演習形式で学ぶ圏論の基礎の基礎（当日配布版）

梅崎直也@unaoya（株式会社すうがくぶんか）

2021 年 9 月 5 日

La mathématique est l'art de donner le même nom à des choses différentes.

Science et Méthode, Henri Poincaré

目次

1　はじめに

今回の講座の目標は、圏論の考え方を使って説明できる簡単な現象を紹介することです。具体的には「随伴関手の極限余極限の保存」という事実について、この事実を通して説明できる具体例である「写像による部分集合の像および逆像と和集合共通部分の関係」を紹介します。そのために、圏や関手の定義から始めて、随伴関手とは何か、極限余極限とは何か、を簡単な例とともに紹介します。

圏論における非常に重要な概念として自然変換がありますが、今日の講座では自然変換については一切扱いません。ただし、随伴の定義の中でこっそり出てきます。

このテキストの構成について説明します。まずは初めに圏などの概念を記述するための基礎として集合と写像について簡単に説明します。また集合や写像に関して圏論の言葉で扱うことができる例についても紹介します。次に圏の定義を説明しますが、いきなり圏の定義を説明するのではなく、圏よりも単純な概念であるグラフとモノイドという概念を先に説明します。これらは、圏の定義を理解する助けとなると同時に、グラフたちの構成する圏やモノイドたちの構成する圏など、圏の具体例を提供するものです。圏の定義を説明した後は、一つの圏の中で説明することができる圏論の概念である極限と余極限を扱います。目標である事実に関連して、部分集合の和や共通部分などが極限や余極限として理解できることを説明します。次に二つの圏の関係を記述する概念である関手について説明します。最後に二つの関手の特別な関係である随伴について説明し、随伴の考え方を用いて理解できる現象の例をいくつか紹介します。

圏論を学ぶために web 上でご覧いただける資料を紹介します。名古屋大学情報学部・情報学研究科の木原貴行先生による圏と論理へのいざない・レクチャーノートは今回の講座と同じようにグラフの話から始めていて少ない予備知識で読めることと、論理と圏論の関係について書かれています。壱大整域は圏論について基本的な部分から非常に豊富な解説がありますが、多少数学に慣れている人向けです。ゆる圏 YouTube ではベーシック圏論の内容を丁寧に解説されています。梅崎自作の資料として、圏論の基本的な内容から米田の補題を目標としたノートをこちらのページからご覧いただけます。こちらには自然変換も書いてあります。また、グラフの圏についての動画を YouTube のチャンネルに投稿する予定なのでご覧ください。

すうがくぶんかでは 10 月から後期集団講座を開講します。いずれも zoom を用いたオンライン講座で、アーカイブは 2 年間ご視聴いただけます。梅崎が担当する講座は『ベーシック圏論』を教科書にした講座と『線形代数の世界』を教科書にした講座で、この二講座については演習問題の添削を行います。質問対応、添削の対応も視聴期限と同じく 2 年間です。また、4 月から 8 月には『集合と位相』の講座を行いました。こちらは録画をご覧いただけます。もしご興味あれば各講座のページから詳細をご覧ください。

2　集合と写像

集合とはものの集まりのことで、別の言い方をすると何かが属するか属さないかを記述できるものである。つまり、X が集合であれば $a \in X$ であるか $a \notin X$ であるかが a に応じて決まっている。$a \in X$ であることを a は X の要素であるという。

自然数は 0 以上の整数のこととする。自然数全体の集合を $\mathbb{N}$ で表す。実数全体の集合を $\mathbb{R}$ で表す。

集合は中かっこ $\{,\}$ を用いて記述する。要素を全て列挙する方法で $\{0,1,2,3\}$ などと表す方法と、その集合に属する条件を用いて表す方法 $\{n \in \mathbb{N} \mid n \leq 3\}$ がある。よく $\{f(x) \mid x \in X\}$ という形の記法が用いられるが、これは略記である。例えば 0 以上の偶数全体の集合 $\{2n \mid n \in \mathbb{N}\}$ は $\{n \in \mathbb{N} \mid n = 2m$ となる $m \in \mathbb{N}$ が存在する。$\}$ の略記である。

写像は二つの集合の要素同士の対応である。これは計算方法や手続きではないことに注意しよう。写像 f が X の要素を Y の要素に対応させるということを $f : X \to Y$ と表す。

2.1　冪集合

集合 X の要素のうち一部分を集めてできる集合が X の部分集合である。一部分とはいっても、実際には X 自身も X の部分集合であり、要素を一つも持たない集合である空集合 $\emptyset$ も X の部分集合である。

定義 2.1 (部分集合)**.** 集合 Y が集合 X の**部分集合**であるとは、任意の x について「$x \in Y$ ならば $x \in X$」が成り立つことをいう。このことを $Y \subset X$ と表す。

例 2.2. $X = \{0,1\}$ であれば、X の部分集合は $\emptyset, \{0\}, \{1\}, X$ の合計 4 つ。

命題 2.3. 集合 X, Y に対して $X = Y$ であることは $X \subset Y$ かつ $Y \subset X$ であることと同値である。

X の部分集合を全て集めた集合が存在する。これを X の冪集合という。

定義 2.4 (冪集合)**.** 集合 X に対して、その部分集合を全て集めた集合を**冪集合**といい $P(X)$ と書く。つまり、$P(X) = \{x \mid x \subset X\}$ である。

例 2.5. $X = \{0,1\}$ であれば、$P(X) = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, X\}$ である。

問題 2.6. $X = \{0,1,2\}$ のとき $P(X)$ はどのような集合か。

解答. $P(X) = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0,1\}, \{0,2\}, \{1,2\}, X\}$

集合 X の部分集合が与えられたとき、そこから新しい部分集合を作る操作がある。

定義 2.7 (和集合)**.** 集合 X の部分集合 A, B に対してその**和集合** $A \cup B$ とは $\{x \in X \mid x \in A$ または $x \in B\}$ により定まる集合のこと。

例 2.8. $X = \{0,1,2,3\}, A = \{0,1\}, B = \{1,2\}$ に対し、$A \cup B = \{0,1,2\}$ である。

和集合は次のように特徴付けることができる。集合 X の部分集合 A, B に対して、$A \cup B$ は A も B も含む X の部分集合の中で包含関係について最小のものである。

同じことを少し言い換えると次のようになる。

命題 2.9. 集合 X と $A, B \in P(X)$ に対して、

1. $A \subset A \cup B$ かつ $B \subset A \cup B$ である。
2. 任意の $T \in P(X)$ に対して「$A \subset T$ かつ $B \subset T$」ならば $A \cup B \subset T$ である。

例 2.10. $X = \{0,1,2,3\}, A = \{0,1\}, B = \{1,2\}$ とする。$T \subset X$ であって $A \subset T$ かつ $B \subset T$ を満たすものは $\{0,1,2\}$ と $\{0,1,2,3\}$ の二つあり、$A \cup B = \{0,1,2\}$ であった。

定義 2.11 (共通部分)**.** 集合 X の部分集合 A, B にたいして、その**共通部分** $A \cap B$ とは $\{x \in X \mid x \in A \text{ かつ } x \in B\}$ により定まる集合のこと。

例 2.12. $X = \{0,1,2,3\}, A = \{0,1,2\}, B = \{1,2,3\}$ に対し、$A \cap B = \{1,2\}$ である。

共通部分は次のように特徴付けることができる。集合 X の部分集合 A, B に対して、$A \cap B$ は A にも B にも含まれる X の部分集合の中で包含関係について最大のものである。

こちらも上と同じように言い換える。

命題 2.13. 集合 X と $A, B \in P(X)$ に対して、

1. $A \cap B \subset A$ かつ $A \cap B \subset B$ である。
2. 任意の $T \in P(X)$ に対して「$T \subset A$ かつ $T \subset B$」ならば $T \subset A \cap B$ である。

