Selberg trace formula

@unaoya

2018 年 3 月 22 日

$G = \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ とし $\Gamma = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ とする。$K = SO(2) \subset G$ とし Δ を $G/K = \mathfrak{h}$ の Laplacian とする。

$$\sum_{\gamma \in \mathrm{Prim}(\Gamma)} M(\gamma) = \sum_{\lambda \in \mathrm{Spec}(\Delta)} W(\sqrt{\frac{1}{4} - \lambda})$$

M と W は適当な関数で Fourier 変換で結びつく。

f を G 上の適当な関数とし、G の右正則表現 $(R, L^2(\Gamma\backslash G))$ への f の作用 $R(f) : L^2(\Gamma\backslash G) \to L^2(\Gamma\backslash G)$ を

$$\phi \mapsto (x \mapsto \int_G f(g)\phi(xg)dg)$$

と定める。つまり

$$R(f)\phi = \int_G f(g)R(g)\phi dg$$

と定義する。これは G-hom である。

この作用を積分作用素の形で記述する。

$$\begin{aligned}(R(f)\phi)(x) &= \int_G f(g)\phi(xg)dg = \int_G f(x^{-1}g)\phi(g)dg \\ &= \int_{\Gamma\backslash G} \sum_{\gamma \in \Gamma} f(x^{-1}\gamma g)\phi(g)dg\end{aligned}$$

となる。つまり

$$K_f(x, y) = \sum_{\gamma \in \Gamma} f(x^{-1}\gamma y)$$

を核関数とする積分作用素である。この時、関数解析の一般論から

$$\mathrm{tr}(R(f)) = \int_{\Gamma\backslash G} K_f(x, x)dx$$

となる。

Hecke 作用？ trace のふた通りの表現。指標群としての理解と共役類上の関数としての理解。有限群の場合における類関数と指標の関係の類似？

上の話を次のように解釈する。$H^o \subset H$ を convlution により積を定めた smooth コンパクト台関数の環の両側 K 不変な関数のなす部分環とする。これは可換環になる（一般には佐武同型？）V を G の表現とし、H の V への作用を

$$\pi(\phi)v = \int_G \phi(g)\pi(g)vdg$$

と定義する。($\mathbb{R}$ 上の Fourier 変換と比較せよ)

$$K_\phi(x,y) = \sum_{\gamma\in\Gamma} \phi(x^{-1}\gamma y)$$

と定義する。

命題 1.

$$(\rho(\phi)f)(x) = \int_{\Gamma\backslash G} K_\phi(x,g)f(g)dg$$

特に $\rho(\phi)$ は $L^2(\Gamma\backslash G)$ のコンパクト作用素。特に $\{\phi_i\}$ は $\rho(\phi)$ の固有関数からなる正規直交基底で $\rho(\phi)\phi_i = \mu_i\phi_i$ として $\mu_i \to 0$ を満たす。

定理 1. ϕ を適切な test 関数として

$$\operatorname{tr}\rho(\phi) = \sum_{\gamma\in\Gamma}\int_{Z(\gamma)\backslash G} \phi(g^{-1}\gamma g)dg$$

となる。ここで $Z(\gamma) = \{g \in G | g\gamma = \gamma g\}$

f_i を $L^2(\Gamma\backslash\mathfrak{h})$ の $\rho(\phi)$ と Δ の固有関数からなる直交基底とし、

$$K_\phi(z,w) = \sum \mu_i f_i(z)\overline{f_i(w)}$$

と Fourier 展開する。ここで μ_i は $\rho(\phi)$ の固有値。これを積分することで以下を得る。

定理 2. ϕ が適切な test 関数とすると、$\rho(\phi)$ は trace class で

$$\operatorname{tr}\rho(\phi) = \int_{\Gamma\backslash\mathfrak{h}} K_\phi(z,z)\frac{dx\wedge dy}{y^2}$$

$\rho(\phi)$ は trace class である。

Laplacian の resolvent を積分核が Green 関数である積分作用素で書く。このとき Laplacian の resolvent の trace は関数解析の一般論から記述ある。

$$\operatorname{tr} R(\Delta,\lambda)$$

これを Δ の固有値の逆数の和でかけるか?

Green 関数 G_ρ を用いて

$$k_h(z,w) = \frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} G_\rho(z,w)\rho h(\rho)d\rho$$

と定義し、

$$L(h)f(z) = \int_{\mathfrak{h}} k_h(z,w)f(w)d\mu(w)$$

と定義する。

Green 関数について補足。微分作用素 D について $Df = g$ という微分方程式を考える。$DG_x = \delta_x$ となる関数 G_x が存在するとすると、$g(x) = \int \delta_x(y)g(y)dy$ となるので、$D\int G_x g(y)dy = \int DG_x g(y) = \int \delta_x g(y)dy = g(x)$ となり、$\int G_x g(y)dy = f$ が解となる。このような G_x は $DG_x = \delta_x$ の両辺を Fourier 変換することで求める。熱方程式や Poisson 方程式の解法を見よ。

命題 2. f を適当な条件を満たす test 関数で $-\lambda = -(\rho^2 + \dfrac{1}{4})$ を固有値に持つ Δ の固有関数とする。この時

$$L(h)f = h(\rho)f$$

resolvent の trace と zeta 関数の関係。Riemann zeta や Weil 予想の場合にどのようになっているか？

1 Poisson 和公式

Poisson 和公式は $G = \mathbb{R}, \Gamma = \mathbb{Z}$ の場合と考えられる。あるいは空間が S^1 で Laplacian が $\frac{d^2}{dx^2}$ の場合。

$\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ も群。これの既約表現は 1 次元表現で χ_n とかける。

$$\pi(f)\chi_n = \int_{\mathbb{R}} f(x)\chi_n(x)dx = \hat{f}(n)$$

である。よって $\pi(f)$ の L^2 への作用の trace は $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n)$ である。これを軌道積分側（積分作用素で書く？）を書くと？

2 Selberg trace formula

これに対して $G = \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ とその離散部分群、上半平面 $\mathfrak{h}$ とその Laplacian を考える。

$k(z,w)$ を核関数に持つ積分作用素。Green 関数を使う。これと Laplacian の resolvent との関係。$k(z,w)$ の Laplacian の固有関数による Fourier 展開を考える。

定理 3. g が適当な条件を満たす test 関数。h をその Fourier 変換、$\frac{1}{4} + t_i^2$ が Δ の $\Gamma\backslash\mathfrak{h}$ の固有値、$\log(N)$ が Γ の closed geodesic の長さとする。

$$\sum_i h(t_i) = \frac{\mathrm{vol}(\Gamma\backslash\mathfrak{h})}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty} th(t)\tan h(\pi t)dt + \sum_N \frac{\log(N_0)}{N^{1/2} - N^{-1/2}} g(\log(N))$$

この右辺の第二項も双曲線関数でかける、zeta の log 微分、軌道積分でもかける。左辺は表現の trace としてかける。

$$\sum_{n=0}^{\infty} m(\pi_{r_n})h(r_n) = \frac{\mathrm{vol}(\Gamma\backslash\mathfrak{h})}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty} rh(r)\tanh(\pi_r)dr + \sum_{\gamma\in\Gamma_{hyp}} \frac{\log(N(\gamma_0)}{N(\gamma)^{1/2} - N(\gamma)^{-1/2}} g(\log N(\gamma))$$

ここで $g(u)$ は $h(r)$ の Fourier 変換。

ここで特に

$$h(r) = \frac{1}{r^2 + (s-\frac{1}{2})^2} - \frac{1}{r^2 + \beta^2}$$

とすると（この関数はどこからきたのか？双曲線関数との関係？）双曲元の寄与は

$$H(s) = \frac{d}{ds}\log(Z(s))$$

となる。（これと Weil 予想との関係は？ Weil 予想の合同ゼータの計算とか、有理点の個数の誤差項と主要項の関係とか）

$\gamma \in \Gamma_{hyp}$ にたいし Γ における γ の中心化群 Γ_γ は巡回群であり、その生成元を γ_0 とした。

Weil 予想の時と似たような計算？

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{x} \frac{\log x}{1 - x^{-k}} x^{-ks}$$

として

$$\frac{d}{ds} \log(Z(s)) = \frac{Z'}{Z}$$

と上の式の関係は？ $\log N$ が測地線の長さ。

双曲元の寄与の計算

$$\begin{aligned} &\frac{\log(N(\gamma_0)}{N(\gamma)^{1/2} - N(\gamma)^{-1/2}} e^{-(s-\frac{1}{2}) \log N(\gamma)} \\ &= \frac{\log(N(\gamma_0))}{1 - N(\gamma)^{-1}} N(\gamma)^{-s} \end{aligned}$$

