ミルズの定数は無理数

ver. 1.30637

齋藤 耕太

1　はじめに

大変ありがたいことにぼくが書いた論文を読んでくださっている方々を $\mathbb{X}$ で見かけました．ただ論文は一般化していたり，数学者向けに書いたところが多いので難しいかもしれません．特に，結果を限界まで詰めすぎた関係で，Matomäki の構成法は難しくなりすぎている気がします．一般化を特に考えずに，ミルズの定数にだけ焦点を絞ると，この問題はそんなに難しくありません．ハードルを下げるために日本語でノートを書いてみました．論文ではないですし，急ごしらえで作ったので色々間違っていると思います．本当はいろんな背景を書いたりしたいのですが，一旦は証明を淡々と書いていきます．間違いを見つけたりわからないところがあったら何かしらで教えてくれると助かります．

さて，このノートではできる限り前提知識なしで次の定理に証明を与えることを目標とします．

定理 1. ミルズの定数は無理数である．

ただし，いくつかの結果 (定理 2 と定理 8) は証明なしで使います．数学を専攻する学部 1 年生程度の知識 (とくに inf と min や任意と存在の扱い，有界な単調増大/減少列の収束性) は知っているものとします．

2　そもそもミルズの定数は存在するの？

1947 年，ミルズにより次の性質を満たす 1 より大きい実数 A が構成されました [3].

$$(\dagger)\quad \text{全ての自然数 } k \text{ に対して } [A^{3^k}] \text{ が素数となる．}$$

ただし，[ ] はガウス記号 (小数点切捨) とします．例えば，$[1.9]=1$, $[2.35]=2$, $[\pi]=3$ となります．あと，このノートにおいて自然数とは正の整数を指すこととします．

条件 (†) を満たす最小の実数 $A>1$ を**ミルズの定数**と呼びます．このセクションでは「そ

もそもミルズの定数なんて存在するの？」という問題について議論していきます．そのために

$$\mathcal{W}=\{A>1 \mid \text{全ての自然数 } k \text{ に対して } [A^{3^k}] \text{ が素数となる}\}$$

とおいて $\mathcal{W}$ が空でないこと，$\mathcal{W}$ の最小値が存在することを示していきましょう．以下の結果は証明なしで使います．

定理 2 (Baker, Harman, and Pintz [1])**.** ある実数 $x_0 \geq 2$ が存在して $x \geq x_0$ となるとき，$x \leq p \leq x+x^{21/40}$ を満たす素数 p が存在する．

この定理を使って以下を示します．

定理 3 (Mills 1947 [3])**.** 集合 $\mathcal{W}$ は空でない．つまり，ある実数 $A>1$ が存在して，任意の自然数 k に対して $[A^{3^k}]$ が素数となる．

Proof. いちいち 21/40 と書くのが面倒なので $\theta=21/40$ とおきます．まず定理 2 で存在が保証されている x_0 をとります．このとき，$3\theta=63/40<2$ となるため，任意の実数 $x \geq x_0$ に対して

$$x^3+x^{3\theta}<x^3+x^2<x^3+3x^2+3x=(x+1)^3-1 \tag{1}$$

となります．次に，素数は無限個あるため $p_1 \geq x_0$ を満たす p_1 をとることができます．このとき，定理 2 に $x=p_1^3$ を代入し (1) を用いることで

$$p_1^3 \leq p_2 \leq p_1^3+p_1^{3\theta}<(p_1+1)^3-1$$

を満たす素数 p_2 が存在することがわかります．次に，再び定理 2 に $x=p_2^3$ を代入し (1) を用いることで

$$p_2^3 \leq p_3<(p_2+1)^3-1$$

を満たす素数 p_3 が存在することがわかります．この議論を繰り返すことで (厳密には数学的帰納法を用いる必要がある) 以下を満たす素数列 $(p_k)_{k=1}^{\infty}$ が存在します: 任意の自然数 k に対して

$$p_k^3 \leq p_{k+1}<(p_k+1)^3-1. \tag{2}$$

この式を変形させることで $p_k^{1/3^k} \leq p_{k+1}^{1/3^{k+1}}<(p_{k+1}+1)^{1/3^{k+1}}<(p_k+1)^{1/3^k}$ が任意の自然数 k に対して成立します．$k=1,2,\ldots$ と代入することで

$$p_1^{1/3^1} \leq p_2^{1/3^2} \leq p_3^{1/3^3} \leq \cdots<(p_3+1)^{1/3^3}<(p_2+1)^{1/3^2}<(p_1+1)^{1/3^1},$$

