7. La posición de una mosca en vuelo está dada por: $x(t) = t^3 - 2t^2 + 5t$

a. Calcula su velocidad a los 5 s.
b. ¿Cuál es el valor de la aceleración a los 2.5 s?

8. Dos atletas corren 100 m planos. La ecuación que describe la distancia recorrida por cada uno de ellos está dada por:

$$d_1(t) = \frac{3t^2}{10} + 8t \text{ y } d_2(t) = \frac{7t^2}{20} + 7t$$

a. ¿Quién tiene la mayor velocidad de salida?
b. ¿Quién ganará la carrera?
c. ¿Con qué velocidad llegará cada uno a la meta?
d. En una carrera de 400 m, ¿quién llegaría primero?

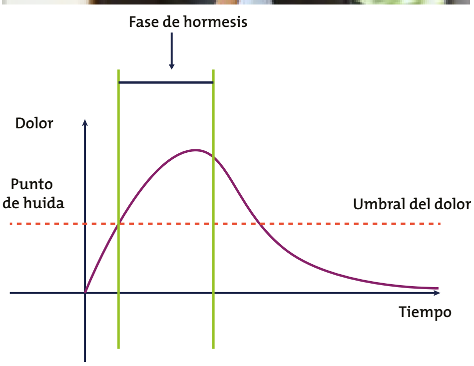


Figura 3.2 Usando una lámpara de rayos infrarrojos para elevar la temperatura de la piel, se observa que la mayoría de las personas comienzan a sentir dolor cerca de los 45 grados.

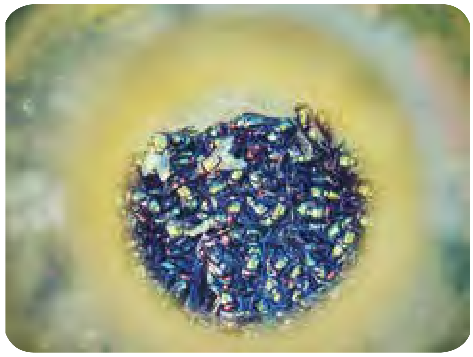
Valores extremos de una función

En medicina existe un término conocido como umbral del dolor. Este parámetro intenta responder a las siguientes preguntas: ¿qué intensidad mínima debe tener un estímulo para que pueda definirse como doloroso?, ¿cuál es el máximo valor en la escala del dolor que puede soportar una persona?, ¿los hombres son más, o menos tolerantes al dolor que las mujeres?

Un instructor deportivo debe conocer la máxima capacidad de trabajo cardiaco de una persona, porque no todos podemos elevar el número de latidos y respiraciones hasta los mismos rangos sin comprometer nuestra salud. Algo semejante ocurre con la presión sanguínea, hay un límite mínimo y uno máximo para saber si padecemos presión alta o baja.

A esos valores que marcan una frontera entre dos comportamientos cualitativamente diferentes se les conoce como puntos extremos, o bien, **máximos** y **mínimos**.

No debe sorprender que para conocer estos valores sólo necesitemos conocer la función que modela determinado fenómeno y, por supuesto, algo que involucre a la derivada.



En el capítulo anterior observamos la **regla de los cuatro pasos**, señalábamos que los puntos donde la derivada se anula, es decir, donde vale cero, eran de mucha importancia. A esos lugares donde la función se estanca en términos de crecimiento o decrecimiento se les conoce como **valores críticos**.

Un buen ejemplo para entender la importancia de los valores críticos se halla inscrito en un clásico modelo sobre la reproducción de cierto tipo de mosca. En condiciones controladas de laboratorio su población crece conforme al modelo:

$$P(t) = 12t^2 - t^4 + 5$$

donde $\boldsymbol{P}$ es el número de moscas, estimado en cientos, y $\boldsymbol{t}$ el tiempo contabilizado en semanas.

Un aspecto importante al estudiar la reproducción de un conjunto de seres vivos es saber cuándo una población dejará de crecer, esto es, cuándo la derivada indicará un crecimiento igual a cero.

Para ello, bastará con interrogar a la derivada.

