Dirichlet L の函数等式

梅崎 直也

2019 年 10 月 27 日

0.1 Riemann ζ

まず初めに Riemann ζ の函数等式を雑に証明します。証明のあらすじは

1. $\theta(t)$ の Mellin 変換が $\zeta(s)\pi^{-s/2}\Gamma(\frac{s}{2})$
2. Poisson 和公式から θ の函数等式
3. θ の函数等式の Mellin 変換が ζ の函数等式

ほんとは被積分関数の漸近挙動を調べるという重要な問題があるのですが、そこは省略します。

まずは Mellin 変換の定義

$$M(f)(s) = \int_0^\infty f(t)t^s \frac{dt}{t}$$

例 1. e^{-t} のメリン変換は $\Gamma(s)$ e^{-ct} のメリン変換は $c^{-s}\Gamma(s)$

$e^{-n^2\pi t}$ の t についてのメリン変換は $(n^2\pi)^{-s}\Gamma(s)$

定義 1. テータ函数は $e^{-n^2\pi t}$ の n についての和

$$\theta(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-n^2\pi t}$$

これの Mellin 変換は（積分の順序交換を無視すると）（漸近挙動を見る必要あり）

$$M(\theta)(s/2) = \zeta(s)\pi^{-s/2}\Gamma(\frac{s}{2})$$

ポワソン和公式

$$\sum_n f(n) = \sum_n \hat{f}(n)$$

$e^{-n^2\pi t}$ の n についてのフーリエ変換は

$$e$$

なので、これを $f(n) = e^{-n^2\pi t}$ とすると

$$\theta(t) = t^{-1/2}\theta(1/t)$$

が成り立つ。

この左辺の Mellin 変換は上で見たように ζ で右辺の Mellin 変換は

$$\begin{aligned}\int_0^\infty t^{-1/2}\theta(1/t)t^{s/2}\frac{dt}{t} &= \int_\infty^0 t^{1/2}\theta(t)t^{-s/2}\frac{dt}{t} \\ &= M(\theta((1-s)/2))\end{aligned}$$

これが函数等式です。

0.2 Dirichlet L

次に Dirichlet L 関数の函数等式を証明します

$$L(\chi, s) = \sum_n \frac{\chi(n)}{n^s}$$

です。$\chi = 1$ としたものが ζ です。

関数等式の証明の準備として、いくつかの関数を定義します。テータ関数の変形版を定義します。

$$\theta_a$$
$$\theta^a$$
$$\zeta(s, a) = \sum_n (n + a)^{-s}$$

0.3 Dedekind zeta

参考文献小野孝 Weil

0.4 代数体

代数体 k とは有理数体 $\mathbb{Q}$ の有限次拡大のことをいう。

例。二次体、円分体 d を平方数でない整数とする。$\sqrt{d}$ は $x^2 - d = 0$ を満たし、$\sqrt{d} \notin \mathbb{Q}$ である。$k = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ は $\mathbb{Q}$ 上二次拡大であり、代数体である。

n を正の整数とし、ζ_n を 1 の原始 n 乗根、つまり n 乗して初めて 1 になる数とする。これは $x^n - 1 = 0$ の根で、したがって $\mathbb{Q}(\zeta_n)/\mathbb{Q}$ は高々 n 次拡大である。

k の整数環を k の元であって $\mathbb{Z}$ 上整であるもの、つまり $\mathbb{Q}$ 上の最小多項式の係数が $\mathbb{Z}$ であるもの。

0.5 類数

k を代数体とする。

定義 2. k の分数イデアルとは、k の部分 O_k 加群で有限性生であり、$\otimes_{O_k} k$ すると k に一致するものをいう。

例 2. $k = \mathbb{Q}$ の場合、

k が二次体の場合、

k が円分体の場合、

定義 3. 分数イデアルの積を、と定義する。

これは可換。生成元で書けば、

逆元の存在。双対を用いた表示

分数イデアル全体は群になる。これを $I(k)$ と書く。

k の主イデアルとは、k の元 x が生成するイデアル $O_k x \subset k$ のことをいう。

主イデアル全体 $P(k)$ は分数イデアル全体の部分群

定義 4. この商群 $I(k)/P(k)$ を k のイデアル類群という。

これは有限群になる。

k の類数とは k のイデアル類群の大きさ。

0.6 基本単数

定義 5 (Definition 7, p.94)**.** $n^{-1}\delta, l(\epsilon_1), \ldots, l(\epsilon_r)$ を行ベクトルに持つ行列を L とし、$R = |\det(L)|$ を k の regulator と呼ぶ。

命題 1 (Proposition 9, p.95)**.** $\gamma = \prod_v \gamma_v$ で有限素点では $\gamma_v(O_v^\times) = 1$ で、実では $d\gamma_v(x) = |x|^{-1}dx$ で、複素では $d\gamma_v(x) = (x\bar{x})^{-1}|dx \wedge d\bar{x}|$ で定まる $\mathbb{A}_k^\times$ の Haar 測度とする。

$m > 1 \in \mathbb{R}$ にたいし、$C(m) \subset \mathbb{A}_k^\times/k^\times$ における $1 \leq |z| \leq m$ の像とする。

$$\gamma(C(m)) = \log(m)2^{r_1}(2\pi)^{r_2}hR/e$$

となる。

0.7 類数公式

Dedekind zeta の $s = 1$ での留数の計算

0.7.1 BNT

Weil の本に沿った証明。

定理 1 (Theoerm 3, p.129)**.** k を代数体とし、r_1 を実素点の個数、r_2 を複素素点の個数とする。

$$Z_k(s) = G_1(s)^{r_1}G_2(s)^{r_2}\zeta_k(s)$$

とすると、これは $x = 0, 1$ で一位の極を持つ有理型関数で、関数等式

$$Z_k(s) = |D|^{1/2-s}Z_k(1-s)$$

をみたす。ここで D は k の discriminant である。$s = 1$ での留数は

$$|D|^{-1/2}2^{r_1}(2\pi)^{r_2}hR/e$$

である。ここで h は k の類数、R は regulator で e は k における 1 の冪根の個数。

Φ' を Φ の Fourier 変換とし、a を χ の differential idele とすると、

$$\Phi'(y) = |a|_{\mathbb{A}}^{1/2}\Phi(ay)$$

となる。

特に $\omega_s(s) = |x|_{\mathbb{A}}^s$ とすると、

$$Z(\omega_s, \Phi') = |a|_{\mathbb{A}}^{1/2-s} Z(\omega_s, \Phi) \tag{1}$$

$$Z(\omega_s, \Phi) = c_k^{-1} \prod_{w \in P_\infty} G_w(s) \prod_{v \notin P_\infty} (1 - q_v^{-s})^{-1} \tag{2}$$

命題 2 (Proposition 12, p.128)**.** k を代数体とし、μ, γ を $\mathbb{A}_k^\times$ の適切な測度とした時、$\gamma = c_k\mu$ となる。

$\gamma = \prod_v \gamma_v$ で有限素点では $\gamma_v(O_v^\times) = 1$ で、実では $d\gamma_v(x) = |x|^{-1}dx$ で、複素では $d\gamma_v(x) = (x\bar{x})^{-1}|dx \wedge d\bar{x}|$ で定める。

次はいわゆる differnt-discriminant formula である。

命題 3 (Proposition 6, p.113)**.** k を代数体とし、a を differential idele とすると、$|a|_{\mathbb{A}} = |D|^{-1}$ である。ここで D は k の discriminant である。

補題 1 (Lemma 6, p.121)**.** $F_1 : N \to [0,1]$ を可測関数とする。$[t_0, t_1] \subset \mathbb{R}_+^\times$ であって、$n < t_0$ について $F_1(n) = 1$ であり、$n > t_1$ について $F_1(n) = 0$ とする。このとき

$$\lambda(s) = \int_N n^s F_1(n) d\nu(n)$$

は $Re(s) > 0$ で絶対収束し、$s \in \mathbb{C}$ に解析接続され $s = 0$ での留数は

定理 2 (Theorem 2, p.121)**.** Φ を $\mathbb{A}_k$ の standard function とする。

$$\omega \mapsto Z(\omega, \Phi) = \int_{\mathbb{A}_k^\times} \Phi(j(z))\omega(z)d\mu(z)$$

は $\Omega(G_k)$ 上の有理型関数に解析接続され、関数等式

$$Z(\omega, \Phi) = Z(\omega_1\omega^{-1}, \Phi')$$

を満たし、ω_0, ω_1 で留数 $-\rho\Phi(0), \rho\Phi'(0)$ をそれぞれ持つ。

証明. $\mathbb{R}_+^\times$ 上の関数 F_0, F_1 を次をみたすようにとる。

1. $F_0 \geq 0, F_1 \geq 0, F_0 + F_1 = 1$
2. ある $[t_0, t_1] \subset \mathbb{R}_+^\times$ が存在して、$F_0(t) = 0, 0 < t < t_0, F_1(t) = 0, t > t_1$ をみたす

□

0.7.2　Tauberian theorem

数論序説はこっち？

第 1 章

Fourier 変換

Katz の travaux de Laumon の解読

1.1 背景

G を有限アーベル群とし、$\check{G}$ をその Pontryagin 双対とする。f を G 上の関数とし、そのフーリエ変換 $FT(f)$ は $\check{G}$ 上の関数で

$$\chi \mapsto \sum_{x \in G} f(x)\chi(x)$$

で定まるもの。逆変換により

$$FT(FT(f))(x) = |g|f(-x)$$

が成立する。

特に、$G = E$ が有限体 k 上の有限次元ベクトル空間である場合を考える。$\check{E}$ をその双対空間とし、$\langle x, y\rangle$ を $E \times \check{E}$ の内積。$\psi : k \to \mathbb{C}^\times$ を非自明な指標とする。この時、$\psi(\langle x, y\rangle)$ により E と $\check{E}$ は Pontryagin 双対となり、Fourier 変換は

$$y \mapsto \sum_{x \in E} f(x)\psi(\langle x, y\rangle)$$

となる。$y \in \check{E}$ を $x \mapsto \psi(\langle x, y\rangle)$ により E の指標とみなす。

特に $E = k = \mathbb{F}_p$ の場合、$\psi(x) = \exp(\dfrac{2\pi i x}{p})$ とすると、

$$FT(f)(y) = \sum_{x \in \mathbb{F}_p} f(x)\exp(\frac{2\pi i x y}{p})$$

となる。

$P(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n]$ をとる。$N \in \mathbb{F}_p$ に対して $P(x) = N$ の解の個数を $f(N)$ とする。これに対し $FT(f)$ は ℓ 進コホモロジーの理論を用いて調べることができる。

