ASIGNATURA	Matemáticas II
UNIDAD	Unidad 1. Ecuaciones cuadráticas
APRENDIZAJE	Generaliza el método de completar el trinomio cuadrado perfecto y obtiene la fórmula general para resolver
TEMÁTICA	Fórmula general para resolver una ecuación cuadrática.

Tema: Ecuación general de segundo grado.

Pantalla 1

En las ecuaciones de **primer grado con una sola variable** se busca determinar el valor de una incógnita bajo ciertas condiciones, y donde dicha incógnita aparece elevada a la primera potencia.

La **ecuación general de segundo grado,** también conocida como **ecuación cuadrática**, es uno de los conceptos más importantes y fundamentales en el álgebra. Este tipo de ecuación aparece en una amplia variedad de problemas matemáticos y aplicaciones prácticas, desde el cálculo de trayectorias en física hasta la optimización en economía. Comprender y resolver ecuaciones de segundo grado es esencial, ya que se sienta las bases para estudios avanzados en matemáticas y ciencias.

¡Recuerda!

Una ecuación es una igualdad matemática que involucra una o más incógnitas y establece que dos expresiones son iguales.

Las ecuaciones son fundamentales en matemáticas y se utilizan en una variedad de contextos para modelar y resolver problemas en diversas disciplinas como álgebra, geometría, física, ingeniería, economía y muchas más.

Existen varios tipos de ecuaciones en matemáticas, y se clasifican según las propiedades de sus términos y las operaciones involucradas. Uno de esos tipos se denomina ecuación polinomial con una incógnita, e involucra una variable y expresiones polinómicas. Un polinomio es una suma de términos, cada uno de los cuales es el producto de una constante, llamada coeficiente, y una potencia de la incógnita. La forma general de una ecuación polinomial es:

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$$

Donde:

- n es el grado del polinomio, que es el exponente más alto al que está elevada la incógnita x, y este debe de ser un numero natural.

- $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ con los coeficientes del polinomio, siendo $a_n \neq 0$.

Las ecuaciones polinomiales se clasifican según su grado:

- Un polinomio de primer grado ($n = 1$) es una ecuación lineal. Las cuales (como ya hemos mencionado), ya las has estudiado en la unidad anterior.
- Un polinomio de segundo grado ($n = 2$) es una ecuación cuadrática. Las cuáles serán objeto de nuestro estudio en esta unidad.
- Un polinomio de tercer grado ($n = 3$) es una ecuación cúbica.
- Y así sucesivamente.

Sustituyendo $n = 2$ en la ecuación general de un polinomio obtenemos:

$$a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$$

Si substituimos los coeficientes a_2, a_1 y a_0 por los coeficientes a, b y c obtenemos la ecuación general de segundo grado como comúnmente se conoce:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Donde a, b y c son números reales ($\mathbb{R}$), con $a \neq 0$, y x es la incógnita.

NOTA: La incógnita puede ser reemplazada por cualquier otra literal, por lo general para representar incógnitas en una ecuación se utilizan las letras x, y o z.

Actividad: Tomando en cuenta lo descrito, ¿Cuál de las siguientes opciones son ecuaciones cuadráticas con una incógnita?

a) $2x^2 + 3$ b) $x^2 = 0$ c) $y = x^2$ d) $y^2 + 2y + 3 = 0$

e) $x^2 + 3x + 2 = 0$

Opciones

1. a, b, c son todas ecuaciones cuadráticas con una incógnita
2. b, d, e son todas ecuaciones cuadráticas con una incógnita
3. c, d, e son todas ecuaciones cuadráticas con una incógnita
4. a, c, e son todas ecuaciones cuadráticas con una incógnita

Pantalla 2

Gráfica de una ecuación de segundo grado.

Ahora analicemos la gráfica de una de una ecuación de segundo grado con una incógnita. Para ello hagamos variar con diferentes valores la incógnita de una ecuación de segundo grado y veamos los diferentes valores resultantes. Si realizamos lo anterior, la incógnita y el resultado de la ecuación realmente se comportarán como variables, además dichos valores que toma ambas variables están relacionadas bajo una regla de correspondencia.

De lo anteriormente mencionado, deberías haber notado que se parece a un concepto que probablemente ya has revisado antes, este es un concepto muy importante en matemáticas y es el concepto de **función**.

