Signos. Teoría y práctica de la educación. 13
Octubre-Diciembre de 1994. Páginas 70-81. ISSN: 1131-8000

MATEMÁTICAS

Muchas personas otorgan a las experiencias que han vivido en sus largos años de formación como estudiantes una entidad de vivencias atemporales, ahistóricas, impregnadas de algo tan *intangible como la "eternidad": si tuvimos que aprender ciertos contenidos y de determinada manera, eso, y así, tendrán que aprenderlo las futuras generaciones que pasen por las aulas. Esta creencia, desgraciadamente, está muy generalizada en la comunidad educativa y, como toda creencia, genera hábitos, rutinas y prejuicios que son muy difíciles de erradicar, por muchos, y contundentes, argumentos de tipo histórico y pedagógico que se quieran aportar al respecto.*

LAS MATEMÁTICAS EN LA EDUCACIÓN SECUNDARIA

¿Cambio curricular para que todo siga igual?

JOSETXU ARRIETA *

Viene esto a cuento para aclarar el sesgo escéptico del subtítulo del presente artículo. Escepticismo que se refuerza por el hecho de que el cambio curricular propuesto recientemente para el área de nuestro interés, la de Matemáticas en la Educación Secundaria, concretado en los materiales para la reforma de la educación obligatoria (MEC, 1992; MEC, 1993) y en el proyecto de ley para la no obligatoria (Real Decreto 1179/1992), no es ni mucho menos un cambio insignificante. Al igual que ocurre con la nueva propuesta de curriculum de Matemáticas para la Educación Primaria, que ya tuve ocasión de analizar en un artículo anterior, publicado en esta misma revista[1], la renovación en cuanto a fundamentación, métodos y contenidos es amplia y profunda y, como es sabido, a mayor amplitud y profundidad del mismo, más depende de los medios implementados para su realización, y menos de la validez teórica de la propuesta y de su difusión.

Como los medios no parecen aquí y ahora los más adecuados (crisis económica, luego disminuyen los presupuestos para la actualización científica y didáctica del profesorado), parece ser que no se van a tener en cuenta las condiciones materiales y prácticas que van a filtrar el curriculum prescrito, especialmente las referidas al profesorado, a sus condiciones de trabajo y a sus conocimientos, actitudes y valores, por lo que va a ser inevitablemente interpretado y aplicado desde los presupuestos teóricos y prácticos previos a la reforma, muchos de ellos, nos tememos, basados en prejuicios e ideas preconcebidas que van a chocar frontalmente con las ahora esgrimidas en los nuevos diseños. Y como es el profesorado en sus aulas el que determina la eficacia del curriculum a través de sus decisiones, conductas, actitudes y procesos cognitivos, al margen de lo cuidadosamente que haya sido elaborado el curriculum prescrito (el sueño de currícula "a prueba de profesores" pasó hace tiempo a mejor vida), no cabe duda de que es muy probable que no aprovechemos la coyuntura de la reforma para reflexionar sobre el papel de las matemáticas en la educación secundaria y transformar nuestros discursos y prácticas al respecto, en el sentido de mejorar una situación que actualmente se percibe, de manera mayoritaria y por parte de toda la comunidad educativa, como manifiestamente mejorable.

Ahora bien, tal transformación debe partir del reconocimiento explícito de la inmensidad de la tarea que hay que abordar y de las dificultades que encierra un propósito en sí mismo paradójico, hecho a menudo olvidado en el ámbito de la política educativa. ¿Cómo puede transformarse la práctica si los agentes fundamentales del cambio, el profesorado, son parte del problema a resolver? Pues parece claro, como esperamos poner de manifiesto con este artículo, que los cambios instructivos buscados son de tal calibre que, para que tengan éxito, no bastaría con que el profesorado absorbiera un nuevo cuerpo de conocimientos, sino que debería de asumir una nueva manera de pensar sobre el conocimiento matemático y una nueva práctica sobre cómo se enseña. Deben comprender que las matemáticas, además de un cuerpo riguroso, deductivo y formal de conocimientos recogido en los textos de nivel universitario, es una actividad humana, con todos los problemas que conllevan tales actividades: momentos de conjetura, de duda, de aceptación o de refutación; que ha sido construída a lo largo de siglos de intentos, de correcciones sucesivas y refinamientos. Deben, asimismo, cultivar estrategias de resolución de problemas, algunas de ellas muy poco usuales entre los modos de razonar de la mayoría de las personas adultas. También deben aprender a tratar al conocimiento como algo que se construye, se prueba y se explora, en vez de como algo que se absorbe y acumula. Incluso deben "desaprender" mucho de lo que conocen, como los métodos de enseñanza o el uso de los "clásicos" libros de texto que han utilizado durante años.

Con la esperanza de que la reflexión y discusión de las propuestas actuales pueda favorecer al menos la apertura de visiones y posiciones respecto al sentido de las matemáticas en la educación secundaria, voy a procurar desarrollar, en lo que sigue, un análisis de sus fundamentos, contenidos y métodos, contrastándolos con los hasta ahora vigentes en nuestras prácticas docentes, para poner de manifiesto, como decía, la amplitud y dificultad de la tarea con la que nos enfrentamos en estos momentos las personas que nos dedicamos, de una manera u otra, a la educación matemática. Comenzaré con un breve análisis de los fundamentos históricos y epistemológicos de los nuevos programas para continuar con sus fundamentos socio-culturales y psicopedagógicos.

Fundamentación histórica y epistemológica

En términos prácticos, la educación secundaria, enseñanza media o bachillerato, encuadrada en un sistema educativo tal y como hoy lo entendemos, no tiene más de 150 años de existencia. En nuestro país la Ley Moyano (1857) organizó la enseñanza secundaria en dos períodos de tres años, introduciendo como asignatura la Aritmética, en los dos primeros cursos del primer período, y Aritmética y Álgebra, por un lado, y Geometría y Principios de Trigonometría y de Geometría Matemática, por

EMIL RUDER

otro, en los cursos cuarto y quinto del segundo ciclo[2]. Ahora bien, conviene tener presente que no es hasta 1880 cuando se establece, mediante decreto ley, la existencia de, al menos, un Instituto de Enseñanza Media por provincia, lo que pone de manifiesto el escaso número de personas que hace unos cien años estudiaban las matemáticas "clásicas" (geometría euclídea y la aritmética y el álgebra árabe).

