結び目とエタールコホモロジー

梅崎直也@unaoya

佐野さん 3 年間お疲れ様セミナー

1. Khovanov triply graded homology
2. Kazhdan-Lusztig conjecture
3. geometric interpretation of invariants by Webstar-Williamson

昨日の話

trefoil と Khovanov homology の図式

$$0 \to C^0 \to C^1 \to C^2 \to C^3 \to 0$$

これが二重次数つき複体。これの次元をとることで Jones 多項式が得られる。
三重次数つきの複体を作り、その次元をとることで HOMFLYPT 多項式をえるものを作る。

別の構成

trefoil から braid の図をかく。$n=2$ の braid で $\sigma=\sigma_1^3$ と表すことができる。
$F(\sigma_1):0\to R\{2\}\to B_1\to 0$ と
$F(\sigma_1^{-1}):0\to B_1\{-2\}\to R\{-2\}\to 0$ で定める。ここで、コホモロジー次数はそれぞれ $B_1, R\{-2\}$ を 0 次にする。
上では $R=\mathbb{Q}[y], R_1=\mathbb{Q}[y^2], B_1=R\otimes_{R_1}R$ とし、
$rb_1:R\{2\}\to B_1; 1\mapsto y\otimes 1+1\otimes y$ で定める。また
$br_1:B_1\{-2\}\to R\{-2\}; 1\otimes 1\to 1$ で定める。
これらは次数つき R-bimodule の射。
さらに $F(\sigma)=F(\sigma_1)^{\otimes 3}$ で定義。ここで複体のテンソル積は

Braid 群

m 本の braid 群とは、紐の図をかく
σ_i を i 番目と $i+1$ 番目の入れ替えで i 番目が下を通るようにする。
これに対し、前と同様な複体を
$R = \mathbb{Q}[x_1 - x_2, \ldots, x_{m-1} - x_m], R_i = R^{(i,i+1)}, B_i = R \otimes_{R_i} R$ とし、
rb_i, br_i を定め。$F(\sigma_i) = o \to R\{2\} \to B_i \to 0, F(\sigma_i^{-1}) : 0 \to B_i\{-2\} \to R\{-2\} \to 0$ とする。コホモロジーの次数は前と同様。
これを用いて $F(\sigma)$ をテンソル積で定義する。これは up to homotopy で well-defined

HHH

$F(\sigma)$ の Hochshild homology をとる。
R-bimod M の HH とは $HH_i(R, M) = Tor_i^{R\otimes R}(R, M)$ なるもの。
これは $M \mapsto M_R = R \otimes_{R\otimes R} M = M/[R, M]$ の derived functor である。
$HHH(\sigma) :\to HH(R, F^i(\sigma)) \to HH(R, F^{i+1}(\sigma)) \to$
すると HH の次数、F の次数、R-bimod の次数と三つの次数がつき、これは Kovanov-Rozansky で定義したものと同じ

Soergel bimodule

上に出てきた R_i, B_i は何か？ Soergel bimodule とは、categorification of Hecke algebra である。
$\mathbb{B}_i = B_i\{-1\}$ とすると、これは以下の関係式を満たす。

$$
\begin{aligned}
\mathbb{B}_i \otimes_R \mathbb{B}_i &= \mathbb{B}_i\{1\} \oplus \mathbb{B}_i\{-1\} \\
(\mathbb{B}_i \otimes \mathbb{B}_{i1+} \otimes \mathbb{B}_i) \oplus \mathbb{B}_{i+1} &= (\mathbb{B}_{i+1} \otimes \mathbb{B}_i \otimes \mathbb{B}_{i+1}) \oplus \mathbb{B}_i \\
\mathbb{B}_i \otimes \mathbb{B}_j &= \mathbb{B}_j \otimes \mathbb{B}_i \qquad i \neq j \pm 1
\end{aligned}
$$

Kazhdan-Lusztig basis

$\mathbb{B}_i = C'_i, \{1\} = q$ とすると、

$$
\begin{aligned}
C'^2_i &= (q+q^{-1})C'_i \\
C'_i C'_{i+1} C'_i + C'_{i+1} &= C'_{i+1} C'_i C'_{i+1} + C'_i \\
C'_i C'_j &= C'_j C'_i \qquad\qquad i \neq j \pm 1
\end{aligned}
$$

これは Hecke algebra の Kazhdan-Lusztig basis というものを与えている。
この解釈のもと、$\mathbb{B}_w$ が indecomposable であり、このことから $F(\sigma)$ を分解して自明なところを消去することで $F_{min}(\sigma)$ を得る。これは計算がだいぶ楽になる。

表現論について

$\mathfrak{g}$ の表現について、Weyl 群、最高ウェイト加群
$\mathfrak{g} = sl_2$ のとき。$h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, f = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ とする。交換関係は $h = [e, f], [h, e] = 2e, [h, f] = -2f$ である。$\mathfrak{g}$ の表現を h の固有空間分解して調べる。
S_2 が $h \mapsto -h$ で $\mathfrak{g}$（ほんとは Cartan にのみ？）に作用する。
$\mathfrak{g} = sl_3$ のとき。$h_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, h_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ とし、
e_1, e_2, f_1, f_2 も適切に定める。$\mathfrak{g}$ の表現 V があれば h について同時固有空間分解 $V = \bigoplus_{\nu \in h^*} V_\nu$ とできる。
$W = S_3$ である。

Varma 加群

weight と root
$h^\vee$ の基底 α_i を $(\alpha_i, h_j) = a_{ij}$ となるように定義。Q^+ を $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ で貼られるもの、e_i, h_i, f_i をそれぞれ次数 $\alpha_i, 0, -\alpha_i$ とし、
$\mathfrak{g} = \oplus_\beta \mathfrak{g}_\beta$ とした時、β が root とは $\mathfrak{g}_\beta \neq 0$ となること。
positive root
$\rho = \sum_{\alpha>0} \frac{\alpha}{2}$ とし、$w \cdot 0 = w\rho - \rho$ とする。
w に対応する Verma 加群とは、$w \cdot 0$ を最高ウェイトに持つ中で普遍性を持つもの。
これが唯一の既約商を持つ。

Hecke 環

$W = S_n$ とする。H_n を $T_w, w \in W$ を基底に持つ $\mathbb{Z}[q^{1/2}, q^{-1/2}]$ 代数で、以下の関係式を満たすもの。ここで $s_i = (i, i+1)$ に対応する T_{s_i} を T_i と書いた。

$$(T_i - q^2)(T_i + 1) = 0$$
$$T_i T_{i+1} T_i = T_{i+1} T_i T_{i+1}$$
$$T_i T_j = T_j T_i \qquad i \neq j \pm 1$$

W の群環と Iwahori-Hecke 代数 T_w を基底にもち $\mathbb{Z}[q^{1/2}, q^{-1/2}]$ 上生成される環で、積は

$$T_y T_w = T_{yw} l(yw) = l(y) + l(w)$$
$$(T_s + 1)(T_s - q) = 0 s \in S$$

で乗法が定まる。としても定義可能。

これは involution $\iota : H_n \to H_n, q^{1/2} \mapsto q^{-1/2}, T_w \mapsto (T_{w^{-1}})^{-1}$ を持つ。

Braid 群の群環の商であり、$q = 1$ とすると W の群環になる。また $G(\mathbb{F}_q)$ の両側 B 不変 $\mathbb{C}$ 値関数のなす convolution 代数と同型である。

Kazhdan-Lusztig 予想

Kazhdan-Lusztig 基底と Kazhdan-Lusztig 多項式

命題

次を満たす ι 不変な要素からなる基底 $\{C'_w\}_{w \in W}$ が存在する。

$$C'_w = q^{-l(w)/2} \sum_{y \leq q} P_{y,w} T_y P_{y,w}(q) \in \mathbb{Z}[q], P_{w,w} = 1$$

$$\deg P_{y,w} < l(w) - l(y) y \neq w$$

これは組み合わせ的に証明できる。

Kazhdan-Lusztig 予想 $w \in W$ に対し、$w(\rho) - \rho$ を最高 weight に持つ Verma module M_w と L_w を最高 weight 加群とする（M_w の唯一の既約商）。この時、これらの指標の関係式が Kazhdan-Lusztig 多項式を用いて

