導来代数幾何入門

梅崎直也@unaoya

2019/3/29 第 3 回関東すうがく徒のつどい

はじめに

この講演の内容は、いくつかの解説と論文のイントロの非常に粗い位相での貼り合わせです。参考にしたものは最後に参考文献として一覧にしてあります。

講演者は証明や正確な定義をフォローしていません。
（次回作に期待）

スライドは公開しています。（twitter @unaoya）

目次

今日の内容

代数幾何における空間に対して、適切な極限や余極限の操作を与える枠組みが欲しい。通常のスキームは $\mathit{Alg}_k \to \mathit{Set}$ という関手で適切な条件を満たすものである。これを拡張して、導来スキームを関手 $\mathit{dAlg}_k \to \mathit{sSet}$ であって適切な条件を持つものとして定める。

これらはホモトピーを取り入れた構造を持つ圏であり、ホモトピーを考慮した適切な極限操作を定義することができる。

応用上の動機として、例えば up to equivalence で物事を分類するような問題を考えたい。例えば導来圏の対象で適切な条件を持つものを分類する。

代数幾何とホモトピー

この節の目標

代数幾何においてホモトピーを考えたくなる状況。

1. 関手が完全でないとき、導来関手を考える。複体のホモトピーを用いて定義する。
2. スキームの交点を考えると、重複度が現れる。「重複度付きの空間」を直接扱いたい。
3. up to equivalence なモジュライ理論を考える。例えば導来圏の対象を分類するなど。
4. ループ空間を考える。S^1 から X への射を分類する空間を構成したい。

homotopy limit and homotopy colimit

通常の極限や余極限はホモトピーと相性が悪い。

$$
\begin{tikzcd}
* & * \arrow[l] \\
* \arrow[u] & * \amalg * \arrow[l] \arrow[u]
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
S^1 & {[0,1]} \arrow[l] \\
{[0,1]} \arrow[u] & * \amalg * \arrow[l] \arrow[u]
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
* \arrow[r] \arrow[d] & * \arrow[d] \\
* \arrow[r] & S^1
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
\mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[d] & * \arrow[d] \\
\mathbb{R} \arrow[r] & S^1
\end{tikzcd}
$$

これを克服するためにホモトピー極限とホモトピー余極限という概念を定義する。

代数幾何におけるファイバー積

k を可換環とし Alg_k を可換な k 代数の圏とする。

k 代数 A に対して空間 $\mathrm{Spec}A \to \mathrm{Spec}k$ を構成する。これは $B \mapsto Hom_k(A, B)$ により関手 $Alg_k \to Sets$ を与える。これの貼り合わせが一般のスキーム X である。これは相対的な議論 $X \to S$ を扱うための枠組みを与える。

$$\begin{array}{ccc} X_p & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Spec}\mathbb{F}_p & \longrightarrow & \mathrm{Spec}\mathbb{Z} \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} X_0 & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Spec}k & \longrightarrow & \mathrm{Spec}k[t]/t^2 \end{array}$$

スキームのファイバー積に対応する操作が代数のテンソル積。

$$\mathrm{Spec}(A_1 \otimes_B A_2) \simeq \mathrm{Spec}A_1 \times_{\mathrm{Spec}B} \mathrm{Spec}A_2$$

交点理論

加群の複体のホモトピーとその極限、余極限も同様の問題。

$k \otimes_{k[x]} k \simeq k$ だが $k \otimes_{k[x]} (k[x][-1] \oplus k[x]) \simeq k[-1] \oplus k$ となる。

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & k[x] & \xrightarrow{1 \mapsto x} & k[x] & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & k & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

$Tor^1_{k[x]}(k,k) = k$ であり、$k \otimes^L_{k[x]} k \simeq k[\epsilon_{-1}] = k \oplus k[-1]$ と up to homotopy で定まる。

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Spec} B \otimes_A C & \longrightarrow & \mathrm{Spec} B \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Spec} C & \longrightarrow & \mathrm{Spec} A \end{array}$$

ではなく、直接 $\mathrm{Spec} A \otimes^L_B C$ を幾何的な対象としたい。ただし $A \otimes^L_B C$ は up to homotopy でしか決まらないことに注意。

変形理論

A の微分加群は $\Omega^1_{A/k} = I/I^1, I = \ker(A \otimes_k A \to A)$ であり、X の接空間は $Hom_k(\mathrm{Spec}k[t]/t^2, X)$ であった。ホモトピー極限を用いて、X に対し、

$$\begin{array}{ccc} LX & \longrightarrow & X \\ \big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \Delta} \\ X & \xrightarrow{\Delta} & X \otimes X \end{array}$$

と定義すると $LX = \mathrm{Spec}Sym_{O_X}(L_X[1])$ となる。

この L_X は cotangent complex と呼ばれるもので、X の変形をコントロールする複体。

A が smooth k-algebra なら $L_A \simeq \Omega^1_{A/k}$ であり、$\pi_0(L_A) = \Omega^1_{\pi_0 A}$ となる。

stack

スキーム X は集合に値を持つ層 $Alg_k \to Set$ を定める。例えば A に対し可逆元全体の集合 $A^\times$ を対応させるものは $\mathbb{G}_m = \mathrm{Spec} k[x, x^{-1}]$ で表現される。

このとき層 F の貼り合わせ条件は、S の被覆 $U_\bullet \to S$ に対して次が完全であること。

$$F(S) \longrightarrow F(U) \rightrightarrows F(U \times_S U)$$

例えば G-torsor 全体を分類する空間 BG を考える。つまり関手 $BG(S) = \{$S上のG-torsor 全体$\}$ を考える。同型類を適切に処理するために、Set ではなく Grpd（全ての射が同型である圏のなす圏）に値を持つ層を考える。このようなものを stack という。

stack F の貼り合わせ条件はコサイクル条件を考えて

$$F(S) \longrightarrow F(U) \rightrightarrows F(U \times_S U) \overset{\longrightarrow}{\underset{\longrightarrow}{\longrightarrow}} F(U \times_S U \times_S U)$$

Set は Grpd に離散的なものとして埋め込める。

higher stack

Grpd の nerve をとることで sSet（単体的集合のなす圏）が定まる。単体的集合は、おおよそ点や線分、三角形、四面体などを適切に貼り合わせたものとしてイメージしておく。

これに広げることでより広い moduli 問題を考えることができる。特に up to euivalence で分類したい場合がある。例えば S 上の適切な条件を満たす層の複体を分類したい場合など。

このような問題を考えるために higher stack を sSet に値を持つ層として定める。貼り合わせ条件は高次のコサイクル条件を考えなければいけない。

$$F(S) \longrightarrow F(U) \rightrightarrows F(U \times_S U) \overset{\rightarrow}{\rightrightarrows} F(U \times_S U \times_S U) \overset{\rightrightarrows}{\rightrightarrows} \cdots$$

ループ空間

空間 X に対して S^1 から X への連続写像全体を適切に位相空間と思ったものがループ空間 LX である。

ホモトピー論におけるループ空間 $Map(S^1, X) = Map(B\mathbb{Z}, X)$
$S^1 \simeq B\mathbb{Z} \simeq * \amalg^h_{* \amalg^h *} *$ とできる。

代数幾何においてループ空間を作る。$B\mathbb{Z}$ はスタックとしては定義できるが mapping stack は自明なものになってしまう。

derived mapping stack を考える。つまり $T \mapsto Map(T \times M, X)$ ではなく $T \mapsto Map(T \times^h M, X)$ を考える。

ループ空間は $X \times^h_{X \times X} X$ として定めることができる。

ループ空間と Chern 指標

$LBG = Map(S^1, BG) = G/G$ となる。これは S^1 上の G-torsor を考えると、貼り合わせが e をどこにはり合わせるかで決まること、G-torsor の同型が G 同変であることと torsor の作用を考えると、同型を与えるのが $e \mapsto h$ としたとき、$hg' = gh$ となる。