Si retrocedemos unos siglos más, y nos situamos en torno al 1500, podremos comprobar la validez de la hipótesis que afirma que los contenidos escolares, especialmente en nuestra área, han ido desubicándose progresivamente, pasando de formar parte del currículum universitario a formar parte del de secundaria y, por último, del de primaria. Efectivamente, hace unos 500 años, si un rico comerciante alemán quería proporcionar la mejor educación matemática posible a su hijo y consultaba al respecto a un profesor de la universidad de su país, éste le contestaba que si se conformaba con que su hijo aprendiese a sumar y restar, podía quedarse en su universidad, pero si pretendía aprender a multiplicar y dividir, debería ir a Italia donde eran más avanzados los estudios en estas materias (en Bolonia y Padua especialmente, debido a su conocimiento de los algoritmos arábes a través del *Liber Abaci* de Leonardo Pisano, Fibonacci). Esto es, contenidos que actualmente forman parte de nuestra educación primaria requerían entonces el equivalente de un Master en universidades de prestigio internacional[3].

Por su parte, si analizamos lo ocurrido con los contenidos actuales de la secundaria, como el cálculo o la estadística y la probabilidad, podemos apreciar cómo se ve confirmada la citada hipótesis. Los conceptos del cálculo diferencial e integral se introdujeron en la educación secundaria a comienzos del presente siglo, aunque únicamente en los centros más elitistas, como los que preparaban el acceso a las grandes escuelas politécnicas francesas. De manera generalizada no se introdujeron en los currícula de matemáticas de la enseñanza media hasta hace unos 50 años, y ello en los países más desarrollados. Así, en Francia, el primer plan de estudios que citó el término *límite* con respecto a la derivada lo hizo en 1947, aunque no fue sino en 1966 cuando se introdujo el concepto de manera apropiada. Previamente, en la primera mitad del siglo, los textos matemáticos franceses utilizaban la noción de límite de manera intuitiva, sin recurrir a una definición formal, en términos de *epsilon-delta*, para introducir el concepto de derivada (esto último sigue siendo la norma en Inglaterra, donde no es sino en la universidad donde se aborda la definición formal de límite)[4].

Mientras, en nuestro país, conviene recordar que hace sólo 200 años se podían contar con los dedos de la mano el número de personas que manejaban los conceptos del cálculo con facilidad (entre ellos el asturiano Agustín de Pedrayes) y que no es hasta 1934, con el nuevo bachillerato de 7 cursos de la República, cuando se introduce el estudio del Análisis (el número real, límites y continuidad de funciones) en sexto curso, continuándose su estudio en séptimo. Sin embargo, en los inmediatos y posteriores planes de la educación secundaria franquista (los del 38, elaborados por Sáinz Rodríguez), se vuelve al esquema "clásico", estudiándose a lo largo de sus siete cursos, de manera cíclica, la Aritmética, la Geometría y el Algebra y la Trigonometría, desapareciendo por tanto el cálculo del bachillerato. En 1953 se constituyen los Bachilleratos Superiores de Letras y Ciencias, de dos cursos de duración, y se reintroduce de nuevo, aunque sólo en el de ciencias. Por tanto, podemos afirmar que es en 1975, hace sólo 20 años y tras la aprobación de la Ley General de Educación, cuando se considera que todos los estudiantes del BUP deben aprender los conceptos básicos del cálculo, en el segundo curso (sucesiones y límites de sucesiones, funciones reales de variable real, límites y continuidad, funciones circulares, exponencial y logarítmica, derivadas y primitivas) y tercer curso (cálculo diferencial e integral) de dicho bachillerato.

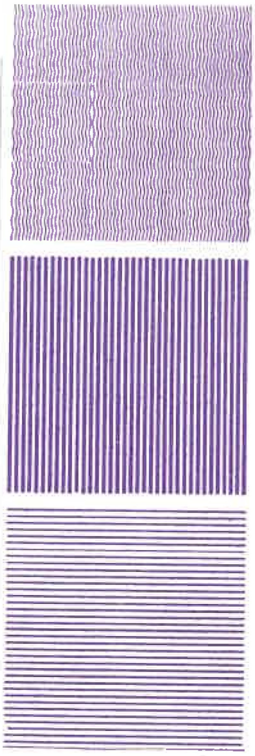
Respecto a la Estadística y al Cálculo de Probabilidades, bastará con recordar que en el panorama internacional no se

"No se van a tener en cuenta las condiciones materiales y prácticas que van a filtrar el curriculum prescrito, especialmente las referidas al profesorado, a sus condiciones de trabajo y a sus conocimientos, actitudes y valores, por lo que va a ser inevitablemente interpretado y aplicado desde los presupuestos teóricos y prácticos previos a la reforma"

dpdpdpdpdp
dpdpdpdpdp
dpdpdpdpdp
dpdpdpdpdp
dpdpdpdpdp
dpdpdpdpdp
dndndndndndndn
dndndndndndndn
dndndndndndndn
dndndndndndndn
dndndndndndndn
dndndndndndndn
§§§§§§§§§§§§
§§§§§§§§§§§§
§§§§§§§§§§§§
§§§§§§§§§§§§
§§§§§§§§§§§§
§§§§§§§§§§§§
EMIL RUDER

introdujeron dichos temas en la educación secundaria hasta la década de los 70, lo que no es de extrañar, pues el conjunto de conocimientos sobre las probabilidades no se axiomatiza hasta los años 20 de nuestro siglo, convirtiéndose de esta manera en "objeto de saber matemático"; superando su papel anterior de mero "instrumento" para la resolución de problemas probabilísticos; y todo ello sólo 50 años antes de convertirse en "conocimiento a enseñar" en la educación secundaria. En los EEUU, por poner un ejemplo, hace una generación, los estudiantes no abordaban ninguna idea de probabilidad y el único concepto estadístico que estudiaban era el de media aritmética. Todavía en 1959 un informe nacional norteamericano recomendaba únicamente un curso opcional de probabilidad y estadística para los que cursaban el último curso de la educación preuniversitaria (equivalente a nuestro cuarto curso de la secundaria actual), pero, lo que son las cosas, sólo 16 años más tarde, en 1975, ya se recomendaba que la estadística se enseñase en todos los niveles de la enseñanza, desde la primaria (como se plantea en nuestros Diseños Curriculares Base)[5].

