Abelと楕円積分

@unaoya

2018年9月2日

楕円積分の話- Legendre relation - レムニスケート周率- 算術幾何平均- 楕円関数の加法定理- アーベルの定理

アーベルヤコビの定理因子が関数の因子となる条件、周期積分

1と$\sqrt{2}$のAGMがレムニスケートになる話

$$\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}$$

はレムニスケート積分。これは楕円積分の特別な場合。

第一種完全楕円積分と第二種完全楕円積分

$$K(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\sqrt{1-k^2\sin^2 t}}$$
$$E(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-k^2\sin^2 t}dt$$

算術幾何平均との関係 $0 < a < b$ について

$$K(a,b) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\sqrt{a^2\cos^2 t + b^2\sin^2 t}}$$

となる。$k = \dfrac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$ とおけば

$$K(a,b) = \frac{1}{a}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\sqrt{1-k^2\sin^2 t}}$$

となり、第一種完全楕円積分。

定理 1. $a' = \dfrac{a+b}{2}, b' = \sqrt{ab}$ とすると

$$K(a,b) = K(a',b')$$

Landen変換

$$\tan x = \frac{\sin 2t}{k+\cos 2t}$$

を用いて計算する。

1 Abel-Jacobi の定理

Abel-Jacobi map とは C をリーマン面で種数 g とする。$C \to Jac(C)$ は周期積分を用いて定まる。$Jac(C)$ は $\mathbb{C}^g/\Lambda$ で、$\omega_1, \ldots, \omega_g$ が正則 1 形式の基底とし、サイクル γ 上の積分で生成される格子 Λ を考える。すると、$x \in C$ に対し、$(\int_{x_0}^{x} \omega_i)$ は $\mod \Lambda$ で決まる。積分の起点 x_0 を決めることで上の写像は定まる。

Pic と Jac の関係。

C が楕円曲線、すなわち $g = 1$ の場合を考える。定義式が $y^2 = f(x)$ とかける時、正則 1 形式として $\frac{dx}{y}$ を取ることができる。これでの積分が楕円積分。この積分の因子 D での値が 0 になることと、D が $div(f)$ と書けることが同値？（AJ map の単射性）全射性が Jacobi の逆問題？

2 theta 関数

Jacobi の theta function とは、$z \in \mathbb{C}$ と $\tau \in H$ についての関数

$$\theta(z, \tau) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \exp(\pi i n^2 \tau + 2\pi i n z)$$

のこと。exp の周期性から、z について周期関数である、つまり

$$\theta(z + 1, \tau) = \theta(z, \tau)$$

となる。また、

$$\theta(z + \tau, \tau) = \sum \exp(\pi i n^2 \tau + 2\pi i n z + 2\pi i n \tau)$$

さらに $\theta_{00} = \theta, \theta_{01}, \theta_{10}, \theta_{11}$ という関数を

$$\theta_{01} = \theta(z + \frac{1}{2}, \tau)$$

$$\theta_{10} = \exp(\frac{1}{4}\pi i \tau + \pi i z)\theta(z + \frac{1}{2}\tau, \tau)$$

$$\theta_{11} = \exp(\frac{1}{4}\pi i \tau + \pi i (z + \frac{1}{2}))\theta(z + \frac{1}{2}\tau + \frac{1}{2}, \tau)$$

と定める。

$z = 0$ としたとき、これらは保形形式となり、例えば Fermat 曲線のパラメータ表示

$$\theta_{00}(0, \tau) = \theta_{01}(0, \tau)^4 + \theta_{10}(0, \tau)^4$$

を与える。

Jacobi の恒等式。τ についての保形性。

$$\theta_{00}(\frac{z}{\tau}, -\frac{1}{\tau}) = (-i\tau)^{\frac{1}{2}} \exp(\frac{\pi}{\tau} i z^2)\theta_{00}(z, \tau)$$

$$\theta_{01}(\frac{z}{\tau}, -\frac{1}{\tau}) = (-i\tau)^{\frac{1}{2}} \exp(\frac{\pi}{\tau} i z^2)\theta_{10}(z, \tau)$$

$$\theta_{10}(\frac{z}{\tau}, -\frac{1}{\tau}) = (-i\tau)^{\frac{1}{2}} \exp(\frac{\pi}{\tau} i z^2)\theta_{01}(z, \tau)$$

$$\theta_{11}(\frac{z}{\tau}, -\frac{1}{\tau}) = -i(-i\tau)^{\frac{1}{2}} \exp(\frac{\pi}{\tau} i z^2)\theta_{11}(z, \tau)$$

これを使って、ζ の函数等式を示せる。