関数等式と双対性

梅崎直也@unaoya

ロマンティックゼータナイト

Riemann ζ

Euler 積表示

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} = \prod_{p} (1 - p^{-s})^{-1}$$

関数等式

$$\pi^{-s/2}\Gamma(\frac{s}{2})\zeta(s) = \pi^{-(1-s)/2}\Gamma(\frac{1-s}{2})\zeta(1-s)$$

Poisson 和公式を用いて示す。

Dirichlet L

導手 N の Dirhchlet 指標 $\chi : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ $\chi(nm) = \chi(n)\chi(m)$、$n$ が N と互いに素なら $\chi(n) = 0$

Legendre 記号など。

$$L(\chi, s) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi(n) n^{-s} = \prod_{p} (1 - \chi(p) p^{-s})^{-1}$$

全ての n で $\chi(n) = 1$ とすると Riemann ζ

$$L(1, s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} = \prod_{p} (1 - p^{-s})^{-1}$$

関数等式

$$\hat{L}(s,\chi) = N^{s/2}\Gamma(s,\chi)L(s,\chi)$$

として、

$$\hat{L}(1-s,\overline{\chi}) = W(\chi)\hat{L}(s,\chi)$$

補正項 $W(\chi)$ が存在する。Gauss 和を用いて記述できる。

Fourier 変換、Poisson 和公式を用いて示す。

Dedekind ζ

代数体 K に対して、

$$\zeta_K(s) = \sum_{\mathfrak{a}} (N\mathfrak{a})^{-s} = \prod_{\mathfrak{p}} (1 - (N\mathfrak{p})^{-s})^{-1}$$

$K = \mathbb{Q}$ の時、$\zeta_K(s) = \zeta(s)$

関数等式

D_K を K の判別式とする。$D_{\mathbb{Q}} = 1$ である。

$$\hat{\zeta}_K(s) = |D_K|^{s/2}\Gamma_K(s)\zeta_K(x)$$

とすると、

$$\hat{\zeta}_K(s) = \hat{\zeta}_K(1-s)$$

Hecke L

同種 f の Hecke 指標 $\chi : \mathbb{A}_K \to \mathbb{C}^\times$

$$L(s,\chi) = \prod_p (1-\chi(\pi_p)N(p)^{-s})^{-1}$$

(悪い素点では修正する。)

関数等式

$$\hat{L} = |D_K|^{s/2} f_\chi^{s/2} \Gamma(s,\chi) L(s,\chi)$$

とすると、関数等式

$$\hat{L}(s,\chi) = W(\chi)\hat{L}(1-s,\overline{\chi})$$

を満たす。 アデールでの積分、Fourier 変換を用いて示す。

合同 ζ 関数

有限体上の多様体 $X/\mathbb{F}_q$ はだいたい多項式 $f=0$ で定まる図形。
これの解の個数 $|X(\mathbb{F}_{q^m})|$ を数えることで、

$$Z(X,t)=\exp\left(\sum_{m=1}^{\infty}\frac{|X(\mathbb{F}_{q^m})t^m|}{m}\right)$$

を定める。

$$\zeta_X(s)=\prod_{x\in X}(1-(Nx)^{-s})^{-1}=Z(X,q^{-s})$$

と表示できる。

関数等式

X が n 次元の時、整数係数の多項式 $P_i(t)$ が存在して

$$Z(t) = \frac{P_1(t)P_3(t)\cdots P_{2n-1}(t)}{P_0(t)P_2(t)\cdots P_{2n}(t)}$$

となる。

関数等式

$$Z(\frac{1}{q^n t}) = \pm q^{nE/2} t^E Z(t)$$

が成立。

X のコホモロジー $H^i(X)$ の Lefschetz 跡公式により、Fr の作用の固有多項式 $P_i(t)$ を用いて $Z(X,t)$ を記述できる。コホモロジーの Poincare 双対性から関数等式を示す。

Hasse-Weil ζ 関数

代数体上の多様体 X に対し、その i 次部分 $H^i(X)$ に対して

$$L(s, H^i(X)) = \prod_p P_i(X_p, q^{-s})$$

(悪い素点では修正する。)

関数等式

$$\hat{L}(s, H^i(X)) = N^{s/2}\Gamma(H^i(X), s)L(s, H^i(X))$$

関数等式（予想）

$$\hat{L}(s, H^i(X)) = \pm\hat{L}(i+1-s, H^i(X))$$

$\mathbb{Q}$ 上の楕円曲線 E では Wiles などにより証明された。

保型形式 f_E であって L 関数が一致するものを作る。保型形式 f_E の L 関数の関数等式は Hecke などにより Fourier 変換などを用いて証明されていた。

ε 因子

関数等式に現れる補正項について。

X が有限体上の多様体、$\mathcal{F}$ を ℓ 進層とする。関数等式

$$L(X, \mathcal{F}, t) = \epsilon(X, \mathcal{F}) t^{-\chi(\overline{X}, \mathcal{F})} L(X, D(\mathcal{F}), t^{-1})$$

の $\epsilon(X, \mathcal{F})$ を特性類を用いて幾何的に解釈

定理 (U.-Yang-Zhao)

$$\det \rho(-cc_X \mathcal{F}) = \frac{\varepsilon(X, \mathcal{F} \otimes \rho)}{\varepsilon(X, \mathcal{F})^{\dim \rho}}$$