結び目とエタールコホモロジー

梅崎直也@unaoya

佐野さん 3 年間お疲れ様セミナー

1. Khovanov triply graded homology
2. Kazhdan-Lusztig conjecture
3. geometric interpretation of invariants by Webstar-Williamson

昨日の話

trefoil と Khovanov homology の図式

$$0 \to C^0 \to C^1 \to C^2 \to C^3 \to 0$$

これが二重次数つき複体。これの次元をとることで Jones 多項式が得られる。

三重次数つきの複体を作り、その次元をとることで HOMFLYPT 多項式をえるものを作る。

別の構成

trefoil から braid の図をかく。$n = 2$ の braid で $\sigma = \sigma_1^3$ と表すことができる。

$F(\sigma_1) : 0 \to R\{2\} \to B_1 \to 0$ と
$F(\sigma_1^{-1}) : 0 \to B_1\{-2\} \to R\{-2\} \to 0$ で定める。ここで、コホモロジー次数はそれぞれ $B_1, R\{-2\}$ を 0 次にする。

上では $R = \mathbb{Q}[y], R_1 = \mathbb{Q}[y^2], B_1 = R \otimes_{R_1} R$ とし、
$rb_1 : R\{2\} \to B_1; 1 \mapsto y \otimes 1 + 1 \otimes y$ で定める。また
$br_1 : B_1\{-2\} \to R\{-2\}; 1 \otimes 1 \to 1$ で定める。

これらは次数つき R-bimodule の射。

さらに $F(\sigma) = F(\sigma_1)^{\otimes 3}$ で定義。ここで複体のテンソル積は

Braid 群

m 本の braid 群とは、紐の図をかく

σ_i を i 番目と $i+1$ 番目の入れ替えで i 番目が下を通るようにする。

これに対し、前と同様な複体を
$R = \mathbb{Q}[x_1 - x_2, \ldots, x_{m-1} - x_m], R_i = R^{(i,i+1)}, B_i = R \otimes_{R_i} R$ とし、
rb_i, br_i を定め。$F(\sigma_i) = o \to R\{2\} \to B_i \to 0, F(\sigma_i^{-1}) : 0 \to B_i\{-2\} \to R\{-2\} \to 0$ とする。コホモロジーの次数は前と同様。

これを用いて $F(\sigma)$ をテンソル積で定義する。これは up to homotopy で well-defined

HHH

$F(\sigma)$ の Hochshild homology をとる。

R-bimod M の HH とは $HH_i(R,M) = Tor_i^{R\otimes R}(R,M)$ なるもの。
これは $M \mapsto M_R = R \otimes_{R\otimes R} M = M/[R,M]$ の derived functor である。

$HHH(\sigma) :\to HH(R, F^i(\sigma)) \to HH(R, F^{i+1}(\sigma)) \to$

すると HH の次数、F の次数、R-bimod の次数と三つの次数がつき、これは Kovanov-Rozansky で定義したものと同じ

Soergel bimodule

上に出てきた R_i, B_i は何か？ Soergel bimodule とは、categorification of Hecke algebra である。

$\mathbb{B}_i = B_i\{-1\}$ とすると、これは以下の関係式を満たす。

$$\mathbb{B}_i \otimes_R \mathbb{B}_i = \mathbb{B}_i\{1\} \oplus \mathbb{B}_i\{-1\}$$
$$(\mathbb{B}_i \otimes \mathbb{B}_{i1+} \otimes \mathbb{B}_i) \oplus \mathbb{B}_{i+1} = (\mathbb{B}_{i+1} \otimes \mathbb{B}_i \otimes \mathbb{B}_{i+1}) \oplus \mathbb{B}_i$$
$$\mathbb{B}_i \otimes \mathbb{B}_j = \mathbb{B}_j \otimes \mathbb{B}_i \qquad i \neq j \pm 1$$

Kazhdan-Lusztig basis

$\mathbb{B}_i = C'_i, \{1\} = q$ とすると、

$$\begin{aligned} C'^2_i &= (q+q^{-1})C'_i \\ C'_iC'_{i+1}C'_i + C'_{i+1} &= C'_{i+1}C'_iC'_{i+1} + C'_i \\ C'_iC'_j &= C'_jC'_i & i \neq j \pm 1 \end{aligned}$$

これは Hecke algebra の Kazhdan-Lusztig basis というものを与えている。

この解釈のもと、$\mathbb{B}_w$ が indecomposable であり、このことから $F(\sigma)$ を分解して自明なところを消去することで $F_{min}(\sigma)$ を得る。これは計算がだいぶ楽になる。

表現論について

$\mathfrak{g}$ の表現について、Weyl 群、最高ウェイト加群

$\mathfrak{g} = sl_2$ のとき。$h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, f = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ とする。交換関係は $h = [e, f], [h, e] = 2e, [h, f] = -2f$ である。$\mathfrak{g}$ の表現を h の固有空間分解して調べる。

S_2 が $h \mapsto -h$ で $\mathfrak{g}$（ほんとは Cartan にのみ？）に作用する。

$\mathfrak{g} = sl_3$ のとき。$h_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, h_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ とし、e_1, e_2, f_1, f_2 も適切に定める。$\mathfrak{g}$ の表現 V があれば h について同時固有空間分解 $V = \bigoplus_{\nu \in h^*} V_\nu$ とできる。

$W = S_3$ である。

Varma 加群

weight と root

$h^\vee$ の基底 α_i を $(\alpha_i, h_j) = a_{ij}$ となるように定義。Q^+ を $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ で貼られるもの、e_i, h_i, f_i をそれぞれ次数 $\alpha_i, 0, -\alpha_i$ とし、$\mathfrak{g} = \oplus_\beta \mathfrak{g}_\beta$ とした時、β が root とは $\mathfrak{g}_\beta \neq 0$ となること。

positive root

$\rho = \sum_{\alpha > 0} \frac{\alpha}{2}$ とし、$w \cdot 0 = w\rho - \rho$ とする。

w に対応する Verma 加群とは、$w \cdot 0$ を最高ウェイトに持つ中で普遍性を持つもの。

これが唯一の既約商を持つ。

Hecke 環

$W = S_n$ とする。H_n を $T_w, w \in W$ を基底に持つ $\mathbb{Z}[q^{1/2}, q^{-1/2}]$ 代数で、以下の関係式を満たすもの。ここで $s_i = (i, i+1)$ に対応する T_{s_i} を T_i と書いた。

$$
\begin{aligned}
(T_i - q^2)(T_i + 1) = 0 \\
T_i T_{i+1} T_i = T_{i+1} T_i T_{i+1} \\
T_i T_j = T_j T_i \qquad & i \neq j \pm 1
\end{aligned}
$$

W の群環と Iwahori-Hecke 代数 T_w を基底にもち $\mathbb{Z}[q^{1/2}, q^{-1/2}]$ 上生成される環で、積は

$$
\begin{aligned}
T_y T_w = T_{yw} l(yw) = l(y) + l(w) \\
(T_s + 1)(T_s - q) = 0 s \in S
\end{aligned}
$$

で乗法が定まる。としても定義可能。

これは involution $\iota : H_n \to H_n, q^{1/2} \mapsto q^{-1/2}, T_w \mapsto (T_{w^{-1}})^{-1}$ を持つ

Kazhdan-Lusztig 基底と Kazhdan-Lusztig 多項式

命題
次を満たす ι 不変な要素からなる基底 $\{C'_w\}_{w\in W}$ が存在する。

$$C'_w = q^{-l(w)/2}\sum_{y\leq q} P_{y,w}T_y P_{y,w}(q) \in \mathbb{Z}[q], P_{w,w} = 1$$

$$\deg P_{y,w} < l(w) - l(y) y \neq w$$

これは組み合わせ的に証明できる。

Kazhdan-Lusztig 予想 $w \in W$ に対し、$w(\rho) - \rho$ を最高 weight に持つ Verma module M_w と L_w を最高 weight 加群とする（M_w の唯一の既約商）。この時、これらの指標の関係式が Kazhdan-Lusztig 多項式を用いて

Kazhdan-Lusztig 予想の証明

Beilinson-Bernstein と Brylinski-Kashiwara による。

Bruhat 分解 $G = \coprod_{w \in W} BwB$ と Schubert 多様体
$G/B = \coprod_{w \in W} X_w$

Beilinson-Bernstein localization $\mathfrak{g}$ の表現と旗多様体の (twisted) D 加群の対応 λ を整ウェイトで任意の $i \in I$ について $\lambda(h_i) \in \mathbb{Z}_{>0}$ を満たすとする。この時 $\Gamma(X, -) : RH_I^0(D_X^\lambda) \to M(\mathfrak{g})$ は完全関手で $B_w(\lambda) \mapsto M(w \circ \lambda)^*, M_w(\lambda) \mapsto M(w \circ \lambda), L_w(\lambda) \mapsto (w \circ \lambda)$ を満たす。

Riemann-Hilbert 対応正則ホロノミック D 加群と perverse sheaf の対応 Sol が正則ホロノミック D 加群を perverse sheaf に移す。
$B_w(\lambda) \mapsto \mathbb{C}_{X^w}[-l(w)], M_w(\lambda) \mapsto D(\mathbb{C}_{X^w}[-l(w)], L_w(\lambda) \mapsto {}^{\pi}\mathbb{C}_{X^w}$
となる。

Kazhdan-Lusztig 多項式は Schubert 多様体の intersection コホモロジーを用いて

証明の方針

$j_x : O_w \to X$ として

$$
\begin{aligned}
h(j_{w,!}(\Lambda_{O_w})[l(w)]) &= T_w \\
h(j_{w,*}(IC_{\bar{O}_w}) &= C'_w
\end{aligned}
$$

である。

BBDG や trace formula, duality を使う。

ここで設定として $IC_w = j_{!*}\overline{\mathbb{Q}_\ell}, j_w : Y(w) \to X(w)$ とし、
$X = G/B, Y(w) = BwB/B \sim \mathbb{A}^{l(w)}$ と、$X(w) = \overline{Y(w)}$ とする。
$X(w)$ は $v \leq w$ なる v についての $Y(v)$ で stratified。

perverse sheaf とは

$D^b(X, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ の t-structure をつぎのように定める。${}^pD^{\leq 0}(X)$ を $\dim supp(\mathcal{H}^{-i}B) \leq i$ であるもの ${}^pD^{\geq 0}(X)$ を $\dim supp(\mathcal{H}^{-i}DB) \leq i$ であるものとし、$Perv(X) = {}^pD^{\leq 0}(X) \cap {}^pD^{\geq 0}(X)$ とさだめる。

$j : U \to X$ を open imm としたとき、$j_{!*} : Perv(U) \to Perv(X)$ が定まり、$Dj_{!*}B = J_{!*}DB$ を満たす。(これは cohomology が duality をみたすということ？__)

Gabber の定理 B_0 を τ-mixed perverse sheaf とした時、$w(B_0) \leq w$ であることは、すべての $Y_0 \subset X_0$ 既約 d 次元としたとき、ある open dense $U_0 \subset Y_0$ が存在して、$w(\mathcal{H}^{-d}B_0|_{U_0}) \leq w - d$ をみたす。

これの系として $w(B_0) \leq w$ であることと、$w({}^pH^v(B_0)) \leq w + v$ と同値

intersection cohomology と perverse sheaf

動機。特異点のある場合の Poincare 双対など

derived category と perverse t-structure （この t-structure についてコホモロジーを取ると duality を満たす？）

semi-small map と push-forward

decomposition theorem

weight filtration

perverse sheaf と weight

Weil 予想、ゼータ関数のゼロ点と Frobenius 固有値

$D^b(X, \overline{\mathbb{Q}_\ell})$ の t-structure を次で定める。

$$
\begin{aligned}
{}^p D^{\leq 0}(X) &= \{\dim supp(H^{-i} B) \leq i\} \\
{}^p D^{\geq 0}(X) &= \{\dim supp(H^{-i} DB) \leq i\} \\
Perv(X) &= {}^p D^{\leq 0}(X) \cap {}^p D^{\geq 0}(X)
\end{aligned}
$$

と定義する。

Riemann zeta

$$\zeta(s) = \sum \frac{1}{n^s} = \prod \frac{1}{1 - p^{-s}}$$

合同 zeta は $X/\mathbb{F}_q$ に対して、

$$Z(X,t) = \exp(\sum_m \frac{N_m}{m} t^m) N_m = |X(\mathbb{F}_{q^m})| \log(Z) = N_1 t + \frac{t^2}{2} N_2 + \cdots \prod_{x \in |X}$$

とする。これは次の有理性を満たす（Grothendieck, trace formula）

$$Z(X,t) = \prod_{i=0}^{\dim X} \det(1 - tFrob_q | H_c^i(X, \mathbb{Q}_\ell))^{(-1)^{i+1}}$$

リーマン予想の類似。$t = q^{-s}$ とした時のゼロ点。Frobenius の $H_c^i(X, \mathbb{Q}_\ell)$ の固有値が $\frac{i}{2}$ となる。

Deligne の定理。

定理 (Deligne)
$f_0 : X_0 \to Y_0$ と $\mathbb{F}_0/X_0$ に対し、

1. $\mathbb{F}_0$ が τ-pure of weight β なら $R^i f_{0!}\mathbb{F}_0$ の τ-weight はある n に対し $\beta + i - n$ となる。
2. $\mathbb{F}_0$ が mixed なら $R^i f_{0!}\mathbb{F}_0$ は mixed

$\mathbb{F}_0$ が τ-pure of weight β とは全ての $x \in |X_0|$ について、その $f_x : \mathbb{G}_{0,\bar{x}} \to \mathbb{G}_{0,\bar{x}}$ の固有値が $|\tau(\alpha)| = N(x)^\beta$ なること。

poncturement pure とは？

$\mathbb{F}_0$ が τ-mixed とは、ある有限 filtration W が存在して Gr^W が τ-pure of weight β であること。$w(\mathbb{F}_0) = \sup_{x \in |X_0|} \sup_\alpha \log|\tau(\alpha)|^2$

mixed complex とは全ての cohomology sheaf が τ-mixed であること。

Schubert 多様体の intersection cohomology

purity と decomposition theorem を使う。

$X = G/B, Y(w) = BwB/B \simeq \mathbb{A}^{l(w)} \subset X(w) = \overline{Y(w)}$ とする。
$X(w)$ は $v \leq w$ なる $Y(w)$ で stratified。

$j_w : Y(w) \to X(w)$ を Bruhat cell として $IC_w = j_{w,!*}\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ とする。

この辺は Kiehl-Weissauer を参照

$$
\begin{aligned}
h(j_{w,!}(\Lambda_{O_w})[l(w)]) &= T_w \\
f(j_{w,*}(IC_{O_w})) &= C'_w
\end{aligned}
$$

BBDG, trace formula, duality など

不変量の幾何的定義

結び目の図式からある多様体とその上の層の複体を定義する。

weight filtration から spectre 系列を作る。

E_2-page が二重複体で、さらにここに weight でもう一つ次数が入って、三重次数複体。

Braid β や link L から $\Phi_\beta \in D_{B\times B}(GL(N)), \mathbb{F}_D \in D_{G_D}(X_D)$ を作る。これに対し、$\mathbb{H}^*_B(GL(N), \Phi_\beta), \mathbb{H}^*_{G_D}(X_D, \mathbb{F}_D)$ は triply graded