Estos ejemplos nos bastan para corroborar la hipótesis citada, así como para poner de manifiesto que la universidad ejerce, como siempre ha ejercido, una influencia determinante sobre las restantes instituciones escolares. No hay que olvidar que, como recordaba Lerena (1985), todos los rasgos o elementos que aparecen asociados al proceso de institucionalización de la práctica educativa, incluyendo los exámenes y diplomas, "están reconocidos y son regulados en las segunda de las Partidas alfonsinas (circa 1260-1265)" y que, "en definitiva, el sistema de enseñanza que conocemos es refrendado jurídicamente ya a mitad del siglo trece" [6]. Influencia que se refiere no sólo a los contenidos que hay que impartir, sino especialmente a los métodos de enseñanza utilizados en los niveles no universitarios, deudores, en gran medida, de las prácticas imperantes al respecto en la universidad. A su vez, dichos métodos pedagógicos reflejan, aunque de manera no lineal, las concepciones epistemológicas dominantes en la institución universitaria sobre el carácter del conocimiento matemático, concepciones que fueron trazadas en los años 40 por el grupo Bourbaki y que han determinado el llamado movimiento de las "matemáticas modernas", cuya historia en nuestro país paso brevemente a caracterizar a continuación.



EMIL RUDER

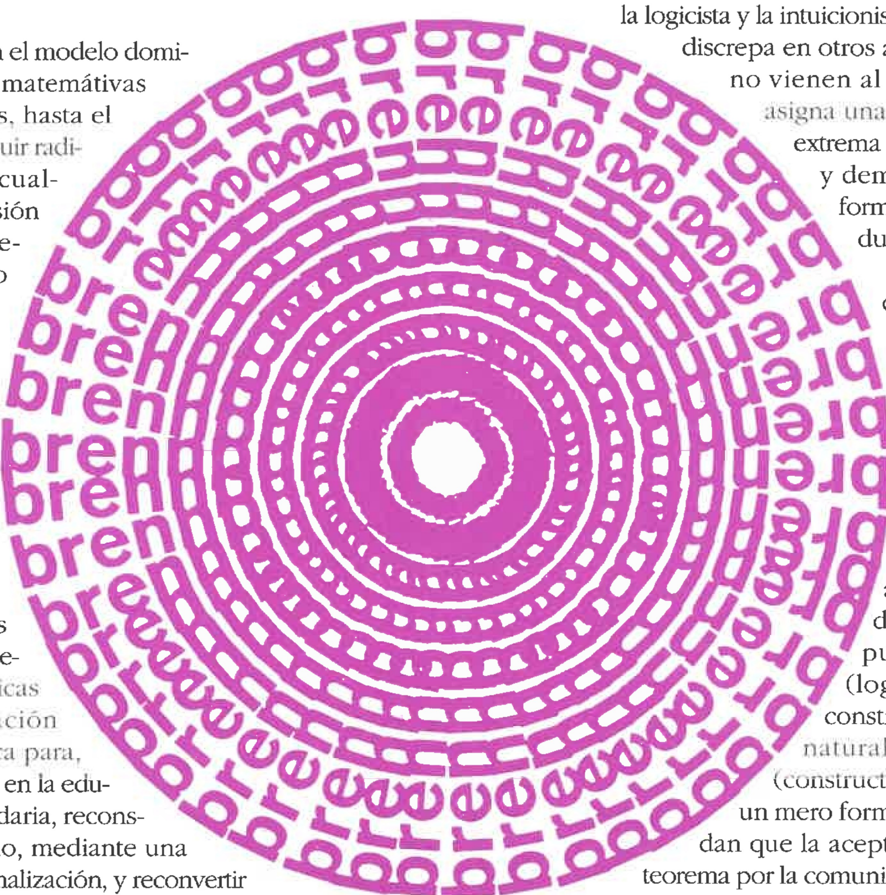
"Y como es el profesorado en sus aulas el que determina la eficacia del curriculum a través de sus decisiones, conductas, actitudes y procesos cognitivos, es muy probable que no aprovechemos la coyuntura de la reforma para reflexionar sobre el papel de las matemáticas en la educación secundaria y transformar nuestros discursos y prácticas"

Como es sabido, a comienzos de la década de los 60, y ante el shock que supuso el lanzamiento del primer Sputnik por la entonces Unión de Repúblicas Socialistas y Soviéticas, se produjo una reforma radical en los currícula de los EEUU. Dicha reforma tuvo un enorme impacto en nuestro sistema educativo, aunque con algunos años de retraso, concretándose en la Ley General de Educación de 1970. En la orientación de la reforma también tuvieron una gran influencia las discusiones y recomendaciones de organizaciones como la OCDE (Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico), que iban en la línea de considerar a la educación no meramente como una manera de cultivar la personalidad, sino, al igual que el capital y el trabajo, como un factor crucial de producción, determinante para el futuro económico y social de los distintos países Y ello a pesar de los cánticos y loas que subyacían en dicha ley a concepciones educativas opusdeístas, que la entendían como el "desarrollo intencional de las potencias específicamente humanas" (García Hoz, 1970).

Mientras que la OCDE presionaba para mejorar la cualificación de los futuros usuarios de las matemáticas, los matemáticos universitarios españoles, dirigidos por D. Pedro Abellanas, catedrático de Geometría de la Facultad de Ciencias de la Universidad Complutense de Madrid y recurriendo a la Revista de Enseñanza Media como instrumento de difusión de sus ideas, consideraron de importancia crucial, ya a comienzos de la década de los 60, el unir el puente que separaba la matemática pre-universitaria de la universitaria. Como resultado de todo ello la educación matemática resultó decididamente influenciada por el estructuralismo bourbakista, el cual se había

"¿Cómo puede transformarse la práctica si los agentes fundamentales del cambio, el profesorado, son parte del problema a resolver? Los cambios instructivos son de tal calibre que, para que tengan éxito, no bastaría con que el profesorado absorbiera un nuevo cuerpo de conocimientos, sino que debería de asumir una nueva manera de pensar sobre el conocimiento matemático y una nueva práctica sobre cómo se enseña"

convertido en el modelo dominante de las matemátivas universitarias, hasta el punto de excluir radicalmente a cualquier otra visión de las matemáticas como disciplina. Los reformadores de la época propusieron una revisión del curriculum matemático enfatizando el enfoque conjuntista y las estructuras algebraicas y lógicas en la educación general básica para, más adelante, en la educación secundaria, reconstruir el cálculo, mediante una extensiva formalización, y reconvertir la geometría analítica en álgebra lineal. Las llamadas, por aquel entonces, "matemáticas modernas", o "nueva matemática", adoptaron muchas características de las matemáticas puras enseñadas a nivel universitario. Los libros de texto de cálculo o álgebra lineal se parecían, y aún hoy se parecen, en gran medida, a los textos universitarios, tanto en su contenido como en su secuenciación y en su lenguaje.



