satırdır.

Aşamaları-devam

- 4. Temele girecek değişkenin belirlenmesi:** Seçim işlemi için temel olmayan değişkenlere karşılık gelen $Z_j - C_j$ değerleri, anahtar satırın kendilerine karşılık gelen elemanlarına bölünerek oranlar hesaplanır. Sıfır veya pozitif paydaya sahip oranlar dikkate alınmazlar. Bu oranlar arasından mutlak değerce en küçük oranın bulunduğu sütun anahtar sütundur. Bu yolla anahtar sayının negatif, dolayısıyla temele giren değişkenin çözüm değerinin pozitif olması sağlanır. Tüm oranların sıfır veya pozitif paydalara sahip olması durumunda işlemlere son verilir. Böyle bir durumda çözüm vektörünün ilgili elemanı tekrar negatif değerli bulunacağından uygun çözüme ulaşılamaz.

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

Aşamaları-devam

5. Gelişmiş çözümün aranması: Temele giren ve temeli terkeden değişkenlerin belirlenmesinden sonra simpleks yöntemin bilinen işlemleriyle daha gelişmiş bir çözüm elde edilerek tekrar ikinci adıma dönülür. Bu yolla uygun bir en iyi çözüm varsa sonlu sayıda işlemle bu çözüme ulaşılır.

- Yukarıda açıklandığı gibi, primal simpleks yöntemde önce anahtar sütun sonra anahtar satır belirlenirken, dual simpleks yöntemde önce anahtar satır sonra anahtar sütun belirlenmektedir.

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

Örnek

Örnek 6.1: Aşağıdaki doğrusal programlama problemini dual simpleks yöntemle çözünüz.

$$\begin{aligned} Z_{\text{enk}} &= 3x_1 + 2x_2 + x_3 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 &\geq 21 \\ x_1 + x_2 + x_3 &\geq 12 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

Çözüm

Çözüm 6.1: Problemi dual simpleks yöntemin uygulanacağı biçimde dönüştürmek için önce (\geq) işaretli kısıtlayıcı fonksiyonların her iki tarafını (-1) ile çarparak (\leq) biçimine dönüştürürelim. Bu işlemin tamamlanmasıyla problem aşağıdaki gibi olur.

$$\begin{aligned} Z_{\text{enk}} &= 3x_1 + 2x_2 + x_3 \\ -2x_1 - 3x_2 - x_3 &\leq -21 \\ -x_1 - x_2 - x_3 &\leq -12 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

Çözüm-devam

- Kısıtlayıcı fonksiyonlara sırasıyla x_4 ve x_5 aylak değişkenlerini ekleyerek onları eşitlik biçiminde yazalım. Buna göre problemin standart biçimini aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\begin{aligned} Z_{\text{enk}} &= 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 0x_4 + 0x_5 \\ -2x_1 - 3x_2 - x_3 + x_4 &= -21 \\ -x_1 - x_2 - x_3 + x_5 &= -12 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 &\geq 0 \end{aligned}$$

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI																																								
Çözüm-devam																																								
<i>Tablo 6.1</i> <i>Dual Simpleks Başlangıç Çözüm Tablosu</i>																																								
<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr> <th>TDV</th><th>x_1</th><th>x_2</th><th>x_3</th><th>x_4</th><th>x_5</th><th>$\bar{C}V$</th></tr> </thead> <tbody> <tr> <td>0 x_4</td><td>-2</td><td>-3</td><td>-1</td><td>1</td><td>0</td><td>-21</td></tr> <tr> <td>0 x_5</td><td>-1</td><td>-1</td><td>-1</td><td>0</td><td>1</td><td>-12</td></tr> <tr> <td>Z_j</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr> <td>$Z_j - C_j$</td><td>-3</td><td>-2</td><td>-1</td><td>0</td><td>0</td><td>-</td></tr> </tbody> </table>						TDV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\bar{C}V$	0 x_4	-2	-3	-1	1	0	-21	0 x_5	-1	-1	-1	0	1	-12	Z_j	0	0	0	0	0	0	$Z_j - C_j$	-3	-2	-1	0	0	-
TDV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\bar{C}V$																																		
0 x_4	-2	-3	-1	1	0	-21																																		
0 x_5	-1	-1	-1	0	1	-12																																		
Z_j	0	0	0	0	0	0																																		
$Z_j - C_j$	-3	-2	-1	0	0	-																																		
 Tüm $Z_j - C_j \leq 0$ olduğundan, başlangıç tablosundaki çözüm en iyidir. Ancak, temel değişkenler negatif değerli oldukları için anılan çözüm primal uygun değildir. Çözüm vektörü elemanlarından en küçükü (-21) x_4 'e ait olduğundan, x_4 temelden çıkartılacaktır.																																								

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI																																									
Çözüm-devam																																									
Oranların hesaplanması işlemi aşağıda gösterilmiştir. x_1 'e karşılık gelen oran = $-3/-2 = 3/2$ x_2 'ye karşılık gelen oran = $-2/-3 = 2/3$ x_3 'e karşılık gelen oran = $-1/-1 = 1$ En küçük oran ($2/3$) x_2 'ye ait olduğundan, x_2 temele girecektir. x_4 değişken satırı anahtar satır, x_2 değişken sütunu anahtar sütun olduğundan, anahtar sayı (-3) olur. Simpleks yöntemin bilinen işlemlerinin uygulanmasıyla, yeni çözüm tablosu aşağıdaki gibi elde edilir.																																									
<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr> <th>TDV</th><th>x_1</th><th>x_2</th><th>x_3</th><th>x_4</th><th>x_5</th><th>$\bar{C}V$</th></tr> </thead> <tbody> <tr> <td>0 x_4</td><td>-2</td><td>-3</td><td>-1</td><td>1</td><td>0</td><td>-21</td></tr> <tr> <td>0 x_5</td><td>-1</td><td>-1</td><td>-1</td><td>0</td><td>1</td><td>-12</td></tr> <tr> <td>Z_j</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr> <td>$Z_j - C_j$</td><td>-3</td><td>-2</td><td>-1</td><td>0</td><td>0</td><td>-</td></tr> </tbody> </table>							TDV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\bar{C}V$	0 x_4	-2	-3	-1	1	0	-21	0 x_5	-1	-1	-1	0	1	-12	Z_j	0	0	0	0	0	0	$Z_j - C_j$	-3	-2	-1	0	0	-
TDV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\bar{C}V$																																			
0 x_4	-2	-3	-1	1	0	-21																																			
0 x_5	-1	-1	-1	0	1	-12																																			
Z_j	0	0	0	0	0	0																																			
$Z_j - C_j$	-3	-2	-1	0	0	-																																			

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

Çözüm-devam

- Buna göre x_4 değişken satırı anahtar satır olur. x_4 yerine temele girecek değişkeni belirlemek için temel olmayan değişkenlere ait $Z_j - C_j$ değerlerinin bire bir olmak koşuluyla anahtar satır elemanlarına bölünmesi gereklidir.

Prof.Dr. Ünal H. ÖZDEN

159

©12 Ekim 2015 Pazartesi

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

*Tablo 6.3
Dual Simpleks Birinci Çözüm Tablosu*

TDV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	ÇV
2 x_2	2/3	1	1/3	-1/3	0	7
0 x_5	-1/3	0	-2/3	-1/3	1	-5
Z_j	4/3	0	2/3	-2/3	0	14
$Z_j - C_j$	-5/3	0	-1/3	-2/3	0	-

*Tablo 6.4**Dual Simpleks İkinci (En İyi) Çözüm Tablosu*

TDV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	ÇV
2 x_2	1/2	1	0	-1/2	1/2	9/2
1 x_3	1/2	0	1	1/2	-3/2	15/2
Z_j	3/2	2	1	-1/2	-1/2	33/2
$Z_j - C_j$	-3/2	0	0	-1/2	-1/2	-

Prof.Dr. Ünal H. ÖZDEN

160

©12 Ekim 2015 Pazartesi

Ödev

Örnek 6.2: Aşağıdaki problemi dual simpleks yöntemle çözünüz.

$$\begin{aligned} Z_{\text{enk}} &= 2x_1 + 2x_2 \\ -x_1 + x_2 &\leq 4 \\ x_1 + 2x_2 &\geq 5 \\ 3x_1 + 4x_2 &\leq 6 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Dezavantajları

- Anahtar satırın tüm elemanları sıfır veya pozitif olduğundan, temele girecek değişkenin pozitif olmasının sağlanması çabaları sonuçsuz kalacağından, işlemlere son verilir en iyi çözümün bulunmadığı kararlaştırılır. Dual simpleks yöntemle ulaşılan en iyi çözümün dışındaki çözümlerin hiçbirisi primal problem için uygun değildir. Bu nedenle, herhangi bir sebepten ötürü dual simpleks yöntemden vazgeçilmesi durumunda o ana kadar harcanan emek ve zaman boş gitmiş olur. Çünkü, böyle bir durumda en iyi olmak bir yana uygun bir çözüm bile yoktur. Bu, dual simpleks yöntemin önemli bir sakıncası sayılmalıdır.

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

- Oysa, primal simpleks yöntem uygulamasında elde edilen çözümler, en azından uygun çözümlerdir. Çözümün herhangi bir aşamasında işlemlere son vermek gerekiğinde, hiç olmazsa o ana kadar elde edilmiş olan uygun çözümlerin en iyisi elde edilmiş olacağından, herhangi bir problemin hem primal hem de dual uygun temelleri varsa primal simpleks yöntemin tercih edilmesi gereklidir.

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

- Bununla birlikte, dual simpleks yöntem duyarlılık çözümlemelerinde son derecede yararlıdır. Duyarlılık çözümlemesi konusundan bilindiği gibi, kısıtlayıcı fonksiyonların sağ taraf sabitlerinin değişmesi sonucunda primal problemin en iyi çözümü uygun olma özelliğini yitirebilir. Bunun yanında, problemin orijinal kısıtlayıcılarına yeni kısıtlayıcıların eklenmesi yürürlükteki çözümün uygun olma koşulunun sağlanmamasına yol açabilir. Bu durumda, dual simpleks yöntem problemin en iyi çözümünün elde edildiği aşamadan başlayarak yeni bir çözümün elde edilmesinde kullanılabilir. Bütün bunlardan başka dual simpleks yöntem yapay değişken kullanmayı gerektirmeden, hesaplamalarda kolaylık sağlamaktadır.

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

DOĞRUSAL PROGRAMLAMA DUALİTE KURAMI VE DUYARLILIK ANALİZİ

Prof.Dr. Ünal H. ÖZDEN

- Her DP modelinin bir primal problemi ve bir de dual problemi vardır.
- Primal ve dual arasındaki ilişkilerin belli başlıcaları aşağıda açıklanmıştır.
- 1. Dual problemin duali primal problemi verir.
- 2. Eğer primal ve dual problemlerin çözümleri varsa, primal problemin (en küçükleme) amaç fonksiyonunun herhangi bir uygun çözümdeki değeri dual problemin (en büykleme) amaç fonksiyonunun bir uygun çözümdeki değerine eşit veya ondan daha büyüktür. Bunun tersi de doğrudur. Bu önermeye *zayıf dualite önermesi* denir.

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

- 3. Primal veya dual problemlerden herhangi birinin en iyi çözümü varsa, diğerinin de en iyi çözümü vardır ve primal ile dual problemlerinin amaç fonksiyonlarının en iyi değerleri birbirine eşittir. Bu önermeye *temel dualite önermesi* denir.
- 4. Primal problem sınırsız çözüme sahipse, dual problemin uygun çözümü yoktur.
- 5. Primal problemin uygun bir çözümü yoksa, dual problem sınırsız çözüme sahiptir.

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

Primal-Dual

Primal	Dual
$Z_{\text{enb}} = x_1 + 4x_2 + 5x_3$ $x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 2$ $3x_1 + x_2 + x_3 \leq 2$ $2x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 4$ $x_1, x_2, x_3 \geq 0$	$Z'_{\text{enk}} = 2y_1 + 2y_2 + 4y_3$ $y_1 + 3y_2 + 2y_3 \geq 1$ $2y_1 + y_2 + 3y_3 \geq 4$ $3y_1 + y_2 + y_3 \geq 5$ $y_1, y_2, y_3 \geq 0$

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

Primal	Dual
$Z_{\text{enb}} = 25x_1 + 30x_2 + 12x_3$ $5x_1 + 5x_2 + x_3 \leq 12$ $x_1 \leq 3$ $x_1, x_2, x_3 \geq 0$	$Z'_{\text{enk}} = 12y_1 + 3y_2$ $5y_1 + y_2 \geq 25$ $5y_1 \geq 30$ $y_1 \geq 12$ $y_1, y_2 \geq 0$

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

Primal	Dual
$Z_{\text{enb}} = 12x_1 + 5x_2 + 6x_3 + 4x_4$ $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 21$ $x_1 + 2x_2 = 10$ $2x_3 + 3x_4 = 5,$ $x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$	$Z'_{\text{enk}} = 21y_1 + 10y_2 + 5y_3$ $y_1 + y_2 \geq 12$ $y_1 + 2y_2 \geq 5$ $y_1 + 2y_3 \geq 6$ $y_1 + 3y_3 \geq 4$ y_1, y_2, y_3 işaretleri sınırlanılmamış değişkenlerdir

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

Primal	Dual
$Z_{\text{enk}} = 3x_1 + 4x_2 + 6x_3 + x_4 + 5x_5$ $x_1 + x_2 + x_4 = 10$ $x_2 + x_3 = 7$ $x_3 + x_4 = 8$ $x_1 + x_5 = 6$ $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$	$Z'_{\text{enb}} = 10y_1 + 7y_2 + 8y_3 + 6y_4$ $y_1 + y_4 \leq 3$ $y_1 + y_2 \leq 4$ $y_2 + y_3 \leq 6$ $y_1 + y_3 \leq 1$ $y_4 \leq 5$ <p>y_1, y_2, y_3, y_4 işaretleri sınırlanmadırmış değişkenlerdir.</p>

Prof.Dr. Ünal H. ÖZDEN

171

©12 Ekim 2015 Pazartesi

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

Primal	Dual
$Z_{\text{enb}} = 6x_1 + 16x_2 + 26x_3 + 36x_4$ $2x_1 + 3x_2 + x_4 \leq 16$ $2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 8$ x_1, x_2, x_3, x_4 işaretçe sınırlanmadırmış değişkenlerdir.	$Z'_{\text{enb}} = 16y_1 + 8y_2$ $2y_1 + 2y_2 = 6$ $3y_1 + y_2 = 16$ $y_2 = 26$ $y_1 + y_2 = 36$ $y_1, y_2 \geq 0$

Prof.Dr. Ünal H. ÖZDEN

172

©12 Ekim 2015 Pazartesi

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI	
Primal	Kanonik Biçim
$Z_{\text{enk}} = 6x_1 + 7x_2 + 3x_3$ $2x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 5$ $x_1 + x_2 + 6x_3 = 12$ $3x_1 + 3x_2 + 4x_3 \geq 15$ $x_1, x_2, x_3 \geq 0$	$Z_{\text{enk}}^* = -6x_1 - 7x_2 - 3x_3$ $2x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 5$ $x_1 + x_2 + 6x_3 \leq 12$ $-x_1 - x_2 - 6x_3 \leq -12$ $-3x_1 - 3x_2 - 4x_3 \leq -15$ $x_1, x_2, x_3 \geq 0$
Dual Biçim	Dual Biçim
y_1, y_2^+, y_2^-, y_3 kanonik biçimin kısıtlayıcılarına karşılık gelen dual değişkenler olsun. Buna göre, y_1, y_2^+ , $y_2^-, y_3 \geq 0$ koşulu altında dual model aşağıdaki gibi olur. $Z_{\text{enk}}^* = 5y_1 + 12(y_2^+ - y_2^-) - 15y_3$ $2y_1 + (y_2^+ - y_2^-) - 3y_3 \geq -6$ $y_1 + (y_2^+ - y_2^-) - 3y_3 \geq -7$ $3y_1 + 6y_2^- - 4y_3 \geq -3$ $y_1, y_3 \geq 0, y_2^-$ işaretini sınırlandırmamış	$y_2^+, y_2^- \geq 0$ olmak üzere $y_2^+ - y_2^- = y_2$ olarak tanımlandığında elde edilen dual model aşağıda gösterilmiştir. $Z_{\text{enk}}^* = 5y_1 + 12y_2 - 15y_3$ $2y_1 + y_2 - 3y_3 \geq -6$ $y_1 + y_2 - 3y_3 \geq -7$ $3y_1 + 6y_2 - 4y_3 \geq -3$ $y_1, y_3 \geq 0, y_2$ işaretini sınırlandırmamış

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI	
Örnek	
Aşağıda verilen DP probleminin (Prima) en iyi çözümünü ve bu problemin dualinin en iyi çözümünü simpleks yöntemi ile bulunuz.	
<u>Amaç fonksiyonu</u>	
$Z_{\text{enk}} = 35x_1 + 30x_2 + 60x_3 + 50x_4 + 27x_5 + 22x_6$	
<u>Kısıtlayıcı fonksiyonlar</u>	
$x_1 + 0x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 1x_5 + 2x_6 \geq 9$	
$0x_1 + 1x_2 + 3x_3 + 1x_4 + 3x_5 + 2x_6 \geq 19$	
$x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 1x_5 + 1x_6 \geq 21$	
<u>Negatif olmama koşulları</u>	
$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$	

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

Çözüm

Primal Problem Simpleks Başlangıç Çözüm Tablosu

TDV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	A_1	A_2	A_3	ÇV
M A_1	1	0	2	2	1	2	-1	0	0	1	0	0	9
M A_2	0	1	3	1	3	2	0	-1	0	0	1	0	19
M A_3	1	2	2	3	1	1	0	0	-1	0	0	1	21
Z_j	2M	3M	7M	6M	5M	5M	-M	-M	-M	M	M	M	49M
$Z_j - C_j$	2M-35	3M-30	7M-60	6M-50	5M-27	5M-22	-M	-M	-M	0	0	0	-

Prof.Dr. Ünal H. ÖZDEN

175

©12 Ekim 2015 Pazartesi

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

Primal Problemin En İyi Çözüm Tablosu

TDV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	A_1	A_2	A_3	ÇV
x_7	-5/3	0	2/3	-8/3	7/3	0	1	-4/3	2/3	-1	4/3	-2/3	7/3
x_2	2/3	1	1/3	5/3	-1/3	0	0	1/3	-2/3	0	-1/3	2/3	23/3
x_6	-1/3	0	4/3	-1/3	5/3	0	0	-2/3	1/3	0	2/3	-1/3	17/3
Z_j	38/3	30	118/3	128/3	80/3	1	0	-14/3	-38/3	0	14/3	38/3	1064/3
$Z_j - C_j$	-67/3	0	-62/3	-22/3	-1/3	0	0	-14/3	-38/3	-M	$\frac{14-3M}{3}$	$\frac{38-3M}{3}$	-

Prof.Dr. Ünal H. ÖZDEN

176

©12 Ekim 2015 Pazartesi

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

ÇözümDual Problem

$$Z'_{\text{enb}} = 9y_1 + 19y_2 + 21y_3$$

$$y_1 + y_3 \leq 35$$

$$y_2 + 2y_3 \leq 30$$

$$2y_1 + 3y_2 + 2y_3 \leq 60$$

$$2y_1 + y_2 + 3y_3 \leq 50$$

$$y_1 + 3y_2 + y_3 \leq 27$$

$$2y_1 + 2y_2 + y_3 \leq 22$$

$$y_1, y_2, y_3 \geq 0$$

Prof.Dr. Ünal H. ÖZDEN

177

©12 Ekim 2015 Pazartesi

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

Çözüm*Dual Problemin Simpleks Başlangıç Çözüm Tablosu*

TDV	y_1	y_2	Y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	y_8	y_9	ÇV
0 y_4	1	0	1	1	0	0	0	0	0	35
0 y_5	0	1	2	0	1	0	0	0	0	30
0 y_6	2	3	2	0	0	1	0	0	0	60
0 y_7	2	1	3	0	0	0	1	0	0	50
0 y_8	1	3	1	0	0	0	0	1	0	27
0 y_9	2	2	1	0	0	0	0	0	1	22
Z_i	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$Z_i - C_i$	-9	-19	-21	0	0	0	0	0	0	-

Prof.Dr. Ünal H. ÖZDEN

178

©12 Ekim 2015 Pazartesi

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI										
Çözüm										
<i>Dual Problemin En İyi Çözüm Tablosu</i>										
TDV	y ₁	y ₂	y ₃	y ₄	y ₅	y ₆	y ₇	y ₈	y ₉	ÇV
0 y ₄	5/3	0	0	1	-2/3	0	0	0	1/3	67/3
21 y ₃	-2/3	0	1	0	2/3	0	0	0	-1/3	38/3
0 y ₆	-2/3	0	0	0	-1/3	1	0	0	-4/3	62/3
0 y ₇	8/3	0	0	0	-5/3	0	1	0	1/3	22/3
0 y ₈	-7/3	0	0	0	1/3	0	0	1	-5/3	1/3
19 y ₂	4/3	1	0	0	-1/3	0	0	0	2/3	14/3
Z _j	34/3	19	21	0	23/3	0	0	0	17/3	1064/3
Z _j - C _j	7/3	0	0	0	23/3	0	0	0	17/3	-

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI			
Çözüm			
<u>Primal ve Dual Problemlerin En İyi Çözümleirinin Karşılaştırılması</u>			
Pirimalin Başlangıç Temel Değişkenleri	A ₁	A ₂	A ₂
Z _j - C _j	-M	(14/3) - M	(38/3) - M
Karşılık Gelen Dual Değişken	y ₁	y ₂	y ₃

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

Benzer inceleme dual problemin en iyi çözüm tablosunun esas alınmasıyla da yapılabilir. İlk olarak dual problemin başlangıç çözümünün temelinde bulunan değişkenler ile bunların en iyi çözüm tablosundaki $Z_j - C_j$ değerlerini belirleyelim.

Dualin Başlangıç Temel Değişkenler	y_4	y_5	y_6	y_7	y_8	y_9
$Z_j - C_j$	0	23/3	0	0	0	17/3
Karşılık Gelen Primal Değişken	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

Duyarlılık Çözümlemesi

- Duyarlılık çözümlemesi modelin bir veya birkaç parametresindeki herhangi bir değişikliğin en iyi çözümde yol açabileceği değişimlerin belirlenmesinde yardımcı olur. Duyarlılık çözümlemesiyle farklı koşullarda en iyi çözümün nasıl olacağı da belirlenebilmektedir. Çıkabilecek değişiklikler şunlardır:
 - 1. Kısıtlayıcı fonksiyonların sağ taraf sabitlerinin değişmesi.
 - 2. Amaç fonksiyonu katsayılarının değişmesi.
 - 3. Kısıtlayıcı fonksiyonların sol taraf katsayılarının değişmesi.
 - 4. Probleme yeni bir değişken eklenmesi.
 - 5. Probleme yeni bir kısıtlayıcı fonksiyon eklenmesi.

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

- Bu değişiklikler sonucunda ortaya çıkabilecek durumlar aşağıda açıklanmıştır.
- 1. En iyi çözüm hiç değişmez. Yani, temel değişkenler ve en iyi değerleri aynı kalır.
- 2. Temel değişkenler aynı kalır fakat değerleri değişimdir.
- 3. En iyi çözüm tamamen değişir.

Prof.Dr. Ünal H. ÖZDEN

183

©12 Ekim 2015 Pazartesi

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

Örnek

$$Z_{\text{enb}} = 3x_1 + 4x_2 + 5x_3$$

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 12$$

$$2x_1 + 4x_2 + 6x_3 \leq 10$$

$$x_1 \leq 2$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Prof.Dr. Ünal H. ÖZDEN

184

©12 Ekim 2015 Pazartesi

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

*Tablo 5.10
Primal Problemin Simpleks Başlangıç Çözüm Tablosu*

TDV	x ₁	x ₂	x ₃	x ₄	x ₅	x ₆	ÇV
0 x ₄	1	2	3	1	0	0	12
0 x ₅	2	4	6	0	1	0	10
0 x ₆	1	0	0	0	0	1	2
Z _j	0	0	0	0	0	0	0
Z _j - C _j	-3	-4	-5	0	0	0	-

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

*Tablo 5.13
Primal Problem En İyi Çözüm Tablosu*

TDV	x ₁	x ₂	x ₃	x ₄	x ₅	x ₆	ÇV
0 x ₄	0	0	0	1	-1/2	0	7
4 x ₂	0	1	3/2	0	1/4	-1/2	3/2
3 x ₁	1	0	0	0	0	1	2
Z _j	3	4	6	0	1	1	12
Z _j - C _j	0	0	1	0	1	1	-

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

- **Özellik1:** Simpleks çözümünün herhangi bir aşamasında temelde bulunan değişkenlerin çözüm (vektörü) değerleri, **B** matrisi ile kısıtlayıcı fonksiyonların sağ taraflarındaki sabitlerin oluşturduğu sütun vektörün (**b**) çarpımına eşittir.

$$\begin{bmatrix} x_4 \\ x_2 \\ x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1/4 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 12 \\ 10 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 3/2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

- Özellik2:** Simpleks çözümün herhangi bir tekrarında, herhangi bir değişkenin tablodaki katsayılarından oluşan sütun vektör, o aşamadaki **B** matrisi ile dikkate alınan değişkenin başlangıç tablosundaki katsayılarından oluşan sütun vektörün çarpımına eşittir.

Bu durumda, sözgelimi x_1 değişken sütununun birinci simpleks tablosundaki katsayıları aşağıdaki gibi hesaplanacaktır.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1/6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Amaç Fonksiyonu Katsayılarındaki Değişmeler

- *Durum 1. Temel değişken vektöründeki değişkenlerin katsayılarındaki değişimler*
- *Durum 2. Temel olmayan değişken vektöründe olmayan değişkenlerin katsayılarındaki değişimler*
- *Durum 3. TDV'de olan ve TDV'de olmayan değişken katsayılarının birlikte değişmesi*

Teknoloji Matrisindeki Değişmeler

- *Durum 1. TDV'de olmayan değişken katsayılarının değişmesi*
- *Durum 2. TDV'deki değişken katsayılarının değişmesi:*
Temel değişkenlere ait teknoloji katsayılarının değişmesi doğrudan **B** matrisini etkiler ve onun değişmesine neden olur. Bu gibi durumlarda problemi yeniden çözmek daha uygun olabilir.

Probleme Yeni Bir Değişken Eklenmesi

- $[B].X_e$

Probleme Yeni Bir Kısıtlayıcı Eklenmesi

- $2x_1 + 3x_2 + 7x_3 \leq 15$

*Tablo 5.18
Primal Problemin Değiştirilmiş En İyi Simpleks Çözüm Tablosu*

TDV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	ÇV
0 x_4	0	0	0	1	-1/2	0	0	7
4 x_2	0	1	3/2	0	1/4	-1/2	0	3/2
3 x_1	1	0	0	0	0	1	0	2
x_7	2	3	7	0	0	0	1	6
Z_j	3	4	6	0	1	1	0	12
$Z_j - C_j$	0	0	1	0	1	1	0	-

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

x_1 , x_2 ve x_4 temelde bulunduklarından, bu değişkenlerin yeni kısıtlayıcı fonksiyonda karşılık bulunan elemanlarının sıfıra eşit olması gereklidir. Dikkat edilirse, x_4 'e karşılık gelen değeri sıfır olmakla birlikte x_1 ve x_2 'ye karşılık gelen değerler sırasıyla 2 ve 3'dür. Bu iki değerin uygun satır işlemleriyle sıfıra dönüştürülmesi gerekmektedir. Bunun için, sırasıyla x_1 değişkeni satır elemanlarının (-2), x_2 değişkeni satır elemanlarının (-3) ile çarpılması ve x_7 değişken satır elemanlarına eklenmesi yeterli olacaktır. Bu işlemin ardından elde edilen tablo aşağıda gösterilmiştir.

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

Tablo 5.19
Primal Problemin Değiştirilmiş En İyi Çözüm Tablosu

TDV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	ÇV
0 x_4	0	0	0	1	-1/2	0	0	7
4 x_2	0	1	3/2	0	1/4	-1/2	0	3/2
3 x_1	1	0	0	0	0	1	0	2
0 x_7	0	0	5/2	0	-3/2	-1/2	1	-5/2
Z_j	3	4	6	0	1	1	0	12
$Z_j - C_i$	0	0	1	0	1	1	0	-

Yukarıdaki tablodan görüldüğü gibi, çözüm en iyi olmakla birlikte temelde bulunan x_7 değişkeninin negatif değerli oluşu çözümün uygun olmadığına işaret etmektedir. Bunun için x_7 temelden çıkartılmalıdır. Dual problem dikkate alındığında, x_5 ve x_6 'nın çözüme girmeye aday değişkenler olduğu anlaşılır. Kural gereği (bkz. dual simpleks yöntem) x_5 'in temele girmesi kararlaştırılacak ve simpleks yöntemin bilinen işlemleriyle yeni en iyi çözüm elde edilecektir.

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

DOĞRUSAL PROGRAMLAMA ULAŞTIRMA PROBLEMLERİ

Prof.Dr. Ünal H. ÖZDEN

Tarihçe ve Tanım

- Doğrusal programlama probleminin özel bir biçimde olan ulaştırma problemi ve çözümü ilk olarak 1941 yılında Frank L. Hitchcock tarafından önerilmiştir, Tjalling C. Koopmans (1947) tarafından geliştirilmiştir. Konu ile ilgili asıl gelişme simpleks yöntemin ulaştırma problemlerine uygulanmasından sonra olmuştur. Ulaştırma probleminin doğrusal programlama problemi biçiminde modellenmesi ve simpleks yöntemle çözülmesi ilk olarak Dantzig tarafından gerçekleştirilmiştir. İkinci Dünya Savaşı sırasında Amerika Birleşik Devletleri'nin askeri faaliyetlerini planlamak amacıyla uygulanan ulaştırma modeli, savaştan sonra da endüstride ulaşım, mal ve hizmet dağıtımının planlanması, işletmelerin kuruluş yeri seçimi, personelin işe yerleştirilmesi gibi hem iktisadi hem de sosyal problemlerin çözümünde yaygın biçimde kullanılmaya başlanmıştır.
- Sunum merkezlerindeki (fabrika, depo vb.) malların istem merkezlerine dağıtımının planlanması **ulaştırma problemi** olarak adlandırılır.

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

Ulaştırma Modellerinin Varsayımları

- DP modellerinin varsayımlarına ek olarak,
1. Probleme konu olan mal ve hizmetlerin aynı birimle açıklanmaları, yani homojen olmaları gereklidir. Bu koşula *homojenlik koşulu* denir.
 2. Belirli sayıdaki sunum merkezinde dağıtılmak üzere bekleyen mal miktarları ile belirli sayıdaki istem merkezlerinin bu mala olan istem miktarlarının kesin olarak bilinmesi gereklidir. Ayrıca sunum miktarları toplamı ile istem miktarları toplamı eşit olmalı veya bu eşitlik kuramsal olarak sağlanmalıdır. Toplam istem ile toplam sunumun eşitliğini ileri süren bu koşula *tutarlılık koşulu* denir. Tutarlılık koşulunun sağlandığı ulaşım problemlerinin *dengeli* veya *standart* oldukları kabul edilir.
 3. Sunum merkezleri ile istem merkezleri arasında aktarma yapılması söz konusu değildir. Bu, malların sunum merkezlerinden istem merkezlerine doğrudan taşınması demektir. Bazı durumlarda malın, bulunduğu kaynak noktalarından aktarılacağı esas noktalara doğrudan taşınması ekonomik olmayabilir. Dağıtım işlemi, malların önce bazı transfer noktalarına daha sonra esas istem merkezlerine nakledilmesi daha ekonomik olabilir. Bu tip ulaşım problemlerine *aktarmalı* veya *konaklamalı ulaşım problemi* denir.
 4. Herhangi bir sunum merkezinden herhangi bir istem merkezine bir birim mal taşımanın yol açtığı maliyetin sabit olması gereklidir. Kısacası, taşıma maliyetleri doğrusal nitelikli amaç fonksiyonunun özelliklerine uymaktadır.

Prof.Dr. Ünal H. ÖZDEN

197

©12 Ekim 2015 Pazartesi

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

Ulaştırma Modellerinin Yapısal Görünümü**1. Amaç Fonksiyonu**

$$Z = C_{11}x_{11} + C_{12}x_{12} + \dots + C_{1n}x_{1n} + C_{21}x_{21} + C_{22}x_{22} + \dots + C_{2n}x_{2n} \\ + \dots + C_{m1}x_{m1} + C_{m2}x_{m2} + \dots + C_{mn}x_{mn}$$

2. Kısıtlayıcı Fonksiyonlar

Arz (Sunum) Kısıtları

$$x_{11} + x_{12} + \dots + x_{1n} = a_1$$

$$x_{21} + x_{22} + \dots + x_{2n} = a_2$$

.....

$$x_{m1} + x_{m2} + \dots + x_{mn} = a_m$$

Talep (İstem) Kısıtları

$$x_{11} + x_{21} + \dots + x_{m1} = b_1$$

$$x_{12} + x_{22} + \dots + x_{m2} = b_2$$

$$x_{1n} + x_{2n} + \dots + x_{mn} = b_n$$

olarak yazılabilir.

m = Sunum merkezi sayısı ($i = 1, 2, \dots, m$)n = İstem merkezi sayısı ($j = 1, 2, \dots, n$) C_{ij} = i sunum merkezinden j istem merkezine bir birim malın taşınması maliyeti x_{ij} = i sunum merkezinden j istem merkezine taşınan mal miktarı a_i = i sunum merkezinin sunum miktarı b_j = j istem merkezinin istem miktarı**3. Negatif Olmama Koşulu**

$$x_{ij} \geq 0 \quad i = 1, 2, \dots, m; \quad j = 1, 2, \dots, n$$

birimde açıklanır.

Prof.Dr. Ünal H. ÖZDEN

198

©12 Ekim 2015 Pazartesi

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI									
Ulaştırma Tablosu									
Tablo 7.1 Ulaştırma Modeli Tablosu									
Sunum Merkezi	İstem Merkezi						Sunum Miktarı a_i		
	İM ₁	İM ₂	İM _j	İM _n			
SM ₁	x_{11} C ₁₁	X ₁₂ C ₁₂	X _{1j} C _{1j}	X _{1n} C _{1n}	a ₁		
SM ₂	X ₂₁ C ₂₁	X ₂₂ C ₂₂	X _{2j} C _{2j}	X _{2n} C _{2n}	a ₂		
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮		
SM _i	X _{i1} C _{i1}	X _{i2} C _{i2}	X _{ij} C _{ij}	X _{in} C _{in}	a _i		
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮		
SM _m	X _{m1} C _{m1}	X _{m2} C _{m2}	X _{mj} C _{mj}	X _{mn} C _{mn}	a _m		
İstem Miktarı b_j	b ₁	b ₂	b _j	b _m	$\sum_{i=1}^n a_i = \sum_{j=1}^m b_j$		

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI									
<ul style="list-style-type: none"> Toplam sunumun toplam isteme eşit olmadığı durumdaki ulaşım modeline <i>dengeli olmayan ulaşım</i> problemi denir. Ulaşım problemlerinin çözümü için önerilen özel yöntemlerin uygulanabilmeleri bu eşitliğin sağlanmasına bağlıdır. Doğrusal programlama ilkelerine göre formüle edilen bir ulaşım problemi, çok sık olarak, hatta her zaman, bir tablo biçiminde sunulur. <i>Ulaşım modeli tablosu</i> veya kısaca <i>ulaşım tablosu</i> adı verilen tablo (bkz. Tablo 7.1) probleme ilgili tüm bilgileri ve malların sunum merkezlerinden istem merkezlerine nasıl taşıdığını açıkça göstermektedir. 									

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

Örnek-1

Örnek 7.1: Güven AŞ değişik yerlerdeki dört fabrikasında deterjan üretmektedir. Satışlarını değişik bölgelerde bulunan dört ana depo ile sağlayan işletme yönetiminin temel sorunu, deterjanın fabrikalardan satış depolarına ulaşımını sağlarken karşılaştığı yüksek tutarlardaki taşıma giderleridir.

Malların fabrikalardan satış depolarına gönderilirken katlanılması gereken birim ulaştırma maliyetleri aşağıdaki gibi belirlenmiştir. Öte yandan, fabrika 1, 2, 3 ve 4'ün aylık üretim kapasiteleri sırasıyla, 50, 200, 150 ve 300 ton'dur. Depoların istemleri, depo 1, 2, 3 ve 4 için sırasıyla 150, 75, 175 ve 300 ton olarak belirlenmiştir. Buna göre,

a. Problemin dengeli olup olmadığını belirtiniz.

b. Ulaştırma tablosunu düzenleyiniz.

c. Problemin matematiksel modelini kurunuz.

Fabrika	D ₁	D ₂	D ₃	D ₄
F ₁	3	5	7	10
F ₂	6	8	13	5
F ₃	4	2	6	7
F ₄	12	9	4	10

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

Çözüm 7.1

Çözüm 7.1: a. Problemin dengeli olup olmadığını belirlemek için, tutarlılık koşulunun sağlanıp sağlanmadığının kontrol edilmesi gereklidir. Bunun için öncelikle, fabrikaların üretim miktarları toplamı (toplam sunum) ile depoların ihtiyaç duydukları ürün miktarları toplamını (toplamlı istem) hesaplayalım.

Toplam sunum = $50 + 200 + 150 + 300 = 700$ ton

Toplam istem = $150 + 75 + 175 + 300 = 700$ ton

Istem-sunum eşitliğinin sağlanması problemin dengeli olduğunu göstermektedir.

b. Düzenlenen ulaştırma modeli tablosu aşağıda gösterilmiştir.

Tablo 7.2
Problem 7.1'in Ulaştırma Modeli Tablosu

Fabrika	Depo				Sunum a _i
	1	2	3	4	
1	3 x ₁₁	5 x ₁₂	7 x ₁₃	10 x ₁₄	50
	x ₂₁	x ₂₂	x ₂₃	x ₂₄	
2	6 x ₃₁	8 x ₃₂	13 x ₃₃	5 x ₃₄	200
	x ₄₁	x ₄₂	x ₄₃	x ₄₄	
3	4 x ₃₁	2 x ₃₂	6 x ₃₃	7 x ₃₄	150
4	12 x ₄₁	9 x ₄₂	4 x ₄₃	10 x ₄₄	300
İstem b _i	150	75	175	300	700 = 700

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

Çözüm 7.1

c. Amaç, en küçük toplam ulaştırma maliyetini belirlemek olduğuna göre,

x_{11} : Fabrika 1'den depo 1'e taşınan deterjan miktarı

x_{12} : Fabrika 1'den depo 2'ye taşınan deterjan miktarı

x_{31} : Fabrika 3'den depo 3'e taşınan deterjan miktarı

...
...

x_{43} : Fabrika 4'den depo 3'e taşınan deterjan miktarı

x_{44} : Fabrika 4'den depo 4'e taşınan deterjan miktarı

olarak tanımlandığında, modelin amaç fonksiyonu aşağıdaki gibi yazılır.

$$Z_{\text{enk}} = 3x_{11} + 5x_{12} + 7x_{13} + 10x_{14} + 6x_{21} + 8x_{22} + 13x_{23}$$

$$+ 5x_{24} + 4x_{31} + 2x_{32} + 6x_{33} + 7x_{34} + 12x_{41} + 9x_{42} + 4x_{43} + 10x_{44}$$

Her bir fabrikadan gönderilecek deterjan miktarı

o fabrikanın üretim miktarına eşit olacağına göre,

$$\left. \begin{array}{l} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 50 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 200 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 150 \\ x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} = 300 \end{array} \right\} \text{Sunum kısıtlayıcıları}$$

Diğer taraftan, her satış deposunun ürün gereksiniminin

tam olarak karşılanması istendiğinden,

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} = 150$$

$$x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} = 75$$

$$x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} = 175$$

$$x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} = 300$$

İstem kısıtlayıcıları

yazılımıyla, kısıtlayıcı fonksiyonların tanımlanması işlemi tamamlanmış olur. Son olarak negatif taşıma olmayacağına göre,

$$x_{ij} \geq 0 \quad (i = 1, 2, 3, 4; \quad j = 1, 2, 3, 4)$$

yazılacak, böylece problem ulaşırma modeli olarak formüllemiş olacaktır.