$\mathbb{F}_D$ の weight filtration から定まる spectral sequence により $A_2^{p,q}$ を定める。

定理

$$\mathcal{E}(L) = \mathcal{E}_{G_D}(X_D, \mathbb{F}_D) = \sum_{l,j,k} (-1)^l q^j t^k A_2^{j,k,l}(L)$$

は HOMFLYPT 多項式

$\mathbb{H}^{j-l,j-k}(gr_l^W \mathbb{F}_D)$ の部分商が $A^{j,k,l}(L)$ に入る。ここで、

$$\mathbb{H}^{*,i}(\mathbb{F}) = \oplus_{|\alpha|=q^{i/2}} \mathbb{H}^*_\alpha(\mathbb{F})$$

Markov? trace の幾何的な記述

$\sigma \in B_n$ に対し $[\Phi_\sigma]$ が定まる。$K : D^b_{B\times B}(G) \to H_n$ が存在し、trace $H_n \to \mathbb{C}(t, q^{1/2})$ と $\dim \mathbb{H}_B : D^b_{B\times B}(G) \to \mathbb{C}(t, q^{1/2})$ が存在。さらに $IC_w \in D^b_{B\times B}(G) \mapsto S_w = \mathbb{H}^*_{B\times B}(G, IC_w)$ という R-bimod が定まる。これの dim HH が $\mathbb{C}(t, q^{1/2})$ の元。これらの相互の関係は？

$$\Phi_\sigma = j_{w,*}k_{BwB} < l(w) > \mapsto q^{1/2}\sigma_i \in H_n$$
$$IC_w = j_{w,!*}k_{BwB} < l(w)/2 > \mapsto \sigma_i \in H_n$$

で定める？

$\mathbb{F}_D \in D_{G_D}(X_D)$ の構成

結び目からグラフを作って $G_D = \prod_e GL(1), X_D = \prod_v GL(2)$ とする。(colored link の場合は行列のサイズが変わる)

$$(a,b,c,d)x = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} x \begin{pmatrix} c^{-1} & 0 \\ 0 & d^{-1} \end{pmatrix}$$

Bruhat 分解 $GL(2) = B \amalg BsB = B \amalg U$ とし、$k : U \to GL(2)$ とする。結び目の交差の上下に対応して、$k_* \Lambda_U < 2 >$ または $k_! \Lambda_u < 2 >$ を $\mathbb{F}_v$ とする。ここで $k_*, k_!$ の関係は Poincare duality$Rf_*(D_X(K)) \sim D_S(Rf_!(K))$ がある。

$$\mathbb{F}_D = res^G_{G'}(\boxtimes \mathbb{F}_v) \in D^b_{G_D}(X_D)$$

と定義する。

W を Weyl 群、S を単純鏡映例 $W = S_n, S = \{(i, i+1), i\}$

S_n が sl_n の Weyl 群になっているということを理解する。

W の表現

有限群 G の表現 G の共役類と G の既約表現は個数が等しい。

S_n の共役類は n の分割に対応する。

この対応を幾何的に構成する。n の分割は GL_n もしくは SL_n の Jordan 標準形に対応。

Fourier 変換、Springer 対応

W を Galois 群に持つ被覆正則表現の分解 intermediate extension
Fourier 変換すると Springer fiber のコホモロジーが出てくる

convolution 代数としての $\mathbb{Z}[W]$ の構成。

Lusztig Steinberg 多様体の上の構成可能関数とその合成石で定まる代数が $\mathbb{Z}[W]$ と同型。

Fourier 変換との関係は？

Khovanov の Springer 多様体。Grassmannian との関係、geometric Satake