例 2.14. $X = \{0,1,2,3\}, A = \{0,1,2\}, B = \{1,2,3\}$ とする。$T \subset X$ であって $T \subset A$ かつ $T \subset B$ を満たすものは $\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}$ であり、$A \cap B = \{1,2\}$ であった。

集合 X の冪集合 $P(X)$ においては次も成立する。

命題 2.15. X を集合とする。$X, \emptyset \in P(X)$ は次を満たす。

1. 任意の $T \in P(X)$ に対し $T \subset X$ が成り立つ。
2. 任意の $T \in P(X)$ に対し $\emptyset \subset T$ が成り立つ。

つまり、X は $P(X)$ の中で包含関係について最大であり、$\emptyset$ は包含関係について最小である。

これらの特徴づけを定義に採用することができる。例えば和集合であれば次のようにする。

定義 2.16. X を集合とし、$A, B \in P(X)$ とする。$C \in P(X)$ が A と B の和集合であるとは、以下の二条件を満たすことをいう。

1. $A \subset C$ かつ $B \subset C$ である。
2. 任意の $T \in P(X)$ に対して「$A \subset T$ かつ $B \subset T$」ならば $C \subset T$ である。

問題 2.17. 共通部分の定義についても上のように書き換えよ。

解答. X を集合とし、$A, B \in P(X)$ とする。$C \in P(X)$ が A と B の共通部分であるとは、以下の二条件を満たすことをいう。

1. $C \subset A$ かつ $C \subset B$ である。

2. 任意の $T \in P(X)$ に対して「$T \subset A$ かつ $T \subset B$」ならば $T \subset C$ である。

ただし、このような定義の仕方には注意が必要である。定義が存在を保証するとは限らない。一意性も保証するとは限らない。これが共通部分です、と一つ具体的に定めるのではなく、こういう性質を満たすものを共通部分と言います、という定義になっている。

一般的には存在や一意性を保証するものではないが、今の和集合の場合であれば $A \cup B$ が二つ目の定義の意味で和集合であり、しかもこの条件を満たすものは $A \cup B$ と一致する。つまり、一意的に存在することがわかる。

$P(X)$ における $X, \emptyset, A \cup B, A \cap B$ が満たす上の性質は、自然数における次の事実と似ている。

1. 1 はあらゆる自然数の約数である。
2. 0 はあらゆる自然数の倍数である。
3. a と b の最小公倍数 l は a の倍数かつ b の倍数であり、かつ t が a の倍数かつ b の倍数であれば t は l の倍数である。
4. a と b の最大公約数 g は a の約数かつ b の約数であり、かつ t が a の約数かつ b の約数であれば t は g の約数である。

これらはのちに圏における始対象、終対象、和、積などの概念として捉えられることを説明する。

2.2 写像

次に写像について簡単に説明する。写像というのは関数と同じと思ってよく、数に関係する場合に関数と呼ぶことが多い。関数というと何らかの変換規則みたいなイメージを持つかもしれないが、数学では二つの集合の要素たちの単なる対応づけでしかない。対応規則を数式や文章で記述できるかどうか、あるいはその計算手続きなどは問題にならない。

定義 2.18 (写像). f が集合 X から Y への**写像**である、全ての X の要素に対してある Y の要素を定まっていることをいう。$x \in X$ に f によって対応する Y の要素を $f(x)$ と表す。f が X から Y への写像であることを $f : X \to Y$ と表す。

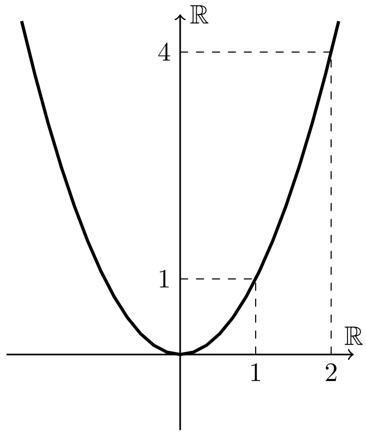
定義 2.19 (写像の相等). 集合 X, Y とその間の写像 $f : X \to Y, g : X \to Y$ について、$f = g$ であるとは任意の $x \in X$ に対して $f(x) = g(x)$ であることをいう。

関数のグラフを書いたの同じように、写像もグラフを定めることができる。X や Y が小さければ次のような表を書いて理解できる。例えば $X = \{0, 1, 2\}, Y = \{3, 4\}$ として $f : X \to Y$ を $f(0) = 4, f(1) = 3, f(2) = 4$ として定めたものは、とグラフを書くことができる。

	0	1	2
3		○	
4	○		○

中学や高校で習ったように、$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ であればそのグラフを xy 平面に書くことができる。

例 2.20. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ を $f(x)=x^2$ で定める。このグラフは次のようになる。



問題 2.21. 上の集合 $X=\{0,1,2\}, Y=\{3,4\}$ に対して X から Y への写像は上の f 以外にはどのようなものがあるか？全て列挙せよ。

解答. グラフを書くと

	0	1	2
3	○	○	○
4			

	0	1	2
3		○	○
4	○		

	0	1	2
3	○		○
4		○	

	0	1	2
3			○
4	○	○	

	0	1	2
3	○	○	
4			○

	0	1	2
3		○	
4	○		○

	0	1	2
3	○		
4		○	○

	0	1	2
3			
4	○	○	○

問題 2.22. $S=\{0\}$ とし、X を空集合ではない集合とする。集合 X から S への写像にはどのようなものがあるか？また S から集合 X への写像にはどのようなものがあるか？

解答. X から S の写像は全ての $x\in X$ に対して $f(x)=0$ により定まる $f:X\to S$ ただひとつ。S から X への写像は $x\in X$ ごとに $f(0)=x$ とすることで定まる $f:S\to X$ が X の要素と同じだけある。

問題 2.23. $S=\{0\}, X=\{1,2\}$ に対して上の事実を確かめよ。

解答. X から S への写像のグラフを全て列挙すると

	1	2
0	○	○

のみ。

S から X への写像のグラフを全て列挙すると

	0
1	○
2	

	0
1	
2	○

が全て。

X,Y,Z を集合とし、$f:X\to Y, g:Y\to Z$ をそれらの間の写像とする。この二つの写像を**合成**することで新しく写像を定めることができる。

1. X の要素 x から写像 f を使って $f(x)\in Y$ を対応させる。
2. 次にこの Y の要素 $f(x)$ から写像 g を使って $g(f(x))\in Z$ を対応させる。

このようにして定義される写像が f と g の合成写像 $g\circ f$ である。

定義 2.24 (合成写像)**.** 写像 $f : X \to Y$ と $g : Y \to Z$ の合成写像 $g \circ f : X \to Z$ とは、次で定まる X から Z への写像。

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

この式の読み方は $g \circ f$ が新しい写像の名前で、それを計算する手続きが $g(f(x))$ で与えられるということ。

例 2.25. 自然数 n に対して、その次の自然数を対応させることにより写像 $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ を定める。つまり

$$s(n) = n + 1$$

と定める。

上の $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, s(n) = n + 1$ を合成して $s \circ s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ を定める。これは

$$(s \circ s)(n) = s(s(n)) = s(n + 1) = (n + 1) + 1 = n + 1 + 1 = n + 2$$

となり、自然数 n に対してその次の次の自然数を対応させる写像。

問題 2.26. 上の例の記号のもとで、$s \circ (s \circ s), (s \circ s) \circ s$ はどのような写像か？

解答.

