函数等式

梅崎 直也

2018 年 12 月 24 日

Riemann ζ の函数等式の証明のあらすじ

1. $\theta(t)$ の Mellin 変換が $\zeta(s)\pi^{-s/2}\Gamma(\frac{s}{2})$
2. Poisson 和公式を使うと θ の函数等式
3. θ の函数等式の Mellin 変換が ζ の函数等式

ほんとは被積分関数の漸近挙動を調べるという重要な問題があるのですが、そこは省略します。

まずは Mellin 変換の定義

$$M(f)(s) = \int_0^\infty f(t)t^s \frac{dt}{t}$$

例 1. e^{-t} のメリン変換は $\Gamma(s)$ e^{-ct} のメリン変換は $c^{-s}\Gamma(s)$

$e^{-n^2\pi t}$ の t についてのメリン変換は $(n^2\pi)^{-s}\Gamma(s)$

定義 1. テータ函数は $e^{-n^2\pi t}$ の n についての和

$$\theta(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-n^2\pi t}$$

これの Mellin 変換は（積分の順序交換を無視すると）（漸近挙動を見る必要あり）

$$M(\theta)(s/2) = \zeta(s)\pi^{-s/2}\Gamma(\frac{s}{2})$$

ポワソン和公式

$$\sum_n f(n) = \sum_n \hat{f}(n)$$

$e^{-n^2\pi t}$ の n についてのフーリエ変換は

$$e$$

なので、これを $f(n) = e^{-n^2\pi t}$ とすると

$$\theta(t) = t^{-1/2}\theta(1/t)$$

が成り立つ。

この左辺の Mellin 変換は上で見たように ζ で右辺の Mellin 変換は

$$\begin{aligned}\int_0^\infty t^{-1/2}\theta(1/t)t^{s/2}\frac{dt}{t} &= \int_\infty^0 t^{1/2}\theta(t)t^{-s/2}\frac{dt}{t} \\ &= M(\theta((1-s)/2))\end{aligned}$$

これが函数等式。以上がリーマンゼータの函数等式の証明です
次にディリクレ L 関数の函数等式を証明します

$$L(\chi, s) = \sum_n \frac{\chi(n)}{n^s}$$

です。$\chi = 1$ としたものがリーマンゼータです。

$$\begin{aligned}\theta_a \\ \theta^a \\ \zeta(s,a) = \sum_n (n+a)^{-s}\end{aligned}$$