

# 演習形式で学ぶ圏論の基礎の基礎

梅崎 直也

2018 年 12 月 15 日

La mathématique est l'art de donner le même nom à des choses différentes.

---

Science et Méthode, Henri Poincaré

## 1 はじめに

「数学とは、異なるものを同じとみなす技術である」というのはフランスの数学者ポアンカレの言葉です。ポアンカレの創始したトポロジーにおける問題意識などがあって、圏論という数学が生まれそして大きく育ち、今日では数学のみならずより広い分野に影響を及ぼそうとしています。

そんな圏論という数学の基礎の基礎を少しでも身につけていただこうというのがこの講座の趣旨です。圏論はあるものと別のものが同じであるとは、どのように同じか、あるいは比較すること、などを扱う枠組みを提供してくれます。

圏論で鍵となる概念は自然変換です。この講座では自然変換を理解するための助けになるよう、関手の例をたくさん用意しました。これらの例やさらなる例を自分の手を動かして関手の定義になじんでいただければと思います。

まずは集合の基本的な言葉遣いについてしっかりと確認した後、いくつかの数学的な対象を紹介します。集合の圏、モノイドの圏、順序集合の圏、グラフの圏などの具体例を扱いますが、それら自身もまた圏の例を提供するという二重の構造があります。

今までに馴染みのあるよく知っている対象でも、色々な記述方法があり、またそれらが相互にどのように関連しているかという点について、圏論がいかに表現するかを味わっていただければと思います。

### 1.1 計算と証明

圏論では射が重要ということをお聞きになった方もいらっしゃると思います。この講座でも、射の計算をたくさんしていきたいと思います。

代入と項書き換え、式変形と証明についての一般論

分配法則という数の足し算と掛け算に関する法則があります。

$$x \times (y + z) = x \times y + x \times z$$

$$x(y + z) = xy + xz$$

これと同じようなパターンが、圏論における射の計算でいたるところに出てきます。計算で重要なのが、定

義や基本性質に基づいた式の書き換えです。これがどのような手順なのか、よく馴染みのある例で確認してみましょう。

$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$  という公式をどう証明するか考えます。

$$(x + y)^2 = (x + y)(x + y) \quad (1)$$

$$= (x + y)x + (x + y)y \quad (2)$$

$$= x(x + y) + y(x + y) \quad (3)$$

$$= xx + xy + yx + yy \quad (4)$$

$$= xx + xy + xy + yy \quad (5)$$

$$= x^2 + xy + xy + y^2 \quad (6)$$

$$= x^2 + 2xy + y^2 \quad (7)$$

とすることで証明できます。この中で、上述の分配法則と交換法則や記号の定義用いていますが、それについて詳細に確認してみましょう。

1.  $x^2 = xx$  という定義で  $x = x + y$  として式を書き換えました
2. 分配法則で  $x = x + y, y = x, z = y$  として式を書き換えました
3. 交換法則  $xy = yx$  で  $x = x, y = (x + y)$  もしくは  $x = y, y = (x + y)$  として式を書き換えました
4. 分配法則で  $x = x, y = x, z = y$  もしくは  $x = y, y = x, z = y$  として式を書き換えました。
5. 交換法則を使って式を書き換えました
6.  $xx = x^2$  という定義に従って式を書き換えました。
7. 分配法則で  $x = xy, y = 1, z = 1$  として式を書き換えました。

実際にはもう少し細かい段階に分ける必要がありますが、このような定義や公式に従った式変形の計算により最初の等式が証明できます。今回の講座でやっていただく計算も、でてくる概念としては新しいものも多いと思いますが、このように書き換えることで証明できる式がほとんどです。計算に迷ったら、ここに立ち返って考えてみてください。

## 2 集合と写像

集合と写像の基本的な性質について確認します。集合全体の圏という特別な圏の例について、様々な圏論的な操作を扱っています。特に関手、普遍性といった概念を具体例を通して説明します。

### 2.1 集合

数学的なものの集まりを集合という。実際には集合にもきちんとした定義があるが、ここではそこには立ち入らない。重要なのは、ある  $x$  が集合  $X$  の要素であるか否かが定まっていて、それぞれを  $x \in X, x \notin X$  と表すということ。

集合の定め方には次のふた通りの方法がある。

1. 要素を列挙する方法
2. 集合に所属するための条件をかく方法

例えば自然数全体の集合を表す方法として、前者なら  $\{0, 1, 2, \dots\}$  のように、後者なら  $\{n \mid n \text{ は自然数}\}$  のように書く。

**定義 1** (自然数). 自然数全体の集合を  $\mathbb{N}$  で表す。つまり

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

である。

自然数にもきちんとした定義はあるが、ここではそこには立ち入らない。

**定義 2** (空集合). 要素を一つも持たない特別な集合として空集合を定める。空集合はただ一つだけ存在し、それを

$$\emptyset$$

という記号で表す。

**例 1** (一点集合).  $\{1\}, \{0\}, \{\emptyset\}$  など要素をただ一つしか持たない集合を一点集合という。

特に一点集合として集合  $S = \{*\}$  を考える。一点集合自体はたくさんあるが、どれを取っても話は変わらないので上のように表しておこう。

$\{0, 3, 5\}$  のように自然数を集めた集合、 $\{\emptyset, \{0, 1\}, \{1, 2, 5, 6\}\}$  のように集合を集めた集合、などとして自然数や空集合を使って具体的に新しい集合を色々定めることができる。

一方で、要素それ自体に注目せずに抽象的に集合を表す時には  $\{a, b\}$  や  $\{x, y, z\}$  のように表すことにする。

**問題 1.** 要素を 3 個持つ集合を具体的にいくつか作ってみよう。

## 2.2 写像

**定義 3** (写像). 集合  $X$  から  $Y$  への写像  $f$  とは、全ての  $X$  の要素に対してある  $Y$  の要素を定める対応のことをいう。 $f$  が  $X$  から  $Y$  への写像であることを  $f: X \rightarrow Y$  と表す。また要素の対応を  $x \mapsto y$  のように表したり、 $y = f(x)$  のように表したりする。

**例 2.**  $A = \{a, b, c\}, B = \{d, e\}$  として  $A \rightarrow B$  を定義しよう。例えば一つのやり方として  $f(a) = d, f(b) = e, f(c) = e$  とすればよい。これを

$$f = \begin{cases} a \mapsto d \\ b \mapsto e \\ c \mapsto e \end{cases}$$

と書くことにしよう。

**問題 2.** 上の集合  $A = \{a, b, c\}, B = \{d, e\}$  に対して  $A$  から  $B$  への写像は上の  $f$  以外にはどのようなものがあるか？全て列挙せよ。

**問題 3.** 上の集合  $A = \{a, b, c\}, B = \{d, e\}$  に加え  $C = \{x, y, z\}$  を考える。 $A$  から  $C$  への写像、 $B$  から  $C$  への写像を全て列挙せよ。

**例 3.**  $p(n) = n$  番目の素数として  $p: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  を定める。つまり

$$p(1) = 2, p(2) = 3, p(3) = 5, \dots$$

**例 4.** 自然数  $n$  に対して、その次の自然数を対応させることにより写像  $s: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  を定める。つまり

$$s(n) = n + 1$$

あるいは

$$s: n \mapsto n + 1$$

と定める。

**例 5.** 自然数  $n$  に対して、その前の自然数を対応させることでは写像  $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  は定まらない。つまり

$$n \mapsto n - 1$$

は写像ではない。

**例 6.** 自然数  $n$  を 3 倍するという操作により写像  $(3\times): \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  を定める。つまり

$$(3\times)(n) = 3n$$

あるいは

$$(3\times): n \mapsto 3n$$

と定める。

**例 7.** どのような集合  $X$  に対しても、空集合からの写像  $\emptyset \rightarrow X$  はただ一つだけ存在する。

空集合への写像  $f: X \rightarrow \emptyset$  は  $X$  が空集合でない限り存在しない。

**問題 4.** 一点集合  $S = \{*\}$  を考える。集合  $X$  から  $S$  への写像にはどのようなものがあるか？また  $S$  から集合  $X$  への写像にはどのようなものがあるか？

例えば  $X = A = \{a, b, c\}, X = C = \{d, e\}$  などの場合にどのようなになるか考えよう。

**定義 4** (始対象と終対象). 一点集合  $S$  は、任意の集合  $X$  に対してただ一つだけ写像  $X \rightarrow S$  を持つ。このような性質を一点集合は終対象であるという。

空集合  $\emptyset$  は、任意の集合  $X$  に対してただ一つだけ写像  $\emptyset \rightarrow X$  を持つ。このような性質を空集合は始対象であるという。

写像の中で特別な役割を持つものに恒等写像がある。これはどのような集合  $X$  に対しても必ず一つ定まっているもので、 $\text{id}_X: X \rightarrow X$  とかく。

**定義 5** (恒等写像). 集合  $X$  に対して恒等写像  $\text{id}_X$  とは  $\text{id}_X(x) = x$  であるもの。

次に二つの写像をつなぎ合わせて新しい写像を作ること考えよう。写像  $f: X \rightarrow Y$  と  $g: Y \rightarrow Z$  があるとき、この二つから新しい写像  $g \circ f: X \rightarrow Z$  を次の手順で作ることができる。

1.  $X$  の要素  $x$  から写像  $f$  を使って  $f(x) \in Y$  を対応させる。
2. 次にこの  $Y$  の要素  $f(x)$  から写像  $g$  を使って  $g(f(x)) \in Z$  を対応させる。

このようにして定義される写像が  $f$  と  $g$  の合成写像  $g \circ f$  である。

**定義 6** (合成写像). 写像  $f: X \rightarrow Y$  と  $g: Y \rightarrow Z$  の合成写像  $g \circ f: X \rightarrow Z$  とは、次で定まる  $X$  から  $Z$  への写像。

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

この式の読み方は  $f \circ g$  が新しい写像の名前で、それを計算する手続きが  $g(f(x))$  で与えられるということ。

**例 8.** 上の  $s: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, s(n) = n + 1$  を合成して  $s \circ s: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  を定める。これは

$$(s \circ s)(n) = s(s(n)) = s(n + 1) = (n + 1) + 1 = n + 1 + 1 = n + 2$$

となり、自然数  $n$  に対してその次の次の自然数を対応させる写像。

**問題 5.**  $s \circ s \circ s$  はどのような写像か？

また  $p \circ (3 \times), (3 \times) \circ p$  はそれぞれどのような写像か？

**例 9.** 集合  $A = \{a, b, c\}, B = \{d, e\}, C = \{x, y, z\}$  を考える。適当に写像  $f: A \rightarrow B$  と  $g: B \rightarrow C$ 、 $h: C \rightarrow A$  を定め、それらの合成を計算しよう。例えば

$$f = \begin{cases} a \mapsto d \\ b \mapsto e \\ c \mapsto e, \end{cases} \quad g = \begin{cases} d \mapsto x \\ e \mapsto z, \end{cases} \quad h = \begin{cases} x \mapsto a \\ y \mapsto b \\ z \mapsto a \end{cases}$$