$$\begin{aligned}(s \circ (s \circ s))(n) &= s((s \circ s)(n)) = s(n + 2) = n + 3 \\ ((s \circ s) \circ s)(n) &= (s \circ s)(s(n)) = (s \circ s)(n + 1) = (n + 1) + 2 = n + 3\end{aligned}$$

写像の合成は結合的である。

命題 2.27. 集合 W, X, Y, Z とそれらの間の写像 $f : W \to X, g : X \to Y, h : Y \to Z$ について、$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$ が成り立つ。

証明. 写像の等式を示すためには任意の $x \in X$ に対して、

$$(h \circ (g \circ f))(x) = ((h \circ g) \circ f)(x)$$

であることを示せばよい。左辺は

$$(h \circ (g \circ f))(x) = h((g \circ f)(x)) = h(g(f(x)))$$

であり、右辺は

$$((h \circ g) \circ f)(x) = (h \circ g)(f(x)) = h(g(f(x)))$$

であるのでこれらは一致する。 □

集合 X に対して定義域と行き先が X であるような写像のうちで特別なものがある。

定義 2.28 (恒等写像)**.** X を集合とする。恒等写像 $\mathrm{id}_X : X \to X$ とは、$\mathrm{id}_X(x) = x$ で定まる写像のこと。

問題 2.29. 集合 X, Y とその間の写像 $f : X \to Y$ に対し、$\mathrm{id}_Y \circ f = f, f \circ \mathrm{id}_X = f$ が成り立つことを証明せよ。

解答. 両辺が全ての x に対して同じ Y の要素に対応すればよい。一つ目の式の左辺は $(\mathrm{id}_Y \circ f)(x) = \mathrm{id}_Y(f(x)) = f(x)$ であるので、右辺の x の行き先と一致する。二つ目の式の左辺は $(f \circ \mathrm{id}_X)(x) = f(\mathrm{id}_X(x)) = f(x)$ であるので、右辺の x の行き先と一致する。

例 2.30. $X = \{0, 1\}$ とする。写像 $X \to X$ を全て書くと

	0	1
0	○	
1		○

	0	1
0	○	○
1		

	0	1
0		○
1	○	

	0	1
0		
1	○	○

である。これに順に f_0, f_1, f_2, f_3 と名前をつけることにする。$f_0 = \mathrm{id}_X$ である。

これらの合成規則がどのようになるか、表にまとめよう。ここでは a の行 b の列に対して $b \circ a$ を書き込むことにする。

	f_0	f_1	f_2	f_3
f_0	f_0	f_1	f_2	f_3
f_1	f_1	f_1	f_3	f_3
f_2	f_2	f_1	f_0	f_3
f_3	f_3	f_1	f_1	f_3

可換図式というのはいくつかの写像の合成の等式を可視化したものである。いくつかの集合とそれらの間の写像を図で表す。その合成についての等式が成立することを図式が可換であるという。

例 2.31. $W = \{0, 1\}, X = \{2, 3, 4\}, Y = \{5, 6\}, Z = \{7, 8, 9\}$ とする。$f : W \to X, g : W \to Y, h : X \to Z, i : Y \to Z$ をそれぞれ次のグラフで定める。

f	0	1
2		
3	○	
4		○

g	0	1
5		○
6	○	

h	2	3	4
7			
8	○	○	
9			○

i	5	6
7		
8		○
9	○	

すると以下の図式は可換である。

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "i"] & Z \\
W \arrow[u, "g"] \arrow[r, "f"] & X \arrow[u, "h"']
\end{tikzcd}$$

一方で j を

j	2	3	4
7			
8	○	○	○
9			

と定めると以下の図式は可換ではない。

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "i"] & Z \\ W \arrow[u, "g"] \arrow[r, "f"] & X \arrow[u, "j"'] \end{tikzcd}$$

問題 2.32. W, X, Y, Z, f, g, i は上の例と同じものとする。図式

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "i"] & Z \\ W \arrow[u, "g"] \arrow[r, "f"] & X \arrow[u] \end{tikzcd}$$

を可換にするような X から Z への写像は何通りあるか。

解答.

	2	3	4
7	○		
8		○	
9			○

	2	3	4
7			
8	○	○	
9			○

	2	3	4
7			
8		○	
9	○		○

の 3 つ。

写像を使って集合の情報を取り出すことができる。

例 2.33. 集合 X から $\{0, 1\}$ への写像は X の部分集合を考えるのと同じである。例えば $X = \{0, 1, 2\}$ として X から $\{0, 1\}$ への写像は以下で全て。

	0	1	2
0	○	○	○
1			

	0	1	2
0		○	○
1	○		

	0	1	2
0	○		○
1		○	

	0	1	2
0			○
1	○	○	

	0	1	2
0	○	○	
1			○

	0	1	2
0		○	
1	○		○

	0	1	2
0	○		
1		○	○

	0	1	2
0			
1	○	○	○

一方で $P(X) = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0, 1\}, \{0, 2\}, \{1, 2\}, X\}$ である。

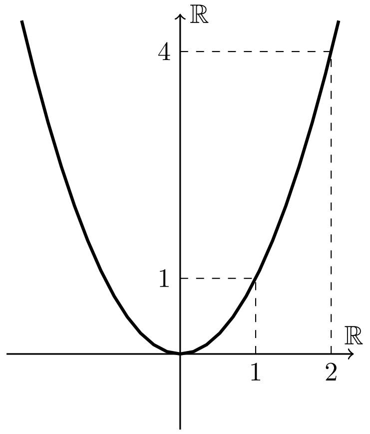
次に写像 $f : X \to Y$ を用いて X の部分集合と Y の部分集合の間の対応を二つ定める。

定義 2.34 (像)**.** f を集合 X から集合 Y への写像 $f : X \to Y$ とする。部分集合 $U \subset X$ の f による像とは $f_*(U) = \{f(x) \mid x \in U\} = \{y \in Y \mid \exists x \in X(y = f(x))\} \subset Y$ のこと。

定義 2.35 (逆像)**.** f を集合 X から集合 Y への写像 $f : X \to Y$ とする。部分集合 $V \subset Y$ の f による逆像とは $f^*(V) = \{x \in X \mid f(x) \in V\} \subset X$ のこと。

像や逆像には通常 f, f^{-1} の記号が使われるが、これは紛らわしいので今回は f_*, f^* を用いることにする。
中学や高校で習う話で言うと、像は関数の値域を求めること、逆像は不等式を解くことに相当する。

例 2.36. X, Y を共に実数全体の集合 $\mathbb{R}$ とし、$f : X \to Y$ を $f(x) = x^2$ により定める。



$f_*(\{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 2\}) = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 4\}, f^*(\{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 2\}) = \{x \in \mathbb{R} \mid -\sqrt{2} < x < -1$ または $1 < x < \sqrt{2}\}$ である。

問題 2.37. 上と同様に $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を $f(x) = x^2$ により定めたとき、$f_*(\{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 1\}), f^*(\{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 1\})$ を求めよ。

解答. $f_*(\{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 1\}) = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < 1\}, f^*(\{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 1\}) = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 1\}$ である。

例 2.38. $X = \{0, 1, 2\}, Y = \{3, 4\}$ とする。
$f : X \to Y$ を $f(0) = f(1) = 3, f(2) = 4$ により定める。

	0	1	2
3	○	○	
4			○

$f_*(\{0, 1\}) = \{3\}, f_*(\{0, 2\}) = \{3, 4\}, f^*(\{3\}) = \{0, 1\}, f^*(\{4\}) = \{2\}$ である。

