関数等式と双対性

梅崎直也@unaoya

ロマンティックゼータナイト

Riemann ζ

Euler 積表示

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} = \prod_{p} (1 - p^{-s})^{-1}$$

関数等式

$$\pi^{-s/2}\Gamma(\frac{s}{2})\zeta(s) = \pi^{-(1-s)/2}\Gamma(\frac{1-s}{2})\zeta(1-s)$$

関数等式の応用： ゼロ点の情報

Poisson 和公式

証明：Poisson 和公式、θ 関数、Mellin 変換

Dirichlet L

Dirhchlet 指標 $\chi : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$、
$\chi(nm) = \chi(n)\chi(m), \exists N, (n, N) \neq 1, \chi(n) = 0$

eg:Legendre 記号

$$L(\chi, s) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi(n) n^{-s} = \prod_{p} (1 - \chi(p) p^{-s})^{-1}$$

全ての n で $\chi(n) = 1$ とすると Riemann ζ

関数等式

$$\Lambda(s,\chi) = (\frac{\pi}{m})^{-s/2}\Gamma(\frac{s+\delta}{2})L(s,\chi)$$

として、

$$\Lambda(1-s,\overline{\chi}) = \frac{i^{\delta}m^{1/2}}{\tau(\chi)}\Lambda(s,\chi)$$

（補正項の存在、root number, ε 因子）

Dedekind ζ

代数体 K

$$\zeta_K(s) = \sum_{\mathfrak{a}} (N\mathfrak{a})^{-s} = \prod_{\mathfrak{p}}$$

幾何的な解釈 $K = \mathbb{Q}[x]/f(x)$ とした時の点の数

関数等式

$$\Lambda_K(s) = (\frac{|d_K|}{4^{r_2}\pi^n})^{s/2}\Gamma^{r_1}(s/2)\Gamma^{r_2}(s)\zeta_K(x)$$

とすると、

$$\Lambda_K(s) = \Lambda_K(1-s)$$

$K = \mathbb{Q}$ が Riemann ζ

Dirichlet L との関係

Artin L

Galois 表現 $\sigma : \mathrm{Gal}(L/K) \to GL_n(\mathbb{C})$

$n = 1, \sigma = 1$ の時が Dedekind ζ $n = 1$ のとき Dirichlet（類体論）

Hecke L

Hecke 指標

位数が有限でないものも考える

係数は？ $\mathbb{C}$ vs $\mathbb{Q}_\ell$

なぜ？

合同 ζ 関数

有限体上の多様体 $X/\mathbb{F}$

およそ多項式、解の個数を数えることで、

$$Z = \exp\left(\sum \frac{|X(\mathbb{F}_{q^m})t^m|}{m}\right)$$

点ごとの寄与で表したものとの比較

曲線の場合、関数体と代数体の類似

関数等式

跡公式によりコホモロジーで解釈できる。コホモロジーの双対性が関数等式に

Hasse-Weil ζ 関数

代数体上の多様体

よい素点と悪い素点

関数等式

予想。

証明されたケース、$\mathbb{Q}$ 上の楕円曲線 E の時。保型形式 f_E であって L 関数が一致するものを作る（難しい。Wiles など）f_E の関数等式を証明する。

保型形式の L 関数

Fourier 変換

関数等式、テータ、Tate 論文

Langlands 対応

保型表現

気になること

ε 因子 Fesenko