EMIL RUDER

El actual profesorado de matemáticas de secundaria, formado en su mayoría en la década de los 70, ha asumido, como no podía ser de otra manera, la visión epistemológica de las matemáticas del bourbakismo. Esto es, ha asumido el formalismo como concepción epistemológica, pues no hay que olvidar que los miembros del grupo Bourbaki se consideraban a sí mismos herederos de Hilbert, padre del formalismo matemático. La tesis central de la escuela formalista viene a decir que las matemáticas es la ciencia de los sistemas formales: que se ocupa de la manipulación de cadenas de símbolos, a los cuales no es preciso asignarles ninguna significación, y que basa la validez de las proposiciones matemáticas en la habilidad para demostrar su verdad a través de pruebas rigurosas, enmarcadas en un sistema formal apropiado. Al igual que las otras dos escuelas de filosofía de las matemáticas que se desarrollaron a comienzos de siglo, la logicista y la intuicionista, de las que discrepa en otros aspectos que no vienen al caso ahora, asigna una importancia extrema a las pruebas y demostraciones formales, a la deducción.

Estas concepciones, empeñadas en la búsqueda de la fundamentación última del conocimiento matemático, a través de su disolución en pura lógica (logicismo), en construcciones de naturaleza finita (constructivismo) o en un mero formalismo, olvidan que la aceptación de un teorema por la comunidad matemática se realiza mediante un proceso social que depende más de la comprensión y significación del mismo que del rigor de la prueba, y que la presencia de ésta, rigurosa o no, es sólo uno de los elementos determinantes para su aceptación. De hecho, de los aproximadamente 200.000 teoremas publicados anualmente en las revistas de matemáticas, únicamente unos pocos son aceptados por la comunidad matemática, siendo estos teoremas, los juzgados como interesantes, los que se analizan rigurosamente en términos formales, por lo que se les escruta, se corrigen y se refinan, mientras que las pruebas del resto de los teoremas quedan sin examinar. Es más, según un importante editor del *Mathematical Review*, casi la mitad de las pruebas publicadas en su revista son falsas, aunque el sentido de los teoremas a probar sea esencialmente cierto[7]. Cuando se detecta un error en la demostración de un teorema significativo lo que se cambia habitualmente es la prueba, permaneciendo inalterable e incuestionado el propio teorema.

El papel de las pruebas en el proceso de su aceptación es similar al que juegan en el proceso de su descubrimiento. Las ideas matemáticas se descubren a través de un acto de creación en el cual la lógica formal no está directamente implicada. No son deducidas o derivadas, sino desarrolladas mediante un proceso en el que tanto su significación para el cuerpo de conocimientos matemáticos como su potencial futuro para dicho campo es reconocido en base a intuiciones informales. Aunque la prueba se considere como un prerrequisito para la publicación de un teorema, no necesita ser ni rigurosa ni completa, puesto que la transmisión holística de sus ideas, de manera que la hagan inteligible y convincente, es de mucha mayor importancia que su adecuación formal. Y esto nos permite concluir afirmando que una orientación epistemológica hacia un extremo formalismo no refleja adecuadamente las actuales prácticas de los matemáticos ni las actuales filosofías y epistemologías de las matemáticas.

EMIL RUDER

De hecho, es en la década de los 70, con la aparición de la obra seminal de LAKATOS (1978), *Pruebas y refutaciones. La lógica del descubrimiento matemático,* cuando comienza a cobrar fuerza lo que se ha denominado como "tradición disidente" en la epistemología de las matemáticas (ERNEST, 1994). Lakatos fue contundente en sus ataques al formalismo, tanto epistemológicamente ("Las matemáticas se presentan como un conjunto siempre creciente de verdades eternas e inmutables, en el que no pueden entrar los contraejemplos, las refutaciones o la crítica. El tema de estudio se recubre de un aire autoritario,... al suprimir la conjetura original, las refutaciones y la crítica de la prueba. El estilo deductivista esconde la lucha y oculta la aventura. Toda la historia se desvanece, las sucesivas formulaciones tentativas del teorema a lo largo del procedimiento probatorio se condenan al olvido, mientras que el resultado final se exalta al estado de infabilidad"), como didácticamente ("... aún no se ha constatado suficientemente que la educación matemática y científica actual es un semillero de autoritarismo, siendo el peor enemigo del pensamiento crítico e independiente. Mientras que en matemáticas este autoritarismo sigue el patrón deductivista, en la ciencia opera mediante el patrón inductivista")[8].

Desde entonces, distintas posiciones encuadradas en dicha "tradición disidente" vienen destacando y compartiendo un buen número de asunciones e implicaciones opuestas a las asumidas por las escuelas de filosofía de las matemáticas de comienzos de siglo, así como por la bourbakista. Entienden a las matemáticas como el producto de procesos sociales, cuyos gérmenes inmediatos son las técnicas[9], y comprenden su falibilidad y el hecho de que estén continuamente sometidas a revisión, tanto en términos de sus pruebas o demostraciones (por ejemplo, ¿son válidas las demostraciones realizadas con ayuda del ordenador?, ¿o las que han sido realizadas por miles de personas colaborando y que nadie personalmente puede revisar a lo largo de una vida?[10]), como en sus conceptos. Rechazan la visión estructural de las matemáticas con su jerarquía única, rígida y permanente, destacando la importancia de la perspectiva subjetual-personal, indisociable de las figuras pragmáticas (normas, dialogismos y autologismos) propias de la ciencia matemática. Reconocen, por tanto, su significado social y el hecho de estar impregnada de valores, por lo que se encuentran en consonancia con las concepciones educativas que fomentan el análisis crítico a la hora de evaluar sus propios usos sociales.

Estas nuevas y recientes visiones epistemológicas de las matemáticas generan principios pedagógicos, de índole constructivista y social, claramente diferenciados de los principios asumidos por las filosofías prescriptivas de las matemáticas (el logicismo y el formalismo), las cuales justifican un enfoque meramente transmisivo de dicha ciencia, poniendo el énfasis en la eficacia a la hora de comunicar sus contenidos con una impecable dicción. Principios como los de "respetar los significados y los conocimientos previos de los aprendices", "favorecer la construcción de las nuevas nociones en base a los métodos utilizados por los propios estudiantes", "negociando la validez de los conocimientos construídos", o el de "defender la inseparabilidad de las matemáticas de sus aplicaciones", que pretenden asumirse en la actualidad en el Diseño Curricular Base (al afirmar explícitamente, entre otras cosas, que "las matemáticas evolucionan continuamente", que en ellas se utiliza el razonamiento empírico" y que "la deducción formal aparece en una fase posterior", al enfatizar "su carácter constructivo" y "el hecho de estar relacionadas con otros conocimientos", etc...) y que, como veremos, están en plena sintonía con los defendidos desde las posiciones psicopedagógicas que explicaremos más adelante.