となることがわかります．すなわち，左半分は上に有界な単調増大列で右半分は下に有界な狭義単調減少列です．したがって，極限

$$\lim_{k\to\infty} p_k^{1/3^k}=A, \quad \lim_{k\to\infty}(p_k+1)^{1/3^k}=A'$$

が存在することがわかり，$A \le A'$ を満たします．実際には $A = A'$ までわかりますが，ここではそこまで必要ないです．A は上に有界な単調増大列の極限であったので，任意の自然数 k に対して $p_k^{1/3^k} \le A$，すなわち，$p_k \le A^{3^k}$ を満たします．一方，A' は下に有界な (狭義) 単調減少列の極限であったので，今度は任意の自然数 k に対して $A' < (p_k+1)^{1/3^k}$，すなわち，$A'^{3^k} < p_k + 1$ を満たします．以上から，上と下の評価を合わせると

$$p_k \le A^{3^k} \le A'^{3^k} < p_k + 1$$

となることがわかります．よって，$[A^{3^k}] = p_k$ が任意の自然数 k に対して成立するということがわかりました．したがって，$A \in \mathcal{W}$ です． □

命題 4 ([4, Lemma 4.1, Remark 4.2])**.** 集合 $\mathcal{W}$ の最小元は存在する．ここで最小元とは $A \in \mathcal{W}$ であり，任意の $B \in \mathcal{W}$ に対して，$A \le B$ を満たすものをいう．

Proof. 定理 3 からまず $\mathcal{W}$ は空でなく下に有界なので $\inf \mathcal{W}$ が存在します．これを A とおきましょう．$\mathcal{W}$ の定義から $A \ge 1$ となります．inf の定義から $A \in \mathcal{W}$ を証明すればよいです．つまり，任意の自然数 k に対して，$[A^{3^k}]$ が素数となることを示します．まず，自然数 k を固定します．inf の定義から任意の自然数 n に対して

$$A \le A_n \le A + 1/n$$

を満たす $A_n \in \mathcal{W}$ が存在します．ここで，$M = [A^{3^k}] + 1$ とおくと，$A^{3^k} < M$ となります．$(A+1/n)^{3^k} \to A^{3^k}$ $(n \to \infty)$ となるため，十分大きい n が存在して

$$[A^{3^k}] \le A^{3^k} \le A_n^{3^k} \le (A+1/n)^{3^k} < M = [A^{3^k}] + 1$$

となります．つまり，十分大きい n に対して $[A^{3^k}] = [A_n^{3^k}]$ となり，$A_n \in \mathcal{W}$ から $[A^{3^k}]$ は素数となります． □

この命題 4 により，ミルズの定数の存在性をリーマン予想を使わずに確かめることができました．位相的なものをもっと調べようとすると $\mathcal{W}$ は区分的にカントール (の 3 進) 集合と同相になります [4, Theorem 1.2].

3 ミルズ素数の漸化不等式

以下，A をミルズの定数とし，$[A^{3^k}] = p_k$ とおきます．この p_k をミルズ素数と呼ぶこととしましょう[*1]．このセクションでは A の最小性と定理 2 を利用して次の命題を証明していきます．

[*1] よく考えたら，リーマン予想を仮定しているときじゃないとこの名前で呼ばないかもしれません．Unconditional Mills prime と呼んだ方がいいかもしれません．

命題 5 ([4, Lemma 5.1])**.** $\theta = 21/40$ とする．ある自然数 k_0 が存在して任意の自然数 $k \geq k_0$ に対して

$$p_k^3 \leq p_{k+1} \leq p_k^3 + p_k^{3\theta} \tag{3}$$

が成立する．

この命題の証明のために以下の補題を用意します．

補題 6 ([4, Lemma 4.5])**.** 任意の自然数 k に対して

$$p_k^3 \leq p_{k+1} < (p_k + 1)^3 - 1. \tag{4}$$

Proof. 任意の自然数 k をとります．ミルズ素数の定義から $p_k \leq A^{3^k} < p_k + 1$ が成立するため，$p_k^3 \leq A^{3^{k+1}} < (p_k + 1)^3$ となります．したがって，$p_{k+1} = [A^{3^{k+1}}]$ となることを用いると

$$p_k^3 \leq p_{k+1} \leq (p_k + 1)^3 - 1$$

が成立します．ここで，$(p_k + 1)^3 - 1$ は因数分解できて合成数となるため素数ではないです．したがって，$p_{k+1} = (p_k + 1)^3 - 1$ となることはないため補題 6 が成立します． □

