直交多項式と表現論

梅崎直也@unaoya

2019/5/11 数理空間 $\tau \acute{o} \pi o \zeta$（トポス）新歓イベント

三角関数の倍角公式

$$
\begin{aligned}
\sin 2\theta &= 2\sin\theta\cos\theta \\
\sin 3\theta &= \sin 2\theta\cos\theta + \cos 2\theta\sin\theta \\
&= 2\sin\theta\cos^2\theta + (2\cos^2\theta - 1)\sin\theta \\
&= \sin\theta(4\cos^2\theta - 1) \\
\sin 4\theta &= \sin 3\theta\cos\theta + \cos 3\theta\sin\theta \\
&= \sin\theta(4\cos^2\theta - 1)\cos\theta + (4\cos^3\theta - 3\cos\theta)\sin\theta \\
&= \sin\theta(8\cos^3\theta - 4\cos\theta)
\end{aligned}
$$

Chebyshev 多項式

$$
\begin{aligned}
\sin\theta &= \sin\theta \times 1 & U_0(x) &= 1 \\
\sin 2\theta &= \sin\theta \times 2\cos\theta & U_1(x) &= 2x \\
\sin 3\theta &= \sin\theta \times (4\cos^2\theta - 1) & U_2(x) &= 4x^2 - 1 \\
\sin 4\theta &= \sin\theta \times (8\cos^3\theta - 4\cos\theta) & U_3(x) &= 8x^3 - 4x
\end{aligned}
$$

とすると

$$\sin(n+1)\theta = \sin\theta \times U_n(\cos\theta)$$

となる。この $U_n(x)$ を第 2 種 Chebyshev 多項式という。

漸化式

加法定理から

$$\sin(n+1)\theta = \cos\theta\sin n\theta + \cos n\theta\sin\theta$$
$$\sin(n-1)\theta = \cos\theta\sin n\theta - \cos n\theta\sin\theta$$
$$\sin(n+1)\theta + \sin(n-1)\theta = 2\sin n\theta\cos\theta$$

ここで $\sin(n+1)\theta = \sin\theta \times U_n(\cos\theta)$ を思い出す。両辺を $\sin\theta$ で割って $x = \cos\theta$ とすると、

$$U_{n+1}(x) + U_{n-1}(x) = 2xU_n(x)$$

が成り立つ。

母関数

漸化式 $U_n(x) - 2xU_{n-1}(x) + U_{n-2}(x) = 0, U_0(x) = 1, U_1(x) = 2x$ を使って

$$\sum_{n=0}^{\infty} U_n(x)t^n = U_0(x) + U_1(x)t + U_2(x)t^2 + U_3(x)t^3 + \cdots$$

を変形する。t 倍すると $a_n t^n$ は $a_n t^{n+1}$ となるから、t^n の係数は a_{n-1} になることに注意すると、

$$-2xt\sum_{n=0}^{\infty} U_n(x)t^n = -2xU_0(x)t - 2xU_1(x)t^2 - 2xU_2(x)t^3 - 2xU_3(x)t^4 -$$

$$t^2\sum_{n=0}^{\infty} U_n(x)t^n = U_0(x)t^2 + U_1(x)t^3 + U_2(x)t^4 + U_3(x)t^5 + \cdots$$

$$(1 - 2tx + t^2)\sum_{n=0}^{\infty} U_n(x) = 1$$

母関数

$$\frac{1}{1-2tx+t^2} = U_0(x) + U_1(x)t + U_2(x)t^2 + U_3(x)t^3 + \cdots$$

逆に左辺を展開することで

$$\begin{aligned}
&1 + (2tx - t^2) + (2tx - t^2)^2 + (2tx - t^2)^3 + \cdots \\
&= 1 + 2tx - t^2 + 4t^2x^2 - 4t^3x + t^4 + 8t^3x^3 - 12t^4x^2 + \cdots \\
&= 1 + (2x)t + (-1 + 4x^2)t^2 + (-4x + 8x^3)t^3 + \cdots \\
&= U_0(x) + U_1(x)t + U_2(x)t^2 + U_3(x)t^3 + \cdots
\end{aligned}$$