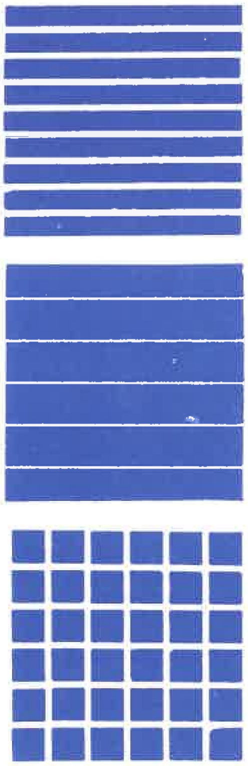
Fundamentación socio-cultural

Desde un punto de vista sociológico, las universidades, y posteriormente las escuelas, colegios e institutos, tienen como primera y fundamental tarea la de definir la cultura legítima, para imponer socialmente su legitimidad, y no tanto su contenido, e inculcarla en sectores de la población: el 100% en la educación obligatoria y porcentajes paulatinamente inferiores en la secundaria postobligatoria y en la universitaria. Pues bien, desde la primera fase de institucionalización de la escuela, cuando se especializan los agentes, cobrando por su trabajo e instaurando modos homogéneos y acumulativos de inculcación, esto es, desde el mundo grecorromano, las matemáticas se han considerado como cultura legítima (el *quadrivium:* aritmética, geometría, astronomía y música), y como conocimiento de alto status.

Es por ello que, desde su origen, ha tenido un carácter elitista: basta con recordar el secretismo con que los pitagóricos trataban a sus descubrimientos, guardándolos celosamente para los integrantes más destacados de su secta, *los mathematikoi,* o la distinción platónica entre matemáticas prácticas, sin valor intelectual, propia de los artesanos, y la matemática teórica y racional, estudiada por los filósofos en su Academia ("que no entre nadie que no sepa geometría"). También se puede recordar cómo en la edad Media los monjes calculistas se opusieron a la divulgación de los algoritmos árabes con el argumento de que "al ser tan fácil, tan ingenioso, el cálculo de los árabes debía de tener algo mágico, incluso algo demoníaco: sólo podía proceder del mismísimo Satanás en persona"[11].

Situándonos a comienzos de nuestro siglo podemos apreciar cómo se constituye, definitivamente, en instrumento de selección y orientación de las personas (sustituyendo al latín en este sentido), de la mano de los medidores mentales que construyeron los primeros tests, en los que el razonamiento lógico y matemático jugaba un papel central. El primero de ellos, Galton, además de introducir la idea de que la inteligencia se distribuía en función a la ley de desviación con respecto a la media, o distribución normal, acuñó el término de eugenesia para referirse a la idea de que los incompetentes, enfermizos y desesperados constituían una amenaza para la sociedad, por lo que había que impedirles procrear. Esta aberración tomó cuerpo en forma de leyes y, en 1898, Estados como el de Michigan promulgaron decretos de esterilización eugenésica que disponían la castración de todos los internados en el Asilo para

"Las matemáticas, además de un cuerpo riguroso, deductivo y formal de conocimientos, es una actividad humana, con todos los problemas que conllevan tales actividades: momentos de conjetura, de duda, de aceptación o de refutación, que ha sido construida a lo largo de siglos de intentos, de correcciones sucesivas y refinamientos"


EMIL RUDER

Débiles Mentales y Epilépticos (entre 1909 y 1928, veintiún Estados promulgaron este tipo de leyes). En este contexto ideológico, Terman publicó en 1916 el primer test de CI, basado en el del médico francés Binet, manifestando clarísimamente la función social que debía de jugar: "... .todos los débiles mentales son, al menos, criminales potenciales. Difícilmente discutirá nadie el hecho de que cada mujer afecta de debilidad mental es una prostituta en potencia... en un cercano futuro los tests de inteligencia pondrán a decenas de miles de estos seres profundamente defectuosos bajo la vigilancia y protección de la sociedad"[12].

Terman fue también el primero en introducir el problema de las razas en el debate sobre el CI, afirmando que la deficiencia mental "resultaba muy frecuente entre las familias hispano-indias y mexicanas del sudoeste y también entre los negros. Su embotamiento parece ser de origen racial, por lo que recomendaba que los niños de este grupo sean segregados en clases especiales... porque no son capaces de dominar abstracciones, pero frecuentemente se pueden obtener de ellos excelentes trabajadores. "Como es sabido, un argumento muy similar al sostenido hasta la década de los 30 por las personas que pretendían excluir del estudio de las matemáticas a las mujeres. Por último, Thorndike, el padre de la psicología asociacionista y la mayor autoridad en su época en el campo de la psicología de la educación matemática, apuntalaba estas tesis de forma escalofriante: "para gran suerte de la humanidad, existe una correlación positiva sustancial entre inteligencia y moralidad, incluyendo la buena voluntad hacia el prójimo. Consecuentemente, quienes nos aventajan en capacidad son, en conjunto, nuestros benefactores, y es a menudo más seguro confiarles nuestros intereses que manejarlos nosostros mismos".

Cambiando el contexto histórico y geográfico, nos podemos acercar a nuestra comunidad y a nuestros días. En las pruebas de selectividad para el acceso a la Universidad de Oviedo realizadas el pasado mes de junio, de los 3.433 estudiantes que, habiendo superado el COU, se presentaron al examen de Matemáticas I, únicamente 1.109, el 32,3% del total, fueron declarados como aptos. Por tanto, un 67,7% de los mejores estudiantes egresados de nuestro sistema educativo preuniversitario fracasaron en dicho examen (con diferencia y como suele ser habitual, la asignatura en la que más suspensos hubo). De ellos, además, casi un 30% obtuvo una puntuación inferior a 3 (sobre 10) en la misma prueba de acceso, con las consabidas repercusiones a la hora de fijar la nota media final, decisiva para poder optar al acceso en determinadas carreras universitarias. Una prueba más (aunque no parecen que hagan mucha falta, pues se suele admitir este hecho como un dato, como algo "natural", sin reflexionar sobre su por qué) de la utilización de las matemáticas como instrumento de selección y orientación del alumnado.

