Dirichlet L の函数等式

梅崎 直也

2019 年 10 月 27 日

第 1 章

L 関数の関数等式

参考 http://www-users.math.umn.edu/~garrett/m/mfms/notes_c/analytic_continuations.pdf

Riemannζ のテータ関数を使った解析接続と関数等式を別の状況で。

χ を Dirichlet 指標　mod N とし、

$$L(s,\chi) = \sum_n \chi(n) n^{-s}$$

と定める。

χ が even、つまり $\chi(-1) = 1$ とする。χ の導手が N とする。つまり　mod N で原始的と仮定する。

$$\theta_\chi(iy) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \chi(n) e^{-\pi n^2 y}$$

と定める。(χ が odd だとこれは恒等的に 0 になってしまう。)

積分表示は

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty y^{s/2} \frac{\theta_\chi(iy)}{2} \frac{dy}{y} &= \sum_{n\geq 1} \chi(n) \int_0^\infty y^{s/2} e^{-\pi n^2 y} \frac{dy}{y} \\
&= \sum_{n\geq 1} \frac{\chi(n)}{\pi^{s/2} n^s} \int_0^\infty y^{s/2} e^{-y} \frac{dy}{y} \\
&= \pi^{-s/2} \Gamma(\frac{s}{2}) L(s,\chi)
\end{aligned}$$

で得られる。(ζ の場合と比較せよ。)

Poisson 和公式を用いることで

1.1 Riemann ζ

まず初めに Riemann ζ の函数等式を雑に証明します。証明のあらすじは

1. $\theta(t)$ の Mellin 変換が $\zeta(s)\pi^{-s/2}\Gamma(\frac{s}{2})$
2. Poisson 和公式から θ の函数等式
3. θ の函数等式の Mellin 変換が ζ の函数等式

ほんとは被積分関数の漸近挙動を調べるという重要な問題があるのですが、そこは省略します。

まずは Mellin 変換の定義

$$M(f)(s) = \int_0^\infty f(t) t^s \frac{dt}{t}$$

例 1. e^{-t} のメリン変換は $\Gamma(s)$ e^{-ct} のメリン変換は $c^{-s}\Gamma(s)$
$e^{-n^2\pi t}$ の t についてのメリン変換は $(n^2\pi)^{-s}\Gamma(s)$

定義 1. テータ函数は $e^{-n^2\pi t}$ の n についての和

$$\theta(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-n^2\pi t}$$

これの Mellin 変換は（積分の順序交換を無視すると）（漸近挙動を見る必要あり）

$$M(\theta)(s/2) = \zeta(s)\pi^{-s/2}\Gamma(\frac{s}{2})$$

ポワソン和公式

$$\sum_n f(n) = \sum_n \hat{f}(n)$$

$e^{-n^2\pi t}$ の n についてのフーリエ変換は

$$e$$

なので、これを $f(n) = e^{-n^2\pi t}$ とすると

$$\theta(t) = t^{-1/2}\theta(1/t)$$

が成り立つ。
この左辺の Mellin 変換は上で見たように ζ で右辺の Mellin 変換は

$$\begin{aligned}\int_0^\infty t^{-1/2}\theta(1/t)t^{s/2}\frac{dt}{t} &= \int_\infty^0 t^{1/2}\theta(t)t^{-s/2}\frac{dt}{t} \\ &= M(\theta((1-s)/2))\end{aligned}$$

これが函数等式です。

1.2 Dirichlet L

次に Dirichlet L 関数の函数等式を証明します

$$L(\chi, s) = \sum_n \frac{\chi(n)}{n^s}$$

です。$\chi = 1$ としたものが ζ です。
関数等式の証明の準備として、いくつかの関数を定義します。テータ関数の変形版を定義します。

$$\begin{aligned}&\theta_a \\ &\theta^a \\ \zeta(s,a) &= \sum_n (n+a)^{-s}\end{aligned}$$

