Serre duality

@unaoya

2018 年 3 月 20 日

参考文献は Hartshorne

1 Sheaf

2 Cohomology

ここではコホモロジーの定義と、いくつかの性質を示す。

$F : C \to D$ が適当な条件を満たす（左完全とか）アーベル圏の間の関手とする。これに対して以下の条件を満たす関手 $R^iF : C \to D$ を定める。

$M \to I^\bullet$ が injective resolution であれば $R^iFM = H^i(F(I^\bullet))$ となる。

acyclic resolution による計算。A が acyclic とは $R^iFA = 0$ となること。$M \to A^\bullet$ を acyclic resolution とすると、$R^iFM = H^i(F(A^\bullet))$ となる。

3 Sheaf cohomology

補題 1. 環付き空間 (X, O_X) 上の O_X-mod F が flasque なら Γ-acyclic である。

証明. まず O_X-mod I が injective なら flasque であることを示す。$I(U) = Hom(O_X|_U, I|_U) = Hom(j_!(O_X|_U), I)$ が $V \subset U$ について関手的に成り立ち、$(j_V)_!(O_X|_V) \to (j_U)_!(O_X|_U)$ が単射であり I が injective だからこれは全射。

F を injective I に埋め込み、その cokernel を G とする。F, I が flasque であることから G も flasque である。

$0 \to F \to I \to G \to 0$ の長完全列を考える。F が flasque なので $0 \to H^0(X, F) \to H^0(X, I) \to H^0(X, G) \to 0$ が完全であり、$H^1(X, F) = 0$ となる。I についてのコホモロジーが消えることに注意すると次数に関する帰納法から $H^i(X, F) = 0$ が言える。 □

4 Affine scheme の cohomology

この節では affine scheme の cohomology が消えることを証明する。Noether でない場合は？

定理 1. A を Noether 環、M を A-module とする。$X = \mathrm{Spec} A$ と O_X-mod $\mathcal{F} = \tilde{M}$ について、$i > 0$ に対し $H^i(X, \mathcal{F}) = 0$

$0 \to M \to I^\bullet$ を injective resolution とする。これに対し $0 \to \tilde{M} \to \tilde{I}^\bullet$ が flasque resolution になることを示す。

補題 2. I が injective A-mod であるとき $\tilde{I}$ は flasque O_X-mod

証明. まず

補題 3. A が noether で I が injective ならば $I \to I_f$ が全射である。

を示す。

証明. $x \in I_f$ は $y \in I, n > 0$ を用いて $x = \dfrac{y}{f^n}$ とかける。$y = f^n z$ とできればよい。

$(f^n) \subset A$ について $(f^n) \to I$ を $af^n \mapsto ay$ と定めると、I が injective なので $A \to I$ が定まり、1 の像が x になる。

この写像が定義できるかはわからないが、A が Noether より f^r の annihilator b_r を考えると □

$Y = \overline{Supp(\tilde{I})}$ とする。Y についての Noetherian induction により証明する。

まず Y が closed point 1 点からなる場合、$\tilde{I}$ は skyscraper sheaf なので flasque である。

open $U \subset X$ に対して $\Gamma(X, \tilde{I}) \to \Gamma(U, \tilde{I})$ が全射であることを証明する。$D(f) \subset U$ となるような f をとる。このとき、上の補題から $\Gamma(X, \tilde{I}) = I \to \Gamma(U, \tilde{I}) \to \Gamma(D(f), \tilde{I}) = I_f$ は全射。

$Z = X - D(f)$ とし、$\Gamma_Z(X, \tilde{I}) \to \Gamma_Z(U, \tilde{I})$ を考える。$J = \Gamma_a(I)$ にたいし $\Gamma_Z(U, \tilde{I}) = \Gamma(U, \tilde{J})$ である。実際、$\Gamma_a(I) = \Gamma(X, \mathcal{H}^0_Z(\mathcal{F}))$ であり、$0 \to \mathcal{H}^0_Z(\mathcal{F}) \to \mathcal{F} \to j_*(\mathcal{F}|_U)$ が完全だから $\mathcal{H}^0_Z(\mathcal{F})$ は q-coh なのでよい。

