

BSD 予想について

@unaoya

2018 年 8 月 31 日

参考、Birch and Swinnerton-Dyer, Notes on elliptic curves II.

Birch と Swinnerton-Dyer の数値計算の話。楕円曲線の $\bmod p$ での有理点を数えた。

E を楕円曲線とし、 $E(\mathbb{Q})$ の rank が既知とする。この時、 $N_p = |E(\mathbb{F}_p)|$ とし、

$$\prod_{p \leq x} \frac{N_p}{p}$$

の $x \rightarrow \infty$ での振る舞いを調べた。

Mordell の定理。 $E(\mathbb{Q})$ が有限生成であること。群構造の説明、有限ランク？

Hasse の定理。 $|E(\mathbb{F}_p)|$ の評価。

L 関数の定義。上の $\prod_{p \leq x} \frac{N_p}{p}$ が「形式的に」 L 関数と関係すること。

$$L_{\Gamma}(s) = \prod_p \frac{1}{1 + (N_p - p - 1)p^{-s} + p^{1-2s}}$$

とする。(実は有限個の p で修正が必要。)

形式的に

$$\begin{aligned} L_{\Gamma}(1) &= \prod_p \frac{1}{1 + (N_p - p - 1)p^{-1} + p^{-1}} \\ &= \prod_p \frac{1}{1 + N_p p^{-1} - 1} \\ &= \prod_p \frac{p}{N_p} \end{aligned}$$

虚数乗法を持つ場合にはより正確に計算できる。

$$\Gamma : y^2 = x^3 - Dx$$

に対して、

$$\zeta_{\Gamma}(s) = \frac{\zeta(s)\zeta(s-1)}{L_D(x)}$$

となる。