Chowla-Selberg の公式

@unaoya

2018 年 9 月 1 日

CS 公式- Weil の本の証明（ゼータ関数とか使うやつ）- Gross の証明（代数幾何、Fermat 曲線）- 新谷の証明（多重ガンマ）- Arakelov 使う証明（Soule の SB）- Gross-Degline（いくつか証明されてる例）

Anderson, Colmetz のアーベル多様体？関連した論文？

関連ありそうな Fresan の Exponentioal motives

Kronecker limit formula Eisenstein 級数の $s=1$ での Laurent 展開、$z = x + \sqrt{-1}y$ とすると、

$$E(z,s) = \frac{\pi}{s-1} + 2\pi(\gamma - \log(2\sqrt{y}|\eta(z)|^2)) + O(x-1)$$

1 Gross

2 Asakura-Otsubo

3 Fresan

4 The mechanics of the analytic proof

In "The Chowla-Selberg Formula", by CARLOS JULIO MORENO.

F を総実体、K を F の総虚二次拡大とする。

$$E(s,z) = \sum_{\sigma \in \Gamma/\Gamma_\infty} Ny(\sigma(z))^{(1+s)/2}$$

を $\Gamma = SL_2(r_F)$ に付随する Eisenstein series とする。Γ_∞ は上三角行列。

$E(s,z)$ の Fourier 係数の定数項は

$$Ny(z)^{(1+s)/2} + \frac{\Lambda_F(s)}{\Lambda_F(1+s)} Ny(z)^{(1-s)/2}$$

となる。Λ_F は F の完備 ζ

$s = -1, 0, 1$ での展開を考える。$s=1$ での展開が Kronecker limit formula で $s=0$ が Maass form に対応。

Epstein ζ と Eisenstein sereis の関係を考えると

5 Gross-Deligne

CM motive の周期と Γ 関数の特殊値。

楕円曲線の場合が Chowla-Selberg(から従う。)参考 http://www.math.sci.hiroshima-u.ac.jp/branched/files/2015/Asakura
$y^2 = x^3 - 1$ の H^1 は $\mathbb{Q}(\zeta_3)$ を CM に持つ。$\chi : \mathbb{Q}(\zeta_3) \to \mathbb{C}$ を $H^\chi = H^{1,0}$ なるものとする。この時

$$\begin{aligned} per(H^\chi) = \int_1^{\zeta_3} \frac{dx}{y} \sim \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^3}} \\ = \frac{1}{3} B(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}) \\ = \frac{1}{3} \frac{\Gamma(1/3)\Gamma(1/2)}{\Gamma(5/6)} \end{aligned}$$

となる。

6 GENRES DE TODD ET VALEURS AUX ENTIERS DES DERÍVEÉS DE FONCTIONS L par Christophe SOULÉ

HRR

$$\chi(E) = \int_X ch(E) Td(TX)$$
$$Td(x) = 1 - \sum_{m \geq 0} \zeta(-m) \frac{x^{m+1}}{m!}$$

Arakelov 類似

$$R(x) = \sum_{m \geq 1, m:odd} (2\zeta'(-m) + (1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{m})\zeta(-m)) \frac{x^m}{m!}$$

Lerch zeta

$$\zeta(z, x) = \sum_{m \geq 1} \frac{z^m}{m^s}$$

(これは Dirichlet zeta の ($(\mathbb{Z}/n)^\times$ での?) Fourier 変換?)

$u \in \mathbb{Z}/n$ に対して $P_u(H^k(X)) \in \mathbb{C}^\times / F^\times$ を定義する。$\det_F H^k_{dR}(X)_u$ と $\det_F H^k_B(X(\mathbb{C}), F)_u$ の比として定まる。

$\mathcal{C}$ を $\mathbb{C}$ の K ベクトル空間で $\log|a|, a \in F^\times$ で生成されるものとする。

定理 1 (Theoreme 4.4)**.** $\mathbb{C}/\mathcal{C}$ における等式

$$\sum_{k \geq 0} (-1)^k \sum_{u \in (\mathbb{Z}/n)^\times} \chi(u) \log|P_u(H^k(X))| = \sum_{k \geq 0} (-1)^k \frac{L'(\chi, 0)}{L(\chi, 0)} \sum_{u \in (\mathbb{Z}/n)^\times} \sum_{p+q=k} p \dim_{\mathbb{C}}(H^{p,q}(X(\mathbb{C}))_u) \chi(u)$$

交代和を取らず、各 k での等式は $k = 1$ とそれ以外のいくつかの場合に証明されている。

6.1 arithmetic Riemann-Roch

6.2 arithmetic Lefschetz

RR の equivariant 版?