$$\frac{dP}{dt} = 24t - 4t^3 = 0$$

Expresión que se factoriza como:

$$4t\,(6 - t^2) = 4t\,(\sqrt{6} + t)(\sqrt{6} - \mathrm{t}) = 0$$

Cuyas soluciones o valores críticos son:

$$t_1 = 0,\ t_2 = \sqrt{6}\ \text{ y }\ t_3 = -\sqrt{6}$$

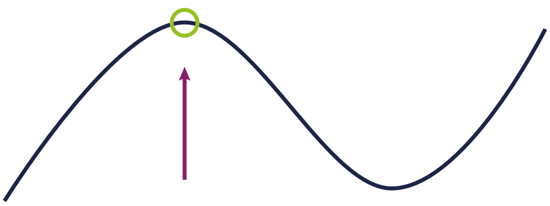
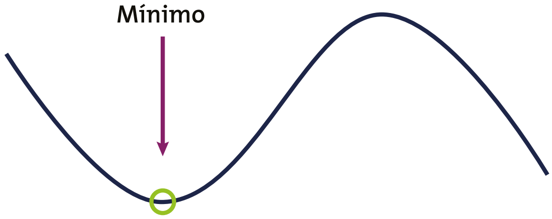
De las cuales únicamente tiene sentido elegir a:

$$t = \sqrt{6} = 2.4 \text{ semanas}$$

De modo que después de casi dos semanas y media, la población de moscas dejará de crecer. En ese punto seguramente se alcanzará el máximo de individuos, esperando que en lo sucesivo la población decaiga.

El criterio de la segunda derivada

Es conveniente contar con algún criterio que explique por qué quedarse o no con un determinado valor crítico. Para ello, habrá que agregar que aquellos puntos del dominio donde la derivada vale cero, pueden corresponder a dos tipos de comportamiento: máximos o mínimos. Poder determinar cuándo nos encontramos en uno u otro caso, es posible gracias a un criterio que involucra a la primera y segunda derivada.

Criterio de la primera y segunda derivada para máximos y mínimos	
Máximos	**Mínimos**
Paso 1: derivar la función $f(x)$. **Paso 2:** igualar a cero la derivada ($f^1(x) = 0$) y hallar los valores críticos x_0. **Paso 3:** hallar la segunda derivada $f^2(x)$. **Paso 4:** evaluar la segunda derivada en el punto crítico x_0 y comprobar que: **$f^2(x_0)$ arroja un valor negativo**.	**Paso 1:** derivar la función $f(x)$. **Paso 2:** igualar a cero la derivada ($f^1(x) = 0$) y hallar los valores críticos x_0. **Paso 3:** hallar la segunda derivada $f^2(x)$. **Paso 4:** evaluar la segunda derivada en el punto crítico x_0 y comprobar que: **$f^2(x_0)$ arroja un valor positivo**.
Máximo 	Mínimo 

Veamos cómo opera este criterio mediante algún ejemplo.

Actividad 5 CG 5, 5.1, 8, 8.1, 8.2 y 7.2 CDBM 6 y 8

Aplicaciones médicas

VI. **Realicen la siguiente actividad en equipos o con ayuda del profesor.**

Sensibilidad a medicamentos

Una de las preguntas más comunes que un médico hace a sus pacientes es si estos son alérgicos o no a algún medicamento. Esto se debe a las diferentes respuestas que puede tener un organismo ante la ingesta de determinadas sustancias. Un mismo medicamento suele producir mareos o somnolencia a algunos pacientes, mientras que a otros no.

Problema: La fuerza de una droga (F) está vinculada directamente con la dosis recibida en miligramos (D), con base en la siguiente fórmula:

$$F(D) = 2D\sqrt{0.5D + 10}$$

Es sabido que la *sensibilidad* para sufrir efectos secundarios debido al medicamento es igual a la derivada de la fuerza de la droga.

VII. **Determina la sensibilidad ante una dosis de 50 mg.**

1. Calcula $\frac{dF}{dD}$ mediante la regla de la derivada de un producto: $\frac{d}{dx}uv = uv' + u'v$.

2. Evalúa la derivada en D = 50 mg, para determinar la probabilidad (%) de sufrir efectos secundarios.

3. Encuentra el punto crítico de la función. Para ello, iguala a cero la derivada y despeja a D. Traza la gráfica de la función y comprueba el resultado.

Determinación de máximos y mínimos de polinomios

Pongamos en práctica el criterio de la segunda derivada mediante algunos ejemplos.

Ejemplo 1:

Determinar si la función $f(x) = -x^2 + 4x - 5$ posee un máximo o un mínimo.

Paso 1: obtener la derivada.

$$f^1(x) = \frac{d}{dx}(-x^2 + 4x - 5) = -2x + 4$$

Paso 2: igualar a cero y despejar el valor crítico x_0.

$$-2x + 4 = 0;\ \text{por lo que}\ x_0 = \frac{-4}{-2} = 2$$

Paso 3: hallar la segunda derivada:

$f^2(x) = \frac{d}{dx}(-2x + 4) = -2$, por lo tanto tiene un máximo.

Si queremos hallar dónde está ubicado el máximo evaluemos la función $f(x)$ en el valor crítico $x_0 = 2$.

$f(2) = -(2)^2 + 4(2) - 5 = -4 + 8 - 5 = -1$, por lo que el máximo está en Max (2,-1), tal como se observa en la gráfica.