導来代数幾何入門

梅崎直也@unaoya

2019/3/29 第 3 回関東すうがく徒のつどい

1. 導入
2. 代数幾何
3. 導来代数幾何
4. BenZvi-Francis-Nadler
5. 応用

目標

代数幾何におけるファイバー積

スキーム論は一般の環に対して空間を構成する、またそれの貼り合わせ相対的な議論を扱える枠組み例、高校数学の線束、mod p、無限小変形テンソル積が大事

$\mathrm{Spec}(A)_1 \otimes_B A_2 \simeq \mathrm{Spec}(A)_1 \times_{\mathrm{Spec}(B)} \mathrm{Spec}(A)_2$

derived stack

affine derived stack とその貼り合わせ（どの圏ではり合わせるか？）

mapping stack

Σ が位相空間や単体的集合の時、internal hom $X^{\Sigma} = Map(\Sigma, X)$ が derived stack として定まる。

classifying space

derived loop stack

$LX = X^{S^1} = Map(S^1, X)$ は internal hom で定める。
$LX \simeq X \times_{X \times X} X$ である。
X が位相空間から定まる constant stack の場合、LX は通常の loop space から定まる constant stack
$X = BG$ のとき $LX = LBG = G/G$
X が smooth scheme over char 0 field の時は $T_X[-1]$

Mod_A の定義

まず $Vect$ を定義する。一般に abel 圏から ∞ 圏を構成する方法が Lurie の HA にある。これが monoidal
Gaitsgory $AssocAlg(Vect))^{op} \to DGCat_{cont}, A \mapsto A - Mod$ が定まる。ここで Vect は ∞-cat of chain complexes of k-vecctor spaces
$DGCat_{cont}$ は $1 - Cat^{St,cocmpl}_{cont}$ における $Vect$-module たちのなす ∞-cat Gaitsgory1.10.1 HA でのアーベル圏 A から $(\infty, 1)$-cat $D^{-}(A)$ を作り、これの right completion を作る。
Lurie の HA での扱いは？
A-mod の圏から直接作るのと一致する？

$QC(X)$ の定義

$X = \mathrm{Spec}(A)$ が affine derived scheme の時、$QC(X) = Mod_A$ とする。
一般の derived stack については、X を affine derived stack の colimit で書き、同じ図式で QC の limit を ∞-cat of ∞-cats でとる。
X が qc で affine diagonal を持てば、cosimplical diagram の totalization でかける。
O_X-mod のような作り方はできない？

perfect stack

定義

1. A を derived commutative ring とする。A 加群 M が perfect とは、Mod_A の smallest ∞ category で finite colimit と retract でとじたものに属すること。
2. derived stack X に対し、$Perf(X)$ は $QC(X)$ の full ∞-subcategory であって、任意の affine $f : U \to X$ への制限 f^*M が perfect module であるものからなるもの。
3. derived stack X が prefect stack とは $QC(X) \cong IndPerf(X)$ であること。
4. $f : X \to Y$ が perfect とは、任意の affine $U \to Y$ について、$X \times_Y U$ が perfect なこと。

compact と dualizable と perfect の関係。特に X が affine diagonal を持つ時の $QC(X)$ における同値性。

base change と projection formula

Gaitsgory にも注意がある？

命題 (BFN, proposition 3.10)

$f : X \to Y$ を perfect とする。この時

1. $f_* : QC(X) \to QC(Y)$ は small colimit と交換し、projection formula を満たす
2. 任意の derived stack の射 $g : Y' \to Y$ に対し、base chage map $g^* f_* \to f'^* g'_*$ は同値

symmetric monoidal category と algebra と module

命題 (BFN, Proposition 4.6)

X_1, X_2 perfect, $\boxtimes : QC(X_1)^c \otimes QC(X_2)^c \cong QC(X_1 \times X_2)^c$

1. $\otimes$ と pullback は dualizable を保ち、$X = X_1 \times X_2$ が perfect なことから、外部積が compact を保つ
2. $QC(X_1 \times X_2)^c$ が外部積で生成
3. projection formula

により証明。さらに

1. $Ind : st \to Pr^L$ が summetric monoidal
2. $IndQC(X)^c \simeq QC(X)$

から、$\boxtimes : QC(X_1) \otimes QC(X_2) \simeq QC(X_1 \times X_2)$ が成立。

定理 (BFN の Theorem 4.7)

X_1, X_2, Y が perfect の時、
$QC(X_1 \times_Y X_2) = QC(X_1) \otimes_{QC(Y)} QC(X_2)$
Y が一般の時の証明の方針（どこに Y が perfect を使う？）