¡Recuerda!

Una función es una regla de correspondencia entre dos conjuntos de tal manera que a cada elemento del primer conjunto le corresponde uno y sólo un elemento del segundo conjunto.

La gráfica de una función es el conjunto de puntos en el plano de la forma (x, y) en donde x está en el dominio de la función y, además $y = f(x)$. A continuación, revisaremos y discutiremos algunas cuestiones importantes de una función cuadrática:

$$y = ax^2 + bx + c$$

Primero, **¿Qué tipo de forma geométrica resulta tras ver la sucesión de puntos en el plano?**

Para ello, te invito a realizar la gráfica de diferentes funciones cuadráticas con el método de tabulación ingresando en el siguiente enlace:

https://www.geogebra.org/m/z6dyzfh4

Actividad: ¿Qué figura geométrica resulto después de graficar las distintas funciones cuadráticas en el plano cartesiano?

a) Línea recta
b) Hipérbola
c) Parábola
d) Circulo
e) Variada

Si tu respuesta fue "parábola", estás en lo correcto.

Algunas de las características de las parábolas son las siguientes:

- Vértice. El vértice de una parábola es su punto más bajo (cuando los brazos de la parábola abren hacia arriba) o su punto más alto (cuando la parábola abre hacia abajo)
- Eje de simetría. La parábola tiene un eje de simetría vertical que pasa por el vértice. Este eje divide la parábola en dos mitades simétricas.

- Dirección de apertura. Cuando los brazos de la parábola abren hacia arriba o hacia abajo.

Para graficar una función cuadrática sin pasar por el proceso de tabulación estudiaremos las características antes mencionadas. Primero revisaremos la dirección de apertura o concavidad de la parábola revisando la función $y = ax^2$. Para ello te pedimos que ingreses al siguiente enlace: **Graficando cuadráticas**.

- Elige la opción **explorar**.
- Varia el coeficiente a con los deslizadores

Actividad: Describe con tus propias palabras que observas con los brazos de la parábola cuando haces variar el coeficiente

Los brazos de la parábola abren y cierran

Actividad: Elige la opción correcta:

¿Qué pasa cuando el coeficiente a es positivo $(a > 0)$?

a) No hay parábola
b) Los brazos de la parábola abren hacia abajo
c) Los brazos de la parábola abren hacia arriba

¿Qué pasa cuando el coeficiente a es negativo $(a < 0)$?

a) No hay parábola
b) Los brazos de la parábola abren hacia abajo
c) Los brazos de la parábola abren hacia arriba

Ahora, revisemos cómo determinar las coordenadas del vértice de la parábola revisando la función:

$$y = a(x-h)^2 + k$$

La anterior función también es cuadrática, sin embargo, esta en su forma estándar o canónica.

Para ello te pedimos que ingreses al siguiente enlace: **Graficando cuadráticas**.

- Elige la opción **vértice**.
- Varia el coeficiente k y observa que le sucede a la parábola.

- Con cualquiera de los visores que se encuentran en la parte inferior de la gráfica, sitúalos en el vértice de la parábola para observar las coordenadas del vértice.

Actividad: Describe con tus propias palabras sobre lo que le pasa al vértice de la parábola cuando haces variar el coeficiente

La parábola se mueve arriba o abajo (verticalmente)

- Varia el coeficiente h y observa que le sucede a la parábola.
- Con cualquiera de los visores que se encuentran en la parte inferior de la gráfica, sitúalos en el vértice de la parábola para observar las coordenadas del vértice.

Actividad: Describe con tus propias palabras sobre lo que le pasa al vértice de la parábola cuando haces variar el coeficiente h.

La parábola se mueve a la izquierda o derecha (horizontalmente)

Como puedes observar, cuando hacemos variar los coeficientes h y k, en realidad estás moviendo el vértice de la parábola, por lo que las coordenadas del vértice estarán en el punto:

$$V(h, k)$$

Lo anterior, tomando en cuenta la función cuadrática en su forma estándar o canónica:

$$y = a(x-h)^2 + k$$

Pero ¿cómo saber las coordenadas del vértice de la parábola en función de los coeficientes de la función cuadrática en su forma general $y = ax^2 + bx + c$?

Para ello podemos utilizar las siguientes formulas.