1.3 Dedekind zeta

参考文献小野孝 Weil

1.4 代数体

代数体 k とは有理数体 $\mathbb{Q}$ の有限次拡大のことをいう。

例。二次体、円分体 d を平方数でない整数とする。$\sqrt{d}$ は $x^2 - d = 0$ を満たし、$\sqrt{d} \notin \mathbb{Q}$ である。$k = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ は $\mathbb{Q}$ 上二次拡大であり、代数体である。

n を正の整数とし、ζ_n を 1 の原始 n 乗根、つまり n 乗して初めて 1 になる数とする。これは $x^n - 1 = 0$ の根で、したがって $\mathbb{Q}(\zeta_n)/\mathbb{Q}$ は高々 n 次拡大である。

k の整数環を k の元であって $\mathbb{Z}$ 上整であるもの、つまり $\mathbb{Q}$ 上の最小多項式の係数が $\mathbb{Z}$ であるもの。

1.5 類数

k を代数体とする。

定義 2. k の分数イデアルとは、k の部分 O_k 加群で有限性生であり、$\otimes_{O_k} k$ すると k に一致するものをいう。

例 2. $k = \mathbb{Q}$ の場合、

k が二次体の場合、

k が円分体の場合、

定義 3. 分数イデアルの積を、と定義する。

これは可換。生成元で書けば、

逆元の存在。双対を用いた表示

分数イデアル全体は群になる。これを $I(k)$ と書く。

k の主イデアルとは、k の元 x が生成するイデアル $O_k x \subset k$ のことをいう。

主イデアル全体 $P(k)$ は分数イデアル全体の部分群

定義 4. この商群 $I(k)/P(k)$ を k のイデアル類群という。

これは有限群になる。

k の類数とは k のイデアル類群の大きさ。

1.6 基本単数

定義 5 (Definition 7, p.94)**.** $n^{-1}\delta, l(\epsilon_1), \ldots, l(\epsilon_r)$ を行ベクトルに持つ行列を L とし、$R = |\det(L)|$ を k の regulator と呼ぶ。

命題 1 (Proposition 9, p.95)**.** $\gamma = \prod_v \gamma_v$ で有限素点では $\gamma_v(O_v^\times) = 1$ で、実では $d\gamma_v(x) = |x|^{-1}dx$ で、複素では $d\gamma_v(x) = (x\bar{x})^{-1}|dx \wedge d\bar{x}|$ で定まる $\mathbb{A}_k^\times$ の Haar 測度とする。

$m > 1 \in \mathbb{R}$ にたいし、$C(m) \subset \mathbb{A}_k^\times/k^\times$ における $1 \leq |z| \leq m$ の像とする。

$$\gamma(C(m)) = \log(m) 2^{r_1} (2\pi)^{r_2} hR/e$$

となる。

1.7　類数公式

Dedekind zeta の $s=1$ での留数の計算

1.7.1　BNT

Weil の本に沿った証明。

定理 1 (Theoerm 3, p.129)**.** k を代数体とし、r_1 を実素点の個数、r_2 を複素素点の個数とする。

$$Z_k(s) = G_1(s)^{r_1} G_2(s)^{r_2} \zeta_k(s)$$

とすると、これは $x=0,1$ で一位の極を持つ有理型関数で、関数等式

$$Z_k(s) = |D|^{1/2-s} Z_k(1-s)$$

をみたす。ここで D は k の discriminant である。$s=1$ での留数は

$$|D|^{-1/2} 2^{r_1} (2\pi)^{r_2} hR/e$$

である。ここで h は k の類数、R は regulator で e は k における 1 の冪根の個数。

Φ' を Φ の Fourier 変換とし、a を χ の differential idele とすると、

$$\Phi'(y) = |a|_{\mathbb{A}}^{1/2} \Phi(ay)$$

となる。

特に $\omega_s(s) = |x|_{\mathbb{A}}^s$ とすると、

$$Z(\omega_s, \Phi') = |a|_{\mathbb{A}}^{1/2-s} Z(\omega_s, \Phi) \tag{1.1}$$

$$Z(\omega_s, \Phi) = c_k^{-1} \prod_{w \in P_\infty} G_w(s) \prod_{v \notin P_\infty} (1 - q_v^{-s})^{-1} \tag{1.2}$$