1. $QC(X_1 \times_Y X_2) = Mod_{T_{geom}}(QC(X_1 \times X_2))$ by Barr-Beck
2. $QC(X_1) \otimes_{QC(Y)} QC(X_2) = Mod_{T_{alg}}(QC(X_1 \times X_2))$ by Barr-Beck
3. $T_{alg} = T_{geom}$ by base change

self-duality *Fun* のやつ

上を一般化。4.1 の話
これをどう使うか

定理 (BFN の Theorem 4.14)

X, Y derived stack with affine diagonal、$f : X \to Y$ を perfect とする。$g : X' \to Y$ は任意の derived stack の射とする。この時、$QC(X \times_Y X') \simeq Fun_Y(QC(X), QC(X'))$ は ∞ 圏の同値

1. 関手の構成 $M \mapsto \tilde{f}_*(M \otimes \tilde{g}^* -)$ とする。$\tilde{f}$ が perfect なので colimit を保ち QC に移る。また projection formula により $QC(Y)$ 線形になる。
2. X' について local なので（$\times, \lim, \mathrm{colim}, QC$ の交換関係)、affine に帰着する。
   $QC(X \times_Y \mathrm{Spec}(A)) \simeq Fun_Y(QC(X), Mod_A)$ を示す。
3. $Y = \mathrm{Spec}(B)$ の時。前の系 4.8 から $QC(X)$ は Mod_B 上 self dual で、前の命題 4.13 から QC と $\otimes$ の交換がわかるので $Fun_B(QC(X), Mod_A) \simeq Fun_B(Mod_B, QC(X)^\vee \otimes_B Mod_A) \simeq QC(X) \otimes_B Mod_A$ $QC(X \times_B \mathrm{Spec}(A)) \simeq QC(X) \otimes_B Mod_A$ と計算できる。
4. Y が一般の時。

応用

symmetric monoidal ∞-cats of qcs と s∞-cats of linear endofunctors with monoidal str by composition の center と trace と E_n-analogue を計算する。

1. Hecke category
2. TFT

Hecke category

$X \to Y$ に対して $D(X \times_Y X)$ 特に $BB \to BG$ に対して
$X \times_Y X = B \backslash G / Y$
Hecke category は Hecke algebra の categorification

affine Hecke category

cf. Bezrukavnikov
H_G^{aff} を $St_G = \tilde{G} \times_G \tilde{G}$ 上の G 同変準連接層のなす ∞-category とする。ここで $\tilde{G} \to G$ は Grothendieck-Springer resolution で G は簡約群。

$St_G = \tilde{G} \times_G \tilde{G}$ とする。$Z(QC(X \times_Y X)) \simeq QC(LY)$ を
$X = \tilde{G}/G \to Y = G/G = LBG$ に適用することで
$Z(H_G^{aff}) = Z(QC(St_G)) \simeq Z(QC(X \times_Y X)) \simeq QC(LY) \simeq$
$QC(LLBG) \simeq QC(Loc_G(T^2))$ となる。

finite Hecke algebra

cf. BN2 でやった coherent D-module の圏？ $D(B\backslash G/B)$ の Drinfeld center と G 上の指標層の圏の同一視。さらに指標層の Langlands 双対 BN2 の Theorem1.8 H_G と $\tilde{H}_G$ は semi-rigid で canonical pivotal, CY str を持つ。冪単指標層のなす dg 圏 Ch_G は H_G の monoidal center および $\tilde{H}$ の monoidal trace に標準的に同型。
さらに Koszul 双対から $\tilde{H}_G^{per}$ と $H_{G^\vee}^{per}$ が同値なことが言えて、これにより上の定理の系として、Langlands dual の two-periodic dg cat of unip ch sh が同値なことが言える。

TFT

定義

命題

perfect stack X に対し 2d TFT $\exists Z_X$ s.t.
$Z_X(S^1) = QC(LX), Z_X(\Sigma) = \Gamma(X^\Sigma, \mathcal{O}_{X^\Sigma})$

証明すべきことは？
Costello の categorified analogue。X に対する仮定なしに構成できる。

Deligne-Kontsevich conjecture

monoidal stable category の Derinfeld center は associative (or A_∞)-alg の Hochshild cohomology の categorical analogue である。
Deligne の予想は、Hochshild cochain complex は Gerstenhaber algebran の持ち上げである E_2-algebra の構造を持つこと。これの cyclic version として、Frobeinus algebra の Hochshild cochain は framed E_2 (or ribbon) algebra の構造を持つ。さらに Kontsevich はこの高次版として、E_n-algebra の Hochshild cochain は E_{n+1}-algebra の構造を持つことを予想。
Costello と Kontsevich-Soibelman は algebra A に対して $Z_A(S^1) = HC(A)$ となるような TFT から予想が従うことを説明した。
これの圏論類似として、monoidal ∞-category の Drinfeld center が E_2-category であること。

参考文献

- BFN:
- BN2: