導来代数幾何入門

梅崎直也@unaoya

2019/3/29 第 3 回関東すうがく徒のつどい

代数幾何とホモトピー

derived stack

$\mathrm{QC}(X)$ と積分変換

表現論と TFT への応用

注意

この講演の内容は、いくつかの解説と論文のイントロの非常に粗い位相での貼り合わせです。参考にしたものは最後に参考文献として一覧にしてあります。

講演者は証明や正確な定義をフォローしていません。

スライドは公開しています。（twitter @unaoya）

今日の内容

全体像を文章で説明する。

スキームにおけるホモトピー。導来関手スタック

圏化。ホモロジーではなく、圏を不変量として構成する。

代数幾何とホモトピー

この節の目標

代数幾何においてホモトピーを考えたくなる状況をいくつか説明する。

動機の一つ

そもそもループ空間とは何か？どう役に立つか？（表現論に応用がある？ループ群？（これは点集合になるので、相対化したい？））

代数幾何においてループ空間を作る。(代数幾何におけるループ空間的現象の例？、dR とか HKR とか？)

ホモトピー論におけるループ空間 $Map(S^1, X) = Map(B\mathbb{Z}, X)$
$S^1 \simeq B\mathbb{Z} \simeq * \amalg^h_{*\amalg^h *} *$ とできる。

$B\mathbb{Z}$ はスタックとしては定義できる。mapping stack を考えると？自明なものになってしまう（$* \to B\mathbb{Z}$ が疎モジュライなため？）

derived mapping stack を考える。つまり $T \mapsto Map(T \times M, X)$ ではなく $T \mapsto Map(T \times^h M, X)$ を考える。

$\times$ と $\times^h$ の違いは何か？

なぜ代数幾何か？幾何学的表現論では分解定理とよいコホモロジー理論をつかう？

導入ホモトピーの代数的な扱いドルドカン

次数付き代数を単に代数と思うのとではテンソル積がずれる？忘却関手ホモトピー極限と普通の極限の違いに対応？

s1 のループ空間上の S1 不変関数と微分形式？

scheme における hom 対象。projective なら Hilbert scheme affine なとき。ind scheme?$\mathbb{A}^1$ の例を考える。

homotopy limit and homotopy colimit

通常の極限や余極限はホモトピーと相性が悪い。

$$
\begin{array}{ccc}
* & \longleftarrow & * \\
\uparrow & & \uparrow \\
* & \longleftarrow & * \amalg *
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{ccc}
S^1 & \longleftarrow & [0,1] \\
\uparrow & & \uparrow \\
[0,1] & \longleftarrow & * \amalg *
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ccc}
* & \longrightarrow & * \\
\downarrow & & \downarrow \\
* & \longrightarrow & S^1
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{ccc}
\mathbb{Z} & \longrightarrow & * \\
\downarrow & & \downarrow \\
\mathbb{R} & \longrightarrow & S^1
\end{array}
$$

これを克服するためにホモトピー極限とホモトピー余極限という概念を定義する必要がある。

代数幾何におけるファイバー積

k を可換環とし Alg_k を可換な k 代数の圏とする。

k 代数 A に対して空間 $\mathrm{Spec}A \to \mathrm{Spec}k$ を構成する。これは $B \mapsto Hom_k(A, B)$ により関手 $Alg_k \to Sets$ を与える。これの貼り合わせが一般のスキーム X である。これは相対的な議論 $X \to S$ を扱える枠組みを与える。

$$\begin{array}{ccc} X_p & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Spec}\mathbb{F}_p & \longrightarrow & \mathrm{Spec}\mathbb{Z} \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} X_0 & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Spec}k & \longrightarrow & \mathrm{Spec}k[t]/t^2 \end{array}$$

スキームのファイバー積に対応する操作が代数のテンソル積。

$$\mathrm{Spec}(A_1 \otimes_B A_2) \simeq \mathrm{Spec}A_1 \times_{\mathrm{Spec}B} \mathrm{Spec}A_2$$

交点理論

加群の複体におけるホモトピーとその極限、余極限についても同様の問題がある。

$k \otimes_{k[x]} k \simeq k$ だが $k \otimes_{k[x]} (k[x][-1] \oplus k[x]) \simeq k[-1] \oplus k$ となる。

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & k[x] & \longrightarrow & k[x] & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & k & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

