

JUEGOS,  
ENSEÑANZA

Y

MATE

# L MÁTICAS

Las actividades que hoy llamamos matemáticas aparecen en los inicios de la historia de la humanidad como semejantes a lo que en la actualidad entendemos por geometría. Las cifras y la aritmética son más tardías, incluso en algunos miles de años. En esos inicios son tres las utilidades que se citan habitualmente de las matemáticas: la medida de superficies, sobre todo agrícolas (geometría); la fijación del calendario y la predicción de acontecimientos (astronomía, para lo cual se usaba también la geometría) y la anotación de cantidades y mucho más adelante las operaciones con ellas (aritmética).

De estas tres partes, dos gozan de buena salud en los sistemas educativos de todo el mundo. Sin embargo la astronomía ha desaparecido prácticamente de nuestras escuelas.

FERNANDO CORBALÁN

**P**ero además de los tres objetos fundamentales del quehacer matemático que hemos citado, hay un cuarto que con cierta frecuencia se olvida: el amplio campo de los juegos y divertimentos matemáticos. Y no es en absoluto despreciable, incluso en cantidad. Podemos decirlo con palabras de alguien tan poco sospechoso de parcialidad hacia ello como es Dieudonné: "Las nueve décimas partes de las matemáticas, a parte de las que tienen su origen en necesidades de orden práctico, consisten en la resolución de adivinanzas (...). En conclusión, digamos que los problemas matemáticos poseen siempre un origen doble: por un lado están los problemas surgidos de problemas técnicos y que se le plantean al matemático, quien los resuelve lo mejor que puede o no los resuelve en absoluto; por otro lado tenemos los problemas de pura curiosidad, los acertijos"(1).

Y esta situación no es reciente. Basta con pensar en los pitagóricos, que datan de hace 26 siglos. Buena parte de sus resultados pueden considerarse juegos. Ahí están los *números triangulares*, que aparecen cuando queremos colocar fichas o piedras formando triángulos rectángulos o equiláteros, los *números primos*, los *números amigos* (parejas tales que cada uno de ellos es igual a la suma de los divisores del otro), los *números perfectos* (que son iguales a la suma de sus divisores propios),... [2]. Se aprecia el carácter lúdico en todos los casos. E incluso una familiaridad con los números, hasta en los nombres que se les aplica, que sólo puede provenir de un contacto directo y jovial con ellos por medio de distendidas situaciones de juego.

Y el interés por este tipo de números sigue existiendo en la actualidad. Con la puesta a punto de medios más poderosos de cálculo, y en particular con potentes ordenadores, ha renacido con brío la investigación sobre ellos, que nunca se extinguió. Y cada cierto tiempo aparecen nuevos números perfectos (a pesar de que los ya 'localizados' se escriben con más de 12.000 cifras) o números primos más grandes que los ya conocidos (dando lugar a 'noticias', en los periódicos de que se han encontrado 'el mayor número primo', sin añadir lo desconocido, y obviando el hecho de que la sucesión de números primos es indefinida).

### Euclides y la formalización

En la historia de nuestra matemática occidental, el siguiente paso importante lo da Euclides. ¿Qué aportó Euclides de novedoso?

Formuló un cuerpo completo de teoría en el que reunió los resultados de sus predecesores y a ellos añadió sus propios resultados. Pero además los organizó de manera que se podían demostrar partiendo de unos pocos resultados 'evidentes' en sí mismos (llamados axiomas y postulados) y mediante la utilización de leyes predeterminadas y explicitadas (las reglas de inferencia). Con ello lo que consiguió es separar la verdad matemática de la experiencia de la realidad física circundante"[3].

Miremos ahora los juegos. Una buena definición de los mismos es la que proporciona el antropólogo holandés Huizinga: "Juego es una acción y ocupación voluntaria, que se desarrolla dentro de unos límites temporales y espaciales determinados, según reglas absolutamente obligatorias, aunque libremente aceptadas; acción que tiene un fin en sí misma y acompañada de un sentimiento de tensión y alegría"[4]. Comparando las dos citas observamos que nos encontramos en terrenos bien próximos.

