



## MATEMÁTICAS

*En la situación actual de la enseñanza de la geometría, y particularmente en el caso español, la insistencia en enseñar geometría se hace patente. Ahora bien, ya no se trata sólo de defender la importancia y necesidad de enseñar geometría, sino que el problema crucial en este momento es el de discutir qué geometría debe ser enseñada en la escuela y cómo. En definitiva nos encontramos en un momento histórico en el que la reacción al carácter deductivo y formal que la enseñanza de la geometría ha adoptado en los últimos tiempos nos obliga a investigar los problemas didácticos implicados en su enseñanza. Para ello el modelo de enseñanza-aprendizaje de los van Hiele se presenta como enormemente rico.*

## APUNTES PARA LA ENSEÑANZA DE LA GEOMETRÍA

**El modelo de enseñanza-aprendizaje de van Hiele**

GLORIA MARÍA BRAGA\*

**S**i hacemos una revisión de los trabajos de investigación didáctica o psicológica relacionados con la enseñanza de la geometría, tal y como ha hecho ARRIETA, J. J. en su tesis doctoral (ARRIETA, J. J. 1987), nos encontramos con el escasísimo número de ellos, sobre todo en comparación con los referidos al número y a las operaciones aritméticas. Esto no es de extrañar si tenemos en cuenta la situación de la enseñanza de la geometría a partir de los años 60, en relación con el movimiento de la matemática moderna. Las dos escuelas psicopedagógicas que más ideas han aportado al respecto, han sido la escuela Piagetiana y la de los esposos van Hiele, que aunque han publicado sus estudios e investigaciones con anterioridad a los años 60, han permanecido ignoradas hasta muy recientemente.

Efectivamente, los textos de PIAGET e INHELDER y PIAGET, INHELDER y SZEMINSKA, publicados en los años 46 y 48, recogían las investigaciones sobre la representación del espacio y la geometría espontánea en el niño (1). Estos dos textos junto con el publicado posteriormente sobre la imagen mental en el niño han definido el campo de estudio de los conceptos espaciales y geométricos. Las tesis piagetianas han potenciado y favorecido la adopción de determinadas medidas curriculares, como por ejemplo la introducción de las nociones topológicas en los primeros niveles de escolaridad. Un ejemplo de esto son los Programas Renovados en nuestro país.

La otra gran Escuela Psicopedagógica de la que se ocupa este artículo es la escuela holandesa de los esposos Van Hiele, prácticamente desconocida en el mundo educativo español.

En los años 50, los esposos Pierre M. van Hiele y Dina van Hiele-Geldof, trabajaban como profesores de geometría de enseñanza secundaria en Holanda. A partir de su experiencia docente, elaboraron un modelo que trata de explicar por un lado cómo se produce la evolución del razonamiento geométrico de los estudiantes, y por otro cómo puede un profesor/a ayudar a sus alumnos/as para que mejoren la calidad de su razonamiento (2). De esta forma los componentes principales del modelo de Van Hiele son su *teoría de los niveles de razonamiento*, que explica cómo se produce el desarrollo en la calidad de razonamiento geométrico de los estudiantes cuando éstos estudian geometría, y *las fases de aprendizaje*, que constituye su propuesta didác-

tica para la secuenciación de actividades de enseñanza-aprendizaje en el aula, con el objeto de facilitar el ascenso de los estudiantes de un nivel de razonamiento al inmediatamente superior. Vamos a explicar brevemente en qué consisten ambos componentes del modelo (3).

