# 関数等式と双対性

梅崎直也@unaoya

2019 年 10 月 20 日ロマンティック数学ナイトプライム@ゼータ

# Riemann $\zeta$

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} = \prod_{p} (1 - p^{-s})^{-1}$$

$$\hat{\zeta}(s) = \pi^{-s/2} \Gamma(\frac{s}{2}) \zeta(s)$$

とおくと、関数等式

$$\hat{\zeta}(s) = \hat{\zeta}(1 - s)$$

が成立。Fourier 変換（Poisson 和公式）を用いて示せる。

# Dirichlet $L$

導手 $f$ の Dirhchlet 指標 $\chi : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$

$\chi(nm) = \chi(n)\chi(m)$、$n$ が $f$ と互いに素なら $\chi(n) = 0$。

Legendre 記号などが例。

$$L(\chi, s) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi(n) n^{-s} = \prod_{p} (1 - \chi(p) p^{-s})^{-1}$$

全ての $n$ で $\chi(n) = 1$ とすると Riemann $\zeta$

$$L(1, s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} = \prod_{p} (1 - p^{-s})^{-1}$$

# 関数等式

$$\hat{L}(\chi, s) = f_\chi^{s/2}\Gamma(\chi, s)L(s, \chi)$$

とする。$f_1 = 1, \Gamma(s, 1) = \pi^{-s/2}\Gamma(s)$ である。

$$\hat{L}(\overline{\chi}, 1-s) = W(\chi)\hat{L}(\chi, s)$$

補正項 $W(\chi)$ が存在する。Fourier 変換（Poisson 和公式）を用いて示せる。

# Dedekind $\zeta$

代数体 $K$ に対して、

$$\zeta_K(s) = \sum_{\mathfrak{a}} (N_{K/\mathbb{Q}}\mathfrak{a})^{-s} = \prod_{\mathfrak{p}} (1 - (N_{K/\mathbb{Q}}\mathfrak{p})^{-s})^{-1}$$

$K = \mathbb{Q}$ の時、$N_{\mathbb{Q}/\mathbb{Q}}(p) = p$ なので $\zeta_K(s) = \zeta(s)$ となる。

# 関数等式

$$\hat{\zeta}_K(s) = |D_K|^{s/2}\Gamma_K(s)\zeta_K(x)$$

とする。$D_K$ は $K$ の判別式で $D_{\mathbb{Q}} = 1$。$\Gamma_{\mathbb{Q}}(s) = \pi^{-s/2}\Gamma(\frac{s}{2})$ である。

$$\hat{\zeta}_K(s) = \hat{\zeta}_K(1-s)$$

## Hecke $L$

導手 $f$ の Hecke 指標 $\chi : \mathbb{A}_K \to \mathbb{C}^\times$。これの特別な場合が Dirichlet 指標。

$$L(\chi, s) = \prod_p (1 - \chi(\pi_p) N(p)^{-s})^{-1}$$

(悪い素点では修正する。)

# 関数等式

$$\hat{L}(\chi, s) = |D_K|^{s/2} f_\chi^{s/2} \Gamma(\chi, s) L(\chi, s)$$

とすると、関数等式

$$\hat{L}(\chi, s) = W(\chi) \hat{L}(\overline{\chi}, 1 - s)$$

を満たす。アデール上の Fourier 変換を用いて示す。

# 合同 $\zeta$

有限体上の多様体 $X/\mathbb{F}_q$ はだいたい多項式 $f=0$ で定まる図形。
これの解の個数 $|X(\mathbb{F}_{q^m})|$ を数えることで、

$$Z(X,t)=\exp\left(\sum_{m=1}^{\infty}\frac{|X(\mathbb{F}_{q^m})|t^m}{m}\right)$$

