Aplicaciones a las ecuaciones del movimiento

¿Por qué es determinante saber lo que es la derivación sucesiva en el estudio de la mecánica? Porque los físicos la emplean para describir el movimiento de los cuerpos en el espacio mientras transcurre el tiempo. Particularmente, en lo que concierne a tres magnitudes más importantes: **distancia recorrida (x), velocidad (v)** y **aceleración (a)**.

Este diagrama sintetiza el uso de la derivada en física:

Fórmula de la distancia $d = x(t)$ ----> **Fórmula de la velocidad $v = dx/dt$** ----> **Fórmula de la aceleración $a = d^2v/dt^2$**

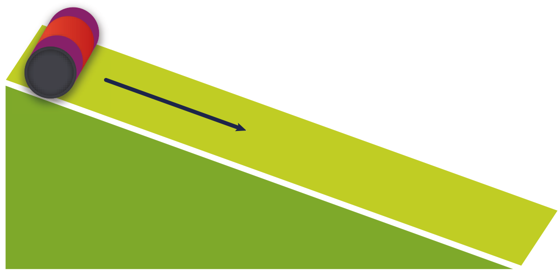
Primera derivada **Segunda derivada**

Para realizar el recorrido propuesto por el diagrama, basta con disponer de la ecuación que describe la distancia recorrida por un cuerpo respecto al tiempo y, a partir de ello, comenzar a derivar.

Figura 3.1 La Mecánica es la rama de la Física encargada de estudiar el movimiento.

Ejemplo 1:

Una lata se desliza por una mesa a cierta velocidad. En determinado momento, comienza a descender por una rampa. La distancia que recorre a partir de ese momento está dada



por: $x(t) = 4t^2 + 2.5t$

Calcular:

1. Las fórmulas de la velocidad y la aceleración	2. La velocidad de la lata a los 4 segundos	3. La aceleración en $t = 3$ s
$v = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}4t^2 + 2.5t$ $v = 8t + 2.5$ $a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}8t + 2.5$ $a = 8$	Como $v = 8t + 2.5$ En $t = 4$ s $v = 8(4) + 2.5$ $v = 32 + 2.5$ $v = 34.5$ m/s	Como $a = 8$ $a(3) = 8$ m/s^2

El anterior es un caso típico de movimiento rectilíneo uniformemente acelerado (m.r.u.a.), por lo que la ecuación de la distancia o posición se vuelve constante en la segunda derivada; pero esto no tiene por qué ser una regla. Hay movimientos más irregulares cuya segunda derivada es variable (como algunos casos que se proponen en la actividad de aprendizaje). Lo que sí es cierto es que a la física le importa únicamente la derivada hasta el segundo orden, ya que ello le pone en conocimiento de las magnitudes que son de su interés.

Ejemplo 2:

Una piedra es lanzada verticalmente hacia arriba. Su altura está descrita por $x(t) = 38t - 4.9t^2$.

1. Encontrar en qué momento la piedra se detendrá	2. ¿Cuál es la altura máxima alcanzada?	3. ¿Cuál es la velocidad de la piedra a los 5 segundos de ser lanzada?
La piedra se detiene cuando $v = 0$ $v = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dx}38t - 4.9t^2 =$ $38 - 9.8t = 0$ Despejamos t $t = \frac{-38}{-9.8} = 3.87$ s.	La altura máxima se alcanza en el momento en que la piedra pierde toda su velocidad, que es a los 3.87 s. $x(t) = 38t - 4.9t^2$ $(3.87) = 38(3.87) - 4.9(3.87)^2$ $x(3.87) = 147.06 - 73.39$ $x(3.87) = 73.39$ metros	En la pregunta 1 tenemos que $v = 38 - 9.8t$ A los 5 segundos: $v(5) = 38 - 9.8(5)$ $v(5) = 38 - 49 = -11$ m/s Lo cual significa que la piedra ya va de bajada.

Ejemplo 3:

Dos automóviles se mueven según las siguientes ecuaciones:

$x(t) = 25t + 8t^2$ y $x(t) = 15t + 10t^2$

Pregunta: ¿en qué momento sus velocidades serán iguales?
Derivemos ambas fórmulas para hallar las expresiones de la velocidad.

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dx}25t + 8t^2 = 25 + 16t$$

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dx}15t + 10t^2 = 15 + 20t$$

Las velocidades son iguales donde coinciden sus fórmulas:

$$25 + 16t = 15 + 20t$$

$$25 - 15 = 20t - 16t$$

$$10 = 4t$$

$$t = \frac{10}{4} = 2.5 \text{ s}$$

Al sustituir en las ecuaciones de la velocidad se comprueba que $v_1 = 65\ m/s = v_2$.
Entrena tus habilidades sobre la primera y segunda derivada en los siguientes problemas propuestos.