問題 2.39. $g : Y \to X$ を $f(3) = g(4) = 0$ により定める。

	3	4
0	○	○
1		
2		

$g_*(\{3\}), g_*(\{3, 4\}), g^*(\{0\}), g^*(\{1, 2\})$ を求めよ。

解答. $g_*(\{3\}) = \{0\}, g_*(\{3, 4\}) = \{0\}, g^*(\{0\}) = \{3, 4\}, g^*(\{1, 2\}) = \emptyset$ である。

以上の f^*, f_* はそれぞれ冪集合の間の写像 $f_* : P(X) \to P(Y), f^* : P(Y) \to P(X)$ を定めている。これは包含関係について、次のような性質を持つ。

命題 2.40. f を集合 X, Y の間の写像 $f : X \to Y$ とする。

1. $A, B \in P(X)$ が $A \subset B$ のとき $f_*(A) \subset f_*(B)$ である。
2. $C, D \in P(Y)$ が $C \subset D$ のとき $f^*(C) \subset f^*(D)$ である。

集合 X から集合 $P(X)$ を定め、写像 $f : X \to Y$ から $f_* : P(X) \to P(Y), f^* : P(Y) \to P(X)$ を対応させることができる。この対応は**関手的**である。つまり、集合 X, Y, Z とその間の写像 $f : X \to Y, g : Y \to Z$ と $A, D \in P(Z), B, C \in P(X)$ に対して

$$
\begin{aligned}
f^*(g^*(A)) &= (g \circ f)^*(A) \\
\mathrm{id}_X^*(B) &= B \\
g_*(f_*(C)) &= (g \circ f)_*(C) \\
(\mathrm{id}_X)_*(D) &= D
\end{aligned}
$$

が成り立つ。

さて、写像 $f : X \to Y$ が与えられた時、冪集合の間の写像 $f_* : P(X) \to P(Y), f^* : P(Y) \to P(X)$ が定まった。一方で、冪集合には $\cap, \cup$ により要素を関係づけることができた。これらの関係について調べよう。

命題 2.41. X, Y を集合とし、$f : X \to Y$ を写像とする。集合 X の部分集合 A, B 及び集合 Y の部分集合 C, D に対し

$$
\begin{aligned}
f_*(A \cap B) &\subset f_*(A) \cap f_*(B) \\
f_*(A \cup B) &= f_*(A) \cup f_*(B) \\
f^*(C \cap D) &= f^*(C) \cap f^*(D) \\
f^*(C \cup D) &= f^*(C) \cup f^*(D)
\end{aligned}
$$

が成り立つ。

この性質を使うと、像や逆像を計算したいときにより簡単な場合に帰着できる。いろいろな計算の順序を入れ替えることができるかと言うのは数学でよくある話で、例えば x, y を正の実数としたとき $(xy)^2 = x^2y^2$ とか $\sqrt{xy} = \sqrt{x}\sqrt{y}$ は成り立つが、$(x+y)^2 = x^2 + y^2$ とか $\sqrt{x+y} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$ などは一般には成り立たない。

例 2.42. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を $f(x) = x^2$ で定める。$A = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 0\}, B = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 1\}$ とする。$f_*(A) = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 1\}, f_*(B) = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 1\}$ である。また、$A \cup B = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 1\}$ であり、$f_*(A \cup B) = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 1\}$ である。よって $f_*(A \cup B) = f_*(A) \cup f_*(B)$ は成り立つ。$A \cap B = \{0\}$ であり、$f_*(A \cap B) = \{0\}$ である。よって $f_*(A \cap B) = f_*(A) \cap f_*(B)$ は成り立たない。

$f^*(A) = \{0\}, f^*(B) = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 1\}$ である。$f^*(A \cup B) = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 1\}$ である。よって $f^*(A \cup B) = f^*(A) \cup f^*(B)$ は成り立つ。$f^*(A \cap B) = \{0\}$ である。よって $f^*(A \cap B) = f^*(A) \cap f^*(B)$ は成り立つ。

問題 2.43. $X=\{0,1,2\}, Y=\{3,4\}$ とし、$f: X \to Y$ を以下のグラフで定める。

	0	1	2
3	$\circ$	$\circ$	
4			$\circ$

このとき、$A, B \subset X$ を適切に定めて $f_*(A \cap B) = f_*(A) \cap f_*(B)$ が成り立たないようにせよ。

解答. $A=\{0,2\}, B=\{1,2\}$ とすると、$f_*(A)=\{3,4\}, f_*(B)=\{3,4\}$ となるので、$f_*(A) \cap f_*(B)=\{3,4\}$ である。一方で $A \cap B=\{2\}$ であり、$f_*(A \cap B)=\{4\}$ である。

$A=\{0\}, B=\{1\}$ などでもよい。

上の事実は集合の基本的な性質を使って証明できることができる。

証明.
1. $f_*(A \cap B) \subset f_*(A) \cap f_*(B)$ を示す。$y \in Y$ に対して以下の二条件は同値となる。
   (a) $y \in f_*(A \cap B)$
   (b) $f(x)=y$ となる $x \in A \cap B$ が存在する。
   また、以下の三条件は同値となる。
   (a) $f(x)=y$ となる $x \in A$ が存在し、かつ $f(x)=y$ となる $x \in B$ が存在する。
   (b) $y \in f_*(A)$ かつ $y \in f_*(B)$
   (c) $y \in f_*(A) \cap f_*(B)$
   さらに、「$f(x)=y$ となる $x \in A \cap B$ が存在する」ならば「$f(x)=y$ となる $x \in A$ が存在し、かつ $f(x)=y$ となる $x \in B$ が存在する」が成り立つ。
   以上より示される。
2. $f_*(A \cup B) = f_*(A) \cup f_*(B)$ を示す。$y \in Y$ に対して以下の条件は同値になる。
   (a) $y \in f_*(A \cup B)$
   (b) $y=f(x)$ となる $x \in A \cup B$ が存在する
   (c)「$y=f(x)$ となる $x \in A$ が存在する」または「$y=f(x)$ となる $x \in B$ が存在する」
   (d) $y \in f_*(A)$ または $y \in f_*(B)$
   (e) $y \in f_*(A) \cup f_*(B)$
   以上より示される。
3. $f^*(C \cap D) = f^*(C) \cap f^*(D)$ を示す。$x \in X$ に対して以下の条件は同値である
   (a) $x \in f^*(C \cap D)$
   (b) $f(x) \in C \cap D$
   (c) $f(x) \in C$ かつ $f(x) \in D$
   (d) $x \in f^*(C)$ かつ $x \in f^*(D)$
   (e) $x \in f^*(C) \cap f^*(D)$
   以上より示される。
4. $f^*(C \cup D) = f^*(C) \cup f^*(D)$ を示す。$x \in X$ に対して以下の条件は同値である
   (a) $x \in f^*(C \cup D)$
   (b) $f(x) \in C \cup D$
   (c) $f(x) \in C$ または $f(x) \in D$
   (d) $x \in f^*(C)$ または $x \in f^*(D)$
   (e) $x \in f^*(C) \cup f^*(D)$

以上より示される。

□

特徴付けを使った証明を試みる。

証明.