Se puede incluso, como hacen Winter y Ziegler[5], explicar las relaciones. Dicen que "los juegos de reglas están en correspondencia directa con el modo de pensar matemático. La correspondencia es:

Reglas de juego	Reglas de construcciones, reglas lógicas, instrucciones, operaciones.
Situaciones iniciales	Axiomas, definiciones, lo 'dado'.
Jugadas	Construcciones, deducciones.
Figuras del juego	Medios, expresiones, términos.
Estrategia de juego	Utilización hábil de las reglas, reducción de ejercicios conocidos a fórmulas.
Situaciones resultantes	Nuevos teoremas, nuevos conocimientos".

Por ello, quizás sería conveniente abordar, al menos a veces, los conocimientos matemáticos, de acuerdo con la anterior tabla, por el lado de los juegos, en vez de utilizar sólo la vertiente matemática. Porque, "aunque no se pueda hablar siempre de actividad matemática en relación a ellos, los juegos proporcionan situaciones en las que la actividad de investigación se parece mucho a la de las personas que tratan de resolver un problema de matemáticas. Por ejemplo, en una partida con dos jugadores, el que

emplea una estrategia que él cree ganadora, continuará empleándola en tanto que su adversario no le haga descubrir su error encontrando una manera de ganarle. Entonces el primer jugador se verá obligado a profundizar su reflexión y a emplear una nueva estrategia”[6].

Un aspecto distinto es si las matemáticas son únicamente un juego, y parecen haber razones poderosas que avalan la tesis de que son algo más que un Gran Juego [7]. En cualquier caso sí que tiene interés la relación entre axiomáticas decibles (o completas) y juegos de determinación estricta. Recordamos que una axiomática se llama completa cuando cualquier enunciado es un teorema o un absurdo (es decir, que su contrario es un teorema). Por el contrario, si una axiomática es indecible (como es el caso, según el famoso Teorema de Gödel, de la Lógica de Predicados de primer orden) existen enunciados que no son ni verdaderos ni falsos.

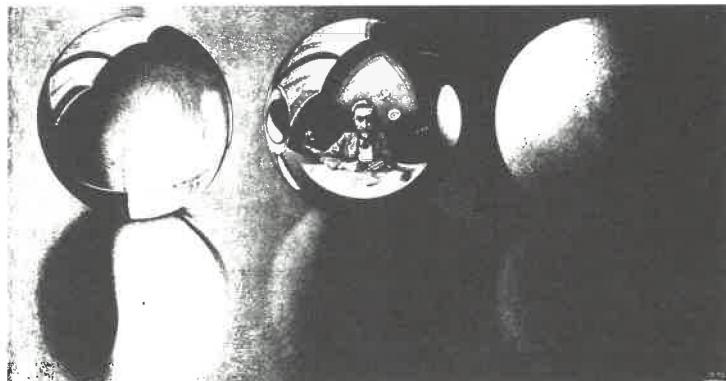
Igualmente, si un juego no es de determinación estricta, toda estrategia de uno de los jugadores puede ser contrarrestada por el otro, impidiéndole ganar.

Tenemos otra vez una relación estrecha entre campos aparentemente muy alejados. Relación que, además, vale le pena que se explore, porque como ya decía Platón “la vida debe ser vivida jugando los más bellos juegos, para congradciarse a los dioses.... y conseguir la victoria”.

### Las matemáticas de los juegos

Pero para ver matemáticas no hay que buscar con paciencia y dedicación en juegos sofisticadísimos. Al contrario, basta con fijarse en los juegos que se juegan en las salas de estar de las casas, en bares, casinos, centros de reunión,... Si pensamos en juegos de baraja, en los que más nos gusten, seguro que hay:

**“Las nueve décimas partes de las matemáticas, aparte de las que tienen su origen en necesidades de orden práctico, consisten en la resolución de adivinanzas” (Dieudonné)**



- Probabilidades, en todos los juegos de envite, por ejemplo el poker.

- Recuento de posibilidades (abordables por diagramas de árbol), siempre que haya que considerar tantos o bazas perdidos, como el tute subastado.

- Clasificaciones, tarea fundamental del conocimiento, y que aparece en todos los juegos en los que hay que ‘ligar’, tales como el rabino o el chinchón.

- Ordenaciones, que es muy común, pero tarea específica en algunos de ellos, como el cinquillo.

- Operaciones aritméticas, de suma, multiplicación u otras, que hay que realizar en casi todos los juegos.