つまり、$Tor^1_{k[x]}(k, k) = k$ である。これは $\otimes^L$ を用いると、
$k \otimes^l_{k[x]} k \simeq k[\epsilon_{-1}] = k \oplus k[-1]$ と up to homotopy で定まる

$A \otimes_B C$ だと重複度が出てこない。Tor を計算する。面倒。
$A \otimes^L_B C$ を幾何的な対象として直接扱ってしまえばいいのでは？
$\mathrm{Spec} A \otimes^L_B C$ が A と B の交点であるとしてしまう。

しかし $A \otimes^L_B C$ は up to homotopy でしか決まらない！！

変形理論

ケーラー微分の定義やザリスキ接空間の定義を思い出す

X に対し、

$$
\begin{tikzcd}
\gamma^* V \arrow[r] \arrow[d] & V \arrow[d] \\
S^1 \arrow[r, "\gamma"] & X
\end{tikzcd}
$$

と定義すると $LX = \mathrm{Spec} Sym_{\mathcal{O}_X}(L_X[1])$ となる。
$\Omega^1_{A/k} = I/I^1, I = \mathrm{ker}(A \otimes_k A \to A)$ であったことを思い出す。

この L_X は cotangent complex と呼ばれるもので、X の変形を

A が smooth k-algebra なら $L_A \simeq \Omega^1_{A/k}$ であり、$\pi_0(L_A) = \Omega^1_{\pi_0 A}$ となる。

代数幾何における stack と higher stack

集合に値を持つ層を考える。例。A に対し $A^\times$ を対応させるもの。これは $\mathbb{G}_m$ で表現される。

stack は Grpd に値を持つ層。例 G-torsor の分類空間 BG。up to iso で分類。Set は Grpd に離散的なものとして埋め込める。

Grpd の nerve をとることで sSet が定まる。これに広げることでより広い moduli 問題を考えることができる。up to euivalence で分類したい。higher stack は sSet に値を持つ層（貼り合わせ条件はホモトピー込みで考える）

貼り合わせ条件が被覆 $U_\bullet \to S$ に対し、Set に値を持つ場合

$$F(U \times_S U) \to F(U) \to F(S)$$

$$F(U \times_S U \times_S U) \to F(U \times_S U) \to F(U) \to F(S)$$

ループ空間と Chern 指標

$LBG = Map(S^1, BG) = G/G$ となる。S^1 上の G-torsor を考えると、貼り合わせが e をどこにはり合わせるかで決まる。

$$\begin{array}{ccc} e & \longrightarrow & g \\ \downarrow & & \downarrow \\ h & \longrightarrow & hg' = gh \end{array}$$

V/X と $\gamma : S^1 \to X$ に対し、

$$\begin{array}{ccc} \gamma^* V & \longrightarrow & V \\ \downarrow & & \downarrow \\ S^1 & \xrightarrow{\gamma} & X \end{array}$$

のモノドロミーの trace を対応させることで、$Ch(V) \in O(LX)^{S^1}$ が定まる。これが $Ch : K(X) \to O(LX)^{S^1} = H^{ev}_{DR}(X)$ を与える。

特に $X = BG$ とすると、$LX = LBG = [G/G]$ であり、V は G の表現、$K(X) = R(X), O(LX)^{S^1} = \mathbb{C}(G/G)$ つまり類関数で、Ch

この節のまとめ

右側を higher にした。

$$
\begin{tikzcd}
Alg_k \arrow[rr, "p"] \arrow[dr, "p_G"'] & & Sets \\
& Aut(Y|X)Y \arrow[ur, "\widetilde{p}_G"'] &
\end{tikzcd}
$$

derived stack

この節の目標

$$
\begin{tikzcd}
Alg_k \arrow[rr, "p"] \arrow[dr, "p_G"'] & & Sets \\
& Aut(Y|X)Y \arrow[ur, "\widetilde{p}_G"'] &
\end{tikzcd}
$$

右側を sset にすると moduli problem をより広いものを扱うことができる。例えば導来圏の対象を分類する、導来圏を分類するなど up to equiv で分類したい場合などに必要。

左側を derive すると「正しく」極限をとることができ、「正しい」空間を定義できる。cf. hidden smoothness

両側にホモトピーが定まっていて、それについて整合的な関手を考える。

(higher) stack は $Alg_k \to sSet$ で層になるものだった。これを拡張して $dAlg_k \to sSet$ で層になるものとして derived stack を定義する。

