1 The Fourier Transform and Equations over Finite Abelian Groups

参考文献 http://people.cs.uchicago.edu/ laci/reu02/fourier.pdf

定理 1. k を整数 q を素数 $q \geq k^4 + 4$ とする。このとき

$$x^k + y^k = z^k$$

は $\mathbb{F}_q$ に非自明な解を持つ。

（Weil の予想の数え上げとの関係は？）

定理 2. k を整数 $A_1, A_2 \subset \mathbb{F}_q$ と $l_i = \dfrac{q-1}{|A_i|}$ とする。

$$q \geq k^2 i_1 i_2 + 4$$

のとき、

$$x + y = z^k$$

は $x \in A_1, y \in A_2, z \in \mathbb{F}_q$ の解を少なくとも一つ持つ。

上の定理は、$A_i = \{a^k, a \in \mathbb{F}_q\}$ とすれば出る。

G を位数 n のアーベル群とする。G の指標とは群準同型 $\chi : G \to \mathbb{C}^\times$ のこと。自明な指標を χ_0 と書くことにする。

命題 1. χ が非自明なら

$$\sum_{a \in G} \chi(a) = 0$$

が成り立つ

系 1. 指標の直交性

$\hat{G}$ を G の指標のなす群とする。

$A \subset G$ に対し $\Phi(A)$ を A の特性関数 f_A の χ_0 以外の Fourier 係数の絶対値の最大値とする。

定理 3. $A \subset \mathbb{F}_q$ を cyclotomic class とする。このとき

$$\Phi(A) < \sqrt{q}$$

$a \in G$ と $A_1, \ldots, A_k \subset G$ に対し、

$$x_1 + \cdots + x_k = a \ (x_i \in A_i)$$

の解の個数を考えると、平均は

$$\frac{m_1 \cdots m_k}{n}$$

となる。分散は？

$a = 0$ の場合の解の個数を N とする。

定理 4 (Theorem 3.1)**.**

$$N = \frac{m_1 \cdots m_k}{n} + R$$

であり、

$$R = \frac{1}{n} \sum_{\chi \in \hat{G}, \chi \neq \chi_0} \prod_{i=1}^{k} \hat{f}_{A_i}(\chi)$$

と計算できる。

$\delta \in \mathbb{C}^G$ を 0 に台を持つデルタ関数とする。これに対し、

$$\delta = \frac{1}{n} \sum_{\chi \in \hat{G}} \chi$$

が成り立つ。

このことから

$$N = \sum_{(x_i) \in \prod_i A_i} \delta(x_1 + \cdots + x_k) = \frac{1}{n} \sum_{\chi \in \hat{G}} \sum_{(x_i) \in \prod_i A_i} \chi(x_1 + \cdots + x_k)$$

と計算できる。

χ が指標であるから $\chi(x_1 + \cdots + x_k) = \chi(x_1) \cdots \chi(x_k)$ であり、和を因数分解すると

$$\sum_{(x_i in \prod_i A_i} \chi(x_1 + \cdots + x_k) = \prod_i \sum_{x_i \in A_i} \chi(x_i) = \prod_i \hat{f}_{A_i}(\chi)$$

と計算できる。

定理 5 (Theorem 4.1)**.**

$$|N - \frac{|A_1||A_2||A_3|}{n}| < \Phi(A_3)\sqrt{|A_1||A_2|}$$

定理 6 (Theorem 7.1)**.** $k|q-1$ を整数とし $A_1, A_2 \subset \mathbb{F}_q$ とする。N を方程式

$$x + y = z^k \ (x \in A_1, y \in A_2, z \in \mathbb{F}_q^\times)$$

の解の個数とする。

このとき

$$|N - \frac{|A_1||A_2|(q-1)}{q}| < k\sqrt{|A_1||A_2|q}$$

が成立する。

証明. $A_3 = H(q, k)$ とし、N' を

$$x + y = u \ (x \in A_1, y \in A_2, u \in A_3)$$

の解の個数とする。$k|q-1$ なので $z^k = u$ は k 個解を持つ。したがって $N = kN'$ となる。

Theorem 4.1 から

$$|N - \frac{|A_1||A_2||A_3|}{n}| < \Phi(A_3)\sqrt{|A_1||A_2|}$$

であり、Theorem 6.7 から

$$\Phi(A_3) < \sqrt{q}$$

□

定理 7 (Theorem 6.8). A を cyclotomic class すなわち $bH(q,k) \subset \mathbb{F}_q$ とする。このとき