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

Çözüm Yöntemleri

1. Kuzey-Batı Yöntemi
2. Satır Yaklaşımı
3. Sütun Yaklaşımı
4. Genel Yaklaşım
5. VAM Yöntemi
6. RAM Yöntemi

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

Kuzey-Batı Yöntmi Örnek-2

Örnek 7.2: Bulaşık makinesi üreticisi Alet AŞ'nin değişik yerlerde dört fabrikası vardır. İşletme, satışlarını değişim yerlerdeki dört deposu ile yapmaktadır. İşletme yönetiminin temel sorunu, makineleri depolara en küçük maliyetle taşımaktır. Fabrikaların üretim kapasiteleri, depoların istem miktarları ve birim ulaştırma maliyetleri aşağıdaki ulaşırma tablosunda gösterilmiştir. Başlangıç çözümünü ve bu çözüme ilişkin toplam ulaşırma maliyetini bulunuz.

**Tablo 7.3
Problem 7.2'nin Başlangıç Tablosu**

Fabrika	Depo				Sunum a_i
	1	2	3	4	
1	4	3	4	5	40
2	6	8	5	8	60
3	3	4	5	5	40
4	1	2	3	4	50
İstem b_j	55	25	50	60	190 = 190

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

Çözüm-2

Çözüm 7.2: Ulaşırma problemlerinin modellenmesine ilişkin bir örnek daha olması bakımından önce problemin matematiksel modelini kuralım.

x_{ij} , i ($i = 1, 2, 3, 4$) fabrikasından j ($j = 1, 2, 3, 4$) satış deposuna gönderilen makine sayısını göstersin. Buna göre, amaç fonksiyonu aşağıdaki gibi yazılacaktır.

$$Z_{\text{enk}} = 4x_{11} + 3x_{12} + 4x_{13} + 5x_{14} + 6x_{21} + 8x_{22} + 5x_{23} + 8x_{24} + 3x_{31} + 4x_{32} + 5x_{33} + 5x_{34} + 1x_{41} + 2x_{42} + 3x_{43} + 4x_{44}$$

Kısıtlayıcı fonksiyonlar,

$$\begin{aligned} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} &= 40 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} &= 60 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} &= 40 \\ x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} &= 50 \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} \text{Sunum kısıtlayıcıları}$$

$$\begin{aligned} x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} &= 55 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} &= 25 \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} &= 50 \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} &= 60 \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} \text{İstem kısıtlayıcıları}$$

olarak formüle edilir.

Negatif taşıma söz konusu olmadığına göre,

$$x_{ij} \geq 0 \quad i = 1, 2, 3, 4; \quad j = 1, 2, 3, 4$$

yazılmasıyla model kurulmuş olur.

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

Çözüm-2

Tablo 7.4

**7.2. Problemin Kuzey-Batı Köşesi Yöntemiyle
Belirlenen Başlangıç Çözümü**

Fabrika	Depo				Sunum a_i		
	1	2	3	4			
1	(40)	4	3	4	5	40	
2	(15)	6	(25)	8	(20)	8	60
3		3	4	5	(10)	5	40
4		1	2	3	(50)	4	50
Istem b_j	55	25	50	60	190 = 190		

Çözüme ilişkin toplam maliyetin bulunması için, temel değişken değerlerinin ait oldukları gözelere ilişkin birim taşıma maliyetleri çarpımlarının toplanması gerekir. Buna göre toplam maliyet aşağıdaki gibi hesaplanacaktır.

Fabrika	Depo	Miktar (Adet)	Maliyet (TL)
F_1	D_1	40	$40 \times 4 = 160$
F_2	D_1	15	$15 \times 6 = 90$
F_2	D_2	25	$25 \times 8 = 200$
F_2	D_3	20	$20 \times 5 = 100$
F_3	D_3	30	$30 \times 5 = 150$
F_3	D_4	10	$10 \times 5 = 50$
F_4	D_4	50	$50 \times 4 = 200$
<u>TOPLAM</u>			950

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

Satır Yaklaşımı Örnek-3

Örnek 7.2: Bulaşık makinesi üreticisi Alet AŞ'nın değişik yerlerde dört fabrikası vardır. İşletme, satışlarını değişik yerlerdeki dört deposu ile yapmaktadır. İşletme yönetiminin temel sorunu, makineleri depolara en küçük maliyetle taşımaktır. Fabrikaların üretim kapasiteleri, depoların istem miktarları ve birim ulaştırma maliyetleri aşağıdaki ulaşım tablosunda gösterilmiştir. Başlangıç çözümünü ve bu çözümü ilişkin toplam ulaşım maliyetini bulunuz.

Tablo 7.3
Problem 7.2'nin Başlangıç Tablosu

Fabrika	Depo				Sunum a_i
	1	2	3	4	
1	4	3	4	5	40
2	6	8	5	8	60
3	3	4	5	5	40
4	1	2	3	4	50
Istem b_j	55	25	50	60	190 = 190

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

Çözüm 3

Tablo 7.6
7.2. Problemin Sütur Yaklaşımıyla Elde Edilen Başlangıç Çözümü

Fabrika	Depo				Sunum a_i		
	1	2	3	4			
1	(15)	4	(25)	3	4	5	40
2	(10)	6	8	(50)	5	8	60
3	(30)	3	4	5	(10)	5	40
4		1	2	3	(50)	4	50
İstem b_j	55	25	50	60	190 = 190		

Çözümün toplam maliyeti aşağıdaki gibi hesaplanacaktır.

Fabrika	Depo	Miktar (Adet)	Maliyet (TL)
F ₁	D ₁	15	15 x 4 = 60
F ₁	D ₂	25	25 x 3 = 75
F ₂	D ₁	10	10 x 6 = 60
F ₂	D ₃	50	50 x 5 = 250
F ₃	D ₁	30	30 x 3 = 90
F ₃	D ₄	10	10 x 5 = 50
F ₄	D ₄	50	50 x 4 = 200
TOPLAM			785

Toplam 7 gözeye dağıtım yapıldığından, ulaşılan başlangıç çözümü temel çözümüdür.
Taşıma yapılan (dolu) gözelere karşılık gelen karar değişkenleri ve değerleri şöyledir:

$$x_{11} = 15, x_{12} = 25, x_{21} = 10, x_{23} = 50, x_{31} = 30, x_{34} = 10, x_{44} = 50$$

Bu başlangıç temel uygun çözüme ait maliyetin bulunması için, temel değişken değerlerinin ait oldukları gözelere ilişkin birim taşıma maliyetleriyle çarpımlarının toplanması gereklidir.

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

Sütun Yaklaşımı Örnek-4

Örnek 7.2: Bulaşık makinesi üreticisi Alet AŞ'nın değişik yerlerde dört fabrikası vardır. İşletme, satışlarını değişik yerlerdeki dört deposu ile yapmaktadır. İşletme yönetiminin temel sorunu, makineleri depolara en küçük maliyetle taşımaktır. Fabrikaların üretim kapasiteleri, depoların istem miktarları ve birim ulaştırma maliyetleri aşağıdaki ulaşırma tablosunda gösterilmiştir. Başlangıç çözümünü ve bu çözümü ilişkin toplam ulaşırma maliyetini bulunuz.

Tablo 7.3
Problem 7.2'nin Başlangıç Tablosu

Fabrika	Depo				Sunum a_i
	1	2	3	4	
1	4	3	4	5	40
2	6	8	5	8	60
3	3	4	5	5	40
4	1	2	3	4	50
İstem b_j	55	25	50	60	190 = 190

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

Çözüm 4

Tablo 7.8

7.2. Problemin Sü tun Yaklaşımıyla Bulunan Başlangıç Çözümü

Fabrika	Depo				Sunum a_i	
	1	2	3	4		
1	4	(25)	3	(15)	5	40
2	6	8	(35)	(25)	8	60
3	(5)	3	4	5	(35)	40
4	(50)	1	2	3	4	50
Istem b_j	55	25	50	60	190 = 190	

Tablo 7.8'den görüldüğü gibi ulaşım çözüm temel (temel değişken sayısı = 7 olduğundan) uygun bir çözümüdür. Çözüme ilişkin toplam maliyet aşağıdaki gibi hesaplanmıştır.

Fabrika	Depo	Miktar (Adet)	Maliyet (TL)
F_1	D_2	25	$25 \times 3 = 75$
F_1	D_3	15	$15 \times 4 = 60$
F_2	D_3	35	$35 \times 5 = 175$
F_2	D_4	25	$25 \times 8 = 200$
F_3	D_1	5	$5 \times 3 = 15$
F_3	D_4	35	$35 \times 5 = 175$
F_4	D_1	50	$50 \times 1 = 50$
TOPLAM			750

Prof.Dr. Ünal H. ÖZDEN

211

©12 Ekim 2015 Pazartesi

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

Genel Yaklaşımı Örnek-5

Örnek 7.2: Bulaşık makinesi üreticisi Alet AŞ'nın değişik yerlerde dört fabrikası vardır. İşletme, satışlarını değişik yerlerdeki dört deposu ile yapmaktadır. İşletme yönetiminin temel sorunu, makineleri depolara en küçük maliyetle taşımaktır. Fabrikaların üretim kapasiteleri, depoların istem miktarları ve birim ulaştırma maliyetleri aşağıdaki ulaşım tablosunda gösterilmiştir. Başlangıç çözümünü ve bu çözüme ilişkin toplam ulaşım maliyetini bulunuz.

Tablo 7.3
Problem 7.2'nin Başlangıç Tablosu

Fabrika	Depo				Sunum a_i
	1	2	3	4	
1	4	3	4	5	40
2	6	8	5	8	60
3	3	4	5	5	40
4	1	2	3	4	50
Istem b_j	55	25	50	60	190 = 190

Prof.Dr. Ünal H. ÖZDEN

212

©12 Ekim 2015 Pazartesi

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

Çözüm 5

*Tablo 7.9
7.2. Problemin Genel Yaklaşımla Bulunan Başlangıç Çözümü*

Fabrika	Depo				Sunum a_i
	1	2	3	4	
1	4 (25)	3 (15)	4 (5)	5	40
2	6	8 (35)	5 (25)	8	60
3	5 (3)	4	5 (35)	5	40
4	1 (50)	2	3	4	50
İstem b_j	55	25	50	60	190 = 190

Kolayca kontrol edilebileceği gibi, aynı zamanda uygun olan bu çözüme ilişkin toplam maliyet, önceden olduğu gibi temel değişken değerlerinin kendilerine karşılık gelen birim ulaşırma maliyetlerinin karşılıklı çarpımlarının toplanmasıyla aşağıdaki gibi hesaplanacaktır.

Fabrika	Depo	Miktar (Adet)	Maliyet (TL)
F_1	D_2	25	$25 \times 3 = 75$
F_1	D_3	15	$15 \times 4 = 60$
F_2	D_3	35	$35 \times 5 = 175$
F_2	D_4	25	$25 \times 8 = 200$
F_3	D_1	5	$5 \times 3 = 15$
F_3	D_4	35	$35 \times 5 = 175$
F_4	D_1	50	$50 \times 1 = 50$
TOPLAM			750

Prof.Dr. Ünal H. ÖZDEN

213

©12 Ekim 2015 Pazartesi

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

VAM Yöntemi

Türkçedeki adımı, İngilizce *Vogel's Approximation Method* kelimelerinin ilk harflerinden alan bu yöntem, William R. Vogel tarafından 1958'de ileri sürülmüştür. Yöntemin en önemli özelliği, genellikle en iyi çözüme en yakın hatta en iyi çözümü başlangıçta vermesidir.

Yöntem aşağıda açıklanan aşamaların adım adım izlenmesi ile uygulanır.

1. Birim ulaşırma maliyetlerinin oluşturduğu matrisin her bir satır ve her bir sütunundaki en düşük maliyetli iki C_{ij} maliyet katsayısı saptanır.
2. Birinci adımda belirlenen C_{ij} 'ler arasındaki farklar hesaplanır. Satır C_{ij} 'leri için hesaplanan fark değerleri tabloya eklenen bir ek satır, sütün C_{ij} 'leri için hesaplanan fark değerleri tabloya eklenen bir ek sütuna yazılır. Bu farklar en düşük maliyetli gözenin kullanılmaması durumunda katlanılacak fazla harcamayı, yani bir çeşit cezayı ifade ettiklerinden bunlara birim ceza (penalty) değerleri de denir. Bu nedenle VAM yöntemi *birim penalty yöntemi* olarak da bilinir.
3. İkinci adımda hesaplanan $(m + n)$ fark değerlerinden en büyük olanı saptanır.
4. En büyük değeri farkın ortaya çıktığı satır veya sütunun en düşük maliyetli gözesi belirlenir. Bu göze satır ve sütün koşullarına uygun olarak en yüksek mikardaki dağıtım yapılır. Yapılan bu dağıtım miktarı, ilgili satır ve sütun toplamlarından çıkartılır. Dağıtım yapılan gözenin işaret ettiği istem merkezinin istemi tam olarak karşılanmış ya da sunum merkezinin sunumu bütünüyle dağıtılmış ise, o sunum merkezi veya istem merkezi (duruma göre her ikisi birden) bir sonraki dağıtım işlemesinde devre dışı bırakılır.

Prof.Dr. Ünal H. ÖZDEN

214

©12 Ekim 2015 Pazartesi

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

VAM Yöntemi -devam

5. Dağıtım yapılan satır veya sütunun (veya her ikisinin birden) devre dışı bırakılması ve sunum ile istem merkezlerinin sunum-istem miktarlarının yeniden ayarlanmasıyla yeni bir tablo düzenlenir.

6. Düzenlenen bu yeni tabloda satır veya sütun sayısı bire ininceye degein 1-5 nolu işlemler sırasıyla izlenerek yinelenir.

En büyük fark değerleri birbirine eşit olabilir. Bu durumda, dağıtım işlemi bunlardan herhangi birinin rasgele seçilmesiyle sürdürülebilir. Ancak, bu durumda en iyi çözüme ulaşmak gerekli işlem sayısı artabilir.

Aşağıdaki kurallara uyulması durumunda bu tehlike ortadan kalkar.

- En büyük fark iki ya da daha fazla satırda (ya da sütunda) ortaya çıkarsa, en büyük a_i (ya da b_j) değerli satırındaki (ya da sütundaki) en düşük maliyetli göze seçilir.

- En büyük fark bir satır ve bir sütunda aynı anda ortaya çıkarsa ve söz konusu satır ile sütunun kesiştiği yerdeki gözenin maliyeti en düşük ise dağıtım için bu göze seçilir.

Söz konusu göze iliskin maliyet en düşük değilse, ilgili satır ya da sütunun en düşük maliyetli gözesi seçilir.

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

Örnek 6

Örnek 7.2: Bulaşık makinesi üreticisi Alet AŞ'nın değişik yerlerde dört fabrikası vardır. İşletme, satışlarını değişik yerlerdeki dört deposu ile yapmaktadır. İşletme yönetiminin temel sorunu, makineleri depolara en küçük maliyetle taşımaktır. Fabrikaların üretim kapasiteleri, depoların istem miktarları ve birim ulaştırma maliyetleri aşağıdaki ulaşırma tablosunda gösterilmiştir. Başlangıç çözümünü ve bu çözüme ilişkin toplam ulaşırma maliyetini bulunuz.

*Tablo 7.3
Problem 7.2'nin Başlangıç Tablosu*

Fabrika	Depo				Sunum a_i
	1	2	3	4	
1	4	3	4	5	40
2	6	8	5	8	60
3	3	4	5	5	40
4	1	2	3	4	50
İstem b_j	55	25	50	60	190 = 190

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

Çözüm 6

Tablo 7.10

7.2. Problemin VAM (Birinci Deneme) Çözümü

Fabrika	Depo				Sunum a_i	Satır Farkları
	1	2	3	4		
1	4	3	4	5	40	1
2	6	8	5	8	60	1
3	3	4	5	5	40	1
4	1	2	3	4	50	1
İstem b_j	55	25	50	60	190 = 190	
Sütun Farkları	2	1	1	1		

Tablo 7.11

7.2. Problemin VAM (İkinci Deneme) Çözümü

Fabrika	Depo				Sunum a_i	Satır Farkları
	1	2	3	4		
1	4	3	4	5	40	1
2	6	8	5	8	60	1
3	3	4	5	5	40	1
İstem b_j	5	25	50	60	140 = 140	
Sütun Farkları	1	1	1	0		

Prof.Dr. Ünal H. ÖZDEN

217

©12 Ekim 2015 Pazartesi

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

Çözüm 6

Tablo 7.12

7.2. Problemin VAM (Üçüncü Deneme) Çözümü

Fabrika	Depo				Sunum a_i	Satır Farkları
	1	3	4			
1	4	4	5		15	0
2	6	5	8		60	1
3	5	3	5		40	2
İstem b_j	5	50	60		115 = 115	
Sütun Farkları	1	1	0			

Tablo 7.13

7.2. Problemin VAM (Dördüncü Deneme) Çözümü

Fabrika	Depo		Sunum a_i	Satır Farkları
	3	4		
1	4	5	15	1
2	50	8	60	3
3	5	5	35	0
İstem b_j	50	60	110 = 110	
Sütun Farkları	1	0		

Prof.Dr. Ünal H. ÖZDEN

218

©12 Ekim 2015 Pazartesi

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

Çözüm 6

Tablo 7.14

7.2. Problemin VAM (Beşinci Deneme) Çözümü

Fabrika	Depo				Sunum a_i
	4	15	5	35	
1		4	15		
2		5	10		
3		35	5	35	
İstem b_j	60		60 = 60		

Tablo 7.15

7.2. Problemin VAM Yöntemiyle Bulunan Başlangıç Çözümü

Fabrika	Depo				Sunum a_i
	1	2	3	4	
1	4	25	3	4	5
2	6	8	50	10	8
3	5	3	4	5	35
4	50	1	2	3	4
İstem b_j	55	25	50	60	190 = 190

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

Çözüm 6

Uygun dağıtımlarla hem satır hem de sütun gereklileri karşılandığından, tablodaki çözüm uygundur. Bu uygun çözümde bulunan temel değişkenler ve bu değişkenlerin değerleri: $x_{12} = 25$, $x_{14} = 15$, $x_{23} = 50$, $x_{24} = 10$, $x_{31} = 5$, $x_{34} = 35$ ve $x_{41} = 50$ olarak belirlenmiştir. Temel değişken sayısı 7 olduğundan bu çözüm de, önceki çözümler gibi temel çözüm olup toplam maliyet 720 TL olarak hesaplanmıştır.

Fabrika	Depo	Miktar (Adet)	Maliyet (TL)
F_1	D_2	25	$25 \times 3 = 75$
F_1	D_4	15	$15 \times 5 = 75$
F_2	D_3	50	$50 \times 5 = 250$
F_2	D_4	10	$10 \times 8 = 80$
F_3	D_1	5	$5 \times 3 = 15$
F_3	D_4	35	$35 \times 5 = 175$
F_4	D_1	50	$50 \times 1 = 50$
TOPLAM			720

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

Özet

Aynı problemi, değişik yöntemle çözerek farklı maliyetler hesaplamış bulunuyoruz. Altı farklı yöntemle elde edilen maliyetler aşağıda topluca gösterilmiştir.

<u>Cözüm Yöntemi</u>	<u>Maliyet (TL)</u>
Kuzey-batı köşesi	950
Satır yaklaşımı	785
Sütun yaklaşımı	750
Genel yaklaşım	750
VAM	720

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

En İyi Çözümün Elde Edilmesi

Modi Testi

En iyi çözümün araştırılmasında kullanılan başka bir yaklaşım da göze değiştirme yönteminin geliştirilmiş bir biçimi sayılan *modi yöntemidir*. İki yöntem arasındaki en önemli fark, boş gözelerin değerlendirilmesinde kullandıkları yaklaşımındır. Bilindiği gibi, göze değiştirme yönteminde temele girecek değişkenin belirlenmesi için bütün boş gözelerin gizli maliyetlerinin hesaplanması gerekmektedir. Bunun için boş göze sayısı kadar çevrim oluşturmak gerekmekte bu ise küçük boyutlu problemler de bile çok zaman alıcı ve yorucu olabilmektedir. Esas olarak göze değiştirme yönteminin yukarıda açıklanan sakincasını gidermek amacıyla geliştirilen bu yöntemde, gizli maliyetler çevrim yapılmaksızın hesaplanabilmekte, çevrim ancak çözüm en iyi değilse tek bir boş göze için yapılmaktadır. Bu yolla, en iyi olan çözüme ulaşmada, göze değiştirme yöntemindekinden çok daha az işlem yeterli olmaktadır.

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

Modi Testi

Modi yönteminde yapılması gereken ilk işlem, U_i ve V_j olarak gösterilen dual değişken değerlerinin hesaplanmasıdır. U_i ve V_j değerlerinin hesaplanması, dolu gözelerden yararlanılır. $(U_i + V_j)$ toplamının dolu gözelerdeki C_{ij} katsayısına eşit olması gereklidir. U_i ve V_j olarak $(m + n)$ bilinmeyene karşılık $(m + n - 1)$ temel değişken, dolayısıyla $(m + n - 1)$ denklem vardır. Bilinmeyen sayısı, denklem sayılarından bir fazla olduğu için U_i veya V_j 'lerden keyfi olarak seçilen bir tanesine rasgele bir değer (genellikle sıfır) verip kalanlar hesaplanabilir.

U_i ve V_j değerlerinin belirlenmesinden sonra boş gözelerin gizli maliyetlerinin hesaplanması gereklidir. Gizli maliyetler,

$$d_{ij} = C_{ij} - (U_i + V_j)$$

bağıntısından hesaplanır. Gizli Maliyet için üç olası durum söz konusudur.

- $d_{ij} > 0$ ise, bu gözenin doldurulması toplam maliyeti artıracağından, söz konusu gözenin boş bırakılmasına karar verilir.

- $d_{ij} < 0$ ise, bu gözenin doldurulması toplam maliyeti azaltacağından, hali hazırda boş olan gözenin doldurulmasına karar verilir.

- $d_{ij} = 0$ ise, bu gözenin doldurulmasıyla ulaşılacak toplam maliyet bir önceki toplam maliyete eşit olacağından, alternatif çözümlerden söz edilir.

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

Modi Testi

- Gizli maliyetlerden bir ya da birkaç negatif değerli ise eldeki çözümün en iyi olmadığı kararlaştırılır.
- İlk önce hangi negatif değerli boş gözeye dağıtım yapılması gereğine karar verirken, mutlak değerce en büyük negatif gizli maliyetin hesaplandığı boş gözeden başlamak doğru olur. Boş göze seçiminin tamamlanmasından sonra göze değiştirme yönteminde olduğu gibi, boş göze başlangıç noktası olmak üzere, uygun dolu gözeler kullanılarak kapalı bir çevrim oluşturulur ve gözeler arasında mal aktarmaları yapılarak yeni bir taşıma programı belirlenir.
- Aktarmalardan sonra elde edilen yeni çözümün temel olup olmadığını belirlenmesinden sonra, U_i ve V_j değerleri yeniden hesaplanır. Yukarıdaki işlemler en iyi çözüme ulaşılıncaya deðin tekrarlanır.
- 7.2. problemi VAM yöntemiyle belirlenen başlangıç çözümünün en iyi olup olmadığını bir kez de modi yöntemiyle kontrol edelim. Böylece, hem işlemlerin doğruluðunu kontrol etmiş hem de farklı iki yöntem arasındaki farkı incelemiþ oluruz. Söz konusu çözümün verildiği 7.22 nolu tablodan görüldüğü gibi, F_1D_2 , F_1D_4 , F_2D_3 , F_2D_4 , F_3D_1 , F_3D_4 , F_4D_1 dolu gözelerdir. Bu nedenle, bu gözelerden hareketle dual değişkenlerin (U_i ve V_j) değerlerinin hesaplanması gerekecektir

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

Modi Testi

7.2. Problemin VAM Yöntemiyle Belirlenen Başlangıç Çözümü

Fabrika	Depo				Toplam ai
	V1 = 3	V2 = 3	V3 = 2	V4 = 5	
1 U1 = 0	4 25	3 15	4 15	5 5	40
2 U2 = 3	6 50	8 10	5 8	8 10	60
3 U3 = 0	5 5	4 5	5 25	5 5	40
4 U4 = -2	50 50	1 1	2 3	3 4	50
Istem bi	55	25	50	60	190 = 190

Tablo 7.22 de depo ve fabrika numaralarının altında gösterilen U_i ve V_j değerleri ile gizli maliyetlerin hesaplanmasına ilişkin aritmetik işlemler aşağıda topluca gösterilmiştir. Dual değişkenlerin değerlerini hesaplamak için

$U_i + V_j = C_{ij}$
formülü kullanılır.

U_1 'e sıfır değerini verelim. Buna göre,

1. $U_1 = 0, 0 + V_2 = 3 \Rightarrow V_2 = 3$ olur.
2. $U_1 = 0, 0 + V_4 = 5 \Rightarrow V_4 = 5$ olur.
4. $V_4 = 5, U_2 + 5 = 8 \Rightarrow U_2 = 3$ olur.
3. $U_2 = 3, 3 + V_3 = 5 \Rightarrow V_3 = 2$ olur.
6. $V_4 = 5, U_3 + 5 = 5 \Rightarrow U_3 = 0$ olur.
5. $U_3 = 0, 0 + V_1 = 3 \Rightarrow V_1 = 3$ olur.
7. $V_1 = 3, U_4 + 3 = 1 \Rightarrow U_4 = -2$ olur.

Şimdi de gizli maliyetleri hesaplayalım.

Bos Gözelerin Gizli Maliyetleri:

$$\begin{aligned} F_1D_1: d_{11} &= C_{11} - (U_1 + V_1) = 4 - (0 + 3) = 1 \\ F_1D_3: d_{13} &= C_{13} - (U_1 + V_3) = 4 - (0 + 2) = 2 \\ F_2D_1: d_{21} &= C_{21} - (U_2 + V_1) = 6 - (3 + 3) = 0 \\ F_2D_2: d_{22} &= C_{22} - (U_2 + V_2) = 8 - (3 + 3) = 2 \\ F_3D_2: d_{32} &= C_{32} - (U_3 + V_2) = 4 - (0 + 3) = 1 \\ F_3D_3: d_{33} &= C_{33} - (U_3 + V_3) = 5 - (0 + 2) = 3 \\ F_4D_2: d_{42} &= C_{42} - (U_4 + V_2) = 2 - (-2 + 3) = 1 \\ F_4D_3: d_{43} &= C_{43} - (U_4 + V_3) = 3 - (-2 + 2) = 3 \\ F_4D_4: d_{44} &= C_{44} - (U_4 + V_4) = 4 - (-2 + 5) = 1 \end{aligned}$$

Kolayca kontrol edilebileceğinizde tüm gizli maliyetler ≥ 0 olduğundan, VAM'la ulaşılan başlangıç çözümü problemin en iyi çözümüdür.

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

Ulaştırma Prob. Karşılaşılan Özel Durumlar

- **Bozulma Durumu**
- Bilindiği gibi, ulaşırma problemlerinin herhangi bir yöntemle ulaşılan uygun çözümünde temel değişken sayısı (k), satır ve sütun sayıları toplamının bir eksigine eşitse, başka bir deyişle $k = m + n - 1$ bağıntısı geçerliyse ulaşırın çözüm temel, yani bozuk olmayan bir çözümüdür. Diğer taraftan, bir ulaşırma probleminin başlangıç çözümünden veya en iyi çözüme ulaşma çabalarının herhangi bir adımında temel değişken sayısı ($m + n - 1$)'den farklıysa *bozulma durumu* ortaya çıkmış demektir. Bu duruma iki şekilde rastlanır.
 - 1. Temel değişken sayısı (k), ($m + n - 1$)'den büyüktür. ($k > m + n - 1$) yalnızca başlangıç çözümünde seyrek olarak rastlanır. Bu durumun ortaya çıkmasının nedeni, dağıtımın yanlış yapılması veya problemin yanlış formüle edilmesidir. Bu sorunun üstesinden gelebilmek için modelin ve çözümün kontrol edilmesi gereklidir.
 - 2. Temel değişken sayısı (k), ($m + n - 1$)'den küçüktür. İkinci duruma ($k < m + n - 1$), başlangıç çözümünden veya en iyi çözüme ulaşma sürecinin herhangi bir tekrarında rastlanabilir. Kuşkusuz, her iki durum da bozulma durumudur ve giderilmesi gereklidir. Bozulmayı gidermek için çok basit bir teknik kullanılabilir. Bu teknikin açıklamasından önce bozulmanın nedeni giderilmesi gerektiği konusu üzerinde duralım.

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

Bozulma Durumu Örnek

Örnek 7.3: Kuzey-batı köşesi yöntemiyle belirlenen ve aşağıdaki tabloda gösterilen başlangıç çözümünün en iyi olup olmadığını göze değiştirme ve modi yöntemine göre ayrı ayrı belirleyiniz. Çözüm en iyi değilse en iyi çözümü bulunuz.

Tablo 7.23
Kuzey-Batı Köşesi Yöntemiyle Belirlenen Başlangıç Çözümü

Fabrika	Depo			Sunum a_i
	1	2	3	
1	(30)	2	3	5
2		3	(60)	5
3		3	(20)	6
İstem b_j	30	80	80	190 = 190

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

Bozulma Durumu Örnek

Tablo 7.23
Kuzey-Batı Köşesi Yöntemiyle Belirlenen Başlangıç Çözümü

Fabrika	Depo			Sunum a_i
	1	2	3	
1	(30)	2	(ε)	5
2		3	(60)	5
3		3	(20)	6
İstem b_j	30	80	80	190 = 190

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

Bozulma Durumu Örnek

- Modi Testi Yapılacak

Prof.Dr. Ünal H. ÖZDEN

229

©12 Ekim 2015 Pazartesi

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

Bozulma Durumu Örnek

- Aktarma yapılacak

Prof.Dr. Ünal H. ÖZDEN

230

©12 Ekim 2015 Pazartesi

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

Toplam Arzin Toplam Talepden Büyüktür

Örnek 3.11: Bir firma dört fabrikasında ürettiği ürünleri, üç deposuna taşımaktadır. Fabrikaların aylık üretim kapasiteleri sırasıyla 40, 60, 50 ve 100 birimdir. Depoların aylık depolama kapasiteleri birbirine eşit olup 70 birimdir. Taşıma maliyetleri, $C_{11} = 3$, $C_{12} = 4$, $C_{13} = 10$, $C_{21} = 5$, $C_{22} = 10$, $C_{23} = 8$, $C_{31} = 7$, $C_{32} = 6$, $C_{33} = 2$, $C_{41} = 9$, $C_{42} = 8$, $C_{43} = 3$ olarak verilmiştir.

Kuzey-batı köşesi yöntemiyle başlangıç temel uygun çözümü bulunuz ve elde ettiğiniz çözümün en iyiliğini modi yöntemiyle test ediniz.

Çözüm 3.11:

Tablo 3.24

Fabrika	Depo				Sunum a_i	
	1 $V_1 = 3$	2 $V_2 = 8$	3 $V_3 = 4$	4 (HD) $V_4 = 1$		
1 $U_1 = 0$	(-) 40	-3	(+) 4	10	0	40
2 $U_2 = 2$	30	-5	(+) 10	8	0	60
3 $U_3 = -2$	7	(+) 40	6	2	0	50
4 $U_4 = -1$	9	8	(+) 60	3	(40)	100
İstem b_i	70	70	70	40	250 = 250	

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

Toplam Talebin Toplam Arzdan Büyüktür

Örnek 3.12: Bir firma üç fabrikasında ürettiği ürünlerin dört büyük deposuna taşımaktadır. Fabrikaların haftalık üretim kapasiteleri sırasıyla 100, 60 ve 140 birimdir. Depoların haftalık mal gereksinimleri ise sırasıyla 75, 80, 100 ve 145 birimdir. Taşıma maliyetleri, $C_{11} = 6$, $C_{12} = 9$, $C_{13} = 10$, $C_{14} = 4$, $C_{21} = 3$, $C_{22} = 5$, $C_{23} = 7$, $C_{24} = 9$, $C_{31} = 3$, $C_{32} = 2$, $C_{33} = 10$, $C_{34} = 4$ olarak verilmiştir. Başlangıç tablosunu düzenleyerek VAM'la bulduğunuz başlangıç çözümünü modi yöntemiyle test ediniz. **Çözüm 3.12:**

Tablo 3.26

Fabrika	Depo				Sunum a_i		
	1 $V_1 = 3$	2 $V_2 = 2$	3 $V_3 = 4$	4 $V_4 = 4$			
1 $U_1 = 0$	6	9	10	4	(100)	100	
2 $U_2 = 0$	(60)	3	5	7	9	60	
3 $U_3 = 0$	(15)	3	(80)	2	10	(45)	140
HF $U_4 = -4$	0	0	0	(100)	0	0	100
İstem b_i	75	80	100	145	400 = 400		

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI																																												
Alternatif En İyi Çözümlerin Bulunması																																												
Örnek 3.13: Üç fabrika, dört depolu bir ulaştırma probleminin başlangıç tablosu ve VAM'la elde edilen başlangıç temel uygun çözümü Tablo 3.27'de gösterilmiştir. Bu çözümün en iyi olup olmadığını inceleyerek varsa diğer en iyi çözümleri bulunuz.																																												
Tablo 3.27																																												
<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr> <th rowspan="2">Fabrika</th> <th colspan="4">Depo</th> <th rowspan="2">Sunum a_i</th> <th rowspan="2"></th> </tr> <tr> <th>1 $V_1 = 3$</th> <th>2 $V_2 = 5$</th> <th>3 $V_3 = 6$</th> <th>4 $V_4 = 3$</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>1 $U_1 = 0$</td> <td>3 (-) 75 225</td> <td>-5 (+) 100 100</td> <td>6 (+)</td> <td>7</td> <td>400</td> <td></td> </tr> <tr> <td>2 $U_2 = -1$</td> <td>10 (+)</td> <td>-4 250</td> <td>5 (-)</td> <td>2 100</td> <td>350</td> <td></td> </tr> <tr> <td>3 $U_3 = -2$</td> <td>1 150</td> <td>7 250</td> <td>8 100</td> <td>12</td> <td>150</td> <td></td> </tr> <tr> <td>İstem b_i</td> <td>225</td> <td>225</td> <td>350</td> <td>100</td> <td>900 = 900</td> <td></td> </tr> </tbody> </table>						Fabrika	Depo				Sunum a_i		1 $V_1 = 3$	2 $V_2 = 5$	3 $V_3 = 6$	4 $V_4 = 3$	1 $U_1 = 0$	3 (-) 75 225	-5 (+) 100 100	6 (+)	7	400		2 $U_2 = -1$	10 (+)	-4 250	5 (-)	2 100	350		3 $U_3 = -2$	1 150	7 250	8 100	12	150		İstem b_i	225	225	350	100	900 = 900	
Fabrika	Depo				Sunum a_i																																							
	1 $V_1 = 3$	2 $V_2 = 5$	3 $V_3 = 6$	4 $V_4 = 3$																																								
1 $U_1 = 0$	3 (-) 75 225	-5 (+) 100 100	6 (+)	7	400																																							
2 $U_2 = -1$	10 (+)	-4 250	5 (-)	2 100	350																																							
3 $U_3 = -2$	1 150	7 250	8 100	12	150																																							
İstem b_i	225	225	350	100	900 = 900																																							

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI						
Alternatif En İyi Çözümlerin Bulunması						
Çözüm 3.13: Gizli maliyetlerin hesaplanması sırasında kullanılan U_i ve V_j değerleri Tablo 3.27'de, bu değerlerin kullanılmasıyla d_{ij} değerlerinin hesaplanması işlemleri aşağıda gösterilmiştir.						
$d_{14} = C_{14} - (U_1 + V_4) = 7 - (0 + 3) = 4$ $d_{21} = C_{21} - (U_2 + V_1) = 10 - (-1 + 3) = 8$ $d_{22} = C_{22} - (U_2 + V_2) = 4 - (-1 + 5) = 0$ $d_{32} = C_{32} - (U_3 + V_2) = 7 - (-2 + 6) = 3$ $d_{33} = C_{33} - (U_3 + V_3) = 8 - (-2 + 6) = 4$ $d_{34} = C_{34} - (U_3 + V_4) = 12 - (-2 + 3) = 11$ <p>Bütün d_{ij}'ler ≥ 0 olduğundan çözüm en iyidir. Bu çözümde $x_{11} = 75$, $x_{12} = 225$, $x_{13} = 100$, $x_{23} = 250$, $x_{24} = 100$, $x_{34} = 150$, $Z_{\text{enk}} = 3550$'ye eşittir. Ayrıca $d_{22} = 0$ olduğu için problemin alternatif en iyi çözümü vardır. Alternatif en iyi çözümü bulmak için x_{22} değişkeni temele alınmalıdır. Bunun için (2, 2) gözesinin esas alınmasıyla bir çevrim oluşturulur.</p>						

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

Alternatif En İyi Çözümlerin Bulunması

- En büyükleme amaçlı bir ulaşırma probleminin çözümünde iki yaklaşım izlenebilir. Bu yaklaşımlar aşağıda açıklanmıştır.
- 1. En büyükleme amaçlı bir doğrusal programlama problemi en küçükleme problemi olarak veya bunun karşıtı, en küçükleme amaçlı bir doğrusal programlama problemi en büyükleme problemi olarak çözülebilir. Bunun için, amaç fonksiyonu katsayılarının işaretlerinin değiştirilmesi yeterli olur.
- 2. En büyükleme amaçlı bir ulaşırma problemi, en iyilemenin anlamını değiştirmeksızın de bilinen yöntemlerle ve aynı süreç izlenerek çözülebilir. Bunun için öncelikle, kâr katsayılarından oluşan başlangıç tablosunun düzenlenmesi gereklidir. Daha sonra, başlangıç çözümünün belirlenmesi amacıyla geliştirilen yöntemlerden herhangi birisiyle çözüme başlanır.