命題 2 (Proposition 12, p.128)**.** k を代数体とし、μ, γ を $\mathbb{A}_k^\times$ の適切な測度とした時、$\gamma = c_k \mu$ となる。

$\gamma = \prod_v \gamma_v$ で有限素点では $\gamma_v(O_v^\times) = 1$ で、実では $d\gamma_v(x) = |x|^{-1} dx$ で、複素では $d\gamma_v(x) = (x\bar{x})^{-1} |dx \wedge d\bar{x}|$ で定める。

次はいわゆる differnt-discriminant formula である。

命題 3 (Proposition 6, p.113)**.** k を代数体とし、a を differential idele とすると、$|a|_{\mathbb{A}} = |D|^{-1}$ である。ここで D は k の discriminant である。

補題 1 (Lemma 6, p.121)**.** $F_1 : N \to [0,1]$ を可測関数とする。$[t_0, t_1] \subset \mathbb{R}_+^\times$ であって、$n < t_0$ について $F_1(n) = 1$ であり、$n > t_1$ について $F_1(n) = 0$ とする。このとき

$$\lambda(s) = \int_N n^s F_1(n) d\nu(n)$$

は $Re(s) > 0$ で絶対収束し、$s \in \mathbb{C}$ に解析接続され $s = 0$ での留数は

定理 2 (Theorem 2, p.121)**.** Φ を $\mathbb{A}_k$ の standard function とする。

$$\omega \mapsto Z(\omega, \Phi) = \int_{\mathbb{A}_k^\times} \Phi(j(z))\omega(z)d\mu(z)$$

は $\Omega(G_k)$ 上の有理型関数に解析接続され、関数等式

$$Z(\omega, \Phi) = Z(\omega_1\omega^{-1}, \Phi')$$

を満たし、ω_0, ω_1 で留数 $-\rho\Phi(0), \rho\Phi'(0)$ をそれぞれ持つ。

証明. $\mathbb{R}_+^\times$ 上の関数 F_0, F_1 を次をみたすようにとる。

1. $F_0 \geq 0, F_1 \geq 0, F_0 + F_1 = 1$
2. ある $[t_0, t_1] \subset \mathbb{R}_+^\times$ が存在して、$F_0(t) = 0, 0 < t < t_0, F_1(t) = 0, t > t_1$ をみたす

□

1.7.2 Tauberian theorem

数論序説はこっち？

第 2 章

Fourier 変換

Katz の travaux de Laumon の解読

2.1 背景

G を有限アーベル群とし、$\check{G}$ をその Pontryagin 双対とする。f を G 上の関数とし、そのフーリエ変換 $FT(f)$ は $\check{G}$ 上の関数で

$$\chi \mapsto \sum_{x \in G} f(x)\chi(x)$$

で定まるもの。逆変換により

$$FT(FT(f))(x) = |g|f(-x)$$

が成立する。

特に、$G = E$ が有限体 k 上の有限次元ベクトル空間である場合を考える。$\check{E}$ をその双対空間とし、$\langle x, y \rangle$ を $E \times \check{E}$ の内積。$\psi : k \to \mathbb{C}^\times$ を非自明な指標とする。この時、$\psi(\langle x, y \rangle)$ により E と $\check{E}$ は Pontryagin 双対となり、Fourier 変換は

$$y \mapsto \sum_{x \in E} f(x)\psi(\langle x, y \rangle)$$

となる。$y \in \check{E}$ を $x \mapsto \psi(\langle x, y \rangle)$ により E の指標とみなす。

特に $E = k = \mathbb{F}_p$ の場合、$\psi(x) = \exp(\dfrac{2\pi i x}{p})$ とすると、

$$FT(f)(y) = \sum_{x \in \mathbb{F}_p} f(x) \exp(\frac{2\pi i x y}{p})$$

となる。

$P(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n]$ をとる。$N \in \mathbb{F}_p$ に対して $P(x) = N$ の解の個数を $f(N)$ とする。これに対し $FT(f)$ は ℓ 進コホモロジーの理論を用いて調べることができる。

このため、ℓ 進コホモロジーの理論について復習する。X を $\mathbb{Z}[\dfrac{1}{\ell}]$ 上有限型のスキームで、連結とする。ξ を X の適当な幾何的点として基本群 $\pi_1 = \pi_1(X, \xi)$ とする。X の lisse $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ 層 $\mathcal{F}$ とは、π_1 の有限次元 $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ 表現で、ある局所コンパクト部分体上定義されるもの。構成可能層や複体については省略。k を有限体とし、$x \in X(k)$ に対し、

$$\mathrm{trace}_{k,\mathcal{F}}(x) = \mathrm{trace}(F_k | (\phi_{x,k})^* \mathcal{F})$$

同様に複体 K に対しては $\mathcal{H}^i = \mathcal{H}^i(K)$ とおいて

$$\mathrm{trace}_{k,K} = \sum_i (-1)^i \, \mathrm{trace}_{k,\mathcal{H}^i}$$

と定める。

$\phi : X \to Y$ が与えられた時、$(\phi_k)^*$ と $(\phi_k)_!$ が定まる。trace は複体に対する pullback と可換になる。一方で、push との整合性は trace formula から次が従う。

$$\mathrm{trace}_{k,R\phi_!(K)} = (\phi_k)_!(\mathrm{trace}_{k,K})$$

ℓ 進コホモロジーにおける積分変換を定義する。$X \times_S Y$ 上の ℓ 進層 $\mathcal{F}$ を核関数とする積分変換 $T_{\mathcal{F},!}$ を、X 上の複体 K に対して

$$T_{\mathcal{F},!}(K) = Rpr_{2!}(pr_1^*(K) \otimes \mathcal{F})$$

で定める。この時 trace formula により、$T_{\mathcal{F},!}(K)$ の trace function は

$$y \mapsto \sum_{x \mapsto s} \mathrm{trace}_{k,K}(x) \, \mathrm{trace}_{k,\mathcal{F}}(x, y)$$

を満たす。

ψ を加法群 k の非自明 $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ 値指標とし、Artin-Schereier 被覆 $\mathbb{A}^1 \to \mathbb{A}^1$ を ψ で押すと $\mathcal{L}_\psi$ が定まる。これの trace function は ψ 自身になる。$\mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^n \to \mathbb{A}^1$ を $\sum_i x_i y_i$ で定め、これで $\mathcal{L}_\psi$ を引き戻す。これを核関数として積分変換 $FT_{\psi,!}, FT_{\psi,*}$ を定義する。

ここで Verdier の定理は、この二つが一致することを主張する。

2.2 Stationary Phase

$\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n), f \in C^\infty$ とし、$t \in \mathbb{R}$ に対し

$$\int \phi(x) \exp(itf(x)) dx$$

を考える。principle of stationary phase とは、$grad(f)$ が $Supp(\phi)$ で消えないとすると、積分は t の関数として ∞ で急減少。このことから、f が $Supp(\phi)$ で有限個の critical point を持つなら、$t \to \infty$ で積分が critical point の寄与で定まる有限和に漸近する。

これの p 進類似。

第 3 章

BSD 予想について

参考、Birch and Swinnerton-Dyer, Notes on elliptic curves II.

話の流れ

1. E を $y^2 = x^3 + ax + b$ としておく。
2. $E(\mathbb{Q})$ をいくつかの例で考察する。
3. 直線との交点を利用して、有理点を作っていく（群構造）
4. 有限で終わる場合、無限に続く場合、どちらもある。
5. $E(\mathbb{F}_p)$ を計算する
6. $E(\mathbb{F}_p)$ の $p \to \infty$ での振る舞いと有理点の個数の関係
7. L 関数を導入する
8. 虚数乗法？