### Los niveles de razonamiento

Los niveles de razonamiento describen los distintos tipos de razonamiento geométrico de los estudiantes a lo largo de su formación matemática, que va desde el razonamiento intuitivo de los niños de preescolar hasta el formal y abstracto de los estudiantes de las Facultades de Ciencias. De acuerdo con el modelo de van Hiele si el aprendiz es guiado por experiencias instruccionales adecuadas, avanza a través de los cinco niveles de razonamiento, empezando con el reconocimiento de figuras como todos (nivel 1), progresando hacia el descubrimiento de las propiedades de las figuras y hacia el razonamiento informal acerca de estas figuras y sus propiedades (niveles 2 y 3), y culminando con un estudio riguroso de geometría axiomática (niveles 4 y 5). El nivel 1 es denominado nivel de *reconocimiento o visualización*; el nivel 2, *nivel de análisis*; el nivel 3 *clasificación o abstracción*; el nivel 4 *deducción*, y el nivel 5 *rigor* (GUTIERREZ, A. y JAIME, A. 1990) (BURGER, W. F. y SHAUGHNESSY, J. M. 1986). El modelo es recursivo, es decir cada nivel se construye sobre el anterior, concibiéndose el desarrollo de los conceptos espaciales y geométricos como una secuencia desde planteamientos inductivos y cualitativos, hacia formas de razonamiento cada vez más deductivas y abstractas. En la bibliografía existente sobre el tema se pueden encontrar listas muy completas de las características de los distintos niveles.

### Las fases de aprendizaje

Mientras que los niveles de razonamiento nos orientan acerca de cómo secuenciar y organizar el currículo geométrico de una forma global, el objetivo de las Fases de aprendizaje es favorecer el desplazamiento del alumno/a de un nivel al inmediatamente superior mediante la organización de las actividades de enseñanza-aprendizaje, lo que ha permitido que el modelo tuviera una influencia real en la elaboración de

currículos de geometría en distintos países como es el caso de la Unión Soviética, E.E.U.U., Países Bajos, etc.

Las fases de aprendizaje son las siguientes:

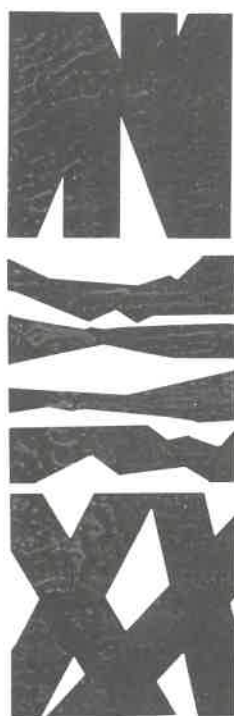
- Información.
- Orientación dirigida.
- Explicitación.
- Orientación libre.
- Integración.

Resumiendo las características fundamentales de cada fase, en la primera se pone a discusión del alumno/a material clarificador del contexto de trabajo. En la segunda fase se proporciona material por medio del cual el alumno/a aprenda las principales nociones del campo de conocimiento que se está explorando. El material y las nociones a trabajar, se seleccionarán en función del nivel de razonamiento de los alumnos/as. En la tercera fase conduciendo las discusiones de clase, se buscará que el alumno/a se apropie del lenguaje geométrico pertinente. En la cuarta fase se proporcionará al alumno/a materiales con varias posibilidades de uso y el profesor/a dará instrucciones que permitan diversas formas de actuación por parte de los alumnos/as. En la quinta fase se invitará a los alumnos/as a reflexionar sobre sus propias acciones en las fases anteriores. Como resultado de esta quinta fase, los autores entienden que el alumno/a accede a un nuevo nivel de razonamiento. El estudiante adopta una nueva red de relaciones que conecta con la totalidad del dominio explorado. Este nuevo nivel de pensamiento, que ha adquirido su propia intuición, ha sustituido al dominio de pensamiento anterior (FUYS, D.; GEDDES, D. y TISCHLER, R. 1984).

### Piaget versus Van Hiele

Si comparamos la teoría piagetiana con la de los esposos van Hiele, encontramos similitudes y diferencias que nos ayudan a valorar más apropiadamente la gran aportación, en el campo de la enseñanza de la geometría del modelo van Hiele. El

**"A partir de su experiencia docente, elaboraron un modelo que trata de explicar por un lado cómo se produce la evolución del razonamiento geométrico de los estudiantes y por otro cómo puede un profesor/a ayudar a sus alumnos/as para que mejoren la calidad de su razonamiento"**



© MANFRED MAIER

propio van Hiele, P. ha señalado en alguna ocasión sus discrepancias con respecto al modelo piagetiano (4).