Prof.Dr. Ünal H. ÖZDEN

235

©12 Ekim 2015 Pazartesi

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

Alternatif En İyi Çözümlerin Bulunması

- En büyükleme amaçlı ulaşırma problemlerinin çözümü ile en küçükleme amaçlı ulaşırma problemlerinin çözümü arasındaki en önemli fark, dağıtım yapılacak gözelerin belirlenmesinde ortaya çıkmaktadır. En küçükleme problemlerde, en küçük maliyetler esas alınarak çözüme ulaşılırken, en büyükleme problemlerde en yüksek kâr katsayıları esas alınır. Sözelimi, başlangıç çözümü VAM'la elde edilmek istendiğinde, satır ve sütunlara ilişkin farkların hesaplanması en yüksek iki kâr katsayısı dikkate alınır ve bunlar arasındaki farklar hesaplanır. Daha sonra, en yüksek farkın bulunduğu satır ya da sütunun en yüksek kar katsayıyı gözesine dağıtım yapılır. Bu işlem, en küçükleme problemlerinde olduğu gibi, tek bir satır ya da tek bir sütun kalıncaya kadar sürdürülür.
- Elde edilen başlangıç çözümünün en iyi olup olmadığını belirlenmesinde ve buna bağlı olarak en iyi çözümün elde edilmesinde modi veya göze değiştirme yöntemi kullanılabilir. Ancak, problem en büyükleme olduğundan artık hesaplananlar gizli maliyetler değil gizli kârlardır. Bu nedenle, en küçükleme problemindeki durumun tersine, gizli kârların hepsi sıfır ya da negatifse en iyi çözümün elde edildiği kararlaştırılır. Çözüm en iyi değilse işlemler en küçükleme probleminde olduğu gibi aynı sırayla tekrarlanır.

Prof.Dr. Ünal H. ÖZDEN

236

©12 Ekim 2015 Pazartesi

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

DOĞRUSAL PROGRAMLAMA ATAMA PROBLEMLERİ

Prof.Dr. Ünal H. ÖZDEN

Atama Problemleri

- Atama modeli, ulaşırma modelinin basit ve özel bir biçimidir. Ulaşırma problemlerinde olduğu gibi atama problemlerinde de amaç, belirli merkezler arasındaki dağıtım işlemlerinin en uygun biçimde gerçekleştirilmesidir. Ancak, atama probleminin mal taşınması ile doğrudan bir ilişkisi genellikle yoktur. Atama modellerine daha çok işlerin makinelere, işçilerin işlere, uçuşların uçuş hatlarına, kişilerin kişilere vb. atanmalarının programlanmasında başvurulur. Programlama, bir işçi bir işe veya bir makine bir işe atanacak şekilde, yani bire bir eşleme ile gerçekleştirilir.
- Her model gibi atama modeli de bazı varsayımlara dayanmaktadır. Daha önce açıklandığı gibi, ulaşırma probleminde ($m > n$) veya ($m < n$) olabildiği halde atama probleminde ($m = n$) olması gereklidir. Bunun sonucunda, ulaşırma modeli katsayılar (C_{ij}) matrisi kare matris şeklinde ortaya çıkar ve *atama matrisi* (bkz. Tablo 7.44) adıyla anılır. Atama matrisinin kare matris olması bire bir eşlemenin doğal bir sonucudur ve atama modelinin çok önemli bir özelliğidir.
- Tablo 7.44'ün sütunlarını sayıları n olan işler, satırlarını m sayıdaki makineler, elemanlarını ise bire bir eşlemelerin ortaya koyduğu sonuçlar (C_{ij}) oluşturur.

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI							
Atama Tablosu							
Makine	İş						Sunum
	\dot{I}_1	\dot{I}_2	...	\dot{I}_i	...	\dot{I}_n	
M_1	C_{11}	C_{12}	...	C_{1j}	...	C_{1n}	1
M_2	C_{21}	C_{22}	...	C_{2j}	...	C_{2n}	1
.	1
M_i	C_{i1}	C_{i2}	...	C_{ij}	...	C_{in}	1
.	1
M_m	C_{m1}	C_{m2}	...	C_{mj}	...	C_{mn}	1
İstem	1	1	1	1	1	1	$m = n$

$m = n$ koşulunun sağlanmadığı atama modeli *standart olmayan* veya *dengesiz* atama modelleri kapsamına girer. Standart olmayan bir atama probleminin çözülebilmesi için modelin standart biçimde dönüştürülmesi, yani $m = n$ olmasının sağlanması gereklidir. Bunun için, dengesiz bir ulaşırma probleminin dengelenmesinde kullanılan yöntemde benzer bir yöntem kullanılır. Sözgelimi, makine sayısından daha fazla sayıda işe sahip olduğumuzu düşünelim. Bu durumda bazı işler yapılamayacaktır. Bunu engellemek içi modele fazla olan iş sayısı kadar makine eklenmesi gereklidir. Eklenen makinelere karşılık gelen C_{ij} 'ler sıfır kabul edilir. Bunun tersi olarak, makine sayısı fazla ise bu makinelerin görevlendirileceği sayıda işin modele eklenmesi zorunludur.

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI							
Atama Problemlerinin Çözüm Yöntemleri							
Herhangi bir atama problemi, olağanlı tüm atamaların (bire bir eşlemelerin) listelenmesiyle çözülebilir. Ancak bu yaklaşım yalnızca küçük boyutlu problemlerde kullanılabilir. Problemin boyutu büyükçe, listeleyeme çok zor hatta imkansızdır.							
Daha önce açıklandığı gibi esas olarak bir tür ulaşırma problemi olması nedeniyle, herhangi bir atama problemi, ulaşırma problemlerinin klasik çözüm yöntemleriyle ve aynı süreç izlenerek çözülebilir. Ancak, bilinen yöntemlerden hangisi kullanılırsa kullanılınsın, başlangıç çözümü dahil, bütün çözümler bozuk olacaktır.							
Atama problemleri, kendilerine özgü tekniklerle daha az zaman harcayarak ve daha az işlem yapılarak çözülebilir. Burada Macar yöntemi açıklanacaktır.							
Atama problemlerinin çözümünde kullanılan Macar yöntemi Macar matematikçi D. König tarafından formüle edilen sisteme dayanmaktadır. Yöntem, atama matrisinin herhangi bir satır veya sütununun tüm elemanlarına sabit bir sayının eklenmesi veya çıkarılmasının en iyi çözüme etki etmediği esasına dayanır.							

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

Macar Yöntemi

Macar yönteminin atama problemlerinin çözümüne uygulanabilmesi için C_{ij} 'lerin negatif olmaması gereklidir. Yöntem, standart atama matrisinin herhangi bir satır veya sütunun tüm elemanlarına sabit bir sayının eklenmesi veya çıkartılmasının en iyi çözümü değiştirmediği esasına dayanır.

1. Adım: Maliyet matrisinin her bir satırının en küçük değeri, bulunduğu satırın tüm elemanlarından çıkarılır. Bu işlemle elde edilen matrise satırları indirgenmiş matris denir.
 2. Adım: Satır indirgenmiş matrisin her bir sütununun en küçük değeri bulunduğu sütunun tüm elemanlarından çıkarılır. Bu yolla "satırları-sütunları indirgenmiş" bir maliyet (sonuç) matrisi elde edilir.
 3. Adım: İlkinci adımda belirlenen matrisin sıfır değerli elemanlarından geçen en az sayıdaki çizgiler çizilir. Çizgilerinin çizimi konusunda kararsızlığa düşmemek için, çizme işlemine sıfırı en çok olan satır veya sütunlardan başlanması önerilebilir. Koruma çizgisi sayısını matrisin satır/sütun sayısına eşit ise en iyi çözüm elde edilmiş olur. Sıfır değerine sahip gözelere, bire bir olmak koşuluyla, yapılacak atamalar sonunda en iyi çözüme ulaşılır. Çizilen en az sayıdaki çizgilerin sayısı n 'ye eşit değilse dördüncü adıma geçilir.
 4. Adım: Üzerinden çizgi geçmeyen elemanların en küçük değerli olanı belirlenir. Bu elemanın değeri üzerinden çizgi geçmeyen diğer bütün elemanlardan çıkarılır. Aynı değer çizgilerin kesişme noktalarındaki sayılar eklenir. Üzerinden çizgi geçen diğer elemanlar değişmeden kalır. Bu işlemlerden sonra üçüncü adıma dönülür.
- En iyi çözüm bulununcaya kadar üçüncü ve dördüncü adımlar tekrarlanır.

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

Örnek

Örnek 7.10: Bir işletmenin en kısa sürede tamamlamak istediği dört işi ve bu işlerin yapımında kullandığı dört makinesi vardır. Aşağıdaki tabloda, makinelerin işleri tamamlama süreleri saat olarak verilmiştir. İşlerin en kısa toplam sürede tamamlanması istenmektedir. Problemin matematiksel modelini kurunuz.

Makine	İş			
	1	2	3	4
1	20	11	3	6
2	5	9	10	2
3	18	7	4	1
4	10	11	18	6

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

Çözüm

Cözüm 7.10: İşler en kısa sürede tamamlanmak istendiğinden, amaç fonksiyonu aşağıdaki gibi olur.

$$Z_{\text{enk}} = 20x_{11} + 11x_{12} + 3x_{13} + 6x_{14} + 5x_{21} + 9x_{22} + 10x_{23} + 2x_{24} + 18x_{31} + 7x_{32} + 4x_{33} \\ + 1x_{34} + 10x_{41} + 11x_{42} + 18x_{43} + 6x_{44}$$

Her bir makine mutlaka bir işe atanacağından,

$$\left. \begin{array}{l} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 1 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 1 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 1 \\ x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} = 1 \end{array} \right\} \text{Makine Kısıtlayıcıları}$$

yazılabilir.

Öte yandan, her bir işin mutlaka tamamlanması gerekiğinden, iş kısıtlayıcıları aşağıdaki gibi yazılabilecektir.

$$\left. \begin{array}{l} x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} = 1 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} = 1 \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} = 1 \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} = 1 \end{array} \right\} \text{İş Kısıtlayıcıları}$$

Son olarak negatif olmama koşulu, buna bağlı olarak modelin karar değişkenleri için,

$x_{ij} = 1$, i 'inci ($i = 1, 2, 3, 4$) makine j 'inci ($j = 1, 2, 3, 4$) iş için kullanılmışsa

$x_{ij} = 0$, i 'inci ($i = 1, 2, 3, 4$) makine j 'inci ($j = 1, 2, 3, 4$) iş için kullanılmamışsa
yazılmasıyla model formüle edilmiş olur.

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

Örnek 1

Örnek 3.20: Beş makinesi bulunan bir firma beş farklı iş siparişi almıştır. Bu işlerin en kısa sürede tamamlanması istenmektedir. Makinelerin işleri tamamlama süreleri aşağıdaki tabloda verilmiştir.

İşlerin en kısa toplam sürede tamamlanması istenmektedir. İşlerin en kısa sürede tamamlanmasını sağlayacak iş-makine eşleşmesini bulunuz.

Tablo 3.31

İş	Makine					a_i
	1	2	3	4	5	
A	2	4	9	7	10	1
B	4	6	8	2	3	1
C	5	7	9	11	13	1
D	10	9	8	7	6	1
E	5	5	3	4	2	1
b_j	1	1	1	1	1	$5 = 5$

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

Çözüm 1

Çözüm 3.20: Öncelikle her bir satırın en küçük değerli elemanın belirlenmesi gerekmektedir. Satır en küçükleri Tablo 3.31'de koyu basılmışlardır. Her bir satırdaki en küçük değerin bulunduğu satırın diğer elemanlarından çıkartılmasıyla satırları indirgenmiş süre matrisi aşağıdaki gibi elde edilir.

Tablo 3.32

Makine						
İş	1	2	3	4	5	a _i
A	0	2	7	5	8	1
B	2	4	6	0	1	1
C	0	2	4	6	8	1
D	4	3	2	1	0	1
E	3	3	1	2	0	1
b _j	1	1	1	1	1	5 = 5

İkinci olarak, satırları indirgenmiş matrisin her bir sütunundaki en küçük değerli eleman belirlenecek ve bunlar bulundukları sütunun tüm elemanlarından çıkarılacaktır. Sütun en küçükleri satırları indirgenmiş matrisde koyu basılmışlardır. Çıkartma işleminin tamamlanmasıyla elde edilen, satırları ve sütunları indirgenmiş matris Tablo 3.33'de gösterilmiştir.

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

Çözüm 1

Bundan sonra, en iyi atama planına ulaşılıp ulaşılmadığını araştırmak amacıyla, satır-sütün indirgenmiş süre tablosundaki bütün sıfır değerlerinden geçen en az sayıdaki çizgiler çizilecektir.

Tablo 3.33

Makine						
İş	1	2	3	4	5	a _i
A	0	0	6	5	8	1
B	2	2	5	0	1	1
C	0	0	3	6	8	1
D	4	1	1	1	0	1
E	3	1	0	2	0	1
b _j	1	1	1	1	1	5 = 5

Çizilen çizgi sayısı satır/sütun sayısına eşit olduğundan en iyi atama planı elde edilmiştir. En iyi atama planı, Tablo 3.33'de koyu basılmış sıfırların bulunduğu gözelerin dikkate alınmasıyla, aşağıdaki gibi elde edilir.

İş A ↔ Mak. 1, İş B ↔ Mak. 4, İş C ↔ Mak. 2, İş D ↔ Mak. 5, İş E ↔ Mak. 3

En iyi olduğu belirlenen bu plana göre işlerin tamamlanması için gereken en kısa süre aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$Z_{\text{enk}} = C_{A1} + C_{B4} + C_{C2} + C_{D5} + C_{E3} = 2 + 2 + 7 + 6 + 3 = 20 \text{ saat}$$

Gördüldüğü gibi Örnek 3.20'nin en iyi çözümü Macar yönteminin ilk üç adımının uygulanmasıyla belirlenmiştir.

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

Örnek 2

Örnek 3.21: Bir araştırma şirketinin elinde beş proje, bu projelerde görevlendiceği beş araştırmacı vardır. Araştırmacıların projelere göre günlük ücretleri (TL) aşağıdaki tabloda gösterilmiştir. Şirket, araştırmacılarını günlük ücretler toplamını en küçükleyecek biçimde dağıtmak istemektedir. Günlük ücret toplamını en küçükleyecek proje-araştırmacı eşleşmesini bulunuz.

Tablo 3.34

Araştırmacı	Proje				
	P ₁	P ₂	P ₃	P ₄	P ₅
A ₁	2	4	5	6	8
A ₂	3	5	6	4	5
A ₃	6	1	2	3	4
A ₄	5	7	8	9	1
A ₅	2	3	5	9	10

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

Çözüm 3.21: Tablo 3.34'de koyu basılmış en küçük değerlerin ait oldukları satırın tüm elemanlarından çıkartılmasıyla elde edilen satırları indirgenmiş ücret matrisi aşağıda gösterilmiştir.

Tablo 3.35

Araştırmacı	Proje					a _i
	P ₁	P ₂	P ₃	P ₄	P ₅	
A ₁	0	2	3	4	6	1
A ₂	0	2	3	1	2	1
A ₃	5	0	1	2	3	1
A ₄	4	6	7	8	0	1
A ₅	0	1	3	7	8	1
b _j	1	1	1	1	1	5 = 5

Daha fazla sıfır elde etmek için satırları indirgenmiş matrisin her bir sütununun en küçük değerli elemanın (Tablo 3.35'de koyu basılmış) bulunduğu sütununun tüm elemanlarından çıkartılmasıyla elde edilen satırları ve sütunları indirgenmiş matris Tablo 3.36'da gösterilmiştir.

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

Tablo 3.36

Araştırmacı	Proje					a _i
	P ₁	P ₂	P ₃	P ₄	P ₅	
A ₁	0	2	2	4	6	1
A ₂	0	2	2	0	2	1
A ₃	5	0	0	1	3	1
A ₄	4	6	6	7	0	1
A ₅	0	1	2	6	8	1
b _j	1	1	1	1	1	5 = 5

Satırları ve sütunları indirgenmiş matrisin sıfırlarını kapatın koruma çizgileri, yoklama ile Tablo 3.36'daki gibi çizilmiştir. Tablodan görüldüğü gibi, çizilen çizgi sayısı dörde eşittir. Bu durumda, beş atamadan ancak dordu gerçekleştirileceğinden daha çok sıfır oluşturmak için dördüncü adıma geçilmesi gereklidir.

Üzerinden çizgi geçmeyen en küçük değerli eleman 1'dir. Bu en küçük değerin çizgilerin kesim noktalarındaki elemanlara eklenmesi, üzerinden çizgi geçmeyen elemanlardan çıkartılmasıyla daha çok sıfır kapsayan yeni matris Tablo 3.37'deki gibi elde edilir. Tablo 3.37'deki matrisin sıfır değerli elemanlarını kapatın koruma çizgileri yine yoklama ile Tablo 3.37'deki gibi çizilmiştir.

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

Tablo 3.37

Araştırmacı	Proje					a _i
	P ₁	P ₂	P ₃	P ₄	P ₅	
A ₁	0	1	1	2	5	1
A ₂	1	2	2	0	2	1
A ₃	6	0	0	1	3	1
A ₄	5	6	6	7	0	1
A ₅	0	0	1	5	7	1
b _j	1	1	1	1	1	5 = 5

Cizilen çizgi sayısı 5'e eşit olduğundan en iyi çözüm elde edilmiştir. Buna göre, A₁ ↔ P₁, A₂ ↔ P₄, A₃ ↔ P₃, A₄ ↔ P₅, A₅ ↔ P₂ eşlemeleriyle en küçük günlük toplam ücret aşağıdaki gibi hesaplanacaktır.

$$Z_{\text{enk}} = C_{11} + C_{24} + C_{33} + C_{45} + C_{52} = 2 + 4 + 2 + 1 + 3 = 12 \text{ TL}$$

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

Enbüyükleme Amaçlı Atama Problemi Örnek 3

En büykleme amaçlı atama problemlerinin Macar yöntemiyle çözülmesine örnek olmak üzere aşağıdaki problemi ele alalım. Bunun için satır enbüyük değerinden diğer değerler çıkartılır ve daha sonra enküçükleme problem olarak çözülebilir.

Örnek 7.13: Bir pazarlama şirketinin piyasaya süreceği yeni ürünü için 4 farklı bölgede görevlendireceği dört satış elemanı vardır. Görevlendirilecek satış elemanına göre, bölgelerden beklenen satış gelirleri aşağıdaki tabloda verilmiştir. Satışlardan elde edilecek toplam geliri en büyükleyecek dağıtım planını belirleyiniz.

Eleman	Bölge			
	1	2	3	4
1	11	1	5	8
2	9	9	8	1
3	10	3	5	10
4	1	13	12	11

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

Çözüm 3

Once satır enbüyük değerinden diğer satır değerleri çıartılır. Bu aşamadan sonraki işlemler en küçükleme amaçlı atama problemlerinde gerçekleştirilen işlemlerin aynıdır. Bu nedenle yapılan işlemleri açıklamadan tablolar üzerinde göstermekle yetineceğiz.

*Tablo 7.53
Fırsat Kayıpları*

Eleman	Bölge			
	1	2	3	4
1	0	10	6	3
2	0	0	1	8
3	0	7	5	0
4	12	0	1	2

Fırsat kayıpları matrisinin her satırında en az bir sıfır bulunduğuundan satır indirgenmiş matris özgün fırsat kayıpları matrisinin aynıdır. Bu yüzden bu işlem atlanarak sütun indirgeme işlemine geçilir. Sütun indirgeme işleminin gerçekleştirilmesiyle elde edilen satır-sütun indirgemeli matrisli atama tablosu aşağıda gösterilmiştir. Sıfırları kapatma çizgileri aynı tabloda gösterilmiştir.

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

Çözüm 3

**Tablo 7.54
Kapatma Çizgili İndirgenmiş Fırsat Kayıpları**

Eleman	Bölge			
	1	2	3	4
1	0*	10	5	3
2	0	0	0	8
3	0	7	4	0*
4	12	0	0	2

Tablodan görüldüğü gibi bütün sıfırların üzerinden geçen en az sayıdaki çizgilerin sayısı satır ve sütun sayısına eşit olduğundan, bu adımda yapılacak atamalar sonunda ortaya çıkacak çözüm en iyidir. Koyu renk basılmış sıfırı gözelere yapılan bire bir eşlemeler sonucunda elde edilen en iyi atama planı aşağıda verilmiştir.

1'inci eleman, 1'inci bölgeye,

2'inci eleman, 3'üncü bölgeye,

3'üncü eleman, 4'üncü bölgeye,

4'üncü eleman, 2'inci bölgeye,

Bu atama planına göre günlük satış gelininin en büyük değeri aşağıdaki gibi olur.

Toplam Satış geliri = $11 + 8 + 10 + 13 = 42$ TL

Yıldızlı sıfırlara sahip gözelere yapılacak atamalar sonucunda da diğer bir en iyi atama planı elde edilir. İkinci bir en iyi atama planı şöyledir.

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

Aktarmalı Ulaştırma Problemi

Aktarmalı ulaşım modeli, ulaşım modelinin genel biçimidir. Sunum merkezlerinden istem merkezlerinin yanı sıra diğer sunum merkezlerine, ayrıca istem merkezlerinden diğer istem merkezleri ile diğer bütün sunum merkezlerine mal taşınmasının mümkün olduğu durumlarda ortaya çıkar. Ne gerçek bir sunum merkezi ne de gerçek bir istem merkezi olmakla birlikte, diğer merkezlere mal ulaşım amacıyla kendisine mal aktarılan merkezlerin bulunması da mümkündür.

Kısaca açıklamak gerekirse, ulaşım modelinde yalnızca sunum merkezi veya yalnızca istem merkezi olma görevini üstlenmiş bulunan merkezler aktarmalı ulaşım modelinde her iki görevi aynı anda yerine getirirler. Bu yolla, m sunum, n istem merkezi içeren bir ulaşım modeli, $(m+n)$ sunum merkezi, $(m+n)$ istem merkezi bulunan aktarmalı ulaşım modeline dönüşmüştür.

Diğer bütün doğrusal programlama problemleri gibi aktarmalı ulaşım problemleri de, 1. Amaç fonksiyonu, 2. Kısıtlayıcı fonksiyonlar, 3. Negatif olmama koşulu olmak üzere üç temel unsurdan oluşur.

Bir sunum merkezinin toplam sunum kapasitesi, kendi sunum miktarı (a_i) ile buraya diğer merkezlerin istemlerini karşılamak amacıyla gönderilen ürün miktarı toplamına eşittir.

Diğer taraftan, bir istem merkezinin sunumu diğer merkezlerin istemini karşılamak üzere kendisine transfer edilen ürün miktarına eşit olacaktır.

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

Ödev

Aşağıdaki ulaşım problema aktarmalı ulaşım problemi olarak çözünüz.

Üretim Merkezi	Tüketim Merkezi			Sunum a_i
	1	2	3	
1	8	6	9	35
2	9	12	13	50
3	14	9	16	40
İstem b_j	45	60	20	$125 \neq 125$

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI**TAMSAYILI PROGRAMLAMA**

Prof.Dr. Ünal H. ÖZDEN

Tamsayılı Programlama

Doğrusal programmanın bölünebilirlik varsayımlı göz ardı edildiğinde, diğer bütün varsayımlar aynı kalmak koşuluyla, doğrusal programlama tamsayılı doğrusal programlamaya dönüşür. Kisaca tamsayılı programlama, model değişkenlerinden bazılarının veya hepsinin tamsayı değerler alması koşulunu içeren bir programlama türüdür.

Tamamen Tamsayılı Doğrusal Programlama

Bütün değişkenleri tamsayı olan doğrusal programlamaya "tamamen tamsayılı doğrusal programlama" denir. Tamamen tamsayılı programlamaya örnek olmak üzere aşağıdaki modeli göz önünde bulunduralım.

$$Z_{\text{enb}} = 3x_1 + 6x_2$$

$$4x_1 + 3x_2 \leq 10$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

x_1, x_2 tamsayı

Karma Tamsayılı Doğrusal Programlama

Değişkenlerden bazılarının tamsayı değerler alması durumunda "karma tamsayılı doğrusal programlama" söz konusu olur. Sözgelimi, aşağıdaki problemde x_2 tamsayı olmadığından, problem karma tamsayılı doğrusal programlama problemidir.

$$Z_{\text{enb}} = 3x_1 + 2x_2 + 4x_3$$

$$x_1 + x_2 \leq 4$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 6$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

x_1, x_3 tamsayı

Sıfır-1 Programlama

Tamsayılı programlama problemlerinin çoğunda değişkenlerin bir kısmı veya hepsi sıfır veya 1 değeri ile sınırlanır. Bunun nedeni, tamsayı karar değişkeninin (x_i) genellikle bir faaliyetin yapılması ($x_i = 1$) veya yapılmaması ($x_i = 0$) ile ilgili olmasıdır. Bu gibi durumlarda "sıfır-1 programlama" söz konusu olur.

Gevşek Biçim

Tamsayı olma koşulu göz ardı edildiğinde ortaya çıkan programlamaya, tamsayılı doğrusal programmanın "doğrusal programlamaya gevşetilmiş biçimi" veya kısaca "gevşek biçim" denir.

Tamsayılı programmanın en iyi çözümü ile buna ilişkin gevşek biçimin en iyi çözümü arasındaki ilişki tamsayı problemlerinin çözüm sonuçlarının incelenmesi bakımından çok önemlidir. Bu ilişki, "herhangi bir en büykleme amaçlı tamsayılı programmanın amaç fonksiyonunun en iyi değeri, kendisine karşılık gelen doğrusal programmanın amaç fonksiyonunun en iyi değerine eşit veya küçüktür" şeklinde özetlenebilir. (Üst sınır)

Problem en küçükleme amaçlı olduğunda bu ilişki, tamsayılı programlama probleminin en iyi çözüm değeri kendisine karşılık gelen gevşek problemin en iyi çözüm değerine eşit veya ondan büyük olur şeklinde açıklanır. (Alt sınır)

Örnek

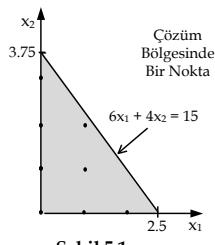
$$Z_{\text{enb}} = 10x_1 + 8x_2$$

$$6x_1 + 4x_2 \leq 15$$

negatif olmama ve tamsayıllılık koşulu,

$x_1, x_2 \geq 0$ ve tamsayı

Problemin grafik çözümü Şekil 5.1'de gösterilmiştir.



Şekil 5.1

Gevşek biçimin uygun çözüm bölgesi Şekil 5.1'deki gri alan olup, en iyi çözüm; $x_1 = 0$, $x_2 = 3.75$, $Z_{\text{enb}} = 30$ olarak belirlenmiştir. Buna göre 30, tamsayılı problemin en iyi çözümü için üst sınırıdır. Şekil 5.1'den görüleceği gibi tamsayılı programmanın çözüm bölgesi doğrusal programmanın çözüm bölgesinden farklıdır.

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

Çözüm

Bu noktaların koordinatlarının belirlenmesiyle tamsayılı probleminin uygun çözüm kümesi,

$$S = \{(0, 0), (0, 1), (0, 2), (0, 3), (1, 0), (2, 0), (1, 1), (1, 2)\}$$

Olarak düzenlenir.

Problemin niteligiine göre, amaç fonksiyonu değerini en büyük veya en küçük yapan nokta en iyi çözüm noktasıdır. Hesaplanan Z değerleri, aşağıda gösterilmiştir.

$$Z(0, 0) = 10(0) + 8(0) = 0$$

$$Z(0, 1) = 10(0) + 8(1) = 8$$

$$Z(0, 2) = 10(0) + 8(2) = 16$$

$$Z(0, 3) = 10(0) + 8(3) = 24$$

$$\mathbf{Z(1, 2) = 10(1) + 8(2) = 26}$$

$$Z(1, 0) = 10(1) + 8(0) = 10$$

$$Z(2, 0) = 10(2) + 8(0) = 20$$

$$Z(1, 1) = 10(1) + 8(1) = 18$$

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

Tamsayılı Programlama Çözüm Yöntemleri

Tamsayılı doğrusal programlama problemlerinin çözümünde kullanılan belli başlı yöntemler; dal-sınır algoritması ile Gomory kesme düzlemi algoritmasıdır. Herhangi bir tamsayılı programmanın gevşek biçiminin en iyi çözümünde tamsayı olması istenen değişkenlerin hepsi tamsayı ise, bu çözüm tamsayılı programmanın da en iyi çözümü olur. Bu durumu aşağıdaki basit problemin çözümü üzerinde gösterelim.

$$Z_{\text{enb}} = 8x_1 + 12x_2$$

$$x_1 + x_2 \leq 3$$

$$x_1, x_2 \geq 0,$$

x_1, x_2 tamsayı

Gevşek problemin en iyi çözümü,

$x_1 = 0, x_2 = 3, Z_{\text{enb}} = 36$ şeklinde belirlenmiştir.

Gevşek problemin uygun çözüm bölgesi

Şekil 5.2'de OAB üçgen alanıyla, tamsayılı problemin çözüm noktaları ise (•) ile gösterilmiştir.



Şekil 5.2

Dal-Sınır Algoritması

Dal-sınır algoritması hem tamamen tamsayılı hem de karma tamsayılı programlama problemlerinin çözümünde kullanılabilen genel bir yaklaşımındır.

Örnek 5.8: Aşağıdaki problemi dal-sınır algoritmasıyla çözünüz .

$$Z_{\text{enb}} = 7x_1 + 3x_2$$

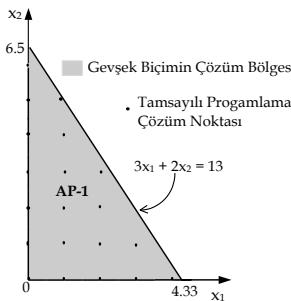
$$3x_1 + 2x_2 \leq 13$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

x_1, x_2 tamsayı

Çözüm 5.8

Çözüm 5.8: Dal-sınır algoritmasının ilk adımı tamsayılı problemi gevsetmek (tamsayı olma koşulunu göz arı etmek) ve bu problemin en iyi çözümünü bulmaktır. Problemin normal doğrusal programlamaya dönüştürülmüş biçimde alt problem 1 (AP-1) olarak isimlendirilir. AP-1'in en iyi çözümünden tamsayı olması istenen değişkenler tamsayı iseler, bu çözüm tamsayı problemin de en iyi çözümü olur. AP-1 için en iyi çözüm, $x_1 = 4.33$, $x_2 = 0$, $Z_{\text{enb}} = 30.333$ (bkz. Şekil 5.3) olarak elde edilmiştir.



Şekil 5.3

AP-1'in en iyi çözümü tamsayılı olmadığından dal sınır algoritmasıyla orijinal problemin en iyi çözümü bulununcaya kadar çözüm bölgesinin düzenlenmesine devam edilir.

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

Çözüm 5.8

Yöntemin yeni adımı, gevşek problemin çözüm bölgesini parçalara ayırmaktır. Bu yolla tamsayılı problemin en iyi çözümünün araştırılacağı alan küçütlülmüş olur. Parçalama işleminde, tamsayı olması istenen ama tamsayı olmayan değişkenlerin seçilmesi esastır. Gevşek biçimim en iyi çözümünde x_2 tamsayı olduğundan, parçalama işlemi için tamsayı olmayan x_1 'in seçilmesi gereklidir. x_1 'in tamsayı olmayan (4.333) çözüm değerine en yakın iki tamsayı 4 ve 5'dir. Tamsayılı programlananın çözüm bölgesindeki her nokta $x_1 \leq 4$ veya $x_1 \geq 5$ koşulunu sağlamalıdır. Bu ikiye ayıra koşulu dallanma kavramının öne çıkışmasına neden olur. $x_1 \leq 4$ veya $x_1 \geq 5$ şeklindeki parçalama işlemi 4.333 değerine ikinci kez rastlama şansını ortadan kaldırır. Kısaca, $x_1 \leq 4$ veya $x_1 \geq 5$ belirlemesiyle, yani x_1 'in dallandırılmasıyla gevşek biçimim çözüm bölgesi iki parçaaya ayrılmış olur. Parçalar aşağıda tanımlanmış olan farklı alt problemlere karşılık gelir.

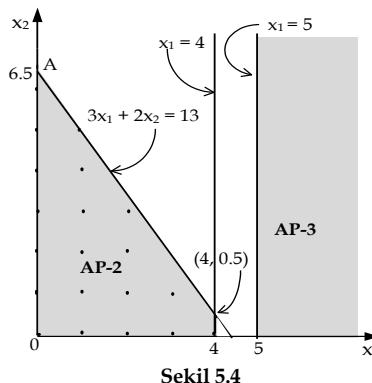
YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

Çözüm 5.8

AP-2: $AP-1 + x_1 \leq 4$

AP-3: $AP-1 + x_1 \geq 5$

Özetle AP-1, biri AP-2 diğeri AP-3 olmak üzere iki probleme yer değiştirmiştir. Ne AP-2 ne de AP-3 $x_1 = 4.333$ değerini içerir. Şekil 5.4'de gösterildiği gibi gevşek biçimim en iyi çözümü bir daha ortaya çıkamaz.



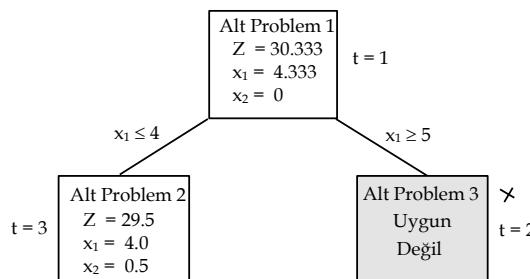
Şekil 5.4

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

Şekilden görüldüğü gibi, AP-3'ün çözüm bölgesi ile AP-1'in çözüm bölgesinin hiçbir ortak noktası olmadığından AP-3'den elde edilecek herhangi bir çözüm uygun olmayacağından, AP-3'den hareketle belirlenecek bir çözüm en iyi olamaz. Bunu ifade etmek için uygun çözümü olmayan alt problemler \times ile işaretlenir (bkz. Şekil 5.5). AP-3'ün dallandırılması tamsayı çözüm hakkında bilgi sağlamayacağından, bundan sonraki işlemlerde AP-3'ün dikkate alınmasına gerek yoktur. AP-2'ye gelmem. AP-2'nin en iyi çözümü; $x_1 = 4$, $x_2 = 0.5$ ve $Z_{\text{enb}} = 29.5$ olarak belirlenmiştir.

Şu ana kadar yapılanlar Şekil 5.5'de özetlenmiştir. Görüldüğü gibi her bir alt probleme bir düğüm, alt problem yaratmada kullanılan her bir kısıtlayıcıya bir dal karşılık gelmektedir. Bir alt problemi diğerinden ayıran kısıtlayıcı, ilgili alt problemler arasındaki dal üzerine yazılmaktadır. Ayrıca alt problemlerin hangi sırada çözüldükleri düğümlerin yan taraflarına $t = \text{sıra no}$ şeklinde belirtilmektedir.

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI



Şekil 5.5

AP-2'nin en iyi çözümünde; x_2 tamsayı olmadığından, x_2 dallandırma değişkeni olur. Dallandırma ile AP-2'nin uygun çözüm bölgesi, $x_2 \leq 0$ ve $x_2 \geq 1$ noktalarını kapsayan iki bölgeye ayrıılır.

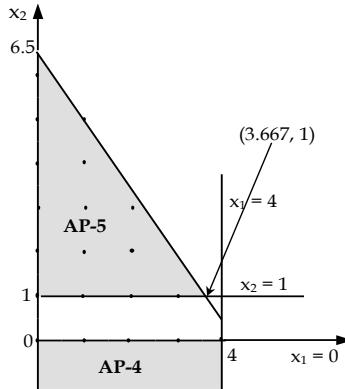
Bu yolla yaratılan yeni problemler (AP-4 ve AP-5) aşağıda ve bunların çözüm bölgeleri Şekil 5.6'da gösterilmiştir.

$$\text{AP-4: } \text{AP-1} + x_1 \leq 4 + x_2 \leq 0 = \text{AP-2} + x_2 \leq 0$$

$$\text{AP-5: } \text{AP-1} + x_1 \leq 4 + x_2 \geq 1 = \text{AP-2} + x_2 \geq 1$$

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

Çözülmemiş problemler AP-4 ile AP-5'dir. Çözüm için en yeni olan AP-5 seçilecektir.

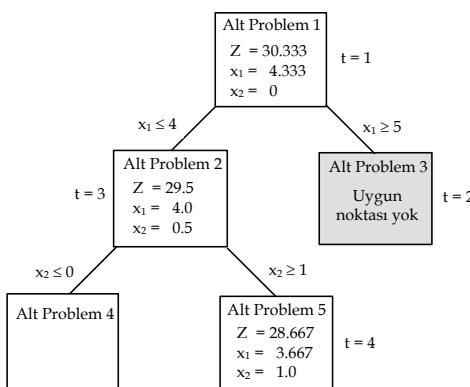


Şekil 5.6

AP-5'in en iyi çözümü; $x_1 = 3.667$, $x_2 = 1$ ve $Z_{\text{enb}} = 28.667$ 'dir.

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

Alt problemler ve çözüm sonuçları Şekil 5.7'de gösterilmiştir.



Şekil 5.7

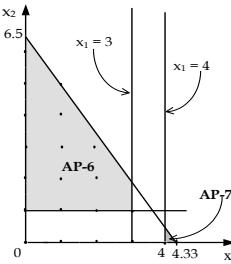
AP-5'in çözümünde x_1 tamsayı olmadığından, ($x_1 = 3.667$) AP-4'ü çözmeden önce x_1 dallandırılır. $x_1 \leq 3$ 'le belirlenen AP-6 ve $x_1 \geq 4$ 'le belirlenen AP-7 aşağıda gösterilmiştir.

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

$$AP-6: AP-1 + x_1 \leq 4 + x_2 \geq 1 + x_1 \leq 3 = AP-5 + x_1 \leq 3$$

$$AP-7: AP-1 + x_1 \leq 4 + x_2 \geq 1 + x_1 \geq 4 = AP-5 + x_1 \geq 4$$

AP-6 ve AP-7'nin uygun çözüm bölgeleri Şekil 5.8'de gösterildiği gibidir.



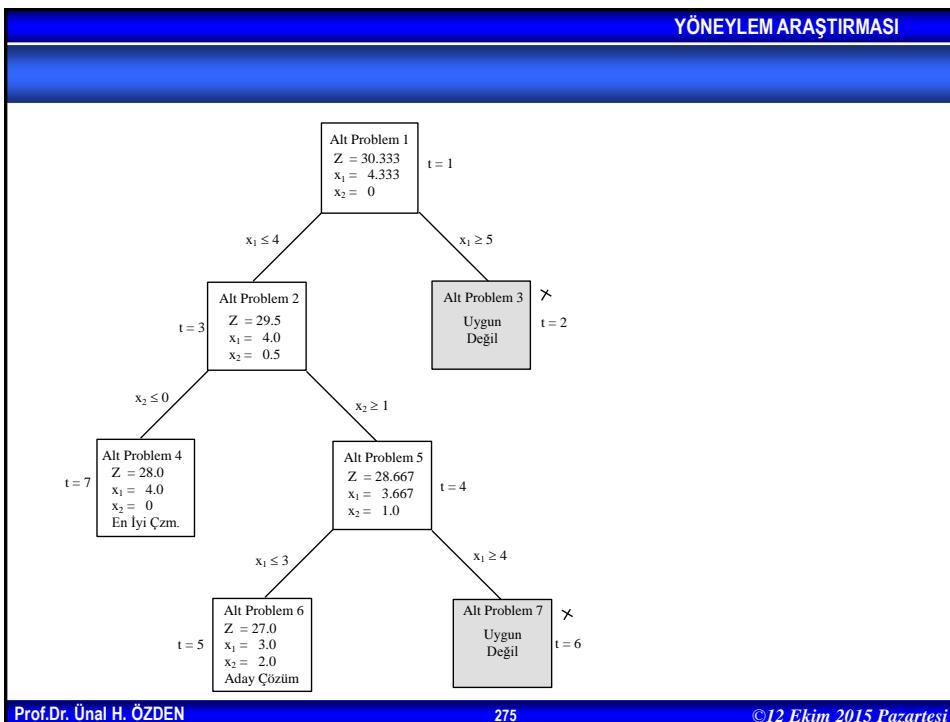
Şekil 5.8

İkisi yeni (AP-6 ve AP-7), diğeri önceden tanımlanmış ve hala çözülmemiş olan (AP-4) üç alt problem vardır. Yukarıda açıklandığı gibi alt problemlerin çözümüne en yeni olandan başlanır. En yeni olanlar arasından seçim rastgele yapılır. Biz AP-6'yi seçlim. AP-6'nın en iyi çözümü $x_1 = 3$, $x_2 = 2$ ve $Z_{\text{enb}} = 27$ olarak belirlenmiştir (bkz. Şekil 5.9). Çözümde değişkenler tamsayı olduklarından AP-6'dan sağlanan çözüm tamsayı problemi en iyi çözümü olmaya adaydır. Z' nin 27 olarak belirlenen değeri, bundan sonra çözülecek alt problemlerin Z değerleri için bir alt sınır oluşturur. Yani, bu aşamadan sonra elde edilecek bir çözümün en iyi olabilmesi için Z değeri en az 27'ye eşit olmalıdır.