層を定義するためには位相が必要。derived topology は model category (M, W) 上の位相で、$Ho(M)$ の位相を誘導するもの。（Toen-Vaquie の model topoi や Lurie の higher topoi?）

定義

$dAlg_k^{op}$ に derived étale topology を以下で定める。$\{A \to B_i\}_i$ が étale covering とは、$\{\pi_0(A) \to \pi_0(B)\}$ が通常の可換環として étale covering であり、$\pi_n A \otimes_{\pi_0 A} \pi_0 B_i \to \pi_n B_i$ が同型。

これは infinitesimal lifting で特徴付けることもできる。

層は前層であって、次の貼り合わせ条件を満たすもの。

presheaf を localization して sheaf を作るのと同じで、prestack を localization して stack を作る。derived prestack のなす圏を $dSPr = Fun(dAlg_k \to sSet)$ とする。W を $f : F \to G$ で $\pi_i(F, x) \simeq \pi_i(G, f(x))$ なるもので定める？これを用いて $dSt = Ho(dSPr) = W^{-1}dSPr$ と定める。

これを具体的に書けば次のようなものになる。

定義
derived stack とは関手 $F : dAlg_k \to sSet$ であって、weak equivalence を保ち、次の descent 条件を満たす。

任意の etale h-hypercovering $B_\bullet \to A$ に対して $F(A) \to holimF(B_\bullet)$ が $Ho(sSet)$ における同値

derived affine stack

$\mathbb{R}\mathrm{Spec} : dAlg_k \to dSt_k$ が定まり忠実充満。(derived Yoneda) これは $A \mapsto (B \mapsto Map(A, B))$ で定める。

また internal hom や holim, hocolim が定まる。

例えば

$$\mathbb{R}\mathrm{Spec} B \times^h_{\mathbb{R}\mathrm{Spec} A} \mathbb{R}\mathrm{Spec} C \simeq \mathbb{R}\mathrm{Spec}(B \otimes^L_A B)$$
$$Map(F, G) : H \mapsto Map(F \times^h H, G)$$

となる。

一般の derived stack は表現可能関手つまり affine derived stack の colimit でかける。アトラス $\mathbb{R}\mathrm{Spec} A \to F$ を持ち、適当な条件を満たすもの。

定義域を制限することで $t_0 : dSt \to St$ が定まり、afiine を貼り合わせることで $i : St \to dSt$ が定まる。$t_0(\mathbb{R}\mathrm{Spec} A) = \mathrm{Spec} \pi_0(A)$ となる。また $it_0 X \to X$ は閉埋め込みで、X と $t_0(X)$ の small

derived mapping stack

$Map_{dSt_k}(F,G) : H \mapsto Hom_{dSt_k}(F \times^h H, G)$ と定める。これが dSt_k における internal hom である。

Σ が位相空間や単体的集合の時、internal hom $X^\Sigma = Map(\Sigma, X)$ が derived stack として定まる。ここで Σ は constant stack。

このとき $i : St_k \to dSt_k$ は Map と交換しない、つまり $iMap(F,G) \simeq \mathbb{R}Map(iF, iG)$ となるとは限らない。

一方で $t_0 : dSt_k \to St_k$ とは交換する。つまり $t_0\mathbb{R}Map(F,G) \simeq Map(t_0F, T_0G)$ となる。特に F, G が $St(k)$ から来るとき、$t_0\mathbb{R}Map(iF, iG) \simeq Map(F,G)$ である。($t_0 iF \simeq F$ であることに注意)つまり derived mapping stack は mapping stack を太らせたもの。

mapping space がずれる例として、次の loop stack の例を見る。

$LX = X^{S^1} = Map(S^1, X)$ は internal hom で定める。
$LX \simeq X \times_{X \times X} X$ である。

X が位相空間から定まる constant stack の場合、LX は通常の loop space から定まる constant stack

stack としての $Map(B\mathbb{Z}, X)$ は X そのもの？ derived stack としての $Map(B\mathbb{Z}, X) = X \times^h_{X \times^h X} X$ となる。$* \times_{\mathbb{A}^1} * \simeq k[\epsilon_{-1}]$ の計算

$X = BG$ のとき $LX = LBG = G/G$

X が smooth scheme over char 0 field の時は $T_X[-1]$

scheme の cotangent complex, Ω^1 との関係、変形理論

derived ring $D_i = \mathbb{R}\mathrm{Spec} k[\epsilon] = \mathbb{R}\mathrm{Spec}(k \oplus k[i])$ とする。degree 0 と-i にある。