Birch と Swinnerton-Dyer の数値計算の話。楕円曲線の　mod p での有理点を数えた。

E を楕円曲線とし、$E(\mathbb{Q})$ の rank が既知とする。この時、$N_p = |E(\mathbb{F}_p)|$ とし、

$$\prod_{p \le x} \frac{N_p}{p}$$

の $x \to \infty$ での振る舞いを調べた。

Mordell の定理。$E(\mathbb{Q})$ が有限生成であること。($\mathbb{Q}, \mathbb{R}$ は群として有限生成ではない。) 群構造の説明、有限ランク？有限か否か簡単に分かる例は？ $y^2 = x^3 - 4x, y^2 = x^3 + x$ は有限、$y^2 = x^3 - 4$ は？ CM の場合は？

Mazur の定理（$E(\mathbb{Q})_{tors}$ の bound がある（cyclic なら 12 以下）位数 12 以上の点を見つけたら無限

$y^2 = x^3 - x$ は $E(\mathbb{Q}) = \{(0,0),(1,0),(-1,0),\infty\}$ であることが、Fermat により無限降下法で示された。

Hasse の定理。$|E(\mathbb{F}_p)|$ の評価。

$y^2 = x^3 - 1$ は　mod 6 で $a_p = 0$ が判定できる。(CM もつ？)

L 関数の定義。上の $\prod_{p \le x} \frac{N_p}{p}$ が「形式的に」L 関数と関係すること。

$$L_\Gamma(s) = \prod_p \frac{1}{1 + (N_p - p - 1)p^{-s} + p^{1-2s}}$$

とする。(実は有限個の p で修正が必要。)

形式的に

$$
\begin{aligned}
L_{\Gamma}(1) &= \prod_p \frac{1}{1+(N_p - p - 1)p^{-1} + p^{-1}} \\
&= \prod_p \frac{1}{1+N_p p^{-1} - 1} \\
&= \prod_p \frac{p}{N_p}
\end{aligned}
$$

虚数乗法を持つ場合にはより正確に計算できる。

$$\Gamma : y^2 = x^3 - Dx$$

に対して、

$$\zeta_{\Gamma}(s) = \frac{\zeta(s)\zeta(s-1)}{L_D(x)}$$

となる。

The Birch and Swinnerton-Dyer Conjecture, a Computational Approach William A. Stein

Distinguished Lecture Series I: Shou-wu Zhang

第 4 章

Chowla-Selberg の公式

CS 公式- Weil の本の証明（ゼータ関数とか使うやつ）- Gross の証明（代数幾何、Fermat 曲線）- 新谷の証明（多重ガンマ）- Arakelov 使う証明（Soule の SB）- Gross-Degline（いくつか証明されてる例）

Anderson, Colmetz のアーベル多様体？関連した論文？

関連ありそうな Fresan の Exponentioal motives

ON THE GROSS-DELIGNE CONJECTURE FOR VARIATIONS OF HODGE-DE RHAM STRUCTURES MASANORI ASAKURA AND JAVIER FRESAŃ

On the Hodge number of fibrations with relative multiplication 朝倉政典 (北大理)

UNE APPROCHE ARAKÉLOVIENNE À LA CONJECTURE DE GROSS-DELIGNE (D'APRÈS V. MAILLOT ET D. RÖSSLER) Javier Fresán

The Chowla Selberg Formula and The Colmez Conjecture Tonghai Yang

The Chowla-Selberg Formula CARLOS JULIO MORENO

4.1 Kronecker limit formula

Eisenstein 級数の $s=1$ での Laurent 展開、$z=x+\sqrt{-1}y$ とすると、

$$E(z,s)=\frac{\pi}{s-1}+2\pi(\gamma-\log(2\sqrt{y}|\eta(z)|^2))+O(x-1)$$

Kronecker limit formula と関連する話題. 加塩 朋和 (京大・理)

絶対 CM 周期について、吉田敬之

A Proof of the Classical Kronecker Limit Formula Takuro SHINTANI

4.2 Gross

4.3 Asakura-Otsubo

4.4 Fresan

KRONECKER' S FIRST LIMIT FORMULA, REVISITED W. DUKE, Ö. IMAMOGLU, AND Á . TÓTH

RAMANUJAN' S CLASS INVARIANTS, KRONECKER' S LIMIT FORMULA, AND MODULAR EQUATIONS BRUCE C. BERNDT, HENG HUAT CHAN, AND LIANG CHENG ZHANG