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

Çözülmemiş iki alt problemin daha bulunduğu bu aşamada, son giren ilk çıkış kuralı doğrultusunda, AP-7 seçilmelidir. AP-7'nin çözümü uygun olmadığından, çözülmemiş tek alt problem olan AP-4'e geçilir. AP-4'ün en iyi çözümü $x_1 = 4$, $x_2 = 0$ ve $Z_{\text{enb}} = 28$ olarak belirlenmiştir. Bu çözüm de (değişkenler tamsayı olduğundan) tamsayılı problemin en iyi çözümü olmaya adaydır. Ayrıca AP-4 için belirlenen $Z = 28$ değeri AP-6 için belirlenen çözümün en iyi olmadığını işaret etmektedir. İki aday çözümün belirlendiği bu problemde en büyük Z değerini veren çözüm AP-4'ün çözümüdür.

Tüm alt problemler ve çözümleri Şekil 5.9'da özetlenmiştir.



YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

Kesme Düzlemi Algoritması

Tamsayılı programlama problemlerinin çözümünde kullanılan diğer bir teknik kesme düzlemi algoritmasıdır. Dal-sınır algoritmasında olduğu gibi, kesme düzlemi algoritması uygulamasına da tamsayılı problemin gevşetilmiş biçiminin en iyi çözümüyle başlanır. Bu en iyi çözümde, tamsayı olması istenen değişkenler tamsayı iseler tamsayılı problem çözülmüş olur. Gevşek problemin en iyi çözümü tamsayılı programlamanın en iyi çözümü olma özelliğini taşımiyorsa, kesme düzlemi algoritması uygulamasına geçilebilir. Kesme düzlemi algoritmasında da, dal-sınır algoritmasında olduğu gibi, tekrarlı bir şekilde özel kısıtlayıcılar ekleyerek çözüm uzayında gerekli düzeltmeler yapılır. Özel kısıtlayıcı ekleme işlemi tamsayı olma koşulunu gerçekleyecek bir en iyi çözüme ulaşılıncaya deðin sürdürülür.

Prof.Dr. Ünal H. ÖZDEN **276** **©12 Ekim 2015 Pazartesi**

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

Örnek 5.11

Kesme düzlemi algoritmasının nasıl kullanılacağını dal-sınır yöntemi ile çözülen örnek 5.8'deki problem üzerinde açıklayalım.

Örnek 5.11: Aşağıdaki problemi kesme düzlemi algoritmasıyla çözünüz.

$$Z_{\text{enb}} = 7x_1 + 3x_2$$

$$2x_1 + x_2 \leq 9$$

$$3x_1 + 2x_2 \leq 13$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

x_1, x_2 tamsayı

Prof.Dr. Ünal H. ÖZDEN

277

©12 Ekim 2015 Pazartesi

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

Çözüm 5.11

Çözüm 5.11: Kesme düzlemi algoritması klasik doğrusal programlama probleminin simpleks yöntemle elde edilen en iyi çözüm tablosundan işe başlar. Tamsayı olma koşulunun göz ardı edilmesiyle belirlenen gevşek problemin en iyi çözümünün yer aldığı simpleks çözüm tablosu aşağıda gösterilmiştir.

Tablo 5.10

TDV	x_1	x_2	S_1	S_2	$\bar{C}V$
S_1	0	-0.333	1	-0.667	0.333
x_1	1	0.667	0	0.333	4.333
Z_j	7	4.669	0	2.331	30.333
$Z_j - C_j$	0	1.669	0	2.331	-

Elde edilen en iyi çözümde, $x_2 (= 0)$ tamsayı olmakla birlikte, $x_1 (= 4.333)$ tamsayı olmadığından bu çözüm aranan en iyi çözüm olamaz. Tamsayılı programlanmanın en iyi çözümü için ek bir kısıtlayıcı koşul yaratılması gereklidir. Bunun için öncelikle tamsayı olması istenen ancak çözüm değeri tamsayı olmayan değişken(ler) belirlenir. Birden fazla değişken arasından seçim yapılacak olması durumunda, kesirli kısmı en büyük olan değişkenin seçilmesi uygun olur.

Prof.Dr. Ünal H. ÖZDEN

278

©12 Ekim 2015 Pazartesi

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

Çözüm 5.11

Burada yalnızca x_1 değişkeni temelde bulunduğundan, bu değişkene ilişkin kısıtlayıcı koşul yaratılacağı açıklar. Tablo 5.10'daki sonuç değerlerinden yaratılan denklem aşağıda gösterilmiştir.

$$(1)x_1 + (0.667)x_2 + (0)S_1 + (0.333)S_2 = 4.333$$

Bu kısıt,

$$(1 + 0)x_1 + (0 + 0.667)x_2 + (0)S_1 + (0 + 0.333)S_2 = 4 + 0.333$$

veya

$$(1 + 0)x_1 + (0)x_2 + (0.667)x_2 + (0)S_1 + (0)S_2 + (0.333)S_2 = 4 + 0.333$$

Şekilde yazılabilir.

Katsayıları tamsayı olan bütün terimlerin eşitliğin sol tarafında, diğerlerinin eşitliğin sağ tarafında gösterilmesiyle ulaşılan eşitlik aşağıda gösterilmiştir.

$$(1)x_1 + (0)x_2 + (0)S_1 + (0)S_2 - 4 = 0.333 - (0.667)x_2 - (0.333)S_2 \quad 5.7$$

5.7'nin sağ tarafı için,

$$0.333 - (0.667)x_2 - (0.333)S_2 \leq 0 \quad 5.8$$

yazılabilir.

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

Kesme

5.8 ile açıklanan fonksiyona "kesme" denir. Kesme düzlemi algoritmasının esasını oluşturan kesmenin iki önemli özelliği aşağıda açıklanmıştır.

1. Tamsayılı programlama için uygun olan bir nokta kesmeyi sağlar
2. Gevşek biçim için en iyi olduğu belirlenen nokta kesmeyi sağlamaz.

Bu iki özelliğinden dolayı bir kesme, gevşek problemin en iyi çözümünü dışta bırakırken, tamsayılı programlanmanın uygun çözümlerine dokunmaz. Kesme oluşturmada kullanılan değişkenin tamsayıya ulaşırılabilmesi için kesmenin, gevşek biçim'in en iyi çözümünün bulunduğu simpleks tablosuna yeni bir kısıtlayıcı olarak eklenmesi gereklidir. Bu eklemeden sonra simpleks yöntemin klasik işlemleriyle tamsayı en iyi çözüm elde edildiğinde, problem çözülmüş olur. Kesme eklenmesiyle düzenlenen problemin en iyi çözümünde hala tamsayı olmayan değişken var ise, yeni bir kesme tanımlanır. Bu işlemler istenen çözüme ulaşıcaya kadar tekrarlanır.

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

Çözüm 5.11

Kesmenin eklenmesiyle elde edilen simpleks çözüm tablosu aşağıda gösterilmiştir.

Tablo 5.11

TDV	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	ÇV
S_1	0	-0.333	1	-0.667	0	0.333
x_1	1	0.667	0	0.333	0	4.333
S_3	0	-0.667	0	-0.333	1	-0.333
Z_j	7	4.669	0	2.331	0	30.333
$Z_j - C_j$	0	1.669	0	2.331	0	-

Tablo 5.11'den görüldüğü gibi eklenen kesme çözümün en iyi olma olmasını (tüm $Z_j - C_j \geq 0$) etkilememiştir. Ancak, S_3 'ün negatif olması çözümün uygun olmamasına yol açmıştır. Uygun çözüm için dual simpleks yöntem uygulanmalıdır. Dual simpleks yöntemin değişken seçimi kuralına göre S_3 temeli terkedeecek, en küçük oran veren x_2 girecektir. Simpleks çözümün ardışık işlemleriyle oluşturulan tablo aşağıda gösterilmiştir.

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

Çözüm 5.11**Tablo 5.12**

TDV	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	ÇV
S_1	0	0	1	-0.501	-0.499	0.499
x_1	1	0	0	0	0.999	4.0
x_2	0	1	0	0.499	-1.499	0.499
Z_j	7	3	0	1.497	2.496	29.497
$Z_j - C_j$	0	0	0	1.497	2.496	-

Tablo 5.12'deki çözüm hem en iyi hem de uygun olmakla birlikte $x_2 = 0.5$ olduğundan, tamsayılı değildir. x_2 'nin esas alınmasıyla yeni bir kesme tanımlanması zorunludur.

Kesmenin oluşturulması ve çözüm için uygun şeke dönüştürülmesi ile ilgili işlemler aşağıda gösterilmiştir.

$$(0)x_1 + (1)x_2 + (0)S_1 + (0.499)S_2 + (-1.499)S_3 = 0.499$$

$$(0.499)S_2 + (0.501)S_3 = 0.499$$

$$(0.499) - (0.499)S_2 - (0.501)S_3 \leq 0$$

$$(-0.499)S_2 - (0.501)S_3 \leq -0.499$$

$$(-0.499)S_2 - (0.501)S_3 + (1)S_4 = -0.499$$

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

Çözüm 5.11

Bu kısıtlayıcı koşulun en iyi çözüm tablosuna eklenmesiyle yeni çözüm tablosu aşağıdaki gibi elde edilir.

Tablo 5.13

TDV	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	S_4	ÇV
S_1	0	0	1	-0.501	-0.499	0	0.499
x_1	1	0	0	0	0.999	0	4.0
x_2	0	1	0	0.499	-1.499	0	0.499
S_4	0	0	0	-0.499	-0.501	1	-0.499
Z_j	7	3	0	1.497	2.499	0	29.497
$Z_j - C_j$	0	0	0	1.497	2.499	0	-

Tablo 5.13'den görüldüğü gibi çözüm en iyi olmakla birlikte uygun değildir. Negatif çözüm değerli S_4 'ün temelden çıkması, yerine mutlak değerce en küçük oranı veren S_2 'nin girmesi gereklidir. Gerekli işlemlerden sonra aşağıdaki tabloda gösterilen yeni çözüme ulaşılır.

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

Çözüm 5.11**Tablo 5.14**

TDV	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	S_4	ÇV
S_1	0	0	1	0	0	-1	0.999
x_1	1	0	0	0	0.999	0	4.0
x_2	0	1	0	0	-1.998	0.998	0
S_2	0	0	0	1	1.0	-2	1.0
Z_j	7	3	0	0	0.999	2.994	28.0
$Z_j - C_j$	0	0	0	0	0.999	2.994	-

Tablo 5.14'de sunulan çözümde x_1 ve x_2 tamsayı bulunmuşlardır. Böylece tamsayı çözüme ulaşılmıştır. Kesme düzlemi algoritması ile ulaşılan çözümde, $x_1 = 4$, $x_2 = 0$, $Z_{\text{enb}} = 28$ dir. Böylece dal-sınır yöntemi ve kesme düzlemi algoritması çözüm sonuçları aynı olmaktadır.

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

Hangi Yöntem Kullanılmalı?

Dal-sınır ve kesme düzlemi algoritmalarının hangisinin tercih edileceği konusunda genel kabul görmüş bir kanı olmadığını belirtmeliyiz. İki yöntemden hiçbiri, sürekli daha iyi (az işlem, kısa zaman) sonuç vermemektedir. Yine de deneyimler, dal-sınır algoritmasının daha başarılı olduğunu göstermektedir.

Prof.Dr. Ünal H. ÖZDEN

285

©12 Ekim 2015 Pazartesi

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

KARAR KURAMI

Prof.Dr. Ünal H. ÖZDEN

Prof.Dr. Ünal H. ÖZDEN

286

©12 Ekim 2015 Pazartesi

Karar Kuramı

Karar kuramı, karar vericiye karar alma ve karar sürecini geliştirme konularında yol gösteren bir yaklaşımdır. Söz konusu yaklaşım, karar verilecek duruma ilişkin bilgi miktarına göre üç başlık altında incelenir.

- a. Belirlilik durumunda karar alma
- b. Risk durumunda karar alma
- c. Belirsizlik durumunda karar alma

a. Belirlilik durumunda karar alma

Belirlilik durumunda karar almada, karar vericinin aralarından seçim yapacağı karar seçeneklerine ilişkin sonuç değerleri ile olayın yapısılarındaki bilgisinin eksiksiz olduğu varsayılar. Doğal olarak en iyi sonucu verecek olan alternatif seçilir. Doğrusal programlama belirlilik durumunda karar alma probleminin bir örneğidir.

Örnek: Bunun için beslenme gereksinmemizi en düşük maliyetle karşılayacak besin maddeleri miktarlarını belirlemek istediğimizi düşünelim. Besin maddelerinin birim maliyetleri (C_j) sabit sayılar olsun. j ürünü tüketim miktarı x_j , değeri bilinen bir sabit sayı olarak kabul edildiğinde, j ürününün maliyete olan katkısı $C_j x_j$ de sabit bir sayı olur.

b. Risk durumunda karar alma

Risk durumunda problemin seçeneklerine ilişkin değerler ve olayın yapısı olasılıklar ile açıklanırken, belirsizlik durumunda sonuç değerleri bir ölçüde bilinse de olayın yapısına ilişkin olasılıklar hakkında hiçbir bilgi edinilememektedir. Özetle, "belirlilik" ve "belirsizlik" verilerle ilgili bilgi derecesi bakımından iki aşırı ucu temsil ederken, "risk" bu iki uç arasında bulunur.

Örnek: Risk ve belirsizlik durumlarını açıklamak için beslenme problemi örneğine dönelim. Risk durumunda maliyet katsayısı C_j sabit sayı olma özelliğini yitirir ve kesin değeri bilinmeyen ancak, istendiğinde değeri ilgili olasılık yoğunluk fonksiyonu cinsinden açıklanabilen bir rasgele değişken olur. Buna göre C_j , olasılık yoğunluk fonksiyonu $f(C_j)$ ile gösterilen bir rasgele değişken olarak tanımlanabilir. Bu durumda, kendisine ait bir olasılık yoğunluk fonksiyonu tanımlanmaksızın, C_j hakkında konuşmak fazla anlamlı olmaz. Bunun sonucunda, x_j 'nin belirli bir değeri için j 'inci değişkenin kara olan katkısı $C_j x_j$ 'de kesin değeri bilinmeyen bir rasgele değişken olur.

c. Belirsizlik durumunda karar alma

- Belirsizlik durumunda ise, $f(C_j)$ olasılık yoğunluk fonksiyonu bilinmez veya belirlenemez. Ancak, bu konudaki bilgi eksikliği problem hakkında hiçbir bilgi yoktur şeklinde yorumlanmamalıdır. Sözgelimi, karar verici C_j 'nin değerlerinden birine eşit olduğunu bilebilir ancak, bu bilgi duruma ilişkin olasılıkların belirlenmesinde yetersiz kalır. Bu durum belirsizlik ortamında karar alma durumudur. Karar probleminin nasıl formüle edileceği ve çözüleceği doğrudan doğruya karar verenin problemin bileşenleri hakkındaki bilgi derecesine bağlıdır.

Karşılaştırma

Belirlilik durumunda evrensel biçimde kabul görmüş karar alma ölçütü, kârin en büyüğlenmesi veya maliyetin en küçüğlenmesi iken, belirsizlik ve risk durumlarında karar almada değişik ölçütler söz konusu olur. Sözgelimi, risk ortamında karar almada ortalama (beklenen) kârin en büyüğlenmesi karar ölçüyü olarak kabul edilebilirse de bu ölçüt bütün durumlar için uygun olmayabilir.

Karar Analizinin Temel Adımları

- Sorunun tanımlanması
- Tüm olası seçeneklerin listelenmesi
- KV'nin kontrolunda olmayan / doğanın sunduğu tüm olası olayların listelenmesi
- Her seçeneğin her olay için elde edeceği sonuçları gösteren karar tablosunun oluşturulması
- Bir karar modelinin seçilmesi (doğa durumuna göre)
- Modelin uygulanması ve bir seçeneğin seçilerek karar verilmesi

Karar Problemi

Birden fazla olay ve birden fazla karar seçeneğinin (eylem biçimi, strateji) bulunması, sistemin davranış ölçüğünün her bir stratejiye göre farklı değer alması ve bu değerlerin bilinmemesi durumundaki bir probleme "karar problemi" denir.

Karar Probleminin Ortak Özellikleri

- *Karar Verici*: Sisteme maksadına göre hedefler koyan, bu hedeflere ulaşmak için amaçlar, stratejiler ve taktikler tanımlayan, bu tanımlar uyarınca sistemin davranışlarını planlayan, örgütleyen, denetleyen, sapmalar karşısında gerekli düzenlemeyi yapan birey ya da topluluğa karar verici denir.
- *Strateji (Eylem Biçimi)*: Karar vericinin amaç veya amaçlarına ulaşmasını sağlayacak değişik yollar veya hareket tarzlarının her birine strateji veya eylem biçimi denir. Stratejilerin belirlenmesi ve tanımlanması karar vericinin en önemli görevlerindendir. Stratejiler karar vericinin kontrolünde olan faktörlerdir.
- *Olay (Doğal Durum)*: Karar vericinin davranışını etkileyen ve alabileceği değerlerde karar vericinin hiçbir etkisi olmayan faktörlerdir. Olaylar, karar vericinin içinde bulunduğu karar ortamını oluştururlar. Sayıları ne olursa olsun gelecekte yalnızca bir olayın gerçekleşeceği unutulmamalıdır.
- *Sonuç*: Her bir strateji ve olay bileşimi sonucu ortaya çıkan değerdir. Sonuç değerlerine ödeme, yarar veya kayıp denir ve bunlar genellikle parasal değer cinsinden açıklanır.

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

Karar Matrisi

- Risk veya belirsizlik ortamındaki bir karar probleminin matris biçiminde gösterilmesi, problemin değerlendirilmesi ve çözülmesinde büyük kolaylıklar sağlar. Alternatif stratejiler, olası olaylar ve sonuç değerlerinden oluşan matrise "karar matrisi" denir. Karar matrisi kavramı son derece genel olup, bunun yerine sonuç, kazanç, ödeme veya kâr-zarar matrisi deyimleri de kullanılmaktadır. Matrisin aij elemanları $R(S_i, O_j)$ sonuç değerleridir.

Strateji	Olay					
	O_1	O_2	...	O_j	...	O_n
S_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1j}	...	a_{1n}
S_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2j}	...	a_{2n}
..
S_i	a_{i1}	a_{i2}	...	a_{ij}	...	a_{in}
..
S_m	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mj}	...	a_{mn}

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

Belirsizlik Durumunda Karar Alma

Belirsizlik durumunda karar vericinin değişik stratejiler arasından seçim yapmasında esas alabileceği belli başlı ölçütler şunlardır:

1. Laplace Ölçütü
2. Minimaks veya Maksimin Ölçütü
3. Maksimaks veya Minimin Ölçütü
4. Savage Ölçütü
5. Hurwicz Ölçütü

Uygun ölçütün seçilmesi karar ortamının yapısına, karar vericinin deneyim ve eğilimine bağlıdır. Sözgelimi, minimaks ölçütünü seçen karar verici ile karşılaşıldığında, Laplace ölçütünü benimseyen karar vericinin daha iyimser olduğu söylenebilir. Hurwicz ölçütünü benimseyen karar vericinin ise minimaks ölçütü ile maksimaks ölçütü arasında bir denge bulmaya çalıştığı kabul edilir. Kısaca bu ölçütler arasında seçim yapmada genel kabul görmüş bir kural yoktur. Yukarıdaki ölçütlerden birini kullanacak olan karar vericinin zeki bir rakibinin bulunmadığı, tek rakibinin doğa olduğu kabul edilir.

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

1. Laplace Ölçütü

Laplace ölçütü muhtemel olayların ortaya çıkması ile ilgili olasılıkların birbirlerine eşit olduğu ilkesine dayanır. Olayların ortaya çıkması olasılıkları belirlenebildiğinden problem belirsizlik durumunda karar alma problemi olmaktan çıkarak, risk durumunda karar alma problemine dönüşür. Laplace ölçütü, olayların gerçekleşmesi olasılıklarının farklı olduğuna ilişkin bir kanıt olmaması durumunda kullanılabilir. Anılan olasılıkların eşit kabul edilmesi ilkesine "yetersiz sebep ilkesi" denir.

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

Örnek-2 (Laplace Ölçütü)

Mağaza sahibinin; 100, 200 veya 300 adet sipariş vermek gibi üç stratejisi vardır. O1, O2, O3 ve O4 ile simgelenen olaylar sırasıyla, istemin 100, 150, 200 ve 250 adet olduğu karar ortamını açıklar. Karar matrisinin elemanları farklı sipariş ve istem miktarı birleşimlerinin sonucu elde edilecek kâr olarak tanımlanmıştır.

Karar matrisi mağaza sahibi Laplace ölçütüne göre hangi miktarda sipariş verir?

Sipariş Miktarı	İstem Miktarı			
	100	150	200	250
100	3000	2750	2500	2250
200	1500	4750	8000	7750
300	2000	5250	8500	11750

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

Çözüm-2 (Laplace Ölçütü)

Sipariş Miktarı	İstem Miktarı			
	100	150	200	250
100	3000	2750	2500	2250
200	1500	4750	8000	7750
300	2000	5250	8500	11750
Olasılık	1/4	1/4	1/4	1/4

- Karar matrisinin Laplace ölçütü için düzenlenen biçimde yukarıdaki tabloda verilmiştir. Görüldüğü gibi gerçekleşme olasılıkları eşit 4 olay vardır. Bu eşit olasılıkların kullanılmasıyla her bir stratejinin beklenen değeri aşağıdaki gibi hesaplanır.
- $E(100) = 1/4(3000) + 1/4(2750) + 1/4(2500) + 1/4(2250) = 2625 \text{ TL}$
- $E(200) = 1/4(1500) + 1/4(4750) + 1/4(8000) + 1/4(7750) = 5500 \text{ TL}$
- $E(300) = 1/4(2000) + 1/4(5250) + 1/4(8500) + 1/4(11750) = 6875 \text{ TL}$
- Kâr söz konusu olduğundan, beklenen değerlerden en büyük (6875 TL) olanının işaret ettiği miktarda, yani 300 birimlik sipariş verilmesi uygun olur.

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

2. Minimaks veya Maksimin Ölçütü

- Bu ölçüt yaklaşımlarında tutucu, **kötümser** karar vericilerin benimsedikleri karar ölçütüdür. Bu yaklaşım, hangi strateji seçilmiş olursa olsun daima o eylem için en kötü olan olayın gerçekleşeceği varsayımlına dayanır. Bu nedenle, her bir strateji için öncelikle o eylem için en kötü olan olayın ortaya çıkması nedeniyle oluşan en kötü sonuç belirlenir. Bu yolla bulunan en kötü sonuçlar arasından en iyi olanının işaret ettiği stratejinin seçilmesiyle en iyi hareket tarzı belirlenmiş olur. Karar matrisi elemanları; gelir, kâr, kazanç gibi büyük olması arzulanan değerlere karşılık geliyorsa ölçüt en küçüklerin en büyüğü anlamına gelen **maksimin (en küçüklerin en büyüğü)**; gider, zarar, kayıp gibi küçük olması arzulanan değerlere karşılık geliyorsa en büyüklerin en küçükü anlamını ifade eden **minimaks (en büyüklerin en küçükü)** ölçütü adını alır.

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

Örnek-3

- Maksimin (minimaks) ölçütüyle karar matrisini oluşturan sonuç değerlerinin
- a. Kazançlara,
- b. Kayıplara karşılık gelmeleri durumunda en iyi stratejiyi belirleyiniz.

Strateji	Olay			
	O ₁	O ₂	O ₃	O ₄
S ₁	26	26	18	22
S ₂	22	34	30	18
S ₃	28	24	34	26
S ₄	22	30	28	20

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

Çözüm-3

- Sonuç değerlerinin kazançlara karşılık gelmesi durumunda, satır en küçüklerinin belirlenmesi ve bunlardan en büyük olamına karşılık gelen stratejinin uygulamaya konması gereklidir. Satır en küçük değerlerinin sırasıyla; 18, 18, 24 ve 20 olduğu görülebilir. Buna göre bu değerlerden en büyük olan 24'ün işaret ettiği üçüncü eylem (S3) maksimin ölçütüyle belirlenen en iyi stratejidir.
- Sonuç değerlerinin kayıplara karşılık gelmesi durumunda herhangi bir eylem için en kötü olay en büyük sonuç değeri sağlayandır. Bu nedenle satır en büyüklerinin belirlenmesi ve bunlardan en küçük olanına karşılık gelen stratejinin uygulamaya konması gereklidir. Satır en büyük değerlerinin sırasıyla; 26, 34, 34 ve 30 olduğu görülebilir. Buna göre bu değerlerden en küçük olan 26'nın işaret ettiği S1, minimaks ölçütüyle belirlenecek en iyi stratejidir.

3. Maksimaks veya Minimin Ölçütü

Bu ölçüte göre hangi strateji seçilirse seçilsin o strateji için en iyi olan olayın gerçekleşeceği düşünülür. Bu düşüncenin ürünü olarak belirlenen en iyi sonuçlardan en iyi olanının işaret ettiği strateji, karar vericinin en iyi seçimi olur. Karar matrisi elemanlarının büyük olması arzulanan değerlere karşılık gelmesi durumunda ölçüt maksimaks (**en büyüklerin en büyüğü**) ölçütür. Matris elemanlarının küçük olması arzulanan değerlere karşılık gelmesi durumunda ölçüt minimin (**en küçüklerin en küçüğü**) ölçütü adını alır. Bu ölçütün kullanılmasıyla en iyi stratejinin belirlenmesini aşağıdaki örnek yardımıyla açıklayalım.

Örnek-4

- Aşağıdaki karar matrisini kullanarak, maksimaks (minimin) ölçütle sırasıyla, sonuç değerlerinin kazançlara ve sonuç değerlerinin kayıplara karşılık gelmeleri durumunda en iyi stratejiyi belirleyiniz.

Strateji	Olay			
	O ₁	O ₂	O ₃	O ₄
S ₁	26	26	18	22
S ₂	22	34	30	18
S ₃	28	24	34	26
S ₄	22	30	28	20

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

Çözüm-4

- Bu ölçüte göre hangi eylem uygulanırsa uygulansın çeşitli olaylar arasından en iyi olanı ile karşılaşılacağından; karar matrisi elemanlarının kazanç değerlerine karşılık gelmesi durumunda satır en büyüklerinin, karar matrisi elemanlarının kayıp değerlerine karşılık gelmesi durumunda satır en küçüklerinin bulunması gereklidir.
- Karar matrisinin en büyükleri ile satır en küçükleri enb ve enk sütun başlıklarını altında gösterilmiştir. Bu ölçüte göre stratejiler arasından seçim, en iyilerin en iyisinin seçilmesi biçiminde yapılacağından, kazanç durumunda en iyi seçenek karar vericiye 34 birim kazanç sağlayan S2 ve S3 seçenekleridir. En küçüklerin dikkate alınması durumunda en iyi seçenekler en düşük kaybı sağlayacak olan S1 ve S2 seçenekleridir.

Strateji	Enb	Enk
S ₁	26	18*
S ₂	34*	18*
S ₃	34*	26
S ₄	30	22

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

4. Savage Ölçütü

- Bu ölçüt en büyük fırsat kaybının en küçülmesi esasına dayanır. Bu nedenle minimaks fırsat kaybı ölçüyü olarak da bilinir. Ölçütün uygulanması için öncelikle fırsat kaybı veya pişmanlık matrisinin oluşturulması gereklidir.
- Fırsat kaybı her bir olay için en iyi sonucu sağlayacak stratejinin seçilmemesi sonucu vazgeçilen kazanç veya katlanılan kayıp miktarıdır. Fırsat kayipları genellikle pozitif değerler ve rakamlarla açıklanır. Karar tablosu gelirler cinsinden ifade edildiğinde, ele alınan her bir olaya ilişkin fırsat kaybı değerleri; en iyi olan eylemin seçilmesi durumunda sağlanacak olan gelirlerden diğer seçeneklerin sağlayacağı gelirlerin çıkartılmasıyla hesaplanırlar.

Sütun Enbüyük Değeri – Sütun Değerleri

- Karar matrisinin maliyetleri göstermesi durumunda fırsat kaybı değerleri en iyi seçimin maliyet değerinin diğer eylemlerin maliyet rakamlarından çıkartılması ile belirlenirler.

Sütun Değerleri – Sütun Enküçük Değeri

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

Örnek-5

- Savage ölçütüyle sırasıyla;
- a. sonuç değerlerinin kazançlara
- b. sonuç değerlerinin kayıplara karşılık gelmeleri durumunda en iyi stratejiyi belirleyiniz.

Strateji	Olay			
	O ₁	O ₂	O ₃	O ₄
S ₁	26	26	18	22
S ₂	22	34	30	18
S ₃	28	24	34	26
S ₄	22	30	28	20

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

Çözüm-5

- a. Fırsat kaybı matrisi düzenlenmelidir. Önce, karar matrisi elemanlarının kazançları gösterdiğini düşünelim. Buna göre, ortaya çıkan olay O₁ ise, en yüksek kazancı sağlayan S₃ seçilmelidir. Bu durumda karar verici en yüksek kazancı sağlayacağından hiçbir fırsatı kaçırılmayacaktır. Buna göre bu seçimin fırsat kaybı, 28 - 28 = 0 olur. Aynı olay (O₁) için en yüksek kazancı sağlayan S₃ yerine S₁ seçilirse, 28 yerine 26 TL, yani 2 TL daha az kazanılacak böylece karar verici kaçırıldığı 2 TL için pişmanlık duyacaktır. S₂ seçildiğinde, S₃'ün seçilmemiş olması yüzünden, kaçan fırsat 6 TL olacak bu kez karar verici 6 TL daha az kazanmanın pişmanlığını duyacaktır. Bu işlemin karar matrisinin tüm elemanlarına uygulanması sonucu belirlenen fırsat kaybı değerleriyle düzenlenen fırsat kaybı matrisi satır en büyük değerleriyle birlikte aşağıda gösterilmiştir.

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

Çözüm-5

Strateji	Olay				Satır En Büyübü
	O ₁	O ₂	O ₃	O ₄	
S ₁	2	8	16	4	16
S ₂	6	0	4	8	8
S ₃	0	10	0	0	10
S ₄	6	4	6	6	6*

- Fırsat kaybı matrisinin düzenlenmesinden sonra sıra, her bir stratejiye ilişkin en yüksek fırsat kaybının saptanmasına gelir. En yüksek fırsat kayipları, fırsat kaybı matrisinin en sağına eklenen sütunda gösterilmişlerdir. Karar vericinin amacı fırsat kaybını en düşük düzeyde tutmak olduğundan en büyük pişmanlıklar arasından en küçük olanının işaret ettiği stratejinin seçilmesiyle en iyi hareket biçimini belirlenmiş olur. Savage ölçütüne göre en küçük değeri veren S4 seçilmelidir.

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

Çözüm-5

- Sonuç değerlerinin kayiplara karşılık gelmesi durumunda, her bir olay için en iyi strateji en düşük kaybı sağlayandır. Bu durumda her bir olay için kaybın en küçük değeri dikkate alınacak ve fırsat kaybı matrisi elemanları her bir olay için en iyi olan değerin diğer değerlerden çıkartılmasıyla belirlenecektir. Bunu karar matrisinin ilk sütununa uygulayalım. O1 gerçekleştiğinde, en iyi strateji 22 TL'lik kayıp gösteren S2 ve S4 seçenekleridir. Bu seçeneklerin fırsat kayipları sıfırdır. O1 gerçekleştiğinde S1'in fırsat kaybı $26 - 22 = 4$, S3'ün fırsat kaybı $28 - 22 = 6$ TL olur. Bu yaklaşımla oluşturulan fırsat kaybı matrisi aşağıda gösterilmiştir.

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

Çözüm-5

Strateji	Olay				Satır En Küçüğü
	O ₁	O ₂	O ₃	O ₄	
S ₁	4	2	0	4	4*
S ₂	0	10	12	0	12
S ₃	6	0	16	8	16
S ₄	0	6	10	2	16

- Pişmanlık matrisinin düzenlenmesinin ardından her bir strateji için en büyük fırsat kaybı belirlenir. En büyük fırsat kayipları, önceden olduğu gibi, fırsat kayipları matrisinin en sağına eklenen sütunda gösterilmiştir. Savage kuralına göre en büyük kayiplardan en küçük değerli olanının işaret ettiği S1 stratejisi en iyi hareket biçimidir. Savage ölçütı maliyet verilerinden oluşan orijinal matrise min-maks ölçütünün, kazanç verilerinden oluşan orijinal matrise maksimin ölçütünün uygulanmasına benzer. Bununla birlikte benimsenecek eylemlerin aynı olmak zorunda olmadıkları unutulmamalıdır.

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

5. Hurwicz Ölçütü

- Hurwicz'e göre, karar vericinin ne aşırı derecede iyimser, ne de aşırı derecede kötümser olmasını gerektiren güçlü gerekçeleri yoktur. Bu nedenle, karar vericinin maksimin ölçütünün aşırı kötümserliği ile maksimaks ölçütünün aşırı iyimserliği arasında bir denge kurması uygun olur. Bu nedenle bu ölçüte "ağırıklı ortalama" veya "gerçekçilik ölçütü" de denir. Hurwicz ölçütü, seçilen her strateji için iyimserlik koşullarında ortaya çıkan sonuçlar ile kötümserlik koşullarında ortaya çıkan sonuçların ağırlıklandırılması esasına dayanır. Bunun için iyimserlik katsayısı olarak bilinen α kullanılır.
- $0 \leq \alpha \leq 1$.
- Çok kötümser bir karar vericinin α için seçeceği değer sıfır, aşırı derecede iyimser bir karar vericinin seçeceği değer 1 olur.
- Karar verici α 'nın değeri hakkında kararsızsa, $\alpha = 0.5$ seçmesi akılçıl olur.
- α 'nın belirlenmesinden sonra karar matrisindeki her bir strateji için en iyi ve en kötü sonuç değerlerinin sırasıyla α ve $(1 - \alpha)$ ile çarpılarak sonuçların toplanması gereklidir. Toplama işlemiyle belirlenen değerler stratejilerin beklenen değerleri olarak yorumlanır ve beklenen değerler taranarak; karar matrisi kazanç değerlerinden oluşmuşsa en büyük, maliyet değerlerinden oluşmuşsa en küçük beklenen değere sahip stratejinin uygulanması önerilir.

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

Örnek-6

- Aşağıdaki karar (kazanç) matrisine Hurwicz ölçütünü uygulayarak sırasıyla ; $\alpha = 0$, $\alpha = 1$ ve $\alpha = 0.6$ için en iyi stratejiyi belirleyiniz.

Strateji	Olay			
	O ₁	O ₂	O ₃	O ₄
S ₁	26	26	18	22
S ₂	22	34	30	18
S ₃	28	24	34	26
S ₄	22	30	28	20

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

Çözüm-6

- $\alpha = 0$ seçildiğinde her strateji için yalnızca en küçük değerli sonuçların dikkate alındığı görülebilir. Kural gereği bu en küçük değerlerden en büyük olanı seçileceğinden, $\alpha = 0$ için Hurwicz ölçütü maksimin ölçütüne eşdeğerdir. Buna göre, $\alpha = 0$ için S3 (bkz. Örnek 8.4) seçilecektir.
- $\alpha = 1$ seçildiğinde, her eylem seçeneği için yalnızca en büyük değerli sonuçların dikkate alındığı görülebilir. Kural gereği, en büyük değerlerden en büyük olanının seçilmesi gerektiğinden $\alpha = 1$ için, Hurwicz ölçütü maksimaks ölçütüne eşdeğerdir (bkz. Örnek 8.5). Buna göre, satır en büyük değerlerinden en büyüğünü sağlayan S2 ya da S3 seçilecektir.

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

Çözüm-6

Karar verici en yüksek beklenen kazancı hedeflediğinden, $\alpha = 0.6$ seçildiğinde, stratejilerin beklenen değerleri satır en büyüklerinin 0.6, satır en küçüklerinin 0.4 ile çarpımlarının toplamı olarak Tablo 8.10'daki gibi hesaplanacaklardır.

Strateji	Kazanç İçin		Beklenen Kazanç
	Enb	Enk	
S ₁	26	18	22.8
S ₂	34	18	27.6
S ₃	34	24	30.0*
S ₄	30	20	26.0

Karar verici en yüksek beklenen kazancı hedeflediğinden, S₃'ü seçecektir.

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

Çözüm-6

Karar matrisi elemanlarının kayıplara karşılık gelmesi durumunda stratejilerin beklenen değerleri

- satır en küçüklerinin 0.6,
- satır en büyüklerinin 0.4 ile çarpımlarının toplamı olarak hesaplanacaklardır.
- Hesap sonuçları, aşağıdaki tabloda beklenen kayıp başlıklı sütunda gösterilmiştir. Buna göre beklenen kaybin en küçük olmasını sağlayan S₁ benimsenecektir.

Strateji	Kayıp İçin		Beklenen Kayıp
	Enb	Enk	
S ₁	18	26	21.2*
S ₂	18	34	24.4
S ₃	24	34	28.0
S ₄	20	30	24.0

Risk Durumunda Karar Alma

Daha önce açıklandığı gibi olayların gerçekleşme olasılıklarının bilinmesi durumundaki karar problemi, risk durumunda karar problemidir. Risk durumunda karar almada kullanılan başlıca ölçütler şunlardır:

- En yüksek olabilirlik
- Beklenen değer
- Beklenen fırsat kaybı veya beklenen pişmanlık

En Yüksek Olabilirlik Ölçütü

Bu ölçüte göre karar verici tüm dikkatini olabilirliği en yüksek olan olay üzerinde yoğunlaştırır. Gerçekleşme olasılığı en büyük olan olayın belirlenmesinden sonra bu olay için en yüksek (en büyüğeleme durumunda en büyük, en küçükleme durumunda en küçük) sonucu sağlayan stratejinin uygulanmasına karar verilir.

