

変形理論

@unaoya

2018 年 3 月 23 日

1 加群の拡大

A を可換環とする。

定義 1. A 加群 M とは、アーベル群 M への A の作用が定まっているもの。ここで A の作用とは、各 $a \in A$ について a 倍写像という群準同型 $a : M \rightarrow M$ が定まっていて、

1. $(a + b)m = am + bm$
2. $(ab)m = a(bm)$
3. $1m = m$

を満たすもの。

これは環の準同型 $A \rightarrow \text{End}(M)$ を与えるという事である。ここで $\text{End}(M)$ とは M のアーベル群の自己準同型 $M \rightarrow M$ 全体の集合に、和を $(f + g)(m) = f(m) + g(m)$ で、積を射の合成 $(fg)(m) = f(g(m))$ で与えた環である。

例えば $A = k$ が体であれば k 加群は k ベクトル空間のことであり、 A の作用とはスカラー倍の事である。

1.1 $k[T]$ 加群

k を体とし、 V を k ベクトル空間とする。この V に一変数多項式環 $k[T]$ 加群の構造を定めよう。ただし、ここでは $k[T]$ の作用は、

1. $a \in k[T]$ 倍写像が k 線形写像
2. $k \subset k[T]$ の作用はもとのスカラー倍

をみたすもののみを考えることにする。

これは各々の多項式 $f(T)$ に対して k 線形写像 $f(T) : V \rightarrow V$ を適切に定めるということ。(群 G の k 線形表現は、各 $g \in G$ に対して $g : V \rightarrow V$ という k 線形写像が適切に定まっているもので、これと似たことを考えている。)

補題 1. $k[T]$ の V への作用は T の作用 $T : V \rightarrow V$ のみから決定される。

つまり他の多項式の作用は、加群の定義から T の作用により自動的に決まるということ。例えば

$$(T^2 + 3T)v = T^2v + 3Tv = T(Tv) + 3(Tv)$$

などである。結局、 $k[T]$ 加群の構造は T の作用である k 線形写像 $T: V \rightarrow V$ を定めることに他ならない。

V を k 上の有限次元ベクトル空間とする。このとき V の基底をとって考えると、 T の作用 $T: V \rightarrow V$ は k 線形写像なのである行列 A で表示できる。したがって V に $k[T]$ 加群の構造を定めることは、 T に対応する行列 A を定めることと等価である。

1.2 $k[T]$ 加群の拡大

定義 2. A 加群 M, N に対し N の M による A 加群の拡大とは、 A 加群 E と以下のような A 加群の短完全列

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} N \longrightarrow 0$$

のことをいう。

V_1, V_2 を 1 次元 k ベクトル空間とし、そこに $k[T]$ 加群の構造を定める。それぞれ T 作用を a_1, a_2 倍で定めることにしよう。1 次元なので、これは実は基底の取り方によらずに決まっている。

問題 1. V_1 の V_2 による $k[T]$ 加群の拡大

$$0 \longrightarrow V_2 \xrightarrow{i} V \xrightarrow{p} V_1 \longrightarrow 0$$

が全部でどれだけあるか調べよう。

このとき、これは k 加群の完全列でもあるから、 V は k 上 2 次元の線形空間であり k 加群としては $V = V_1 \oplus V_2$ と表せる。この直和分解から定まる V の基底 e_1, e_2 を固定しよう。つまり、 $i: V_2 \rightarrow V$ の像は $ke_2 \subset V$ であり、 $p: ke_1 \rightarrow V_1$ は同型になるものとする。

$k[T]$ 加群 V の T 倍作用がこの基底 e_2, e_1 について行列 A で表示されるとしよう。 $V_2 \subset V$ は $k[T]$ 部分加群である、つまり $i: V_2 \rightarrow V$ が $k[T]$ 加群の準同型であるから、 $i(Te_2) = Ti(e_2) = Te_2 = a_2e_2$ となる。よって i は単射なので、 $Te_2 = a_2e_2$ となり、

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a_2 \end{pmatrix}$$

と上三角行列になることがわかる。

さらに $Te_1 = ae_1 + be_2$ とすると、 $p: V \rightarrow V_1$ が $k[T]$ 準同型であるから $p(ae_1 + be_2) = p(Te_1) = Tp(e_1) = Te_1 = a_1e_1$ より、 $a = a_1$ となることが条件。よって

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b \\ 0 & a_2 \end{pmatrix}$$

としておけば、上の完全列が $k[T]$ 加群としての完全列である。

逆にこのような行列を用いて V に $k[T]$ 加群の構造を定めることができ、これが拡大を与えることもわかる。

つまり、 V における T 倍に対応する行列は上三角行列であり、対角成分が V_1, V_2 から決定されることがわかる。

1.3 拡大の同型類

定義 3. 二つの拡大の間の同型とは、 $k[T]$ 加群の同型 $\phi: V \rightarrow V'$ で V_1, V_2 には恒等写像を誘導するもの。つまり、次の図式が可換になるもの。

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & V_2 & \xrightarrow{i} & V & \xrightarrow{p} & V_1 & \longrightarrow & 0 \\ & & \parallel & & \phi \downarrow & & \parallel & & \\ 0 & \longrightarrow & V_2 & \xrightarrow{i'} & V' & \xrightarrow{p'} & V_1 & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

ここでは V' は k 加群としては V と一致していて、 $k[T]$ 作用が異なるかもしれないと考える。

問題 2. V_1 の V_2 による拡大 V, V' に対して、上三角行列 A, A' が対応することをみた。この二つが拡大の同型となるための A, A' についての条件を求めよう。

拡大の同型 $\phi: V \rightarrow V'$ は k 加群の同型でもあり、これを V, V' の k 上の基底 e_1, e_2 に対して行列 P で表す。上の条件は

1. $\phi(e_1) = e_1$
2. $\phi(e_2) = e_2 \pmod{V_2}$

という事なので、

$$P = \begin{pmatrix} 1 & q \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となる。これが $k[T]$ 加群の同型なので $\phi(Tv) = T\phi(v)$ であり、これを V, V' での T 作用をそれぞれ

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b \\ 0 & a_2 \end{pmatrix}, \quad A' = \begin{pmatrix} a_1 & b' \\ 0 & a_2 \end{pmatrix}$$

と表すとすると、 $k[T]$ 加群の射であるという条件は $PA = A'P$ となる。

したがって $P^{-1}AP = A'$ であり、

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & -q \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & b \\ 0 & a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & q \\ 0 & 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a_1 & a_1q + b - a_2q \\ 0 & a_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_1 & b' \\ 0 & a_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる。

これを a_1, a_2 が等しいか否かで場合分けして考える。

1. $a_1 = a_2$ であれば $a_1q + b - a_2q = b$ なので、 q をどのようにとっても $b' = b$ となる。つまり $b \neq b'$ であれば拡大は同型とならない。
2. $a_1 \neq a_2$ のとき、 $q = \frac{-b}{a_1 - a_2}$ とすれば $b' = 0$ となる。つまりこの場合には全ての拡大が同型ということになる。

V の $k[T]$ 加群としての半単純化は $V_1 \oplus (V/V_1) = V_1 \oplus V_2$ である。つまり、上の拡大で与えられる V は全て半単純化すると $V_1 \oplus V_2$ と一致する。

一方、拡大の同型類は

1. $a_1 = a_2$ のとき、 k と同じだけあり半単純化すると区別できない
2. $a_1 \neq a_2$ のとき、全ての拡大は同型であり半単純化しても変わらない

となる。

2 Ext¹ 加群

さて、上で見た拡大の分類をホモロジー代数を用いて求める方法を紹介しよう。

定理 1. A を可換環とし、 M, N を A 加群とする。 N の M による A 加群の拡大の同型類のなす集合 $\text{Ext}_A^1(N, M)$ は次の方法で求めることができる。

1. N の projective resolution

$$\cdots \rightarrow P_2 \rightarrow P_1 \rightarrow P_0 \rightarrow N \rightarrow 0$$

をとる。

2. 上の $\text{Hom}_A(-, M)$ をとり、複体

$$0 \rightarrow \text{Hom}_A(N, M) \rightarrow \text{Hom}_A(P_0, M) \rightarrow \text{Hom}_A(P_1, M) \rightarrow \text{Hom}_A(P_2, M) \rightarrow \cdots$$

を作る。

3. 上の複体のコホモロジーをとる、その

$$H^1(\text{Hom}_A(P_\bullet, M)) = \ker(\text{Hom}_A(P_1, M) \rightarrow \text{Hom}_A(P_2, M)) / \text{im}(\text{Hom}_A(P_0, M) \rightarrow \text{Hom}_A(P_1, M))$$

が $\text{Ext}_A^1(N, M)$ となる。

ここではこの定理の証明をする代わりに前節の例でこの計算を試みる。つまり、 $A = k[T], M = V_2, N = V_1$ として $\text{Ext}_{k[T]}^1(V_1, V_2)$ を計算してみよう。

2.1 projective resolution

定義 4. N の projective resolution とは、完全列 $\cdots \rightarrow P_2 \rightarrow P_1 \rightarrow P_0 \rightarrow N \rightarrow 0$ であって、各 P_i が projective A -module であるものである。

projective module の定義は説明しないが、自由加群 A^n は projective A -module である。

問題 3. $k[T]$ 加群 V_1 の projective resolution を作れ。

まず $f: P_0 = k[T] \rightarrow V_1$ を $1 \mapsto e_1$ とし $k[T]$ 準同型となるよう定める。つまり $f(T) = a_1 e_1$ である。このとき $\ker f = (T - a_1)$ となる。

次に $g: P_1 = k[T] \rightarrow P_0 = k[T]$ を $1 \mapsto T - a_1$ とし $k[T]$ 準同型となるよう定める。するとこれは単射であり、像は $(T - a_1) \subset k[T]$ と一致する。よって

$$0 \longrightarrow P_1 \xrightarrow{g} P_0 \xrightarrow{f} V_1 \longrightarrow 0$$

が $k[T]$ 加群の完全列となる。

$P_0 = P_1 = k[T]$ はともに rank 1 の自由 $k[T]$ 加群なので、これらは projective module である。つまり、これが V_1 の projective resolution を与える。

