Chowla-Selberg の公式

梅崎直也@unaoya

September 24, 2018

Chowla-Selberg の公式

$$\prod_{a \in Cl(k)} \Delta(a)\Delta(a^{-1}) = \left(\frac{2\pi}{d}\right)^{12h} \prod_{a \in (\mathbb{Z}/d\mathbb{Z})^\times} \Gamma\left(\frac{a}{d}\right)^{6w\epsilon(a)}$$

- $k = \mathbb{Q}(\sqrt{-d})$ は虚二次体で o_k をその整数環
- $Cl(k)$ はイデアル類群で $h = |Cl(k)|, w = |o_k^\times|$
- ϵ は二次体 k に対応する Dirichlet 指標（平方剰余記号）
- Δ は weight 12 の cusp form

解析的な証明

Chowla-Selberg による

$$\prod_{a \in Cl(k)} \Delta(a)\Delta(a^{-1}) = \left(\frac{2\pi}{d}\right)^{12h} \prod_{a \in (\mathbb{Z}/d\mathbb{Z})^\times} \Gamma\left(\frac{a}{d}\right)^{6w\epsilon(a)}$$

方針

$\dfrac{\zeta_k'}{\zeta_k}$ をふた通りの方法で計算。

1. Kronecker limit formula を使うと左辺が出てくる
2. Lerch の公式と Dirichlet 類数公式を使うと右辺が出てくる

代数幾何的な証明

Gross による

$$\prod_{a \in Cl(k)} \Delta(a)\Delta(a^{-1}) \sim \left(\frac{2\pi}{d}\right)^{12h} \prod_{a \in (\mathbb{Z}/d\mathbb{Z})^\times} \Gamma\left(\frac{a}{d}\right)^{6w\epsilon(a)}$$

違い

1. より一般の場合にも公式
2. 代数的数倍のずれは特定できない

方針

1. 両辺をあるアーベル多様体の周期として解釈
2. これらのアーベル多様体をうまく連続的に変形する
3. 変形した時に周期が代数的数倍のずれであることを示す

Δ

discriminant

$\Delta(z)$ は $E_z = \mathbb{C}/(\mathbb{Z} + z\mathbb{Z})$ の discriminant であり、これは z の関数として weight 12 で level $SL(2, \mathbb{Z})$ の保型形式である。

$$E_z : y^2 = 4x^3 - g_2(\tau)x - g_3(\tau)$$

にたいし

$$\Delta(\tau) = g_2(\tau)^3 - 27g_3(\tau)^2$$

周期

比較定理

微分形式を積分することでコホモロジーの同型が得られる。

$$H^i_{dR}(X/k) \otimes \mathbb{C} \to H^i(X(\mathbb{C}), \mathbb{C})$$
$$\omega \mapsto (\gamma \mapsto \int_\gamma \omega)$$

Hodge 分解

$$H^1_{dR}(X/\mathbb{C}) = H^0(X, \Omega^1) \oplus H^1(X, O_X)$$

楕円曲線 $X = E$ の場合 ω_E が $H^0(E, \Omega^1)$ の基底（正則微分形式）

楕円曲線の積

楕円曲線 $n = \phi(d)$ 個の積 A=$E_1 \times \cdots \times E_n$ で k で虚数乗法を持つものを作る。

- 各 E_i が k で虚数乗法を持つものとする
- これらは全て同種であり、周期は代数的数倍のずれ
- E が虚数乗法を持つとき、$\Delta(\tau)$ と周期 ω_E^{12} のずれは代数的数。(Weil の本)

A の周期として左辺がでてくる。

Fermat 曲線

B 関数

$$\begin{aligned} B(\frac{a}{d},\frac{b}{d}) &= \int_0^1 t^{\frac{a}{d}-1}(1-t)^{\frac{b}{d}-1}dt \\ &= \int_0^1 x^{a-1}y^{b-d}dx \mod \mathbb{Q}^\times \end{aligned}$$

ここで $y=\sqrt[d]{1-x^d}$ とする。これは Fermat 曲線 $F(d): x^d+y^d=1$ の周期。

Jacobian

Jacobian

曲線 C に対して定まるアーベル多様体 J_C。

- H^1 は C と一致
- $\dim J_C = g(C)$

$C = F(d) : x^d + y^d = 1$ の場合、J_C は n 次元の商を持つ。また μ_d の作用から虚数乗法を持つ。

楕円曲線の族

相対 1 形式

$\tau \in H$ に対して $E_\tau = \mathbb{C}/(\mathbb{Z} \otimes \tau\mathbb{Z})$ は $y^2 = 4x^3 - g_2(\tau)x - g_3(\tau)$ と書けて

$$\omega_\tau = \frac{dx}{y} = \frac{dx}{\sqrt{4x^3 - g_2(\tau)x - g_3(\tau)}}$$

モジュラー曲線

$L = \{(\tau, x), x \in \mathbb{Z} \oplus \tau\mathbb{Z} \subset \mathbb{C}\}$ とし、$\pi : h \times \mathbb{C}/L \to h$ を $SL_2(\mathbb{Z})$ でわる。

虚数乗法

虚二次体に対応する点を h の部分集合と思い、$SL_2(\mathbb{Z})$ が作用。これに楕円曲線を引き戻して割る。

相対的な状況

$\pi : A \to S$ をアーベル多様体の族とする。$\mathcal{H}^n_{dR}(A/S)$ は $H^n_{dR}(A_s/s)$ をまとめた S 上の層。$R^n\pi_*\mathbb{C}$ は $H^n(A_s,\mathbb{C})$ をまとめた S 上の層、O_S は正則関数の層。

相対版比較定理

$$\mathcal{H}^n_{dR}(A/S) \to R^n\pi_*\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{C}} O_S$$

$H_{dR}(A/S)$ の切断 ω について、各点 $s \in S$ ごとに ω_s の周期が定まる。ω が定数周期を持つとはこの周期が一定であること。

志村多様体

$k=\mathbb{Q}(\sqrt{-d})$ とし、o_k で虚数乗法を持つ n 次元アーベル多様体を全部集める。(偏極とレベル構造もつける)

志村多様体

普遍的なアーベル多様体の族

$$A \to S$$

ができて、S は代数体上の代数多様体になる

大域切断

虚数乗法を持つことを使って、各点での周期が $\overline{\mathbb{Q}}$ 倍のずれであることを証明できる。

- 虚数乗法による k の $\mathcal{H}^n_{dR}(A/S)$ への作用を分解して、S 上の大域切断 ω を作る。
- 一方で $R^n\pi_*\mathbb{C}$ にも τ^n で作用する部分空間が存在し、これらは比較同型で対応する。
- $\mathcal{H}^n_{dR}(A/S)$ には Gauss-Manin 接続という代数的な微分方程式が定まっている。これを用いて、上の大域切断が代数的で、さらに $\overline{\mathbb{Q}}^\times$ 上定義されることがわかる。
- またこの大域切断の次元はコンパクト化を用いて計算すると 1 であることがわかる。

Hodge 予想

Deligne のコメント

I began by saying that I had found a new proof of the period implication of the Chowla Selberg formula, using some techniques from algebraic geometry. Deligne immediately asked, in all seriousness, if I had proved the Hodge conjecture. I replied that I would be delighted to hear that I had done so, as I was still looking for a thesis topic (and felt that a proof of the Hodge conjecture would probably be sufficient).

参考文献

1. Andre Weil, アイゼンシュタインとクロネッカーによる楕円関数論
2. Benedict H. Gross, On the Periods of Abelian Integrals and a Formula of Chowla and Selberg
3. Benedict H. Gross, On the periods of abelian varietiese