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

Örnek-7

En yüksek olabilirlik ölçütünü aşağıdaki kazanç matrisine uygulayarak en iyi stratejiyi kararlaştırınız. Olayların gerçekleşmesi olasılıkları aynı tablonun son satırında verilmiştir.

Strateji	Olay			
	O ₁	O ₂	O ₃	O ₄
S ₁	26	26	18	22
S ₂	22	34	30	18
S ₃	28	24	34	26
S ₄	22	30	28	20
Olasılık	0.2	0.5	0.2	0.1

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

Çözüm-7

- Tablonun son satırında görüldüğü gibi olabilirliği en yüksek olay O₂'dir. Karar verici gelecekte O₂'nin gerçekleşeceğini düşünerek kendisine en yüksek kazancı sağlayacak olan S₂ stratejisini uygulayacaktır.
- Bu kural özellikle mümkün olaylardan birine ilişkin olasılık diğer olaylara ilişkin olasılıklardan önemli derecede büyükse uygundur. Diğer olayları ve bunların sonuçlarını göz ardı etmesi ölçütün zayıf tarafıdır.

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

Beklenen Değer Ölçütü

Beklenen değer ölçütü olayların ortaya çıkması olasılıklarının bilinmesi durumunda, her bir stratejiye ilişkin beklenen değerin hesaplanarak bunlar arasından en iyi olanın işaret ettiği stratejinin seçilmesi esasına dayanır.

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

Örnek-8

- Beklenen değer kuralını aşağıdaki 4 x 4 kazanç matrisine uygulayınız.

Strateji	Olay			
	O ₁	O ₂	O ₃	O ₄
S ₁	26	26	18	22
S ₂	22	34	30	18
S ₃	28	24	34	26
S ₄	22	30	28	20
Olasılık	0.2	0.5	0.2	0.1

Çözüm-8

- Olayların gerçekleşmesi olasılıkları sırasıyla; 0.2, 0.5, 0.2, ve 0.1 olarak verildiğinden stratejilerin beklenen değerleri aşağıdaki gibi hesaplanır.
- S_1 için $= 0.2(26) + 0.5(26) + 0.2(18) + 0.1(22) = 24.0$
- S_2 için $= 0.2(22) + 0.5(34) + 0.2(30) + 0.1(18) = 29.2$
- S_3 için $= 0.2(28) + 0.5(24) + 0.2(34) + 0.1(26) = 27.0$
- S_4 için $= 0.2(22) + 0.5(30) + 0.2(28) + 0.1(20) = 27.0$
- En yüksek beklenen kazancı S_2 seçeneği sağladığından, karar vericinin en iyi kararı S_2 'yi seçmek olacaktır. Sonuç değerleri kayıp değerlerine karşılık gelse idi karar verici en küçük beklenen değerli S_1 'i seçerdi.

Beklenen Fırsat Kaybı veya Beklenen Pişmanlık Ölçütü

Risk durumunda karar almada kullanılabilecek diğer bir ölçüt beklenen fırsat kaybı veya beklenen pişmanlık ölçütüdür. Bu ölçütün beklenen değer ölçütünden çok farklı olmadığı görülebilir. İki ölçüt arasındaki tek fark, dikkate aldıkları sonuç değerleridir. Fırsat kaybı sonuçlarının dikkate alınması durumunda beklenen değer ölçütü beklenen fırsat kaybı ölçütü adını alır.

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

Örnek

- Aşağıdaki kazanç matrisine beklenen fırsat kaybı ölçütünü uygulayarak karar vericinin en iyi stratejisini belirleyiniz.

Strateji	Olay			
	O ₁	O ₂	O ₃	O ₄
S ₁	26	26	18	22
S ₂	22	34	30	18
S ₃	28	24	34	26
S ₄	22	30	28	20
Olasılık	0.2	0.5	0.2	0.1

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

Cevap

Beklenen fırsat kaybı ölçütünde fırsat kayipları esas alındığından önce fırsat kayipları matrisinin düzenlenmesi gereklidir. Daha önce açıkladığımız gibi orijinal karar matrisinin kazanç değerlerinden oluşması durumunda, fırsat kaybı matrisi, orijinal matrisin sütun değerlerinin her birinin, sütun en büyük değerinden çıkartılmasıyla aşağıdaki gibi düzenlenenecektir.

Strateji	Olay			
	O ₁	O ₂	O ₃	O ₄
S ₁	2	8	16	4
S ₂	6	0	4	8
S ₃	0	10	0	0
S ₄	6	4	6	6
Olasılık	0.2	0.5	0.2	0.1

- Fırsat kaybı matrisinin oluşturulmasından sonra olayların gerçekleşmesi olasılıklarından yararlanarak her bir eylem için beklenen fırsat kaybı değerleri hesaplanmalıdır. Söz konusu değerler aşağıdaki gibi hesaplanacaktır.
 - S1 için = 0.2(2) + 0.5(8) + 0.2(16) + 0.1(4) = 8.0
 - S2 için = 0.2(6) + 0.5(0) + 0.2(4) + 0.1(8) = 2.8
 - S3 için = 0.2(0) + 0.5(10) + 0.2(0) + 0.1(0) = 5.0
 - S4 için = 0.2(6) + 0.5(4) + 0.2(6) + 0.1(6) = 5.0
- Sonuçta, beklenen fırsat kaybı ölçütüne göre en iyi strateji en küçük beklenen fırsat kaybı değerini veren S2 olacaktır. Bu ölçütle en iyi olduğu kararlaştırılan S2'nin daha önce beklenen değer ölçüyüle en iyi olduğu belirlenen strateji olduğuna dikkat edilmelidir.

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

Tam Bilginin Beklenen Değeri

- Tam bilgi sağlamak için katlanılması gereken maliyetin katlanmaya değer olup olmadığıının araştırılması gerekir. Bunun için tam bilgiden beklenen gelirle başka bir deyişle, tam bilginin beklenen değeriyle ek bilgiye ulaşmanın yaratacağı maliyetin karşılaştırılması uygun olur. Tam bilgi fayda sağlıyor ise tam bilgiye başvurmak, aksi halde eldeki bilgilerle yetinmek akılcı bir yaklaşım olur. Tam bilginin beklenen değeri kavramını açıklayıcı örnek problem üzerinde gösterelim.

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

Örnek

- Örnek 8.1'deki mağaza sahibinin tam bilgi durumundaki beklenen kârını hesaplayarak, tam bilgi altında kârdaki artışı bulunuz.

Tablo 8.14

Sipariş Miktarı	İstem Miktarı			
	100	150	200	250
100	3000	2750	2500	2250
200	1500	4750	8000	7750
300	2000	5250	8500	11750

- İstem miktarı $Q_{\text{kesin}} = 0.2 \times 3000 = 600$ birimde, $Q_{\text{bekl}} = 0.3 \times 3000 = 900$ sipariş miktarı da aynı kesinlikle kolayca belirlenebilir. Sözgelimi, istemin 100 adet olacağından emin olunsa, 100 adet siparişle kazancın en büyük olması sağlanır. İstem 100 adet olması olasılığı 0.2 olduğundan, 100 birimlik istem için beklenen kazanç şöyle olur:
- $0.2 \times 3000 = 600$ TL

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

Çözüm

- Benzer şekilde istemin 150 olması durumunda en yüksek kâr 300 adet siparişle sağlanır. Bu olay-strateji çifti için en yüksek kazanç 5250 TL olduğundan beklenen kâr bu olayın gerçekleşme olasılığı (0.3) ile 5250'nin çarpılmasıyla 1575 TL olarak hesaplanır. Benzer işlemlerle istemin 200 ve 250 adet olması durumları için beklenen kârlar sırasıyla aşağıdaki gibi hesaplanır.
- $0.3 \times 8500 = 2550 \text{ TL}$
- $0.2 \times 11750 = 2350 \text{ TL}$
- Tam bilgi altında beklenen kâr her bir olay için en iyi stratejinin seçilmesi sonucu gerçekleşen beklenen kazançların toplamına eşittir. Buna göre tam bilgi altındaki beklenen kazanç (TBABK) aşağıdaki gibi elde edilir.
- $\text{TBABK} = 0.2(3000) + 0.3(5250) + 0.3(8500) + 0.2(11750)$
- $= 7075 \text{ TL}$

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

Çözüm-devam

- Tam bilgi altında hesaplanan 7075 TL'lik kazanç istemin değeri hakkında kesin bilgiye sahip olunması durumunda kazanılacak en yüksek miktardır. Bu yolla hangi stratejinin uygun olacağı konusunda bir öneride bulunulmadığını dikkat edilmelidir. Burada saptanın yalnızca belirlilik durumunda kârin en fazla 7075 TL olabileceğidir. Kâri bu düzeye çıkarmak için istem miktarlarının olasılıkları hakkında daha fazla bilgi edinmek istediği düşünülmeli. Bu durumda, ek bilginin kârda sağlayacağı artı ile gerçekleştirilmesi düşünülen çalışmanın maliyeti karşılaştırılmalıdır. Ek bilgiyle sağlanacak kâr ek bilgiye ulaşma maliyetinden fazla ise ek bilgiye başvurulacak, aksi halde, eldeki veri ile yetinilerek risk ortamında beklenen değer ölçütüyle karar verme benimsenecektir. Ek bilginin beklenen değeri, tam bilgi altındaki beklenen değer ile risk durumundaki beklenen değer arasındaki farka eşittir.
- Risk durumunda en yüksek kâr 6875 TL'dir. Tam bilgi altında en yüksek kâr 7075 TL olduğundan ek bilginin beklenen değeri aşağıdaki gibi hesaplanır.
- Ek Bilginin Beklenen Değeri = $7075 - 6875 = 200 \text{ TL}$
- Bu değer tam bilgi durumunda kârdaki artışı gösterir. Buna göre ek bilgi sağlamak için yapılacak çalışmanın maliyeti 200 TL'den fazlaysa mağaza sahibinin ek bilgi sağlamaktan vazgeçmesi uygun olur. Açıklamalarımız için gerekli olduğundan problemi bir de beklenen fırsat kaybı ölçütünü kullanarak çözelim. Problemin fırsat kaybı tablosu aşağıda gösterilmiştir.

Çözüm-devam



- Hesaplanan beklenen fırsat kayıpları, fırsat kayıpları tablosuna eklenen "Beklenen Fırsat Kaybı" başlıklı sütunda gösterilmiştir. Görüldüğü gibi en küçük beklenen fırsat kaybı ek bilginin beklenen değerine eşittir. Bu durum yalnızca bu problem için değil her zaman böyledir. En küçük beklenen fırsat kaybı belirsizliğin maliyeti olarak değerlendirilir. Her bir strateji için beklenen kır ile beklenen pişmanlık değerleri toplamının, tam bilginin beklenen değerine eşit olduğu gösterilebilir. Bu durumun açıklanmasına örnek olması için S1'yi inceleyelim. S1 için beklenen kır olan 2625 TL ile S1 için beklenen fırsat kaybı 4450 TL'nin toplamı 7075 TL'ye eşittir.

Karar Ağacı

- Şimdiye kadar, sonuçların matris veya tablo biçiminde gösterilmesinin mümkün olduğu "bir olaylar kümesi-bir strateji seçimi" olarak özetlenebilecek durumların karar problemleri incelenmiştir. Oysa karar verme genellikle, birden fazla olaylar kümesinin bulunduğu, her küme için bir eylem seçiminin söz konusu olduğu çok aşamalı bir süreçtir. Bu, birden fazla noktada karar verme durumunda olmak demektir. Bu tip problemlerin matris veya tablo yaklaşımıyla çözülmesi doğru değildir. Matris yerine karar ağacı oluşturulması uygun olur.
- Şimdiye kadar, sonuçların matris veya tablo biçiminde gösterilmesinin mümkün olduğu "bir olaylar kümesi-bir strateji seçimi" olarak özetlenebilecek durumların karar problemleri incelenmiştir. Oysa karar verme genellikle, birden fazla olaylar kümesinin bulunduğu, her küme için bir eylem seçiminin söz konusu olduğu çok aşamalı bir süreçtir. Bu, birden fazla noktada karar verme durumunda olmak demektir. Bu tip problemlerin matris veya tablo yaklaşımıyla çözülmesi doğru değildir. Matris yerine karar ağacı oluşturulması uygun olur.

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

Karar Ağacı-devam

- Karar vericinin karar aldığı her bir nokta karar noktası olup karar noktaları ağaç üzerinde bir kare ile gösterilir. Bu kareden çıkan dallar karar vericinin stratejilerine karşılık gelir. Karar vericinin kontrolü dışında olan olaylar ağaç üzerinde dairelerle gösterilirler. Bu noktalara "olay düğüm noktası" veya "şans noktası" denir. Daire biçimindeki olay düğüm noktalarından çıkan her dal, bir olayı simgeler. Olayı simgeleyen simbol ve olayın ortaya çıkma olasılığı ait olduğu dal üzerinde gösterilir. Şans noktasından çıkan dallar, karar vericiyi bir başka şans noktasına veya bir karar noktasına götürebilir.
- Karar probleminin karar ağacı ile çözümünde, dinamik programlamada^[1] olduğu gibi, sondan başa doğru hesaplama yaklaşımı uygulanır. Bunun için oluşturulan karar ağacının en son aşamasındaki uç noktalardan başlanır ve ağaç üzerinde başa doğru gidilir. Bu ilerleyiş sırasında karşılaşılan karar noktalarının her birinde o düğümün beklenen değeri hesaplanır. Beklenen değerlerden en iyi olanı o düğümün üzerine yazılır. Başlangıç noktasına ulaşıldığında çözüm işlemi tamamlanmış olur.

^[1] Bkz. Onbirinci Bölüm.

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

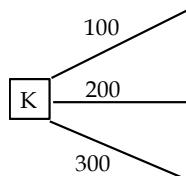
Örnek

- Örnek 8.1'deki problemin karar ağacını düzenleyerek net kararı en büyükleyen sipariş miktarını bulunuz.

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

Çözüm

- Problemi karar ağacı yaklaşımıyla çözebilmek için öncelikle karar ağacı oluşturulmalıdır. Karar ağacının düzenlenenebilmesi için önce karar noktası sayısı belirlenir. Bilindiği gibi mağaza sahibinin sipariş miktarını belirlemek gibi tek bir sorunu, yani almak istediği tek bir karar vardır. Bu nedenle karar noktası tek tır. Bu nokta K ile işaretlenecektir. Sipariş miktarı için 100, 200 veya 300 olmak üzere 3 seçenek bulunduğuundan bu noktadan 3 dal çıkacaktır. Karar ağacının bu kısmı aşağıda gösterilmiştir.

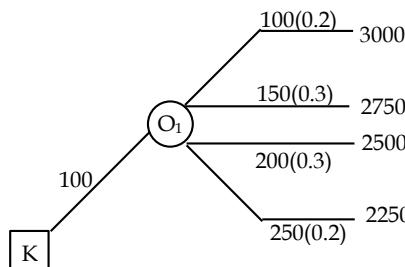


Şekil 8.1

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

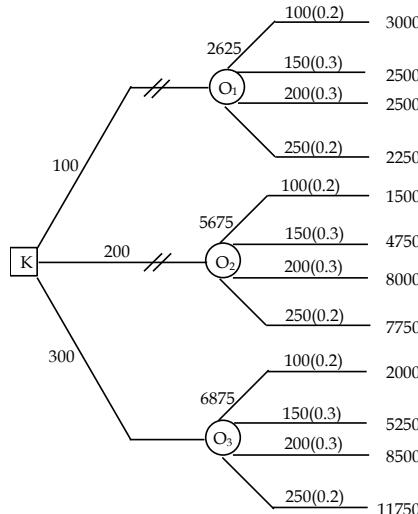
Çözüm-devam

- Bir an için sipariş miktarının 100 olarak belirlendiğini düşünelim. İstem düzeyi 100, 150, 200 veya 250 olabilir. İstem düzeyindeki bu belirsizlik olay düğüm noktası olarak işaretlenir. Olay düğüm noktasından olay sayısı kadar dal çıkacak ve dalların her biri ayrı bir istem düzeyine karşılık gelecektir. Olaylara ilişkin olasılıkların ait oldukları dallar üzerinde, olaylara ilişkin kârların dalların uç noktalarında gösterilmesiyle karar ağacının 100 birimlik sipariş verilmesi durumunu açıklayan kısmı aşağıdaki gibi belirlenmiş olur.



Şekil 8.1

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI



Şekil 8.1

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

Çözüm-devam

- Dallardan geriye doğru giderek 1 nolu düğüm noktasındaki beklenen kârı (BK1) hesaplayalım.
- $BK1 = 3000(0.2) + 2750(0.3) + 2500(0.3) + 2250(0.2)$
= 2625 TL
- Saptanan 2625 TL tutarındaki beklenen kâr 1 nolu olay düğüm noktasının üzerine yazılır.
- Aynı yöntemle 200 ve 300 birimlik sipariş miktarları için 2 ve 3 nolu olay düğüm noktalarındaki beklenen kârlar aşağıdaki gibi hesaplanır.
- $BK2 = 1500(0.2) + 4750(0.3) + 8000(0.3) + 7750(0.2) = 5675$ TL
- $BK3 = 2000(0.2) + 5250(0.3) + 8500(0.3) + 11750(0.2) = 6875$ TL
- Beklenen kârların O₂ ve O₃ noktalarına yazılmışıyla karar ağacı aşağıdaki gibi tamamlanmış olur.
- Her bir olay düğüm noktasının beklenen değerleri hesaplandıktan sonra K ile simgelenen karar noktasına ulaşırız. Bu nokta; sipariş miktarının 100, 200 veya 300 olması eylemlerinden birinin seçilmesi durumunu gösterir. 300 dalı 100 ve 200 dallarından daha fazla kâr sağladığından mağaza sahibi 100 ve 200 dalarını değil, 300 dalını seçecektir. Seçilmeyen dallar "/" ile işaretlenir.

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

Ödev

- Bir yatırımcı A ve B seçeneklerinden hangisine yatırım yapmasının uygun olacağını araştırmaktadır. Yatırımcının alternatif stratejileri yatırım yapmamak da dahil olmak üzere şöyledir: A'yi seçmek. A'nın seçilmesi ve başarılı olunması durumunda yatırımcı ya hiçbir şey yapmadan beklemekte ya da elde ettiği kazançla B'ye yatırım yapmaktadır. Bunun tersi de geçerlidir. A'da başarılı olma olasılığı 0.70, B'de başarılı olma olasılığı 0.40'dır. Her iki yatırım seçenekinin gerektirdiği yatırım miktarı da 2000 TL olup, başarısız olunması durumunda kazanç -2000 TL olmaktadır. A'nın başarılı olması durumunda 3000 TL (yatırım miktarı dahil), B'nin başarılı olması durumunda 5000 TL (yatırım miktarı dahil) elde edilmektedir. Karar ağacını çizerek en uygun stratejiyi belirleyiniz.

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

OYUN KURAMI

Prof.Dr. Ünal H. ÖZDEN

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

Oyun

Samuel Johnson (1755) “oyun” kelimesini, *herhangi bir şeyin eğlencesi* olarak tanımlar. Modern düşüneler, bu tanıma ek olarak belirli kuralları da birleştirmiştir. Oyunlardan çoğu karşılıklı etkileşimi ve rekabeti getirir, oyuncu oyundaki diğer oyuncudan üstün olmak için çabalar ve onun başarısı, diğer oyuncuların hareketlerine ve kendi hareketlerine bağlıdır. Bu tanımlama ve örnekler oyun kelimesinin ilk algılanışı olup, gündelik hayatı kullanışına denk düşer.

Oyun: birbirleriyle rekabet eden ve her biri kazanmayı isteyen iki veya daha fazla sayıda karar vericinin (oyuncunun) bulunduğu karar ortamı şeklinde tanımlanabilir.

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

Oyun Kuramı

Oyun kuramı ilk kez Fransız matematikçi Emile Borel tarafından 1921 yılında ortaya atılmış olmakla birlikte, sistematik olarak matematikçi John von Neumann ile iktisatçı Oscar Morgenstern tarafından geliştirilmiştir. Oyun kuramının temel ilkeleri bu iki yazarın 1944 yılında yayınladıkları "The Theory of Games and Economic Behaviour" isimli çalışmalarında açıklanmıştır. O günden bu yana oyun kuramı büyük gelişmeler kaydetmiş, John Nash oyun kuramına yaptığı katkılar için 1994 ekonomi nobel ödülüyle ödüllendirilmiştir. Nash tarafından geliştirilen "Nash dengesi" ve "Nash pazarlık problemi" modern oyun kuramının köşe taşıları kabul edilmektedir.

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

Oyun Kuramının Özellikleri

- İki veya daha fazla karar verici vardır.
- Karar vericilerin her biri bir oyuncudur.
- Oyuncuların birey olması gerekmemektedir.
- Oyuncuların rasyonel davranışları varsayılmaktadır: Kazançlarını mümkün olduğu kadar artırma veya kayıplarını mümkün olduğu kadar azaltmak isterler.
- Her karar vericinin bir amaç fonksiyonu vardır.
- Amaç fonksiyonlarının en iyi değerleri yalnızca ait olduğu karar vericinin benimsyeceği stratejiye değil, diğer karar verici(ler)nin strateji(ler)sine de bağlıdır.
- İki-kİŞili sıfır-toplamlı oyunların en önemli varsayımları, her oyuncunun rakibinin kendisinin hangi stratejiyi seçeceğini hakkında tam bilgi olmasına karşın, kendisi için en iyi olan stratejiyi seçme şansına sahip olduğunu söylemektedir.

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

Uygulama Alanları

Oyun teorisi iş sorunlarının çözümünde yaygın olarak kullanılmamaktadır. Buna karşın rekabet unsurları içinde önemli bir görüş açıklığı sağlamıştır. Yöneticinin işi, rekabete etki eden faktörler içindeki hal tarzını göz önüne alarak, mevcut en iyi stratejiyi seçmektir. Böylece stratejinin onaylanması ve anlaşılmamasında çok faydalıdır.

İşletme problemlerinden örnekler ise rekabete dayanan problemler veya doğaya karşı verecek karar problemleri sunlardır:

- Teklif verme politikalarının saptanması,
- Reklam planları,
- Satın alma politikasının belirlenmesi,
- Yeni mamuller arasından seçim yapma,
- Araştırma stratejilerinin belirlenmesi,
- Talebin belirsiz olması halinde üretim programlama,
- Fiyatlama.

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

Oyun Çeşitleri

- 1. Oyun Çeşitleri:** Oyunlar çeşitli özelliklerine göre farklı grplarda sınıflandırılır.

Temelde oyunlar

- a. şans oyunları
- b. strateji oyunları

Oyunlar oyuncu sayısına göre

- a. iki kişili
- b. n kişili

Oyunun sayısal sonucuna göre

- a. Sıfır Toplamlı Oyun: Oyuncuların kazançlarının toplamı sıfır ise yani, oyunculardan biri tam diğer tarafın kaybettiği kadar kazanıyor oyun, "sıfır toplamlı" bir oyundur. Sıfır toplamlı oyumlarda oyuncuların çıkarları birbirine tamamıyla zittir.
- b. Sabit Toplamlı Oyunlar: Sayısal sonucu sıfırdan farklı oyumlara sabit toplamlı oyumlardır. Sabit toplamlı bir oyunda da tarafların çıkarları tamamıyla birbirine zittir. Çünkü taraflardan birinin kazancındaki bir birim artış diğer tarafın kazancında bir birim azalış demektir.
- c. Sabit Toplamlı Olmayan Oyun: Oyuncuların kazançları toplamının sabit bir sayı olmaması durumunda oyun sabit toplamlı olmayan bir oyundur. Bu tür oyumlarda tarafların çıkarları tamamıyla zıt değildir. Taraflar birlikte hareket ederek çıkar sağlayabilirler.

Strateji sayılarına göre

- a. Sonsuz Oyun: Herhangi bir oyuncunun stratejilerinin sayısı belirsiz ise oyun "sonsuz oyun" olur.
- b. Sonlu oyun: Her oyuncunun strateji sayısı sınırlı ise oyun "sonlu oyun" dur.

Oyuncunun rakibinin hareketleri hakkındaki bilgisinin derecesi ve cinsine göre

- a. Tam Bilgili Oyun: Eğer bir oyunda her oyuncu her hamleyi yaparken daha önce yapılmış olan bütün kişisel veya talih hareketlerinin sonuçlarını biliyorsa "tam bilgili" oyun söz konusu olur. Sözgelimi satranç ve dama tam bilgili oyunlardır.
- b. Tam Bilgili Olmayan Oyun: Tam bilgili olmayan oyumlarda oyuncular böyle bir tam bilgiden yoksundurlar. Örneğin pokerde oyuncular rakiplerinin ellerindeki kağıtları bilmezler. Uygulamada genellikle tam bilgili olmayan oyunlarla karşılaşılır. Çünkü, çalışma durumunun esas bileşeni tarafların birbirlerinin hareketlerini bilmemesidir.

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

Oyun Kuramı İle İlgili Temel Kavramlar

- 2. Stratejiler:** Oyunun devamı sırasında ortaya çıkabilecek bütün durumlar için oyuncuların seçimlerini belirten kuralları kapsayan kümeye strateji denir.

- 3. Kazanç veya Ödemeler Matrisi:** Oyuncuların farklı stratejileri sonucu kazanç, kayıp veya çekilme olabilir. Her bir oyuncunun stratejisi sonucu ortaya çıkan değerlerden oluşan matrise kazanç veya ödemeler matrisi denir. Ödemeler matrisindeki değerler negatif, pozitif veya sıfır olmak üzere her oyuncunun rakibine karşı kazancını veya kaybını belirler.

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

İki Kişili Sıfır Toplamlı Oyunlar

Daha önce açıklandığı gibi bir oyunda iki oyuncu varsa oyun iki kişili bir oyundur. İki kişili bir oyunda oyuncuların kazançları toplamı sıfırsa oyun iki-kişili sıfır-toplamlıdır. İki-kişili sıfır-toplamlı sonlu bir oyunda,

1. Biri satır oyuncusu, diğeri sütun oyuncusu olarak isimlendirilen iki oyuncu vardır. Satır oyuncusu yerine bizim taraf, sütun oyuncusu yerine de karşı taraf deyimlerine rastlanabilir.
2. Satır oyuncusu için m , sütun oyuncusu için n tane mümkün strateji vardır. Bu oyun kısaca mxn oyun olarak isimlendirilir.
3. Satır oyuncusunun stratejileri R_1, R_2, \dots, R_m ile sütun oyuncusunun stratejileri C_1, C_2, \dots, C_n ile gösterilsin. Oyuncuların strateji seçimlerinin türlü bireleşimlerinden sonuclanan kazanç veya kayıplarını bildiğimizi varsayırlar. Satır oyuncusunun stratejileri R_i ve sütun oyuncusunun stratejileri (C_j) sonucu ortaya çıkan değerler bir tablo (matris) şeklinde yazılabilir. Bu tabloya ödül, ödeme, kazanç veya kısaca "oyun matrisi" denir. Bir mxn oyunun kazanç matrisi Tablo 9.1'de gösterildiği gibidir.

Tablo 9.1

Satır Oyuncusu Stratejisi	Sütun Oyuncusu Stratejisi					
	C_1	C_2	\dots	C_j	\dots	C_n
R_1	a_{11}	a_{12}	\dots	a_{1j}	\dots	a_{1n}
R_2	a_{21}	a_{22}	\dots	a_{2j}	\dots	a_{2n}
\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots
R_i	a_{i1}	a_{i2}	\dots	a_{ij}	\dots	a_{in}
\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots
R_m	a_{m1}	a_{m2}	\dots	a_{mj}	\dots	a_{mn}

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

İki Kişili Sıfır Toplamlı Oyunlar-devam

- Oyunculardan birinin kazanç matrisi diğer oyuncunun kazanç matrisinden belirlenebilir. Bir oyuncunun kazanç matrisinin tüm elemanlarının ters işaretlerinden oluşan matris diğer oyuncunun kazanç matrisidir.
- Satır oyuncusunun R_i , sütun oyuncusunun C_j gibi belirli bir stratejiyi kabul ettiklerini varsayılmı. Oyun matrisi satır oyuncusuna göre düzenlenmiş ise a_{ij} satır oyuncusunun kazancını (sütun oyuncusunun kaybını) gösterir.

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

Örnek 9.1

Örnek 9.1: Satır oyuncusunun iki (R_1, R_2), sütun oyuncusunun dört (C_1, C_2, C_3, C_4) stratejisinin bulunduğu bir oyunun, satır oyuncusunun kazançlarına göre düzenlenen matrisi aşağıda gösterilmiştir. Oyuncuların stratejilerinin değişik bireşimlerinden herhangi iki tanesi için oyuncuların kazanç ve kayıplarını bulunuz.

Tablo 9.2

Satır Oyuncusu Stratejisi	Sütun Oyuncusu Stratejisi			
	C_1	C_2	C_3	C_4
R_1	3	-2	5	6
R_2	2	1	-2	4

Çözüm 9.1: Satirdaki oyuncunun R_2 'yi sütundaki oyuncunun C_3 'ü seçmesi durumunda satır oyuncusunun kazancı a_{23} olur. $a_{23} = -2$ olduğundan satır oyuncusu için negatif kazanç yani kayıp, sütun oyuncusu için negatif kayıp yani, kazanç söz konusudur. Satır oyuncusunun R_1 , sütun oyuncusunun C_4 'ü seçmeleri durumunda satır oyuncusunun kazancı a_{14} kadar, yani 6 birim olacaktır. Bu sütun oyuncusunun 6 birim kaybetmesi demektir.

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

Örnek 9.2

Örnek 9.2: Oyunculardan her birinin üçer stratejisinin bulunduğu bir 3×3 oyunun kazanç matrisi Tablo 9.3'de verildiği gibidir. Söz konusu kazanç matrisini dikkate alarak, oyuncuların oyunu hangi stratejilerle oynayacağını belirleyiniz.

Tablo 9.3

Satır Oyuncusu Stratejisi	Sütun Oyuncusu Stratejisi			Satır En Küçüğü
	C_1	C_2	C_3	
R_1	16	10	7	7
R_2	8	9	4	4
R_3	9	1	2	1
Sütun En Büyüüğü	16	10	7	-

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

Çözüm 9.2

Tablo 9.3

Satır Oyuncusu Stratejisi	Sütun Oyuncusu Stratejisi			Satır En Küçüğü
	C ₁	C ₂	C ₃	
R ₁	16	10	7	7
R ₂	8	9	4	4
R ₃	9	1	2	1
Sütun En Büyüüğü	16	10	7	-

Tablo 9.3'den görüleceği gibi her bir oyuncunun üçer stratejisini bulduğundan oyun bir 3×3 oyundur. İlk önce satır oyuncusunu ele alalım. Bu oyuncu R₁ stratejisini seçerse, sütun oyuncusu C₃ stratejisini seçerek kendi kaybını, dolayısıyla rakibinin kazancını mümkün olan en düşük düzeyde tutar. Bu değer yukarıdaki oyun matrisine eklenen "satır en küçüğü" başlıklı sütunda gösterildiği gibi 7'dir. Satır oyuncusunun ikinci stratejiyi seçmesi durumunda sütundakı oyuncu yine kendisi için en az (4) kayıp sağlayacak olan stratejiyi, üçüncü stratejiyi seçecektir. Satır oyuncusu üçüncü stratejiyi seçerse sütun oyuncusu ikinci stratejiyi seçerek yine kendi kaybını dolayısıyla rakibinin kazancını en düşük kazanç olan 1'de tutmayı başarır. Bu açıklamaların ortaya koyduğu gibi satır oyuncusu dikkatini satır en küçüklerinin en büyüğünle karşılaşık gelen strateji üzerinde yoğunlaştırmak durumundadır. Böylece, kendisinin her stratejisini seçimi ne olursa olsun rakibinin kendisine garanti ettiği en düşük kazancı en büyuklemiş olur.

Satır oyuncusunun kazancı sütun oyuncusunun kaybına eşit olduğundan, sütun oyuncusu kaybını en düşük düzeyde tutmak için sütun en büyüklerinin en küçüğünü sağlayan stratejiyi seçmek durumundadır. Sütun en büyükleri Tablo 9.3'ün en alt satırında "sütun en büyüğü" başlığı altında gösterilmiştir.

Kısaca, $\text{enb}(7, 4, 1) = 7$ olduğundan satır oyuncusu için en iyi strateji R₁'dır.

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

- Oyunun "alt değeri" (maksimin):** α ile gösterilen değer sütundaki oyuncu ne yaparsa yapsın satirdaki oyuncunun kazanacağından emin olduğu miktarıdır. Bu değere karşılık gelen stratejiye de "maksimin strateji" denir. Maksimin strateji satır oyuncusunun en iyi stratejisidir.

- Oyunun "üst değeri" (minimaxı):** β ile gösterilen bu değer, satirdaki oyuncu ne yaparsa yapsın sütundaki oyuncunun kaybının en az olacağından emin olduğu değerdir. β 'ya karşılık gelen stratejiye "minimax strateji" denir. Minimax strateji sütun oyuncusunun en iyi stratejisidir.

- Oyun Değeri:** $\alpha = \beta$ ise bunların ortak değerine "oyunun değeri" denir. Oyunun değeri g ile gösterilecektir. Oyun matrisinin satır oyuncusuna göre düzenlendigini kabul edelim. g pozitif ise oyunun sonunda satır oyuncusu ortalama g birim kazanacağı anlamına gelir.

- Tepe Noktalı Oyunlar:** Stratejilerin kararlı olduğu bazı oyunlar vardır. Bunlar alt ve üst değerleri eşit olan oyunlardır. Bu tür oyunlara "tepe noktalı oyun"lar denir. Tepe noktası aynı zamanda bir denge noktası olup hiç bir oyuncu denge durumunu bozmadır. Bir oyunun birden fazla tepe noktası olabilir.

- Ari (Sade) Strateji:** Oyun kaç kez tekrar edilirse edilsin oyunun her bir tekrarında hep aynı strateji seçiliyorsa bu stratejiye sade strateji denir. Sade stratejiler tepe noktasının belirlediği stratejilerdir.

- Karma Stratejiler:** Oyunlarda genellikle daha etkili olan karma stratejiler kullanılır. Karma strateji, tam strateji takımındaki olasılık dağılımıyla tanımlanır.

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

Örnek 9.3

Örnek 9.3: Aşağıdaki kazanç matrisine sahip 4×4 oyunun tepe noktasını bulunuz.

Tablo 9.4

Satır Oyuncusu Stratejisi	Sütun Oyuncusu Stratejisi				Satır En Küçüğü
	C ₁	C ₂	C ₃	C ₄	
R ₁	-8	7	2	3	-8
R ₂	1	-6	-2	5	-6
R ₃	7	5	3	4	3
R ₄	4	-4	-8	6	-8
Sütun En Büyübü	7	7	3	6	3 = 3

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

Çözüm 9.3**Tablo 9.4**

Satır Oyuncusu Stratejisi	Sütun Oyuncusu Stratejisi				Satır En Küçüğü
	C ₁	C ₂	C ₃	C ₄	
R ₁	-8	7	2	3	-8
R ₂	1	-6	-2	5	-6
R ₃	7	5	3	4	3
R ₄	4	-4	-8	6	-8
Sütun En Büyübü	7	7	3	6	3 = 3

- Çözüm 9.3:** Oyunda tepe noktası bulunup bulunmadığını belirleyebilmek için önce her satırın en küçük değeriyle satır en küçüğü başlıklı sütunu, daha sonra her sütunun en büyük değeriyle sütun en büyüğü başlıklı satırı oluşturalım. Oluşturulan sütunu oyun matrisinin sütunlarına, satır ise satırlarına ekleyelim. Şimdi de sırasıyla oyunun alt değeri (α) ile üst değerini (β) bulalım. Oyunun alt ve üst değerleri aşağıda gösterilmiştir.
- Oyunun alt değeri = $\alpha = \text{enb}(-8, -6, 3, -8) = 3$
- Oyunun üst değeri = $\beta = \text{enk}(7, 6, 3, 6) = 3$
- $3 = 3$ olduğundan, oyunun tepe noktası vardır. Bu noktada kesişen iki stratejiden R3 satır oyuncusunun, C3 sütun oyuncusunun en iyi stratejileridir. Oyunun ortalama değeri $g = 3$ olduğundan oyuncu satır oyuncusu için çekicidir.

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

Örnek 9.5

- Örnek 9.5:** Satır oyuncusu sütun oyuncusuna göstermeden elindeki kağıda 1 ile 20 arasında bir sayı yazar ve sütun oyuncusuna sayıyla ilgili doğru veya yalan söyler. Sütun oyuncusu ya buna inanır veya rakibinin doğru söylemediğini düşünerek sayıyı kendisine göstermesini ister. Satır oyuncusunu suçsuz yere suçlaması durumunda sütun oyuncusu satır oyuncusuna 15 TL öder. Sütun oyuncusunun satır oyuncusunun kendisine yalan söylediğini doğru tesbit etmesi durumundaki kazancı 20 TL'dir. Sütun oyuncusu satır oyuncusunun doğru söylediğini kabul ederse satır oyuncusu sütun oyuncusuna 5 TL öder. Satır oyuncusu yalan söylediğine halde sütun oyuncusu buna inanırsa satır oyuncusu 5 TL kazanır. Oyun matrisini düzenleyiniz ve oyuncuların sade stratejilerini bulunuz.

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

Çözüm 9.5

Çözüm 9.5: Görüldüğü gibi satır oyuncusunun doğru veya yalan söylemek gibi iki stratejisi vardır. Sütun oyuncusunun da satır oyuncusuna inanmak veya inanmamak gibi iki stratejisi vardır. Dolayısıyla oyun 2×2 boyutundadır. Bu belirlemenin ardından düzenlenen ödemeler matrisi Tablo 9.6'da gösterilmiştir. Sütun en büyükleriyle oluşturulan satır ve satır en küçükleriyle oluşturulan sütun da tabloda gösterilmiştir.

Tablo 9.6

Satır Oyuncusu Strateji	Sütun Oyuncusu Stratejisi		Satır En Küçüğü
	İnanmak	İnanmamak	
Doğru Söylemek	-5	15	-5
Yalan Söylemek	5	-20	-20
Sütun En Büyüği	5	15	$-5 \neq 5$

$\alpha = \text{enb}(-5, -20) = -5 \neq \beta = \text{enk}(5, 15) = 5$ olduğundan oyunun tepe noktası yoktur. Dolayısıyla oyuncuların sade stratejilerinden söz edilemez.

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

Örnek 9.6

- Örnek 9.6:** İki oyuncu aynı anda taş, kağıt veya makas demektedirler. Söylenen kelimeler aynı olduğunda beraberlik söz konusu olmaktadır. Aksi halde, diğerinden daha güçlü olan nesnenin adını söyleyen oyuncu rakibinden 1 TL almaktadır. Makas kağıdı kestiğinden makas kağıttan, kağıt taşı sardığından kağıt taştan, taş makası kırdığından taş makastan güçlündür. Oyunun kazanç matrisini düzenleyerek oyuncuların sade stratejilerini belirleyiniz.

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

Çözüm 9.6

Çözüm 9.6: Her iki oyuncunun taş, kağıt veya makas demek olmak üzere üçer stratejisi vardır. Yani oyun 3×3 boyutundadır. Buna göre ödemeler matrisi aşağıdaki gibi düzenlenecektir.