Tanto la teoría piagetiana como el modelo de van Hiele conciben el desarrollo de los conceptos espaciales y geométricos como una secuencia desde planteamientos inductivos y cualitativos hacia formas de razonamiento cada vez más deductivas y abstractas, a la vez que ambos modelos se basan en niveles y/o etapas siendo éstos de carácter recursivo en los dos casos. Sin embargo los dos modelos presentan características diferenciales que convierten al modelo de van Hiele en un modelo de *mayor virtualidad didáctica*. Vamos a exponer en líneas generales cuáles son esas características diferenciales:

1. La teoría piagetiana es una teoría del desarrollo, no del aprendizaje, por lo que no se planteó el problema de cómo provocar el avance de los niños/as de un nivel al siguiente. Se trata de una investigación de carácter genérico cuyo marco teórico lo constituyen las teorías del aprendizaje y del desarrollo. El proceso de aprendizaje es considerado como un proceso madurativo, por lo que el valor de la enseñanza es disminuido.

En contraste, la teoría de los autores holandeses, surge de la preocupación por dar respuesta a los problemas reales que ellos mismos y sus alumnos/as encontraban en la clase de geometría. Por este motivo, el problema didáctico acerca de cómo ayudar a los alumnos/as en el ascenso de un nivel de razonamiento al siguiente se configuró en el problema de investigación fundamental, pudiéndose afirmar que nos encontramos ante *una teoría de la enseñanza-aprendizaje de la geometría* (5). Esta preocupación por estudiar cómo puede el profesor/a facilitar el ascenso de razonamiento geométrico de sus alumnos/as fue la que les llevó a formular la segunda gran aportación del modelo: *las Fases de aprendizaje*.

En este sentido, el modelo de van Hiele es, a pesar de su antigüedad, un buen representante de las líneas más actuales de investigación en Didáctica de las Matemáticas, construyendo una teoría propia en una subárea de investigación (geo-

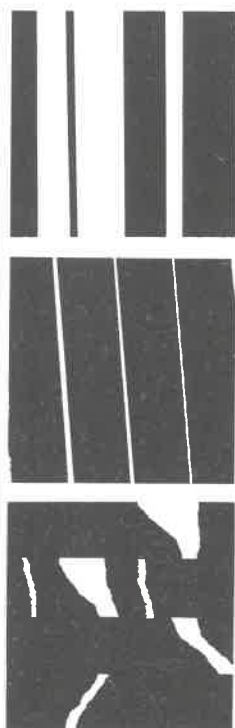


metría), y dando gran importancia a los contextos interactivos en el aula y al papel del profesor/a (ARRIETA, J. J. 1989).

En relación con lo anteriormente expuesto, el interés por empezar a estudiar en nuestro país el modelo de Van Hiele, así como por empezar a utilizarlo como elemento de reflexión en la elaboración de proyectos curriculares en el área de geometría, se justifica por tratarse de una teoría educativa y no psicogenética, como es el caso de las investigaciones piagetianas. Es por esta razón por lo que los intentos de aplicar el modelo en el campo de la educación matemática han sido mucho más fructíferos. Los autores no conceptualizan los niveles de razonamiento como estadios del desarrollo sino como etapas por las que el alumno/a va avanzando siempre y cuando participe en actividades de enseñanza- aprendizaje adecuadas. El papel asignado a la enseñanza en cuanto a su capacidad para provocar el avance de los alumnos/as a través de los diferentes niveles de razonamiento es decisivo.

2. Otra de las características diferenciales entre ambas teorías hace referencia al *papel otorgado al lenguaje*. Mientras la teoría piagetiana dio escasa importancia al papel jugado por el lenguaje en el ascenso de un nivel o etapa al siguiente (6), para los van Hiele el papel jugado por el lenguaje en la estructuración del pensamiento es decisivo, y se desarrolla en niveles de forma paralela a los niveles de razonamiento. El modelo defiende que los distintos niveles de razonamiento geométrico poseen una especificidad de lenguaje. Por consiguiente no se debe menospreciar el papel otorgado al lenguaje matemático utilizado en el aula. El profesor/a tendrá que conocer el nivel de dominio del lenguaje geométrico de sus alumnos/as para adaptarse a él, y procurar que éste avance en complejidad hacia un lenguaje más estructurado y abstracto. La estructuración del lenguaje se va construyendo de forma pareja a la estructuración geométrica visual y a la estructuración abstracta del pensamiento.