命題 5 の *Proof.* 任意の自然数 k_0 に対して，ある自然数 $k \geq k_0$ が存在して，$p_{k+1} \notin [p_k^3, p_k^3 + p_k^{3\theta}]$ となるものと仮定します．このとき，ミルズの定数 A よりも真に小さい $\mathcal{W}$ の元を構成し，矛盾を導きます．

x_0 を定理 2 のものとし，$k_0 \geq x_0$ を満たす自然数 k_0 をとります．このとき，背理法の仮定からある自然数 $k \geq k_0$ が存在して，$p_{k+1} \notin [p_k^3, p_k^3 + p_k^{3\theta}]$ となります．ここで，補題 6 から $p_k^3 \leq p_{k+1}$ となるため，

$$p_k^3 + p_k^{3\theta} < p_{k+1} \tag{5}$$

が成立します．$p_k \geq p_{k_0} \geq k_0 \geq x_0$ となるため，定理 2 に $x = p_k^3$ を代入し，ある素数 q_{k+1} が存在して，

$$p_k^3 \leq q_{k+1} \leq p_k^3 + p_k^{3\theta} < (p_k + 1)^3 - 1 \tag{6}$$

が成立します．ここで，q_{k+1} に対して定理 3 と同様の議論を行うことで，ある素数列 $(q_m)_{m=k+1}^{\infty}$ が存在して，任意の $m \geq k + 1$ に対して，

$$q_m^3 \leq q_{m+1} < (q_m + 1)^3 - 1 \tag{7}$$

が成立します．さらに，$m = 1, 2, \ldots, k$ に対して $q_m = p_m$ とおくと， 補題 6 から (7) が $m = 1, 2, \ldots, k - 1$ に対して成立することがわかります．また，$m = k$ のときに対しても (6) により成立することがわかります．したがって，(7) は任意の自然数 m に対して成立します．よって，定理 3 と同様にして，$\lim_{m\to\infty} q_m^{1/3^m} = B$ とおくと，$[B^{3^m}] = q_m$ が任意の自然数 m に対して成立します．すなわち，$B \in \mathcal{W}$ です．しかし，$m = k + 1$ のとき，(5) と (6) から

$$[B^{3^{k+1}}] = q_{k+1} \leq p_k^3 + p_k^{3\theta} < p_{k+1} = [A^{3^{k+1}}]$$

となり，$B < A$ & $B \in \mathcal{W}$ となります．これは A の最小性と矛盾し命題 5 が成立することが確かめられました． $\square$

4 証明の完結

補題 7. ある定数 $\gamma > 0$ と $k_1 > 1$ が存在して，任意の $k \geq k_1$ に対して

$$|A^{3^k} - p_k| \leq e^{-3^k \gamma}.$$

Proof. ミルズ素数の定義から $p_{k+1} = [A^{3^{k+1}}]$ が任意の k に対して成立します．$k \geq k_0$ なる k をとります．命題 5 から

$$p_k^3 \leq p_{k+1} \leq A^{3^{k+1}} \leq p_k^3 + p_k^{3\theta} + 1 \leq p_k^3(1 + 2p_k^{3(\theta-1)})$$

成立します．したがって，全ての辺を 1/3 乗することで

$$p_k \leq A^{3^k} \leq p_k(1 + 2p_k^{3(\theta-1)})^{1/3}$$

となります．ここで，$f(x) = (1+x)^{1/3}$ とおき $a = 2p_k^{3(\theta-1)}$ とおいて，平均値の定理を用いると，ある $c \in (0, a)$ が存在して

$$(1+a)^{1/3} - 1 = f(a) - f(0) = af'(c) = \frac{a}{3}(1+c)^{-2/3} \leq \frac{a}{3}$$

を得ます．よって

$$(1 + 2p_k^{3(\theta-1)})^{1/3} \leq 1 + \frac{2}{3} \cdot p_k^{3(\theta-1)} \leq 1 + p_k^{3(\theta-1)}$$

が成立します．したがって，

$$p_k \leq A^{3^k} \leq p_k \left(1 + p_k^{3(\theta-1)}\right) = p_k + p_k^{3\theta-2}$$

となり，$|A^{3^k} - p_k| \leq p_k^{-(2-3\theta)}$ が成り立ちます．$\theta = 21/40$ であったので $2 - 3\theta = 2 - 63/40 > 0$ となることに注意します．よって，補題 6 を用いると目標であった

$$|A^{3^k} - p_k| \leq p_k^{-(2-3\theta)} \leq p_{k-1}^{-3(2-3\theta)} \leq \cdots \leq p_1^{-3^k(2-3\theta)/3} = e^{-\gamma 3^k}$$

が成立します．ただし，$\gamma = \frac{2-3\theta}{3} \log p_1 (> 0)$ とおきました． $\square$

補題 7 は A^{3^k} が素数 p_k にとても近いということを表しています．一方で，有理数のべき乗は整数とある程度離れているということが知られています．実際に 1957 年 Mahler は Ridout の定理というディオファントス近似の定理を用いて以下を示しました．ここで，任意の実数 x に対して，x と整数との最小距離を $\|x\|$ と書くこととします．すなわち，

$$\|x\| = \min\{|x - m| \colon m \in \mathbb{Z}\}$$

と定義します．

定理 8 (Mahler [2])**.** r/s を 1 より大きい整数でない有理数とし，ϵ を任意の正の実数とする．このとき，ある $n_0 = n_0(r/s, \epsilon) > 0$ が存在して，任意の $n \geq n_0$ に対して

$$\|(r/s)^n\| > e^{-\epsilon n}$$

が成立する．

定理 1 の *Proof.* まず A が自然数となると仮定します．このとき，$p_2 = [A^{3^2}] = [A^3]^3 = p_1^3$ となり p_2 が素数であることと矛盾します．よって，A は自然数ではないです．次に A が自然数でない有理数となると仮定します．$A > 1$ であったので $A = r/s$ (r と s は $r > s \geq 2$) とかけます．このとき，定理 8 において $\epsilon = \gamma$, $n = 3^k$ を代入すると，十分大きい k に対して

$$\|(r/s)^{3^k}\| > e^{-\gamma 3^k}$$

となります．一方で補題 7 から十分大きい k に対して

$$\|(r/s)^{3^k}\| \leq |(r/s)^{3^k} - p_k| = |A^{3^k} - p_k| \leq e^{-\gamma 3^k}$$

となり，矛盾が生じます．したがって，ミルズの定数は無理数であることが結論づけられました． □

5 更新情報

ver.1.30637: 2024/5/2 更新

- 定理 3 において $p_k \leq A \leq A' < p_k + 1$ としておりましたが，正しくは $p_k \leq A^{3^k} \leq A'^{3^k} < p_k + 1$ です．修正しました．

ver.1.3063: 2024/5/2 更新

- 定理 8 で ϵ について記述するのを忘れていました．修正しました．

ver.1.306: 2024/5/2 更新

- 命題 5 の証明で $(q_m)_{m=k}^{\infty}$ となっていましたが，正しくは $(q_m)_{m=k+1}^{\infty}$ でした．修正しました．
- 命題 4 の証明の最初で「$\mathcal{W}$ は空でないので $\inf \mathcal{W}$ が存在します」と書いていたところを「$\mathcal{W}$ は空でなく下に有界なので $\inf \mathcal{W}$ が存在します」に変更しました．
- 定理 1 の証明で「A が整数でない有理数となると仮定します」と書いていましたが，「A が自然数でない有理数となると仮定します」に変更しました．
- 補題 6 において，「$p_3 \leq A^{3^{k+1}} < (p_k + 1)^3$. となります.」に不要なピリオドがあったので削除しました．その他にも不要なピリオドがあったので削除しました．

ver.1.30: 2024/5/2 更新

- (1) の後の式が $p_1^3 + p_1^{3\theta} < (p_2 + 1)^3 - 1$ となっていましたが正しくは $p_1^3 + p_1^{3\theta} < (p_1 + 1)^3 - 1$ です．修正しました．その他，日本語の表現について軽微な修正を加えました．

ver.1.3: 2024/5/2 更新

- (2) の直後が $(p_{k+1}+1)^{1/3^{k+1}} < (p_{k+1}+1)^{1/3^k}$ となっていましたが正しくは $(p_{k+1}+1)^{1/3^{k+1}} < (p_k+1)^{1/3^k}$ です．修正しました．
- その他，日本語の表現について軽微な修正を加えました．

参考文献

[1] R. C. Baker, G. Harman, and J. Pintz. The difference between consecutive primes. II. *Proc. London Math. Soc. (3)*, 83(3):532–562, 2001.

[2] K. Mahler. On the fractional parts of the powers of a rational number. II. *Mathematika*, 4:122–124, 1957.

[3] W. H. Mills. A prime-representing function. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 53:604, 1947.

[4] K. Saito and W. Takeda. Topological properties and algebraic independence of sets of prime-representing constants. *Mathematika*, 68(2):429–453, 2022.