$$\Phi(A) < \sqrt{q}$$

証明. 特性関数 f_A の Fourier 係数 $\hat{f}_A(\chi)$ の絶対値を計算する。これは次のように Gauss 和を用いて記述できる。

$$\hat{f}_A(\chi) = \frac{1}{k}\sum_{i=0}^{k-1} S(\chi, \psi_i)$$

また Gauss 和の絶対値は

$$|S(\chi, \psi)| = \sqrt{q}$$

と計算できる。これを合わせて □

分布の話 q, A などをいろいろ変えて分布を見る。Sato-Tate?

2 AC

2.1 セミナーと日曜

定義 1. additive character $\chi : \mathbb{F}_p \to \mathbb{C}^\times$ と multiplicative character $\psi : \mathbb{F}_p^\times \to \mathbb{C}^\times$ にたいし（記号逆の方がいいきがする）

$$S(\chi, \psi) = \sum_{a \in \mathbb{F}_p} \chi(a)\psi(a) = \sum_{a \in \mathbb{F}_p^\times} \chi(a)\psi(a)$$

ここで $\psi(0) = 0$ としておく。

multiplicative char は例えば Legendre symbol など。

命題 2. Gauss 和の評価

$$|S(\chi, \psi)| = \sqrt{q}$$

証明.

$$\begin{aligned} S(\chi, \psi)\overline{S(\chi, \psi)} &= \sum_{a \in \mathbb{F}_p^\times} \chi(a)\psi(a) \sum_{b \in \mathbb{F}_p^\times} \overline{\chi(b)\psi(b)} \\ &= \sum_{a,b} \chi(a-b)\psi(ab^{-1}) \end{aligned}$$

ここで $a \in \mathbb{F}_p$ に対して $ba^{-1} = c$ とすると

$$\begin{aligned}\sum_{a,b} \chi(a-b)\psi(ab^{-1}) &= \sum_{a,c} \chi(a-ac)\psi(c) \\ &= \sum_{c} \psi(c) \sum_{a} \chi(a(1-c))\end{aligned}$$

次に $c \in \mathbb{F}_p^\times$ に対して $\sum_a \chi(a(1-c))$ を計算する。$c=1$ の場合、$c \neq 1$ の場合、 □

$\mathbb{F}_q$ の部分群と、その商の指標の Gauss 和の関係を与える。Gauss 和と Gauss 周期の関係？と解釈できる？

命題 3. $A = H(k,q) \subset \mathbb{F}_q^\times$ を指数 k の部分群とする。$\psi_0, \ldots, \psi_{k-1}$ を $\mathbb{F}_q^\times$ の指標から誘導される $\mathbb{F}_q^\times$ の指標とする。$\mathbb{F}_q$ の指標 χ にたいし

$$\hat{f}_A(\chi) = \frac{1}{k}\sum_{i=0}^{k-1} S(\chi, \psi_i)$$

証明. まず $\mathbb{F}_q^\times/A$ の指標の性質から

$$\sum_{i=0}^{k-1} \psi_i(a) = \begin{cases} 0 \ (a \notin A \text{ もしくは } a = 0) \\ k \ (a \in A) \end{cases}$$

□

である。

2.2 セミナー原稿

定理 8. $A_1, A_2, A_3 \subset G$ とし N を $x_1 + x_2 + x_3 = 0, x_i \in A_i$ の解の個数とする。この時

$$|N - \frac{|A_1||A_2||A_3|}{n}| < \Phi(A_3)\sqrt{|A_1||A_2|}$$

が成り立つ。

証明.