$$ch(L_w) = \sum_{y \leq w} (-1)^{l(w)-l(y)} P_{y,w}(1) ch(M_w)$$

と書ける。

Kazhdan-Lusztig 予想の証明

Beilinson-Bernstein と Brylinski-Kashiwara による。
Bruhat 分解 $G = \coprod_{w\in W} BwB$ と Schubert 多様体
$G/B = \coprod_{w\in W} X_w$
Beilinson-Bernstein localization $\mathfrak{g}$ の表現と旗多様体の (twisted) D 加群の対応 λ を整ウェイトで任意の $i \in I$ について $\lambda(h_i) \in \mathbb{Z}_{>0}$ を満たすとする。この時 $\Gamma(X, -) : RH_l^0(D_X^\lambda) \to M(\mathfrak{g})$ は完全関手で $B_w(\lambda) \mapsto M(w\circ\lambda)^*, M_w(\lambda) \mapsto M(w\circ\lambda), L_w(\lambda) \mapsto (w\circ\lambda)$ を満たす。
Riemann-Hilbert 対応正則ホロノミック D 加群と perverse sheaf の対応 Sol が正則ホロノミック D 加群を perverse sheaf に移す。
$B_w(\lambda) \mapsto \mathbb{C}_{X^w}[-l(w)], M_w(\lambda) \mapsto D(\mathbb{C}_{X^w}[-l(w)], L_w(\lambda) \mapsto {}^\pi\mathbb{C}_{X^w}$ となる。
Kazhdan-Lusztig 多項式は Schubert 多様体の intersection コホモロジーを用いて

$$P_{y,w}(q) = \sum_i q^i \dim IH^{2i}_{X_y}(\overline{X}_w)$$

と書ける（Kazhdan-Lusztig）
（柏原谷崎の Kazhdan-Lusztig 予想をめぐってを参考）

intersection cohomology と perverse sheaf

動機。特異点のある場合の Poincare 双対など
derived category と perverse t-structure
semi-small map と push-forward
decomposition theorem
weight filtration
perverse sheaf と weight
Weil 予想、ゼータ関数のゼロ点と Frobenius 固有値

perverse sheaf

Schubert 多様体の intersection cohomology

purity と decomposition theorem を使う。
$X = G/B, Y(w) = BwB/B \simeq \mathbb{A}^{l(w)} \subset X(w) = \overline{Y(w)}$ とする。
$X(w)$ は $v \leq w$ なる $Y(w)$ で stratified。
$j_w : Y(w) \to X(w)$ を Bruhat cell として $IC_w = j_{w,!*}\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ とする。
この辺は Kiehl-Weissauer を参照

$$\begin{aligned} h(j_{w,!}(\Lambda_{O_w})[l(w)]) &= T_w \\ f(j_{w,*}(IC_{O_w})) &= C'_w \end{aligned}$$

BBDG, trace formula, duality など

不変量の幾何的定義
結び目の図式からある多様体とその上の層の複体を定義する。
weight filtration から spectre 系列を作る。
E_2-page が二重複体で、さらにここに weight でもう一つ次数が入って、三重次数複体。

W を Weyl 群、S を単純鏡映例 $W = S_n, S = \{(i, i+1), i\}$
S_n が sl_n の Weyl 群になっているということを理解する。
W の表現
有限群 G の表現 G の共役類と G の既約表現は個数が等しい。
S_n の共役類は n の分割に対応する。
この対応を幾何的に構成する。n の分割は GL_n もしくは SL_n の Jordan 標準形に対応。

Fourier 変換、Springer 対応
W を Galois 群に持つ被覆正則表現の分解 intermediate extension
Fourier 変換すると Springer fiber のコホモロジーが出てくる

convolution 代数としての $\mathbb{Z}[W]$ の構成。
Lusztig Steinberg 多様体の上の構成可能関数とその合成石で定まる代数が $\mathbb{Z}[W]$ と同型。
Fourier 変換との関係は？

Khovanov の Springer 多様体。Grassmannian との関係、geometric Satake