V/X と $\gamma : S^1 \to X$ に対し、

$$\begin{array}{ccc} \gamma^* V & \longrightarrow & V \\ \downarrow & & \downarrow \\ S^1 & \xrightarrow{\gamma} & X \end{array}$$

のモノドロミーの trace を対応させることで、$Ch(V) \in O(LX)^{S^1}$ が定まる。これが $Ch : K(X) \to O(LX)^{S^1} = H^{ev}_{DR}(X)$ を与える。

特に $X = BG$ とすると、$LX = LBG = [G/G]$ であり、V は G の表現、$O(LX)^{S^1} = \mathbb{C}(G/G)$ は類関数で、Ch は表現の trace である。

この節のまとめ

$$\begin{tikzcd} Alg_k \arrow[r, "\text{scheme}"] \arrow[dr, "\text{stack}"] \arrow[ddr, "\text{higherstack}"'] & Sets \arrow[d] \\ & Grpd \arrow[d] \\ & sSets \end{tikzcd}$$

ループ空間を正しく定義するためには、空間のホモトピー極限が必要である。このもとで

$$LX = Map(S^1, X) = X \times^h_{X \times X} X$$

と定義できるはず。

derived stack

この節の目標

$$\begin{tikzcd}
Alg_k \arrow[r, "\mathrm{Sch}"] \arrow[dd] \arrow[dr, "\mathrm{St}"] \arrow[ddr, "\mathrm{hSt}"'] & Sets \arrow[d] \\
 & Grpd \arrow[d] \\
dAlg_k \arrow[r, "\mathrm{dSt}"'] & sSets
\end{tikzcd}$$

右側を sset にすると moduli problem をより広いものを扱うことができる。例えば導来圏の対象を分類する、導来圏を分類するなど up to equiv で分類したい場合などに必要。

左側を derive すると「正しく」極限をとることができ、「正しい」空間を定義できる。

両側にホモトピーが定まっていて、それについて整合的な関手。

(higher) stack は $Alg_k \to sSet$ で層になるものだった。これを拡張して $dAlg_k \to sSet$ で層になるものとして derived stack を定義する。

$dAlg_k$ は例えば可換 dg k 代数の圏。dg 代数とは $\oplus_i A_i$ で次数 -1 の射 d であって $d^2 = 0$ なるもの。

層を定義するためには位相が必要。

定義
$dAlg_k^{op}$ に derived étale topology を以下で定める。$\{A \to B_i\}_i$ が étale covering とは、$\{\pi_0(A) \to \pi_0(B)\}$ が通常の可換環として étale covering であり、$\pi_n A \otimes_{\pi_0 A} \pi_0 B_i \to \pi_n B_i$ が同型。

これは infinitesimal lifting で特徴付けることもできる。

層は前層であって、貼り合わせ条件を満たすもの。

定義
derived stack とは関手 $F : dAlg_k \to sSet$ であって、weak equivalence を保ち、次の descent 条件を満たす。

任意の etale h-hypercovering $B_\bullet \to A$ に対して
$F(A) \to holimF(B_\bullet)$ が $Ho(sSet)$ における同値

$$F(A) \longrightarrow holim(F(B) \rightrightarrows F(B \otimes^L_A B) \substack{\longrightarrow\\\longrightarrow\\\longrightarrow} \cdots)$$

$\mathbb{R}\mathrm{Spec} : dAlg_k \to dSt_k$ が定まり忠実充満。(derived Yoneda) これは $A \mapsto (B \mapsto Map(A, B))$ で定める。

$$\mathbb{R}\mathrm{Spec} B \times^h_{\mathbb{R}\mathrm{Spec} A} \mathbb{R}\mathrm{Spec} C \simeq \mathbb{R}\mathrm{Spec}(B \otimes^L_A B)$$
$$Map(F, G) : H \mapsto Map(F \times^h H, G)$$

