Serre duality

@unaoya

2018 年 2 月 22 日

参考文献は Hartshorne

1 Sheaf

2 Cohomology

ここではコホモロジーの定義と、いくつかの性質を示す。

$F : C \to D$ が適当な条件を満たす（左完全とか）アーベル圏の間の関手とする。これに対して以下の条件を満たす関手 $R^iF : C \to D$ を定める。

$M \to I^\bullet$ が injective resolution であれば $R^iFM = H^i(F(I^\bullet))$ となる。

acyclic resolution による計算。A が acyclic とは $R^iFA = 0$ となること。$M \to A^\bullet$ を acyclic resolution とすると、$R^iFM = H^i(F(A^\bullet))$ となる。

3 Sheaf cohomology

補題 1. 環付き空間 (X, O_X) 上の O_X-mod F が flasque なら Γ-acyclic である。

証明. まず O_X-mod I が injective なら flasque であることを示す。$I(U) = Hom(O_X|_U, I|_U) = Hom(j_!(O_X|_U), I)$ が $V \subset U$ について関手的に成り立ち、$(j_V)_!(O_X|_V) \to (j_U)_!(O_X|_U)$ が単射であり I が injective だからこれは全射。

F を injective I に埋め込み、その cokernel を G とする。F, I が flasque であることから G も flasque である。

$0 \to F \to I \to G \to 0$ の長完全列を考える。F が flasque なので $0 \to H^0(X, F) \to H^0(X, I) \to H^0(X, G) \to 0$ が完全であり、$H^1(X, F) = 0$ となる。I についてのコホモロジーが消えることに注意すると次数に関する帰納法から $H^i(X, F) = 0$ が言える。 □

4 Affine scheme の cohomology

この節では affine scheme の cohomology が消えることを証明する。Noether でない場合は？

定理 1. A を Noether 環、M を A-module とする。$X = \mathrm{Spec}A$ と O_X-mod $\mathcal{F} = \tilde{M}$ について、$i > 0$ に対し $H^i(X, \mathcal{F}) = 0$

$0 \to M \to I^\bullet$ を injective resolution とする。これに対し $0 \to \tilde{M} \to \tilde{I}^\bullet$ が flasque resolution になることを示す。

補題 2. I が injective A-mod であるとき $\tilde{I}$ は flasque O_X-mod

証明. まず

補題 3. A が noether で I が injective ならば $I \to I_f$ が全射である。

を示す。

証明. $x \in I_f$ は $y \in I, n > 0$ を用いて $x = \dfrac{y}{f^n}$ とかける。$y = f^n z$ とできればよい。

$(f^n) \subset A$ について $(f^n) \to I$ を $af^n \mapsto ay$ と定めると、I が injective なので $A \to I$ が定まり、1 の像が x になる。

この写像が定義できるかはわからないが、A が Noether より f^r の annihilator b_r を考えると □

$Y = \overline{Supp(\tilde{I})}$ とする。Y についての Noetherian induction により証明する。

まず Y が closed point 1 点からなる場合、$\tilde{I}$ は skyscraper sheaf なので flasque である。

open $U \subset X$ に対して $\Gamma(X, \tilde{I}) \to \Gamma(U, \tilde{I})$ が全射であることを証明する。$D(f) \subset U$ となるような f をとる。このとき、上の補題から $\Gamma(X, \tilde{I}) = I \to \Gamma(U, \tilde{I}) \to \Gamma(D(f), \tilde{I}) = I_f$ は全射。

$Z = X - D(f)$ とし、$\Gamma_Z(X, \tilde{I}) \to \Gamma_Z(U, \tilde{I})$ を考える。$J = \Gamma_a(I)$ にたいし $\Gamma_Z(U, \tilde{I}) = \Gamma(U, \tilde{J})$ である。実際、$\Gamma_a(I) = \Gamma(X, \mathcal{H}^0_Z(\mathcal{F}))$ であり、$0 \to \mathcal{H}^0_Z(\mathcal{F}) \to \mathcal{F} \to j_*(\mathcal{F}|_U)$ が完全だから $\mathcal{H}^0_Z(\mathcal{F})$ は q-coh なのでよい。

ここで J が injective であれば、Z について帰納法の仮定からこの射が全射である。J が injective であることは次のように示せる。イデアル $b \to A$ からの射 $\phi : b \to J$ が $A \to J$ に伸びればよい。A が Noether なのである $n > 0$ があって $a^n \phi(b) = 0$ である。よって Krull の定理からある n' があって $a^{n'} \cap b \subset a^n b$ となる。

I が injective だから $b/(b \cap a^n) \to J \to I$ は $A/a^{n'} \to I$ に伸び、J の定義から $A/a^{n'} \to J$ を定める。

このことから前の全射が言える。 □

flasque なら Γ-acyclic なので、cohomology が計算できる。

5 Projective space の cohomology

S を graded ring とし M を graded S-mod とする。$M(i)$ を M の次数シフト、つまり $M(i)_d = M_{i+d}$ で定まる graded S-mod とする。

$\mathbb{P}X$ 上の O_X-mod $\tilde{M}$ を $\tilde{M}|_{D_+(f)} = (\tilde{M_{(f)}})$ で定まる層とする。とくに $\tilde{S(n)} = O_X(n)$ とかく。

P^n の $O(d)$ の cohomology $H^i(P^n, O(d))$ を計算する。次元 n と次数 d, i について帰納的に。完全列 $0 \to F(-1) \to F \to F|_H \to 0$ を使う。

Cech cohomology で計算する。

$X = P^1$ について直接計算してみる。$X = U_0 \cup U_1, U_0 = D_+(x_0), U_1 = D_+(x_1)$ と affine open で被覆する。これに対して Cech 複体は $0 \to \Gamma(U_0, \mathcal{F}) \times \Gamma(U_1, \mathcal{F}) \to \Gamma(U_0 \cap U_1, \mathcal{F}) \to 0$ である。これの cohomology を計算する。

6 Serre duality

adeleでの記述、相互法則、留数定理

7 Riemann-Roch