Coordenada en x del vértice: $V_x = -\frac{b}{2a}$

Coordenada en y del vértice: $V_y = y\left(x = -\frac{b}{2a}\right)$

Para que tengas más claridad en la aplicación de las anteriores formulas hagamos dos ejemplos:

Determina la concavidad y las coordenadas del vértice de las siguientes funciones cuadráticas:

1. $y = 2x^2 + 4x - 3$

Paso 1. Determinar si el coeficiente a es mayor o menor a cero.

En este caso, $a > 0$ por lo que los brazos de la parábola abren hacia arriba (concavidad positiva)

Paso 2. Determinar la coordenada en x del vértice:

$$V_x = -\frac{b}{2a} = -\frac{4}{2(2)} = -1$$

Paso 3. Determinar la coordenada en y del vértice:

$$V_y = y\left(x = -\frac{b}{2a}\right) == y(x = -1) = 2(-1)^2 + 4(-1) - 3 = -5$$

Por lo que el vértice tiene coordenadas $V(-1, -5)$

2. $y = -x^2 + 4x + 2$

Paso 1. Determinar si el coeficiente a es mayor o menor a cero.

En este caso, $a < 0$ por lo que los brazos de la parábola abren hacia abajo (concavidad negativa).

Paso 2. Determinar la coordenada en x del vértice:

$$V_x = -\frac{b}{2a} = -\frac{4}{2(-1)} = 2$$

Paso 3. Determinar la coordenada en y del vértice:

$$V_y = y\left(x = -\frac{b}{2a}\right) == y(x = 2) = -(2)^2 + 4(2) + 2 = 6$$

Por lo que el vértice tiene coordenadas $V(2,6)$

Puedes comprobar los valores obtenidos, ingresando de nuevo a **Graficando cuadráticas**, eligiendo la opción de **forma estándar** e ingresando los valores del coeficiente cuadrático a, lineal b y constante c.

Pantalla 3

Raíces de la función cuadrática.

Ahora nos centraremos en encontrar las raíces de la función cuadrática.

¡Recuerda!

Las raíces de una función $y = f(x)$ son los valores de x donde la función $f(x)$ se hace cero, esto es $y = f(x) = 0$.

En una función cuadrática podemos tener 1 o 2 raíces, en otras palabras y en términos geométricos donde la parábola corta al eje x.

Para determinar estas raíces, solo tenemos que igualar la función a cero y resolver la ecuación, esto lo podemos hacer mediante la formula general para resolver ecuaciones cuadráticas:

$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Recuerda que según el valor del discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$, las soluciones de la ecuación cuadrática pertenecerán al conjunto de los números reales o al conjunto de los números complejos.

En el ámbito geométrico:

Si $\Delta \geq 0$ la gráfica cortará al menos una vez al eje de las x.

Si $\Delta < 0$ la gráfica no cortará al eje de las x.

¡Ahora estamos listos para calcular las raíces de una función cuadrática!

1. Calcular las raíces de la función $f(x) = x^2 + 4x - 5$

   Para esta función en particular $\Delta \geq 0$, por lo que la gráfica de la función cortará al menos una vez al eje de las x. Te invitamos a que compruebes por tu cuenta, que el valor del discriminante es mayor a cero.

   Para calcular las raíces de la función sigue los siguientes pasos:

   Paso 1. Igualar la función a cero $f(x) = 0$

   $x^2 + 4x - 5 = 0$

   Paso 2. Identificar los valores de los coeficientes cuadrático, lineal y constante.

   $$a = 1 \quad b = 4 \quad c = -5$$

Paso 3. Sustituir los valores de los coeficientes cuadrático, lineal y constante en la formula general para resolver ecuación de segundo grado.

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4(1)(-5)}}{2(1)}$$

$$x_1 = 1$$

$$x_2 = -5$$

Paso 4. Con las herramientas digitales que se te dieron, grafica la función y comprueba que la gráfica de la función corta al eje de las x en $x_1 = 1$ y en $x_2 = -5$.

2. Calcular las raíces de la función $f(x) = x^2 + 4x + 5$

   Para esta función en particular $\Delta < 0$, por lo que la gráfica de la función no cortará al eje de las x. Te invitamos a que compruebes por tu cuenta, que el valor del discriminante es menor a cero. Para que puedas comprobar lo anteriormente mencionado, grafica la función con las herramientas digitales dadas