

Aplicaciones a las ecuaciones del movimiento

¿Por qué es determinante saber lo que es la derivación sucesiva en el estudio de la mecánica? Porque los físicos la emplean para describir el movimiento de los cuerpos en el espacio mientras transcurre el tiempo. Particularmente, en lo que concierne a tres magnitudes más importantes: **distancia recorrida (x)**, **velocidad (v)** y **aceleración (a)**.

Este diagrama sintetiza el uso de la derivada en física:

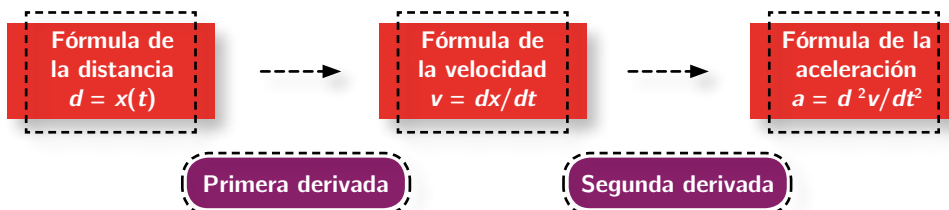


Figura 3.1 La Mecánica es la rama de la Física encargada de estudiar el movimiento.

Para realizar el recorrido propuesto por el diagrama, basta con disponer de la ecuación que describe la distancia recorrida por un cuerpo respecto al tiempo y, a partir de ello, comenzar a derivar.

Ejemplo 1:

Una lata se desliza por una mesa a cierta velocidad. En determinado momento, comienza a descender por una rampa. La distancia que recorre a partir de ese momento está dada



por: $x(t) = 4t^2 + 2.5t$

Calcular:

1. Las fórmulas de la velocidad y la aceleración	2. La velocidad de la lata a los 4 segundos	3. La aceleración en $t = 3$ s
$v = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt} 4t^2 + 2.5t$ $v = 8t + 2.5$ $a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} 8t + 2.5$ $a = 8$	<p>Como $v = 8t + 2.5$</p> <p>En $t = 4$ s</p> $v = 8(4) + 2.5$ $v = 32 + 2.5$ $v = 34.5 \text{ m/s}$	<p>Como $a = 8$</p> $a(3) = 8 \text{ m/s}^2$

El anterior es un caso típico de movimiento rectilíneo uniformemente acelerado (m.r.u.a.), por lo que la ecuación de la distancia o posición se vuelve constante en la segunda derivada; pero esto no tiene por qué ser una regla. Hay movimientos más irregulares cuya segunda derivada es variable (como algunos casos que se proponen en la actividad de aprendizaje). Lo que sí es cierto es que a la física le importa únicamente la derivada hasta el segundo orden, ya que ello le pone en conocimiento de las magnitudes que son de su interés.

Ejemplo 2:

Una piedra es lanzada verticalmente hacia arriba. Su altura está descrita por $x(t) = 38t - 4.9t^2$.

1. Encontrar en qué momento la piedra se detendrá	2. ¿Cuál es la altura máxima alcanzada?	3. ¿Cuál es la velocidad de la piedra a los 5 segundos de ser lanzada?
<p>La piedra se detiene cuando $v = 0$</p> $v = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dx} 38t - 4.9t^2 =$ $38 - 9.8t = 0$ <p>Despejamos t</p> $t = \frac{-38}{-9.8} = 3.87 \text{ s.}$	<p>La altura máxima se alcanza en el momento en que la piedra pierde toda su velocidad, que es a los 3.87 s.</p> $x(t) = 38t - 4.9t^2$ $(3.87) = 38(3.87) - 4.9(3.87)^2$ $x(3.87) = 147.06 - 73.39$ $x(3.87) = 73.39 \text{ metros}$	<p>En la pregunta 1 tenemos que $v = 38 - 9.8t$</p> <p>A los 5 segundos:</p> $v(5) = 38 - 9.8(5)$ $v(5) = 38 - 49 = -11 \text{ m/s}$ <p>Lo cual significa que la piedra ya va de bajada.</p>

Ejemplo 3:

Dos automóviles se mueven según las siguientes ecuaciones:

$$x(t) = 25t + 8t^2 \quad \text{y} \quad x(t) = 15t + 10t^2$$

Pregunta: ¿en qué momento sus velocidades serán iguales?

Derivemos ambas fórmulas para hallar las expresiones de la velocidad.

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dx} 25t + 8t^2 = 25 + 16t$$

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dx} 15t + 10t^2 = 15 + 20t$$

Las velocidades son iguales donde coinciden sus fórmulas:

$$25 + 16t = 15 + 20t$$

$$25 - 15 = 20t - 16t$$

$$10 = 4t$$

$$t = \frac{10}{4} = 2.5 \text{ s}$$

Al sustituir en las ecuaciones de la velocidad se comprueba que $v_1 = 65 \text{ m/s} = v_2$.