と定義することもできる。

昇降演算子

$\dfrac{1}{1-2tx+t^2}$ を t, x でそれぞれ微分すると、

$$\frac{2x-2t}{(1-2tx+t^2)^2} = \frac{2(x-t)}{(1-2tx+t^2)^2}, \quad \frac{2t}{(1-2tx+t^2)^2}$$

となる。

$$t(x-t)\frac{2(x-t)}{(1-2tx+t^2)^2} = 2t\frac{(x-t)^2}{(1-2tx+t^2)^2} = 2t\frac{x^2-2xt+t^2}{(1-2tx+t^2)^2}$$

$$(1-x^2)\frac{2t}{(1-2tx+t^2)^2} = 2t\frac{1-x^2}{(1-2tx+t^2)^2}$$

$$\begin{aligned}(t(x-t)\frac{d}{dt} + (1-x^2)\frac{d}{dx})\frac{1}{1-2tx+t^2} &= 2t\frac{1-2xt+t^2}{(1-2tx+t^2)^2} \\ &= 2t\frac{1}{1-2tx+t^2}\end{aligned}$$

となる。

昇降演算子

つまり

$$(t(x-t)\frac{d}{dt}+(1-x^2)\frac{d}{dx}-2t)\frac{1}{1-2tx+t^2}=0$$

が成り立つ。

$$\frac{1}{1-2tx+t^2}=U_0(x)+U_1(x)t+U_2(x)t^2+U_3(x)t^3+\cdots$$

の右辺にも同じ計算をする。$a_n t^n$ を t 倍と t での微分によって t^n の係数が $a_{n-1}, (n+1)a_{n+1}$ となることに注意すると、

$$nxU_n(x)-(n-1)U_{n-1}(x)+(1-x^2)\frac{d}{dx}U_n(x)-2U_{n-1}(x)=0$$

$$\{(1-x^2)\frac{d}{dx}+nx\}U_n(x)=(n+1)U_{n-1}$$

昇降演算子

$$\left\{(1-x^2)\frac{d}{dx}+nx\right\}U_n(x)=(n+1)U_{n-1}(x)$$
$$(n+1)2xU_n(x)=(n+1)U_{n+1}(x)+(n+1)U_{n-1}(x)$$

両辺引くと

$$\left\{(1-x^2)\frac{d}{dx}-(n+2)x\right\}U_n(x)=-(n+1)U_{n+1}(x)$$

この二つが昇降演算子と呼ばれる。

$$\left\{(1-x^2)\frac{d}{dx}+nx\right\}U_n(x)=(n+1)U_{n-1}$$
$$\left\{(1-x^2)\frac{d}{dx}-(n+2)x\right\}U_n(x)=-(n+1)U_{n+1}(x)$$

微分方程式

昇降演算子を続けて作用させると、

$$\{(1-x^2)\frac{d}{dx}-(n+1)x\}\{(1-x^2)\frac{d}{dx}+nx\}U_n(x)=-n(n+1)U_{n-1}$$

$$(\{(1-x^2)\frac{d}{dx}-(n+1)x\}\{(1-x^2)\frac{d}{dx}+nx\}+n(n+1)\})U_n(x)=0$$

左辺を計算すると、

$$\{(1-x^2)^2\frac{d^2}{dx^2}+(1-x^2)(-2x)\frac{d}{dx}-(n+1)x(1-x^2)\frac{d}{dx}$$
$$+nx(1-x^2)\frac{d}{dx}+n(1-x^2)-n(n+1)x^2+n(n+1)\}U_n(x)=0$$

$$(1-x^2)\frac{d^2}{dx}U_n(x)-3x\frac{d}{dx}U_n(x)+n(n+2)U_n(x)=0$$

がえられる。

微分方程式

$$\frac{d^2}{d\theta^2}(\sin\theta U_n(\cos\theta))$$

$$= \sin\theta(-U_n(\cos\theta) - 3\cos\theta\frac{d}{dx}U_n(\cos\theta) + (1-\cos^2\theta)\frac{d^2}{dx^2}U_n(\cos\theta))$$

