結び目とエタールコホモロジー

梅崎直也@unaoya

2019 年 2 月 15 日

概要

この講演ではエタールコホモロジーについて、それがどのような性質を持つのかを中心にお話しします。特にそれらの性質を用いることで、ある種の群や代数系の表現を幾何学的に調べることができます。具体的には Kazhdan-Lusztig 多項式や Springer 対応といった話題について紹介します。また、そのような対象を通してエタールコホモロジーが結び目の研究と交わる可能性について考えてみたいと思います。

1 幾何学的表現論

Weyl 群 $G = GL_n$ なら $W = S_n$ リー代数 $\mathfrak{g}$ と $\mathfrak{h}$ をその Cartan としたとき、$W \subset GL(\mathfrak{h}^*)$ は以下のような S で生成される。$s_i(\lambda) = \lambda - \lambda(h_i)\alpha_i$ で定める。ここで $h_i \in \mathfrak{h}, \alpha_i \in \mathfrak{h}^*$ でこれらが生成系例えば $W = S_n$ の時、S は $i, i+1$ の互換。これをいくつかけるかで $w \in W$ に対し $l(w)$ を定めることができる。

1.1 Springer 対応

Weyl 群 W の表現と G の冪単共役類 u 冪単元 u から多様体 $\mathscr{B}_u$ を u を含む Borel 全体のなす多様体とする。$\mathscr{B}_u$ のコホモロジーに表現を実現

Z を (u, B, B') のなす多様体とする。u は冪単元、B, B' は u を含む Borel

コホモロジーの二つの基底これの変換に Kazhdan-Lusztig 多項式が現れる。advance80 の定義ホモロジーは Borel-Moore、proper conti なら射を誘導する。$H_{4v}(\hat{E}_\phi)$ の基底として、$[\bar{C}_w]$ と Γ_w がある。

1.2 Kazhdan-Lusztig 多項式

無限次元表現の指標としての解釈

Kazhdan-Lusztig 多項式の三つの解釈 Verma 加群の組成列旗多様体のコホモロジー Hecke 環

$\mathfrak{g}$ を半単純 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の weight λ に対して、その Verma 加群 $\Delta(\lambda) = U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{b})} \mathbb{C}_\lambda$ と定義。これはただ一つの既約商 $L(\lambda)$ をもつ。$\Delta(\lambda)$ の組成列とその重複度の記述 M の指標を $ch(M) = \sum \dim M_\lambda e^\lambda$ と定める。

Hecke 環の定義 Coxeter 系 S と Weyl 群 W。生成元と関係式による記述。$w \in W$ に対する $\mathbb{Z}[q^{1/2}, q^{-1/2}]$ 上の基底 T_w をもち、関係式は

$$T_y T_w = T_{yw}, l(yw) = l(y) + l(w)$$
$$(T_s + 1)(T_s - q) = 0, s \in S$$

例 $W = S_n$ の時。

$q \to 1$ とすると W の群環 $\mathbb{Z}[W]$ である。

$G(\mathbb{F}_q)$ の両側 B 不変関数の環としての記述。

旗多様体のコホモロジー、Bruhat 胞体から定まる基底？ W の作用から定まる基底？ $w \in W$ に対して G/B の Schubert 多様体と呼ばれる部分多様体 X_w が定まる。これの intersection homology を用いて Kazhdan-Lusztig 多項式を記述できる。

2　結び目の不変量

2.1　Webster-Williamson

colored braidβ から $GL(N)$ の P_β 両側同変複体を作る。さらにそれの cohomology をとることで三重次数複体を作る。一方、colored link から X_D の G_D 同変複体を作り、その cohomology からも三重次数複体を作る。これらが一致し、HOMFLYPT 多項式の圏化になっている。

D

2.2