$$\begin{aligned} N &= \sum_{x_i \in A_i} \delta(x_1 + x_2 + x_3) \\ &= \frac{1}{n}\sum_{x_i \in A_i}\sum_{\chi \in \hat{G}} \chi(x_1 + x_2 + x_3) \\ &= \frac{1}{n}\sum_{x_i \in A_i} \chi_0(x_1 + x_2 + x_3) + \frac{1}{n}\sum_{\chi \neq \chi_0}\sum_{x_i \in A_i} \chi(x_1 + x_2 + x_3)\end{aligned}$$

となる。

$$\sum_{x_i \in A_i} \chi_0(x_1 + x_2 + x_3) = \sum_{x_i \in A_i} \chi_0(x_1)\chi_0(x_2)\chi_0(x_3) = |A_1||A_2||A_3|$$

となる。

第二項を評価していく。

$$
\begin{aligned}
|\sum_{\chi\neq\chi_0}\sum_{x_i\in A_i}\chi(x_1)\chi(x_2)\chi(x_3)| &= |\sum_{\chi\neq\chi_0}(\sum_{x\in G}\chi 1_{A_1}(x))(\sum_{x\in G}\chi 1_{A_2}(x))(\sum_{x\in G}\chi 1_{A_3}(x))| \\
&= |\sum_{\chi\neq\chi_0}\hat{1}_{A_1}(\chi)\hat{1}_{A_2}(\chi)\hat{1}_{A_3}(\chi)| \\
&\leq \Phi(A_3)\sum_{\chi\in\hat{G}}|\hat{1}_{A_1}(\chi)||\hat{1}_{A_2}(\chi)|
\end{aligned}
$$

と計算できる。

さらに $\mathbb{C}^G$ が Hilbert 空間なので、Cauchy-Schwarz より

$$
\begin{aligned}
\sum_{\chi\in\hat{G}}|\hat{1}_{A_1}(\chi)||\hat{1}_{A_2}(\chi)| &\leq \sqrt{(\sum_{\chi\in\hat{G}}|\hat{1}_{A_1}(\chi)|^2)(\sum_{\chi\in\hat{G}}|\hat{1}_{A_2}(\chi)|^2)} \\
&= \sqrt{n^2|A_1||A_2|}
\end{aligned}
$$

と計算できる。 □

定義 2 (Gauss 和)**.** $G=\mathbb{Z}/p$ とし $\chi: G\to\mathbb{C}^\times$ と $\psi: G^\times\cup\{0\}\to\mathbb{C}^\times$ に対し

$$S(\chi,\psi)=\sum_{x\in G}\chi(x)\psi(x)$$

と定義する。

三角和

Gauss 和と Gauss 周期の関係について。Fourier 変換

$$\hat{1}_A(\chi)=\sum_{x\in A}\chi(x)$$

において $\chi(x)=\exp(2\pi ix/p)$ で A を部分群の coset とすればよい。

$\hat{1}_A$ の評価の実解析での類似は？ Γ 関数の Fourier 係数の評価とか？

命題 4. $A\subset G^\times$ を指数 k の部分群とし $\psi_0,\ldots,\psi_{k-1}$ を $G^\times/A$ の指標全体とする。

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{k-1}S(\chi,\psi_i) &= \sum_{i=0}^{k-1}\sum_{x\in G}\chi(x)\psi_i(x) \\
&= \sum_{x\in G}\chi(x)(\sum_{i=0}^{k-1}\psi_i(x))
\end{aligned}
$$

ここで指標の和に関する公式

$$\sum_{\psi\in\hat{H}}\psi(x)=\begin{cases}|H| & (x=0)\\ 0 & (x\neq 0)\end{cases}$$

を思い出すと、上の計算の続きは

$$=\sum_{x\in G}\chi(x)k1_A(x)=\hat{1}_A(x)$$

とできる。

命題 5. Gauss 和の評価。ψ が非自明な時

$$\begin{aligned}|S(\chi,\psi)| &= \sum_{x\in G}\chi(x)\psi(x)\sum_{y\in G}\overline{\chi(y)\psi(y)}\\ &= \sum_{x,y\in G}\chi(x)\chi(-y)\psi(x)\psi(y^{-1})\\ &= \sum_{x,y\in G^\times}\chi(x-y)\psi(xy^{-1}\end{aligned}$$

ここで $z = xy^{-1}$ と変数変換すると

$$\begin{aligned}&= \sum_{z,y\in G^\times}\chi(yz-y))\psi(z)\\ &= \sum_{z\in G^\times}\psi(z)\sum_{y\in G^\times}\chi((z-1)y)\end{aligned}$$

となる。さらに $z=1$ かどうかで場合分けすると、$\chi : G\to\mathbb{C}^\times$ が指標なので

$$\sum_{y\in G^\times}\chi((z-1)y) = \begin{cases} q-1 & (z=1\mathrm{or}\chi=\chi_0)\\ -1 & \text{o.w.}\end{cases}$$

となる。したがって、

$$\begin{aligned}&= (q-1)\psi(1)+\sum_{z\neq 1}\psi(z)(-1)\\ &= q-1+\sum_{z\in G^\times}\psi(z)(-1)+1\\ &= q\end{aligned}$$

となる。

上の二つを合わせて

命題 6. 部分群 $A\subset G^\times$ について

$$\Phi(A) < \sqrt{q}$$

証明.

$$\begin{aligned}|\hat{1}_A(\chi)| &\le \frac{1}{k}\sum_{\psi}|S(\chi,\psi)|\\ &\le \frac{1}{k}(|S(\chi,\psi_0)|+\sqrt{q}(k-1))\end{aligned}$$

であり、

$$S(\chi,\psi_0) = \sum_{x\in G^\times}\chi(x) = -1$$

であることから、

$$\le \frac{1}{k}(1+\sqrt{q}(k-1)) \le \sqrt{q}$$

となる。 □

2.2.1 巡回群の指標

補題 1. G を巡回群で χ をその指標としたとき

$$\sum_{x\in G}\chi(x)=\begin{cases}0 & (\chi\neq\chi_0)\\ |G| & (\chi=\chi_0)\end{cases}$$

証明. $S=\sum_{x\in G}\chi(x)$ とする。$\chi(y)S=S$ より □

$\mathbb{C}^G$ を $G\to\mathbb{C}$ の集合とし、$\mathbb{C}$ 線形空間と思う。この空間に内積を

$$(f,g)=\frac{1}{n}\sum_{x\in G}f(x)\overline{g(x)}$$

とすることで Hilbert 空間となる。特に Cauchy-Schwarz

補題 2. G の指標は Hilbert 空間 $\mathbb{C}^G$ の正規直交基底となる。

証明. $\hat{G}\cong G$ なので個数はあう。直交することは、 □

$f\in\mathbb{C}^G$ の Fourier 変換を

$$\hat{f}(\chi)=\sum_{x\in G}\chi(x)f(x)$$

と定める。$\hat{f}\in\mathbb{C}^{\hat{G}}$ となる。また逆変換を

$$g(x)=\frac{1}{n}\sum_{\chi\hat{G}}g(\chi)\chi(-x)$$

と定める。

$\delta\in\mathbb{C}^G$ を 0 に台を持つ特性関数とすると、$\hat{\delta}(\chi)=1$ であり、Fourier 逆変換公式から

$$\delta=\sum_{\chi\in\hat{G}}\chi$$

となる。これと trace formula の関係は？

定理 9 (Plancherel 公式)**.**

$$(\hat{f},\hat{g})=n(f,g)$$

である。特に

$$||f||=||\hat{f}||$$

証明. 一点に台を持つ δ_a,δ_b を用いて確かめると

$$(\delta_a,\delta_b)=\begin{cases}\frac{1}{n} & a=b\\ 0 & a\neq b\end{cases}$$

$$\hat{\delta}_a(\chi)=\sum_{x\in G}\delta_a(x)\chi(x)=\chi(a)$$

$$(\hat{\delta}_a,\hat{\delta}_b)0\frac{1}{n}\sum_{\chi\in\hat{G}}\chi(a)\chi(b)=\begin{cases}1 & a=b\\ 0 & a\neq b\end{cases}$$

□

2.3 数学カフェ

関数解析と trace formula $L(\Gamma\backslash G)$ への $R(f)$ の作用の trace 表現の分解を用いて trace を計算、軌道積分を用いて計算、この二つの一致

2.4 日曜 2

Selberg zeta、函数等式など

2.5 コンピュータ

実験。Sato-Tate

2.6 表現論のノート

前に作ったやつ。一回セミナーする？分割してアップする。

3 Deirichlet L

https://www.dpmms.cam.ac.uk/ rdh46/lecture_notes/lecture_4.pdf
Dirichlet L の函数等式。θ の保型性。

定理 10 (Poisson 和公式)**.** $f \in C^1(\mathbb{R})$ が無限遠で適当な条件を満たすとする。このとき

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \hat{f}(m)$$

証明. $F(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n+x)$ を $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ 上の関数として定義する。これの Fourier 変換から

$$F(x) = \sum_{m} \hat{F}e(mx)$$

となる。この両辺の $x=0$ での値を見ればよい □

4 Quadratic Reciprocity and the Sign of the Gauss Sum via the Finite Weil Representation

https://www.math.wisc.edu/ shamgar/QR-IMRN.pdf
数学のたのしみにも似た話あった？

定義 3 (Gauss 和)**.** $a \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$ にたいし

$$G_n(a) = \sum_{x\in\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} e^{\frac{2\pi i}{n}ax^2}$$

とし、$G_n = G_n(1)$ とする。

補題 3 (Lemma 4.1)**.**

$$\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right) = \frac{G_p G_q}{G_{pq}}$$

証明.

$$\sum_{x\in\mathbb{F}_p} e^{\frac{2\pi i}{p}ax^2} = \sum_{x\in\mathbb{F}_p} e^{\frac{2\pi i}{p}ax}\left(\frac{x}{p}\right)$$

□

命題 7 (Proposition 4.2)**.**

$$Tr(\rho_{pq}(w)) = Tr(\rho_p(w))Tr(\rho_q(w))$$

DFT と Weil 表現の関係について。ψ を additive character $\mathbb{Z}/n \to \mathbb{C}^\times$ とする。これによる Fourier 変換 $F_\psi : \mathbb{C}^G \to \mathbb{C}^{\hat{G}}$ を

$$F_\psi(f)(y) = \sum_{g\in G} \psi(yg)f(g)$$

と定義する。特に $\psi : z \mapsto \exp(\frac{2\pi i}{n}z$ に対するものを F_n と書く。

命題 8.

$$\det(F_n) = i^{\frac{n(n-1)}{2}} n^{\frac{n}{2}}$$

$$\rho_n : SL_2(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \to \mathrm{GL}(H)$$

を Weil 表現とする。

補題 4.

$$F_n = i^{\frac{n(n-1)}{2}} \rho_n(w)$$

Weil 表現の定義を確認。$\pi(h)$ との整合性の条件から定数倍を除いて決まってしまう？
この辺りを詳しく。π と π^g は同型になるか？ central character は一致する。これだけで同型がわかる？

5 Dirichlet's calculation of Gauss sum

https://www.math.ubc.ca/ cass/research/pdf/dirichlet.pdf

6 Fourier transform over finite field and identities between Gauss sums

https://arxiv.org/abs/math/0003011

7 DOUBLE AFFINE HECKE ALGEBRAS AND DIFFERENCE FOURIER TRANSFORMS

https://arxiv.org/pdf/math/0110024.pdf https://mathoverflow.net/questions/11053/whats-the-relationship-between-gauss-sums-and-the-normal-distribution