などとして、internal hom や holim が定まる。

一般の derived stack は affine derived stack の colimit でかける。

定義域を制限することで $t_0 : dSt \to St$ が定まり、afiine を貼り合わせることで $i : St \to dSt$ が定まる。$t_0(\mathbb{R}\mathrm{Spec} A) = \mathrm{Spec} \pi_0(A)$ となる。また $it_0 X \to X$ は閉埋め込みで、X と $t_0(X)$ の small etale site は一致する。しかし i は holim や Map を保たず、derived tangent や derived fibered product は真に derived な情報を含む。

derived mapping stack

$Map_{dSt_k}(F,G) : H \mapsto Hom_{dSt_k}(F \times^h H, G)$ と定める。これが dSt_k における internal hom である。

Σ が位相空間や単体的集合の時、internal hom $X^\Sigma = Map(\Sigma, X)$ が derived stack として定まる。ここで Σ は constant stack。

このとき $i : St_k \to dSt_k$ は Map と交換しない、つまり $iMap(F,G) \simeq \mathbb{R}Map(iF, iG)$ となるとは限らない。

一方で $t_0 : dSt_k \to St_k$ とは交換する。つまり $t_0\mathbb{R}Map(F,G) \simeq Map(t_0F, T_0G)$ となる。特に F, G が $St(k)$ から来るとき、$t_0\mathbb{R}Map(iF, iG) \simeq Map(F,G)$ である。（$t_0 iF \simeq F$ であることに注意）つまり derived mapping stack は mapping stack を太らせたもの。

mapping space がずれる例として、次の loop stack の例を見る。

derived loop stack

$LX = X^{S^1} = Map(S^1, X)$ は internal hom で定める。
$LX \simeq X \times^h_{X \times X} X$ である。

X が位相空間から定まる constant stack の場合、LX は通常の loop space から定まる constant stack

stack としての $Map(B\mathbb{Z}, X)$ は X そのものになるが、derived stack としての $Map(B\mathbb{Z}, X) = X \times^h_{X \times^h X} X$ となる。
$* \times_{\mathbb{A}^1} * \simeq k[\epsilon_{-1}]$ の計算

$X = BG$ のとき $LX = LBG = G/G$

X が smooth scheme over char 0 field の時は $T_X[-1]$

scheme の cotangent complex, Ω^1 との関係、変形理論

derived ring $D_i = \mathbb{R}\mathrm{Spec} k[\epsilon] = \mathbb{R}\mathrm{Spec}(k \oplus k[i])$ とする。degree 0 と-i にある。

このとき $Ext_k^i(L_{X,x}, k) \simeq \mathbb{R}Hom_*(D_i, (X, x))$ となる。Ext^i は derived stack においては表現可能。

derived tangent stack を $TX = Map(\mathrm{Spec} k[\epsilon], X)$ とする。

Y が scheme なら $TiY \simeq \mathbb{R}\mathrm{Spec}_Y(Sym_{O_Y} L_Y)$ となる。

$Vect_n(X)$ は非自明な derived extension を持つ。$\mathbb{R}Vect_n(X)$ とする。

この節のまとめ

derived affine stack $\mathbb{R}\mathrm{Spec}A$ とその貼り合わせで derived stack X が得られる。これは関手 $X : dAlg_k \to sSet$ であって、ホモトピーを保ち、貼り合わせ条件を満たすもの。

この枠組みにおいて、

1. ループ空間 LX
2. cotangent complex L_X
3. 交点積 $X \times^h_X$

が正しく定義できる。

$\mathrm{QC}(X)$ と積分変換

この節の目標

まず derived stack X 上の層の圏 $QC(X)$ を定義する。またある種の有限性条件を満たすものとして perfect stack X を定義する。