Tablo 9.7

Satır Oyuncusu Stratejisi	Sütun Oyuncusu Stratejisi			Satır En Küçüğü
	Taş	Kağıt	Makas	
Taş	0	-1	1	-1
Kağıt	1	0	-1	-1
Makas	-1	1	0	-1
Sütun En Büyübü	1	1	1	$-1 \neq 1$

$\alpha = \text{enb}(-1, -1, -1) = -1 \neq \beta = \text{enk}(1, 1, 1) = 1$ olduğundan oyunun tepe noktası yoktur. Dolayısıyla oyuncuların sade stratejilerinden söz edilemez.

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

Tepe Noktasız Oyunlar ve Karma Stratejiler

- Bir $m \times n$ oyunun tepe noktası yoksa, özellikle m ve n 'nin büyük değerleri için çözüm zor olabilir. Genel olarak bir oyunun tepe noktası yoksa oyunu çözmeden önce mümkünse m ve n değerlerinin küçültülmesi, yani bazı stratejilerin devre dışı bırakılması uygun olur. Bu işlem ancak bazı özel stratejilerin belirlenmesiyle gerçekleştirilir.
- Boyut küçültmede kullanılabilecek iki çeşit strateji vardır:
- 1. Eş stratejiler:** Biri diğerine tercih edilemeyen stratejilere "eş strateji" ler denir. Genel olarak bir oyun matrisinin bir satır/sütunun tüm elemanları başka bir satır/sütunun karşılıklı elemanlarına eşit ise bu stratejilere eş stratejiler denir. Eş stratejilerden rasgele seçilen biri dışındaki matristen çıkartılarak oyunun çözümü kolaylaştırılır. Boyut indirgenmesi sonucu ulaşılan çözüm orijinal problemin de çözümüdür.
- 2. Üstün stratejiler:** Oyunda tercih edilen ve stratejilerden bazılarını devre dışı bırakan stratejilere "üstün stratejiler", bu yolla devre dışı kalan stratejilere ise "mahkum stratejiler" denir. Genel olarak bir oyunun tepe noktası yoksa, oyunu çözmeden önce yapılacak ilk iş varsa bütün eş ve mahkum stratejileri devre dışı bırakmaktadır.

Prof.Dr. Ünal H. ÖZDEN

359

©12 Ekim 2015 Pazartesi

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

Örnek 9.7-Örnek 9.8

Örnek 9.7: Kazanç matrisi aşağıda verilen oyunun eş stratejilerini belirleyiniz.

Tablo 9.8

Satır Oyuncusu Stratejisi	Sütun Oyuncusu Stratejisi			
	C ₁	C ₂	C ₃	C ₄
R ₁	1	2	3	1
R ₂	3	6	1	3
R ₃	0	5	4	0
R ₄	1	2	3	1

Örnek 9.8: Aşağıdaki kazanç matrisine sahip oyunun üstün stratejilerini bulunuz.

Tablo 9.9

Satır Oyuncusu Stratejisi	Sütun Oyuncusu Stratejisi				Satır En Küçüğü
	C ₁	C ₂	C ₃	C ₄	
R ₁	1	0	3	1	0
R ₂	7	-1	6	3	-1
R ₃	-3	0	5	1	-3
R ₄	2	3	4	5	2
Sütun En Büyükü	7	3	6	5	2 ≠ 3

Prof.Dr. Ünal H. ÖZDEN

360

©12 Ekim 2015 Pazartesi

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

Örnek 9.9

Örnek 9.9: Kazanç matrisi aşağıda gösterilen oyunun tepe noktasını belirleyerek oyuncuların en iyi stratejilerini bulunuz.

Tablo 9.13

Satır Oyuncusu Stratejisi	Sütun Oyuncusu Stratejisi				Satır En Küçük ü
	C ₁	C ₂	C ₃	C ₄	
R ₁	10	10	8	17	8
R ₂	17	-13	26	23	-13
R ₃	-30	30	25	13	-30
R ₄	24	32	14	25	14
Sütun En Büyübü	24	32	26	25	14 ≠ 24

Çözüm 9.9: Tablo 9.13'ün son gözesinde gösterildiği gibi oyunun alt değeri (14) ile üst değeri (24) eşit olmadıklarından oyunun tepe noktası yoktur. Bu durumda maksimin ve minimaks stratejilerden dolayısıyla, sade stratejilerden söz edilemez.

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

Örnek 9.10

Örnek 9.10: Kazanç matrisi aşağıda gösterilen oyunun sade stratejilerini belirleyiniz.

Tablo 9.14

Satır Oyuncusu Stratejisi	Sütun Oyuncusu Stratejisi		Satır En Küçüğü
	C ₁	C ₂	
R ₁	3	5	3
R ₂	6	4	4
Sütun En Büyübü	6	5	4 ≠ 5

Çözüm 9.10: Tablo 9.14'ün son gözesinde gösterildiği gibi oyunun tepe noktası yoktur. Bu durumda sade stratejilerden söz edilemez. Bu nedenle, karma strateji kavramının açıklanması gereklidir.

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

Karma Strateji

- ***Karma Strateji:*** Belirli bir oranda kullanılmış sade stratejilerin rasgele sıralanışından ibaret birleşik stratejilere karma strateji denir. Buna göre bir sade strateji, stratejilerden birinin kullanılma olasılığı 1, ötekilerin kullanılma olasılığı sıfır olan bir karma stratejinin özel bir durumu olarak düşünülebilir.

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

Örnek 9.10-Satır Oyuncusu Açısından

- Örnek 9.10'daki oyunu oynayan oyuncuların karma stratejilerini belirleyiniz.

Tablo 9.14

Satır Oyuncusu Stratejisi	Sütun Oyuncusu Stratejisi		Satır En Küçüğü
	C ₁	C ₂	
R ₁	3	5	3
R ₂	6	4	4
Sütun En Büyüüğü	6	5	4 ≠ 5

- Soruna önce satır oyuncusu açısından bakalım. Satır oyuncusunun birinci stratejiyi seçmesi olasılığına p dersek, ikinci stratejiyi seçmesi olasılığı (1 - p) olur. Satır oyuncusunun amacı kazancını en büyük yapacak p değerini belirlemektir. p'nin hesaplanmasımda izlenen yaklaşım aşağıda açıklanmıştır.
 - Sütun oyuncusu daima birinci stratejiyi (C₁) oynarsa, satır oyuncusunun kazancının beklenen değeri (E₁) aşağıdaki gibi olur.
 - $E_1 = 3p + 6(1 - p) = 3p + 6 - 6p = 6 - 3p$
 - Sütun oyuncusu daima ikinci stratejiyi (C₂) oynarsa, satır oyuncusunun kazancının beklenen değeri (E₂) aşağıdaki gibi elde edilir.
- $E_2 = 5p + 4(1 - p) = 5p + 4 - 4p = p + 4$
- E₁ ve E₂'nin birlikte çözülmesiyle bulunur. E₁ ve E₂'nin eşitlenmesi ve çözülmesiyle p aşağıdaki gibi hesaplanacaktır.
- $E_1 = E_2 \Rightarrow p + 4 = 6 - 3p \Rightarrow p = 1/2 \text{ ve } 1 - p = 1/2$
- Buna göre, oyunun n kez tekrarlanması durumunda oyunun değeri (E₁ veya E₂'den) 4.5 ((E₁ = 1/2 + 4 veya E₂ = 6 - 3(1/2)) olarak bulunur. Satır oyuncusu ortalama 4.5 birim kazanmayı umar.

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

Grafik Çözümü-Satır Oyuncusu Açısından

Örnek 9.10: Aşağıda gösterilen oyunun değerini grafik yöntemi ile bulunuz

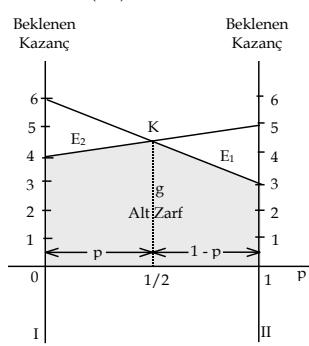
Tablo 9.14

Satır Oyuncusu Stratejisi	Sütun Oyuncusu Stratejisi		Satır En Küçüğü
	C ₁	C ₂	
R ₁	3	5	3
R ₂	6	4	4
Sütun En Büyüğu	6	5	4 ≠ 5

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

Grafik Çözümü-Satır Oyuncusu Açısından

Bulgularımızı şekil üzerinde gösterelim. Bunun için yatay eksen p'yi, dikey eksen beklenen kazancı göstermek üzere bir koordinat sistemi oluşturalım. p'nin sıfır ile 1 arasında değiştiği göz önünde bulundurduğunda ilgilenilen alan p = 0 ve p = 1 dikmeleri (I, II) ile belirlenecektir.



Şekil 9.1

Şekil 9.1'den görüldüğü gibi satır oyuncusu için en iyi durum, E₁ ve E₂ doğrularının belirlediği alt zarfın K ile gösterilen en üst noktasıdır. Satır oyuncusu E₁ = E₂ olmasını sağlayan olasılıklardan uzaklaşırsa sütun oyuncusu oyunun değerinin 4.5'den daha düşük olmasını sağlayacak sade bir stratejiye sahip olur.

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

Örnek 9.10-Sütun Oyuncusu Açısından

Tablo 9.14

Satır Oyuncusu Stratejisi	Sütun Oyuncusu Stratejisi		Satır En Küçüğü
	C ₁	C ₂	
R ₁	3	5	3
R ₂	6	4	4
Sütun En Büyüüğü	6	5	4 ≠ 5

- Oyuna bir de sütun oyuncusu açısından bakalım. Sütun oyuncusunun birinci stratejiyi seçmesi olasılığına q dersek, ikinci stratejiyi seçmesi olasılığı ($1 - q$) olur. Sütun oyuncusunun amacı kaybını en küçük yapacak q değerini belirlemektir. q 'nın belirlenmesinde izlenen yaklaşım aşağıda açıklanmıştır.
 - Satır oyuncusu daima birinci stratejiyi (R_1) oynarsa, sütun oyuncusunun kaybının beklenen değeri (F_1) aşağıdaki gibi olur.
 $F_1 = 3q + 5(1 - q) = 3q + 5 - 5q = -2q + 5$
 - Satır oyuncusu daima ikinci stratejiyi (R_2) oynarsa, sütun oyuncusunun kaybının beklenen değeri aşağıdaki gibi olur.
 $F_2 = 6q + 4(1 - q) = 6q - 4q + 4 = 2q + 4$
 - Oyunun her bir tekrarında satır oyuncusu F_1 ve F_2 'yi daha yüksek düzeyde tutacak stratejiyi sefer. Bu nedenle sütun oyuncusunun amacı, bu en büyük değerleri mümkün olduğunda küçültmektir. Çözüm, F_1 ve F_2 'nin birlikte çözülmesiyle bulunur. Çözüm aşağıda gösterilmiştir.
- $F_1 = F_2 \Rightarrow 5 - 2q = 2q + 4 \Rightarrow q = 1/4, 1 - q = 3/4$
- Buradan da g, F_1 veya F_2 'den 4.5 (satır oyuncusu için gerçekleştirilen çözümde olduğu gibi) olarak bulunur.

Prof.Dr. Ünal H. ÖZDEN

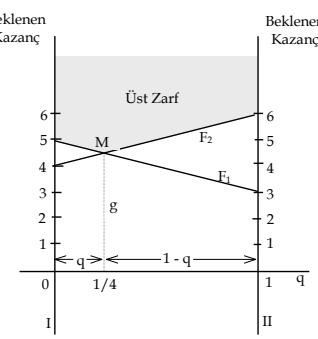
367

©12 Ekim 2015 Pazartesi

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

Grafik Çözümü-Sütun Oyuncusu Açısından

Bulgularımızı şekil üzerinde gösterelim. Bunun için yatay eksen q 'yu, dikey eksen beklenen kazanç göstermek üzere bir koordinat sistemi oluştururalım. q 'nın 0 ile 1 arasında değiştiği dikkate alındığında ilgilenilen alan $q = 0$ ve $q = 1$ dikkemeleri (I, II) ile belirlenecektir.



Şekil 9.2

Şekil 9.2'den görüldüğü gibi sütun oyuncusu için en iyi durum F_1 ve F_2 doğrularının belirdiği üst zarfın en alt noktasıdır. Sütun oyuncusu $F_1 = F_2$ olmasını sağlayan olasılıklardan M ile işaretlenen noktanın uzaklaşmamalıdır. Özette, sütun oyuncusunun amacı F_1 ve F_2 'nin en büyüğünün en küçüklennesmesi iken, satır oyuncusunun amacı E_1 ve E_2 'nin en küçüğünün en büyülmesidir. Her iki oyuncu bunu yaparsa oyunda denge kurulmuş olur.

Prof.Dr. Ünal H. ÖZDEN

368

©12 Ekim 2015 Pazartesi

mx2 ve 2xn Oyunların Çözümü

Önceki kesimde herhangi bir 2×2 oyunun basit bir grafik kullanarak nasıl kolayca çözülebileceğini açıkladık. Aynı yöntem oyunculardan birinin iki, diğerinin ikiden fazla stratejisinin bulunduğu oyun problemlerinin çözümünde de kullanılabilir. Grafik yaklaşımı ile herhangi bir $2 \times n$ veya $m \times 2$ oyunun 2×2 oyuna indirgenmesi amaçlanmaktadır. Boyutun 2×2 'ye indirgenmesinden sonra problem 2×2 durumunda olduğu gibi çözülebilmektedir.

Örnek 9.13

Örnek 9.13: Bir 4×3 oyunun kazanç matrisi aşağıda verilmiştir. Oyunu grafik yöntemiyle çözerek oyuncuların strateji seçimlerini ve oyunun değerini bulunuz.

Tablo 9.18

Satır Oyuncusu Stratejisi	Sütun Oyuncusu Stratejisi		Satır En Küçüğü
	C ₁	C ₂	
R ₁	3	4	3
R ₂	2	4	2
R ₃	6	2	2
R ₄	4	-2	-2
Sütun En Büyübü	6	4	3 ≠ 4

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

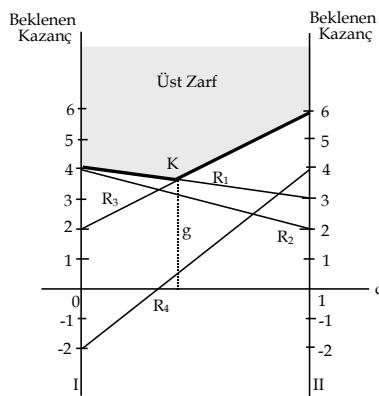
Çözüm 9.13

Çözüm 9.13: Oyunun alt değeri 3, üst değeri 4 olduğundan, tepe noktası yoktur. Bu yüzden çözüm bir karma strateji çifti olacaktır. Strateji sayısı iki olan oyuncu sütun oyuncusu olduğundan çözüm bu oyuncunun stratejileri ile başlatılır. Sütun oyuncusunun C_1 'i seçme olasılığına q dersek, C_2 'yi seçme olasılığı $(1 - q)$ olur. Buna göre satır oyuncusunun R_1, R_2, R_3 ve R_4 strateji seçimlerine bağlı olarak sütun oyuncusunun beklenen kazancı şöyledir:

$$\begin{array}{ll} R_1 \text{ için, } F_1 = 3q + 4(1 - q) & R_2 \text{ için, } F_2 = 2q + 4(1 - q) \\ = 3q + 4 - 4q & = 2q + 4 - 4q \\ = -q + 4 & = -2q + 4 \\ R_3 \text{ için, } F_3 = 6q + 2(1 - q) & R_4 \text{ için, } F_4 = 4q - 2(1 - q) \\ = 6q + 2 - 2q & = 4q - 2 + 2q \\ = 4q + 2 & = 6q - 2 \end{array}$$

Yukarıdaki gibi belirlenen beklenen kazançların temsil ettikleri doğrular Şekil 9.4'deki gibi çizilmiştir. Şekil 9.4'de gösterildiği gibi oyunun çözümü kazançların üst sınırı (kalın çizgiyle çizilmiş) ile belirlenen üst zarfın alt noktasında ortaya çıkar.

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

Çözüm 9.13

Şekil 9.4

K ile gösterilen noktanın yatay eksene olan uzaklığının oyunun değerine eşit olduğu bilinmektedir. K, R_3 ve R_1 stratejilerine karşı gelen doğrularla belirlendiğinden, satır oyuncusu oyunu R_2 ve R_4 stratejilerini devre dışı bırakarak oynayacaktır. Bu stratejilerin devre dışı bırakılmasıyla, 4x2oyun 2x2 oyuna dönüştürülmüştür. 2x2 oyunun kazanç matrisi Tablo 9.19'da gösterilmiştir.

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

Çözüm 9.13

Tablo 9.19

Satır Oyuncusu Stratejisi	Sütun Oyuncusu Stratejisi		Satır En Küçüğü
	C ₁	C ₂	
R ₁	3	4	3
R ₃	6	2	2
Sütun En Büyübü	6	4	3 ≠ 4

Şimdi bu basit oyunu çözelim. Satır oyuncusunun stratejisine bağlı olarak sütun oyuncusunun beklenen kazancı aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\begin{aligned} R_1 \text{ için, } F_1 &= 3q + 4(1 - q) \\ &= -q + 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_3 \text{ için, } F_3 &= 6q + 2(1 - q) \\ &= 4q + 2 \end{aligned}$$

F₁ = F₃ bağıntısından q = 2/5, 1 - q = 3/5 olarak hesaplanır. q = 2/5 olduğu göz önünde bulundurulduğunda, g = 18/5 olur.

Benzer şekilde, sütun oyuncusunun strateji seçimine bağlı olarak satır oyuncusunun kazancı aşağıdaki gibi olur.

$$\begin{aligned} C_1 \text{ için, } E_1 &= 3p + 6(1 - p) \\ &= -3p + 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_2 \text{ için, } E_2 &= 4p + 2(1 - p) \\ &= 2p + 2 \end{aligned}$$

Bu iki kazancın eşit oldukları dikkate alındığında satır oyuncusunun strateji seçimine ilişkin olasılıklar, p = 4/5, (1 - p) = 1/5, g = 18/5 olarak belirlenir.

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

mxn Oyunların Doğrusal Programlama İle Çözümü

Genel olarak, oyuncuların strateji sayıları büyükçe oyunun çözümü güçleştir. Artan güçlük kesinlikle teoride değil işlem sayısının hızla artmasındadır. Orjinalinde 2xn veya mx2 olmayan ya da bu boyutlardan birine indirgenemeyen mxn oyunlar doğrusal programlama ile çözülürler. Bilindiği gibi bir mxn oyunda satır oyuncusunun R₁, R₂, ..., R_m gibi m stratejisi, rakibinin C₁, C₂, ..., C_n gibi n stratejisi vardır

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

Örnek 9.14

Örnek 9.14: Kazanç matrisi aşağıda verilen 3x3 oyunu doğrusal programlama olarak formülleyerek simpleks yöntemle çözünüz.

Tablo 9.21

Satır Oyuncusu Stratejisi	Sütun Oyuncusu Stratejisi			Satır En Küçüğü
	C ₁	C ₂	C ₃	
R ₁	-2	6	3	-2
R ₂	3	-4	7	-4
R ₃	-1	2	4	-1
Sütun En Büyübü	3	6	7	-1 ≠ 3

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

Çözüm 9.14

Çözüm 9.14: Doğrusal programlama ile çözüme geçmeden önce matrisin negatif elemanlarını pozitif değerlere dönüştürmek için kazanç matrisinin her bir elemanına L = 4 ekleyelim. Tablo 9.21'deki kazanç matrisinin her bir değerine 4 eklenmesiyle problemin orijinal kazanç matrisi, Tablo 9.22'deki gibi olur. Bu ekleme oyunun değerini 4 artırır ama çözümü değiştirmez.

Tablo 9.22

Sütun Oyuncusu Stratejisi	Satır Oyuncusu Stratejisi			Satır En Küçüğü
	C ₁	C ₂	C ₃	
R ₁	2	10	7	2
R ₂	7	0	11	0
R ₃	3	6	8	3
Sütun En Büyübü	7	10	11	3 ≠ 7

Oyunu önce satır oyuncusu için çözelim.

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

Çözüm 9.14

Bu oyuncunun doğrusal programlama formülasyonu aşağıda gösterilmiştir.

$$Z_{\text{enk}} = 1/g = x_1 + x_2 + x_3$$

$$2x_1 + 7x_2 + 3x_3 \geq 1$$

$$10x_1 + 0x_2 + 6x_3 \geq 1$$

$$7x_1 + 11x_2 + 8x_3 \geq 1$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Burada g oyuncunun değeri ve $x_i = p_i/g$ olarak tanımlanmıştır.

Simpleks çözüm için artık ve yapay değişkenlerin modele sokulması ile,

$$Z_{\text{enk}} = x_1 + x_2 + x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 + MA_1 + MA_2 + MA_3$$

$$2x_1 + 7x_2 + 3x_3 - x_4 + A_1 = 1$$

$$10x_1 + 0x_2 + 6x_3 - x_5 + A_2 = 1$$

$$7x_1 + 11x_2 + 8x_3 - x_6 + A_3 = 1$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, A_1, A_2, A_3 \geq 0$$

elde edilir.

Problemin başlangıç çözüm tablosu aşağıda gösterilmiştir.

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

Çözüm 9.14

Tablo 9.23

TDV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	A_1	A_2	A_3	ζV
A_1	2	7	3	-1	0	0	1	0	0	1
A_2	10	0	6	0	-1	0	0	1	0	1
A_3	7	11	8	0	0	-1	0	0	1	1
Z_j	19M	18M	17M	-M	-M	-M	M	M	M	3M
$Z_j - C_j$	19M-1	18M-1	17M-1	-M	-M	-M	0	0	0	-



Tablo 9.24

TDV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	A_1	A_2	A_3	ζV
A_1	0	7	9/5	-1	1/5	0	1	-1/5	0	4/5
x_1	1	0	3/5	0	-1/10	0	0	1/10	0	1/10
A_3	0	11	19/5	0	7/10	-1	0	-7/10	1	1/3
Z_j	1	18M	$\frac{28M+3}{5}$	-M	$\frac{9M-1}{10}$	-M	M	$\frac{-9M+1}{10}$	M	$\frac{11M+1}{10}$
$Z_j - C_j$	0	18M-1	$\frac{28M-2}{5}$	-M	$\frac{9M-1}{10}$	-M	0	$\frac{-19M}{10}$	0	-



YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

Çözüm 9.14

Tablo 9.25

TDV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	A_1	A_2	A_3	ζV
A_1	0	0	-34/55	-1	-27/110	7/11	1	27/110	-7/11	67/110
x_1	1	0	3/5	0	-1/10	0	0	1/10	0	1/10
x_2	0	1	19/55	0	7/110	-1/11	0	-7/10	1/11	3/110
Z_j	1	1	$\frac{52 - 34M}{55}$	-M	$\frac{-4 - 27M}{110}$	$\frac{7M - 1}{11}$	M	$\frac{27M + 4}{110}$	$\frac{1 - 7M}{11}$	$\frac{67M + 14}{110}$
$Z_j - C_j$	0	0	$\frac{-34M - 3}{55}$	-M	$\frac{-4 - 27M}{110}$	$\frac{7M - 1}{11}$	0	$\frac{-83M + 4}{110}$	$\frac{1 - 18M}{11}$	-

Tablo 9.26

TDV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	A_1	A_2	A_3	ζV
x_6	0	0	-34/35	-11/7	-27/70	1	11/7	27/70	-1	67/70
x_1	1	0	3/5	0	-1/10	0	0	1/10	0	1/10
x_2	0	1	9/35	-1/7	1/35	0	1/7	-1/35	0	4/35
Z_j	1	1	6/7	-1/7	-1/14	0	1/7	1/14	0	3/14
$Z_j - C_j$	0	0	-1/7	-1/7	-1/14	0	$\frac{1 - 7M}{7}$	$\frac{1 - 14M}{14}$	-M	-

Tüm $Z_j - C_j \leq 0$ olduğundan yürürlükteki çözüm en iyidir. En iyi çözümün yer aldığı tablodan görüldüğü gibi, $x_1 = 1/10$, $x_2 = 4/35$, $x_3 = 0$ 'dır

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

İki Kişiili Sabit Toplamlı Oyunlar

İki-kİŞili sabit-toplamlı bir oyunda oyuncuların kazançları toplamı c ($c \neq 0$) sabitine eşittir. Genel olarak iki-kİŞili sabit-toplamlı oyunlar iki-kİŞili sıfır-toplamlı oyunların çözümünde kullanılan yöntemlerle çözülür.

Örnek 9.15: Yörede yayın yapan iki TV kanalı vardır. 20:00-21:00 saatleri arasında tam 50 milyon kişi bu iki kanalı izlemektedir. Kanallar 20:00-21:00 saatleri arasında yapacakları yayının türünü önceden aynı anda anons etmek zorundadırlar. Yayın türünün sonrasında değiştirilmesi mümkün değildir. Kanalların mümkün seçenekleri ve birinci kanalı seyredeceklerin sayısı Tablo 9.30'da verilmiştir. Oyunun tepe noktası bulunup bulunmadığını ve birinci kanal için oyunun değerini bulunuz.

Tablo 9.30

Kanal 1 Yayın Türü	Kanal 2 Yayın Türü			Satır En Küçüğü
	Yarışma	Arkası Yarın	Komedî	
Yarışma	25	25	40	25
Arkası Yarın	25	40	18	18
Komedî	18	24	30	18
Sütun En Büyüğu	25	40	40	25 = 25

Çözüm 9.15: Tablonun satır en küçükleriyle oluşturulan son sütunu incelendiğinde enb (25, 18, 18) = 25 olduğu görülecektir. Bu, birinci kanalı en az 25 milyon kişinin izleyeceği anlamına gelir. Diğer taraftan, sütun en büyükleriyle oluşturulan son satır incelendiğinde enk(25, 40, 40) = 25 olduğu görülecektir. Bu ise ikinci kanalı en az 25 milyon kişinin izleyeceği anlamına gelir. Enb(satır en küçükleri) = enk(sütun en büyükleri) olduğundan, oyun tepe noktalı bir oyundur. Buna göre 25 milyon kişi birinci kanaldaki yarışma programını, kalan 25 milyon kişi ikinci kanaldaki yarışma programını izleyecektir. Özette oyunun satır oyuncusu için değeri 25, sütun oyuncusu için 25 (= 50 - 25) dır.

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

İki Kişiili Sabit Olmayan Toplamlı Oyunlar

- Uygulamada sabit olmayan toplamlı oyunlarla karşılaşmak daha olağandır. Rakip işletmelerin tam anlamıyla çalışma durumunda olmaları genellikle beklenmez. Bu kesimde oyuncuların işbirliği yapmalarının söz konusu olmadığı iki kişili sabit olmayan toplamlı oyun problemleri üzerinde durulacaktır.
- Örnek 9.16:** Soygun yapan iki kişi yakalanmış ve tutuketine konmuştur. Suçlu olduklarının bilinmesine karşın yargının elinde suçu kanıtlayacak yeterli delil yoktur. Bu nedenle savcı sanıkları birbirlerine karşı tanıklık etmeleri konusunda ikna etmeye çalışmaktadır. Savcı sanıkların suçlarını itiraf etmelerini sağlamak için her birine ayrı ayrı şunları söyler: Suçu biriniz itiraf eder diğerine karşı tanıklık ederse itiraf eden serbest kalır, itiraf etmeyen 9 yıl ceza alır. Her ikiniz birden suçlu olduğunuzu kabul ederseniz 6'şar yıl ceza alırsınız. Her ikiniz birden suçlu reddederseniz 1'er yıl ceza alırsınız. Sizce sanıklar için en uygun davranış ne olur?

Prof.Dr. Ünal H. ÖZDEN

381

©12 Ekim 2015 Pazartesi

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

Çözüm 9.16

Çözüm 9.16: Sanıkların birbirleriyle haberleşmelerinin mümkün olmadığını varsayıyalım. Buna göre sanıkların kazanç (ceza almak istemeyen bir durum olduğu için - değerli) matrisleri aşağıdaki gibi düzenlenir.

Birinci sanık için düzenlenen kazanç (ceza) matrisi aşağıda gösterilmiştir. İkinci sanığın ceza matrisine geçmeden önce birinci sanık için en iyi davranış biçiminin ne olacağını araştıralım. Birinci sanığın, ikinci sanığın itiraf edeceğini umduğumu düşünelim. Bu durumda kendisi için en iyi strateji suçu kabul etmek olur (-6, -9'dan daha iyidir). Birinci sanığın, ikinci sanığın reddedeceğini düşündüğünü varsayıyalım. Bu durumda birinci sanık için en iyi seçenek suçu kabul etmek olur (0, -1'den iyidir). Özette ikinci sanığın tavrı ne olursa olsun birinci sanık için en iyi davranış biçimini suçu kabul etmektir. Birinci sanığın ceza matrisi Tablo 9.31'de gösterilmiştir.

Tablo 9.31

Birinci Sanık	İkinci Sanık	
	İtiraf	Red
İtiraf	-6	0
Red	-9	-1

Prof.Dr. Ünal H. ÖZDEN

382

©12 Ekim 2015 Pazartesi

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

Simdi de ikinci sanık için en iyi davranış biçiminin ne olacağını araştıralım.
İkinci sanığın durumunu özetleyen ceza matrisi Tablo 9.32'de gösterilmiştir.

Tablo 9.32

Birinci Sanık	İkinci Sanık	
	İtiraf	Red
İtiraf	-6	-9
Red	0	-1

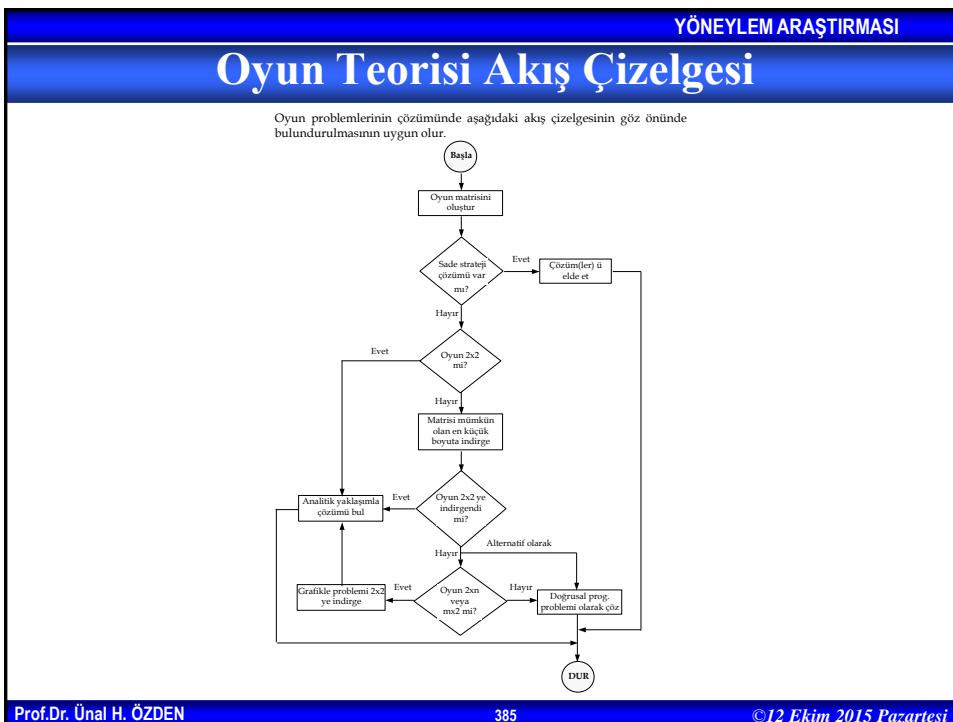
İkinci sanığın, birinci sanığın suçu kabul edeceğini umduğunu düşünelim. Tablo 9.32'den görüleceği gibi, bu durumda kendisi için en iyi strateji suçu kabul etmek olur (-6, -9'dan iyidir). İkinci sanığın, birinci sanığın reddedeceğini düşünüp varsayalım. Bu durumda kendisi için en iyi seçenek suçu kabul etmek olur (0, -1'den iyidir). Özette birinci sanığın tavrı ne olursa olsun ikinci sanık için en iyi davranış biçimini suçu kabul etmektir. Sabit olmayan toplamlı oyuncularda oyuncuların oyun matrisleri yukarıdaki gibi ayrı matrisler olarak değil tek matris halinde gösterilir. Birinci ve ikinci suçluların ceza matrislerinin göz önünde bulundurulmasıyla oluşturulan ceza matrisi aşağıda gösterilmiştir.

Tablo 9.33

Birinci Suçlu	İkinci Suçlu	
	İtiraf	Red
İtiraf	(-6, -6)	(0, -9)
Red	(-9, 0)	(-1, -1)

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

- Yukarıdaki açıklamaların ortaya koyduğu gibi oyunun tepe noktası (-6, -6) gözesinde ortaya çıkmaktadır. Bunun anlamı her iki sanığın suçu kabul etmesi ve 6'şar yıl ceza almaları (toplam 12 yıl ceza)'dır.
- Tablo 9.33 incelendiğinde (-1, -1) gözesinin işaret ettiği stratejilerin diğerlerinden daha iyi olduğu düşünülebilir. Çünkü bu sanıkların 6'şar yıl yerine 1'er yıl ceza almaları demektir. Ancak, (-1, -1) sonucu hiç gerçekleşmeyebilir. Çünkü sanıklardan biri bu gözenin işaret ettiği stratejiyi benimsemişken diğerini bundan vazgeçerse cezasının 1 yıl yerine sıfır yıl olmasını sağlayabilir. Bu yüzden (-1, -1) tepe noktası olamaz. İki-kışılı sıfır-toplamlı oyuncularda olduğu gibi, iki-kışılı sabit olmayan-toplamlı oyuncuların tepe noktası oyuncuların strateji seçimlerini tek başına değiştirmelerinin oyunculara hiçbir yarar sağlamadığı noktada ortaya çıkar.



YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

Oyun Teorisinin Türkiye'deki Durumu

Türkiye'de Oyun Teorisi üzerine çalışan ve dünya bilimsel platformlarında göz ardı edilmeyen bir akademisyenler grubu bulunmaktadır. Bunlar ülkemizin çeşitli üniversitelerinde, genellikle İktisat ve Matematik bölümlerinde çalışmaktadır. Bu kişiler uygulamalı projelere katkıda bulunabilecek birikime de sahiptirler. Ne var ki Türkiye'de bu birikime kayda değer bir talep bulunmamaktadır. Oysa ki dünyada Oyun Teorisi üzerine çalışan bilim adamlarından açık artırmaların tasarlanması kirliliğin önlenmesine kadar bir çok konuda entelektüel destek istenmektedir.

Türkiye'deki durumu, Oyun Teorisi'nin kamuoyunun gündemine nispeten gecikerek girmesiyle açıklamak mümkün olabilir.

Prof.Dr. Ünal H. ÖZDEN 386 ©12 Ekim 2015 Pazartesi

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

İhale Ve Oyun Teorisi

Son aylarda ülkemizde ve Avrupa'da birçok cep telefonu lisans ihalesi gerçekleşmektedir. Başarının ölçüsü vergi mükellefleri açısından ihalenin getirişi, tüketiciler açısından ise ihalenin yol açtığı rekabetçi ortam sonucu telefon ücretlerinin düşüklüğü olarak belirlenebilir. Her iki kesimi de korumakla sorumlu olan hükümetlerin de bu iki amaç arasında bir denge kurması beklenmektedir. Bazı ihaletlerin her iki açıdan da başarısız olması bir şanssızlık değil, ihalet kurallarını koyan hükümetlerin oyun teorisini yeterince hesaba katmamalarının sonucudur. Örneğin, Hollanda hükümetinin yaptığı ihalenin kuralları İngiltere'de uygulanan kuralların benzeri olmasına rağmen ihalet "fiyasko" denilecek bir sonuçla bitmiştir. İngiltere'nin beş lisans için \$34 milyar kazandığı ihalet göz önüne alındığında kişi başına benzer bir lisans ücretinin Hollanda hükümetine \$9 milyar kazandırması beklenirken ihalet sonucunda \$2.5 milyar elde edildi.

Prof.Dr. Ünal H. ÖZDEN

387

©12 Ekim 2015 Pazartesi

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

Bu sonuç, önemli olanın benzer kuralların uygulanması değil, şartlara uygun kuralların uygulanması olduğunu vurgulamaktadır. Bir başka ifade ile oyunun kurgusunun başlangıç şartlarına göre düzenlenmesi gerekmektedir. İngiltere'de cep telefonu alanında faaliyet gösteren dört oyuncu varken beş lisans için ihaleteye çıktı ve daha baştan en az bir yeni oyuncunun piyasaya gireceği belirlendi. İhale dokuz yeni oyuncunun teklif vermesiyle büyük bir rekabet içerisinde geçti ve İngiltere hükümetine \$34 milyar getiri sağladı.

Hollanda'da ise zaten beş oyuncu vardı ve yine beş lisans ihaleteye çıkarıldı. Yeni oyuncuların piyasaya giriş maliyetleri sadece ihalet bedeli ile sınırlı olmadığından mevcut oyunculara göre daha yüksektir. Hollanda ihalesi tamamen açık artırma ile yürütüldüğünden, yeni oyuncular hangi teklifi verirlerse versinler mevcut oyuncuların fiyatı yeni bir oyuncu için cazip olmayacak noktaya kadar artırabileceklerini düşündüklerinden ihaleteye bağımsız olarak girmekten çekindiler ve mevcut oyuncularla ortaklıklar kurarak ihaleteye girdiler. Dolayısı ile rekabet azaldığından Hollanda beklediği geliri elde edemedi. Aynı zamanda piyasaya yeni oyuncu girmesini ve rekabetin artmasını da sağlayamadı.

Prof.Dr. Ünal H. ÖZDEN

388

©12 Ekim 2015 Pazartesi

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

Ülkemizdeki GSM 1800 ihalesindeki ikinci lisansın birincisinden yüksek olması şartı İş Bankası-Telecom Italia ortaklığının, yaratıcı bir strateji uygulayarak ve ikinci lisans için cazip olacak bir ortamı ortadan kaldırarak, GSM 1800 teknolojisinde tek oyuncu olmalarına fırsat sağladı. Belki hükümetin iki lisanstan elde edilecek gelir beklentilerine yaklaşıldı, ama piyasadaki oyuncu sayısı sınırlı kaldı.

Sonuç olarak; hükümetlerin, yeterince talep yaratabilmek, potansiyel oyuncuların anlaşmalarına fırsat tanımamak ve ihale sonucunda rekabetçi bir piyasa yapısına kavuşabilmek için, ihale şartlarını mevcut piyasa konumunu göz önüne alarak ve oyun teorisinden faydalananak belirlemeleri gerekmektedir.

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

Sonuç

Bugünün dünyası, çok hızlı değişim ve gelişim içersindedir. Böyle bir ortamda işletmelerin ayakta kalabilmeleri, yapacakları iç ve dış işletme analizlerine ve bu analizler ışığında alınacak kararlara bağlıdır.