ここで J が injective であれば、Z について帰納法の仮定からこの射が全射である。J が injective であることは次のように示せる。イデアル $b \to A$ からの射 $\phi : b \to J$ が $A \to J$ に伸びればよい。A が Noether なのである $n > 0$ があって $a^n \phi(b) = 0$ である。よって Krull の定理からある n' があって $a^{n'} \cap b \subset a^n b$ となる。

I が injective だから $b/(b \cap a^n) \to J \to I$ は $A/a^{n'} \to I$ に伸び、J の定義から $A/a^{n'} \to J$ を定める。

このことから前の全射が言える。 □

flasque なら Γ-acyclic なので、cohomology が計算できる。

5 Projective space の cohomology

S を graded ring とし M を graded S-mod とする。$M(i)$ を M の次数シフト、つまり $M(i)_d = M_{i+d}$ で定まる graded S-mod とする。

$\mathbb{P}X$ 上の O_X-mod $\tilde{M}$ を $\tilde{M}|_{D_+(f)} = (\tilde{M_{(f)}})$ で定まる層とする。とくに $\tilde{S(n)} = O_X(n)$ とかく。

P^n の $O(d)$ の cohomology $H^i(P^n, O(d))$ を計算する。次元 n と次数 d, i について帰納的に。完全列 $0 \to F(-1) \to F \to F|_H \to 0$ を使う。

Cech cohomology で計算する。

$X = P^1$ について直接計算してみる。$X = U_0 \cup U_1, U_0 = D_+(x_0), U_1 = D_+(x_1)$ と affine open で被覆する。これに対して Cech 複体は $0 \to \Gamma(U_0, \mathcal{F}) \times \Gamma(U_1, \mathcal{F}) \to \Gamma(U_0 \cap U_1, \mathcal{F}) \to 0$ である。これの cohomology を計算する。

6 Serre duality

adele での記述、相互法則、留数定理

residue により duality が与えられること。(ω, θ) が dualizing pair とは、ω が coherent O_V-mod で $\theta : H^1(V, \omega) \to k$ であり、任意の coherent O_V-mod F に対して

$$Hom(F, \omega) \to Hom(H^1(V, F), H^1(V, \omega)) \to Hom(H^1(V, F), k)$$

が同型になること。

特に $F = L$ が可逆層のとき、$H^0(L^{-1} \otimes \Omega) \cong H^1(L)^\vee$ を定める。$(\Omega_{V/k}, \int_V)$ が dualizing pair であることを証明する。

7 Riemann-Roch

8 residue

Tate の論文 JOHN TATE, Residues of differentials on curves

定義 1. V を k ベクトル空間とし、A, B をその部分空間とする。$A < B$ とは $A + B/B$ が有限次元であること、$A \sim B$ とは $A < B$ かつ $B < A$ であること。

$A \subset V$ に対し、$E, E_0, E_1, E_2 \subset End(V)$ を

1. $\theta \in E$ は $\theta A < A$
2. $\theta \in E_1$ は $\theta V < A$
3. $\theta \in E_2$ は $\theta A < 0$
4. $E_0 = E_1 \cap E_2$

として定義する。

定義 2 (trace)**.** k 線形写像 $\theta : V \to V$ が finite potent とはある n が存在して $\theta^n V$ が有限次元であること。このとき、$Tr_V \theta$ を以下のように定義する。

1. V が有限次元の場合には、通常の trace とする。
2. $W \subset V, \theta W \subset W$ の時には $Tr_V \theta = Tr_W \theta + Tr_{V/W} \theta$ とする。
3. θ が nilpotent なら $Tr \theta = 0$ とする。

θ が finite potent のとき、$W = \theta^n V$ とすると $Tr_W \theta$ は定義可能で、$Tr_{V/W} = 0$ となるから、これで定義できる。n に依存せず決まるか？