この下で積分変換の圏が準連接層の圏と同値になることをみる。
$X \to Y, X' \to Y$ に対して

$$\begin{aligned} \mathrm{QC}(X \times_Y X') &\simeq Fun_Y(\mathrm{QC}(X), \mathrm{QC}(X')) \\ K &\mapsto (F \mapsto (f_*(g^*F \otimes K))) \end{aligned}$$

積分変換は $X \times Y$ 上の核関数 $K(x, y)$ を用いて Y 上の関数 $f(y)$ から x 上の関数を定める。

$$K(x, y) \mapsto (f(y) \mapsto (x \mapsto \int_Y f(y)k(x, y)dy))$$

$\mathrm{QC}(X)$ の定義

一般にアーベル圏 A からその複体のなす dg 圏 $Ch(A)$ を作り、さらにそこから ∞ 圏 $N_{dg}(Ch(A))$ を定めることができる。これを Mod_A とする。$X = \mathrm{Spec}A$ が affine derived scheme の時、$\mathrm{QC}(X) = Mod_A$ とする。

一般の derived stack については、X を affine derived stack の colimit で書き、同じ図式で QC の limit を ∞-cat of ∞-cats でとる。

X が qc で affine diagonal $\Delta : X \to X \times X$ を持てば、cosimplical diagram の totalization でかける。

定義

1. A を derived commutative ring とする。A 加群 M が perfect とは、Mod_A の smallest ∞ category で finite colimit と retract でとじたものに属すること。
2. derived stack X に対し、$Perf(X)$ は $\mathrm{QC}(X)$ の full ∞-subcategory であって、任意の affine $f : U \to X$ への制限 f^*M が perfect module であるものからなるもの。
3. derived stack X が prefect stack とは $\mathrm{QC}(X) \cong IndPerf(X)$ であること。
4. $f : X \to Y$ が perfect とは、任意の affine $U \to Y$ について、$X \times_Y U$ が perfect なこと。

compact と dualizable と perfect の関係。stable ∞-category C の対象 M について

1. compact とは $Hom_C(M, -)$ が coproduct と交換すること。
2. dualizabule とはある $M^\vee$ と $u : 1 \to M \otimes M^\vee, \tau : M \otimes M^\vee \to 1$ が存在して、$M \to M \otimes M^\vee \otimes M \to M$ が id_M となるもの。

$Vect/k$ における有限次元ベクトル空間。$V^\vee = \mathrm{Hom}(V, k)$ とする。$1 \to V \otimes V^\vee$ を対角行列、$V \otimes V^\vee \to 1$ を trace とすると、上の条件を満たす。

特に X が affine diagonal を持ち perfect なとき、$\mathrm{QC}(X)$ において dualizable と compact と perfect は同値。

base change と projection formula

命題 (BFN, proposition 3.10)
$f : X \to Y$ を perfect とする。この時

1. $f_* : \mathrm{QC}(X) \to \mathrm{QC}(Y)$ は small colimit と交換し、projection formula を満たす
2. 任意の derived stack の射 $g : Y' \to Y$ に対し、base chage map $g^* f_* \to f'_* g'^*$ は同値

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{g'} & X \\ {\scriptstyle f'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ Y' & \xrightarrow{g} & Y \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \mathrm{QC}(X') & \xleftarrow{g'^*} & \mathrm{QC}(X) \\ {\scriptstyle f'_*}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f_*} \\ \mathrm{QC}(Y') & \xleftarrow{g^*} & \mathrm{QC}(Y) \end{array}$$

命題 (BFN, Proposition 4.6)
X_1, X_2 perfect, $\boxtimes : \mathrm{QC}(X_1)^c \otimes \mathrm{QC}(X_2)^c \cong \mathrm{QC}(X_1 \times X_2)^c$

1. $\otimes$ と pullback は dualizable を保ち、$X = X_1 \times X_2$ が perfect なことから、外部積が compact を保つ
2. $\mathrm{QC}(X_1 \times X_2)^c$ が外部積で生成
3. projection formula