自然数 $n>1$ と $G=\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[tT]/(T^n-1))$ とする。X を arithmetic variety とし、G 作用 $\mu:G\times X\to X$ を持つとする。固定点 $Y=X^G$ は arithmetic variety である。$\bar{E}=(E,h)$ を X 上の hermitian bundle とし、G の作用が h を保つように E に伸びるとする。この時、$E_Y=\oplus_{u\in\mathbb{Z}/n}E_u$ と分解する。

$V\subset Y$ を open とすると、$\mu^*:E(V)\to E(V)\otimes\mathbb{Z}[T]/(T^n-1)$ が定まり、$\mu^*(s)=\sum_{u\in\mathbb{Z}/n}s_u\otimes T^u$ と分解する。

1 の原始 n 乗根 $\gamma\in\mathbb{C}$ を固定し、$g\in G(\mathbb{C})$ を対応する元とする。G,F_∞ で不変な $TX(\mathbb{C})$ の Kähler 計量 h_X を固定する。$H^q(X,E)$ は L^2 直交分解 $\oplus_{u\in\mathbb{Z}/n}H^q(X,E)_u$ を持つ。

$$\hat{\deg}_g(H^q(X,E))=\sum_{u\in\mathbb{Z}/n}\hat{\deg}(H^q(X,E)_u,h_{L^2})\gamma^u$$
$$\hat{\chi}_g(\bar{E})=\sum_{q\geq 0}(-1)^q\hat{\deg}_g(H^q(X,E))$$

と定める。$A^{0,q}(X(\mathbb{C}),E_{\mathbb{C}})$ も直交分解し、$\zeta_{q,u}(s)$ を Δ_q の $A^{0,q}(X(\mathbb{C}),E_{\mathbb{C}})_u$ のゼータ関数とし、

$$T_g(\bar{E}_{\mathbb{C}})=\sum_{q\geq 0}(-1)^{q+1}q\sum_{u\in\mathbb{Z}/n}\zeta'_{q,u}(0)\gamma^u$$

とし、これを同変解析的トーションという。

$K=\mathbb{Q}(\gamma)\subset\mathbb{C}$ とし、Chern character を

$$\hat{ch}_g(\bar{E})=\sum_{u\in\mathbb{Z}/n}\hat{ch}(\bar{E}_u)\gamma^u\in\hat{CH}(Y)_K$$

と定める。

$$\lambda_{-1}(\bar{E})=\sum_{k\geq 0}(-1)^k\Lambda^k(\bar{E})$$

とおき、

$$ch_g(\lambda_{-1}(\bar{E}))=\sum_{k\geq 0}(-1)^k ch_g(\Lambda^k(\bar{E}))$$

と書く。$\bar{N}^\vee$ を $Y\subset X$ の余法束とし、h_X から計量を誘導する。$\hat{T}d(Y)\in\hat{CH}(Y)_{\mathbb{Q}}$ を (Y,h_Y) の arithmetic Todd class とする。

$$\hat{T}d_g(X)=\hat{ch}_g(\lambda_{-1}(\bar{N}^\vee))^{-1}\hat{T}d(Y)\in\hat{CH}(Y)_K$$

とおき、

$$ch_g(E_{\mathbb{C}})=\sum_{u\in\mathbb{Z}/n}ch(E_{u,\mathbb{C}})\gamma^u$$
$$Td_g(TX(\mathbb{C}))=ch_g(\lambda_{-1}(\bar{N}^\vee_{\mathbb{C}}))^{-1}Td(TY(\mathbb{C}))\in\oplus_{p\geq 0}H^{p,p}(Y_{\mathbb{R}})_K$$

と定める。

定理 2 (Theorem 3.1)**.**