1. $f_*(A\cap B)\subset f_*(A)\cap f_*(B)$ を示す。$A\cap B\subset A$ より $f_*(A\cap B)\subset f_*(A)$ である。$A\cap B\subset B$ より $f_*(A\cap B)\subset f_*(B)$ である。よって共通部分の特徴付けから、$f_*(A\cap B)\subset f_*(A)\cap f_*(B)$ である。
2. $f_*(A\cup B)=f_*(A)\cup f_*(B)$ を示す。$A\subset A\cup B$ より $f_*(A)\subset f_*(A\cup B)$ である。$B\subset A\cup B$ より $f_*(B)\subset f_*(A\cup B)$ である。よって和集合の特徴付けから、$f_*(A)\cup f_*(B)\subset f_*(A\cup B)$ である。
逆はどうか？ $f_*(A)\subset T$ かつ $f_*(B)\subset T$ ならば $f_*(A\cup B)\subset T$ であることを示したい。
3. $f^*(C\cap D)=f^*(C)\cap f^*(D)$ を示す。$C\cap D\subset C$ より $f^*(C\cap D)\subset f^*(C)$ である。$C\cap D\subset D$ より $f^*(C\cap D)\subset f^*(D)$ である。よって共通部分の特徴付けから $f^*(C\cap D)\subset f^*(C)\cap f^*(D)$ である。
逆はどうか？ $T\subset f^*(C)$ かつ $T\subset f^*(D)$ ならば $T\subset f^*(C\cap D)$ であることを示したい。
4. $f^*(C\cup D)=f^*(C)\cup f^*(D)$ を示す。$C\subset C\cup D$ より $f^*(C)\subset f^*(C\cup D)$ である。$D\subset C\cup D$ より $f^*(D)\subset f^*(C\cup D)$ である。よって和集合の特徴付けから $f^*(C)\cup f_*(D)\subset f^*(C\cup D)$ である。
逆はどうか？ $f^*(C)\subset T$ かつ $f^*(D)\subset T$ ならば $f^*(C\cup D)\subset T$ であることを示したい。

□

上の証明を完結させるために、f_* と f^* の関係について簡単に説明しよう。まずさらに、$f_*(A)\subset B$ ならば $A\subset f^*(B)$ が成り立つ。また、さらに、$A\subset f^*(B)$ ならば $f_*(A)\subset B$ が成り立つ。

問題 2.44. f を集合 X,Y の間の写像 $f:X\to Y$ とする。

1. $A\in P(X)$ に対し $A\subset f^*(f_*(A))$ が成り立つ。
2. $B\in P(Y)$ に対し $f_*(f^*(B))\subset B$ が成り立つ。
3. $A\in P(X)$ と $B\in P(Y)$ に対し、$f_*(A)\subset B$ と $A\subset f^*(B)$ が同値である。

この事実についてグラフを描いて理解してみよう。

証明.

1. $A\in P(X)$ とする。$x\in A$ とする。$f(x)\in f_*(A)$ である。よって $x\in f^*(f_*(A))$ である。
2. $B\in P(Y)$ とする。$y\in f_*(f^*(B))$ とする。$y=f(x)$ となる $x\in f^*(B)$ が存在する。この x は $f(x)\in B$ を満たす。よって $y=f(x)\in B$ である。
3. $A\in P(X),B\in P(Y)$ とする。
まず $f_*(A)\subset B$ ならば $A\subset f^*(B)$ を示そう。$f_*(A)\subset B$ より $f^*(f_*(A))\subset f^*(B)$ である。$A\subset f^*(f_*(A))$ なので $A\subset f^*(B)$ である。
次に $A\subset f^*(B)$ ならば $f_*(A)\subset B$ を示そう。$A\subset f^*(B)$ より $f_*(A)\subset f_*(f^*(B))$ である。$f_*(f^*(B))\subset B$ なので $f_*(A)\subset B$ である。

□

それでは先ほどの証明の続きを行おう。

証明. $f_*(A)\subset T$ かつ $f_*(B)\subset T$ ならば $f_*(A\cup B)\subset T$ であることを示したい。$f_*(A)\subset T$ より $A\subset f^*(T)$ である。$f_*(B)\subset T$ より $B\subset f^*(T)$ である。よって $A\cup B\subset f^*(T)$ である。よって $f_*(A\cup B)\subset T$ である。

$T \subset f^*(C)$ かつ $T \subset f^*(D)$ ならば $T \subset f^*(C \cap D)$ であることを示したい。$T \subset f^*(C)$ より $f_*(T) \subset C$ である。$T \subset f^*(D)$ より $f_*(T) \subset D$ である。よって $f_*(T) \subset C \cap D$ である。よって $T \subset f^*(C \cap D)$ である。 □

$f^*(C) \subset T$ かつ $f^*(D) \subset T$ ならば $f^*(C \cup D) \subset T$ であることを示すにはこのやり方ではうまくいかない。

2.3 直和と直積と Set

集合の直和と直積について簡単に紹介する。これは部分集合に対する和集合や共通部分とは異なることに注意しよう。

まず直積だが、これは xy 座標平面や 2 次元の表が直積として想定するもの。要素の対を一つの要素であるかのように記述できる。二つの集合から、その直積という新しい集合を作る。これは、与えられた二つの集合から一つずつ要素を取り出してペアを作り、それを全て集めた集合である。

定義 2.45 (直積)**.** 集合 X, Y の直積 $X \times Y$ とは

$$X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X, y \in Y\}$$

のこと。$(x, y) = (x', y')$ であることは $x = x'$ かつ $y = y'$ で定まる。

また、射影 $p_1 : X \times Y \to X, p_2 : X \times Y \to Y$ を $p_1(x, y) = X, p_2(x, y) = y$ でそれぞれ定義する。

例 2.46. $X = \{0, 1, 2\}, Y = \{3, 4\}$ であればその直積は $X \times Y = \{(0, 3), (0, 4), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4)\}$ である。

	0	1	2
3	$(0, 3)$	$(1, 3)$	$(2, 3)$
4	$(0, 4)$	$(1, 4)$	$(2, 4)$

例 2.47.

$\mathbb{N} \times \mathbb{N} = \{(n, m) \mid n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N}\} = \{(0, 0), (0, 1), (0, 2), \ldots, (1, 0), (1, 1), (2, 1), \ldots, (2, 0), (2, 1), (2, 2), \ldots\}$

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$$

X から Y への写像 $f : X \to Y$ のグラフは $X \times Y$ の部分集合である。グラフを表を用いて表していたものは $X \times Y$ から $\{\circ, \}$ への写像とみなすことができ、これは部分集合と対応する。

二つの集合から、その直和という新しい集合を作る。これは、与えられた二つの集合の要素を全て集めた集合である。二つの部分集合の和集合 $\cup$ とは違うことに注意しよう。

集合 X, Y の直和 $X + Y$ とは X の要素と Y の要素を全て集めた集合だが、元々 X の要素であるものと Y の要素であるものは区別する。

定義 2.48 (直和)**.** 集合 X, Y の直和 $X + Y$ とは

$$X + Y = \{(x, 0) \text{ または } (y, 1) \mid x \in X, y \in Y\}$$

のこと。

写像 $j_1 : X \to X + Y, j_2 : Y \to X + Y$ を $j_1(x) = (x, 0), j_2(y) = (y, 1)$ により定める。

例 2.49. $X = \{0, 1, 2\}, Y = \{2, 3, 4\}$ のとき $X + Y = \{(0, 0), (1, 0), (2, 0), (2, 1), (3, 1), (4, 1)\}$ である。

直積と直和は次のような性質を持つ。

命題 2.50. 集合 X, Y の直積集合 $X \times Y$ と射影 $p_1 : X \times Y \to X, p_2 : X \times Y \to Y$ は次を満たす。任意の集合 T と写像 $f_1 : T \to X, f_2 : T \to Y$ に対し、写像 $f : T \to X \times Y$ であって次の図式が可換になる、言い換えると $p_1 \circ f = f_1, p_2 \circ f = f_2$ を満たすものものががただ一つ存在する。

$$\begin{tikzcd} & T \arrow[dl, "f_1"'] \arrow[d, "f"] \arrow[dr, "f_2"] & \\ X & X \times Y \arrow[l, "p_1"] \arrow[r, "p_2"'] & Y \end{tikzcd}$$