Y eso si no nos fijamos en otros juegos casi exclusivamente matemáticos, como los de tipo dominó. Y no podemos dejar de citar otros juegos universales con un fuerte ‘sabor’ matemático. Sobre todo el ajedrez. Pero también el Nim (o de Marienbad, porque se jugaba en la película “El año

pasado en Marienbad”); el juego de la Bastilla (conocido en España por el nombre, que tan absurdo le parecía a Puig Adam, de ‘cha-cha-chá’, nadie sabe por qué); y también el tres en raya, el Mastermind o el Othello.

Por otra parte hay que considerar que en muchos juegos pueden variar las prestaciones, pero que juegos realmente nuevos (igual que pasa con los problemas) hay muy pocos. O por decirlo con palabras de J. R. Newman, “es sorprendente descubrir que, en el mundo de los juegos matemáticos, no se ha logrado aportar sustancialmente nada nuevo durante los últimos diez siglos”[8].

### Juegos y enseñanza

Hemos visto la estrecha relación entre las matemáticas y los juegos. Y el aspecto motivante de la realización de juegos no hace falta destacarlo. Luego

parece de todo punto conveniente ver las formas de introducir juegos en la enseñanza de las matemáticas.

Creemos que es conveniente hacer algunas consideraciones generales sobre cómo hacerlo.

*Primera:* Se tienen que utilizar juegos en cualquier edad. Es relativamente frecuente la utilización de juegos hasta que los alumnos tienen 7-8 años, pero a partir de ese momento parece que se olvidan "las tonterías" y se empieza con la matemática 'seria'. No hay ningún límite temporal para hacerlo, sólo habrá que variar los juegos a utilizar, o al menos la manera en que se hace.

*Segunda.-* La utilización de los juegos hay que hacerla de la manera más planificada posible, como otro recurso didáctico, y con una programación previa siguiendo los temas que se vayan viendo. En casi todos ellos es posible encontrar juegos.

*Tercera:* Hay que utilizar juegos como norma, no como casos excepcionales. Es bastante habitual que se hagan cosas 'raras' en algunos momentos (cuando llegan determinadas fiestas-navidad u otras,...), y está muy bien que sean juegos. Pero deben hacerse también en los días 'normales', que son muchos más y son los que dejan huella duradera.

Una vez hechas las reflexiones anteriores, decir que se pueden clasificar los juegos de muchas maneras, según el aspecto que consideremos.



- Según el material que se utiliza: barajas de cartas, dominós, tableros,...
- Según su utilidad: aritméticos, geométricos, probabilísticos,...
- Según la edad a que van dirigidos.
- Según el tipo de actividad: de posición, de carrera, de guerra,...
- Según el número de participantes: solitarios, para dos jugadores,...

**"Creemos que lo fundamental es conocer y analizar los aspectos matemáticos del mayor número posible de juegos"**

Sin embargo hay dos tipos de clasificaciones que tienen especial interés para su utilización en la enseñanza. La primera distingue entre *Juegos de conocimiento*, que son aquellos que hacen referencia a conceptos o algoritmos que aparecen en los programas del curso o ciclo correspondiente (por ejemplo, las fracciones, el sistema métrico decimal, los polígonos) y

*Juegos de estrategia*, en los que lo fundamental es el desarrollo de las habilidades heurísticas típicas de la resolución de problemas: particularización, generalización, prueba y error, suponer el problema resuelto..., y en los que en general se trata de encontrar estrategias ganadoras o al menos ventajosas (tales como Nim, sol y sombra,...).

Si consideramos el papel que ocupan los juegos en el proceso de aprendizaje, tenemos una segunda clasificación. Los juegos pueden ser

- *Pre-instruccionales*, cuando se utilizan para inducir conceptos no conocidos.
- *Co-instruccionales*, si se juegan paralelamente a la introducción por otros métodos de un determinado concepto.

• *Post-instruccional*, cuando de lo que se trata es para reforzar conceptos ya introducidos o para profundizar en el uso de determinados algoritmos.

Y un mismo juego puede utilizarse en varios o en todos los aspectos anteriores. De cualquier manera no se trata de dar recetas. Creemos que lo fundamental es conocer y analizar los aspectos matemáticos del mayor número posible de juegos (que pueden ser algunos que ya juegan los alumnos, como puede ser la escoba) y utilizarlos cuantas veces se considere necesario... y alguna más. Y sobre todo crear un ambiente lúdico en clase, en el proceso de aprendizaje, en el cual entrarán fácilmente los juegos.

En cualquier caso creemos que es importante la utilización de juegos en clase.