とする。

このとき、 $g \circ f : A \rightarrow C$  は  $a \mapsto d \mapsto x, b \mapsto e \mapsto z, c \mapsto e \mapsto z$  で定まる写像、つまり

$$g \circ f = \begin{cases} a \mapsto x \\ b \mapsto z \\ c \mapsto z \end{cases}$$

である。

**問題 6.** 上の集合  $A, B, C$  と  $f, g, h$  について、 $h \circ g, h \circ (g \circ f), (h \circ g) \circ f$  を計算せよ。

**例 10.** 集合  $W, X, Y, Z$  とそれらの間の写像  $f : W \rightarrow X, g : X \rightarrow Y, h : Y \rightarrow Z$  について、 $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$  であることを証明しよう。

写像の等式を示すためには任意の  $x \in X$  に対して、

$$(h \circ (g \circ f))(x) = ((h \circ g) \circ f)(x)$$

であることを示せばよい。左辺は

$$(h \circ (g \circ f))(x) = h((g \circ f)(x)) = h(g(f(x)))$$

であり、右辺は

$$((h \circ g) \circ f)(x) = (h \circ g)(f(x)) = h(g(f(x)))$$

であるのでこれらは一致する。

**問題 7.** 恒等写像に対して  $\text{id}_X \circ f = f, f \circ \text{id}_X = f$  であることを証明しよう。

## 2.3 集合の圏論的構成

ここでは与えられた集合から新しく集合を構成する操作をいくつか紹介する。これらは圏論的な操作になっており、具体例を通して自然性や普遍性という概念になじんでもらいたい。

### 2.3.1 直和

二つの集合から、その直和という新しい集合を作る。これは、与えられた二つの集合の要素を全て集めた集合である。二つの集合の和集合  $\cup$  とは違うことに注意しよう。

**定義 7** (直和). 集合  $X, Y$  の直和とは  $X$  の要素と  $Y$  の要素を全て集めた集合。

$$X \amalg Y = \{x \mid x \in X \text{ または } x \in Y\}$$

ただし元々  $X$  に入っていたものと  $Y$  に入っていたものは区別する。この区別を明確にするため、

$$X \amalg Y = \{(x, 0) \text{ または } (y, 1) \mid x \in X, y \in Y\}$$

のようにも書く。

**例 11.**  $A = \{a, b, c\}, B = \{d, e\}, C = \{x, y, z\}$  のとき、 $A \amalg B = \{a, b, c, d, e\}$  である。

**問題 8.** 上の集合  $A = \{a, b, c\}, B = \{d, e\}, C = \{x, y, z\}$  について、 $B \amalg A, A \amalg A, B \amalg C, (A \amalg B) \amalg C, A \amalg (B \amalg C)$  はそれぞれどのような集合か。

**例 12.**

$$\mathbb{N} \amalg \mathbb{N} = \{(n, 0) \text{ または } (m, 1) \mid n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N}\} = \{(0, 0), (1, 0), (2, 0), \dots, (0, 1), (1, 1), (2, 1), \dots\}$$

**問題 9.** 集合  $X$  が  $x$  個の要素からなり、集合  $Y$  が  $y$  個の要素からなるとする。このとき、直和集合  $X \amalg Y$  の要素の個数はいくつか？

直和を用いて集合から新しい集合を作る操作を考えよう。

**例 13.**  $S$  を一点集合  $\{*\}$  とする。集合  $X$  から新しく  $X \amalg S$  という集合を作る操作を考える。

具体的には例えば  $A = \{a, b, c\}$  であれば  $A \amalg S = \{a, b, c, *\}$  となり、 $B = \{d, e\}$  であれば  $B \amalg S = \{d, e, *\}$  である。

実はこの操作は集合から新しい集合を作るのみならず、写像から新しく写像を作ることができる。つまり、 $f : X \rightarrow Y$  が与えられたとき、写像  $(f \amalg S) : X \amalg S \rightarrow Y \amalg S$  を作ることができる。これは

$$(f \amalg S)(x) = \begin{cases} f(x) & x \in X \\ * & x = * \end{cases} \text{ により定まる写像。}$$

$$\text{例えば } f : A \rightarrow B \text{ を } f = \begin{cases} a \mapsto d \\ b \mapsto e \\ c \mapsto e \end{cases} \text{ とする。このとき } (f \amalg S) = \begin{cases} a \mapsto d \\ b \mapsto e \\ c \mapsto e \\ * \mapsto * \end{cases} \text{ となる。}$$

$$g : B \rightarrow C \text{ を } g = \begin{cases} d \mapsto x \\ e \mapsto z \end{cases} \text{ で定めた時、} g \amalg S \text{ はどのような写像になるか。}$$

このように、集合から集合を作り、写像から写像を作るという二つの操作を合わせたものが関手である。ただし、関手というためには単に写像を作るだけでなく、写像の合成についての振る舞いが行儀よくなければならない。具体的には以下の二つを満たす必要がある。

1.  $f : X \rightarrow Y$  と  $g : Y \rightarrow Z$  の合成  $g \circ f : X \rightarrow Z$  から  $((f \circ g) \amalg S)$  を作ると  $(f \amalg S) \circ (g \amalg S)$  と一致する。
2. 恒等写像が  $\text{id}_X \amalg S = \text{id}_{X \amalg S}$  を満たす。

この二条件を関手性という。実際にこれを満たしていることを確かめてみよう。

**問題 10.**  $X$  に  $X \amalg S$  を対応させる操作が関手性を満たすことを確認せよ。

**問題 11.** 集合  $X$  から新しく  $2X = X \amalg X$  という集合を作る操作を考える。写像に対しても写像  $f : X \rightarrow Y$  から写像  $2f : 2X \rightarrow 2Y$  を作ることができ、上の二つの条件を満たすことを確かめよう。 $2f$  の定義を考え、写像  $f : X \rightarrow Y$  と  $g : Y \rightarrow Z$  に対して  $2(g \circ f) = 2g \circ 2f, 2(\text{id}_X) = \text{id}_{2X}$  であることを証明せよ。

### 2.3.2 直積

二つの集合から、その直積という新しい集合を作る。これは、与えられた二つの集合から一つずつ要素を取り出してペアを作り、それを全て集めた集合である。

**定義 8 (直積).** 集合  $X, Y$  の直積とは  $X$  の要素と  $Y$  の要素を一つずつ並べたペアを全て集めた集合

$$X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X, y \in Y\}$$

**例 14.**  $A = \{a, b, c\}, B = \{d, e\}, C = \{x, y, z\}$  のとき、 $A \times B = \{(a, d), (a, e), (b, d), (b, e), (c, d), (c, e)\}$  である。

**問題 12.** 上の集合  $A = \{a, b, c\}, B = \{d, e\}, C = \{x, y, z\}$  について、 $B \times A, A \times A, B \times C, (A \times B) \times C, A \times (B \times C)$  はそれぞれどのような集合か。

**例 15.**

$$\mathbb{N} \times \mathbb{N} = \{(n, m) \mid n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N}\} = \{(0, 0), (0, 1), (0, 2), \dots, (1, 0), (1, 1), (2, 1), \dots, (2, 0), (2, 1), (2, 2), \dots\}$$

**問題 13.** 集合  $X$  が  $x$  個の要素からなり、集合  $Y$  が  $y$  個の要素からなるとする。このとき、直積集合  $X \times Y$  の要素の個数はいくつか？

直積を用いて集合から新しい集合を作る操作を考えよう。

**例 16.**  $D = \{0, 1\}$  とする。集合  $Y$  から  $Y \times D = Y \times \{0, 1\}$  という集合を作る。

具体的には例えば  $A = \{a, b, c\}$  であれば  $A \times D = \{(a, 0), (a, 1), (b, 0), (b, 1), (c, 0), (c, 1)\}$  であり、 $C = \{d, e\}$  であれば  $C \times D = \{(d, 0), (d, 1), (e, 0), (e, 1)\}$  である。

実はこの操作は集合から新しい集合を作るのみならず、写像から新しく写像を作ることができる。つまり、 $f : X \rightarrow Y$  が与えられたとき、写像  $(f \times D) : X \times D \rightarrow Y \times D$  を作ることができる。これは  $(f \times D)(x, d) = (f(x), d)$  により定まる写像。

$$\text{例えば } f : A \rightarrow B \text{ を } f = \begin{cases} a \mapsto d \\ b \mapsto e \\ c \mapsto e \end{cases} \text{ とする。このとき } (f \times D) = \begin{cases} (a, 0) \mapsto (d, 0) \\ (a, 1) \mapsto (d, 1) \\ (b, 0) \mapsto (e, 0) \\ (b, 1) \mapsto (e, 1) \\ (c, 0) \mapsto (e, 0) \\ (c, 1) \mapsto (e, 1) \end{cases} \text{ となる。}$$

$$g : B \rightarrow C \text{ を } g = \begin{cases} d \mapsto x \\ e \mapsto z \end{cases} \text{ で定めた時、} g \times D \text{ はどのような写像になるか。}$$

この対応が直和のときの IIS と同様に、関手性の二つの条件を満たすかを確認しよう。つまり  $f : X \rightarrow Y$  と  $g : Y \rightarrow Z$  の合成  $g \circ f : X \rightarrow Z$  から  $((f \circ g) \times D)$  を作ると  $(f \times D) \circ (g \times D)$  と一致する。また、恒等写像が  $\text{id}_X \times D = \text{id}_{X \times D}$  を満たす。

実は  $X \times D$  と  $2X = X \amalg X$  は「自然に」同一視できる。



**問題 14.** 集合  $X$  から  $X^2 = X \times X$  という集合を作るという操作を考える。つまり写像  $f : X \rightarrow Y$  から写像  $f^2 : X^2 \rightarrow Y^2$  を作ることができ、関手性の二つの条件を満たすことを確かめよう。 $f^2$  の定義を考え、写像  $f : X \rightarrow Y$  と  $g : Y \rightarrow Z$  に対して  $(g \circ f)^2 = g^2 \circ f^2, (\text{id}_X)^2 = \text{id}_{X^2}$  であることを証明せよ。

### 2.3.3 Hom

二つの集合から、その間の写像全てを集めた集合を作る。

**定義 9.** 集合  $X$  から集合  $Y$  への写像全体の集合を  $\text{Hom}(X, Y)$  とかく。これを  $Y^X$  とも書く。特に  $\text{Hom}(X, X) = \text{End}(X)$  と書く。

**例 17.**  $A = \{a, b, c\}, B = \{d, e\}, C = \{x, y, z\}$  のとき、 $\text{Hom}(A, B) = \{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7, f_8\}$  である。ここで

$$\begin{aligned} f_1 &= \begin{cases} a \mapsto d \\ b \mapsto d \\ c \mapsto d \end{cases} & f_2 &= \begin{cases} a \mapsto d \\ b \mapsto d \\ c \mapsto e \end{cases} & f_3 &= \begin{cases} a \mapsto d \\ b \mapsto e \\ c \mapsto d \end{cases} & f_4 &= \begin{cases} a \mapsto d \\ b \mapsto e \\ c \mapsto e \end{cases} \\ f_5 &= \begin{cases} a \mapsto e \\ b \mapsto d \\ c \mapsto d \end{cases} & f_6 &= \begin{cases} a \mapsto e \\ b \mapsto d \\ c \mapsto e \end{cases} & f_7 &= \begin{cases} a \mapsto e \\ b \mapsto e \\ c \mapsto d \end{cases} & f_8 &= \begin{cases} a \mapsto e \\ b \mapsto e \\ c \mapsto e \end{cases} \end{aligned}$$