命題 2.51. 集合 X, Y の直和集合 $X + Y$ と埋め込み $j_1 : X \to X + Y, j_2 : Y \to X + Y$ は次を満たす。任意の集合 T と写像 $f_1 : X \to T, f_2 : Y \to T$ に対し、写像 $f : X + Y \to T$ であって次の図式が可換になる、言い換えると $f \circ j_1 = f_1, f \circ j_2 = f_2$ を満たすものものががただ一つ存在する。

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "j_1"] \arrow[dr, "f_1"] & X + Y \arrow[d, "f"] & Y \arrow[l, "j_2"] \arrow[dl, "f_2"] \\ & T & \end{tikzcd}$$

二つの集合から、その間の写像全てを集めて集合を作ることができる。

定義 2.52. 集合 X から集合 Y への写像全体の集合を $\mathbf{Set}(X, Y)$ とかく。

例 2.53. $\mathbf{Set}(\{0, 1, 2\}, \{0, 1\})$ は次の 8 個のグラフで定まる写像たちを要素にもつ集合である。i 行 j 列のものを f_{ij} と書くことにすると、

$$\mathbf{Set}(\{0, 1, 2\}, \{0, 1\}) = \{f_{11}, f_{12}, f_{13}, f_{14}, f_{21}, f_{22}, f_{23}, f_{24}\}$$

とかける。

	0	1	2
0	$\circ$	$\circ$	$\circ$
1			

	0	1	2
0		$\circ$	$\circ$
1	$\circ$		

	0	1	2
0	$\circ$		$\circ$
1		$\circ$	

	0	1	2
0			$\circ$
1	$\circ$	$\circ$	

	0	1	2
0	$\circ$	$\circ$	
1			$\circ$

	0	1	2
0		$\circ$	
1	$\circ$		$\circ$

	0	1	2
0	$\circ$		
1		$\circ$	$\circ$

	0	1	2
0			
1	$\circ$	$\circ$	$\circ$

例 2.54.

$$\mathbf{Set}(\mathbb{N}, \mathbb{N}) = \{(a_n) \mid n \in \mathbb{N}, a_n \in \mathbb{N}\} = \{(0, 0, 0, 0, \ldots), (1, 0, 1, 1, \ldots), (0, 1, 2, 3, \ldots), \ldots\}$$

二つの写像から写像の合成によって新しい写像を作ることができた。つまり、写像 $c : \mathbf{Set}(Y, Z) \times \mathbf{Set}(X, Y) \to \mathbf{Set}(X, Z)$ が $c(g, f) = g \circ f$ によって定義される。写像の合成も足し算や掛け算のようなもので、簡単な場合には次のような表にまとめることができる。

以前の例をもう一度確認する

例 2.55. $X = \{0, 1\}$ とする。$\mathbf{Set}(X, X)$ の要素は

	0	1
0	$\circ$	
1		$\circ$

	0	1
0	$\circ$	$\circ$
1		

	0	1
0		$\circ$
1	$\circ$	

	0	1
0		
1	$\circ$	$\circ$

である。これに順に f_0, f_1, f_2, f_3 と名前をつけることにする。$\mathbf{Set}(X, X) = \{f_0, f_1, f_2, f_3\}$ である。$f_0 = \mathrm{id}_X$ である。

これらの合成規則がどのようになるか、表にまとめよう。ここでは a の行 b の列に対して $c(b, a)$ を書き込むことにする。

	f_0	f_1	f_2	f_3
f_0	f_0	f_1	f_2	f_3
f_1	f_1	f_1	f_3	f_3
f_2	f_2	f_1	f_0	f_3
f_3	f_3	f_1	f_1	f_3

2.4 空集合

要素を一つも持たない集合がただ一つ存在し、それを空集合とよび $\emptyset$ で表す。これはつまらないもののようだが意外と重要で、0 の発見のようなもの。

空集合の扱いは慣れていないと難しいので改めてまとめる。

1. $\emptyset$ と X の直積 $\emptyset \times X$ は $\emptyset$ である。
2. $\emptyset$ から X への写像はただ一つ存在する。
3. X から $\emptyset$ への写像は $X = \emptyset$ のときはただ一つ、$X \neq \emptyset$ の時は存在しない。これらは写像の定義から導くことができる。
4. $\emptyset$ は如何なる集合 X に対してもその部分集合である。つまり $\emptyset \subset X$ が成り立つ。

これらは $\forall x(x \in X \to P(x))$ が $X = \emptyset$ のとき真である、さらにいうと $Q \to P$ が Q が偽なとき真であるという事実に基づく。

3　圏の定義

ここから圏の定義と基本的な例について説明していく。圏は、対象、射、合成、恒等射という 4 種類のデータから構成されるものである。この 4 つをいきなり扱うと難しいので、段階的に導入していくことにする。

まずはグラフという概念について説明しよう。これは上の 4 要素でいうと対象と射のみを考えて合成と恒等射については考えないということになる。ここで言うグラフは前説にも出てきたような関数のグラフのことではなく、グラフ理論などででてくるグラフのこと。ものの関係性などを頂点と辺の図で表現する。例えば電車の路線図とか映画の登場人物の相関図とかを想像してほしい。(ただしこれらには辺に情報が乗ってる場合があって、それはグラフにもう少し構造をつけたものである。)

次にモノイドという概念について説明する。モノイドは圏のうちで特別なもので、対象（頂点）が一つのものである。この概念を通して、合成や恒等射についての理解したい。

あとで説明するように頂点が一つのグラフは単なる集合だと思える。グラフの射は集合の写像である。これと同じように対象が一つの圏は単なるモノイドだと思える。

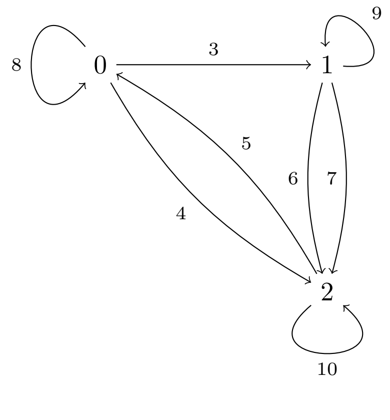
一方でグラフやモノイドも集合と同じように数学的対象である。圏のためでなく、独立して重要な概念。そして、グラフたちやモノイドたちによってそれぞれ一つの圏を定めることができる。この講座ではグラフやモノイドが二重の役割を持つことに注意したい。

3.1　グラフ

圏の定義を紹介する前に、圏について直感的に理解するための補助となるグラフの概念について説明する。グラフとは、頂点と向きのついた辺からなる図形のことである。辺に向きがついているため有向グラフと呼ばれることが多いが、今回は単にグラフという。

次のような図で表されるものがグラフである。

例 3.1.