を定める。

$$\frac{d}{dt}\log(Z(X,t))=\sum_m |X(\mathbb{F}_{q^m})|t^m$$

である。

$$\zeta_X(s)=\prod_{x\in X}(1-(Nx)^{-s})^{-1}=Z(X,q^{-s})$$

と表示できる。

# 関数等式

$X$ のコホモロジー $H^i(X)$ の Lefschetz 跡公式により、Frobenius 作用の固有多項式を用いて $Z(X,t)$ を記述できる。

$$Z(X,t) = \frac{\det(1-\mathrm{Frob}t \mid H^1(X))\cdots\det(1-\mathrm{Frob}t \mid H^{2n-1}(X))}{\det(1-\mathrm{Frob}t \mid H^0(X))\cdots\det(1-\mathrm{Frob}t \mid H^{2n}(X))}$$

関数等式

$$Z(X,\frac{1}{q^n t}) = \pm q^{n\chi(X)/2} t^{\chi(X)} Z(X,t)$$
$$\zeta_X(n-s) = \pm q^{n\chi(X)/2-\chi(X)s}\zeta_X(s)$$

が成立。コホモロジーの Poincare 双対性。

# Hasse-Weil $\zeta$

代数体 $K$ 上の多様体 $X$ に対し、その $i$ 次部分 $H^i(X)$ に対して

$$L(H^i(X), s) = \prod_p \det(1 - \mathrm{Frob}_p p^{-s} \mid H^i(X))^{-1}$$

(悪い素点では修正する。)

$$\hat{L}(H^i(X), s) = N^{s/2}\Gamma(H^i(X), s)L(H^i(X), s)$$

関数等式（予想）

$$\hat{L}(H^i(X), s) = \pm\hat{L}(H^i(X), i+1-s)$$

$\mathbb{Q}$ 上の楕円曲線 $E$ では Wiles などにより証明された。

保型形式 $f_E$ であって $L$ 関数が一致するものを作る。保型形式 $f_E$ の $L$ 関数の関数等式は Hecke などにより Fourier 変換などを用いて証明されていた。

# $\ell$ 進層の $L$

$X$ が有限体上の多様体、$\mathcal{F}$ を $\ell$ 進層とする。

$$
\begin{aligned}
L(X, \mathcal{F}, t) &= \prod_{x} \mathrm{det}(1 - t^{\deg(x)} F_x, \mathcal{F}_{\bar{x}})^{-1} \\
&= \frac{\mathrm{det}(1 - \mathrm{Frob}t \mid H^1(X, \mathcal{F})) \cdots \mathrm{det}(1 - \mathrm{Frob}t \mid H^{2n-1}(X, \mathcal{F}))}{\mathrm{det}(1 - \mathrm{Frob}t \mid H^0(X, \mathcal{F})) \cdots \mathrm{det}(1 - \mathrm{Frob}t \mid H^{2n}(X, \mathcal{F}))}
\end{aligned}
$$

$\mathcal{F}$ が定数層 $\Lambda$ のとき、合同ゼータ。

曲線 $X$ 上の族 $f : Y \to X$ に対して、$\mathcal{F} = H^i(Y_x)$ も $\ell$ 進層の例。

関数等式

$$
L(X, \mathcal{F}, t) = \varepsilon(X, \mathcal{F}) t^{-\chi(\overline{X}, \mathcal{F})} L(X, D(\mathcal{F}), t^{-1})
$$

# 分岐と $\varepsilon$ 因子

悪い素点での様子、判別式、導手、関数等式に現れる補正項などの情報が重要。(不変量としても強力。)

分岐の幾何的な不変量として特性サイクルというものがある。特性サイクルは元々は微分方程式（$D$ 加群）の理論で考えられたもので、分岐の様子を記述する。

関数等式の $\varepsilon(X, \mathcal{F})$ と特性サイクルの関係

**定理 (U.-Yang-Zhao)**

$$\det \rho(-cc_X \mathcal{F}) = \frac{\varepsilon(X, \mathcal{F} \otimes \rho)}{\varepsilon(X, \mathcal{F})^{\dim \rho}}$$