Chowla-Selberg の公式

梅崎直也@unaoya

2018 年 9 月 26 日

定理 1 (Chowla-Selberg の公式)**.**

$$\prod_{a \in Cl(k)} \Delta(a)\Delta(a^{-1}) = \left(\frac{2\pi}{d}\right)^{12h} \prod_{a \in (\mathbb{Z}/d\mathbb{Z})^\times} \Gamma\left(\frac{a}{d}\right)^{6w\epsilon(a)}$$

- $k = \mathbb{Q}(\sqrt{-d})$ は虚二次体で o_k をその整数環
- $Cl(k)$ はイデアル類群で $h = |Cl(k)|, w = |o_k^\times|$
- ϵ は二次体 k に対応する Dirichlet 指標（平方剰余記号）
- Δ は weight 12 の cusp form

定理 2 (Gross)**.**

$$\sqrt{\pi} \prod_{a \in (\mathbb{Z}/d\mathbb{Z})^\times} \Gamma\left(\frac{a}{d}\right)^{w\epsilon(a)/4h}$$

と k の order で虚数乗法を持つ楕円曲線 E の正則 1 形式の周期は $\mod$ 代数的数倍で一致

定理 3. 微分形式を積分することでコホモロジーの同型が得られる。

$$H^i_{dR}(X/k) \otimes \mathbb{C} \to H^i(X(\mathbb{C}), \mathbb{C})$$
$$\omega \mapsto (\gamma \mapsto \int_\gamma \omega)$$

相対的な比較定理

$$\mathcal{H}^n_{dR}(A/S) \to R^n\pi_*\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{C}} O_S$$

定理 4. 以下は同値

1. ω_s は $\pi_1(S, s)$ 不変な $H^n(A_s, \mathbb{C})$ の元
2. ω は $R^n\pi_*\mathbb{C}$ の大域切断
3. 正則ベクトル束 $\omega \in \mathcal{H}^n_{dR}(A(\mathbb{C})/S(\mathbb{C}))$ の $s \in S$ に対して ω_s の周期格子が一定
4. 代数的ベクトル束 $\omega \in \mathcal{H}^n_{dR}(A/S)$ の $s \in S$ に対して ω_s の周期格子が一定

モジュラー曲線の構成。上半平面 h を考え、$\pi : h \times \mathbb{C}/L \to h$ を $L = \{(\tau, x), x \in \mathbb{Z} \oplus \tau\mathbb{Z} \subset \mathbb{C}\}$ で定める。さらに $SL_2(\mathbb{Z})$ (もしくはより一般のレベル) でわる。これはファイバーにも作用 $r_{T^{-1}} : (Y/L)_{T(n)} \to (Y/L)_n$ をもつ。

虚二次体に対応する点を h の部分集合と思い、$SL_2(\mathbb{Z})$ が作用。これに楕円曲線を引き戻して割る。（離散集合になる）