これを集合の言葉を使って定式化する。

定義 3.2 (グラフ)**.** グラフ G とは

1. 頂点の集合 $V(G)$

2. 各頂点 $x, y \in V(G)$ に対して辺の集合 $G(x, y)$

からなるもの。

これを明示的に $G = (V(G), (G(x, y))_{(x,y)\in V(G)\times V(G)})$ などと書いたりもする。

この $(G(x, y))_{(x,y)\in V(G)\times V(G)}$ という記法は添字づけられた集合族というもので、$V(G) \times V(G)$ の各要素ごとに、つまり $V(G)$ の要素の対ごとに集合 $G(x, y)$ を与えるという意味の記法。数列 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が $\mathbb{N}$ の各要素つまり自然数に対して数 a_n を与えるというのと同じ。

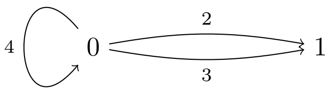
例 3.3. 上の例は

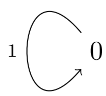
$$
\begin{aligned}
&V(G) = \{0, 1, 2\},\\
&G(0, 0) = \{7\}, G(0, 1) = \{3\}, G(0, 2) = \{4\},\\
&G(1, 0) = \emptyset, G(1, 1) = \{8\}, G(1, 2) = \{5, 6\},\\
&G(2, 0) = \emptyset, G(2, 1) = \emptyset, G(2, 2) = \{9\}
\end{aligned}
$$

として定まる。

今回の定義では二つの頂点の間に複数の辺が存在するグラフや、同じ頂点を始点と終点に持つ辺が存在するグラフも許していることに注意しよう。

問題 3.4. 次の図を集合を用いて記述せよ。





解答.

$$V(G) = \{0, 1\}, G(0, 0) = \{4\}, G(0, 1) = \{2, 3\}, G(1, 1) = \emptyset, G(1, 0) = \emptyset$$

$$V(G) = \{0\}, G(0, 0) = \{1\}$$

問題 3.5. 次のグラフを図示せよ。

$$
\begin{aligned}
&V(G) = \{0, 1, 2\},\\
&G(0, 0) = \emptyset, G(0, 1) = \{3\}, G(0, 2) = \{4\},\\
&G(1, 0) = \{5\}, G(1, 1) = \{6, 7\}, G(1, 2) = \emptyset,\\
&G(2, 0) = \{8\}, G(2, 1) = \emptyset, G(2, 2) = \{9\}
\end{aligned}
$$

解答.

$$\begin{tikzcd}
2 \arrow[loop left, "9"] \arrow[r, bend right, "8"'] & 0 \arrow[l, bend right, "4"'] \arrow[r, bend left, "3"] & 1 \arrow[l, bend left, "5"] \arrow[loop above, "6"] \arrow[loop below, "7"]
\end{tikzcd}$$

数学的な現象を捉えるグラフの例としてハッセ図を紹介しよう。集合の包含関係や数の大小関係、整除関係など、ある集合の要素の間に順序が定まっているときに、次の方法でグラフを定める。一つ一つの要素を頂点として、二つの頂点 x, y に対して y が x の「すぐ上」、つまり $x \leq y$ であってかつ $x \leq z \leq y$ となるような z が存在しないとき、またそのときに限り辺を書く。

例 3.6. $P(\{0,1\})$ の要素 $\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0,1\}$ には包含関係が定まる。この包含関係を大小関係だと思って、上のルールにしたがってグラフを定める。これを図示すると以下のようになる。

$$\begin{tikzcd}
 & \{0,1\} & \\
\{0\} \arrow[ur] & & \{1\} \arrow[ul] \\
 & \emptyset \arrow[ul] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

問題 3.7. $P(\{0,1,2\})$ から上と同じようにして、包含関係によるハッセ図をかけ。

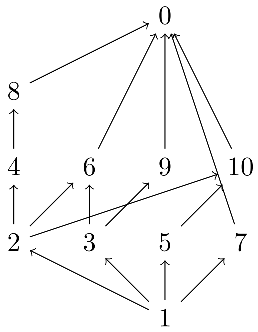
解答.

$$\begin{tikzcd}
 & \{0,1,2\} & & & & \\
 & \{0,1\} \arrow[u] & & \{0,2\} \arrow[ull] & & \{1,2\} \arrow[ullll] \\
\{0\} \arrow[ur] \arrow[urrr] & & \{1\} \arrow[ul] \arrow[urrr] & & \{2\} \arrow[ul] \arrow[ur] & \\
 & \emptyset \arrow[ul] \arrow[ur] \arrow[urrr] & & & &
\end{tikzcd}$$

例 3.8. 10 以下の自然数について、通常の大小関係でハッセ図をかく。

$$0 \longrightarrow 1 \longrightarrow 2 \longrightarrow 3 \longrightarrow 4 \longrightarrow 5 \longrightarrow 6 \longrightarrow 7 \longrightarrow 8 \longrightarrow 9 \longrightarrow 10$$

例 3.9. 10 以下の自然数について、整除関係を大小だと思って以下のようにグラフに表す。



例 3.10 (空グラフ)**.** 頂点も辺も持たないグラフを空グラフと呼ぶ。$V(G) = \emptyset$ であり、辺集合は存在しない。

集合からグラフを作る方法を二つ紹介しよう。

例 3.11 (離散グラフ)**.** 集合 X に対しグラフ $G(X)$ を頂点集合 $V(G(X)) = X$ とし、$x, y \in V(G(X)) = X$ にたいして辺集合 $G(X)(x, y) = \emptyset$ とすることで定める。

これは辺を一つも持たず集合 X の要素に対応した頂点をもつグラフとなる。これを**離散グラフ**という。

辺を持たないグラフは集合と同じだと思える。集合が単に要素が所属しているという情報を持つのに対し、グラフは集合の要素の間に何らかの関係があるよいう情報を持たせたものだと言える。

冪集合のように集合が要素であるような集合を考えることができた。冪集合の要素の間には包含関係がある。この包含関係の情報も取り出すには単に冪集合を集合と思うのではなくて、グラフとして表現するのがよい。

例えば $\{1, 2, 3, 6\}$ の整除関係をグラフに表したものと $P(\{0, 1\})$ の包含関係をグラフに表したものは同じ形になる。

例 3.12. 集合 X に対しグラフ $M(X)$ を頂点集合 $\{0\}$ に $M(X)(0, 0) = X$ として定める。これは頂点が一つだけで集合 X の要素に対応した辺を持つグラフである。

これによって、頂点が一つのグラフを集合と同一視することができる。

逆にグラフに集合を対応させる方法を紹介しよう。

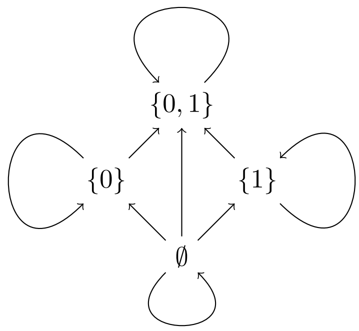
例 3.13. グラフ G にたいしてその頂点集合 $V(G)$ を対応させる。

例 3.14. グラフ G にたいしてその辺全体の集合 $\coprod_{(x,y) \in V(G) \times V(G)} G(x, y)$ を対応させる。

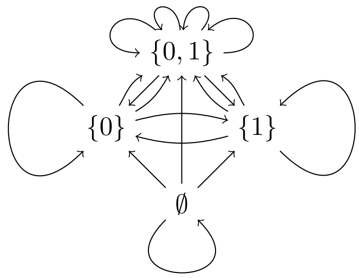
$X = \{0, 1\}$ にたいしてハッセ図

$$\begin{tikzcd}
 & \{0,1\} & \\
\{0\} \arrow[ur] & & \{1\} \arrow[ul] \\
 & \emptyset \arrow[ul] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

ではなく包含関係がある二つの集合の間全てに辺を持たせたグラフを考える。



例 3.15. さらにより一般に集合と写像を適当に集めることでグラフを定めることができる。
$\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0,1\}$ を頂点として、これらの間の写像に対応して辺を定める。



これらは互いに部分グラフの関係になっている。

3.2 モノイド

ここまではグラフの概念を見てきた。これは圏を構成する四つのデータのうち、合成と恒等射についてはとりあえず無視していた。次に圏の定義に近づけるために合成と恒等射についても考えることにする。ただいきなり一般にやらず、圏のうちで対象が一つという条件を満たす比較的単純な圏だけに限って話をする。これはモノイドという概念とみなすことができる。

モノイドの典型例として自然数の加法と自然数の乗法がある。自然数の加法つまり足し算は、二つの自然数に対して自然数を対応させる写像である。$2+3=5$ というのを写像っぽさを強調して $+(2,3)=5$ というように記述することにしよう。この $+$ は写像 $\mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ を定める。