Entrena tus habilidades sobre la primera y segunda derivada en los siguientes problemas propuestos.



Actividad 4

CG 5, 5.1, 7 y 7.2 CDBM 3, 6 y 8

Aplicaciones a la física. Descripción del movimiento

Resuelve los siguientes problemas.

1. La posición de una bicicleta está determinada por: $x(t) = 7t + 5.7t^2$, donde t representa los segundos y x los metros. Calcula:

- a. La velocidad que llevará a los 3 s.
- b. La magnitud de su aceleración.

2. Un automovilista aplica los frenos y describe un movimiento dado por:

$$x(t) = 32t - 3.2t^2$$

- a. ¿Cuál es el valor de su aceleración?
- b. ¿Qué distancia habrá recorrido a los 2.8 s?
- c. ¿En qué momento su velocidad será cero?

3. Al aplicar los frenos de una bicicleta, ésta sigue un movimiento descrito por:

$$x(t) = 14t - 14t^2$$

Calcula en qué momento la velocidad será igual a 7m/s

- a. ¿Qué distancia habrá recorrido hasta entonces?
- b. ¿Cuál es el valor de la aceleración?

4. Una piedra es arrojada hacia abajo de modo que su posición está descrita por:

$$x(t) = 10t + 4.9t^2$$

- a. ¿Cuál será la velocidad de la piedra a los 5 s?
- b. ¿En qué momento la velocidad alcanzará los 100 m/s?

5. Al disparar una flecha hacia arriba, su altura está determinada por: $x(t) = 45t - 4.9t^2$

- a. Calcula en qué momento su velocidad será cero.
- b. ¿Cuál será su velocidad a los 5 s?

6. Dos objetos se mueven de acuerdo con las siguientes ecuaciones:

$$x(t) = t^3 + 2t \text{ y } x(t) = t^2 + 10t$$

- a. ¿Qué objeto se mueve a mayor velocidad después de transcurridos 2 s?
- b. ¿Cuál es el valor de la aceleración de cada objeto a los 3 s?

7. La posición de una mosca en vuelo está dada por: $x(t) = t^3 - 2t^2 + 5t$

- Calcula su velocidad a los 5 s.
- ¿Cuál es el valor de la aceleración a los 2.5 s?

8. Dos atletas corren 100 m planos. La ecuación que describe la distancia recorrida por cada uno de ellos está dada por:

$$d_1(t) = \frac{3t^2}{10} + 8t \text{ y } d_2(t) = \frac{7t^2}{20} + 7t$$

- ¿Quién tiene la mayor velocidad de salida?
- ¿Quién ganará la carrera?
- ¿Con qué velocidad llegará cada uno a la meta?
- En una carrera de 400 m, ¿quién llegaría primero?

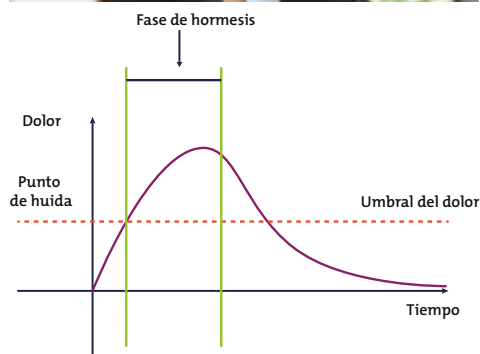


Figura 3.2 Usando una lámpara de rayos infrarrojos para elevar la temperatura de la piel, se observa que la mayoría de las personas comienzan a sentir dolor cerca de los 45 grados.

Valores extremos de una función

En medicina existe un término conocido como umbral del dolor. Este parámetro intenta responder a las siguientes preguntas: ¿qué intensidad mínima debe tener un estímulo para que pueda definirse como doloroso?, ¿cuál es el máximo valor en la escala del dolor que puede soportar una persona?, ¿los hombres son más, o menos tolerantes al dolor que las mujeres?

Un instructor deportivo debe conocer la máxima capacidad de trabajo cardíaco de una persona, porque no todos podemos elevar el número de latidos y respiraciones hasta los mismos rangos sin comprometer nuestra salud. Algo semejante ocurre con la presión sanguínea, hay un límite mínimo y uno máximo para saber si padecemos presión alta o baja.

A esos valores que marcan una frontera entre dos comportamientos cualitativamente diferentes se les conoce como puntos extremos, o bien, **máximos** y **mínimos**.

No debe sorprender que para conocer estos valores sólo necesitamos conocer la función que modela determinado fenómeno y, por supuesto, algo que involucre a la derivada.