"Es un hecho frecuente que muchas personas que se declaran incapaces de toda la vida para la matemática, disfrutan intensamente con puzzles y juegos cuya estructura en poco difiere de la matemática. Existen en ellas claros bloqueos psicológicos que nublan su mente en cuanto se percatan que una cuestión que se les propone, mucho más sencilla tal vez que el juego que practican, tiene que ver con el teorema de Pitágoras (...). Bien se puede pensar que muchas de estas personas, adecuadamente motivadas desde un principio, tal vez a través de

esos mismos elementos lúdicos que están descargados del peso psicológico y de la seriedad temible de la matemática oficial, se mostrarían, ante la ciencia en general y ante la matemática misma en particular, tan inteligentes como corresponde al éxito de su actividad en otros campos diferentes"[9].

O como señala el famoso Informe Cockcroft "Sea cual fuera su nivel de conocimientos, el empleo cuidadosamente planificado de rompecabezas y 'juegos' matemáticos puede contribuir a clarificar las ideas del programa y desarrollar el pensamiento lógico"[10].

Y por acabar el apartado, y citando á alguien alejado de las matemáticas, Pablo del Río dice [11] que "creemos que queda claro que la difusión de materiales de juego diseñados para construir la mente es algo más que un divertimento inofensivo: constituye un de los desafíos centrales de la educación del futuro".

### ¿Cómo procurarse juegos?

Después de lo anterior puede estarse de acuerdo en utilizar juegos en las clases. Pero sigue quedando la cuestión fundamental: ¿de dónde sacar los juegos?, ¿cómo procurárselos? Hay varias fuentes. Por una parte están todos los juegos de estrategia que se comercializan en las tiendas (los ya citados y muchos otros, que habrá que analizar en distintos aspectos -niveles adecuados, duración del juego, aspectos que desarrolla,...- antes de llevarlos a clase). También están las barajas habituales que se pueden usar directamente o con pequeñas variantes en bastante juegos (escoba, siete y medio, multimedia,...). Hay no pocos juegos que solo necesitan lápiz y papel [12]. Y finalmente se pueden construir, por el profesor o con ayuda de los alumnos (bien es cierto que ésta última vía está limitada a un número no muy grande por limitaciones de tiempo de ambos estamentos).

Se trata en todo caso de pensar los objetivos que se pretende conseguir y los medios de los que se dispone y progresar lo que se pueda.[13] Buenas bases de la que partir son las barajas modificadas (con el único inconveniente de la relativa dificultad de construcción); los bingos o loterías (apropiados sobre todo para recordar conocimientos); los dominós (que permiten el estudio' de los distintos tipos de números) y los dados de distintos tipos (de 6, 8, 12,... caras) aplicables sobre todo a juegos probabilísticos.

Y pensar que es gratificante avanzar en esa línea. Para nuestros alumnos, que descubrirán

aspectos inéditos y placeres insospechados de las matemáticas. Y para nosotros, profesores, por las mismas razones, y además porque nuestro quehacer diario se desarrollará de una manera mucho más grata y distendida.

### Notas

- (1) "Matemáticas vacías y matemáticas significativas", de Jean Dieudonné, en *Pensar la matemática*, Tusquets Editores, Barcelona, 1984.
- (2) Para obtener más información sobre estos tipos de números se puede recurrir a libros de matemáticas recreativas o de divulgación. En particular *Las matemáticas que no aprendimos*, 1ª parte, de F. Corbalán y J. M. Gairín, Ediciones del Valle, Zaragoza, 1988.
- (3) *Las matemáticas que no aprendimos*, 2ª parte, ya citado.
- (4) *Homo ludens. El juego como elemento de la historia*, de Johan Huizinga, Ed. Aznar, Lisboa, 1943.
- (5) *Introducción al juego de los conjuntos*, de Winter-Ziegler, Interduc/Schroedel, Madrid.
- (6) *La mystification mathématique*, de Alain Bouvier, Ed. Herman, Paris, 1981.
- (7) Sobre la diferencia entre juegos y matemáticas puede verse en el artículo "¿Son las axiomáticas solo un juego?", de R. Fraissé, en *Pensar la matemática*, citado más arriba.
- (8) Enciclopedia Sigma, *El mundo de las matemáticas*, tomo 6, Ed Grijalbo, Barcelona, 1968.
- (9) *Juegos matemáticos en la enseñanza*, de M. de Guzmán, Actas de las IV Jaem, Sta Cruz de Tenerife, 1984.
- (10) *Las matemáticas sí cuentan*, Informe Cockcroft, MEC, Subdirección General de Perfeccionamiento del Profesorado, Madrid, 1985, punto 227.
- (11) Prólogo a la versión española de *Juegos inteligentes*, de B. Nikitin, Ed. Visor, Madrid, 1988.
- (12) Se puede ver el capítulo correspondiente del libro *Problemas a mí nº 3: Juegos a mí*, de F. Corbalán y J. M. Gairín, Ed. Edinumen, Madrid, 1988.
- (13) Una fuente de ideas para juegos es el nº 37 de la revista *Apuntes de Educación. Naturaleza y matemáticas*, Abril-Junio 1990, Ed. Anaya, Madrid, y en particular el artículo *Baraja, bingo y dominó: jugar con las matemáticas*, de F. Corbalán y J. M. Gairín.