と（Weyl の？）指標公式の関係は？

$N(\gamma) = e^{\phi(\gamma)}$ とすると、上の式は

$$\frac{\phi(\gamma)}{e^{\phi(\gamma)/2} - e^{-\phi(\gamma)/2}} e^{-\phi(\gamma)(s-\frac{1}{2}}$$

となる。

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \operatorname{tr}(\pi_{ir}(f)) N(\gamma)^{-ir} dr = e^{-(s-\frac{1}{2}) \log(N(\gamma))}$$

となるよう $\operatorname{tr}(\pi_{ir}(f))$ を決める。この積分は Fourier 変換。

定理 4. G を半単純 Lie 群、$\Gamma \subset G$ をココンパクト離散部分群とする。$f \in C_c^\infty(G)$ にたいし

$$\sum_{\pi \in \hat{G}} m_\Gamma(\pi) \operatorname{tr}(\pi(f)) = \sum_{\gamma \in \mathrm{Conj}(\Gamma)} \mathrm{vol}(\Gamma_\gamma \backslash G_\gamma) I(\gamma, f)$$

の両辺が収束し、等号が成立する。

この公式を G が有限群の場合、$G = \mathbb{R}, \Gamma = \mathbb{Z}$ の場合に考えてみる。

これを $G = \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ で Γ が楕円元を含まず f が両側 K 不変な場合に計算していく。

G の既約ユニタリ表現 π が class one もしくは spherical とは $K = SO(2)$ への制限が自明表現を持つこと。

命題 3. π が class one とする。このとき $f \in C_c^\infty(K \backslash G / K)$ に対し $\pi(f) = 0$ となる。

Selberg trace formula の証明。

trace のふた通りの表示。$R(f)$ の $L^2(\Gamma \backslash G)$ への作用を考える。左辺は表現の既約分解を用いた計算。

テスト関数 $f \in C_c^\infty(G)$ の作用。(π, H_π) を G の（既約ユニタリ？）表現とする。$\pi(f) : H_\pi \to H_\pi$ を

$$v \mapsto \int_G f(g) \pi(g) v dg$$

で定める。

Fourier 変換との関係。$G = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ の一次元表現 $\chi(x) = \exp(2\pi x)$ を π とすると、

$$\int_0^1 f(x)\exp(2\pi x)dx$$

となる。

（これを $G = \mathbb{R}, \Gamma = \mathbb{Z}$ として解釈できる？）

有限群の場合にも同様。

これを軌道積分の計算を用いて計算する。$G = \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ の軌道積分の計算。

$$I(\gamma, f) = \int_{G_\gamma \backslash G} f(x^{-1}\gamma x)dx$$

を軌道積分という。ここで $\gamma, G_\gamma, f \in C_c^\infty(K\backslash G/K), dx$ とする。

$G = NAK$ と分解して、特に $\gamma = a_t \in A$ を考える。これに対し、簡単な行列の計算から $G_\gamma = A$ とわかる。

3 Selberg zeta

Selberg zeta の定義と諸性質

定義 1. $s \in \mathbb{C}, Re(s) > 1$ に対し

$$Z_\Gamma(s) = \prod_{p \in \mathrm{Prim}(\Gamma)} \prod_{k=0}^{\infty} (1 - N(p)^{-(k+s)})$$

解析接続、零点と極、函数等式

これらを Selberg trace formula を用いて証明する。

4 応用

定理 5 (素測地線定理)**.** $\Gamma \subset \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ を $\mathrm{vol}(\Gamma\backslash\mathfrak{h}) < 0$ なる離散部分群とし、$\pi_\Gamma(x) = \sharp\{p \in \mathrm{Prim}(\Gamma) \mid N(p) \leq x\}$ と定める。これに対し

$$\pi_\Gamma(x) = \mathrm{li}(x) + \sum_{\frac{3}{4} < t_k < 1} \mathrm{li}(x^{t_k}) + O(x^{\frac{3}{4}}(\log x)^{-\frac{1}{2}}) \ (x \to \infty)$$

が成り立つ。ここで

$$li(x) = \int_2^x \frac{dt}{\log t}$$

であり、$\lambda_k = t_k(1 - t_k)$ は Laplacian Δ の $L^2(\Gamma\backslash\mathfrak{h})$ の例外固有値

定理 6 (数論的表示)**.** $\Gamma = \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ に対する Selberg ゼータ $Z_\Gamma(s)$ は

$$Z_\Gamma(s) = \prod_{d \in D} \prod_{k=0}^{\infty} (1 - \epsilon_d^{-2(s+k)})^{h(d)}$$