このため、ℓ 進コホモロジーの理論について復習する。X を $\mathbb{Z}[\dfrac{1}{\ell}]$ 上有限型のスキームで、連結とする。ξ を X の適当な幾何的点として基本群 $\pi_1 = \pi_1(X, \xi)$ とする。X の lisse $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ 層 $\mathcal{F}$ とは、π_1 の有限次元 $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ 表現で、ある局所コンパクト部分体上定義されるもの。構成可能層や複体については省略。k を有限体とし、$x \in X(k)$ に対し、

$$\mathrm{trace}_{k,\mathcal{F}}(x) = \mathrm{trace}(F_k|(\phi_{x,k})^*\mathcal{F})$$

同様に複体 K に対しては $\mathcal{H}^i = \mathcal{H}^i(K)$ とおいて

$$\mathrm{trace}_{k,K} = \sum_i (-1)^i \, \mathrm{trace}_{k,\mathcal{H}^i}$$

と定める。

$\phi : X \to Y$ が与えられた時、$(\phi_k)^*$ と $(\phi_k)_!$ が定まる。trace は複体に対する pullback と可換になる。一方で、push との整合性は trace formula から次が従う。

$$\mathrm{trace}_{k,R\phi_!(K)} = (\phi_k)_!(\mathrm{trace}_{k,K})$$

ℓ 進コホモロジーにおける積分変換を定義する。$X \times_S Y$ 上の ℓ 進層 $\mathcal{F}$ を核関数とする積分変換 $T_{\mathcal{F},!}$ を、X 上の複体 K に対して

$$T_{\mathcal{F},!}(K) = Rpr_{2!}(pr_1^*(K) \otimes \mathcal{F})$$

で定める。この時 trace formula により、$T_{\mathcal{F},!}(K)$ の trace function は

$$y \mapsto \sum_{x \mapsto s} \mathrm{trace}_{k,K}(x) \, \mathrm{trace}_{k,\mathcal{F}}(x,y)$$

を満たす。

ψ を加法群 k の非自明 $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ 値指標とし、Artin-Schereier 被覆 $\mathbb{A}^1 \to \mathbb{A}^1$ を ψ で押すと $\mathcal{L}_\psi$ が定まる。これの trace function は ψ 自身になる。$\mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^n \to \mathbb{A}^1$ を $\sum_i x_i y_i$ で定め、これで $\mathcal{L}_\psi$ を引き戻す。これを核関数として積分変換 $FT_{\psi,!}, FT_{\psi,*}$ を定義する。

ここで Verdier の定理は、この二つが一致することを主張する。

1.2　Stationary Phase

$\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n), f \in C^\infty$ とし、$t \in \mathbb{R}$ に対し

$$\int \phi(x) \exp(itf(x)) dx$$

を考える。principle of stationary phase とは、$grad(f)$ が $Supp(\phi)$ で消えないとすると、積分は t の関数として ∞ で急減少。このことから、f が $Supp(\phi)$ で有限個の critical point を持つなら、$t \to \infty$ で積分が critical point の寄与で定まる有限和に漸近する。

これの p 進類似。

第 2 章

関数等式

参考 http://www-users.math.umn.edu/g̃arrett/m/mfms/notes_c/analytic_continuations.pdf

Riemannζ のテータ関数を使った解析接続と関数等式を別の状況で。

χ を Dirichlet 指標　mod N とし、

$$L(s,\chi) = \sum_{n} \chi(n) n^{-s}$$

と定める。

χ が even、つまり $\chi(-1) = 1$ とする。χ の導手が N とする。つまり　mod N で原始的と仮定する。

$$\theta_\chi(iy) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \chi(n) e^{-\pi n^2 y}$$

と定める。(χ が odd だとこれは恒等的に 0 になってしまう。)

積分表示は

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty y^{s/2} \frac{\theta_\chi(iy)}{2} \frac{dy}{y} &= \sum_{n\geq 1} \chi(n) \int_0^\infty y^{s/2} e^{-\pi n^2 y} \frac{dy}{y} \\
&= \sum_{n\geq 1} \frac{\chi(n)}{\pi^{s/2} n^s} \int_0^\infty y^{s/2} e^{-y} \frac{dy}{y} \\
&= \pi^{-s/2} \Gamma(\frac{s}{2}) L(s,\chi)
\end{aligned}$$

で得られる。(ζ の場合と比較せよ。)

Poisson 和公式を用いることで