EMIL RUDER

"Los conceptos del cálculo diferencial e integral se introdujeron en la educación secundaria a comienzos del presente siglo, aunque únicamente en los centros más elitistas, de manera generalizada no se introdujeron en los currícula de matemáticas de la enseñanza media hasta hace unos 50 años, y ello en los países más desarrollados"

Las matemáticas comparten las características cognoscitivas y culturales de los saberes de alto status: son saberes de tipo alfabético, que descansan en una tradición erudita y libresca y que dan prioridad al individualismo intelectual; son abstractos y obedecen a una lógica de estructuración independiente de la experiencia subjetiva de los sujetos, por lo que vuelven la espalda a la vida cotidiana, a la experiencia corriente. Todas estas características, unidas al hecho de ser un conocimiento discreto, con un contenido identificable y una estructura estable, la convierten en un instrumento utilísimo para una evaluación "supuestamente objetiva". Y digo supuestamente porque, al igual que han sido considerados como no aptas casi un 70% de las personas presentadas en las pruebas de acceso citadas, lo podrían haber sido el 99 o el 1 %, en función de las preguntas y los problemas planteados.

Un debate al respecto (similar al que se realizó hace dos años en el ámbito de la enseñanza universitaria, a través de la publicación en el suplemento de *Educación* de *El País* de más de cinco artículos en respuesta a la denuncia de un amplio grupo de Catedráticos y Titulares de Universidad que afirmaban que es bastante patente la conversión de ciertas *"la universidad ejerce, como siempre ha ejercido, una influencia determinante sobre las restantes instituciones escolares. Influencia que se refiere no sólo a los contenidos que hay que impartir, sino especialmente a los métodos de enseñanza utilizados en los niveles no universitarios, deudores, en gran medida, de las prácticas imperantes al respecto en la universidad"*

materias, como las matemáticas, en barreras artificiales cuyo único objetivo parece ser el de establecer un mecanismo, con apariencia neutra y objetiva, para la eliminación de personas[13]), debería ayudar a profundizar en las razones por las que se considera como "natural" que exista una mayor fracaso en nuestra área que en otras. Preguntas como: ¿puede una matemática para "todos" ser similar, en contenidos y métodos, a una matemática para "algunos"? ¿es selectiva porque se enseña mal o se enseña mal para que sea selectiva? ¿es selectiva porque es difícil o se hace arbitrariamente difícil para que sea selectiva? ¿seleccionamos exclusivamente en base al conocimiento de algoritmos o tenemos en consideración otros aspectos?..., podrían dar lugar a una discusión de gran valor teórico-práctico sobre las matemáticas, la evaluación y la función social de la educación secundaria.

Otra idea que hay que considerar cuando se habla de la fundamentación socio-cultural de las matemáticas en secundaria es el de la incidencia en los contenidos de los cambios informativos y tecnológicos, experimentados a ritmo de vértigo en nuestra sociedad. Por un lado, los medios de comunicación han popularizado de tal manera el uso de ciertas ideas y recursos matemáticos (proporciones, tablas y gráficos estadísticos, grandes números, etc...) que han convertido a contenidos hasta hace poco estudiados por una minoría de personas, en componentes básicos de una alfabetización matemática. De ahí su inclusión en los currícula desde la educación primaria y ello a pesar de su reciente construcción (recuérdese que algo tan difundido como los diagramas de barras tiene apenas 200 años de existencia).

LOREDANO

Por otro lado, los potentes instrumentos gráficos y de cálculo (calculadoras gráficas y ordenadores) están provocando un replanteamiento en los objetivos de la enseñanza de las áreas básicas de las matemáticas en la educación secundaria. Tanto el álgebra como el cálculo, la geometría, la estadística y las probabilidades deben acomodarse a una nueva realidad: la resolución de la mayoría de los problemas que aparecen en los libros de texto es trivial si se conoce el uso de dichos instrumentos. Y como no parece que sea cuestión de esconder la cabeza (como se sigue haciendo en la educación primaria con la simple calculadora de cuatro operaciones, que no se usa porque el profesorado, en general, tiene miedo a introducirla en sus aulas dado que si lo hacen no saben qué enseñar), habrá que ir pensando qué conocimiento algebraicos, de análisis o de estadística y cálculo de probabilidades siguen teniendo sentido y cuáles no.

Al igual que nosotros utilizamos el álgebra para resolver problemas que los griegos resolvían de manera gráfica y geométrica (métodos que la mayoría no hemos estudiado), es más que probable que las futuras generaciones aprendan a utilizar las nuevas tecnologías para resolver nuestros problemas algebraicos, y nunca aprendan cómo utilizamos nosotros el álgebra. Piénsese, por poner un ejemplo, que en las actuales calculadoras gráficas existe una tecla que resuelve cualquier tipo de ecuaciones aritméticamente, mediante métodos de aproximación sucesivos escondidos al usuario. Por ello, el estudiante que dispone de dicha calculadora y quiere resolver una ecuación cuadrática con una aproximación hasta las milésimas, no necesita conocer la fórmula; al igual que no necesita conocer las funciones trigonométricas inversas para resolver ecuaciones trigonométricas, etc... Parece claro que los aspectos relacionados con las destrezas mecánicas, de ejecución de fórmulas y algoritmos, deben de ir dejándose en manos de las máquinas (para eso están), centrándonos más en los referidos al uso de los conceptos, sus representaciones y propiedades, sus significados. Las calculadoras gráficas y el software educativo, para enseñar de otra manera y con otras finalidades los contenidos básicos de las matemáticas en la educación secundaria, ya están ahí[14], sólo hace falta sacar provecho de las múltiples, e incluso contradictorias opciones que ofrecen para facilitar su aprendizaje.


PIET ZWART

Fundamentación psicopedagógica

Como hemos visto, lo que se nos propone al profesorado es que trabajemos con nuevos contenidos matemáticos, conceptualizados de manera no formal, con diferentes instrumentos, calculadoras y ordenadores, y con distintas finalidades, educativas y no selectivas. Y por si esto fuera poco, se nos dice, además, que debemos enseñarlos, y el estudiantado aprenderlos, de otras maneras. Los principios psicopedagógicos de intervención educativa que subyacen al Diseño Curricular Base, tanto a nivel general como en el área de matemáticas, se enmarcan en la concepción **constructivista** del aprendizaje escolar y de la intervención pedagógica, que ha sido difundida en nuestro país por el actual Director General de Renovación Pedagógica, César Coll. Tales principios, comunes para la educación primaria y secundaria obligatoria, pueden resumirse en las siguientes ideas: es preciso partir de los conocimientos previos y del nivel de desarrollo del alumnado, asegurando aprendizajes significativos, posibilitando que los realicen por sí mismos, mediante una modificación de sus esquemas de conocimiento, y a través de la realización de una intensa actividad por su parte.