この二つを合わせて、実二次体の類数の分布の公式が得られる。

5　SL$(2,\mathbb{R})$ の表現論

G の上半平面への作用。i の固定部分群が $K=\mathrm{SO}(2)$ が極大コンパクト。

$G=NAK$ と直積分解できる。ここで

$$N=\{\begin{pmatrix}1 & x\\ 0 & 1\end{pmatrix}\}, A=\{\begin{pmatrix}\sqrt{y} & 0\\ 0 & \sqrt{y}^{-1}\end{pmatrix}\}$$

G 上の両側不変測度として

$$\frac{dxdy}{y^2}\frac{d\theta}{2}=d\mu$$

を取れる。

K の既約表現は、整数 n に対して

$$\chi_n(k(\theta))=e^{in\theta}$$

主系列表現。$G=NAK$ とし、$M=Z_A(K)=\{\pm E_2\}$ とする。NAM の表現を N については自明、A,M の指標 χ_s,χ_ϵ の積であるものを考え、これの誘導表現を $\pi_{\epsilon,s}$ とする。これは $G/NA\cong K$ 上の関数空間としての実現を持つ。これについて調べていく。

G の表現 π について、その K への制限の直和分解 $\oplus\chi_n^{m_n}$ を π の K-spectrum などという。また $\mathfrak{g}$ を G の Lie 代数とし、$\mathfrak{Z}\subset U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ を普遍包絡代数の中心とする。π には $\mathfrak{g}$ の作用が $\frac{d}{df}\exp(tX)v|_{t=0}$ として定まる。$G=\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ の場合、$\mathfrak{Z}$ は Casimir 元 C で生成される。これの作用の様子を調べる。

この二つが表現を調べるための手がかりとなる。

Plancherel の公式。既約表現の分布の様子。Fourier 変換の Plancherel の公式との関係は？

6　Selberg zeta

ラプラシアンの固有値の和が対数微分？測地線の長さとの関係、オイラー積表示

上半平面の等長変換として SL$(2,\mathbb{R})$ が作用する。$\gamma\in\Gamma$ で $z\in\mathfrak{h}$ をうつしたものたちの中で、双曲計量から定まる距離が正の最小となるもの。つまり z と γz を結んでできる最短測地線の長さ。商がコンパクトを仮定すると存在？この長さを l_γ と書くことにする。

素測地線とは。他の元のベキで書けないもの。双曲元 $\gamma\in\Gamma_{hyp}\subset\Gamma$ にたいしその中心化群 Γ_γ は巡回群になるので、その生成元。

素元 γ に対し

$$Z_\gamma(s)=\prod_{m=0}^{\infty}(1-\exp(l_\gamma(s+m))$$

と定める。これの対数微分

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}\log(Z_\gamma(s))&=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{d}{ds}\log(1-\exp(l_\gamma(s+m)))\\&=-l_\gamma\end{aligned}$$

これの表現論的意味とは？

$$\frac{1}{e^{t/2} - e^{-t/2}}$$

双曲線関数？円盤の双曲計量の極座標表示に双曲線関数が出てくる。

Poisson 和公式と Riemann zeta の関係。解析接続、関数等式、特殊値とか？

7 まとめ

関数解析、微分幾何的側面

表現論、数論

定理 7. $X = \Gamma \backslash G$ とする。$L^2(X)$ は Δ の固有関数からなる基底を持つ。$L^2(\Gamma \backslash G)$ は G の既約許容表現の直和に分解する。

$L^2(\Gamma \backslash G)$ には K-fixed vector を持たない既約表現が存在する。これは正則保型形式を用いて構成できる。正則離散系列表現。

定義 2 (admissible representation)**.** (π, V) を G の表現とし $V(\rho) \subset V$ を K が ρ で作用する部分とする。admissible とは任意の ρ で $V(\rho)$ が有限次元なこと。

$G = \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ の時には既約 admissible なら任意の ρ について $V(\rho)$ はたかだか 1 次元

$G = \mathrm{SL}(2, \mathbb{R}), K = SO(2)$ とすると $\mathfrak{h} = G/K$ である。双曲計量（群から決まる？等長変換と G の関係）を適当に決めると Laplacian が

$$\Delta = -y^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)$$

$\Gamma \subset G$ を離散ココンパクトとし（どんな例がある？四元数とか？）$X = \Gamma \backslash \mathfrak{h}$ はコンパクトリーマン面。Δ は $C^\infty(\Gamma \backslash \mathfrak{h})$ に作用し、$L^2(\Gamma \backslash \mathfrak{h}, \frac{1}{y^2} dxdy)$ の作用に伸びる。これは自己共役作用素なのでスペクトル分解定理が使える。

G の $C^\infty(G)$ への作用から $\mathfrak{g}$ の $C^\infty(G)$ への作用が

$$Xf(g) = \frac{d}{dt} f(ge^{tX})|_{t=0}$$

により定まる。

$U(\mathfrak{g})$ の center の生成元を

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, L = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, R = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, -4\Delta = H^2 - 2RL + 2LR$$

により定める。これと Laplacian との関係は？

$\mathfrak{g}$ の作用を書いてみる。$\exp(tH) = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^t \end{pmatrix}$ であり、

$$Hf(x) = \frac{d}{dt} \left(f\left(\begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^t \end{pmatrix} x\right)\right)\Big|_{t=0}$$

$\exp(tR) = \begin{pmatrix} 1 & e^t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ である。これらが上半平面を $x+iy$ とかき、一次分数変換の作用により、$\frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial x}$ に対応する。

$\mathrm{SL}(2,\mathbb{R}) = NAK$ と分解する。

$$N = \{\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\}$$
$$A = \{\begin{pmatrix} \sqrt{y} & 0 \\ 0 & \sqrt{y} \end{pmatrix}\}$$
$$K = \{\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\}$$

A の i への作用は $i \mapsto yi$ であり N の作用は $i \mapsto xi$ である。

$G = \mathbb{R}$ のとき。$\mathfrak{g} = \mathbb{R}$ であり、$X \in \mathfrak{g}$ の作用は $f \mapsto f''$ である。これの固有関数は $e^{\pm i\lambda x}$ である。$\mathfrak{g}$ の作用から Δ の作用が定まり、これの固有関数で L^2 を展開する。

8 Green 関数について

Green 関数とは。レゾルベントに対応する積分作用素。δ 関数との関係。Fourier 変換すると？レゾルベントの Fourier 変換は？ Laplace 変換は前に出てきたきがする。

$G(z,w;\lambda)$ を Laplacian の resolvent の積分核、つまり

$$(\Delta+\lambda)^{-1}f(z) = \int G(z,w;\lambda)f(w)d\mu(w)$$

なるものとする。これは次のような性質を持つ。

$$(\Delta+\lambda)G(z,w;\lambda) = \delta(z,w)$$

$G(z,w;\lambda)$ は z,w についてはそれらの距離 $d(z,w)$ のみによって決まる。$d(z,w) \to \infty$ で $G(z,w;\lambda) \to 0$ である。

形式的に計算すると

$$f(z) = \int \delta(z,w)f(w)dw = \int (\Delta+\lambda)Gf(w)dw)$$

となる。

$\mathbb{R}$ 上の場合、黒田本 pp163, 221, 244 の Green 作用素 $G_\zeta = R(L,\zeta)$ を見よ。

これを用いて

$$k(z,w) = \frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} G_\rho(z,w)\rho h(\rho)d\rho$$

と定義し、

$$Lf(z) = \int_{\mathfrak{h}} k(z,w)f(w)d\mu(w)$$

と定義する。

これを用いて

$$K(z,w)=\sum_{\gamma\in\Gamma}k(z,\gamma w)$$

とする？こうすれば Γ 不変になるので $\Gamma\setminus\mathfrak{h}$ 上の関数になる。

命題 4. f を適当な条件を満たす test 関数で $-\lambda=-(\rho^2+\frac{1}{4})$ を固有値に持つ Δ の固有関数とする。この時

$$Lf=h(\rho)f$$

微分方程式

$$W''(r)+\frac{1}{r}W'(r)+\frac{4\lambda}{(1-r^2)^2}W(r)=0$$

を考える。これは $r=0,1$ で特異点を持つ。これの回のうちで $r=0$ に特異点を持つものを g_λ とする。disc 上の関数で極座標 (r,θ) にたいし $g_\lambda(r)$ により定める。また

$$g_\lambda(z,w)=g_\lambda(|\frac{z-w}{z-\overline{w}}|)$$

で $\mathfrak{h}\times\mathfrak{h}$ 上の関数を定義する。さらに

$$G_\lambda(z,w)=\sum_{\gamma}g_\lambda(z,\gamma(w))$$

で定義する。

表現論的な意味は？左 K-inv で Δ の固有関数であるようなもの？

9 話の流れ

Δ の固有値の和を考える。Δ は $U(\mathfrak{g})$ の中心の生成元ということで一般化できる。$\mathfrak{g}$ は $L^2(G)$ に作用。