2.2 $\text{Hom}_A(-, M)$

A 加群 M が与えられたとき、 $\text{Hom}_A(-, M)$ は A 加群の圏から A 加群の圏への関手を与える。この関手は A 加群 N に対して A 加群 $\text{Hom}_A(N, M)$ を対応させ、 A 加群の射 $f : N \rightarrow N'$ に対して $f^* : \text{Hom}_A(N', M) \rightarrow \text{Hom}_A(N, M); \phi \mapsto \phi \circ f$ を対応させるもの。

上で得られた projective resolution に関手 $\text{Hom}_{k[T]}(-, V_2)$ を作用させると

$$0 \longrightarrow \text{Hom}_{k[T]}(V_1, V_2) \xrightarrow{f^*} \text{Hom}_{k[T]}(P_0, V_2) \xrightarrow{g^*} \text{Hom}_{k[T]}(P_1, V_2) \longrightarrow 0$$

という列が得られるが、これは $k[T]$ 加群の複体になる。

問題 4. $g^* : \text{Hom}_{k[T]}(P_0, V_2) \rightarrow \text{Hom}_{k[T]}(P_1, V_2)$ がどのような写像になるか具体的に計算してみよう。

$\phi : P_0 \rightarrow V_2 \in \text{Hom}_{k[T]}(P_0, V_2)$ が与えられたとき、 $g^*(\phi) = \phi \circ g \in \text{Hom}_{k[T]}(P_1, V_2)$ は、

$$\phi \circ g(1) = \phi(T - a_1) = (T - a_1)\phi(1) = T\phi(1) - a_1\phi(1) = (a_2 - a_1)\phi(1)$$

となる。

ところで $\text{Hom}_{k[T]}(k[T], V)$ の元は 1 の行き先を決めれば決まってしまうので、 $\text{Hom}_{k[T]}(k[T], V)$ は $ev_1 : \phi \mapsto \phi(1)$ として V と同型になる。この逆射を $v \mapsto \phi_v$ と表す。つまり $\phi_v \in \text{Hom}_{k[T]}(k[T], V)$ は $\phi_v(a) = av$ となるもの。

これを使って上の写像 $g^* : \text{Hom}_{k[T]}(P_0, V_2) \rightarrow \text{Hom}_{k[T]}(P_1, V_2)$ を書き換える。つまり次の図式

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{k[T]}(P_1, V_2) & \xrightarrow{g^*} & \text{Hom}_{k[T]}(P_1, V_2) \\ ev_1 \downarrow & & ev_1 \downarrow \\ V_2 & \xrightarrow{g^*} & V_2 \end{array}$$

を可換にする $g^* : V_2 \rightarrow V_2$ は $v \in V_2$ に対して

$$g^*(v) = ev_1(g^*(\phi_v)) = (\phi_v \circ g)(1) = \phi_v(g(1)) = \phi_v(T - a_1) = (T - a_1)v = (a_2 - a_1)v$$

となる。

V_2 は k 上 1 次元であり、上の写像は k 加群の準同型でもあるので、 $a_2 \neq a_1$ の場合上の写像は全射かつ単射であり、 $a_2 = a_1$ の場合には 0 射になる。

2.3 Ext_A^1

上で得られた複体

$$0 \longrightarrow V_2 \xrightarrow{g^*} V_2 \longrightarrow 0$$

の cohomology を計算しよう。

1. $a_1 \neq a_2$ の場合、射 g^* は 0 射なので $H^1 = \text{Ext}^1(V_1, V_2) = k$ となる。
2. $a_1 = a_2$ の場合、射 g^* は同型なので $H^1 = \text{Ext}^1(V_1, V_2) = 0$ となる。

これは前節の最後に計算した拡大の同型類の分類結果とうまく対応している。

3 終わりに

1. Ext^1 は projective resolution の取り方によらないか？
2. Ext^1 の各元が拡大にどのように対応しているか？
3. Ext^1 の群構造は何か？

などの疑問が残るが、それについてはまた改めて。

実はこの方法はより一般的に、アーベル圏の間の右完全関手の左導来関手を計算する方法を与えている。これの双対として左完全関手の右導来関手を計算でき、例えば群のコホモロジーを計算できる。

導来関手の定義はしないが、ここでは上の構成で定義しよう。injective または projective resolution の取り方に依存しないことは認める。

$\text{Ext}^1(B, A)$ は $0 \rightarrow A \rightarrow E \rightarrow B \rightarrow 0$ の同型類のなす群と自然に同型になる。拡大から $\text{Ext}^1(B, A)$ の元を作るには、 $\text{Hom}(-, A)$ または $\text{Hom}(B, -)$ の長完全列から、 $\text{Hom}(A, A) \rightarrow \text{Ext}^1(B, A)$ により id_A の像を対応させる、または $\text{Hom}(B, B) \rightarrow \text{Ext}^1(B, A)$ により id_B の像を対応させることで得られる。

逆に $\text{Ext}^1(B, A)$ の元から拡大を作るには、 B または A の resolution をとって $\rightarrow P_1 \rightarrow P_0 \rightarrow B$ から $\text{Hom}(P_0, A) \rightarrow \text{Hom}(P_1, A)$ が定まり、 $\text{Ext}^1(B, A)$ の元はこれの $\ker d$ で表すことができるから、 $P_1 \rightarrow A$ で $P_0 \rightarrow A$ が 0 になるものを考える。これを用いて拡大 $A \rightarrow E \rightarrow B$ を $P_1 \rightarrow P_0$ と $P_1 \rightarrow A$ の push $P_0 \oplus_{P_1} A$ で定義する。 $P \rightarrow B$ と $A \rightarrow P$ を