である。

**問題 15.** 上の集合  $A = \{a, b\}, B = \{c, d\}, C = \{x, y, z\}$  について、 $\text{Hom}(B, C), \text{Hom}(A, C), \text{Hom}(A, \text{Hom}(B, C))$  はそれぞれどのような集合か。

写像の合成によって、写像  $\text{Hom}(A, B) \times \text{Hom}(B, C) \rightarrow \text{Hom}(A, C)$  が定義される。

**例 18.**

$$\text{Hom}(\mathbb{N}, \mathbb{N}) = \{(a_n) \mid n \in \mathbb{N}, a_n \in \mathbb{N}\} = \{(0, 0, 0, 0, \dots), (1, 0, 1, 1, \dots), (0, 1, 2, 3, \dots), \dots\}$$

**問題 16.** 集合  $X$  が  $x$  個の要素からなり、集合  $Y$  が  $y$  個の要素からなるとする。このとき、 $\text{Hom}(X, Y)$  の要素の個数はいくつか？

**問題 17.**  $S = \{*\}$  を一点集合とする。任意の集合  $X$  に対し、集合  $X$  と  $\text{Hom}(S, X)$  は「自然に」同一視できる。

$X$  から  $\text{Hom}(S, X)$  への写像  $i_X : X \rightarrow \text{Hom}(S, X)$  及び  $\text{Hom}(S, X)$  から  $X$  への写像  $ev_X : \text{Hom}(S, X) \rightarrow X$  を定義しよう。

$$\begin{aligned} i_X : x &\mapsto (* \mapsto x) \\ ev_X : f &\mapsto f(*) \end{aligned}$$

これに対して  $i_X \circ ev_X, ev_X \circ i_X$  がどのようなになるか計算してみよう。

$\text{Hom}$  を使って集合から新しい集合を作る操作を考えよう。

**例 19.** 集合  $X$  に対して新しく  $\text{Hom}(D, X)$  という集合を作る操作を考える。具体的には例えば  $X = A = \{a, b, c\}$  であれば

$$\text{Hom}(D, A) = \left\{ \begin{array}{l} \begin{cases} 0 \mapsto a \\ 1 \mapsto a, \end{cases} \quad \begin{cases} 0 \mapsto a \\ 1 \mapsto b, \end{cases} \quad \begin{cases} 0 \mapsto a \\ 1 \mapsto c, \end{cases} \quad \begin{cases} 0 \mapsto b \\ 1 \mapsto a, \end{cases} \quad \begin{cases} 0 \mapsto b \\ 1 \mapsto b, \end{cases} \\ \begin{cases} 0 \mapsto b \\ 1 \mapsto c, \end{cases} \quad \begin{cases} 0 \mapsto c \\ 1 \mapsto a, \end{cases} \quad \begin{cases} 0 \mapsto c \\ 1 \mapsto b, \end{cases} \quad \begin{cases} 0 \mapsto c \\ 1 \mapsto c \end{cases} \end{array} \right\}$$

となる。

$B = \{d, e\}$  に対しては  $\text{Hom}(D, B)$  はどのような集合か？

実はこの操作は集合から新しい集合を作るのみならず、写像から新しく写像を作ることができる。つまり、 $f : X \rightarrow Y$  が与えられたとき、写像  $\text{Hom}(D, f) : \text{Hom}(D, X) \rightarrow \text{Hom}(D, Y)$  を作ることができる。これは  $\text{Hom}(D, f)(g) = f \circ g$  により定まる写像。

例えば  $f : A \rightarrow B$  を  $f = \begin{cases} a \mapsto d \\ b \mapsto e \\ c \mapsto e \end{cases}$  とする。このとき  $\text{Hom}(D, f) : \text{Hom}(D, A) \rightarrow \text{Hom}(D, B)$  は

$$\begin{array}{lll} \begin{cases} 0 \mapsto a \\ 1 \mapsto a \end{cases} & \mapsto & \begin{cases} 0 \mapsto d \\ 1 \mapsto d, \end{cases} \quad \begin{cases} 0 \mapsto a \\ 1 \mapsto b \end{cases} & \mapsto & \begin{cases} 0 \mapsto d \\ 1 \mapsto e, \end{cases} \quad \begin{cases} 0 \mapsto a \\ 1 \mapsto c \end{cases} & \mapsto & \begin{cases} 0 \mapsto d \\ 1 \mapsto e, \end{cases} \\ \begin{cases} 0 \mapsto b \\ 1 \mapsto a \end{cases} & \mapsto & \begin{cases} 0 \mapsto e \\ 1 \mapsto d, \end{cases} \quad \begin{cases} 0 \mapsto b \\ 1 \mapsto b \end{cases} & \mapsto & \begin{cases} 0 \mapsto e \\ 1 \mapsto e, \end{cases} \quad \begin{cases} 0 \mapsto b \\ 1 \mapsto c \end{cases} & \mapsto & \begin{cases} 0 \mapsto e \\ 1 \mapsto e, \end{cases} \\ \begin{cases} 0 \mapsto c \\ 1 \mapsto a \end{cases} & \mapsto & \begin{cases} 0 \mapsto e \\ 1 \mapsto d, \end{cases} \quad \begin{cases} 0 \mapsto c \\ 1 \mapsto b \end{cases} & \mapsto & \begin{cases} 0 \mapsto e \\ 1 \mapsto e, \end{cases} \quad \begin{cases} 0 \mapsto c \\ 1 \mapsto c \end{cases} & \mapsto & \begin{cases} 0 \mapsto e \\ 1 \mapsto e, \end{cases} \end{array}$$

となる。

$g : B \rightarrow C$  を  $g = \begin{cases} d \mapsto x \\ e \mapsto z \end{cases}$  で定めた時、 $\text{Hom}(D, g)$  はどのような写像になるか。

また、この対応が関手性の二つの性質を満たすことを確かめよう。つまり、 $f : X \rightarrow Y$  と  $g : Y \rightarrow Z$  の合成  $g \circ f : X \rightarrow Z$  から  $\text{Hom}(D, (g \circ f))$  を作ると  $\text{Hom}(D, g) \circ \text{Hom}(D, f)$  と一致する。また、恒等写像が  $\text{Hom}(D, \text{id}_X) = \text{id}_{\text{Hom}(D, X)}$  を満たす。

実は  $X^D$  と  $X^2 = X \times X$  は「自然に」同一視できる。

**問題 18.** 集合  $D = \{0, 1\}$  とする。集合  $X$  に対して新しく  $\text{Hom}(X, D)$  という集合を作る操作を考える。

この操作は集合から新しい集合を作るのみならず、写像から新しく写像を作ることができる。つまり、 $f : X \rightarrow Y$  が与えられたとき、写像  $\text{Hom}(f, D) : \text{Hom}(Y, D) \rightarrow \text{Hom}(X, D)$  を作ることができる。

例えば  $f : A \rightarrow B$  を  $f = \begin{cases} a \mapsto d \\ b \mapsto e \\ c \mapsto e \end{cases}$  とする。このとき、 $\text{Hom}(f, D) : \text{Hom}(B, D) \rightarrow \text{Hom}(A, D)$  がどの

ようになるか計算してみよう。

また、この対応が関手性の二つの性質を満たすことを確かめよう。つまり、 $f : X \rightarrow Y$  と  $g : Y \rightarrow Z$  の合成  $g \circ f : X \rightarrow Z$  から  $\text{Hom}((g \circ f), D)$  を作ると  $\text{Hom}(f, D) \circ \text{Hom}(g, D)$  と一致する。また、恒等写像が

$\text{Hom}(\text{id}_X, D) = \text{id}_{\text{Hom}(X, D)}$  を満たす。

**例 20.** 上の対応で、 $f : A \rightarrow B$  と  $g : B \rightarrow C$  の合成  $g \circ f : A \rightarrow C$  から  $((f \circ g) \amalg S)$  を作ると  $(f \amalg S) \circ (g \amalg S)$  と一致する。また、恒等写像が  $\text{id}_A \amalg S = \text{id}_{A \amalg S}$  を満たす。

$$\text{Hom}(X, Z) \rightarrow \text{Hom}(Y, Z), \text{Hom}(X, Y) \rightarrow \text{Hom}(X, Z)$$

### 2.3.4 直和、直積、Hom の相互関係と普遍性

さて、三つの集合  $X, Y, Z$  が与えられた時、

1. それらの直積  $(X \times Y) \times Z$  と  $X \times (Y \times Z)$  は同じ集合か？
2. また  $X \times Y$  と  $Y \times X$  は同じ集合か？
3. 二つの集合  $\{a, b\}$  と  $\{1, 2\}$  は同じ集合か？
4. 二つの集合  $\{a\}$  と  $\{1\}$  は同じ集合か？

というようなことを考える。こういったことを数学的に扱うための概念として、普遍性というものがある。それについて簡単に紹介しよう。

**例 21** (直和の普遍性). 集合  $X$  と集合  $Y$  の直和  $X \amalg Y$  は写像  $i_1 : X \rightarrow X \amalg Y$  と  $i_2 : Y \rightarrow X \amalg Y$  を持つ。

このように  $X$  からの写像と  $Y$  からの写像を共に持つ集合  $Z$  と  $j_1 : Z \rightarrow X, j_2 : Z \rightarrow Y$  たちの中で、最もえらい集合が直和  $X \amalg Y$  である。つまり、そのような  $Z$  に対し、必ずただ一つの写像  $u : X \amalg Y \rightarrow Z$  が存在し、 $j_1 \circ u = i_1, j_2 \circ u = i_2$  を満たす。

これを写像の言葉で表すと、

$$\text{Hom}(Z, X \amalg Y) = \text{Hom}(Z, X) \times \text{Hom}(Z, Y)$$

であり、これが全ての  $Z$  に対して「自然に」成り立つ。

この普遍性を利用して、次の集合の同一視を行う。このような議論は圏論で非常によくあるもの。

**問題 19.** 普遍性を利用して次の「等式」を証明せよ。

$$\begin{aligned} (X \amalg Y) \amalg Z &= X \amalg (Y \amalg Z) \\ X \amalg Y &= Y \amalg X \end{aligned}$$

**例 22.** 直積への写像と直積からの写像

**問題 20.**  $X = \{a, b, c\}, Y = \{d, e\}, Z = \{f, g, h\}$  のとき、 $\text{Hom}(X \times Y, Z)$  はどのような集合か？

**例 23** (直積の普遍性). 集合  $X$  と集合  $Y$  の直積  $X \times Y$  は写像  $pr_1 : X \times Y \rightarrow X$  と  $pr_2 : X \times Y \rightarrow Y$  を持つ。

このように  $X$  への写像と  $Y$  への写像を共に持つ集合  $Z$  と  $q_1 : Z \rightarrow X, q_2 : Z \rightarrow Y$  たちの中で、最もえらい集合が直積  $X \times Y$  である。つまり、そのような  $Z$  に対し、必ずただ一つの写像  $u : Z \rightarrow X \times Y$  が存在し、 $u \circ pr_1 = q_1, u \circ pr_2 = q_2$  を満たす。

これを写像の言葉で表すと、

$$\text{Hom}(X \times Y, Z) = \text{Hom}(X, Z) \times \text{Hom}(Y, Z)$$

であり、これが全ての  $Z$  に対して「自然に」成り立つ。

この普遍性を利用して、次の集合の同一視を行う。このような議論は圏論で非常によくあるもの。

**問題 21.** 普遍性を利用して次の「等式」を証明せよ。

$$\begin{aligned}(X \times Y) \times Z &= X \times (Y \times Z) \\ X \times Y &= Y \times X\end{aligned}$$

**問題 22** (直和と直積の関係). 普遍性を利用して次の「等式」を証明せよ。

$$\begin{aligned}(X \amalg Y) \amalg Z &= X \amalg (Y \amalg Z) \\ (X \amalg Y) \times Z &= (X \times Z) \amalg (Y \times Z)\end{aligned}$$

**例 24** ( $\text{Hom}$  の普遍性).

**問題 23** (指数法則). 普遍性を利用して次の「等式」を証明せよ。

$$\begin{aligned}\text{Hom}(X \times Y, Z) &= \text{Hom}(X, \text{Hom}(Y, Z)) \\ \text{Hom}(X, Y \times Z) &= \text{Hom}(X, Y) \times \text{Hom}(X, Z) \\ \text{Hom}(X \amalg Y, Z) &= \text{Hom}(X, Z) \times \text{Hom}(Y, Z)\end{aligned}$$

**問題 24.** 上の  $\text{Hom}$  と  $\times, \amalg$  についての関係を  $\text{Hom}(X, Y) = Y^X$  の記法で表すとどのようなになるか？

### 2.3.5 べき集合

**定義 10** (部分集合). 集合  $X$  の部分集合とは、 $X$  の要素の一部からなる集合のこと。ただし、空集合  $\emptyset$  と  $X$  自身も部分集合である。

$A$  が  $X$  の部分集合であることを  $A \subset X$  で表す。

**例 25.**  $X = \{a, b\}$  であれば、 $X$  の部分集合は  $\emptyset, \{a\}, \{b\}, X$  の合計 4 つ。

**定義 11** (順像と逆像). 写像  $f : X \rightarrow Y$  があるとする。部分集合  $U \subset X$  の  $f$  による順像とは  $f(U) = \{f(x) \in Y \mid x \in U\} \subset Y$  のこと。部分集合  $V \subset Y$  の  $f$  による逆像とは  $f^{-1}(V) = \{x \in X \mid f(x) \in V\} \subset X$  のこと。

**例 26.**  $A = \{a, b, c\}, B = \{d, e\}, C = \{x, y, z\}$  とする。  $f : A \rightarrow B$  を  $f = \begin{cases} a \mapsto d \\ b \mapsto e \\ c \mapsto e \end{cases}$  とする。

**問題 25.**  $A = \{a, b, c\}, B = \{d, e\}, C = \{x, y, z\}$  とする。  $g : B \rightarrow C$  を  $g = \begin{cases} d \mapsto x \\ e \mapsto z \end{cases}$  とする。

**定義 12** (冪集合). 集合  $X$  に対して、その部分集合を全て集めた集合を冪集合といい  $P(X)$  と書く。

**例 27.**  $D = \{0, 1\}$  のとき  $P(D) = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, D\}$  である。

**問題 26.**  $A = \{a, b, c\}$  のとき  $P(A)$  はどのような集合か。

$P$  は集合  $X$  から集合  $P(X)$  を作る操作で、写像  $f: X \rightarrow Y$  から  $f^{-1}: P(Y) \rightarrow P(X), f: P(X) \rightarrow P(Y)$  を対応させる。この対応は関手性の二つの条件を満たす。つまり、

$$\begin{aligned} f^{-1}(g^{-1}(W)) &= (g \circ f)^{-1}(W) \\ \text{id}_X^{-1}(U) &= U \\ g(f(U)) &= (g \circ f)(U) \\ \text{id}_X(U) &= U \end{aligned}$$

を満たす。

**問題 27.**  $f_!(U) = \{y \in Y \mid f^{-1}(y) \subset U\}$  とする。

$f^{-1}(V) \subset U$  と  $V \subset f(U)$  が同値であることを示せ。 $f_!(U) \subset V$  と  $f^{-1}(V) \subset U$  が同値であることを示せ。

**例 28.**  $P(X)$  と  $D^X = \text{Hom}(X, D)$  は「自然に」対応する。

集合  $D^X$  の元として特性関数がある。これは  $X$  の部分集合  $A$  を用いて定義される写像  $X \rightarrow D$  で、

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & (x \in A) \\ 0 & (x \notin A) \end{cases}$$

で定まるものである。

逆に  $f: X \rightarrow D$  から部分集合を  $f^{-1}(1) \subset X$  で定める。

これら互いに逆の対応を与えてることを確かめよう。

### 2.3.6 文字列集合

**定義 13** (文字列集合).  $X$  に対して長さが有限の  $X$  の要素の文字列全体の集合  $W(X)$  を対応させる。ここで空文字列「」も考え、これを 1 と表す。

**例 29.**  $A = \{a\}$  のとき、 $W(A) = \{1, a, aa, aaa, aaaa, \dots\}$  であり、 $A = \{a, b\}$  のとき、 $W(A) = \{1, a, b, ab, aa, bb, ba, aaa, \dots\}$  である。

**問題 28.** 上の対応は写像  $f: X \rightarrow Y$  があれば  $W(f): W(X) \rightarrow W(Y)$  が定めることができる。 $W(g \circ f) = W(g) \circ W(f), W(\text{id}_X) = \text{id}_{W(X)}$  であり、関手性の条件を満たす。

## 2.4 点付き集合

集合  $X$  の一つの要素  $x$  を特別視することで、点付き集合という構造を定める。数学では、集合とそれに何らかの構造を付け加えたものをよく扱う。この後に出てくる代数構造であったり順序構造、また圏もそのようなものと捉えることができる。そういった構造の中で、最もシンプルなのがこの点付き集合の構造である。

**定義 14.** 点付き集合  $(X, x)$  とは集合  $X$  とその要素  $x \in X$  の組のことをいう。

**例 30.** 集合  $A = \{a, b, c\}$  に対しては、 $(A, a), (A, b), (A, c)$  というふた通りの点付き集合の構造を定めることができる。

**例 31.** 集合  $B = \{d, e\}$  に対して定まる点付き集合の構造をすべて述べよ。

**例 32.** 例えば  $\text{End}(X)$  には  $\text{id}_X$  という特別な要素が定まっているので、これは「自然に」点付き集合とみなすことができる。

**定義 15.** 点付き集合の射とは、集合の写像であって、ついている点をついている点に写すもの。つまり  $f : (X, x) \rightarrow (Y, y)$  とは集合の写像  $f : X \rightarrow Y$  であって、 $f(x) = y$  となるもの。

**例 33.** 点付き集合  $(X, x) = (\{a, b\}, a)$ ,  $(Y, y) = (\{c, d, e\}, d)$  に対して、これらの間の写像  $f : (X, x) \rightarrow (Y, y)$  をすべて列挙せよ。

この射の定義に現れる条件を、可換図式というものを使って表そう。

$$\begin{array}{ccc} \{x\} & \xrightarrow{f} & \{y\} \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

点付き集合の射の合成は点付き集合の射であり、恒等写像は点付き集合の射になる。これも可換図式を書いて確かめる。

$$\begin{array}{ccccc} \{x\} & \xrightarrow{f} & \{y\} & \xrightarrow{g} & \{z\} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \{x\} & \xrightarrow{\text{id}_x} & \{x\} \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \xrightarrow{\text{id}_x} & X \end{array}$$

**例 34.** 一点集合  $(S, *)$  が始対象かつ終対象である。

**例 35 (直和の普遍性).** 点付き集合  $(X, x)$  と  $(Y, y)$  の直和は  $(X - \{x\} \amalg Y - \{y\} \amalg \{*, *\}, *)$  である。

点付き集合の射  $i_1 : (X, x) \rightarrow (X - \{x\} \amalg Y - \{y\} \amalg \{*, *\}, *)$  と  $i_2 : (Y, y) \rightarrow (X - \{x\} \amalg Y - \{y\} \amalg \{*, *\}, *)$  を持つ。

さらに、点付き集合  $(Z, z)$  と点付き集合の射  $j_1 : (Z, z) \rightarrow (X, x)$ ,  $j_2 : (Z, z) \rightarrow (Y, y)$  に対し、必ずただ一つの点付き集合の射  $u : (X - \{x\} \amalg Y - \{y\} \amalg \{*, *\}, *) \rightarrow (Z, z)$  が存在し、 $j_1 \circ u = i_1$ ,  $j_2 \circ u = i_2$  を満たす。

**例 36 (直積の普遍性).** 点付き集合  $(X, x)$  と  $(Y, y)$  の直積は  $(X \times Y, (x, y))$  である。

点付き集合の射  $pr_1 : (X \times Y, (x, y)) \rightarrow (X, x)$  と  $pr_2 : (X \times Y, (x, y)) \rightarrow (Y, y)$  を持つ。

さらに、点付き集合  $(Z, z)$  と点付き集合の射  $q_1 : (Z, z) \rightarrow (X, x)$ ,  $q_2 : (Z, z) \rightarrow (Y, y)$  に対し、必ずただ一つの点付き集合の射  $u : (Z, z) \rightarrow (X \times Y, (x, y))$  が存在し、 $u \circ pr_1 = q_1$ ,  $u \circ pr_2 = q_2$  を満たす。

集合から点付き集合を構成する。 $X$  に対して  $X* = (X \amalg S, *)$  という点付き集合を対応させる。 $f : X \rightarrow Y$  に対して  $f* = f \amalg S : X* = (X \amalg S, *) \rightarrow Y* = (Y \amalg S, *)$  という点付き集合の射を対応させる。

**問題 29.** いつもの関手性を確かめようつまり  $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$ ,  $(\text{id}_X)_* = \text{id}_{X*}$  となるか？

点付き集合から集合を構成する。点付き集合  $(X, x)$  に対して  $X$  を対応させる。点付き集合の射  $f : (X, x) \rightarrow (Y, y)$  に対して  $f : X \rightarrow Y$  を対応させる。

**問題 30.** いつもの関手性を確かめよう。

### 3 モノイド

数学では群や環などという代数系と呼ばれる構造をしばしば考える。モノイドもそのような例の一つだが、これは圏論と非常に関係の深いものである。それについて紹介することで、より圏について馴染みやすいようにしよう。

モノイドの最も基本的な例としては、自然数とその足し算がある。

#### 3.1 モノイドの定義と例

**定義 16** (モノイド).  $M$  と写像  $\mu_M : M \times M \rightarrow M$  及び特別な要素  $1_M \in M$  の組  $(M, \mu_M, 1_M)$  であって、次の性質を満たすもの

$$\begin{aligned}\mu_M(\mu_M(x, y), z) &= \mu_M(x, \mu_M(y, z)) \\ \mu_M(x, 1_M) &= x \\ \mu_M(1_M, x) &= x\end{aligned}$$

単に  $M$  と省略する。 $\mu_M$  を演算、 $1_M$  を単位元と呼ぶ。

これを図式で書いてみよう。

$$\begin{array}{ccc} M \times M \times M & \xrightarrow{\mu_x \times \text{id}_M} & M \times M \\ \text{id}_M \times \mu_M \downarrow & & \mu_M \downarrow \\ M \times M & \xrightarrow{\mu_M} & M \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} M \times \{1_M\} & \xrightarrow{\text{id}_M \times i_M(1_M)} & M \times M \\ pr_1 \downarrow & & \mu_M \downarrow \\ M & \xrightarrow{\text{id}_M} & M \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \{1_M\} \times M & \xrightarrow{i_M(1_M) \times \text{id}_M} & M \times M \\ pr_2 \downarrow & & \mu_M \downarrow \\ M & \xrightarrow{\text{id}_M} & M \end{array}$$

**例 37.** 自然数全体の集合  $\mathbb{N}$  を  $M$  として、演算  $\mu : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  を普通の足し算  $+: (n, m) \mapsto n + m$  でさだめよう。このとき、単位元は  $0 \in \mathbb{N}$  として、 $(\mathbb{N}, +, 0)$  はモノイドになる。

**例 38.** 自然数全体の集合  $\mathbb{N}$  を  $M$  として、演算  $\mu : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  を普通の掛け算  $*: (n, m) \mapsto nm$  でさだめよう。このとき、単位元は  $1 \in \mathbb{N}$  として、 $(\mathbb{N}, *, 1)$  はモノイドになる。

**例 39.**  $M$  の要素の個数が2であるようなモノイドにはどのようなものがあるか考えてみよう。 $M = \{a, b\}$  とおいてみる。モノイドを定義するには、特別な要素  $1_M \in M$  と写像  $\mu_M : M \times M \rightarrow M$  を決める必要がある。 $1_M = a$  とするか、 $1_M = b$  とするかはふた通りの場合があるがどちらでも同じなので  $1_M = a$  としてみる。



$\mu_M : M \times M \rightarrow M$  を決める必要がある。まず集合の写像として可能性は 16 通りある。そのうちで、 $1_M$  の行き先は自動的に決まることから絞り込めて、

これらのそれぞれについて、モノイドの定義を満たすかを確認してみよう。

**問題 31.**  $\{a, b\}$  という集合を  $M$  とするとき、 $M$  をモノイドにするような  $\mu_M, 1_M$  の決め方は何通りあるか？

**問題 32.**  $M$  の要素の個数が 3 であるようなモノイドにはどのようなものがあるか？

**例 40** (集合の自己写像).  $X$  を集合とし、 $\text{End}(X) = \text{Hom}(X, X) = \{f : X \rightarrow X\}$  とする。このとき、 $\text{End}(X)$  の演算を写像の合成  $(f, g) \mapsto f \circ g$  でさだめ、 $1 = \text{id}_X$  とする。これにより  $(\text{End}(X), \circ, \text{id}_X)$  はモノイドになる。

例えば  $X = \{a, b\}$  としよう。このとき、 $\text{End}(X) = \text{End}(\{a, b\})$  はどのようなモノイドか？

**定義 17** (モノイドの射). モノイド  $M, N$  について、 $M$  から  $N$  への射とは、集合の写像  $f : M \rightarrow N$  であって、以下を満たすもの

$$\begin{aligned} f(\mu_M(x, y)) &= \mu_N(f(x), f(y)) \\ f(1_M) &= 1_N \end{aligned}$$

これを可換図式で書いてみよう。

$$\begin{array}{ccc} M \times M & \xrightarrow{\mu_M} & M \\ f \times f \downarrow & & \downarrow f \\ N \times N & \xrightarrow{\mu_N} & N \end{array}$$
  

$$\begin{array}{ccc} \{1_M\} & \longrightarrow & M \\ f \downarrow & & \downarrow f \\ \{1_N\} & \longrightarrow & N \end{array}$$

**例 41.** 加法によるモノイド  $\mathbb{N}$  からそれ自身へのモノイドの射は  $f(n) = n, f(n) = 2n$  などがある。

**問題 33.**  $D = \{0, 1\}$  に  $\mu(1, 1) = 0$  によりモノイドの構造を定める。このとき、モノイドの射  $D \rightarrow D, D \rightarrow \mathbb{N}, \mathbb{N} \rightarrow D$  にはどのようなものがあるか。

**問題 34.** 合成はまたモノイドの射であり、恒等写像もモノイドの射である。これを可換図式を書くことで確かめよう。

**例 42** (一点モノイド).  $S = \{*\}$  に  $\mu(*, *) = *, 1 = *$  としてモノイドの構造を定める。これは始対象かつ終対象である。

**定義 18** (直積). モノイド  $M$  と  $N$  の直積とは、集合としての直積  $M \times N$  に、単位元を  $(1_M, 1_N)$  で、演算を  $(m, n)(m', n') = (mm', nn')$  で定めたもの。これがモノイドになるか確かめよう。

また  $M \times N \rightarrow M, M \times N \rightarrow N$  を  $(m, n) \mapsto m, (m, n) \mapsto n$  で定める。これらはモノイドの射になるか確かめよう。

**例 43** (直積の普遍性). モノイドの直積  $M \times N$  はモノイドの射  $pr_1 : M \times N \rightarrow M$  と  $pr_2 : M \times N \rightarrow N$  を持つ。

モノイド  $Z$  とモノイドの射  $q_1 : Z \rightarrow M, q_2 : Z \rightarrow N$  に対し、必ずただ一つのモノイドの射  $u : Z \rightarrow M \times N$  が存在し、 $u \circ pr_1 = q_1, u \circ pr_2 = q_2$  を満たす。

**定義 19** (直和). モノイド  $M$  と  $N$  の直和とは、集合としての直積  $M \times N$  に、単位元を  $(1_M, 1_N)$  で、演算を  $(m, n)(m', n') = (mm', nn')$  で定めたもの。これがモノイドになるか確かめよう。

また  $M \rightarrow M \times N, N \rightarrow M \times N$  を  $m \mapsto (m, 1_N), n \mapsto (1_M, n)$  で定める。これらはモノイドの射になるか確かめよう。

**例 44** (直和の普遍性). モノイドの直和  $M \amalg N$  は写像  $i_1 : M \rightarrow M \amalg N$  と  $i_2 : N \rightarrow M \amalg N$  を持つ。

モノイド  $Z$  とモノイドの射  $j_1 : Z \rightarrow M, j_2 : Z \rightarrow N$  たちに対し、必ずただ一つのモノイドの射  $u : M \amalg N \rightarrow Z$  が存在し、 $j_1 \circ u = i_1, j_2 \circ u = i_2$  を満たす。

集合からモノイドを構成する方法を二つ与えよう。

**例 45** (自由モノイド). 集合  $X$  に対して、 $X$  が生成する自由モノイド  $FX$  とは、長さが有限の  $X$  の要素の文字列全体の集合に演算は文字列の結合で定めたこと。ここで単位元は空文字列「」で、これを 1 と表す。

例えば  $X = \{a\}$  のとき、 $FX = \{1, a, aa, aaa, aaaa, \dots\}$  であり、 $\mu(aa, aaa) = aaaaa$  などとなる。  
 $X = \{a, b\}$  のとき、 $FX = \{1, a, b, ab, aa, bb, ba, aaa, \dots\}$  であり、 $\mu(aba, bba) = ababba$  などとなる。

これは関手性をもつ。つまり写像  $f : X \rightarrow Y$  があればモノイドの射  $Ff : FX \rightarrow FY$  が定まり、いつもの二条件を満たす。 $F(g \circ f) = Fg \circ Ff, F(\text{id}_X) = \text{id}_{FX}$

自由モノイドからの射

**例 46.** 集合  $X$  に対して写像全体の集合  $\text{Hom}(X, \mathbb{N})$  モノイドの構造を定める。 $f : X \rightarrow \mathbb{N}$  と  $g : X \rightarrow \mathbb{N}$  に対して  $\mu(f, g) : x \mapsto f(x) + g(x)$  で定める。

これは関手になる。

**例 47.**  $FX \rightarrow \text{Hom}(X, \mathbb{N})$  という「自然な」写像がある。 $X$  の文字列に対して、 $X$  の書く文字の出現回数を数えることで  $f : X \rightarrow \mathbb{N}$  を定義することができる。例えば  $X = A = \{a, b, c\}$  とすると、 $abac$  が定める写像は  $f(a) = 2, f(b) = 1, f(c) = 1$  など。

**例 48** (忘却関手). モノイド  $(M, \mu_M, 1_M)$  に対して、単に集合  $M$  を対応させる。

## 3.2 モノイドの作用

**定義 20** ( $M$  代数).  $M$  をモノイドとする。 $M$  の集合  $X$  への作用  $\alpha$ 、または  $M$  代数  $(X, \alpha)$  とは、集合  $X$  と写像  $\alpha : M \times X \rightarrow X$  で

$$\begin{aligned}\alpha(m, \alpha(n, x)) &= \alpha(mn, x) \\ \alpha(1_M, x) &= x \\ \alpha(x, 1_M) &= x\end{aligned}$$

を満たすもの。

多くの場合、 $\alpha(m, x) = mx$  と略記する。

**問題 35.** この条件を可換図式で表してみよう

**例 49.**  $\text{End}(X)$  は  $X$  へ自然に作用する。 $(f, x) \mapsto f(x)$  がこの作用を与える。

**問題 36.**  $\text{End}(X)$  は  $\text{Hom}(X, Y), \text{Hom}(Y, X)$  へも自然に作用する。

**問題 37.** 二点モノイド  $M = \{0, 1\}, \mu_M(1, 1) = 0$  について、 $M$  代数を考えよう。 $A = \{a, b, c\}, B = \{d, e\}$  に  $M$  作用を定めよう。

**問題 38.**  $\mathbb{N}$  代数の例を考えよう。集合  $X$  に  $\mathbb{N}$  代数の構造を与えることは、実は  $f \in \text{End}(X)$  を指定してやることと同じであることを確かめよ。

**定義 21** (射). 集合の写像  $f: X \rightarrow Y$  であって、 $f(\alpha_X(m, x)) = \alpha_Y(m, f(x))$  を満たすもの。

これを可換図式で書いてみよう。

$$\begin{array}{ccc} M \times X & \xrightarrow{\alpha_X} & X \\ \text{id}_M \times f \downarrow & & \downarrow f \\ M \times Y & \xrightarrow{\alpha_Y} & Y \end{array}$$

**問題 39.**  $M$  代数の直和、直積、始対象、終対象などがどのようなになるか考え、それらが普遍性を持つこと確かめよ。

## 4 順序集合

自然数全体の集合  $\mathbb{N}$  には通常的大小関係で順序  $\leq$  が定まっている。例えば  $2 \leq 3, 4 \leq 9$  などであり、 $2 \not\leq 1, 5 \not\leq 3$  などである。

このような順序関係の定まった集合を抽象的にとりあつかうのが順序集合の概念である。

順序は二つの元に対して成り立つか成り立たないかを返す関数とみなせる。つまり  $R: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \{\leq, \not\leq\}$  として、 $R(2, 3) = \leq, R(4, 9) = \leq, R(2, 1) = \not\leq, R(5, 3) = \not\leq$  のように。しかし、実際には  $R(n, m) = \leq$  であることを  $n \leq m$  と表し、 $R(n, m) = \not\leq$  であることを  $n \not\leq m$  で表すことに注意しよう。

**定義 22** (順序集合). 集合  $X$  と順序関係  $\leq$  の組  $(X, \leq)$  であって、以下の条件をみたすもの。

$$x \leq y \text{ かつ } y \leq z \text{ ならば } x \leq z$$

$$x \leq y \text{ かつ } y \leq x \text{ ならば } x = y$$

$$x \leq x$$

全ての要素に対して順序関係が成り立ってなくてもよいことに注意。つまり  $x \not\leq y$  かつ  $y \not\leq x$  なることも許容する。

**例 50** (自然数の大小). 自然数全体の集合  $\mathbb{N}$  に通常的大小関係を定めることで順序集合  $(\mathbb{N}, \leq)$  が定まる。

これは言い換えると、 $m \leq n$  とはある自然数  $k$  が存在して  $n = m + k$  となることであり、これを「 $\exists k, n = m + k$ 」のように表す。

これが上の 3 条件を満たすことを確かめよう。

$l \leq m$  かつ  $m \leq n$  ならば  $\exists k, m = l + k, \exists k', n = m + k'$  であり、 $n = l + k + k'$  である。

$\exists k, n = m + k$  かつ  $\exists k', m = n + k'$  ならば  $n = n + k + k'$  であり  $k + k' = 0$  で  $k = k' = 0$  である。

$n = n + 0$  である。

**問題 40** (自然数と整序関係).  $n$  が  $m$  の倍数である時に  $m \leq n$  と定める。

例えば  $2 \leq 4, 3 \leq 15$  だが、 $2 \not\leq 3, 5 \not\leq 9, 9 \not\leq 5$  などである。

これは言い換えると、ある自然数  $k$  が存在して  $n = mk$  となることであり、これを「 $\exists k, n = mk$ 」のように表す。

これが上の 3 条件を満たすことを確かめよう。

**例 51.**  $A = \{a, b\}$  に対して順序集合の構造を定めよう。

$$a \leq a, b \leq b, a \not\leq b, b \not\leq a$$

$$a \leq a, b \leq b, a \leq b, b \not\leq a$$

$$a \leq a, b \leq b, a \not\leq b, b \leq a$$

で全て。

実際には  $\leq$  であることは省略する。つまり上の三つの順序はそれぞれ

$$\begin{aligned}a &\leq a, b \leq b \\a &\leq a, b \leq b, a \leq b \\a &\leq a, b \leq b, b \leq a\end{aligned}$$

というように表せばよい。さらに  $a \leq a, b \leq b$  も省略しても構わない。

順序集合を表すためには、次のような図を使うと見やすい。

**問題 41.**  $A = \{a, b, c\}$  に対して定まる順序集合の構造を全て列挙せよ。

**例 52.** 集合  $X$  に対し、その冪集合  $P(X)$  に順序集合の構造を次のように定める。

$A, B \in P(X)$  に対して  $A \subset B$  であるとき  $A \leq B$  とする。

**例 53.** 例えば  $P(\{a, b\})$  であれば、 $\emptyset \leq \{a\}, \emptyset \leq \{b\}, \emptyset \leq \{a, b\}, \{a\} \leq \{a, b\}, \{b\} \leq \{a, b\}$  である。

**問題 42.**  $X = \{a, b, c\}$  のとき、上で定めた  $P(X)$  の順序集合の構造がどのようなものか確かめよ。

このような順序集合の構造を  $P(X)$  に「自然に」定まる順序集合という。「自然に」というのは、集合  $X$  のみの情報から、全ての集合  $X$  に対して一斉に同じような方法で  $P(X)$  順序集合の構造をさだめることができる、ということ。

**定義 23.**  $(X, \leq)$  を順序集合とする。

$X$  の要素  $x$  が最小元とは、任意の  $y \in X$  に対して  $x \leq y$  であること。つまり「 $\forall y \in Y, x \leq y$ 」であること。

$X$  の要素  $x$  が最大元とは、任意の  $y \in X$  に対して  $y \leq x$  であること。つまり「 $\forall y \in Y, y \leq x$ 」であること。

**注意 1.** 最小元や最大元は必ずしも存在するとは限らない

**例 54.** 大小関係による順序集合  $\mathbb{N}$  において、 $0$  は最小元であり、最大元は存在しない。

**問題 43.** 集合  $X$  のべき集合  $P(X)$  に自然に定まる順序集合には必ず最小元と最大元が存在することを示せ。

**定義 24** (順序集合の射).  $f : X \rightarrow Y$  が順序集合の射であるとは、 $x, y \in X$  について  $x \leq y$  ならば  $f(x) \leq f(y)$  であること。

**問題 44.** これを図式で表すことは可能か？

順序集合の射全体を  $\text{Posets}(X, Y)$  とかく。これは  $\text{Hom}(X, Y)$  の部分集合。

合成するとまた順序集合の射になり、恒等写像は順序集合の射である。

**例 55.**  $D = \{0, 1\}$  に通常の順序  $0 \leq 1$  を定めた順序集合から  $\mathbb{N}$  への射はどのようなものがあるか。

**例 56.**  $A = \{a, b, c\}$  に  $a \leq b, a \leq c$  として定まった順序集合から  $\mathbb{N}$  への射はどのようなものがあるか。

公倍数や公約数のようなものを順序集合の射として取り出すことができる。

**定義 25** (直和). 順序集合  $X, Y$  の直和とは、集合としての直和  $X \amalg Y$  に以下のようにして順序を定めたもの。

$$\begin{cases} x, y \in X \text{ なら } X \text{ での順序} \\ x, y \in Y \text{ なら } Y \text{ での順序} \\ x \in X, y \in Y \text{ または } x \in Y, y \in X \text{ なら順序なし} \end{cases}$$

$i_1 : X \rightarrow X \amalg Y, i_2 : Y \rightarrow X \amalg Y$  は順序集合の射である。

**例 57** (直和の普遍性). 順序集合  $X$  と順序集合  $Y$  の直和  $X \amalg Y$  は順序集合の射  $i_1 : X \rightarrow X \amalg Y$  と  $i_2 : Y \rightarrow X \amalg Y$  を持つ。

順序集合  $Z$  と順序集合の射  $j_1 : Z \rightarrow X, j_2 : Z \rightarrow Y$  に対し、必ずただ一つの順序集合の射  $u : X \amalg Y \rightarrow Z$  が存在し、 $j_1 \circ u = i_1, j_2 \circ u = i_2$  を満たす。

**定義 26** (直積). 順序集合  $X, Y$  の直積とは、集合としての直積  $X \times Y$  に以下のようにして順序を定めたもの。  $(x, y) \leq (x', y')$  であることは  $x \leq x'$  かつ  $y \leq y'$  であること

$pr_1 : X \times Y \rightarrow X, pr_2 : X \times Y \rightarrow Y$  は順序集合の射である。

**例 58** (直積の普遍性). 順序集合  $X$  と順序集合  $Y$  の直積  $X \times Y$  は順序集合の射  $pr_1 : X \times Y \rightarrow X$  と  $pr_2 : X \times Y \rightarrow Y$  を持つ。

順序集合  $Z$  と順序集合の射  $q_1 : Z \rightarrow X, q_2 : Z \rightarrow Y$  に対し、必ずただ一つの順序集合の射  $u : Z \rightarrow X \times Y$  が存在し、 $u \circ pr_1 = q_1, u \circ pr_2 = q_2$  を満たす。

**問題 45.** 点付き集合から順序集合へ、 $(X, x)$  に対し  $y \leq x$  のみを順序にもつ順序集合を定める。点付き集合の射  $f : (X, x) \rightarrow (Y, y)$  が定める  $f : X \rightarrow Y$  はこの順序について順序集合の射であることを確かめよう。

## 5 圏

ここまで見てきた集合、点付き集合、モノイド、順序集合などを集めて圏を作る。また単一の集合、モノイド、順序集合はそれ自体で圏とみなすこともできる。また、より一般に集合に適当な構造がついたものとして圏を理解することもできる。

**定義 27.**  $C$  が圏であるとは対象の集合  $\text{Ob}(C)$  と各対象  $x, y \in \text{Ob}(C)$  に対して射の集合  $C(x, y)$  及び、恒等射  $\text{id}_x \in C(x, x)$  と合成  $C(x, y) \times C(y, z) \rightarrow C(x, z)$  が定まっていて、次の性質を満たす。

合成が結合的、恒等射が単位元

**例 59.**  $C = \{0 \rightarrow 1\}$  とする。これは正確には対象が  $0, 1$  の二つで、射は

$$C(0, 0) = \{\text{id}_0\}$$

$$C(0, 1) = \{f\}$$

$$C(1, 0) = \emptyset$$

$$C(1, 1) = \{\text{id}_1\}$$

として定まる圏。ここで、射の合成は自動的に決まることに注意。

**例 60.**  $C = \{1 \rightarrow 0\}$  とする。これは正確には対象が  $0, 1$  の二つで、射は

$$C(0, 0) = \{\text{id}_0\}$$

$$C(1, 0) = \{s, t\}$$

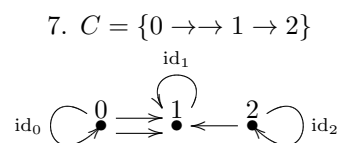
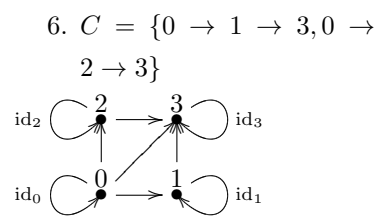
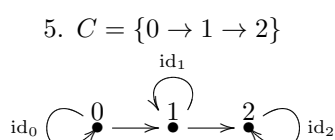
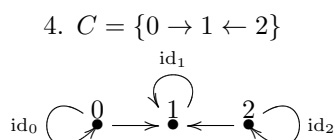
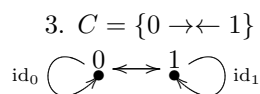
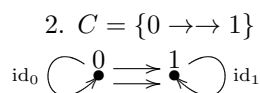
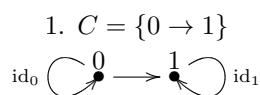
$$C(0, 1) = \emptyset$$

$$C(1, 1) = \{\text{id}_1\}$$

として定まる圏。

ここで、射の合成は自動的に決まることに注意。

これらを含め、いくつかの圏について絵を描いて理解しよう。



**例 61.** 集合の全体のなす圏  $\mathbf{Sets}$  を以下のようにして定める。

- $\mathbf{Ob}(\mathbf{Sets})$  は集合全体
- 集合  $x, y$  に対して  $\mathbf{Sets}(x, y) = \mathbf{Hom}(x, y)$  は  $x$  から  $y$  への写像全体。

これに対し、恒等射は恒等写像  $\mathrm{id}_x$  で合成は写像の合成で定めると、圏の定義を満たす。

**例 62.** 点付き集合全体のなす圏  $\mathbf{Sets}_*$  を以下のようにして定める。

- $\mathbf{Ob}(\mathbf{Sets}_*)$  は点付き集合全体
- 点付き集合  $x, y$  に対して  $\mathbf{Sets}_*(x, y)$  は  $x$  から  $y$  への点付き集合の射全体。

これに対し、恒等射は恒等写像  $\mathrm{id}_x$  で合成は写像の合成で定めると、圏の定義を満たす。

**例 63.** モノイド全体のなす圏  $\mathbf{Monoids}$  を以下のようにして定める。

- $\mathbf{Ob}(\mathbf{Monoids})$  はモノイド全体
- モノイド  $x, y$  に対して  $\mathbf{Monoids}(x, y)$  は  $x$  から  $y$  へのモノイドの射全体。

これに対し、恒等射は恒等写像  $\mathrm{id}_x$  で合成は写像の合成で定めると、圏の定義を満たす。

**例 64.** モノイド  $M$  に対して、 $M$  代数全体のなす圏  $M - \mathbf{Algs}$  を以下のようにして定める。

- $\mathbf{Ob}(M - \mathbf{Algs})$  は  $M$  代数全体
- $M$  代数  $x, y$  に対して  $M - \mathbf{Algs}(x, y)$  は  $x$  から  $y$  への  $M$  代数の射全体。

これに対し、恒等射は恒等写像  $\mathrm{id}_x$  で合成は写像の合成で定めると、圏の定義を満たす。

**例 65.** 順序集合全体のなす圏  $\mathbf{Posets}$  を以下のようにして定める。

- $\mathbf{Ob}(\mathbf{Posets})$  は集合全体
- 順序集合  $x, y$  に対して  $\mathbf{Posets}(x, y)$  は  $x$  から  $y$  への順序集合の射全体。

これに対し、恒等射は恒等写像  $\mathrm{id}_x$  で合成は写像の合成で定めると、圏の定義を満たす。

**例 66.** 一つの集合  $X$  はそれ自身で圏とみなすことができる。集合  $X$  に対して圏  $C(X)$  を、

- 対象の集合が  $\mathbf{Ob}(C(X)) = X$
- 射は恒等射のみ  $C(X)(x, y) = \begin{cases} \{\mathrm{id}_x\} & x = y \\ \emptyset & x \neq y \end{cases}$

射の合成は自動的に定まり、これが圏の定義を満たすことを確かめよ。

**例 67.** 一つのモノイドはそれ自身で圏とみなすことができる。モノイド  $M$  に対して圏  $C(M)$  を、

- 対象の集合が一点  $\{*\}$
- 射は  $C(M)(*, *) = M$

恒等射が  $M$  の単位元、合成が  $M$  の演算。



これが圏の定義を満たすことを確かめよ。

**例 68.** 一つの順序集合はそれ自身で圏とみなすことができる。順序集合  $P$  に対して圏  $C(P)$  を、

- 対象の集合が  $P$
- 射は

$$C(P)(x, y) = \begin{cases} \{*\} & x \leq y \\ \emptyset & x \not\leq y \end{cases}$$

これが圏の定義を満たすことを確かめよ。

## 6 関手

**定義 28.** 二つの圏  $C, D$  の間の関手  $F$  とは対象の間の写像  $\text{Ob}(F) : \text{Ob}(C) \rightarrow \text{Ob}(D)$  と各  $x, y \in \text{Ob}(C)$  についての射の間の写像  $F(x, y) : C(x, y) \rightarrow D(\text{Ob}(F)(x), \text{Ob}(F)(y))$  であって、次の性質を満たすもの。通常これらは省略して、 $F(x), F(f)$  などと書く。

$$F(g) \circ F(f) = F(g \circ f)$$

$$F(\text{id}_x) = \text{id}_{F(x)}$$

**例 69.**  $C = \{0 \rightarrow 1\}$  と  $D = \{0 \rightarrow 1 \rightarrow 2\}$  の間の関手を全て書き出そう。

**例 70.**  $C = \{0 \rightarrow 1\}$  とする。この圏  $C$  から以下のような圏  $D$  への関手はどのようなものかを考えよう。  
 $D = C(X), C(M), C(P), \text{Sets}$  としてみる。

**例 71.**  $C = \{0 \rightarrow 1 \leftarrow 2\}$  とする。この圏  $C$  から以下のような圏  $D$  への関手はどのようなものかを考えよう。  
 $D = C(X), C(M), C(P), \text{Sets}$  としてみる。

**例 72.** 集合の写像  $f : X \rightarrow Y$  は関手  $C(f) : C(X) \rightarrow C(Y)$  を定める。

**例 73.** モノイドの射  $f : M \rightarrow N$  は関手  $C(f) : C(M) \rightarrow C(N)$  を定める。

**例 74.** 順序集合の射  $f : X \rightarrow Y$  は関手  $C(X) \rightarrow C(Y)$  を定める。

ここまで紹介してきた関手の例を振り返ってみよう。

1. 集合  $S = \{*\}$  を用いて集合  $X$  から  $X \amalg S$  を、写像  $f : X \rightarrow Y$  に  $f \amalg S : X \amalg S \rightarrow Y \amalg X$  を対応させる操作は関手。より一般に集合  $Z$  を固定して、同様に  $X$  に  $X \amalg Z$  を  $f$  に  $f \amalg Z$  を対応させる操作は関手  $\text{Sets} \rightarrow \text{Sets}$ 。
2. 集合  $X$  に  $2X$  を、写像  $f : X \rightarrow Y$  に  $2f : 2X \rightarrow 2Y$  を対応させる操作は関手  $\text{Sets} \rightarrow \text{Sets}$ 。
3. 集合  $D = \{0, 1\}$  を用いて集合  $X$  から  $X \times D$  を、写像  $f : X \rightarrow Y$  に  $f \times D : X \times D \rightarrow Y \times D$  を対応させる操作は関手  $\text{Sets} \rightarrow \text{Sets}$ 。より一般に集合  $Z$  を固定して、同様に集合  $X$  に集合  $X \times Z$  を、写像  $f$  に写像  $f \times Z$  を対応させる操作は関手  $\text{Sets} \rightarrow \text{Sets}$ 。
4. 集合  $X$  に  $X^2$  を、写像  $f : X \rightarrow Y$  に  $f^2 : X^2 \rightarrow Y^2$  を対応させる操作は関手  $\text{Sets} \rightarrow \text{Sets}$ 。
5. 集合  $D = \{0, 1\}$  を用いて集合  $X$  から  $\text{Hom}(D, X)$  を、写像  $f : X \rightarrow Y$  に  $\text{Hom}(D, f) : \text{Hom}(D, X) \rightarrow \text{Hom}(D, Y)$  を対応させる操作は関手  $\text{Sets} \rightarrow \text{Sets}$ 。より一般に集合  $Z$  を固定して、同様に集合  $X$  に集合  $\text{Hom}(Z, X)$  を、写像  $f$  に写像  $\text{Hom}(Z, f)$  を対応させる操作は関手  $\text{Sets} \rightarrow \text{Sets}$ 。
6. 集合  $D = \{0, 1\}$  を用いて集合  $X$  から  $\text{Hom}(X, D)$  を、写像  $f : X \rightarrow Y$  に  $\text{Hom}(f, D) : \text{Hom}(Y, D) \rightarrow \text{Hom}(X, D)$  を対応させる操作は関手  $\text{Sets} \rightarrow \text{Sets}$ 。より一般に集合  $Z$  を固定して、同様に集合  $X$  に集合  $\text{Hom}(X, Z)$  を、写像  $f$  に写像  $\text{Hom}(f, Z)$  を対応させる操作は関手  $\text{Sets} \rightarrow \text{Sets}$ 。
7. べき集合  $P$  は集合  $X$  から集合  $P(X)$  を作る操作で、写像  $f : X \rightarrow Y$  から  $f^{-1} : P(Y) \rightarrow P(X), f : P(X) \rightarrow P(Y)$  を対応させる。これは関手  $\text{Sets} \rightarrow \text{Sets}$ 。
8. 上の対応は写像  $f : X \rightarrow Y$  があれば  $W(f) : W(X) \rightarrow W(Y)$  が定めることができる。
9.  $X$  に対して  $X* = (X \amalg S, *)$  という点付き集合を対応させる。 $f : X \rightarrow Y$  に対して  $f* = f \amalg S :$

$X* = (X \amalg S, *) \rightarrow Y* = (Y \amalg S, *)$  という点付き集合の射を対応させる。これは関手  $\text{Sets} \rightarrow \text{Sets}_*$  を定める。

10. 点付き集合  $(X, x)$  に対して  $X$  を対応させる。点付き集合の射  $f : (X, x) \rightarrow (Y, y)$  に対して  $f : X \rightarrow Y$  を対応させる。これは  $\text{Sets}_* \rightarrow \text{Sets}$  を定める。
11. 自由モノイドにより  $\text{Sets} \rightarrow \text{Monoids}$  を定める。
12.  $\text{Hom}(X, \mathbb{N})$  により  $\text{Sets} \rightarrow \text{Monoids}$  を定める。
13. モノイドの忘却は  $\text{Monoids} \rightarrow \text{Sets}$  を定める。
14. 冪集合関手  $P$  は、部分集合による順序によって  $\text{Sets} \rightarrow \text{Posets}$  を定める。
15. 点付き集合から順序集合へ、 $(X, x)$  に対し  $y \leq x$  のみを順序にもつ順序集合を定めることで  $\text{Sets}_* \rightarrow \text{Posets}$  を定める。

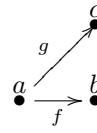
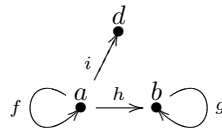
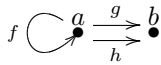
**問題 46.** これらの例が関手を定めていることを確かめよ

## 6.1 グラフ

有向グラフと呼ばれるものを定義する。点と矢印となる図のこと。これを抽象的に次のように定義する。

**定義 29.** 頂点集合  $V$  と辺集合  $E$  及び写像  $s : E \rightarrow V$  と  $t : E \rightarrow V$  定まっている組  $(V, E, s, t)$  のこと。

**例 75.** 以下のような図で定まるもの。



**例 76.** 上の一つ目の図は  $V = \{a, b\}, E = \{f, g, h\}, s = \begin{cases} f \mapsto a \\ g \mapsto a \\ h \mapsto a, \end{cases} t = \begin{cases} f \mapsto a \\ g \mapsto b \\ h \mapsto b \end{cases}$  と表すことができる。