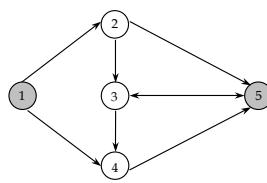
Karar alma tekniklerinden biri de oyun teorisidir. Oyun teorisini tarihsel gelişimi irdelendiğinde, oyunların şans kuramının 17. yüzyılda ortaya atılmış olduğu ve olasılık kuramı adı verilen matematik dalının gelişmesinde kaynak olduğu görülür. Çıkarları çatışan tarafların akıcı davranış kurallarının belirlenmesi olan oyun teorisi, bu tür karar ortamlarını açıklayan matematiksel bir yaklaşımındır.

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

AĞ MODELLERİ

Prof.Dr. Ünal H. ÖZDEN

Temel Kavramlar



Şekil 4.1

- Grafik: Belirli sayıda nokta ve bu noktaları birbirine bireştenen çizgi ve/veya eğrilerden oluşan kümeye grafik denir.
- Düğüm: Grafikte bulunan noktaların her birine düğüm denir. Düğümler, içlerine kendilerini tanımlayan sembollerin (harf veya rakam) yazılılığı küçük dairelerle gösterilirler.
- Dal: Herhangi iki düğümü birbirine bireştenen çizgi veya eğriye dal denir. Bir dal okla gösterildiğinde yönlendirilmiş olur. Okla birleştirilen iki düğüm i ve j olmak üzere, bunları bireştenen dal (i,j) ile gösterilir. Bu sembolde i, (i,j) dalgının başlangıç j ise bitiş düğümüdür. Böyle bir dal üzerinde bir akış söz konusuya, akışın yönü i' den j' ye olmak üzere tektir. Yönlendirilmemiş bir (i,j) dalı, biri (i,j) diğeri (j,i) olmak üzere yönlendirilmiş iki dal yerine geçer.
- Ağ: Grafiğin dalları üzerinde bir akış olması durumunda grafik, akış ağı veya kısaca ağ (serim, network, şebeke) ismini alır.
- Yol: Başlangıç düğümü, kendisinden önce gelen dalgın bitiş düğümü ile aynı olan dallar dizisine yol denir.
- Zincir: Kendisinden önce gelen dalla tek bir ortak noktası olan dallar dizisine zincir denir.
- Cevrim: Başlangıç düğümü ile bitiş düğümü aynı olan yola çevrim denir.

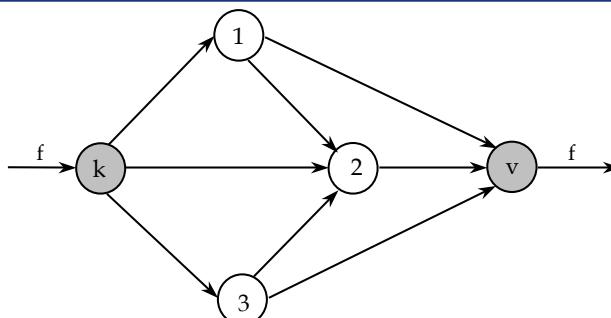
YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

En Yüksek Akış Problemleri

Bu bölümde, belirli bir zaman aralığında birbirlerine doğrudan değil ara noktalarla bağlı olan iki nokta arasında taşınan malzeme veya akış miktarının en büyütülebilmesi problemi üzerinde durulacaktır. Örneğin en yüksek trafik akışının sağlanmasına ilişkin problemlerin çözümünde EYA algoritması kullanılabilir.

İlk bakışta ulaşım problemi gibi görünen bu tip problemlerin ulaşım problemlerinden en önemli farkı, kaynak (başlangıç) ile varış (bitiş) arasındaki bağlantının doğrudan değil ara noktalar aracılığı ile sağlanmasıdır.

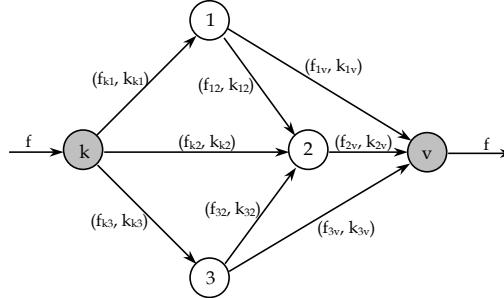
YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI



- Şekil 4.6'daki akış ağı, ürünün k ile gösterilen kaynaktan v ile gösterilen bitişe hangi dallar üzerinden, hangi yöne doğru gönderilebileceğini göstermektedir.
- Ara noktalar 1, 2, 3 ile işaretlenmiştir. Kaynak ve bitiş dahil ağıdaki beş düğüm birbirlerine $(k, 1)$, $(k, 2)$, $(k, 3)$, $(1, 2)$, $(1, v)$, $(2, v)$, $(3, 2)$ ve $(3, v)$ olmak üzere 8 tane bağlantıdır.
- Yanıtlanmak istenen k' dan v' ye gönderilmek istenen malzemenin, hangi dallar üzerinden hangi miktarlarda taşınması durumunda, v' ye aktarılan kısmın en büyük olacağıdır.

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

- Her dalın k_{ij} ile gösterilen belirli bir taşıma kapasitesi vardır. (i, j) dalı üzerinden taşınabilecek en yüksek miktarı ifade eden k_{ij} aynı zamanda, akişin i' den j' ye doğru gerçekleştiğini göstermektedir.
- Taşınan miktarın en büyük olmasının amaçlandığı bu tür problemlerde, en yüksek akış miktarı f ile gösterilir.
- Diğer taraftan, kapasitesi k_{ij} ile gösterilen (i, j) dalı üzerinden taşınan miktar f_{ij} ile açıklanır. Bu simbol de k_{ij} 'ye benzer şekilde akişin i' den j' ye doğru olduğunu göstermektedir.
- En yüksek akış problemleri doğrusal programlama problemi olarak da formüle edilip çözülebilir. Bunun için öncelikle ağı oluşturan dalların taşıma kapasitelerinin belirlenmesi gereklidir.



Prof.Dr. Ünal H. ÖZDEN

395

©12 Ekim 2015 Pazartesi

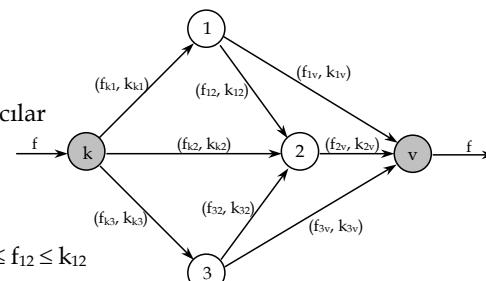
YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

- Açıklamalar doğrultusunda çizilen ağı aşağıdaki şekilde gösterilmiştir.
 - Şeklin ortaya koyduğu gibi ürün akışı kaynaktan 1, 2 ve 3 nolu düğümlere doğrudur. Buna göre,
- $f_{k1} + f_{k2} + f_{k3} = f$ yazılabilir.
- Kaynaktan varışa olan akışlar toplamının kaynaktaki akış miktarına eşitliğini gösteren bu denklem "denge denklemi" denir.
- Amaç fonksiyonunun $Z_{\text{enb}} = f$ şeklinde formüllenmesiyle, yukarıdaki ağıın doğrusal programlama modeli aşağıdaki gibi formüle edilebilir.

$$Z_{\text{enb}} = f \quad \text{"Amaç fonksiyonu"}$$

$$\left. \begin{array}{l} f_{k1} + f_{k2} + f_{k3} = f \\ f_{12} + f_{1v} = f_{k1} \\ f_{12} + f_{k2} + f_{32} = f_{2v} \\ f_{32} + f_{3v} = f_{k3} \\ f_{1v} + f_{2v} + f_{3v} = f \end{array} \right\}$$

Kısıtlayıcılar



Negatif olmama koşulları

$$0 \leq f_{k1} \leq k_{k1}, 0 \leq f_{k2} \leq k_{k2}, 0 \leq f_{k3} \leq k_{k3}, 0 \leq f_{12} \leq k_{12}$$

$$0 \leq f_{32} \leq k_{32}, 0 \leq f_{1v} \leq k_{1v}, 0 \leq f_{2v} \leq k_{2v}, 0 \leq f_{3v} \leq k_{3v}$$

Prof.Dr. Ünal H. ÖZDEN

396

©12 Ekim 2015 Pazartesi

En Yüksek Akış Algoritması

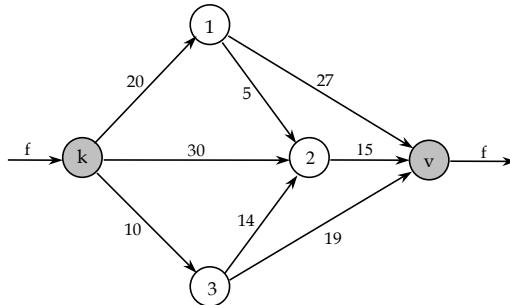
- En yüksek akış algoritmasının esası, kaynaktan bitişe pozitif akışın söz konusu olduğu bir yol bulmaktır. Böyle bir yol "akış artırıcı yol" olarak isimlendirilir. Akış artırıcı yol bulma çabalarının sonuçsuz kalması durumunda en yüksek akış bulunmuş olur.
- Rota Etiketleme İşlemi: Kaynaktan bitişe akış artırıcı yol bulmada kullanılan etiketleme işlemi kaynağın etiketlenmesiyle başlar. k' dan j' ye pozitif akış söz konusu ise j düğümü etiketlenir.
- Genel olarak, aşağıdaki koşullardan birinin sağlanması durumunda j etiketlenir.
 - i ve j düğümlerini birleştiren dal ileri doğrudur ve (i, j) üzerindeki akış miktarı dالın akış kapasitesinden küçüktür ($f_{ij} < k_{ij}$).
 - i ve j düğümlerini birleştiren dal (j, i) geriye doğrudur ve (j, i) üzerindeki akış miktarı sıfırdan büyüktür ($f_{ji} > 0$).
- Etiketleme işlemi bitiş noktası etiketleninceye degen sürdürülür. Bitiş etiketlendiğinde akışı artırıcı bir yol belirlenmiş olur.

- En yüksek akış algoritması, kapasite kısıtları ile birlikte düğümlerdeki akışın korunumunu da sağlayan uygun bir akışla başlar. Başlangıç akış planı (doğrusal programmanın başlangıç çözümüne benzer) olarak isimlendirilen bu plan, akış miktarının 0 olduğu duruma karşılık gelir. Bu akışın geliştirilebilmesi için öncelikle kaynak (başlangıç düğümü) etiketlenir. Etiketlenen düğüm * ile işaretlenir. Kaynağın etiketlenmesinden sonra yukarıda açıklanan rota etiketleme işlemiyle başka bir düğüm etiketlenir. Bitiş etiketlendiğinde pozitif akışın söz konusu olduğu akış artırıcı bir yol belirlenmiş olur. Belirlenen bu yol üzerindeki düğümlerin etiketleri yardımıyla yol üzerinden aktarılacak en yüksek akış (d) hesaplanır. d' nin hesaplanmasıдан sonra yolu ileri dallarındaki akışlar d kadar artırılırken, geriye doğru dallardaki akışlar d kadar azaltılır. Bu işlemler yeni akış artırıcı yolların bulunması için tekrarlanır.

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

Örnek 4.1

Örnek 4.1: Dallarının akış kapasiteleri (f_{ij}) oklar üzerinde gösterildiği gibi olan ağda k' dan v' ye taşınacak en yüksek ürün miktarını ve taşıma planını belirleyiniz. Problemin ağı Şekil 4.11'de gösterilmiştir.



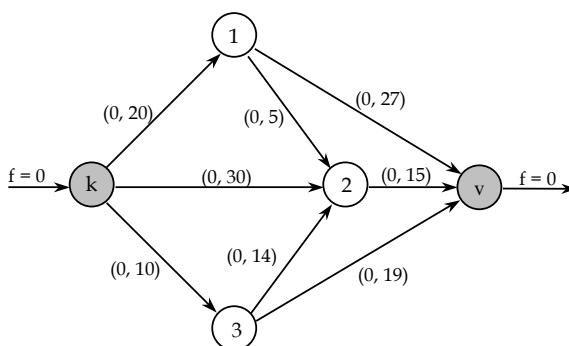
YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

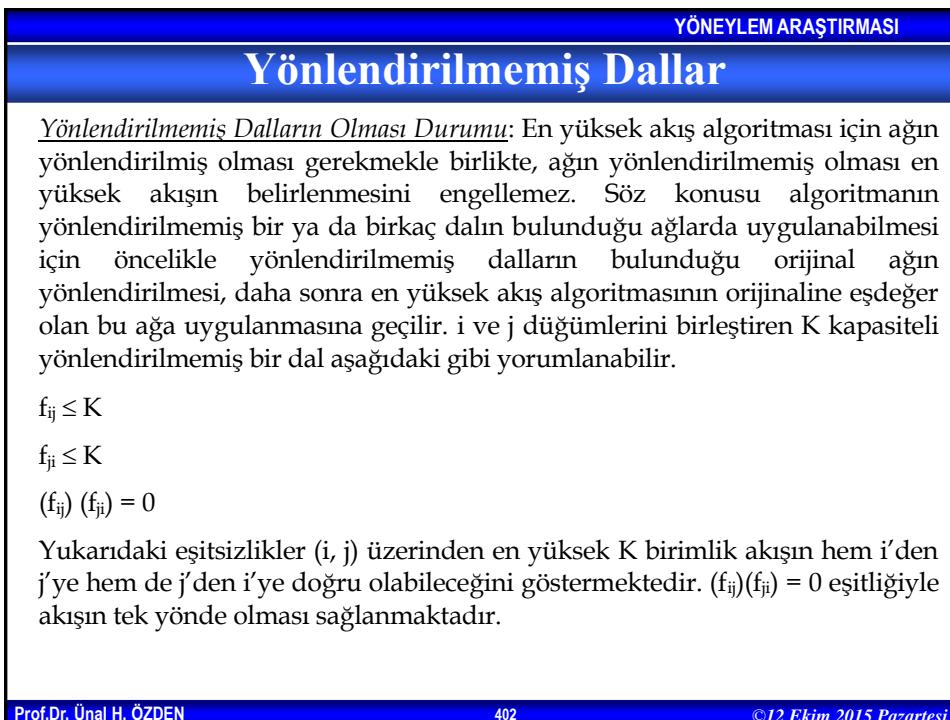
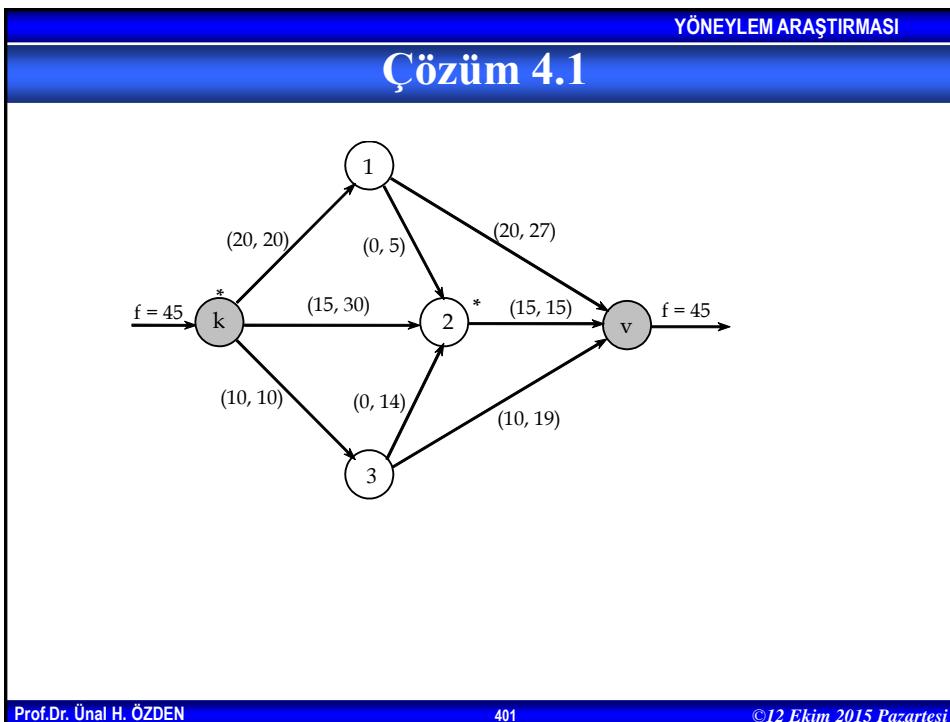
Çözüm 4.1

Çözüm 4.1: Problemin çözümüne herhangi bir akışın olmadığı durumla başlayalım. Başlangıç akış planını yansitan bu durum için aşağıdaki gibi bir eşitlik yazılabilir.

$$f_{k1} = f_{k2} = f_{k3} = f_{12} = f_{32} = f_{1v} = f_{2v} = f_{3v} = 0$$

Bu durum orijinal ağı üzerinde aşağıdaki gibi gösterilir. (i, j) dalları üzerindeki sayılar (f_{ij}, k_{ij})'leri göstermektedir.

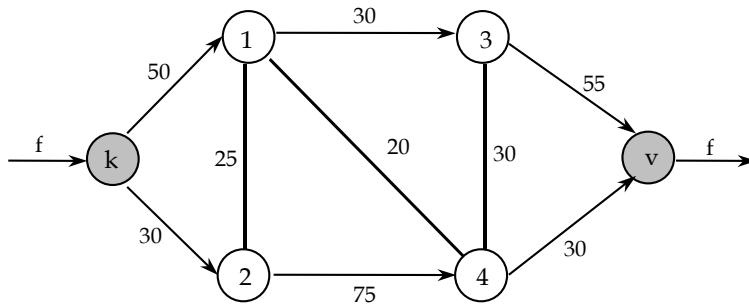




YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

Örnek 4.2

Örnek 4.2: Aşağıdaki gibi bir yol ağını ele alalım. Dallar üzerindeki sayılar trafik akış kapasitelerini göstermektedir. Problem, en yüksek trafik akışını sağlayabilmek için henüz yönlendirilmemiş dallar üzerine tek yön işaretinin hangi istikamette konulacağının belirlenmesidir.

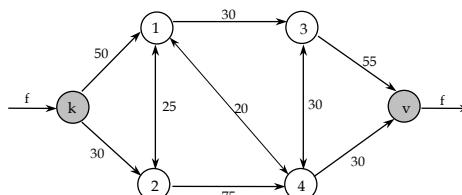


Şekil 4.23

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

Çözüm 4.2

Çözüm 4.2: Öncelikle yönlendirilmemiş her bir dalın ters yönlü ve eşit kapasiteli iki dalla değiştirilmesi gereklidir. Bu düzenlemeyle, Şekil 4.24'de gösterilen yönlendirilmiş ağ elde edilir.



Şekil 4.24

En yüksek algoritmanın, orijinaline eşdeğer olan bu ağ üzerinde uygulanmasıyla, k' dan v' ye en yüksek akış miktarı ve en yüksek akışı sağlayan rota belirlenir.

En iyi çözümün bulunmasından sonra her iki yönde akışın söz konusu olduğu dallar belirlenir ve aşağıdaki inceleme gerçekleştirilir.

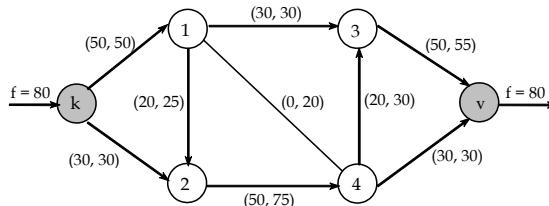
i ve j düşümlerini birleştiren yönlendirilmemiş bir dal üzerinde,

$f_{ij} > f_{ji}$ ise, (i, j) dalındaki akış ($f_{ij} - f_{ji}$) olur, yani yönlendirilmemiş (i, j) dalı i'den j'ye doğru yönlendirilir.

$f_{ij} < f_{ji}$ ise, (j, i) dalındaki akış ($f_{ji} - f_{ij}$) olur, yani yönlendirilmemiş (i, j) dalı j'den i'ye doğru yönlendirilir.

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

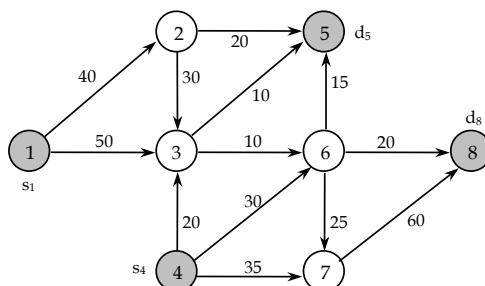
Çözüm 4.2



Şekil 4.25

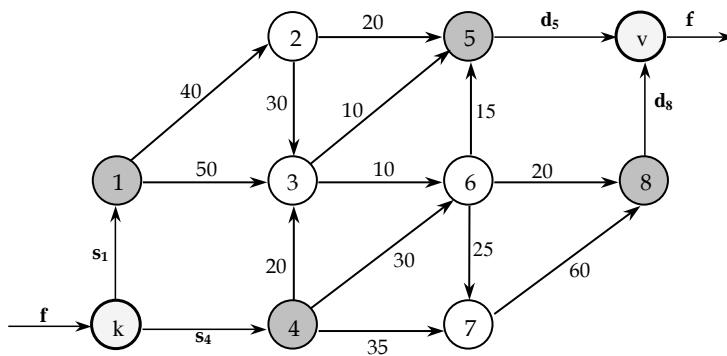
YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

- Cok Kaynak-Cok Bitiş Olması:** Ağ üzerinde birden fazla kaynak ve/veya birden fazla bitiş noktası bulunduğu düşünelim. Bu durumda en yüksek akışın belirlenebilmesi için hayali bir kaynak ile hayali bir bitiş noktasının oluşturulması zorunludur. Yaratılan hayali kaynak gerçek kaynaklara, gerçek bitiş noktaları hayali bitiş noktasına birer dala bağlanır. Ağa eklenen hayali dalların tümü ileriye doğrudur. Hayali dalların akış kapasitelerinin belirlenmesinden sonra problem en yüksek akış problemine dönüşmüştür.

Örnek 4.3:

Şekil 4.26

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI
Çözüm 4.3

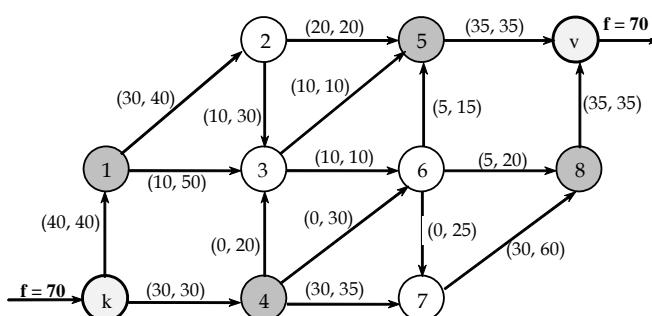


Şekil 4.27

Gördüğü gibi k' yi 1 nolu düğüme bağlayan dalaın kapasitesi s_1' e, 4 nolu düğüme bağlayan dalaın kapasitesi ise s_4' 'e eşittir. Gerçek bitiş noktalarını hayali bitiş noktasına bağlayan dalların taşıma kapasiteleri ise çıkış noktalarının istem miktarlarıyla bağlantılı olarak sırasıyla d_5 ve d_8 'dır.

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

Bu düzenlemenin ardından hayali kaynaktan bitiş noktasına en yüksek akışın sağlanması sağlanabilir. $s_1 = 40$, $s_4 = 30$, $d_5 = 35$, $d_8 = 35$ olarak verilmiş olsun. Bu durumda en iyi çözüm Şekil 4.28'deki gibi elde edilecektir.



Şekil 4.28

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

En Kısa Yol Problemleri

- Başlangıç ve bitiş düğümleri arasındaki en kısa yolun belirlenmesi problemi, en kısa yol problemi olarak bilinir.
- Ağ problemlerinin çoğu doğrusal programlama problemi olarak değerlendirilerek simpleks yöntemle çözülebilir. Bu durum en kısa yol problemleri için de geçerlidir. Bir en kısa yol problemini doğrusal programlama olarak inceleyebilmek için dallar üzerindeki akışların 1 birime, i' den j' ye malzeme taşıma maliyetinin ise (i, j) dalının uzunluğuna eşit olduğu düşünülür.
- Çözüm İçin Kullanılan Yöntemler:
 - Simpleks Yöntemi
 - Listeleme Yöntemi
 - Dijkstra Algoritması

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

- **Dijkstra Algoritması:** Dijkstra Algoritması, n düğümlü ağ kapsamındaki tüm dalların negatif olmayan ve bilinen uzunluklara (d_{ij}) sahip olduğu varsayıma dayanır. d_{ij} , (i, j) dalının uzunluğu, i' den j' ye gitmenin maliyeti veya (i, j) dalını katetme zamanı olabilir. i ve j düğümleri birbirlerine doğrudan, yani tek bir dalla bağlı degillerse $d_{ij} = \infty$ kabul edilir. $d_{ij} \neq d_{ji}$ olabilir. Ayrıca, bir düğümün kendine uzaklığı sıfır olduğundan, $d_{ii} = 0$ dir. Bu varsayımlar altında, düğümlerin önce geçici, sonra kalıcı olarak etiketlenmesi esasına dayanan Dijkstra algoritması, en kısa yol belirleninceye kadar aşağıdaki adımların tekrarlanmasını gerektirir.
- Ön adım: Başlangıç düğümüne sıfır ($d_{11} = 0$) kalıcı etiketi verilir. Sıfır ile kalıcı olarak etiketlenen başlangıç düğümü dışındaki bütün düğümlere, birer geçici etiket verilir. Geçici etiketi hesaplanacak düğüm başlangıç düğümüne tek bir dalla bağlı ise geçici etiketin değeri o dalın uzunluğuna, değilse $+\infty$ 'a eşittir. Geçici etiketlerin belirlenmesinden sonra en küçük olan araştırılır. Araştırma sonucu belirlenen en küçük değer ait olduğu düğümün kalıcı etiketi olur. En küçük değerli geçici etiket sayısı birden çok ise seçim, düğümlerden yalnızca birinin seçilmesi kaydıyla, rasgele yapılır. Kisaca, her seferinde yalnızca bir düğüm kalıcı olarak etiketlenir.

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

Birinci Adım: Kalıcı etiketi en yeni olan düğüm belirlenir. Bu düğüm K olsun. Ön adımdaki başlangıç düğümüne karşılık gelen bu düğüme bağlı olarak tüm geçici etiketlerin yeni değerleri aşağıdaki gibi hesaplanır.

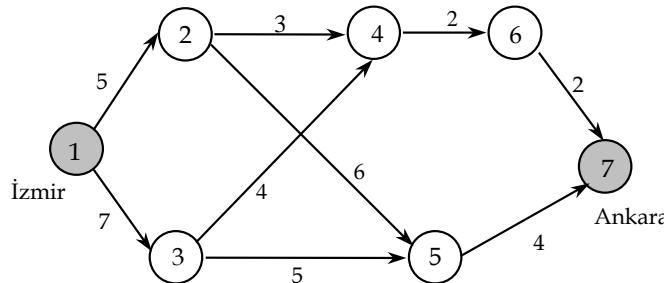
$$\text{Enk} \begin{cases} i \text{ düşümünün halihazırdağı geçici etiketi} \\ K \text{ düşümünün kalıcı etiketi} + (j, K) \text{ dalının uzunluğu} \end{cases}$$

İkinci adım: Birinci adımda hesaplanan geçici etiketlerden en küçük olanı ait olduğu düşümün kalıcı etiketi olur ve * ile işaretlenir. Önceden olduğu gibi, en küçük değerli etiket birden fazla olduğunda düğüm seçimi, her seferinde yalnızca bir düğüm olmak üzere, rasgele yapılır. Son düğüm kalıcı olarak etiketlendiğinde en kısa yol belirlenmiş olur. Son düşüm kalıcı etiketinin değeri en kısa yolun uzunluğuna eşittir.

En kısa yolu oluşturan dalların belirlenmesi için son düşümden başlanarak geriye doğru hareket edilir ve düğümlerin kalıcı etiketleri arasındaki farklar incelenir. Etiketler arasındaki fark iki düşüm arasındaki dalın uzunluğuna eşitse ilgili dal en kısa yol üzerinde, aksi halde değildir.

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

Örnek 4.3: İzmir'den Ankara'ya gitmek isteyen bir kişi gidebileceği yolları araştırmış ve iki şehri birbirine bağlayan yolları ve bunların uzaklıklarını Şekil 4.29'daki gibi belirlemiştir. Sürücünün amacı İzmir'den Ankara'ya en kısa yoldan gitmektir. İki şehir arasındaki en kısa yolu bulunuz.



Şekil 4.29

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

Çözüm 4.3

Çözüm 4.3: Ön adım: Başlangıç düğümünün sıfırla kalıcı olarak etiketlenmesinden sonra diğer düğümlerin etiketlenmesine geçilir.

Şekil 4.29'dan görüldüğü gibi başlangıç düğümüne doğrudan bağlı iki düğüm (2 ve 3) vardır. Bu düğümlerin başlangıç düğümüne uzaklıklarsı sırasıyla 5 ve 7 olduğundan bunların geçici etiketleri sırasıyla, 5 ve 7 olarak belirlenir. Bu iki düğümün dışındaki düğümlerin hepsi başlangıç düğümüne dolaylı olarak bağlı olduklarından etiketleri $+\infty$ 'a eşittir. Bu yolla belirlenen etiket değerleri aşağıda, ait oldukları düğüm numaraları altında gösterilmiştir.

$$\begin{array}{ccccccc} \text{Düğüm No:} & [1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7] \\ \text{Etiket No :} & [0^* & 5 & 7 & \infty & \infty & \infty & \infty] \end{array}$$

Geçici etiketlerden en küçük (5) olanı 2 nolu düşüme ait olduğundan, bu düşüm 5 ile kalıcı olarak etiketlenir. Böylece etiketler aşağıdaki gibi belirlenmiş ve ön adım tamamlanmış olur.

$$\begin{array}{ccccccc} \text{Düğüm No:} & [1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7] \\ \text{Etiket No :} & [0^* & 5^* & 7 & \infty & \infty & \infty & \infty] \end{array}$$

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

Birinci adım: En yeni kalıcı etiket 2 nolu düşüme aittir. Bu düşüme doğrudan bağlı olan 4 ve 5 nolu düğümlerin yeni geçici etiketlerinin hesaplanması gereklidir. Yeni etiket değerleri aşağıdaki gibi hesaplanmıştır.

Dördüncü düğümün geçici etiketi: $\text{Enk}\{\infty, 5 + 3\} = 8$

Beşinci düğümün geçici etiketi : $\text{Enk}\{\infty, 5 + 6\} = 11$

Hesaplanan değerlerin dikkate alınmasıyla düşüm etiketlerinin yeni değerleri aşağıdaki gibi olur.

$$\begin{array}{ccccccc} \text{Düğüm No:} & [1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7] \\ \text{Etiket No :} & [0^* & 5^* & 7 & 8 & 11 & \infty & \infty] \end{array}$$

İkinci adım: Birinci adımda belirlenen geçici etiketlerden en küçük olanın 7 olduğu ve bunun üçüncü düşüme ait olduğu görülebilir. Buna göre üçüncü düşüm etiketinin 7 olarak kalıcı kılınmasıyla düşüm etiketleri aşağıdaki gibi belirlenmiş olacaktır.

$$\begin{array}{ccccccc} \text{Düğüm No:} & [1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7] \\ \text{Etiket No :} & [0^* & 5^* & 7^* & 8 & 11 & \infty & \infty] \end{array}$$

Henüz tüm etiketler kalıcı olmadığından tekrar birinci adıma dönülür.

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

Birinci adım: Kalıcı etiketi en yeni olan üçüncü düğüme doğrudan bağlı 4 ve 5 nolu düğümlerin yeni geçici etiketleri,

Dördüncü düğümün geçici etiketi: $\text{Enk}\{8, 7 + 4\} = 8$

Beşinci düğümün geçici etiketi : $\text{Enk}\{11, 7 + 5\} = 11$

olarak hesaplanacak böylece düğüm etiketleri, aşağıdaki gibi belirlenecektir.

Düğüm No: [1 2 3 4 5 6 7]
Etiket No : [0* 5* 7* 8 11 ∞ ∞]

İkinci adım: Geçici etiketlerden en küçüğü dördüncü düğüme ait olduğundan, anılan düğüm 8 ile kalıcı biçimde etiketlenir. Buna göre,

Düğüm No: [1 2 3 4 5 6 7]
Etiket No : [0* 5* 7* 8* 11 ∞ ∞]

olur. Henüz tüm etiketler kalıcı olmadığından tekrar birinci adıma dönelim.

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

Birinci adım: En yeni kalıcı etiket 4 nolu düğüme aittir. Bu düğüme doğrudan bağlı tek düğüm olan 6 nolu düğümün yeni geçici etiketinin hesaplanması gereklidir. Bu işlem aşağıda gösterilmiştir.

Altıncı düğümün geçici etiketi: $\text{Enk}\{\infty, 8 + 2\} = 10$

Bu sonucun kullanılmasıyla belirlenen düğüm etiketleri aşağıda gösterilmiştir.

Düğüm No: [1 2 3 4 5 6 7]
Etiket No : [0* 5* 7* 8* 11 10 ∞]

İkinci adım: Geçici etiketlerden en küçüğü altıncı düğüme ait olduğundan anılan düğümün kalıcı etiketi 10 olur. Buna göre etiketler,

Düğüm No: [1 2 3 4 5 6 7]
Etiket No : [0* 5* 7* 8* 11 10* ∞]

olur. Etiketleme işlemi henüz tamamlanmadığından birinci adım tekrarlanır.

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

Birinci adım: Altıncı düğüme bağlı tek düğüm yedinci düğüm olduğundan anılan düğümün geçici etiketi,

Yedinci düğümün geçici etiketi: $\text{Enk}\{\infty, 10 + 2\} = 12$

olarak hesaplanır ve düğüm etiketleri aşağıdaki gibi belirlenmiş olur.

Düğüm No: [1 2 3 4 5 6 7]

Etiket No : [0* 5* 7* 8* 11 10* 12]

İkinci adım: En küçük değerli (11) geçici etiket beşinci düğüme aittir. Bu nedenle 11, beşinci düğümün kalıcı etiketi olur ve sonuçta düğüm etiketleri aşağıdaki gibi belirlenmiş olur.

Düğüm No: [1 2 3 4 5 6 7]

Etiket No : [0* 5* 7* 8* 11* 10* 12]

Bu noktada etiketi geçici olan bir düğüm bulunduğuundan birinci adıma dönülür.

Birinci adım: Kalıcı etiketi en yeni olan beşinci düğüme doğrudan bağlı tek düğüm olan yedinci düğümün geçici etiketinin yeni değeri,

Yedinci düğümün geçici etiketi: $\text{Enk}\{12, 11 + 4\} = 12$

olarak hesaplanmıştır.

Sonuçta etiketleme işlemi aşağıdaki gibi tamamlanmıştır.

Düğüm No: [1 2 3 4 5 6 7]

Etiket No : [0* 5* 7* 8* 11* 10* 12*]

Prof.Dr. Ünal H. ÖZDEN

417

©12 Ekim 2015 Pazartesi

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

Etiketlerin hepsi kalıcı olduğundan en kısa yol bulunmuştur. Şimdi de toplam uzunluğu 12 birim olan en kısa yol üzerindeki dalları belirleyelim. Bunun için son düğümden başlayarak geriye doğru düğüm düğüm gidelim. 7 ve 6 nolu düğümlerin kalıcı etiketleri arasındaki fark (2) anılar düğümleri birbirine bireleşiren dalın uzunluğuna eşit olduğundan (6, 7) dalı en kısa yol üzerindedir. 6 nolu düğümden 5 nolu düğüme gidilemez. 6 ve 4 nolu düğümlerin kalıcı etiketleri arasındaki fark (2), (4, 6)'nın uzunluğuna eşit olduğundan, bu dal en kısa yol üzerindedir. (4, 3) dalının uzunluğu bu düğümlerin etiketleri arasındaki farka eşit olmadığından, (4, 3) dalı en kısa yol üzerinde değildir. 4 ve 2 nolu düğümlerin kalıcı etiketleri arasındaki fark (2, 4)'ün uzunluğuna eşit olduğundan bu dal en kısa yol üzerindedir. Son olarak (2, 1)'nın uzunluğu bu dalı tanımlayan düğümlerin etiketleri arasındaki farka eşittir. Dolayısıyla bu dal en kısa yol üzerindedir. Buna göre İzmir'den yola çıkan sürücü sırasıyla, 2, 4, 6 nolu düğümlere uğrayarak İzmir'den Ankara'ya en kısa yoldan ulaşmış olur.

Prof.Dr. Ünal H. ÖZDEN

418

©12 Ekim 2015 Pazartesi

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

Araç Yenileme Problemi

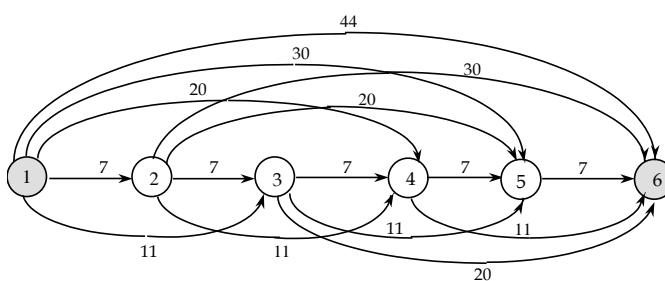
- Araç Yenileme Problemi:** Gerek işletmelerin gerekse kişilerin kullandıkları araçların çoğu ilerleyen yaşlarına bağlı olarak sürekli artan bakımonarım harcamalarına yol açarlar. Eskiyen araçların belirli aralıklarla yenilenmesi, araçların her bir yenilenişinde katlanılması gereken yüksek satın alma maliyetine rağmen toplam maliyeti düşürebilir.
- Örnek 4.4:** Tek araca sahip bir işletme gelecek beş yıl için araç yenileme planını geliştirmek istemektedir. Aracın yıllık bakım-onarım masrafı (TL), aracın incelenen yılın başındaki yaşına bağlı olup aşağıdaki gibi tahmin edilmiştir. Aracın yaşına bağlı olarak her yıl biraz daha artan bakım-onarım masraflarından kurtulmak için eskiyen aracı satıp yerine yenisini almak da mümkündür. Eskiyen aracın satış fiyatı (TL), satıldığı yıldaki yaşına bağlı olup aşağıdaki tabloda gösterilmiştir.
- Hesaplamlarda basitlik sağlamak için araç satın alma maliyetinin değişmediği ve 15 TL olduğu kabul edilmiştir. Buna göre 5 yıllık planlama dönemi için en iyi araç yenileme programını oluşturunuz.

Tablo 4.1

Aracın Yaşı	Bakım Masrafı	Satış Fiyatı
0	2	-
1	3	10
2	5	9
3	8	5
4	12	3
5	-	1

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

Çözüm 4.4: Önce, aracın satın aldığı yıl başlangıç, planlama döneminin sonu bitiş olmak üzere 6 düğümlü ağı oluşturalım. Ara noktalar ($j = 1, 2, 3, 4, 5$) araç yenilemenin mümkün olduğu yılın başına karşılık gelmektedir.



Şekil 4.30

$i < j$ için (i, j) dali, i yılı başında satın alınan aracın j yılı başında satılarak yerine yenisinin alınmasına karşılık gelir. (i, j) daliının uzunluğu (d_{ij}) ise, i yılı başında satın alınan aracın j yılı başında satılmasına kadar geçen süre içinde bakım ve onarımını yapmak, j yılının başında aracı satmak ve yerine yenisini almanın net maliyetine eşittir.