### Bibliografía

No es muy abundante la bibliografía asequible sobre juegos. Además de las notas que aparecen a lo largo del texto, citaremos la siguiente:

- CORBALÁN, F. y GAIRÍN, J. M. *Problemas a mí. 3. Juegos matemáticos*, Editorial Edinumen, Madrid, 1988. Contiene una colección de juegos de distintos tipos (con lápiz y papel, con fichas, con calculadoras, para hacer uno mismo,...) directamente utilizables en clase a partir del Ciclo Superior.
- FERNÁNDEZ SUCASAS, J. y RODRÍGUEZ VELA, M. I. *Juegos y pasatiempos para la enseñanza de la matemática elemental*, Editorial Síntesis, Madrid, 1989. Se hace un estudio de las utilidades de los juegos en la enseñanza y se tratan los distintos tipos de juegos, dando indicaciones muy valiosas sobre maneras de poder construirlos.
- BUJANDA, M. P. y DE LA FUENTE, A. M. *Juego y aprendo matemáticas*, dos libros: "de 6 a 11 años" y "de 11 años en adelante", editado por las autoras, Madrid, 1989. En cada uno de los volúmenes aparecen juegos para los niveles indicados en el título, fácilmente reproducibles.
- CARRILLO, M. y HERNÁN, F. *Dominós*, Grupo Cero, Valencia, 1989. Folleto dedicado únicamente a los dominós, con valiosas consideraciones.
- Además de los libros anteriores, en distintos libros de matemáticas recreativas o de divertimentos matemáticos aparecen con cierta frecuencia juegos matemáticos, que directamente o con retoques pueden ser aprovechables en clase. De ellos habrá que citar en primer lugar los libros de Martín GARDNER (publicados en castellano por las Editoriales Alianza, Cátedra, Granica y Labor), y que, en conjunto, constituyen una auténtica enciclopedia. Tiene gran interés para la clase *Inspiración y Paradojas* (Labor, 1983 y 1984), y en cuanto a juegos *Viajes por el tiempo y otras perplejidades matemáticas* (Labor 1988). También contienen múltiples sugerencias aprovechables los libros de Brian Bolt (*Divertimentos matemáticos*, *Actividades matemáticas*, *Más actividades matemáticas*, y *Aún más actividades matemáticas*), Labor, 1987-89. Algunos juegos, junto con otras actividades interesantes, fácilmente reproducibles, aparecen en *Investigando las matemáticas*, de R. Fisher y A. Vince Ed Akal, Madrid, 1990.
- Entre las recopilaciones de juegos de todo tipo, en las que aparecen todos los clásicos, y además de una atractiva presentación, citaremos
- GRUNFELD, F. V. *Juegos de todo el mundo*, UNICEF-Edilan, Madrid, 1978.
- AGOSTINI, F. *Juegos de lógica y matemáticas*, Pirámide, Madrid 1987.
- ROSSENA, G. *100 juegos para niños*, Ed Montena, Madrid, 1987.
- Varios autores. *El libro de los juegos*, Ed. Plaza-Janés, Barcelona, 1989.
- En cuanto a bibliografía en otros idiomas, destacaríamos la publicidad por las Asociaciones de Profesores de Matemáticas francesa y norteamericana siguientes:
- N. C. T. M. *Games and Puzzles for Elementary and Middle School Mathematics*, Reston, Virginia, 1975.
- A. P. M. E. P. *Ludofiches*, varios volúmenes, en particular 82, 83 y 88, editados en París en esos años.
- A. P. M. E. P. *Jeux 2. Jeux et activités numériques*, 1985.