このとき $Ext^i_k(L_{X,x}, k) \simeq \mathbb{R}Hom_*(D_i, (X, x))$ となる。Ext^i は derived stack においては表現可能。

derived tangent stack を $TX = Map(\mathrm{Spec} k[\epsilon], X)$ とする。

Y が scheme なら $TiY \simeq \mathbb{R}\mathrm{Spec}_Y(Sym_{O_Y} L_Y)$ となる。

$Vect_n(X)$ は非自明な derived extension を持つ。$\mathbb{R}Vect_n(X)$ とする。

この節のまとめ

derived affine stack $\mathbb{R}\mathrm{Spec} A$ とその貼り合わせで derived stack が得られる。

loop stack を定義した。

$\mathrm{QC}(X)$ と積分変換

この節の目標

積分変換の圏が準連接層の圏と同値になることをみる。

積分変換は圏の作用とみなせる。

また積分変換の合成は合成積

symmetric monoidal category と algebra と module

Mod_A の定義

まず $Vect$ を定義する。一般に abel 圏から ∞ 圏を構成する方法が Lurie の HA にある。これが monoidal

Gaitsgory $AssocAlg(Vect))^{op} \to DGCat_{cont}, A \mapsto A - Mod$ が定まる。ここで Vect は ∞-cat of chain complexes of k-vecctor spaces $DGCat_{cont}$ は $1 - Cat_{cont}^{St,cocmpl}$ における $Vect$-module たちのなす ∞-cat Gaitsgory1.10.1 HA でのアーベル圏 A から $(\infty, 1)$-cat $D^{-}(A)$ を作り、これの right completion を作る。

Lurie の HA での扱いは？

A-mod の圏から直接作るのと一致する？

$\mathrm{QC}(X)$ の定義

$X = \mathrm{Spec} A$ が affine derived scheme の時、$\mathrm{QC}(X) = Mod_A$ とする。

一般の derived stack については、X を affine derived stack の colimit で書き、同じ図式で QC の limit を ∞-cat of ∞-cats でとる。

X が qc で affine diagonal を持てば、cosimplical diagram の totalization でかける。$\Delta : X \to X \times X$ が各 affine $U \to X$ に引き戻して affine であり、

$U \to X$ から $U_{\bullet}X$ を作り、O_X-mod のような作り方はできない？

定義

1. A を derived commutative ring とする。A 加群 M が perfect とは、Mod_A の smallest ∞ category で finite colimit と retract でとじたものに属すること。
2. derived stack X に対し、$Perf(X)$ は $\mathrm{QC}(X)$ の full ∞-subcategory であって、任意の affine $f : U \to X$ への制限 f^*M が perfect module であるものからなるもの。
3. derived stack X が prefect stack とは $\mathrm{QC}(X) \cong IndPerf(X)$ であること。
4. $f : X \to Y$ が perfect とは、任意の affine $U \to Y$ について、$X \times_Y U$ が perfect なこと。

有限性条件

compact と dualizable と perfect の関係。*Vect* における例。

self-dual とは。stable symmetric monoidal category で $1 \to M \otimes M^\vee \to 1$ で $M \to M \otimes M^\vee \otimes M \to M$ が id_M となるもの。

$Vect/k$ における有限次元ベクトル空間。$V^\vee = \mathrm{Hom}(V, k)$ とする。$1 \to V \otimes V^\vee$ を対角行列、$V \otimes V^\vee \to 1$ を trace とすると、上の条件を満たす。

特に X が affine diagonal を持つ時の $\mathrm{QC}(X)$ における同値性。

base change と projection formula

命題 (BFN, proposition 3.10)
$f : X \to Y$ を perfect とする。この時

1. $f_* : \mathrm{QC}(X) \to \mathrm{QC}(Y)$ は small colimit と交換し、projection formula を満たす
2. 任意の derived stack の射 $g : Y' \to Y$ に対し、base chage map $g^* f_* \to f'_* g'^*$ は同値

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{g'} & X \\ {\scriptstyle f'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ Y' & \xrightarrow{g} & Y \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \mathrm{QC}(X') & \xleftarrow{g'^*} & \mathrm{QC}(X) \\ {\scriptstyle f'_*}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f_*} \\ \mathrm{QC}(Y') & \xleftarrow{g^*} & \mathrm{QC}(Y) \end{array}$$

命題 (BFN, Proposition 4.6)
X_1, X_2 perfect, $\boxtimes : \mathrm{QC}(X_1)^c \otimes \mathrm{QC}(X_2)^c \cong \mathrm{QC}(X_1 \times X_2)^c$

1. $\otimes$ と pullback は dualizable を保ち、$X = X_1 \times X_2$ が perfect なことから、外部積が compact を保つ
2. $\mathrm{QC}(X_1 \times X_2)^c$ が外部積で生成
3. projection formula

により証明。さらに

1. $Ind : st \to Pr^L$ が summetric monoidal
2. $Ind\mathrm{QC}(X)^c \simeq \mathrm{QC}(X)$

から、$\boxtimes : \mathrm{QC}(X_1) \otimes \mathrm{QC}(X_2) \simeq \mathrm{QC}(X_1 \times X_2)$ が成立。

定理 (BFN の Theorem 4.7)

X_1, X_2, Y が perfect の時、

$$\mathrm{QC}(X_1 \times_Y X_2) = \mathrm{QC}(X_1) \otimes_{\mathrm{QC}(Y)} \mathrm{QC}(X_2)$$

Y が一般の時の証明の方針（どこに Y が perfect を使う？）

$X_1 \times_Y X_2 \to X_1 \times Y^\bullet \times X_2$ から

$\mathrm{QC}(X_1 \times_Y X_2) \leftarrow \mathrm{QC}(X_1 \times Y^\bullet X_2)$ を作る。すでに証明したことから $\mathrm{QC}(X_1) \otimes \mathrm{QC}(Y)^\bullet \otimes \mathrm{QC}(X_2)$ となり、これの geometric realization で $\mathrm{QC}(X_1) \otimes_{\mathrm{QC}(Y)} \mathrm{QC}(X_2)$ が計算できる。

1. $\mathrm{QC}(X_1 \times_Y X_2) = Mod_{T_{geom}}(\mathrm{QC}(X_1 \times X_2))$ by Barr-Beck
2. $\mathrm{QC}(X_1) \otimes_{\mathrm{QC}(Y)} \mathrm{QC}(X_2) = Mod_{T_{alg}}(\mathrm{QC}(X_1 \times X_2))$ by Barr-Beck
3. $T_{alg} = T_{geom}$ by base change

系 (BFN, Corollary 4.8)
$\pi : X \to Y$ map of perfect stacks とする。$\mathrm{QC}(X)$ は self dual $\mathrm{QC}(Y)$-mod である。つまり
$Fun_{QC(Y)}(QC(X), QC(X')) \simeq QC(X) \otimes_{QC(Y)} QC(X')$ となる。

証明

$$X \to X \times_Y X \to X$$
$$X \leftarrow X \times_Y X \to X \times_Y X \times_Y X$$

Fun のやつ

上を一般化。4.1 の話

これをどう使うか

定理 (BFN の Theorem 4.14)

X, Y derived stack with affine diagonal、$f : X \to Y$ を perfect とする。$g : X' \to Y$ は任意の derived stack の射とする。この時、$\mathrm{QC}(X \times_Y X') \simeq Fun_Y(\mathrm{QC}(X), \mathrm{QC}(X'))$ は ∞ 圏の同値

1. 関手の構成 $M \mapsto \tilde{f}_*(M \otimes \tilde{g}^* -)$ とする。$\tilde{f}$ が perfect なので colimit を保ち QC に移る。また projection formula により $\mathrm{QC}(Y)$ 線形になる。
2. X' について local なので（$\times, \lim, \mathrm{colim}, \mathrm{QC}$ の交換関係）、affine に帰着する。
   $\mathrm{QC}(X \times_Y \mathrm{Spec}A) \simeq Fun_Y(\mathrm{QC}(X), Mod_A)$ を示す。
3. $Y = \mathrm{Spec}B$ の時。前の系 4.8 から $\mathrm{QC}(X)$ は Mod_B 上 self dual で、前の命題 4.13 から QC と $\otimes$ の交換がわかるので $Fun_B(\mathrm{QC}(X), Mod_A) \simeq Fun_B(Mod_B, \mathrm{QC}(X)^\vee \otimes_B Mod_A) \simeq \mathrm{QC}(X) \otimes_B Mod_A$ $\mathrm{QC}(X \times_B \mathrm{Spec}A) \simeq \mathrm{QC}(X) \otimes_B Mod_A$ と計算できる。
4. Y が一般の時。

この節のまとめ

1. derived affine scheme $X=\mathbb{R}\mathrm{Spec}A$ に対し $\mathrm{QC}(X)=Mod_A$ を ∞ 圏として定義した。（最初から dg A-mod の N_{dg} をとるのとは違う？）
2. 一般の derived scheme X に対し $\mathrm{QC}(X)$ を $X=colim_i\mathbb{R}\mathrm{Spec}A_i$ のとき Mod_{A_i} の貼り合わせで定義した。これは加群（stable symmetric monoidal category）
3. perfect というクラスを定義した。有限性の条件
4. 積分変換のなす圏がファイバー積の QC と同値であることを示した。X が Y 上 perfect なとき

$$\mathrm{QC}(X\times_Y X')\simeq Fun_Y(\mathrm{QC}(X),\mathrm{QC}(X'));K\mapsto(F\mapsto(f_*(g^*F\otimes K))$$

表現論と TFT への応用

この節の目標

前節の内容を表現論や TFT へ応用する

応用

symmetric monoidal ∞-cats of qcs と s∞-cats of linear endofunctors with monoidal str by composition の center と trace と E_n-analogue を計算する。

1. Hecke category
2. TFT

Hecke category

$X \to Y$ に対して $D(X \times_Y X)$ 特に $BB \to BG$ に対して
$X \times_Y X = B \backslash G / Y$

Hecke category は Hecke algebra の categorification cf. Bezrukavnikov

H_G^{aff} を $St_G = \tilde{G} \times_G \tilde{G}$ 上の G 同変準連接層のなす ∞-category とする。ここで $\tilde{G} \to G$ は Grothendieck-Springer resolution で G は簡約群。

$St_G = \tilde{G} \times_G \tilde{G}$ とする。$Z(\mathrm{QC}(X \times_Y X)) \simeq \mathrm{QC}(LY)$ を $X = \tilde{G}/G \to Y = G/G = LBG$ に適用することで $Z(H_G^{\mathrm{aff}}) = Z(\mathrm{QC}(St_G)) \simeq Z(\mathrm{QC}(X \times_Y X)) \simeq \mathrm{QC}(LY) \simeq \mathrm{QC}(LLBG) \simeq \mathrm{QC}(Loc_G(T^2))$ となる。

cf. BN2 でやった coherent D-module の圏？ $D(B\backslash G/B)$ の Drinfeld center と G 上の指標層の圏の同一視。さらに指標層の Langlands 双対 BN2 の Theorem1.8 H_G と $\tilde{H}_G$ は semi-rigid で canonical pivotal, CY str を持つ。冪単指標層のなす dg 圏 Ch_G は H_G の monoidal center および $\tilde{H}$ の monoidal trace に標準的に同型。

さらに Koszul 双対から $\tilde{H}_G^{per}$ と $H_{G^\vee}^{per}$ が同値なことが言えて、これにより上の定理の系として、Langlands dual の two-periodic dg cat of unip ch sh が同値なことが言える。

定義

命題
perfect stack X に対し 2d TFT $\exists Z_X$ s.t.
$Z_X(S^1) = \mathrm{QC}(LX), Z_X(\Sigma) = \Gamma(X^\Sigma, \mathcal{O}_{X^\Sigma})$

証明すべきことは？

Costello の categorified analogue。X に対する仮定なしに構成できる。

Deligne-Kontsevich conjecture

monoidal stable category の Derinfeld center は associative (or A_∞)-alg の Hochshild cohomology の categorical analogue である。Deligne の予想は、Hochshild cochain complex は Gerstenhaber algebran の持ち上げである E_2-algebra の構造を持つこと。これの cyclic version として、Frobeinus algebra の Hochshild cochain は framed E_2 (or ribbon) algebra の構造を持つ。さらに Kontsevich はこの高次版として、E_n-algebra の Hochshild cochain は E_{n+1}-algebra の構造を持つことを予想。

Costello と Kontsevich-Soibelman は algebra A に対して $Z_A(S^1) = HC(A)$ となるような TFT から予想が従うことを説明した。

これの圏論類似として、monoidal ∞-category の Drinfeld center が E_2-category であること。

参考文献

- BFN:
- BN2: