結び目とエタールコホモロジー

梅崎直也@unaoya

February 28, 2019

W を Weyl 群、S を単純鏡映例 $W = S_n, S = \{(i, i+1), i\}$
S_n が sl_n の Weyl 群になっているということを理解する。
W の表現
有限群 G の表現 G の共役類と G の既約表現は個数が等しい。
S_n の共役類は n の分割に対応する。
この対応を幾何的に構成する。n の分割は GL_n もしくは SL_n の Jordan 標準形に対応。

intersection cohomology と perverse sheaf
動機。特異点のある場合の Poincare 双対など
derived category と perverse t-structure
semi-small map と push-forward
decomposition theorem
weight filtration
perverse sheaf と weight
Weil 予想、ゼータ関数のゼロ点と Frobenius 固有値

Fourier 変換、Springer 対応
W を Galois 群に持つ被覆正則表現の分解 intermediate extension
Fourier 変換すると Springer fiber のコホモロジーが出てくる

convolution 代数としての $\mathbb{Z}[W]$ の構成。
Lusztig Steinberg 多様体の上の構成可能関数とその合成石で定まる代数が $\mathbb{Z}[W]$ と同型。
Fourier 変換との関係は？

Kazhdan-Lusztig 多項式 W の群環と Iwahori-Hecke 代数 T_w を基底にもち $\mathbb{Z}[q^{1/2}, q^{-1/2}]$ 上生成される環で、積は

$$T_y T_w = T_{yw} l(yw) = l(y) + l(w)$$
$$(T_s + 1)(T_s - q) = 0 s \in S$$

で乗法が定まる。$q \to 1$ とすると
Kazhdan-Lusztig 基底と Kazhdan-Lusztig 多項式

$$C_w = q^{-l(w)/2} \sum_{y \leq q} P_{y,w} T_y$$

とすると、これが基底になって、involution D で不変。
Lie 代数の表現の指標、Verma 加群
Kazhdan-Lusztig 予想 $w \in W$ に対し、$w(\rho) - \rho$ を最高 weight に持つ Verma module M_w と L_w を最高 weight 加群とする。この時、これらの指標の関係式が Kazhdan-Lusztig 多項式を用いて

$$ch(L_w) = \sum_{y \leq w} (-1)^{l(w)-l(y)} P_{y,w}(1) ch(M_w)$$

と書ける。

Kazhdan-Lusztig 予想の証明

Beilinson-Bernstein と Brylinski-Kashiwara による。
Bruhat 分解 $G = \coprod_{w \in W} BwB$ と Schubert 多様体
$G/B = \coprod_{w \in W} X_w$
Beilinson-Bernstein localization $\mathfrak{g}$ の表現と旗多様体の D 加群の対応 λ を整ウェイトで任意の $i \in I$ について $\lambda(h_i) \in \mathbb{Z}_{>0}$ を満たすとする。この時 $\Gamma(X, -) : RH_l^0(D_X^\lambda) \to M(\mathfrak{g})$ は完全関手で
$B_w(\lambda) \mapsto M(w \circ \lambda)^*, M_w(\lambda) \mapsto M(w \circ \lambda), L_w(\lambda) \mapsto (w \circ \lambda)$ を満たす。
Riemann-Hilbert 対応正則ホロノミック D 加群と perverse sheaf の対応 Sol が正則ホロノミック D 加群を perverse sheaf に移す。
$B_w(\lambda) \mapsto \mathbb{C}_{X^w}[-l(w)], M_w(\lambda) \mapsto D(\mathbb{C}_{X^w}[-l(w)], L_w(\lambda) \mapsto {}^{\pi}\mathbb{C}_{X^w}$
となる。
Kazhdan-Lusztig 多項式は Schubert 多様体の intersection コホモロジーを用いて

$$P_{y,w}(q) = \sum_i q^i \dim IH_{X_y}^{2i}(\overline{X}_w)$$

と書ける（Kazhdan-Lusztig）
（柏原谷崎の Kazhdan-Lusztig 予想をめぐってを参考）

Schubert 多様体の intersection cohomology の記述

purity と decomposition theorem を使う

Soergel bimodule

Kazhdan-Lusztig との関係
categorification
Khovanov の triply graded

Khovanov の Springer 多様体。Grassmannian との関係、geometric Satake

不変量の幾何的定義
結び目の図式からある多様体とその上の層の複体を定義する。
weight filtration から spectre 系列を作る。
E_2-page が二重複体で、さらにここに weight でもう一つ次数が入って、三重次数複体。