A Kronecker Limit Formula for Real Quadratic Fields* Don Zagier

4.5 The mechanics of the analytic proof

In "The Chowla-Selberg Formula", by CARLOS JULIO MORENO.
F を総実体、K を F の総虚二次拡大とする。

$$E(s,z) = \sum_{\sigma \in \Gamma/\Gamma_\infty} Ny(\sigma(z))^{(1+s)/2}$$

を $\Gamma = SL_2(r_F)$ に付随する Eisenstein series とする。Γ_∞ は上三角行列。
$E(s,z)$ の Fourier 係数の定数項は

$$Ny(z)^{(1+s)/2} + \frac{\Lambda_F(s)}{\Lambda_F(1+s)} Ny(z)^{(1-s)/2}$$

となる。Λ_F は F の完備 ζ
$s = -1, 0, 1$ での展開を考える。$s = 1$ での展開が Kronecker limit formula で $s = 0$ が Maass form に対応。
Epstein ζ と Eisenstein sereis の関係を考えると

4.6 Gross-Deligne

CM motive の周期と Γ 関数の特殊値。
楕円曲線の場合が Chowla-Selberg(から従う。)参考 http://www.math.sci.hiroshima-u.ac.jp/branched/files/2015/Asakura.pdf
$y^2 = x^3 - 1$ の H^1 は $\mathbb{Q}(\zeta_3)$ を CM に持つ。$\chi : \mathbb{Q}(\zeta_3) \to \mathbb{C}$ を $H^\chi = H^{1,0}$ なるものとする。この時

$$\begin{aligned} per(H^\chi) = \int_1^{\zeta_3} \frac{dx}{y} \sim \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^3}} \\ = \frac{1}{3} B(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}) \\ = \frac{1}{3} \frac{\Gamma(1/3)\Gamma(1/2)}{\Gamma(5/6)} \end{aligned}$$

となる。

4.7 Dedekind η function

nLab Dedekind eta function
The Logarithm of the Dedekind η-Function Michael Atiyah

4.8 GENRES DE TODD ET VALEURS AUX ENTIERS DES DEŔIVEÉS DE FONCTIONS L par Christophe SOULÉ

HRR

$$\chi(E) = \int_X ch(E) Td(TX)$$

$$Td(x) = 1 - \sum_{m \geq 0} \zeta(-m) \frac{x^{m+1}}{m!}$$

Arakelov 類似

$$R(x) = \sum_{m\geq 1, m:odd} (2\zeta'(-m) + (1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{m})\zeta(-m))\frac{x^m}{m!}$$

Lerch zeta

$$\zeta(z,x) = \sum_{m\geq 1} \frac{z^m}{m^s}$$

（これは Dirichlet zeta の $((\mathbb{Z}/n)^\times$ での？）Fourier 変換？）

$u \in \mathbb{Z}/n$ に対して $P_u(H^k(X)) \in \mathbb{C}^\times/F^\times$ を定義する。$\det_F H^k_{dR}(X)_u$ と $\det_F H^k_B(X(\mathbb{C}), F)_u$ の比として定まる。

$\mathcal{C}$ を $\mathbb{C}$ の K ベクトル空間で $\log|a|, a \in F^\times$ で生成されるものとする。

定理 3 (Theoreme 4.4)**.** $\mathbb{C}/\mathcal{C}$ における等式

$$\sum_{k\geq 0}(-1)^k \sum_{u\in(\mathbb{Z}/n)^\times} \chi(u)\log|P_u(H^k(X))| = \sum_{k\geq 0}(-1)^k \frac{L'(\chi,0)}{L(\chi,0)} \sum_{u\in(\mathbb{Z}/n)^\times}\sum_{p+q=k} p \dim_{\mathbb{C}}(H^{p,q}(X(\mathbb{C}))_u)\chi(u)$$