定理 2 (definition of residue)**.** $res_A^V : \Omega^1_{K/k} \to k$ で以下を満たすものが唯一存在する。$f, g \in K$ に対し、$f = f_1 \mod E_2, g_1 = g \mod E_2$ であり、$f_1 \in E_1$ または $g_1 \in E_1$ なるものに対し、$res_A^V(fdg) = Tr_V([f_1, g_1])$ が成り立つ

9 Poisson 和公式

Serre の本、Tate の Serre duality for non-closed k、Ramacrishna の本

$k=\mathbb{F}_q$ とし、X/k を smooth projective curve とし $\mathbb{A}$ を X のアデールとする。$\psi : k(X)\backslash\mathbb{A}\to\mathbb{C}^\times$ を固定することで、位相群としての双対

$$\mathbb{A}\to\hat{\mathbb{A}}; a\mapsto (x\mapsto\psi(ax)$$

が定まる。

この ψ の構成に X 上の 1-form ω を用いる。μ を $\mathbb{A}$ の Haar measure とする。

命題 1. $f\in L^1(\mathbb{A})$ かつ $\hat{f}\in L^1(\hat{\mathbb{A}})$ とする。このとき、ある $c\in\mathbb{R}^\times$ があって $\hat{\hat{f}}=cf$ となる。

$f=1_U, U=\prod_x O_x$ とすると、$c=\mu(c)\mu(D), D=\psi^{-1}(1)$ となる。この D を conductor という。

定理 3 (Poisson 和公式)**.** $f\in L^1(\mathbb{A})$ であって $\sum_{\xi\in k(X)}|f(x+\xi)|$ が広義一様収束するとする。$\sum_{\xi\in k(X)}|\hat{f}(\xi)|$ が収束するなら

$$\sum_{\xi\in k(X)} f(\xi)=\sum_{\xi\in k(X)}\hat{f}(\xi)$$

ψ に対して $n_x\in\mathbb{Z}$ を $\psi_x(p_x^{n_x})=1$ かつ $\psi_x(p_x^{n_x-1})\neq 1$ なるものとし、

$$(\psi)=\sum_{x\in X}-n_x[x]$$

と定める。これは ψ の取り方によらず定まる。

$f=\otimes 1_{O_x}$ とする。X の divisor D に対して $x(D)\in\mathbb{A}$ を $v_x(x(D)_x)=n_x(D)$ となるものとして定め、$h(y)=f(yx)$ に対して Poisson 和公式を使うと

$$\sum h(y)=\sum\hat{h}(y)$$

となる。

$$\sum h(y)=\sum f(xy)=\sum_{y\in k(X), v_x(xy)\geq 0} 1=q^{l(D)}$$

となり、

$$\begin{aligned}\sum\hat{h}(y)&=\sum\int_{\mathbb{A}} f(zx)\psi(yz)dx\\&=\sum\frac{1}{|x|}\int_{\mathbb{A}} f(z)\psi(yzx^{-1})dz\\&=\sum_y\frac{1}{|x|}\hat{f}(yx^{-1})\\&=q^{\deg(x)v_x(\psi)/2}\end{aligned}$$

となる。このことから RR が証明できる。ここで counting の代わりに motivic でやれば一般の k で同様に RR ができる？ Loeser とか Hrushovski とか？

$\mathbb{A}$ の双対性を ω を用いて証明する。（代数隊の場合は？）$X = \P^1$ の場合について構成すれば、一般には Y/X の trace を用いて証明できる。

$$\Omega_{\mathbb{F}_q(t)/\mathbb{F}_q} \to (\mathbb{A}_{\mathbb{F}_q(t)}/\mathbb{F}_q(t))^\wedge$$
$$\omega \mapsto ((r_x) \mapsto \sum_x \mathrm{res}(r_x \omega))$$

ここで $\mathrm{res}_x(\sum_i a_i \pi^i d\pi) = Tr_{k(x)/k}(a_{-1})$ により定める。