双曲計量と群作用の関係。等長変換として作用する。S^1,S^2 の場合は？ G,K は何になるか。固有関数は三角関数や球面調和関数になるはず。

10 有限群

G が有限群の場合。$(R_G,\mathbb{C}^G)$ を考える。

$$R_G(f)v=\sum_{g\in G}f(g)R_G(g)v$$

$v:G\to\mathbb{C}$ なので

$$(R_G(f)v)(h)=\sum_{g\in G}f(g)v(hg^{-1})$$

となる。

G が巡回群の場合。積分作用素側は？

$G=S_n,D_n,G(\mathbb{F}_q)$ などの場合にどのようになるか。test 関数 f の取り方、Γ の設定とか、誘導関数での解釈とか、G の G への共役作用による解釈とか

11　L 関数と等分布

$$\prod_{v\in\Sigma}\frac{1}{1-(Nv)^{-s}}$$

が $Res>1$ で収束し、$Res\geq 1$ で有理型、$s=1$ で 1 位の極を持ち、それ以外には極も零点も持たないとする。ρ を G の既約表現とし、χ を指標とする。

$$L(s,\rho)=\prod_{v\in\Sigma}\frac{1}{\det(1-\rho(x_v)(Nv)^{-s})}$$

が $Res>1$ で収束し、$Res\geq 1$ で有理型、$s=1$ で $-c_\chi$ 位の極を持ち、それ以外には極も零点も持たないとする。

定理 8. $\sharp\{v\in\Sigma,Nv\leq n\}$ と $\dfrac{n}{\log n}$ は $n\to\infty$ で同じ。

χ を G の既約指標とすると

$$\sum_{Nv\leq n}\chi(x_v)=\frac{c_\chi n}{\log n}+o(\frac{n}{\log n}),n\to\infty$$

さらに仮定として、ある C が存在して、任意の $n\in\mathbb{Z}$ に対し $\sharp\{v\in\Sigma,Nv=n\}\leq C$ とする。このとき Σ の順序によらない。

E/K を楕円曲線とし、F_v の $T_\ell E$ への作用の固有値を $\pi_v,\bar{\pi}_v$ とする。このとき $|\pi_v|=\sqrt{Nv}$ となる。$0\leq\phi_v\leq\pi$ を用いて、

$$\frac{\pi_v}{\sqrt{N_v}}=e^{i\phi_v}$$

と書くことにする。

$G=SU(2)$ とし、

$$G/\sim=X=\{\begin{pmatrix}e^{i\phi}&0\\0&e^{-1\phi}\end{pmatrix},0\leq\phi\leq\pi\}$$

とする。G の Haar measure の X での像は $\dfrac{2}{\pi}\sin^2\phi d\phi$ である。（四元数を用いて解釈する）

$\phi:G\to GL_2(\mathbb{C})$ を自然表現とし $\phi_m=Sym^{\otimes m}\phi$ とする。

$$x_v=\begin{pmatrix}e^{i\phi_v}&0\\0&e^{-\phi_v}\end{pmatrix}\in X$$

とする。これに対し

$$L(\rho_m,s)=\prod_v\prod_{a=0}^m\frac{1}{1-e^{i(m-2a}\phi_v(Nv)^{-s}}$$

X を位相空間とし $C(X)$ を X 上の $\mathbb{C}$ 値連続関数全体とする。

$$||f||=\sum_{x\in X}|f(x)|$$

とする。$\delta_x : C(X) \to \mathbb{C}; f \mapsto f(x)$ を Dirac measure とし、$\{x_n\}$ に対して

$$\delta_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\delta_{x_i}$$

と定める。

定義 3. μ を $C(X)$ 上の Radon measure すなわち連続写像 $C(X) \to \mathbb{C}$ とする。$\{x_n\}$ が μ-equidistributed とは任意の $f \in C(X)$ に対し $n \to \infty$ で $\mu_n(f) \to \mu(f)$ となること、すなわち

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n} f(x_i) = \mu(f)$$

となること

G をコンパクト群とし $X = G/\sim$ を共役類とする。

命題 5. X の元の列 $\{x_n\}$ が μ-equidistributed であることと、任意の G の既約指標 χ について

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \chi(x_i) = \mu(f)$$

となることが同値。

Peter-Weyl の定理？

11.1 Wiener-Ikehara