G 加群を考える。 M を $\Lambda[G]$ 加群として Λ に G を自明に作用させる。 $\text{Hom}_G(\Lambda, M) = M^G$ であるので $\text{Ext}(\Lambda, M) = H(G, M)$ となる。特に $M = \Lambda$ の場合を考えると、

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac & ad + b \end{pmatrix}$$

で、これが ext を与えるが、コサイクル条件と同じ式が出てくる。このようにして群のコホモロジーと、加群の拡大と変形が対応するはず。

4 Galois 表現の変形と Selmer 群

目標。Picard scheme と Abel var の moduli の構成。ベクトル束のモジュライ。FGA, FGA explained, Mumford, GIT など。

5 加群や代数の拡大

参考文献。EGA0_{IV}, cotangent complex.

5.1 Ext について

定義 5. A を可換環、 M, N を A 加群とする。 M の N による拡大とは次の A 加群の完全列 $0 \rightarrow N \rightarrow E \rightarrow M \rightarrow 0$ のことである。拡大の同値関係を完全列の間の射で、左右が恒等写像であるようなもので定める。(snake lemma から真ん中は同型) 拡大全体の集合を $\text{Ext}(M, N)$ とかくことにする。

命題 1. この集合は (何らかの意味で自然な) A 加群としての構造をもち、 M, N について関手的であって、 $Ext_A^1(M, N)$ と A 加群の圏から A 加群の圏への関手として同型になる。

まず N について A 加群の圏から集合の件への共変関手となることをみる。この関手によって、 N の A 加群の構造から $Ext(M, N)$ に A 加群の構造を定めることができる。(群構造を射の組とその図式であらわす。群スキームとか) 関手 $N \rightarrow Ext(M, N)$ を $T(N)$ とかくことにする。 $\phi : N \rightarrow N'$ にたいして、 $T(\phi)$ を $E \rightarrow E \oplus_N N'$ として定める。同値関係をたもち、関手となる (射の結合性とか)。

$T(p_1) \times T(p_2) : T(L_1 \times L_2) \rightarrow T(L_1) \times T(L_2)$ は全単射。逆向きは E_1, E_2 にたいして $E_1 \times_M E_2$ とすればよい。

$+: L \times L \rightarrow L, i: L \rightarrow L, e: 0 \rightarrow L$ を T で写したものと加群の構造をきめる。加法を具体的に書き下すと E_1, E_2 にたいして $E_1 + E_2 = (E_1 \times_M E_2) \oplus_{L \times L} L$ となる。単位元は $T(e)(0) = T(e)(0 \rightarrow 0 \rightarrow M \rightarrow M \rightarrow 0) = 0 \rightarrow N \rightarrow N \oplus M \rightarrow M \rightarrow 0$

$Ext_A^1(M, N)$ との比較。射の作り方。(実質的に同じではあるが二通りかく)

一つ目。 M の proj resol $\rightarrow X_2 \rightarrow X_1 \rightarrow X_0 \rightarrow M \rightarrow 0$ をひとつ固定して考える。(これによらないことは後でしめす) あたえられた拡大 E にたいし、 $E \rightarrow M$ が全射なので X_0 から E に射がのびる。さらに続けて X_1 から N に射がのびるのでこれを f_E とかく。(proj resol から完全列にはいつでも射がのびるはず) このとき f_E はコサイクルになる。つまり p_2 と合成して 0 になる。 F_E には不定性があるが、コホモロジー類にいくと一意的に決まり、 $Ext(M, N) \rightarrow Ext_A^1(M, N)$ という写像が定まる。

二つ目。あたえられた拡大 $0 \rightarrow N \rightarrow E \rightarrow M \rightarrow 0$ の $Hom_A(M, -)$ をとって長完全列を書くと、境界準同型 $Hom_A(M, M) \rightarrow Ext_A^1(M, N)$ が定まり、その id_M の像を対応する Ext^1 の元と思う。(この二つはちゃんと一致しているのか?)

逆向きの射は Ext^1 の元を $Hom(X_1, N)$ にもちあげたものを f とかく。するとこれはコサイクルなので $im(p_1)$ を factor する。これをつかって $X_0 \oplus_{im(p_1)} N$ で f の行き先となる拡大を定義する。コバウンダリが自明な拡大に移るか? $(x, y) \rightarrow (p_0(x), y + g(x))$ とすれば $M \oplus N$ への同型がつくれる。

この二つの射が関手としての射になっている。つまり $\phi : N \rightarrow N'$ があったとき、 $\phi_*(f_E) = f_{E \oplus_N N'}$ となることをいえばよい。ここで ϕ_* は ϕ により誘導される $Hom(M, N) \rightarrow Hom(M, N')$ からきまる Ext^1 の間の射。(Ext^1 や Hom の群構造も関手的にきまっているとみなせるので、上の事実から準同型になることがいえる) 一般の n でこのような Ext^n の解釈があるか?