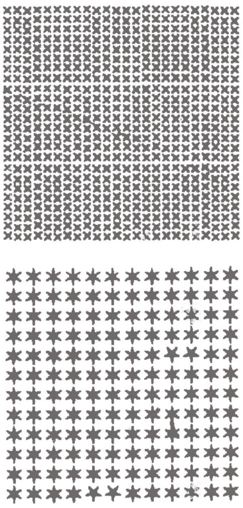
Veamos con un ejemplo paradigmático, por ocupar un lugar central en el razonamiento matemático avanzado, cómo, en la actualidad, los métodos de enseñar y aprender sus conceptos no se caracterizan precisamente por adecuarse a tales criterios. La enseñanza de la idea de límite de una sucesión de números reales se suele abordar en la actualidad en 2º de B.U.P. Tras estudiar las estructuras de anillo y de espacio vectorial del conjunto **S** de las sucesiones de números reales, se presenta la idea intuitiva de límite de una sucesión, con los consabidos ejemplos (1/n, - 0,3, 0,33, 0,333...-) y se define rigurosamente: la sucesión a_1, a_2, a_3, **...**, tiene el límite **a**, cuando **n** tiende a infinito, si para todo número positivo **e**, por pequeño que sea, existe un entero N, tal que $|a-a_n| < e$ para todo $n \geq N$. Como dicen Courant y Robbins (1976), "no es de extrañar que cuando se encuentra por primera vez no sea posible captarla inmediatamente en toda su profundidad. Algunos autores adoptan una actitud poco feliz, presentando esta definición al lector sin una preparación adecuada, como si dar una explicación no resultara muy honroso para la dignidad de un matemático" [15]

De forma intuitiva resulta relativamente fácil comprender el concepto de límite y el de convergencia, pero el problema es que no podemos pasar directamente de la representación intuitiva del concepto a la definición rigurosa y formal. Esta última invierte el orden de las ideas, contradiciendo la representación dinámica y natural del proceso: comienza mencionando, de manera bastante extraña, un número positivo **e,** tan pequeño como se quiera, para introducir después a N y a $n \geq N$. De esta manera no es e el que depende de N (como ocurre en la realidad, dado que el intervalo $|a_n - a|$ se va haciendo más pequeño conforme va aumentando el valor de N), sino que, en la definición formal, hacemos que N dependa de e, invirtiendo el orden natural del pensamiento intuitivo. De hecho, aunque en las definiciones actuales se erradique la idea de "tender a infinito", recurriendo a la definición previa de una sucesión como una aplicación de N* en R, intuitivamente se sigue pensando en dichos términos, que expresan un hecho más psicológico (tender a, estar inclinado a, con connotaciones de deseo o aspiración), que matemático. Esto es, intuitivamente recurrimos a la idea de infinito potencial, mucho más aceptable para los no matemáticos que la de infinito actual (no olvidemos que esta última sólo cuenta con unos 100 años de existencia)[16]. De hecho, como muchos conceptos científicos, el de *límite* es contradictorio, porque nuestro pensamiento no está naturalmente adaptado a la concepción del infinito actual, a hechos como que haya tantos números naturales como pares o como enteros y racionales, esto es, a las paradojas del infinito.

La relación conflictiva existente entre la definición formal y la representación intuitiva del concepto genera diversos obstáculos psicológicos (con sus correlatos obstáculos epistemológicos en el desarrollo histórico del concepto), que los métodos de enseñanza al uso no consiguen solventar. En ellos, como se puede apreciar en los libros de texto, verdaderos artífices de dichos métodos, no se parte de las nociones previas e intuitivas del estudiantado, ni se les implica en una intensa actividad, por lo que no se logra un aprendizaje significativo ni se modifican sus esquemas de conocimiento, de ahí que muchos de ellos sigan pensando que la sucesión 1, 1, 1, ... no converge a ningún límite o que la sucesión 0,3, 0,33, 0,333.... tiende pero no es igual a 1/3, puesto que piensan que una sucesión nunca alcanza el límite, sino que tiende a él pero nunca llega, o que una sucesión debe ser siempre o monótona creciente o decreciente, por lo que, por ejemplo, la sucesión $a_n=1+\frac{(-1)^n}{n}$ no tiende a ningún límite, etc...

Ahora bien, si nosotros mismos hemos aprendido los contenidos disciplinares en un contexto formal, totalmente alejado de su utilización para interpretar y transformar la realidad, difícilmente podremos realizar la necesaria trasposición didáctica que ahora se nos exige. Dicha trasposición y la puesta en práctica de los principios psicopedagógicos citados, implica el estudio de las matemáticas en términos mucho más filosóficos, epistemológicos, históricos, sociológicos y psicológicos que los que caracterizan la formación que hemos recibido, aunque sólo sea porque a través de la enseñanza no nos planteamos desarrollar la lógica interna de las disciplinas, sino que las utilizamos como un elemento más del proceso didáctico y educativo. En éste, toda disciplina se falsifica en cierta medida, por lo que resulta imprescindible recurrir al conocimiento de su papel en el desarrollo histórico y en la sociedad actual, su construcción desde un punto de vista tanto filogenético como ontogenético, las formas de razonamiento que promueve y las que no, sus posibilidades y limitaciones para interpretar e incidir sobre la realidad, etc..., que nos ayude a minimizar dicha falsificación.

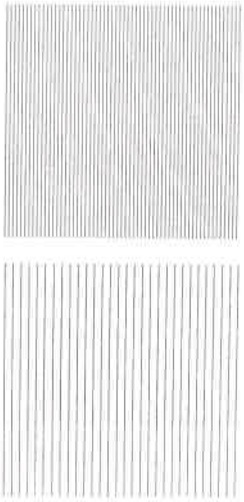
"El actual profesorado de matemáticas de Secundaria, formado en su mayoría en la década de los 70, ha asumido, como no podía ser de otra manera, la visión epistemológica de las matemáticas del bourbakismo. La tesis central de la escuela formalista viene a decir que las matemáticas es la ciencia de los sistemas formales, que se ocupa de la manipulación de cadenas de símbolos y que basa la validez de las proposiciones matemáticas en la habilidad para demostrar su verdad a través de pruebas rigurosas"



EMIL RUDER

Aspectos, todos ellos, que se siguen considerado, por parte de una universidad en general y unas facultades de Matemáticas en particular (que no han asumido realmente el problema de la formación y el perfeccionamiento del profesorado y que siguen manteniendo la ficción de que todo licenciado en una disciplina puede asumir labores docentes superando un ridículo CAP), como simple barniz cultural y no como conocimientos que, ineludiblemente, todo docente debe desarrollar a lo largo de su vida profesional para comprender y perfeccionar su propio trabajo. Por ello no es de extrañar que lo que predomine sea una actitud de inmovilismo, de rechazo a todo cambio, de miedo.

Miedo a lo desconocido si se abandonan los modelos tradicionales de enseñar, la pulcra presentación de definiciones, teoremas, pruebas y aplicaciones al más puro estilo deductivista. Miedo al mayor tiempo que se requiere para lograr aprendizajes significativos, por lo que se piensa que no se tiene el suficiente para completar el temario, como si éste no se pudiese racionalizar evitando convertirlo en el de un minicurso universitario y transformando las pruebas de selección que mediatizan la educación postobligatoria. Miedo a que los niveles desciendan, como si los que se consiguen en la actualidad fuesen satisfactorios en algún sentido. Miedos, en definitiva, que sólo se pueden superar reconociendo de entrada la magnitud y dificultad de la tarea a abordar, y desarrollando, a continuación, sin prisas pero sin pausas, un proceso colectivo de transformación de nuestros discursos y prácticas educativas conforme reivindicamos las condiciones favorables para ponerlo en práctica.



EMIL RUDER

"Distintas posiciones encuadradas en la "tradición disidente" entienden las matemáticas como el producto de procesos sociales, cuyos gérmenes inmediatos son las técnicas, y comprenden y el hecho de que estén continuamente sometidas a revisión. Rechazan la visión estructural de las matemáticas con su jerarquía única, rígida y permanente, y reconocen, por tanto, su significado social y el hecho de estar impregnada de valores"

*Josetxu Arrieta Gallastegui es profesor titular de Didáctica del Departamento Ciencias de la Educación de la Universidad de Oviedo (Tfno. de contacto: 98-510 32 27)

Notas

(1) Ver ARRIETA, J. (1993): "¿Qué fué de la matemática moderna? Análisis didáctico del Diseño Curricular Base de Matemáticas". En *Signos*, 8-9, pp. 94-101.

(2) Estos datos históricos, junto con un detallado análisis sobre la educación matemática en nuestro país en el presente siglo pueden encontrarse en KILPATRICK, J., RICO, L. y SIERRA, M. (1994): *Educación Matemática e Investigación*. Síntesis, Madrid.

(3) Historia citada en IFRAH (1987): *Las Cifras. Historia de una gran invención*. Alianza, Madrid, p. 287.

(4) En CORNU (1991) o ARTIGUE (1991) se pueden encontrar excelentes reflexiones, no sólo de tipo histórico, sino de orden psicológico o didáctico, sobre la enseñanza del análisis matemático.

(5) Ver USISKIN (1994), p. 316.

(6) LERENA (1985): *Materiales de sociología de la educación y de la cultura*. Grupo Cultural Zero, Madrid, 1985, p. 29.

(7) Ver HANNA (1994), p. 59.

(8) LAKATOS (1978), p. 166.

(9) Para una adecuada y profunda comprensión de esta idea, que viene a mostrar la validez actual de algunas tesis marxistas, así como de algunos conceptos que utilizo más adelante, véase BUENO, G. (1992): *Teoría del cierre categorial*. Vol. 1. Pentalfa, Oviedo.

(10) Un reciente ejemplo de ello lo tenemos en la búsqueda de los factores primos del número de 129 dígitos RSA-129, caso analizado comentado en el especial de Ciencia, técnica e informática del diario *El País* de fecha 13-04-94.

(11) IFRAH (1987), p.297.

(12) Estas citas, y las dos siguientes, están recogidas de BUENO, G. HIDALGO, A. e IGLESIAS, C. (1987)" *Simploké. Filosofía 3º de BUP*. Júcar, Madrid, pp. 114-115.

(13) Ver el articulo sobre "El fracaso universitario", en el suplemento del día 4-02-92, así como las sucesivas respuestas en los suplementos de los días 10-03-92, 17-03-92 y 31-03-92.

(14) Para un análisis de las implicaciones del trabajo en un entorno con ordenadores para el aprendizaje del cálculo, ver DUBINSKY Y TALL (1991) Y TALL (1994)

(15) COURANT R. y ROBBINS, H. (1979): *¿Qué es la matemática?* Aguilar, Madrid, (5ª ed.), p. 303.

(16) Para un análisis del papel de las intuiciones sobre el infinito en la enseñanza ver TIROSH (1991).

Referencias Bibliográficas

ARTIGUE, M. (1991): "Analysis". En TALL, D. (Ed.): *Advanced mathematical thinking*. Dordrecht, The Netherlands, Kluwer Academic Publishers, pp. 167-198.

CORNU, B. (1991): Limits. En TALL, D. (Ed.): *Advanced mathematical thinking*. Dordrecht, The Netherlands, Kluwer Academic Publishers, pp.153-165.

DUBINSKY E. y TALL, D. (1991): "Advanced mathematical thinking and the computer". En TALL, D. (Ed.): *Advanced mathematical thinking*. Dordrecht, The Netherlands, Kluwer Academic Publishers, pp. 231-243.

ERNEST, P. (1994): "The Philosophy of Mathematics and the Didactics of Mathematics". En BIEHLER, R., SCHOLZ, R.W., STRABER, R. y WINKELMAN, B. (Eds.): *Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline*. Dordrecht, The Netherlands, Kluwer Academic Publishers, pp. 335-349.

FISCHBEIN, E. (1994): "The interaction between the formal, the algorithmic, and the intuitive components in a mathematical activity". En BIEHLER, R., SCHOLZ, R.W., STRABER, R. y WINKELMAN, B. (Eds.): *Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline*. Dordrecht, The Netherlands, Kluwer Academic Publishers, pp.231-245.

GARCIA HOZ, V. (1970): *Principios de Pedagogía Sistemática*. Rialp, Madrid.

LAKATOS, I. (1978): *Pruebas y Refutaciones. La lógica del descubrimiento matemático*. Alianza, Madrid.

M.E.C. (1992): *Matemáticas. Secundaria Obligatoria*. Madrid.

M.E.C. (1993): *Propuesta de Secuencia. Matemáticas*. Escuela Española, Madrid.

TALL, D. (1994): "Computer environments for the learning of mathematics". En BIEHLER, R., SCHOLZ, R.W., STRABER, R. y WINKELMAN, B. (eds.): *Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline*. Dordrecht, The Netherlands, Kluwer Academic Publishers, pp. 189-199.

TIROSH, D. (1991): "The role of student's intuitions of infinity in teaching the Cantorian Theory". En TALL, D. (Ed.): *Advanced mathematical thinking*. Dordrecht, The Netherlands, Kluwer Academic Publishers, pp. 199-214.