により証明。さらに

1. $Ind : st \to Pr^L$ が summetric monoidal
2. $Ind\mathrm{QC}(X)^c \simeq \mathrm{QC}(X)$

から、$\boxtimes : \mathrm{QC}(X_1) \otimes \mathrm{QC}(X_2) \simeq \mathrm{QC}(X_1 \times X_2)$ が成立。

定理 (BFN の Theorem 4.7)
X_1, X_2, Y が perfect の時、
$\mathrm{QC}(X_1 \times_Y X_2) = \mathrm{QC}(X_1) \otimes_{\mathrm{QC}(Y)} \mathrm{QC}(X_2)$

Y が一般の時の証明の方針（どこに Y が perfect を使う？）
$X_1 \times_Y X_2 \to X_1 \times Y^\bullet \times X_2$ から
$\mathrm{QC}(X_1 \times_Y X_2) \leftarrow \mathrm{QC}(X_1 \times Y^\bullet X_2)$ を作る。すでに証明したことから $\mathrm{QC}(X_1) \otimes \mathrm{QC}(Y)^\bullet \otimes \mathrm{QC}(X_2)$ となり、これの geometric realization で $\mathrm{QC}(X_1) \otimes_{\mathrm{QC}(Y)} \mathrm{QC}(X_2)$ が計算できる。

1. $\mathrm{QC}(X_1 \times_Y X_2) = Mod_{T_{geom}}(\mathrm{QC}(X_1 \times X_2))$ by Barr-Beck
2. $\mathrm{QC}(X_1) \otimes_{\mathrm{QC}(Y)} \mathrm{QC}(X_2) = Mod_{T_{alg}}(\mathrm{QC}(X_1 \times X_2))$ by Barr-Beck
3. $T_{alg} = T_{geom}$ by base change

系 (BFN, Corollary 4.8)
$\pi : X \to Y$ map of perfect stacks とする。$\mathrm{QC}(X)$ は self dual $\mathrm{QC}(Y)$-mod である。つまり
$\mathit{Fun}_{QC(Y)}(QC(X), QC(X')) \simeq QC(X) \otimes_{QC(Y)} QC(X')$ となる。

定理 (BFN の Theorem 4.14)
X, Y dst with affine diagonal、$f : X \to Y$ を perfect、$g : X' \to Y$ は任意。この時 $\mathrm{QC}(X \times_Y X') \simeq Fun_Y(\mathrm{QC}(X), \mathrm{QC}(X'))$ は同値。

1. 関手の構成 $M \mapsto \tilde{f}_*(M \otimes \tilde{g}^* -)$ とする。$\tilde{f}$ が perfect なので colimit を保ち QC に移る。また projection formula により $\mathrm{QC}(Y)$ 線形になる。
2. X' について local なので（$\times, \lim, \mathrm{colim}, \mathrm{QC}$ の交換関係）、affine に帰着する。
   $\mathrm{QC}(X \times_Y \mathrm{Spec}A) \simeq Fun_Y(\mathrm{QC}(X), Mod_A)$ を示す。
3. $Y = \mathrm{Spec}B$ の時。前の系 4.8 から $\mathrm{QC}(X)$ は Mod_B 上 self dual で、前の命題 4.13 から QC と $\otimes$ の交換がわかるので $Fun_B(\mathrm{QC}(X), Mod_A) \simeq Fun_B(Mod_B, \mathrm{QC}(X)^\vee \otimes_B Mod_A) \simeq \mathrm{QC}(X) \otimes_B Mod_A$ $\mathrm{QC}(X \times_B \mathrm{Spec}A) \simeq \mathrm{QC}(X) \otimes_B Mod_A$ と計算できる。
4. Y が一般の時。

この節のまとめ

1. derived affine scheme $X = \mathbb{R}\mathrm{Spec} A$ に対し $\mathrm{QC}(X) = \mathit{Mod}_A$ を ∞ 圏として定義した。
2. 一般の derived scheme X に対し $\mathrm{QC}(X)$ を $X = \mathit{colim}_i \mathbb{R}\mathrm{Spec} A_i$ のとき Mod_{A_i} の貼り合わせで定義した。これは加群である。（stable symmetric monoidal category）
3. perfect というクラスを定義した。有限性の条件
4. 積分変換のなす圏がファイバー積の QC と同値であることを示した。X が Y 上 perfect なとき

$$\mathrm{QC}(X \times_Y X') \simeq \mathit{Fun}_Y(\mathrm{QC}(X), \mathrm{QC}(X'))$$
$$K \mapsto (F \mapsto (f_*(g^* F \otimes K)))$$

表現論と TFT への応用

応用

1. Hecke category
2. 位相的場の理論

G は簡約群。H_G^{aff} を $St_G = \tilde{G} \times_G \tilde{G}$ 上の G 同変準連接層のなす ∞-category とする。ここで $\tilde{G} \to G$ は Grothendieck-Springer resolution で $\tilde{G} = \{(g, B), g \in B, B$ は Borel$\}$ とする。

$St_G = \tilde{G} \times_G \tilde{G}$ とする。$Z(\mathrm{QC}(X \times_Y X)) \simeq \mathrm{QC}(LY)$ を $X = \tilde{G}/G \to Y = G/G = LBG$ に適用することで $Z(H_G^{\mathit{aff}}) = Z(\mathrm{QC}(St_G)) \simeq Z(\mathrm{QC}(X \times_Y X)) \simeq \mathrm{QC}(LY) \simeq \mathrm{QC}(LLBG) \simeq \mathrm{QC}(Loc_G(T^2))$ となる。

finite Hecke algebra

$X \to Y$ に対して $D(X \times_Y X)$ を考える。特に $BB \to BG$ に対して $X \times_Y X = B\backslash G/B$ となる。

Hecke category は Hecke algebra の categorification

また Loop space としての解釈から $D(B\backslash G/B) \simeq Coh_{[(B\times B)/G]}(St^u/G)^{S^1} loc$ として affine Hecke catgoory と finite Hecke category を結びつけることができる。

coherent D-module の圏 $D(B\backslash G/B)$ の Drinfeld center と G 上の指標層の圏の同一視。さらに指標層の Langlands 双対がある。

TFT

extended TFT とは $(\infty, 2)$-cat の間の symmetric monoidal functor $Z : 2Cob \to 2Alg$ のこと。$2Cob$ は点を 0 対象、点の間の 1 次元 bordism が 1 対象、1 次元 bordism の間の 2 次元 bordism が 2 対象。$2Alg$ は代数が 0 対象、bimodule が 1 対象、その間の射が 2 対象。

命題
perfect stack X に対し extended 2d TFT $\exists Z_X$ が $Z_X(S^1) = \mathrm{QC}(LX), Z_X(\Sigma) = \Gamma(X^\Sigma, O_{X^\Sigma})$ として定まる。

$$Z_X((S^1)^{\amalg m}) = QC((LX)^{\times m}) \simeq QC(LX)^{\otimes m} = Z_X(S^1)^{\otimes m}$$

となり、symmetric monoidal になる。

特に $X = BG$ の場合が数理物理的にも興味を持たれる。

参考文献

- D. Ben-Zvi, J. Francis and D. Nadler, Integral transforms and Drinfeld centers in derived algebraic geometry.
- D. Ben-Zvi and D. Nadler, Loop Spaces and Connections.
- D. Ben-Zvi and D. Nadler, The character theory of a complex group.
- D. Ben-Zvi and D. Nadler, Loop Spaces and Langlands Parameters.
- D. Ben-Zvi and D. Nadler, Loop Spaces and Representations.
- B. Toën, Higher and Derived Stacks: a global overview.
- B. Toën and G. Vezzosi, A note on Chern character, loop spaces and derived algebraic geometry.
- D. Gaitsgory and N. Rozenblyum, A study in derived algebraic geometry
- J. Lurier, Higher Algebra.