5.2 Exal のこと

E が A 環、 B の増大 (augmente)、つまり $f : E \rightarrow B$ augmentation (全射 A 環準同型付き) とする。 $I = \ker f$ とする。もし I が $I^2 = 0$ をみたすならば、 I は E の部分としての自然な E 加群の構造があるのに加え、 B 加群の構造をもつ。実際、 $b \in B$ にたいし、 $f(x) = b$ なる $x \in E$ がとれて、 b の I への作用を x による作用で定めれば、 $I^2 = 0$ (E の中での積) であるから well-defined。

逆に I が $xz = f(x)z, x \in E, z \in I$ なる B 加群の構造をもつならば、 $I^2 = 0$ となる (左辺は自然な積による E 加群構造)。実際、 $z, z' \in I$ とすれば、 $zz' = f(z)z' = 0z' = 0$ となる。

定義 6. A 環 B の B 加群 L による A 拡大とは、 A 加群の完全列 $0 \rightarrow L \xrightarrow{j} E \xrightarrow{f} B \rightarrow 0$ であって、 E は A 環、 f は A 環準同型、 $x \in E, z \in L$ にたいし $j(f(x)z) = xj(z)$ をみたすもの。いいかえると、 L に f をつけて $E\text{-mod}$ の構造をあたえたとき、 j が $E\text{-mod hom}$ になるということ。このとき、 $j(L)$ は二乗すると

0 になる E のイデアルとなる。拡大の集合を $Exal_A(B, L)$ とかく。押し出しによって L について共変関手となる。

$D_B(L)$ で自明な拡大をあらわす。つまり、加群としては $B \times L$ であって積を $(x, s)(y, t) = (xy, sy + xt)$ で定めたもの。(自然な射影が環準同型になるという条件を課せば、この積に一意に決まる。) 引き戻しと押し出しとそれらの関手性について。

$0 \rightarrow L' \rightarrow E' \rightarrow B' \rightarrow 0$ という A 代数の拡大の $B \rightarrow B'$ という A 代数の射によるひきもどし。まず A 加群としての引き戻し $E = E' \times_{B'} B$ を考える。自然な射 $E \rightarrow E'$ と $E \rightarrow B$ が A 環準同型になるためには、 E の A 環の構造を成分ごとにいれるしかない。このとき、 $E \rightarrow B$ は全射で、核は $E' \rightarrow B'$ の核と一致する。したがって $0 \rightarrow L' \rightarrow E \rightarrow B \rightarrow 0$ が A 環の拡大になるので、これをひきもどしとする。(拡大の圏の中で引き戻したりうのか?)

$w : L \rightarrow L'$ という B 加群の射による $0 \rightarrow L \xrightarrow{j} E \xrightarrow{f} B \rightarrow 0$ のおしだし。 $G = D_E(L') = E \times L'$ とし、 $\theta : L \rightarrow G; z \mapsto (j(z), -w(z))$ とする。このとき θ は G 加群の射になる。いいかえると像は G のイデアルになる。ここで L の G 加群としての構造とは、 $G \rightarrow E$ という自然な射によるもの。実際、 $(x, y) \in G, z \in L$ にたいし、 $(x, y)(j(z), -w(z)) = (xj(z), -xw(z) + yj(z))$ というのが G の積で、 $j(z)y = f(j(z))y = 0$ (拡大の定義) だから、上の式は $(xj(z), -xw(z)) = (j(f(x)z), -w(f(x)z))$ となりしめせた。したがって、 $G/\theta(L)$ は加群としての押し出しだが、 A 環の構造ももつ。

命題 2. $B \rightarrow C$ が全射間準同型で I がその核、 L が C 加群とする。 $F = B/I^2$ とし、 $0 \rightarrow I/I^2 \rightarrow F \rightarrow C \rightarrow 0$ は C の I/I^2 による拡大。 $Hom_C(I/I^2, L)$ と $Exal_B(C, L)$ という L について関手的な同型が存在する。

証明. 対応のさせ方。 $w : I/I^2 \rightarrow L$ にたいして、 $F \oplus_{I/I^2} L$ という C の L による拡大を考える。逆に拡大 $0 \rightarrow L \rightarrow E \rightarrow C \rightarrow 0$ があつたとき、 $I \rightarrow B \rightarrow C$ は 0-map なので $B \rightarrow E$ をによって L を factor し、 E の中で $L^2 = 0$ なので I/I^2 を factor する。これによって $I/I^2 \rightarrow L$ を定める。

ちゃんと逆対応になっているか。拡大 $0 \rightarrow L \rightarrow E \rightarrow C \rightarrow 0$ があたえられたとき、

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & I/I^2 & \longrightarrow & B/I^2 & \longrightarrow & C \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\ 0 & \longrightarrow & L & \longrightarrow & E' = L \oplus_{I/I^2} B/I^2 & \longrightarrow & C \longrightarrow 0 \\ & & \parallel & & & & \parallel \\ 0 & \longrightarrow & L & \longrightarrow & E & \longrightarrow & C \longrightarrow 0 \end{array}$$

という可換図式がかけ、押し出しの普遍性から真ん中の下に射が伸び、下二列が同値な拡大になる。

逆に $w : I/I^2$ があたえられたとき、 $B \rightarrow F \oplus_{I/I^2} L$ から導かれる $I \rightarrow L$ は、 $x \in I$ にたいし、 $x \mapsto (x, 0) = (x, 0) + (-x, -w(-x)) = (0, w(x))$ なので $\text{mod } I^2$ して w と一致する。

□

extension B, C とその間の射があるとする。つまり次の可換図式があるとする。

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & I & \longrightarrow & B & \longrightarrow & B_0 \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow u & & \downarrow & & \downarrow f_0 \\ 0 & \longrightarrow & J & \longrightarrow & C & \longrightarrow & C_0 \longrightarrow 0 \end{array}$$

これにたいし、 C を f_0 でひきもどすと、

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & I & \longrightarrow & B & \longrightarrow & B_0 \longrightarrow 0 \\
& & \downarrow u & & \downarrow & & \parallel \\
0 & \longrightarrow & J & \longrightarrow & C \times_{C_0} B_0 & \longrightarrow & B_0 \longrightarrow 0 \\
& & \parallel & & \downarrow & & \downarrow f_0 \\
0 & \longrightarrow & J & \longrightarrow & C & \longrightarrow & C_0 \longrightarrow 0
\end{array}$$

という可換図式ができる。ここで真ん中の縦の射は最初のもとの縦の射と一致する。

言い換えると、 f_0 による引き戻しによって定まる $Exal(C_0, J) \rightarrow Exal(B_0, J)$ という射があって、 C をひきもどしてから $Exal(B_0, J) \cong Hom(I, J)$ にうつると u になる。

5.3 Ext と Exal の比較

$B \rightarrow C$ が全射環準同型で核が I 、 L が C 加群という状況で $Ext_B(C, L)$ と $Exal_B(C, L)$ を比較する。ここで L の B 加群の構造は $B \rightarrow C$ であたえられたものを考える。

安直に考えて、代数の拡大を代数の構造を忘れて加群の拡大と思う射 $Exal_B(C, L) \rightarrow Ext_B(C, L)$ が存在する。

もう一つの作り方。 $0 \rightarrow I/I^2 \rightarrow B/I^2 \rightarrow C \rightarrow 0$ という $B\text{-mod}$ の完全列の $Hom_B(-, L)$ をとると、 $Hom_B(B/I^2, L) \rightarrow Hom_B(I/I^2, L) \rightarrow Ext_B^1(C, L)$ という完全列ができる。ここで最初の射は 0 射になっている。なぜかという、 $f: B/I^2 \rightarrow L$ をとったとき、 $x \in I$ とすると $f(x) = xf(1) = 0f(x) = 0$ なので。(L の B 加群の構造は $B \rightarrow C$ であたえられたもの。) したがって $Hom_B(I/I^2, L) \rightarrow Ext_B^1(C, L)$ は単射になる。 $Hom_B(I/I^2, L) = Hom_C(I/I^2, L)$ なので、($b \in B \mapsto c \in C$ なるものをかけてにとると、 $x \in I/I^2$ なら $bx = cx$ であり、 $y \in L$ なら $by = cy$ というのが B および C 加群の構造のいれかたで、 f が $B\text{-hom}$ とは $f(bx) = bf(x)$ 、 $C\text{-hom}$ とは $f(cx) = cf(x)$ となることだから、この二つは同値。) 上でしめしたことから $Exal_B(C, L) \rightarrow Ext_B(C, L)$ という単射ができた。

この二つがちゃんと一致するか？

5.4 ケーラー微分と拡大の関係について

定義 7. B を $A\text{-alg}$ とする。ケーラー微分を $\Omega_{B/A}^1 = I/I^2$ で定義する。ここで I は積から決まる写像 $B \otimes_A B \rightarrow B$ (これは全射) の核。 $P_{B/A}^n = B \otimes_A B/I^{n+1}$ と定義する。 $0 \rightarrow \Omega_{B/A}^1 \rightarrow P_{A/B}^1 \rightarrow B \rightarrow 0$ は完全。 $j_2: B \rightarrow P_{B/A}^1$ を $x \rightarrow x + dx$ で定める。

命題 3. $Exal_A(C, I)$ と $Ext_C^1(\Omega_{C/A}^1, I)$ には (関手的な) 同型がある。

$X = (0 \rightarrow I \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0) \in Exal_A(C, I)$ にたいし、 $\text{diff}(X) = (0 \rightarrow I \rightarrow \Omega_{B/A}^1 \otimes_B C \rightarrow \Omega_{C/A}^1 \rightarrow 0) \in Ext_C^1(\Omega_{C/A}^1, I)$ 。

$Y = (0 \rightarrow I \rightarrow J \rightarrow \Omega_{C/A}^1 \rightarrow 0) \in Ext_C^1(\Omega_{C/A}^1, I)$ にたいし、 $Y' = (0 \rightarrow I \rightarrow J \oplus C \rightarrow \Omega_{C/A}^1 \oplus C \rightarrow 0)$ とし、 $\text{alg}(Y) = (Y' * j_2) \in Exal_A(C, I)$ 。($C \rightarrow \Omega_{C/A}^1$ による引き戻し?)

これが同型をあたえる。

6 infinitesimal deformation

参考文献。cotangent complex, Gabbar-Lamero, SGA1 など。

問題設定。\$A\$-alg の拡大 \$0 \to I \to B \to B_0\$ と射 \$u : I \to J, f_0 : B_0 \to C_0\$ があたえられたとする。このとき拡大 \$C\$ と拡大の間の射 \$B \to C\$ であって、\$u, f_0\$ をのばしたものが存在するか？

この問題を cotangent complex の transitivity から \$\mathbb{E}xt\$ の長完全列をかくと、次のような完全列ができる。

$$0 \to \mathcal{E}xal_{B_0}(C_0, J) \to \mathcal{E}xal_B(C_0, J) \to \mathcal{H}om_{B_0}(I, J) \to \mathbb{E}xt_{C_0}^2(L_{C_0/B_0}, J)$$

これと、変形問題の対応。一番左が変形問題の解の集合、真ん中が問題の条件 \$u\$ の集合、右が障害をあらわす。たとえば \$u\$ が右に行って 0 なら、その変形問題には解があるということになる。

\$\mathbb{E}xt\$ の計算が必要。上の完全列を得るために、次のような事実を使っている。

- \$\mathbb{E}xt_{C_0}^0(L_{B_0/B} \otimes_{B_0} C_0, J) = 0\$
- \$\mathbb{E}xt_{C_0}^1(L_{C_0/B_0}, J) \cong \mathcal{E}xal_{B_0}(C_0, J)\$
- \$\mathbb{E}xt_{C_0}^1(L_{C_0/B}, J) \cong \mathcal{E}xal_{B_0}(C, J)\$
- 上の同型の関手性
- \$\mathbb{E}xt_{C_0}^1(L_{B_0/B} \otimes_{B_0} C_0, J) = \mathcal{H}om_{B_0}(I, J)\$

\$C\$ を圏、\$\Delta\$ を空でない有限全順序集合のなす圏とする。射は順序をたもつもの。\$d_n^i : [0, n-1] \to [0, n]\$ を \$i\$ 番目をとばす写像、\$s_n^i : [0, n] \to [0, n-1]\$ を \$i\$ ばんめを繰り返す写像とする。\$C\$ の単体的対象とは \$\Delta^\circ\$ から \$C\$ への関手のこと。単体的対象 \$X\$ にたいし、\$X_n = X([0, n]), d_i = X(d_n^i)\$ と略記する。(\$X\$ は反変であることに注意。) \$Simple(C)\$ を \$C\$ の単体的対象のなす圏とする。\$X \in C\$ に対し定数関手を \$X\$ とか \$K(X, 0)\$ とかく。 (eilenberg-macLane 空間と関係あり?)

hyperext の定義と ext との比較。まず \$\sigma\$ を定義する。\$\mathbb{E}xt_A^p(E, F) = \varinjlim_{n \geq -p} \mathcal{H}om_{D(A)}(\sigma^n E, \sigma^{n+p} F)\$ と定義する。ここで、\$E, F \in D(A)\$。\$D(A)\$ は \$A\$-mod の derived category、つまり、\$Hot(A)\$ を quasi-isom で局所化した圏。\$\gamma, \sigma\$ という simplicial \$\mathbb{Z}\$-mod を定義する。\$0 \to \mathbb{Z} \to \gamma \to \sigma \to 0\$ という完全列がある。(どこの圏で?) \$\Delta(n)\$ は \$[n] \in ob \Delta\$ であらわされる simplicial set。\$d_0, d_1 : \Delta(0) \to \Delta(1)\$

定義 8. \$T\$ を topos として \$A \to B\$ を \$T\$ の射とする。cotangent complex とは simplicial \$B\$-mod \$L_{B/A} = \Omega_{P/A}^1 \otimes_P B\$ のこと。ここで \$P\$ は \$A \to B\$ の simplicial resolution で、\$\Omega_{P/A}^1\$ は simplicial \$P\$?-mod であり、\$n\$ にたいし、\$\Omega_{P_n/A}^1\$ をあたえるもの。simplicial module のテンソルとは？

simplicial resolution とは。\$A \to B\$ という環の射があったとき、この simpl. resol. \$P = P_A(B)\$ とは、\$P_0 = A[B], P_n = A[P_{n-1}]\$ なる simplicial object のこと。augmentation map \$P \to B\$ が \$A[B] \to B\$ という自然な射からさだまる。ここで \$B\$ というのは simplicial object としては \$B\$ という定数関手だともっている。

augmentation map からきまる射 \$L_{B/A} \to \Omega_{B/A}^1\$ があって、このホモロジーをとると \$H_0(L_{B/A}) \to \Omega_{B/A}^1\$ が同型になる。

simplicial object と complex の関係について？ chain complex みたいな感じで複体をつくれるはず。

命題 4. \$A \to B \to C\$ にたいし、\$L_{B/A} \otimes_B C \to L_{C/A} \to L_{C/B}\$ は \$D(C)\$ の distinguished triangle になる。

この hyperext の長完全列を書くことができる。

7 Hilbert scheme

Hilbert scheme の構成。

Projective bundle の関手性を復習して、Grassman の構成を確認

たとえば E を S 上の vector bundle として $P(E) \rightarrow S$ を考える。これは E の quotient line bundle の moduli になっている。universal object は $O(1)$ である。対応は $f \mapsto f^*O(1)$ であたえられる。逆は $T \rightarrow P(L) \rightarrow P(E_T)$

たとえば P_S^n 上の層の全射 $O^{n+1} \rightarrow O(1)$ を $e_i \mapsto x_i$ で定義する。 $X \rightarrow S$ 上の inv sheaf F と全射 $O_X^{n+1} \rightarrow F$ があたえられたとき、

rank r の sub を分類するものが Grassman で、 $\wedge^r E$ をとることで proj とむすびつく。

sub ではなく、quot の moduli と考える。

Hilbert polynomial について復習。

Hilbert scheme を Grassman の sub としてとらえる。

flattening stratification 例。 S を scheme とし、 F を S 上の coherent sheaf とする。このとき、 n にたいし次をみたす S の locally closed S_p が存在。 $Z \rightarrow S$ で F を引き戻すと flat で rank が n となることと Z が S_n を factor することが同値。実際 $\{s \in S, \dim F_s = n\}$ は locally closed で、flat なら locally free である。

この relative version をやる。Grothendieck, Mumford

Projective space 上の coh sheaf の cohomology を計算する。

8 Picard scheme

Hilbert scheme と対応させる。

9 moduli of abelian varieties

linearly rigidified abelian scheme の moduli を考えて、Hilb の sub として実現する。PGL でわる。

10 stable sheaf の moduli

Huybrecht-Lehr の本。

準備。 E を X 上の連接層とする。

- $\dim E = \dim \text{supp} E$
- E が pure of dim d とは任意の非自明な $F \subset E$ で連接層が $\dim F = d$ となること。
- E の torsion filtration とは $0 \subset T_0(E) \subset \cdots \subset T_d(E) = E$ であって $T_i(E)$ が $\dim \leq i$ なる最大部分層。
- E が reflexive とは

L を直線束とする。 $s \in H^0(X, L)$ が E -regular とは $s : E \otimes L^\vee \rightarrow E \otimes O_X = E$ が単射であることをいう。

X を射影的とする。ample line bundle $O(1)$ を固定する。連接層 E の Hilbert polynomial とは $P(E)(m) = \chi(E \otimes O(m))$ なる多項式のことを言う。 $P(E)(m) = \sum \alpha_i(E)m^i/i!$ とかくとき、 E の multiplicity を $\alpha_{\dim E}(E)$ で定める。 E の rank を $\alpha_d(E)/\alpha_d(O_X)$ で定める。 E が semi-stable とは E が pure でその非自明部分 F が $p(F) \leq p(E)$ をみたすことをいう。

E が stable なら $\text{End}(E)$ は有限次元 division algebra である。 $d = \dim E$ とする。 $\deg(E) = \alpha_{d-1}(E) - \text{rk}(E)\alpha_{d-1}(O_X)$ とし $\mu(E) = \deg(E)/\text{rk}(E)$ で定義する。

F が m -regular とは任意の i にたいし $H^i(X, F(m-i)) = 0$ なることをいう。このとき次が成り立つ。

1. 任意の $m' \geq m$ にたいし m' -regular
2. $F(m)$ は globally generated
3. $H^0(E(m)) \otimes H^0(O(m)) \rightarrow H^0(F(m+n))$ は全射

Mumford-Castelnuove regularity とは $\text{reg}(F) = \inf\{m \in \mathbb{Z}, Fm - \text{reg}\}$ のことをいう。

X 上の連接層の族 $\{F_i\}_{i \in I}$ が bounded とはある k 上有限型な S と連接 $O_{S \times X}$ 加群 F が存在して $\{F_i\} \subset \{F_{s \times X} s \in S\}$ となること。

補題。 $\{F_i\}$ が bounded であることは次のいずれかと同値。

- $\{P(F_i)\}$ が有限である ρ が存在して $\text{reg}(F_i) \leq \rho$ なること。
- $\{P(F_i)\}$ が有限である連接層 F が存在して $F \rightarrow F_i$ が全射なること。

flattening startification $f : X \rightarrow S$ を noether scheme の間の projective morphism とし F を連接 O_X 加群とする。このとき $\{P(F_s), s \in S\}$ は有限集合で、ある有限の局所閉集合 $S_p \subset S$ であって $P \in \{P(F_s)\}$ であり、

- $\coprod S_P \rightarrow S$ は全単射
- $g : S' \rightarrow S$ が noether の間の射で $g_X^* F$ が S' 上 flat であることと g が j を factor することが同値。

Quot scheme V をベクトル空間とする。 $\text{Grass}(V, r)$ を $S \mapsto \{K \subset O_S \otimes V, F = O_S \otimes V/K \text{ is locfree}\}$ でさだまる関手とする。これの表現可能性をしめす。部分空間 $W \subset V$ にたいして、 $G_W = \{K \subset O_S \otimes V, O_S \otimes W \rightarrow O_S \otimes V \rightarrow F \text{ isom}\}$ で定まる関手とすると、これは $G_W \subset \text{Hom}(V, W)$ で表現可能。 $G_W = \{\phi : V \rightarrow W \text{ splits } W \rightarrow V\}$ でこれは affine 部分集合。これは適当にブロックわけした行列でかけばわかる。

11 Lectures on torsion-free sheaves and their moduli by A. Langer

X をなめらか射影的複素多様体とする。その上のベクトル束の分類。位相的不変量。ランクとチャーン類。