3. Por otra parte, la teoría de los autores holandeses, a pesar de surgir en el momento en el que el movimiento de la



© MANFRED MAIER

**"La teoría de los autores holandeses surge de la preocupación por dar respuesta a los problemas reales que ellos mismos y sus alumnos/as encontraban en la clase de geometría"**

Matemática Moderna surgía con fuerza, asume una aproximación a la naturaleza del conocimiento matemático, —entendido como actividad, inducción e investigación que avanza desde su fundamentación empírica hacia niveles superiores de abstracción— y una concepción del sentido o papel de la enseñanza en claro desacuerdo con la defendida por dicho movimiento, y al que la teoría piagetiana concedió su apoyo. El problema de enseñanza de la matemática no es para los autores un problema de lógica de la disciplina sino un problema fundamentalmente didáctico. La teoría de los van Hiele considera el proceso de aprendizaje como un proceso de reinención en un momento en el que se consideraba que si el análisis era capaz de poner de manifiesto la existencia de una estructura deductiva de las matemáticas, éstas deberían ser inculcadas con esa estructura deductiva. En contraposición con esta idea, enseñar matemáticas es para los autores, iniciar al alumno/a a una actividad, por lo que el método empleado no puede reducirse a los productos acabados de la disciplina, sino a sus actividades. FREUDENTHAL, H. considera el trabajo de los autores como el primer trabajo de calidad que parte de esta perspectiva, y critica aquellas posturas que analizan la estructura de la materia a enseñar antes de construir el sistema de enseñanza (HERNANDEZ, J. 1978). Este análisis de las matemáticas en tanto que actividad, dota al modelo de un interés especialmente relevante para nosotros, en la medida que sitúa el *problema didáctico* en la respuesta a la siguiente pregunta:

*¿Qué tipo de problemas hemos de presentar a los alumnos/as para que su actividad e investigación en torno a los mismos les conduzca hacia formas superiores de intuición y abstracción geométrica?*

En la situación actual de la enseñanza de la geometría, y particularmente en el caso español, la insistencia de enseñar geometría se hace patente. Ahora bien, ya no se trata sólo de defender la importancia y necesidad de enseñar geometría, sino que el problema crucial en este momento es el de discutir qué geometría

*"Esta preocupación por estudiar cómo puede el profesor/a facilitar el ascenso de razonamiento geométrico de sus alumnos/as fue la que les llevó a formular la segunda gran aportación del modelo: las fases de aprendizaje"*

debe ser enseñada en la Escuela y cómo. En definitiva nos encontramos en un momento histórico en el que la reacción al carácter deductivo y formal que la enseñanza de la geometría ha adoptado en los últimos tiempos nos obliga a investigar los problemas didácticos implicados en su enseñanza. Para ello el modelo de van Hiele se presenta como enorme rico.

Si a eso le unimos el proceso de reforma curricular en la que se encuentra nuestro país en la actualidad, y en el que la enseñanza de la geometría parece volver a tener un papel relevante en la enseñanza primaria y secundaria, alejándose de la postura claramente "modernista" adoptada en los Programas Renovados, la necesidad de dar a conocer el modelo en el campo educativo español parece relevante y necesaria (7).

### Implicaciones curriculares del modelo

El modelo de van Hiele proporciona un esquema útil de organización del currículo y del material de aprendizaje que ha tenido una influencia real en la elaboración de currículos de geometría en distintos países, como es el caso de la Unión Soviética. Los educadores soviéticos fueron los únicos, a excepción de los holandeses (país de origen del modelo), que al conocerlo y tras unos años de intensas investigaciones y experimentaciones, incorporan el modelo de van Hiele como base teórica para la elaboración de la nueva reforma curricular que estaban poniendo en marcha y cuya implementación definitiva se produce en 1964 (WIRSZUP, I. 1976). Mucho más tarde se iniciaron en E.E.U.U y Europa investigaciones curriculares en esta línea, aunque de mucha menos relevancia que los trabajos soviéticos.

De la revisión de las aportaciones teóricas y prácticas del modelo van Hiele en la comunidad educativa internacional (Unión Soviética, E.E.U.U, Canadá, Holanda, y España), así como de las diversas investigaciones y desarrollos curriculares basados en el mismo, se pueden deducir una serie de implicaciones generales de carácter curricular:

- Es necesario introducir más geometría desde el primer año en las clases de primaria y secundaria, no siendo conveniente separar la geometría de las matemáticas en la enseñanza primaria.

- En los primeros años se debe fomentar un trabajo geométrico de carácter cualitativo, que asegure la formación de conceptos y la imaginación espacial.

- En el currículo geométrico la presentación de la materia debe iniciarse en el espacio para pasar inmediatamente después al plano.

- Es necesario enseñar geometría informal a los alumnos/as de enseñanza secundaria.

- Los estudios de geometría deben ser *continuos* (sin periodos de inactividad), *uniformes* (sin pasar por alto ningún nivel de razonamiento), y *diversificados*, es decir, familiarizando a los alumnos y alumnas de forma simultánea con la geometría bi y tridimensional.

- Básicamente los mismos contenidos han de ser enseñados en la enseñanza primaria y secundaria. Estos contenidos geométricos han de ser tratados cíclicamente en niveles de complejidad creciente. La secuenciación de dichos contenidos a través del currículo estará determinada por el análisis de cada tópico en función de la estructura del modelo, lo que determinará un tratamiento distinto en cada nivel, avanzando desde los aspectos cualitativos a los cuantitativos y abstractos.

De la revisión de los trabajos realizados a nivel internacional sobre el modelo de van Hiele, se puede deducir también un conjunto de *principios de procedimiento*, entendidos éstos como "normas dirigidas al profesor indicándole actitudes en su trabajo" (ROZADA, J. M.; CASCANTE, C. y ARRIETA, J. J. 1989, pp. 113).

### Principios de procedimiento

1. El profesor/a partirá del hecho de que los estudiantes poseen un almacén significativo de concepciones y propiedades de los objetos materiales.

2. El profesor/a procurará, a partir de la experiencia previa de los alumnos/as —es decir de la observación de figuras concretas—, que formen estructuras geométricas, y pondrá en relación estas observaciones con una forma "geométrica" de verlas.

3. El profesor/a diseñará actividades de enseñanza-aprendizaje en el aula teniendo en cuenta el nivel lingüístico y de razonamiento de los alumnos/as.

4. El profesor/a procurará conocer de qué forma es estructurado el espacio de forma espontánea por los alumnos/as, para partiendo de esa percepción, diseñar actividades que permitan al estudiante construir estructuras visuales geométricas y por fin razonamiento abstracto. Para ello el profesor/a modificará progresivamente el contexto en el que aparecen los objetos en una dirección matemática alejándose del empirismo.

5. El profesor/a estará atento a la adquisición de "insight" (8) por parte de los alumnos/as, para lo que es necesario que el diálogo sea la pieza clave de la enseñanza. El profesor/a animará a los alumnos/as a hablar acerca de los conceptos geométricos y a desarrollar un lenguaje expresivo, respetando en un primer momento sus propias expresiones y lenguaje, para ir introduciendo progresivamente el lenguaje geométrico.

6. El profesor/a procurará conocer el correlato mental de las palabras y conceptos que utilizan los alumnos/as y que él necesita, por medio de actividades diseñadas a tal fin y por medio del uso continuo del diálogo en el aula.

7. El profesor/a diseñará actividades de clarificación y complementación de dicho correlato mental que permitan que éste coincida con el significado de la palabra en la disciplina.

8. El profesor/a fomentará el trabajo consciente e intencional de los alumnos/as con la ayuda de materiales manejables. El material ha de poseer el fundamento del desarrollo lógico de la geometría. El material ha de ser autocorrectivo.

9. El profesor/a permitirá a los alumnos/as trabajar con material concreto sólo cuando sea necesario para construir la teoría. El periodo de acumulación de hechos de forma inductiva no debe ser prolongado demasiado. El alumno/a debe y puede usar la deducción.

En general, la investigación ha demostrado la adecuación del modelo para juzgar el entendi-

miento de los estudiantes en geometría —BURGER, W. F. y SHAUGHNESSY, J. M. (1985), (1986); FUYS, D.; GEDDES, D. y TISCHLER, R. (1988); MAYBERRY (1983)—. También ha demostrado que se pueden diseñar materiales y construir una metodología que respete los niveles y promueva el ascenso a través de los mismos —BURGER, W. F. y SHAUGHNESSY, J. M. (1985), (1986); FUYS, D. GEDDES, D. y TISCHLER, R. (1988)—.

La necesidad ahora, es la de profundizar y definir más adecuadamente las Fases de aprendizaje, investigando su valor y aplicación didáctica, así como desarrollar materiales y proyectos curriculares inspirados en el modelo, que permitan evaluar el interés del mismo a través de su puesta en práctica en el aula, ahora que el modelo y las investigaciones desarrolladas en torno a él han dejado por lo menos una cosa clara:

*"El pensamiento geométrico puede ser accesible a todo el mundo"*

(CROWLEY, 1987, pp. 15) (9).

(\*) Gloria María Braga Blanco es profesora del Departamento de Ciencias de la Educación de la Universidad de Oviedo. Teléfono de contacto: 5357345.

#### Notas:

(1) Traducidos al inglés en 1956 y 1960 respectivamente.

(2) Esta teoría la exponen por primera vez en sus tesis doctorales, leídas en 1957. Ver FUYS, D.; GEDDES, D. y TISCHLER, R. (1984).

(3) Para consultar más en profundidad las aportaciones del modelo en la bibliografía española, ver GUTIERREZ, A. y JAIME, A. (1990).

(4) VAN HIELE, P. (1986): *Structure and insight*. Academic Press. New York. pp. 5-6, pp. 99-108.

(5) Un claro y bellísimo ejemplo es la tesis doctoral de DINA VAN HIELE-GELDOF presentada en 1957. En FUYS, D.; GEDDES, D. y TISCHLER, R. (1984), pp. 5-207.

(6) Recordemos la crítica hecha por FREUDENTHAL, H. a los trabajos piagetianos basada fundamentalmente en el papel jugado por el lenguaje en los mismos. VER FREUDENTHAL, H. (1973): *Mathematics as an educational task*. Reidel. Dordrecht, pp. 662-677.

*"Para los van Hiele el papel jugado por el lenguaje en la estructuración del pensamiento es decisivo y se desarrolla en niveles de forma paralela a los niveles de razonamiento"*



(7) En este sentido, hay que referirse a la enorme labor de difusión que el Departamento de Didáctica de las Matemáticas de la Universidad de Valencia, y en concreto los profesores ANGEL GUTIERREZ y ADELA JAIME han estado y están realizando en este sentido.

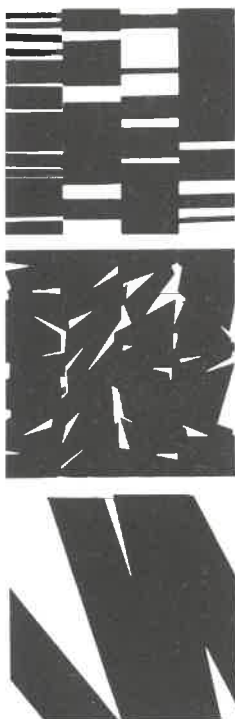
(8) Una persona muestra "insight" si: (a) es capaz de actuar en una situación no familiar; (b) ejecuta de forma competente (correcta y adecuadamente) los actos requeridos por la situación; y (c) pone en juego intencionalmente (deliberada y conscientemente), un método que resuelve la situación. (HOFFER, 1983).

(9) La traducción de la cita es de la autora. Originalmente: "Geometric thinking can be accesible to everyone" (CROWLEY, 1987, pp.15).