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

Buna göre $i \geq j$ için $d_{ij} = \infty$ ve $i < j$ için,

$d_{ij} = (i, i+1, \dots, j-1)$ yıllarında araç bakım-onarım harcaması) + (i yılı başında araç satın alma maliyeti) - (j yılı başında eski araç satışından elde edilen gelir)

olarak tanımlandığında, her bir (i, j) dalının uzunluğu (net maliyet olarak) aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$d_{12} = d_{23} = d_{34} = d_{45} = d_{56} = 15 + 2 - 10 = 7$$

$$d_{13} = d_{24} = d_{35} = d_{46} = 15 + 2 + 3 - 9 = 11$$

$$d_{14} = d_{25} = d_{36} = 15 + 2 + 3 + 5 - 5 = 20$$

$$d_{15} = d_{26} = 15 + 2 + 3 + 5 + 8 - 3 = 30$$

$$d_{16} = 15 + 2 + 3 + 5 + 8 + 12 - 1 = 44$$

Hesaplama sonuçları Şekil 4.30'da gösterilmiştir. Artık Dijkstra Algoritmasını uygulayabiliriz. Algoritmanın uygulanmasıyla elde edilen hesaplama sonuçları aşağıda arka arkaya verilmiştir.

Ön adım:

Düğüm No:	[1	2	3	4	5	6]	} Ön adım
Etiket :	[0*	7	11	20	30	44]	

Düğüm No:	[1	2	3	4	5	6]	} Ön adım
Etiket :	[0*	7*	11	20	30	44]	

Prof.Dr. Ünal H. ÖZDEN

421

©12 Ekim 2015 Pazartesi

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

Birinci adm:

Düğüm No:	[1	2	3	4	5	6]	} Birinci tekrar
Etiket :	[0*	7*	11	18	27	37]	

İkinci adm:

Düğüm No:	[1	2	3	4	5	6]	} İkinci tekrar
Etiket :	[0*	7*	11*	18	27	37]	

Birinci adm:

Düğüm No:	[1	2	3	4	5	6]	} Üçüncü tekrar
Etiket :	[0*	7*	11*	18*	22	29]	

İkinci adm:

Düğüm No:	[1	2	3	4	5	6]	} Dördüncü tekrar
Etiket :	[0*	7*	11*	18*	22*	29]	

Birinci adm:

Düğüm No:	[1	2	3	4	5	6]	} Dördüncü tekrar
Etiket :	[0*	7*	11*	18*	22*	29]	

Prof.Dr. Ünal H. ÖZDEN

422

©12 Ekim 2015 Pazartesi

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

Etiketlerin hepsi kalıcı olduğundan en kısa yol daha doğrusu, en düşük maliyetli araç yenileme planı belirlenmiş olur. En düşük net maliyet 29 TL'dir. Şimdi de işletmenin hangi yıllarda araç yenileyeceğini belirleyelim. 5 ve 6 nolu düğümlerin etiketleri arasındaki fark (5, 6) dalının uzunluğuna eşit olduğundan bu dal en kısa yol üzerindedir. 5 ve 4 nolu düğümlerin kalıcı etiketleri arasındaki fark, bu iki düğümü birleştiren dalın uzunluğuna eşit olmadığından, bu dal en kısa yol üzerinde değildir. 5 ve 3 nolu düğümlerin etiketleri arasındaki fark (3, 5) dalının uzunluğuna eşit olduğundan, bu dal en kısa yol üzerindedir. 3 ve 2 nolu düğümlerin etiketleri arasındaki fark bu düğümleri birleştiren dalın uzunluğuna eşit değildir. Dolayısıyla, (2, 3) dalı en kısa yol üzerinde değildir. 3 ve 1 nolu düğümlerin etiketleri arasındaki fark (1, 3) dalının uzunluğuna eşit olduğundan, bu dal da en kısa yol üzerindedir. Buna göre çözüm, (1, 3), (3, 5), (5, 6) dallar dizisi olarak belirlenmiş olur. En kısa yolu oluşturan dalları inceleyelim. Dalların ortaya koyduğu gibi, planlama dönemi başında satın alınan araç 2 yıl kullanıldıktan sonra satılarak yerine yeni alınıacaktır. Yeni araç iki yıl kullanıldıktan sonra satılacak, yerine yeni alınacak ve yeni araç 1 yıl kullanıldıktan sonra satılacak ve planlama dönemi tamamlanacaktır.

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI**En Küçük Yayılmalı Ağaç Problemleri**

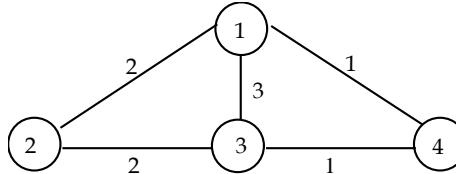
En küçük yayılmalı ağaç problemleri, en kısa yol problemlerinin özel bir biçimidir. En küçük yayılmalı ağaç problemlerinde dal uzunlıklarının bilindiği varsayılr. İki problem arasındaki en önemli fark en küçük yayılmalı ağaç probleminde düğümlerin tümünü, en kısa yol probleminde düğümlerin bazılarını birleştiren dallar dizisinin bulunmasıdır. Ayrıca en kısa yol probleminde ağın yönlendirilmiş olması şart iken, yayılmalı ağaç probleminde ağın yönlendirilmemiş olması gereklidir. Uygulamada çok sık karşılaşılan bu tür problemlere örnek olması bakımından belirli bir yerdeki bilgisayarlar topluluğunun birbirlerine bağlanmak istendiklerini düşünelim. Burada, bilgisayarların her biri bir düğüm ve bunları birbirlerine bağlayan yeraltı kabloları dal olarak ele alınabilir. Bilgisayarlar arasındaki bağlantıyı sağlayan yeraltı kablolarının toplam uzunluğunun en kısa olması amaçlanabilir. Bu amaca ulaşmak için belirlenen dallar topluluğunun herhangi bir çevrim kapsamaması gereklidir.

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

- En Küçük Yayılmalı Ağaç: Kapsadığı dalların uzunlukları toplamı en küçük olan yayılan ağaca en küçük yayılmalı ağaç denir.

Yayılan Ağaç: n düğümlü bir ağda tüm düğümler arasında bağlantı kurulan ve $(n - 1)$ sayıda daldan oluşan çevrim içermeyen dallar dizisidir.

Dört düğümlü bir ağ ile bu ağa ait yayılan ağaçların listesi aşağıda verilmiştir.



Şekil 4.33

$$\{(1, 2), (1, 3), (1, 4)\} - \{(1, 2), (1, 4), (2, 3)\} - \{(1, 2), (1, 3), (3, 4)\}$$

$$\{(1, 2), (1, 4), (3, 4)\} - \{(1, 2), (2, 3), (3, 4)\} - \{(1, 3), (1, 4), (2, 3)\}$$

$$\{(1, 3), (2, 3), (3, 4)\} - \{(1, 4), (2, 3), (3, 4)\}$$

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

En Küçük Yayılmalı Ağaç Algoritması: En küçük yayılmalı ağaç, aşağıda açıklanan üç adımlık bir algoritmanın tekrarı ile saptanabilir.

1. adım: Ağ kapsamındaki düğümlerin oluşturduğu küme N olsun. Bu kümeden rastgele bir düğüm (i) seçilerek bu düğüme en yakın olan düğüm (j) belirlenir. Bu iki düğümü birleştiren (i, j) dalı en küçük yayılmalı ağacın bir dalı olur. Bu yolla ağın düğümleri, birinde birleştirilmiş (i ve j), diğerinde birleştirilmemiş (i ve j dışındaki) düğümlerin bulunduğu iki alt kümeye ayrılmış olur. Birleştirilmiş düğümlerin oluşturduğu küme C, birleştirilmemiş düğümlerin oluşturduğu küme \tilde{C} ile gösterilir. Algoritmanın tüm adımlarında $N = C \cup \tilde{C}$, dolayısıyla $C \cap \tilde{C} = \{\}$ olduğu unutulmamalıdır.

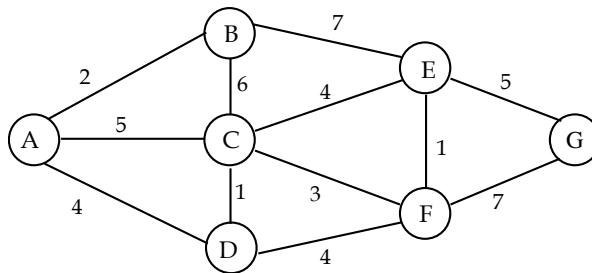
2. adım: \tilde{C} 'daki düğümlerden (n), C'deki düğümlerden (m) herhangi birine en yakın olan düğüm belirlenir. Bu kez, bu iki düğümü birleştiren (m, n) dalı en küçük yayılmalı ağaca eklenir. Bu durumda $C = \{i, j, n\}$ olacağından, C'ye eklenen düğüm (n) \tilde{C} kümelerinden çıkarılır.

3. adım: İkinci adımdaki işlemler tüm düğümler birleştirilinceye degen tekrarlanır. Birleştirilecek düğüm kalmadığında, yani $\tilde{C} = \{\}$ olduğunda en küçük yayılmalı ağaç belirlenmiş olur.

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

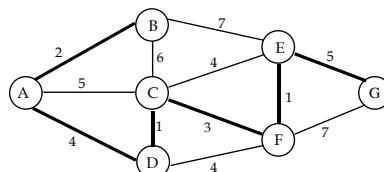
Örnek 4.6

Örnek 4.6: Bir işletmenin, çalışanlarının hizmetine sunduğu 7 adet bilgisayarı vardır. Bilgisayarlar arasındaki uzaklıklar aşağıda gösterilmiştir.

**Şekil 4.34**

Bilgisayarlar yeraltı kabloları ile birbirlerine bağlanmak istenmektedir. Bu amacı gerçekleştirecek en kısa kablo uzunluğu nedir?

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

Çözüm 4.6**Şekil 4.40**

Başlangıçta hangi düğümün ilk düğüm alınmasının bir önemi yoktur. İlk düğüm olarak E'yi seçelim. Bu kez işlemler ayrıntılıyla değil aşağıdaki gibi kümeye gösterimiyle açıklanacaktır.

Birinci adım: $C = \{E, F\}$, $\tilde{C} = \{A, B, C, D, G\}; (E, F)$ ağaçta.

İkinci adım: $C = \{E, F, C\}$, $\tilde{C} = \{A, B, D, G\}; (F, C)$ ağaçta.

Üçüncü adım: $C = \{E, F, C, D\}$, $\tilde{C} = \{A, B, G\}; (C, D)$ ağaçta.

Dördüncü adım: $C = \{E, F, C, D, A\}$, $\tilde{C} = \{B, G\}; (D, A)$ ağaçta.

Beşinci adım: $C = \{E, F, C, D, A, B\}$, $\tilde{C} = \{G\}; (A, B)$ ağaçta.

Altıncı adım: $C = \{E, F, C, D, A, B, G\}$, $\tilde{C} = \{\}$; (E, G) ağaçta.

$C = \{A, B, C, D, E, F, G\}$, $\tilde{C} = \{\}$ olur. $\tilde{C} = \{\}$ olduğundan problem çözülmüştür.

Şekil 4.40'da koyu renkle çizilmiş ve bekleniği gibi sayıları ağdaki düğüm sayısının 1 eksigine (6) eşit olan (A, B), (A, D), (C, D), (C, F), (F, E), (F, G) dallarından oluşan en küçük yayılmalı ağacın uzunluğu 16 birimdir.

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

Proje Çizelgeleme Problemleri

- Proje yönetiminde, planlama tekniklerinden kritik yol yöntemi (CPM[1]) ile proje değerlendirme ve gözden geçirme tekniği (PERT[2]) gelişmiş ülkelerde çok geniş bir uygulama alanı olan proje çizelgeleme teknikleridir. Anılan yöntemler eldeki sınırlı kaynaklar ölçüsünde projenin tamamlanma süresinin belirlenmesi, toplam maliyeti en düşük yapacak proje süresinin saptanması, sürenin kısaltılması amacıyla kaynak aktarımı yapılması vb. konularda yöneticiler için hayatı önem taşıyan sorunlara etkili çözüm yolları aralar ve bulurlar. Anılan yöntemler ülkemizde de birçok büyük projede kullanılmıştır. II. Fatih Sultan Mehmet Köprüsü ve Güney Doğu Anadolu Projesi CPM, Keban Barajı ve İstanbul Boğaz Köprüsü PERT'in uygulandığı projelere örnek gösterilebilir.
- [1] Critical Path Method kelimelerinin ilk harfleri.
- [2] Program Evaluation and Review Techniques kelimelerinin ilk harfleri.

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

- CPM ve PERT, birbirine bağlı çok sayıda faaliyetten oluşan büyük ve projelerin programlanması sırasında kullanılan yöntemlerdir. Birbirlerinden bağımsız geliştirilmelerine karşın birbirlerine çok benzeyen bu iki yöntem arasındaki en önemli fark faaliyet sürelerine ilişkindir. PERT'de faaliyetlere ilişkin süreler belirsiz olup bir takım olasılık hesaplamaları ile tanımlanıldığı halde, CPM'de bu sürelerin kesinlikle bilindiği varsayılmaktadır. Yöntemleri açıklamadan önce konuya ilgili temel kavramların açıklanması uygun olur.

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

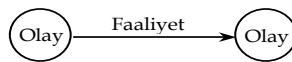
Faaliyet: Bir iş ya da projenin tamamlanması için gerçekleştirilen eylemlerin her birine faaliyet denir.

Her faaliyetin bir süresi vardır ve gerçekleşmesi genellikle belirli kaynakların kullanılmasını gerektirir. Örneğin, bir ürünün bir yerden başka bir yere taşınması, temel atılması, duvarın sıvanması, bahçenin sulanması vb. birer faaliyettir. Projedeki faaliyetler ağ üzerinde oklarla gösterilir. Okların yönü faaliyetlerin akışını, yeri ise faaliyetlerin proje içindeki sırasını gösterir.

Olay: Bir iş veya projenin zaman akışı içindeki belirli noktalarda varılması gereken aşamalarına olay denir.

Süreleri olmamakla birlikte her olayın birer tarih ya da saatı vardır. Örneğin duvarın sıvanmaya başlanması tarihi, kamyonun depoya varış saati gibi. Olaylar okların birleşikleri yerlerde birer daire ile gösterilirler.

Olay ve faaliyetlerin ağda nasıl gösterildikleri Şekil 4.41'de açıklanmıştır.



Şekil 4.41

Kukla Faaliyet: Zaman ve kaynak kullanımı gerektirmeyen, yalnızca iki veya daha fazla sayıdaki gerçek faaliyet arasındaki ilişkileri göstermek amacıyla kullanılan faaliyetlere kukla faaliyet denir.

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

Kukla faaliyetler kesik çizgili oklarla gösterilirler ve paralel (aynı noktada başlayıp aynı noktada biten) faaliyetlerin ayrı edilmesinde kullanılır.



Şekil 4.42

- Süreli Kukla Faaliyet: Belirli bir süresi olmakla birlikte kaynak kullanımı gerektirmeyen faaliyete, süreli kukla faaliyet denir.
- Örneğin, sulanan veya boyanan bir yerin kuruması için bekletilmesi. Süreli kuklalar bazan kukla faaliyetler gibi kesik çizgi ile bazan gerçek faaliyetler gibi dolu çizgi ile gösterilirler.
- Gantt Çizelgesi
- Faaliyetler arasındaki zaman ve maliyet faktörlerini de dikkate alarak gösterme fikri yeni değildir. Özellikle Henry Gantt bu konuda daha 1900' lü yılların başlarında önemli çalışmalar yapmış, planlama ve kontrol faaliyetleri için kendi adıyla anılan çizelgeyi (Gantt çizelgesi) geliştirmiştir.

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

A, B, C ve D olmak üzere dört faaliyetten oluşan bir projenin uygulama programı (Gantt Çizelgesi) Tablo 4.3'de verilmiştir.

Tablo 4.3

Faaliyet	H A F T A														
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
A												
B													
C												
D													

Tablo 4.3 incelendiğinde, A'ının 4, B'ının 3, C'ının 6 ve D'ının 2 haftada tamamlandıkları görülecektir. Buna göre örneğin, 10. haftanın sonunda A ve B faaliyetlerinin bitmiş, C faaliyetinin yarısının tamamlanmış ve D faaliyetine hiç başlanmamış olması gerekmektedir.

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

Bu amaçla oluşturulan Tablo 4.4 incelendiğinde 10. hafta sonunda A ve B faaliyetlerinin programa uygun olarak tamamlanmış, D faaliyetinin henüz başlamamış olduğu, C faaliyetinin ise programın 2 hafta gerisinde olduğu görülür.

Tablo 4.4

Faaliyet	H A F T A														
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
A				—											
B					—	—									
C							—				
D													

Basit ve küçük çapta projeler için kullanışlı olmasına karşın, büyük projeler için kullanışlı olmayan Gantt çizelgesi, faaliyetler arasındaki bağımlılıkları da tam olarak açıklayamamaktadır. Hangi faaliyetlerin geciktirilebileceği, hangilerinin geciktirilemeyeceği hakkında bilgi de vermemektedir. Zaman-maliyet analizi yapabilmek için gerekli bilgi Gantt çizelgesinde yoktur. Söz konusu çizelgenin bu olumsuz özellikleri ağ yaklaşımını ortaya çıkarmıştır.

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

Ağ Yaklaşımı

Proje söz konusu olduğunda ağ şu şekilde tanımlanmaktadır. "Program amacına ulaşabilmek için gerçekleşmesi gereken faaliyetlerden ve olaylardan meydana gelen, faaliyet ve olayların birbirleriyle olan bağlantı ve ilişkilerini gösteren şemaya ağ" denir. Ağ yaklaşımının sağladığı yararlar aşağıdaki gibi özetlenebilir.

- Bir ya da daha fazla sayıda projenin aynı anda ve istenen ayrıntıda planlama ve denetiminin yapılmasına olanak sağlar.
- Faaliyetler arasındaki karmaşık ilişkiler oldukça basit ve açık biçimde gösterilir.
- İşlemler oldukça basit olup, bilgisayarda kolayca programlanabilir.
- Kritik faaliyetlerin saptanması sonucunda önemli olan bir grup faaliyete dikkat çekilir.
- Bazı faaliyetlerin gecikme ve/veya hızlandırılmalarının etkileri ve bunlara bağlı olarak oluşacak darboğazların kolayca saptanabileceği bir ortam oluşturulur.
- Değişik proje tarihlerine ilişkin toplam proje maliyetleri hesaplanarak en düşük toplam maliyetli proje planı seçilebilir.
- Kaynaklar, aynı kaynağı kullanan faaliyetler arasında en düşük toplam maliyete neden olacak şekilde böülüstürülebilir.
- Projenin uygulanması sırasında güncelleştirmeye önem verilerek projenin günü gününe izlenmesi sağlanır.

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

Kritik Yol Yöntemi CPM

Kritik yol yöntemi (CPM), bir projenin erçekleştirilmesinde insan gücü, makina ve zamandan en yüksek düzeyde yararlanmayı sağlayan ağ tekniklerini kullanma bilimidir. CPM formülasyon, planlama, gözlem ve kontrol olmak üzere başlıca üç bölüm içerir.

- Formülasyon sürecinde, projenin belirli faaliyet ve olaylara ayrılmasıından sonra bunlar (faaliyetler ve olaylar) arasındaki öncelik ilişkilerinin belirlenmesi gereklidir. Bir faaliyetin kendisinden önce bitirilmesi gereken faaliyete "önceki faaliyet", kendisinin tamamlanması ile başlayan faaliyete de "sonraki faaliyet" denir.
- Faaliyetlerin öncelik ilişkilerinde istenilen önemli bilgiler aşağıdaki üç sorunun yanıtlanması ile gerçekleştirilebilir.

1. Herhangi bir faaliyet başlamadan önce hangi faaliyet(ler) tamamlanmalıdır?
2. Hangi faaliyetler paralel yürütülmelidir?
3. Bu faaliyetleri hangi faaliyetler izlemelidir?

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

Proje Ağının Oluşturulması

Proje ağının çizilmesinde uyulması gereken kurallar şöyledir.

- Her ağda tek bir başlama olayı ile tek bir bitiş olayı olmalıdır. Gerekirse bu olaylar yapay olarak yaratılırlar.
- Bir faaliyet, kendisinden önceki faaliyet(ler) bitmeden başlayamaz.
- Bir okun uzunluğu önemli olmayıp oklar yalnızca öncelikleri belirtir.
- İki olay en fazla bir faaliyet ile doğrudan bağlanabilir.
- Her olayın bir numarası olmalıdır. Olaylar okların küçük numaralı bir noktadan daha büyük numaralı bir noktaya gitmesini sağlayacak biçimde numaralandırılır. Böylece ağ üzerinde çevrim oluşması engellenmiş olur.

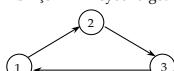
Prof.Dr. Ünal H. ÖZDEN

437

©12 Ekim 2015 Pazartesi

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

Şekil 4.43'deki faaliyetlerin bir çevrim meydana getirdiği görülmektedir.



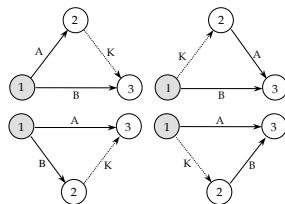
Şekil 4.43

Şekil 4.44'de 1 ve 2 numaralı olaylar birden fazla faaliyetle doğrudan bağlanmış olup bu yasaktır.



Şekil 4.44

Kural 4'e ters düşen bu durumdan kurtulmak için kukla faaliyet kullanılır. Bu duruma uygun alternatif kukla faaliyetler Şekil 4.45'de gösterilmiştir.



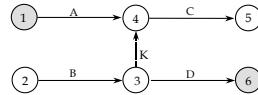
Şekil 4.45

Prof.Dr. Ünal H. ÖZDEN

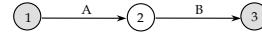
438

©12 Ekim 2015 Pazartesi

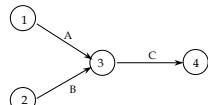
YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI



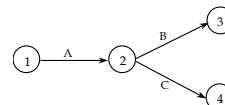
Şekil 4.47



Şekil 4.48



Şekil 4.49



Şekil 4.50

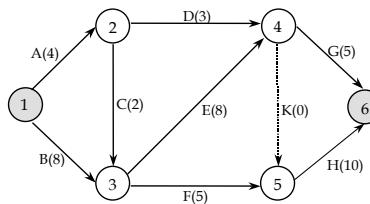
YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

Örnek 4.7: Süre ve öncelik ilişkileri aşağıda verilen A, B, ..., G, H faaliyetlerinden oluşan projenin ağız çiziniz.

Tablo 4.6

Faaliyet	Süre (gün)	Önceki Faaliyet
A	4	-
B	8	-
C	2	A
D	3	A
E	8	B, C
F	5	B, C
G	5	D, E
H	10	D, E, F

- Çözüm 4.7:** Tablodaki verilerden hareketle kurulan proje ağı Şekil 4.51' de gösterilmiştir.



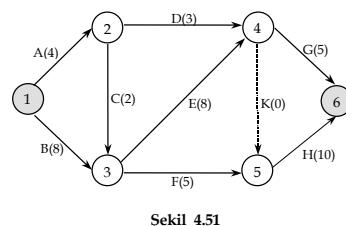
Şekil 4.51

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

- Herhangi bir proje yönetim problemi doğrusal programlama olarak tanımlanabilir ve simpleks yöntemle çözülebilir. Bu durumu açıklamak için Örnek 4.7'deki problemi ele alalım.
- d_i ($i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$) olayın gerçekleşme zamanı olsun. Buna göre sözgelimi, d_6 projenin, d_3 ise B ve C faaliyetlerinin tamamlanma zamanlarını gösterir. Bu durumda ($d_6 - d_1$), projenin tamamlanması için geçen süreye karşılık gelir. Amaç projenin en kısa sürede tamamlanmasıdır. Buna göre amaç fonksiyonu
- $Z_{enk} = d_6 - d_1$
- şeklinde formüle edilebilir. Herhangi bir (i, j) faaliyeti için j 'nin ortaya çıkması i 'nin gerçekleşmesine ve (i, j) 'nin tamamlanmış olmasına bağlıdır. Yani, herhangi bir faaliyet belirli bir süreden daha kısa zamanda tamamlanamaz.

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

- Buna göre faaliyetlerin tamamlanma süreleri dikkate alınarak aşağıdaki süre kısıtlayıcıları yazılır.
- $Z_{enk} = d_6 - d_1$
- $d_6 - d_5 \geq 5$ H faaliyeti kısıtlayıcısı
- $d_6 - d_4 \geq 5$ G faaliyeti kısıtlayıcısı
- $d_5 - d_4 \geq 0$ Kukla faaliyet kısıtlayıcısı
- $d_5 - d_3 \geq 5$ F faaliyeti kısıtlayıcısı
- $d_4 - d_3 \geq 8$ E faaliyeti kısıtlayıcısı
- $d_4 - d_2 \geq 3$ D faaliyeti kısıtlayıcısı
- $d_3 - d_2 \geq 2$ C faaliyeti kısıtlayıcısı
- $d_2 - d_1 \geq 4$ A faaliyeti kısıtlayıcısı
- $d_3 - d_1 \geq 8$ B faaliyeti kısıtlayıcısı
- Negatif olmama koşulu; $d_i \geq 0'$ in eklenmesiyle kritik yol belirleme probleminin doğrusal programlama formülasyonu tamamlanmış olur.
- Yukarıdaki gibi formüllenen problem, simpleks yöntemle çözürek projenin en kısa tamamlanma süresi belirlenebilir. Nitekim, yukarıdaki problem simpleks yöntemle çözülmüş ve projenin en erken 26 günde ($Z_{enk} = 26$) tamamlanacağı belirlenmiştir. En iyi olduğu belirlenen çözümde $d_1 = 0$, $d_2 = 4$, $d_3 = 8$, $d_4 = 16$, $d_5 = 16$, $d_6 = 26$ olarak elde edilmiştir.



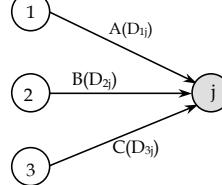
Şekil 4.51

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

- Ağ analizi yaklaşımıyla kritik yolu belirlenmesi konusuna geçmeden önce, bundan sonra sıkça kullanılacak olan, bazı semboller tanımlayalım.
- $D_{ij} = (i, j)$ faaliyetinin tamamlanma süresi
- $E_i = i$ olayının en erken ortaya çıkma zamanı
- $L_i = i$ olayının en geç ortaya çıkma zamanı
- E_j , i olayından kaynaklanacak faaliyetlerin en erken başlama zamanını, L_i ise aynı faaliyetlerin en geç başlama zamanını verir. Kritik yol üzerindeki olayların en erken başlama ile en geç başlama zamanları aynı olmak zorundadır. $E_i \neq L_i$ olması durumunda bu olayları kritik yolu uzatmadan geciktirmek mümkün olur ki bu, kritik yol tanımına aykırıdır.
- E_i değerleri aşağıda açıklanan 3 adımlık bir algoritmayla belirlenir.
- 1. $E_1 = 0$ 'dır.
- 2. Her faaliyet önceki olay meydana gelir gelmez başlatılır.
- 3. En erken ortaya çıkış veya başlama zamanı, o olayı oluşturan faaliyetlerin en geç tamamlananın bitiş zamanına eşittir.
- Bu adımlar ağır başlangıç noktasından başlayarak bitiş noktasına kadar olan her olay için uygulanır.

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

- Bir olay noktasının en erken meydana geliş zamanının hesaplanabilmesi için olayı oluşturan tüm faaliyetlerin başlangıç olaylarının E_j değerlerinin hesaplanmış olması gereklidir. E_j değerlerinin hesaplanmasına örnek olmak üzere Şekil 4.54'ü dikkate alalım. Şekil 4.54' den görüldüğü gibi, j olayının gerçekleşmesi için A, B ve C faaliyetleri tamamlanmış olmalıdır.



Şekil 4.54

- j olayının gerçekleşmesi için kendisinden önce gelen faaliyetlerin tamamlanmış olması gerektiğinden, j 'nin en erken ortaya çıkış zamanı aşağıdaki bağıntıdan bulunur.
- Yukarıdaki bağıntının genel formu aşağıdaki gibi açıklanabilir.

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

- Projenin son olayının en erken ortaya çıkış zamanı hesaplandığında, projenin en erken tamamlanma süresi belirlenmiş olur. En erken tamamlanma süresinin ilk ve son olaylar arasındaki en uzun yolu uzunluğuna eşit olduğu gösterilebilir.
- L_i değerleri de E_i 'ler gibi üç adımlık bir algoritma ile hesaplanırlar.
- $L_n = E_n$ 'dir
- Her faaliyet bir sonraki olay noktasının en geç meydana geliş zamanından faaliyet süresi çıkarıldığında elde edilen zamanda başlatılır.
- En geç meydana geliş zamanı, o olaydan kaynaklanan faaliyetlerin en küçük başlama zamanı olarak belirlenir.
- Bu adımlar bitiş noktasından başlayıp geriye doğru giderek başlangıç noktasına kadar olan her olay için uygulanır.
- Bir olay noktasının en geç meydana geliş zamanının hesaplanabilmesi için o olaydan kaynaklanan faaliyetlerin sona erdiği noktaların tümünün L_i değerlerinin hesaplanmış olması gereklidir.

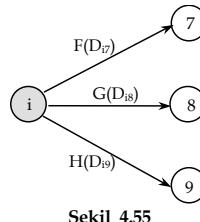
Prof.Dr. Ünal H. ÖZDEN

445

©12 Ekim 2015 Pazartesi

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

- En geç meydana geliş zamanı kavramını aşağıdaki şekil üzerinde açıklayalım.
- Şekil 4.55' den görüldüğü gibi F; L₇; G; L₈ ve H; L₉ sürelerinde tamamlandıklarında projenin tamamlanması ertelenmeyecektir.



Şekil 4.55

- Yukarıdaki şeitin ortaya koyduğu gibi, projenin tamamlanma süresinin uzamaması, olmasına bağlıdır.
- Bu bağıntı aşağıdaki gibi genellenebilir.

Prof.Dr. Ünal H. ÖZDEN

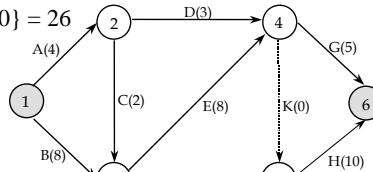
446

©12 Ekim 2015 Pazartesi

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

- Bu açıklamaların ardından örnek 4.7'deki 6 olayın en erken başlama (E_i) zamanları aşağıdaki gibi hesaplanmıştır.
- $E_1 = 0$
- $E_2 = E_1 + D_{12} = 0 + 4 = 4$
- $E_3 = \text{enb}\{E_1 + D_{13}, E_2 + D_{23}\} = \text{enb}\{0 + 8, 4 + 2\} = 8$
- $E_4 = \text{enb}\{E_2 + D_{24}, E_3 + D_{34}\} = \text{enb}\{4 + 3, 8 + 8\} = 16$
- $E_5 = \text{enb}\{E_3 + D_{35}, E_4 + D_{45}\} = \text{enb}\{8 + 5, 16 + 0\} = 16$
- $E_6 = \text{enb}\{E_4 + D_{46}, E_5 + D_{56}\} = \text{enb}\{16 + 5, 16 + 10\} = 26$
- En geç tamamlama zamanları (L_i) aşağıdaki gibi hesaplanmıştır.

$L_6 = 26$
 $L_5 = L_6 - D_{56} = 26 - 10 = 16$
 $L_4 = \text{enk}\{L_5 - D_{45}, L_6 - D_{46}\} = \text{enk}\{16 - 0, 26 - 5\} = 16$
 $L_3 = \text{enk}\{L_4 - D_{34}, L_5 - D_{35}\} = \text{enk}\{16 - 8, 16 - 5\} = 8$
 $L_2 = \text{enk}\{L_3 - D_{23}, L_4 - D_{24}\} = \text{enk}\{8 - 2, 16 - 30\} = 6$
 $L_1 = \text{enk}\{L_2 - D_{12}, L_3 - D_{13}\} = \text{enk}\{6 - 4, 8 - 8\} = 0$



Şekil 4.51

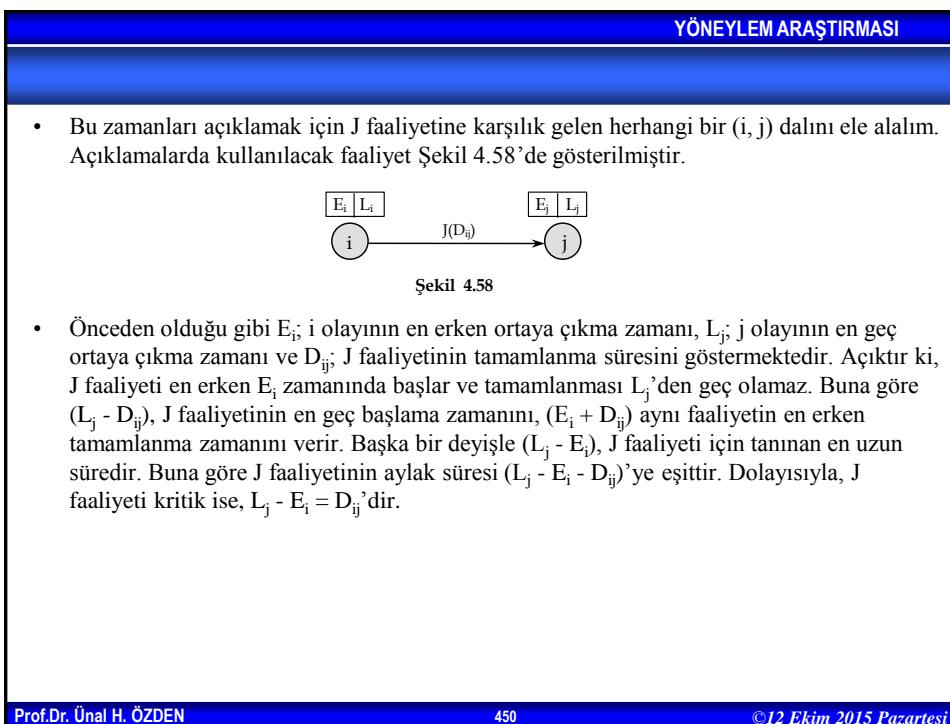
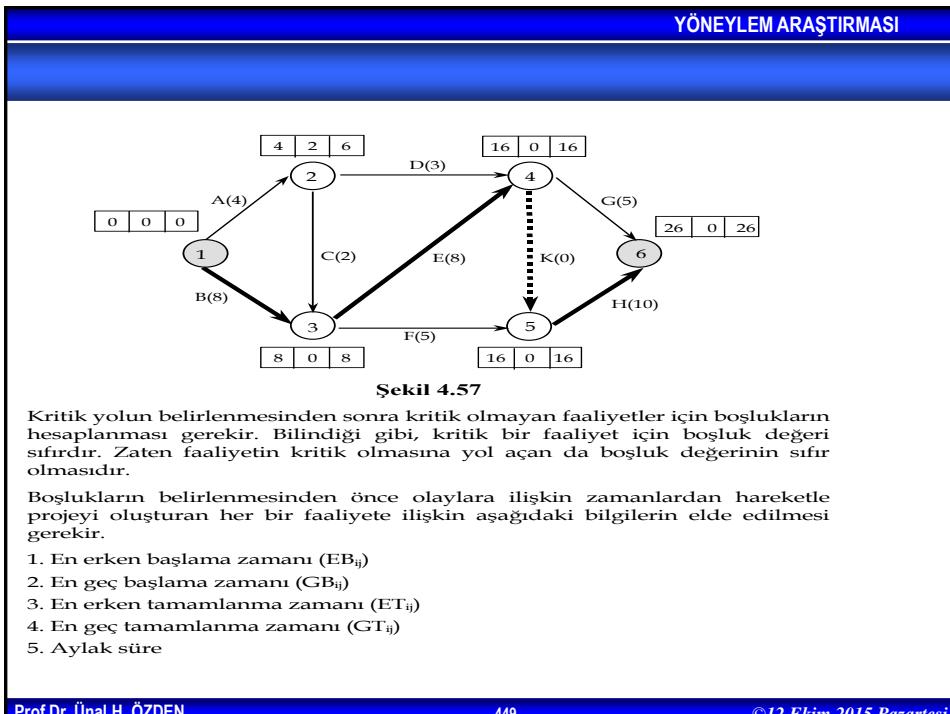
YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

- İleriye ve geriye doğru hesaplamalarla elde edilen E_i ve L_i değerleri proje ağında kendilerine ait olay noktaları üzerinde gösterilirler. Gösterim Şekil 4.56'da açıklandığı gibidir.



Şekil 4.56

- Olayların en erken başlama zamanları ile en geç başlama zamanlarının hesaplanmasıından sonra kritik faaliyetler belirlenebilir. Herhangi bir (i, j) faaliyetinin kritik olabilmesi için aşağıdaki koşulları sağlaması gereklidir.
 - $E_i = L_i$
 - $E_j = L_j$
 - $E_j - E_i = L_j - L_i = D_{ij}$
- Bu koşullar faaliyetin en geç başlama (tamamlanma) ve en erken başlama (tamamlanma) zamanları arasında aylak süre veya boşluk bulunmadığını göstermektedir. Bu nedenle faaliyet kritiktir. Örnek projeyi oluşturan faaliyetlerden kritik olanların B, E, K ve H faaliyetleri oldukları görülebilir. Kritik faaliyetler Şekil 4.57'de dolu çizgi ile gösterilmiştir.



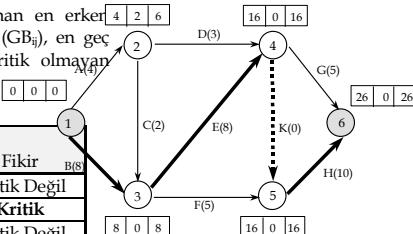
YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

Örnek 4.7'deki proje kapsamındaki faaliyetler için hesaplanan en erken başlama (EB_{ij}), en erken tamamlama (ET_{ij}), en geç başlama (GB_{ij}), en geç tamamlama (GT_{ij}) ve aylak süre değerleri ile kritik ve kritik olmayan faaliyetler Tablo 4.9'da gösterilmiştir.

Tablo 4.9

Faaliyet	Süre	EB_{ij}	ET_{ij}	GB_{ij}	GT_{ij}	Aylak Süre	Fikir
A	4	0	4	2	6	2	Kritik Değil
B	8	0	8	0	8	0	Kritik
C	2	4	6	6	8	2	Kritik Değil
D	3	4	7	13	16	9	Kritik Değil
E	8	8	16	8	16	0	Kritik
F	5	8	13	11	16	3	Kritik Değil
K	0	16	16	16	16	0	Kritik
G	5	16	21	21	26	5	Kritik Değil
H	10	16	26	16	26	0	Kritik

Tablo incelendiğinde, B, E ve H faaliyetlerinin kritik oldukları ve projenin tamamlanma süresinin 26 gün olarak hesaplandığı görülebilir. Bu yolla da aynı sonuca ulaşılmış olmasına karşın hesaplamalar önceki yaklaşma göre fazla zaman alıcıdır. Bu özelliği bu yöntemin en zayıf tarafıdır.



Şekil 4.57