交代和を取らず、各 k での等式は $k=1$ とそれ以外のいくつかの場合に証明されている。

4.8.1 arithmetic Riemann-Roch

4.8.2 arithmetic Lefschetz

RR の equivariant 版？

自然数 $n > 1$ と $G = \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[tT]/(T^n - 1))$ とする。X を arithmetic variety とし、G 作用 $\mu : G \times X \to X$ を持つとする。固定点 $Y = X^G$ は arithmetic variety である。$\bar{E} = (E, h)$ を X 上の hermitian bundle とし、G の作用が h を保つように E に伸びるとする。この時、$E_Y = \oplus_{u\in\mathbb{Z}/n} E_u$ と分解する。

$V \subset Y$ を open とすると、$\mu^* : E(V) \to E(V) \otimes \mathbb{Z}[T]/(T^n - 1)$ が定まり、$\mu^*(s) = \sum_{u\in\mathbb{Z}/n} s_u \otimes T^u$ と分解する。

1 の原始 n 乗根 $\gamma \in \mathbb{C}$ を固定し、$g \in G(\mathbb{C})$ を対応する元とする。G, F_∞ で不変な $TX(\mathbb{C})$ の Kähler 計量 h_X を固定する。$H^q(X,E)$ は L^2 直交分解 $\oplus_{u\in\mathbb{Z}/n} H^q(X,E)_u$ を持つ。

$$\hat{\deg}_g(H^q(X,E)) = \sum_{u\in\mathbb{Z}/n} \hat{\deg}(H^q(X,E)_u, h_{L^2})\gamma^u$$

$$\hat{\chi}_g(\bar{E}) = \sum_{q\geq 0}(-1)^q \hat{\deg}_g(H^q(X,E))$$

と定める。$A^{0,q}(X(\mathbb{C}), E_{\mathbb{C}})$ も直交分解し、$\zeta_{q,u}(s)$ を Δ_q の $A^{0,q}(X(\mathbb{C}), E_{\mathbb{C}})_u$ のゼータ関数とし、

$$T_g(\bar{E}_{\mathbb{C}}) = \sum_{q\geq 0}(-1)^{q+1} q \sum_{u\in\mathbb{Z}/n} \zeta'_{q,u}(0)\gamma^u$$

とし、これを同変解析的トーションという。

$K = \mathbb{Q}(\gamma) \subset \mathbb{C}$ とし、Chern character を

$$\hat{ch}_g(\bar{E}) = \sum_{u\in\mathbb{Z}/n} \hat{ch}(\bar{E}_u)\gamma^u \in \hat{CH}(Y)_K$$

と定める。

$$\lambda_{-1}(\bar{E}) = \sum_{k\geq 0}(-1)^k \Lambda^k(\bar{E})$$

とおき、

$$ch_g(\lambda_{-1}(\bar{E})) = \sum_{k\geq 0}(-1)^k ch_g(\Lambda^k(\bar{E}))$$

と書く。$\bar{N}^\vee$ を $Y \subset X$ の余法束とし、h_X から計量を誘導する。$\hat{T}d(Y) \in \hat{CH}(Y)_{\mathbb{Q}}$ を (Y, h_Y) の arithmetic Todd class とする。

$$\hat{T}d_g(X) = \hat{ch}_g(\lambda_{-1}(\bar{N}^\vee))^{-1}\hat{T}d(Y) \in \hat{CH}(Y)_K$$

とおき、

$$\begin{aligned} ch_g(E_{\mathbb{C}}) &= \sum_{u\in\mathbb{Z}/n} ch(E_{u,\mathbb{C}})\gamma^u \\ Td_g(TX(\mathbb{C})) &= ch_g(\lambda_{-1}(\bar{N}_{\mathbb{C}}^\vee))^{-1}Td(TY(\mathbb{C})) \in \oplus_{p\geq 0}H^{p,p}(Y_{\mathbb{R}})_K \end{aligned}$$

と定める。

定理 4 (Theorem 3.1)**.**