**問題 47.** 上の他の図を  $(E, V, s, t)$  の形で表そう。

グラフの射は点を点に写し、矢印を矢印に写し、始点と終点をちゃんと保ったもの。

**定義 30.** グラフの射  $f : (V_1, E_1) \rightarrow (V_2, E_2)$  とは、頂点の間の写像  $f_V : V_1 \rightarrow V_2$  と辺の間の写像  $f_E : E_1 \rightarrow E_2$  であって次を可換にするもの。

$$\begin{array}{ccc} E_1 & \xrightarrow{f_E} & E_2 \\ s_1 \downarrow & & \downarrow s_2 \\ V_1 & \xrightarrow{f_V} & V_2 \end{array} \quad \begin{array}{ccc} E_1 & \xrightarrow{f_E} & E_2 \\ t_1 \downarrow & & \downarrow t_2 \\ V_1 & \xrightarrow{f_V} & V_2 \end{array}$$

**例 77.** 先の図で、三つ目のグラフから一つ目のグラフにはどのようなものがあるか？

頂点の対応のさせ方として、

$$\begin{cases} a \mapsto a \\ b \mapsto a \\ c \mapsto a \end{cases} \quad \begin{cases} a \mapsto a \\ b \mapsto a \\ c \mapsto b \end{cases} \quad \begin{cases} a \mapsto a \\ b \mapsto b \\ c \mapsto a \end{cases} \quad \begin{cases} a \mapsto a \\ b \mapsto b \\ c \mapsto b \end{cases}$$

があり、それぞれに対してさらに射の対応を定める必要がある。

例えば一つ目の頂点の対応に対しては、

$$\begin{cases} f \mapsto f \\ g \mapsto f \end{cases}$$

とすればよい。他の場合はどうか？

**問題 48.** 上の写像を  $(V, E, s, t)$  の表し方を用いて記述せよ。

**問題 49.** 三つ目のグラフから二つ目のグラフの射にはどのようなものがあるか？

**注意 2.** 圏や順序集合の図とグラフの違いに注意しよう。グラフの場合、二つの矢印を繋いだ矢印があるとは限らない。

## 7 自然変換

二つの集合  $X, Y$  から、その間の写像全てを集めて新しい集合  $\text{Hom}(X, Y)$  を作ることができた。ここではそれと同じように二つの圏  $C, D$  から、その間の関手全てを集めて新しい圏  $\text{Fun}(C, D)$  を作ることを考える。この圏の対象は関手であり、射はどのようなものになるだろうか？具体例で考えてみよう。

**例 78.** グラフ  $(V_1, E_1, s_1, t_1)$  から  $(V_2, E_2, s_2, t_2)$  への射というのは、頂点を頂点に写す写像  $f_V : V_1 \rightarrow V_2$  と辺を辺に写す写像  $f_E : E_1 \rightarrow E_2$  の組  $(f_V, f_E)$  で始点と終点を保つものだった。つまり、次の図式を可換にするもの。

$$\begin{array}{ccc} E_1 & \xrightarrow{f_E} & E_2 \\ s_1 \downarrow & & s_2 \downarrow \\ V_1 & \xrightarrow{f_V} & V_2 \end{array} \quad \begin{array}{ccc} E_1 & \xrightarrow{f_E} & E_2 \\ t_1 \downarrow & & t_2 \downarrow \\ V_1 & \xrightarrow{f_V} & V_2 \end{array}$$

$C = \{1 \rightarrow \rightarrow 0\}$  とし、 $G, H$  を関手  $C \rightarrow \text{Sets}$  とする。

グラフは関手とみなすことができた。 $G : C \rightarrow \text{Sets}$  で、 $G(0) = V, G(1) = E, G(s) : G(1) \rightarrow G(0), G(t) : G(1) \rightarrow G(0)$  である。この時、グラフの射というのは次の図式を可換にするもの

$$\begin{array}{ccc} G(1) & \xrightarrow{f_1} & H(1) \\ G(t) \downarrow & & G_2(t) \downarrow \\ G(0) & \xrightarrow{f_0} & H(0) \end{array} \quad \begin{array}{ccc} G(1) & \xrightarrow{f_1} & H(1) \\ G(s) \downarrow & & H(s) \downarrow \\ G(0) & \xrightarrow{f_0} & H(0) \end{array}$$

グラフは関手とみなすことができる。グラフの射は関手の射と思える。

**例 79.** モノイド代数の射の定義を思い出す。モノイド代数は関手  $M \rightarrow \text{End}(X)$  とみなせる。モノイド代数の射は関手の射とみなせる。射は  $f : X \rightarrow Y$  で、つまり全ての  $m \in M$  に対して次の図式を可換にするもの

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ m \downarrow & & m \downarrow \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

これらの例を踏まえて、自然変換を次のように定義する。

**定義 31** (自然変換).  $F : C \rightarrow D$  と  $G : C \rightarrow D$  の間の自然変換  $\phi$  とは、 $C$  の各対象  $c$  について定まる  $D$  の射  $\phi_c : Fc \rightarrow Gc$  を全て集めたもの  $\{\phi_c\}_{c \in \text{Ob}(C)}$  であって、全ての射  $f : c \rightarrow d$  に対して次の図式を可換にするもの。

$$\begin{array}{ccc} F(c) & \xrightarrow{\phi_c} & G(c) \\ F(f) \downarrow & & G(f) \downarrow \\ F(d) & \xrightarrow{\phi_d} & G(d) \end{array}$$

ここまで紹介してきた「自然な」写像の例を振り返ってみよう。

1.  $X \times D$  と  $2X$  の対応は  $\times D$  と  $2$  の間の自然変換

2.  $X$  と  $\text{Hom}(S, X)$  の対応は  $\text{id}$  と  $\text{Hom}(S, )$  の間の自然変換
3.  $X^D$  と  $X^2 = X \times X$  の対応は  $^D$  と  $^2$  の間の自然変換
4.  $\text{Hom}(Z, X \amalg Y) = \text{Hom}(Z, X) \times \text{Hom}(Z, Y)$
5.  $\text{Hom}(X \times Y, Z) = \text{Hom}(X, Z) \times \text{Hom}(Y, Z)$
6.  $\text{Hom}(X \times Y, Z) = \text{Hom}(X, \text{Hom}(Y, Z))$
7.  $P(X)$  と  $D^X$
8.  $FX \rightarrow \text{Hom}(X, \mathbb{N})$

これらは全て自然変換を定めている。

**例 80.**  $M \mapsto M^2$  と  $M \mapsto M$  を Monoids から Monoids への関手とする。このとき、 $\mu_M : M^2 \rightarrow M$  は自然変換を定める。

## 8 随伴とモナド

### 8.1 随伴

二つの圏  $C$  と  $D$  の関係を記述する一つの方法が随伴関手を用いるものである。

**定義 32** (随伴). 関手  $F : C \rightarrow D$  と  $G : D \rightarrow C$  が随伴であるとは、 $C$  の対象  $x$  と  $D$  の対象  $y$  について自然な対応

$$C(Fx, y) = D(x, Gy)$$

があることをいう。

正確には、これらが  $C$  及び  $D$  から  $\mathbf{Sets}$  への二つの関手を定めていて、その間に自然変換で一对一になるものをいう。

**例 81** (直積と  $\text{Hom}$ ). 集合  $Y$  を固定して  $\mathbf{Sets} \rightarrow \mathbf{Sets}$  を  $F : X \mapsto X \times Y$  と  $G : Z \mapsto \text{Hom}(Y, Z)$  で定める。これらは随伴である。つまり

$$\text{Hom}(X \times Y, Z) = \text{Hom}(X, \text{Hom}(Y, Z))$$

**例 82** (自由忘却). 集合  $X$  から定まる自由モノイド  $F(X)$  を与える関手と、モノイド  $M$  の忘却関手  $U$  は随伴になる。つまり

$$\mathbf{Sets}(X, U(M)) = \mathbf{Monoids}(F(X), M)$$

**例 83** (対角と極限).  $\mathbf{Sets}^2$  を集合の組を対象とする圏とする。関手  $\mathbf{Sets}^2 \rightarrow \mathbf{Sets}$  を  $(X, Y) \mapsto X \times Y$  で定め、関手  $\mathbf{Sets} \rightarrow \mathbf{Sets}^2$  を  $X \mapsto (X, X)$  で定めると、これらは随伴になる。つまり

$$\mathbf{Sets}^2((X, X), (Y, Z)) = \mathbf{Sets}(X, Y \times Z)$$

**例 84** (逆像と順像).  $f : X \rightarrow Y$  を集合の写像とし、それが定める順序集合の射  $f^{-1} : P(Y) \rightarrow P(X)$  と  $f : P(X) \rightarrow P(Y)$  は、順序集合  $P(X), P(Y)$  を圏とみなした時にそれぞれ関手であり、随伴になる・つまり

$$C(P(X))(x, y) = C(P(Y))(x, y)$$

### 8.2 モナド

**定義 33** (モノイド対象). 圏  $C$  におけるモノイド対象とは対象  $M$  と射  $\mu : M \times M \rightarrow M$  及び終対象からの射  $1 : 1 \rightarrow M$  であって、次の図式が可換になるものをいう。ここで  $M \times M$  は関手の合成を表す。

$$\begin{array}{ccc} M \times M \times M & \xrightarrow{\mu \times \text{id}_M} & M \times M \\ \text{id}_M \times \mu_M \downarrow & & \downarrow \mu \\ M \times M & \xrightarrow{\mu} & M \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
M \times 1 & \xrightarrow{\text{id}_M \times 1} & M \times M \\
\downarrow & & \downarrow \mu \\
M & \xrightarrow{\text{id}_M} & M
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
1 \times M & \xrightarrow{1 \times \text{id}_M} & M \times M \\
\downarrow & & \downarrow \mu \\
M & \xrightarrow{\text{id}_M} & M
\end{array}$$

**例 85.** モノイドは集合の圏におけるモノイド対象である。

**定義 34** (モノド). 圏  $C$  の自己関手の圏  $\text{Fun}(C, C)$  におけるモノイド対象  $F$  のことをモノドという。

**例 86** (Maybe).  $X \rightarrow X \amalg \{*\}$  はモノド。

**例 87** (List).  $X \rightarrow W(X)$  はモノド。

**定義 35** ( $F$  代数).  $F$  を圏  $C$  のモノドとする。 $F$  代数とは  $C$  の対象  $x$  と射  $\alpha: Fx \rightarrow x$  であって、次を可換にするもの。

$$\begin{array}{ccc}
(F \times F)x & \xrightarrow{F\alpha} & Fx \\
\downarrow \mu & & \downarrow \alpha \\
Fx & \xrightarrow{\alpha} & x
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
x & \xrightarrow{1x} & Fx \\
\downarrow \text{id}_x & & \downarrow \alpha \\
x & \xrightarrow{\text{id}_x} & x
\end{array}$$

**例 88.** 集合の圏における  $F$  代数はモノイドの作用。

**例 89.** Maybe の代数として  $\mathbb{N}$  がある。 $\mathbb{N} \amalg \{*\} \rightarrow \mathbb{N}$  を  $s: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  および  $* \mapsto 0$  により定めることで、これが Maybe の代数になる。

実はこれは始対象である。