となるので、

$$(1-x^2)\frac{d^2}{dx}U_n(x) - 3x\frac{d}{dx}U_n(x) + n(n+2)U_n(x) = 0$$

と合わせると、

$$\frac{d^2}{d\theta^2}\sin\theta U_n(\cos\theta) = -(n+1)^2\sin\theta U_n(\cos\theta)$$

これは両端が固定された波の方程式（無限の高さの井戸型ポテンシャル）

直交関係

$$\int_0^{\pi} \sin(n+1)\theta \sin(m+1)\theta d\theta = \begin{cases} \pi & (n = m) \\ 0 & (n \neq m) \end{cases}$$

左辺を

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta} \frac{\sin(m+1)\theta}{\sin\theta} \sin\theta \sin\theta d\theta$$

と変形してから $x = \cos\theta$ と置換積分すると

$$\int_{-1}^{1} U_n(x) U_m(x) \sqrt{1 - x^2} dx = \begin{cases} \pi & (n = m) \\ 0 & (n \neq m) \end{cases}$$

これを使うと関数を Chebyshev 多項式で展開でき、数値計算などに応用される。

$SU(2)$ の表現

$SU(2) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}, |a|^2 + |b|^2 = 1, a, b \in \mathbb{C} \right\}$ の 2 変数多項式

への作用を $\begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} f(x, y) = f(\bar{a}x - by, \bar{b}x + ay)$ で定める。

$\begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix} f(x, y) = f(e^{-i\theta}x, e^{i\theta}y)$ を計算すると

$$\begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix} x = e^{-i\theta}x, \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix} y = e^{i\theta}y,$$

$$\begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix} x^2 = e^{-2i\theta}x^2, \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix} xy = xy,$$

$$\begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix} y^2 = e^{2i\theta}y^2$$

表現の指標

$$\begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix} x^3 = e^{-3i\theta} x^3, \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix} x^2 y = e^{-i\theta} x^2 y,$$

$$\begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix} x y^2 = e^{i\theta} x y^2, \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix} y^3 = e^{3i\theta} y^3$$

同じ次数の部分について係数だけ足す。等比数列の和の公式と Euler の公式で計算すると

$$\begin{aligned} e^{-i\theta} + e^{i\theta} &= \frac{e^{-2i\theta} - e^{2i\theta}}{e^{-i\theta} - e^{i\theta}} = \frac{\sin 2\theta}{\sin\theta} \\ e^{-2i\theta} + 1 + e^{2i\theta} &= \frac{e^{-3i\theta} - e^{3i\theta}}{e^{-i\theta} - e^{i\theta}} = \frac{\sin 3\theta}{\sin\theta} \\ e^{-3i\theta} + e^{-i\theta} + e^{i\theta} + e^{3i\theta} &= \frac{e^{-4i\theta} - e^{4i\theta}}{e^{-i\theta} - e^{i\theta}} = \frac{\sin 4\theta}{\sin\theta} \end{aligned}$$

指標の直交性

群の表現の指標には直交性がある。例えば $n \neq m$ なら

$$\sin(n+m)\frac{2\pi}{N} + \sin 2(n+m)\frac{2\pi}{N} + \cdots + \sin(N-1)(n+m)\frac{2\pi}{N} = 0$$

が成り立つということ。

同じように $n \neq m$ のとき、

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}\frac{\sin(m+1)\theta}{\sin\theta}\sin\theta\sin\theta d\theta = 0$$

$$\int_{-1}^{0} U_n(x)U_m(x)\sqrt{1-x^2}dx = 0$$

が成り立つ。

直交多項式

上で見たような直交関係、漸化式、微分方程式などの性質を満たす多項式の系列がいくつかある。

例えば量子力学に出てくるものとして

- Hermite 多項式は調和振動子
- Legendre 多項式は角運動量の量子化
- Laguerre 多項式は水素原子の動径方程式

がある。

直交多項式の性質を表現論で理解できる（と思っているのでこれから勉強する)。