### Referencias bibliográficas

- ARRIETA, J. J. (1987): *Teoría y práctica de las matemáticas en el ciclo inicial de E.G.B.* Facultad de Filosofía y CC. de la Educación. Oviedo. Tesis doctoral
- ARRIETA, J. J. (1989): "Investigación y docencia en Didáctica de las Matemáticas: hacia la constitución de una disciplina". *Separata de Studia Paedagógica*. nº 21. Salamanca.
- BURGER, W. F. y SHAUGHNESSY, J. M. (1985): "Spadework prior to deduction in geometry". *The Mathematics teacher*. Vol. 78. pp. 419-428.
- BURGER, W. F. y SHAUGHNESSY, J. M. (1986): "Characterizing the Van Hiele levels of development in Geometry". *Journal for research in Mathematics Education*. Vol 17 (1). pp. 31-48.
- CROWLEY, M. L. (1987): "The van Hiele model of development of geometric thought". En N.T.C.M.: *Learning and teaching geometry, K-12*. N.T.C.M., Reston, pp. 1-16.
- FREUDENTHAL, H. (1973): *Mathematics as an educational task*. D. Reidel. Dordrecht.
- FUYS, D.; GEDDES, D. y TISCHLER, R. (1984): *English translations of selected writings of van Hiele*. School of Educ. Brooklyn College. City Univ. of N.York, N. York.
- FUYS, D.; GEDDES, D. y TISCHLER, R. (1988): *The van Hiele model of thinking in geometry among adolescents*. (Informe final). *Journal for research in Mathematics Education*. Monografía nº 3.
- GUTIERREZ, A. y JAIME, A. (1987): "Estudio de las características de los niveles de van Hiele". En HERSCOVICS, N. y KIERAN, C. (eds.): *Proceedings of the 11th International Conference of the PME*. Vol. 3. Los autores (eds). Montreal. pp. 131-137.

**"El problema de enseñanza de la matemática no es para los autores un problema de lógica de la disciplina sino un problema fundamentalmente didáctico: ¿Qué tipo de problemas hemos de presentar a los alumnos/as para que su actividad e investigación en torno a los mismos les conduzca hacia formas superiores de intuición y abstracción geométrica"**



© MANFRED MAIER

- GUTIERREZ, A. y JAIME, A. (1989): "Bibliografía sobre el modelo geométrico de van Hiele". *Enseñanza de las Ciencias*. vol nº 1, pp. 89-95.
- GUTIERREZ, A. y JAIME, A. (1990): "Una propuesta de fundamentación para la enseñanza de la geometría: el modelo de van Hiele". LLINARES, S. y SANCHEZ GARCIA, M. V. *Teoría y práctica en educación matemática*. Alfar. Sevilla. pp. 298-384.
- HERNANDEZ, J. (1978): *La enseñanza de las matemáticas modernas*. Alianza Universidad. Madrid.
- HOFFER, A. (1983): "Van Hiele based reserach". RICHARD, L. y LANDAU, M. (Eds): *Acquisition of Mathematics concepts and processes*. Academic Press. New York. pp. 205-226.
- KILPATRICK, J. y WIRSZUP, I. (1977): *Soviet studies in psychology of learning and teaching mathematics*. Vol 1. Chicago.
- MAYBERRY, J. (1983): "The van Hiele levels of geometric thought in undergraduate pre-service teachers". *Journal for research in Mathematics Education*. Vol 14. pp. 58-69.
- PIAGET y otros (1978): *La enseñanza de las matemáticas modernas*, Alianza Universidad. Madrid.
- ROZADA, J. M.; CASCANTE, C. y ARRIETA, J. J. (1989): *Desarrollo curricular y formación del profesorado*. Cyan. Gijón.
- TRIFFERS, A. (1987): *The dimensions*. D. Reidel. Dordrecht.
- USISKIN, Z (1982): *Van Hiele levels and achievement in secondary school geometry*. (informe final). Department of Education. University of Chicago. Chicago.
- VAN HIELE, P. M. y VAN HIELE-GELDOF, D. (1958): "A method of initiation into geometry at secondary schools". En, FREUDENTHAL, H. (ed.): *Report on methods of initiation into geometry*. J. B. Wolters. Groningen. pp. 67-80.
- VAN HIELE, P. (1986): *Structure and insight*. Academic Press. New York.
- WIRSZUP, I (1976): "Breakthroughs in the psychology of learning and teaching geometry". En MARTIN, J. L. y BRADBARD, D. A. (eds.): *Space and geometry*. Martín, J. L. y Bradbard, D. A. Columbus, pp. 75-97.