さらに、足し算は結合法則を満たす。つまり $(1+2)+3$ も $1+(2+3)$ もいずれも同じ。$+(+(1,2),3) = +(1,+(2,3))$ ということ。

問題 3.16. 以下を計算せよ。$+(+(+(2,3),4),+(1,6))$
以下の足し算を写像の記号を用いて表示しなおせ。$(1+2)+(3+(4+5))$

解答. $+(+(+(2,3),4),+(1,6)) = 16$ である。
$(1+2)+(3+(4+5))$ は $+(+(1,2),+(3,+(4,5)))$ と表せる。

また、0 という特別な要素があり、これは任意の $n\in\mathbb{N}$ に対して $+(n,0)=n, +(0,n)=n$ を満たす。ここ

ではひとまず足し算という一つの操作のみに注目し、$(\mathbb{N}, \mu, 0)$ という三つ組を考えている。足し算は次のような表に書くことができる。(本当は無限のサイズを考えないといけないことに注意。)

	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	3
2	2	3	4

同じく自然数のかけ算という一つの操作のみに注目しよう。かけ算も二つの自然数に対して自然数を対応させる写像である。$2 \times 3 = 6$ というのを $\times(2, 3)$ と書くことにする。これも同じように表を書くことができる。掛け算は結合的である。つまり $\times(n, \times(m, l)) = \times(\times(n, m), l)$ が成り立つ。また 1 という特別な要素があっ

	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	4

て、$\times(n, 1) = n, \times(1, n) = n$ が成り立つ。

もう少し別のモノイドの例を紹介しよう。

例 3.17 (集合の自己写像)**.** 集合 X に対して、写像全体の集合 $\mathbf{Set}(X, X)$ と写像の合成 $c : \mathbf{Set}(X, X) \times \mathbf{Set}(X, X) \to \mathbf{Set}(X, X)$ を $c(f, g) = f \circ g$ で定める。写像の合成は結合法則をみたし、恒等写像がある。これにより $(\mathbf{Set}(X, X), \circ, \mathrm{id}_X)$ はモノイドになる。

例えば $X = \{0, 1\}$ としよう。このとき、$\mathbf{Set}(X, X)$ はどのようなモノイドか？

以前の例を思い出す。

これについては交換法則は成り立たない。写像 $X \to X$ を全て書くと

	0	1
0	$\circ$	
1		$\circ$

	0	1
0	$\circ$	$\circ$
1		

	0	1
0		$\circ$
1	$\circ$	

	0	1
0		
1	$\circ$	$\circ$

である。これに順に f_0, f_1, f_2, f_3 と名前をつけることにする。$f_0 = \mathrm{id}_X$ である。

これらの合成規則がどのようになるか、表にまとめよう。ここでは a の行 b の列に対して $b \circ a$ を書き込むことにする。

	f_0	f_1	f_2	f_3
f_0	f_0	f_1	f_2	f_3
f_1	f_1	f_1	f_3	f_3
f_2	f_2	f_1	f_0	f_3
f_3	f_3	f_1	f_1	f_3

例 3.18. $\mathbf{Set}(X, X)$ 全体ではなくその一部分を考えることもできる。例えば $X = \mathbb{N}$ とし、$s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ を $s(n) = n + 1$ と定めると $s \in \mathbf{Set}(\mathbb{N}, \mathbb{N}))$ である。$\{\mathrm{id}_{\mathbb{N}}, s, s^2, s^3, \ldots\}$ を考えるとこれもモノイドとなる。

$X = \{0, 1\}$ で、$n : X \to X$ を $n(0) = 1, n(1) = 0$ として定める。$n^2 = \mathrm{id}_X$ であり、$\{\mathrm{id}_X, n\}$ はモノイド

となる。

モノイドは「数」の集まりというより「操作」の集まりようなものだと思うのがいいかもしれない。

以上の例を踏まえてモノイドの定義を与える。

定義 3.19 (モノイド)**.** モノイド M とは

1. 集合 M_0
2. 写像 $\mu : M_0 \times M_0 \to M_0$
3. 要素 $1_M \in M_0$

というデータからなる $M = (M_0, \mu, 1_M)$ であって、次の性質を満たすもの

1. 任意の $x, y, z \in M$ に対して $\mu(\mu(x, y), z) = \mu(x, \mu(y, z))$ が成り立つ。
2. 任意の $x \in M$ に対して $\mu(x, 1_M) = x, \mu(1_M, x) = x$ が成り立つ。

単に M と省略する。μ を演算、1_M を単位元と呼ぶ。場合によっては単位元は存在のみを定義にしていて、それを要素として指定しないこともある。実際には単位元は存在のみを仮定して一意であることが証明できるため、どちらの定義を採用しても差はない。

これを可換図式で書いてみよう。

$$\begin{tikzcd}
M \times M \times M \arrow[r, "\mu_x \times \mathrm{id}_M"] \arrow[d, "\mathrm{id}_M \times \mu_M"'] & M \times M \arrow[d, "\mu_M"'] \\
M \times M \arrow[r, "\mu_M"] & M
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
M \times \{1_M\} \arrow[r, "\mathrm{id}_M \times i_M(1_M)"] \arrow[d, "pr_1"'] & M \times M \arrow[d, "\mu_M"'] \\
M \arrow[r, "\mathrm{id}_M"] & M
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\{1_M\} \times M \arrow[r, "i_M(1_M) \times \mathrm{id}_M"] \arrow[d, "pr_2"'] & M \times M \arrow[d, "\mu_M"'] \\
M \arrow[r, "\mathrm{id}_M"] & M
\end{tikzcd}$$

冒頭に述べた例をもう一度整理する。

例 3.20. 自然数全体の集合 $\mathbb{N}$ と写像 $+ : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ を普通の足し算 $+ : (n, m) \mapsto n + m$ でさだめよう。このとき、$(\mathbb{N}, +, 0)$ はモノイドになる。つまり、結合法則と単位法則をみたすことが確かめられる。

例 3.21. 自然数全体の集合 $\mathbb{N}$ と写像 $\times : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ を普通の掛け算 $\times : (n, m) \mapsto nm$ でさだめよう。このとき、$(\mathbb{N}, \times, 1)$ はモノイドになる。つまり、結合法則と単位法則をみたすことが確かめられる。

例 3.22. 集合 X に対して $M_0 = \mathbf{Set}(X, X)$ とし、μ を写像の合成で定め、1_M を恒等写像 id_X とすることでモノイドが定まる。

	1_M	b
1_M	1_M	b
b	b	

例 3.23. M の要素の個数が 2 であるようなモノイドにはどのようなものがあるか考えてみよう。$M = \{a, b\}$ とおいてみる。$a \neq b$ である。モノイドを定義するには、特別な要素 $1_M \in M$ と写像 $\mu_M : M \times M \to M$ を決める必要がある。$1_M = a$ とするか、$1_M = b$ とするかのふた通りの場合があるがどっちでも同じなので $1_M = a$ としてみる。

$\mu_M : M \times M \to M$ を決める必要がある。まず集合の写像として可能性は 16 通りある。そのうちで、1_M の行き先は自動的に決まることから絞り込めて、までは決まる。$\mu(b, b)$ の候補は $1_M, b$ の二つあるが、いずれにしてもモノイドになる。

集合 M_0 が同じでも、$\mu, 1_M$ の定め方で異なるモノイドが得られる。

特別なモノイドとして次を紹介する。

例 3.24 (一点モノイド)**.** $S = \{0\}$ に $\mu(0, 0) = 0, e = 0$ とするとモノイドになる。

これはつまらないもののように見えるが、モノイドの圏における始対象かつ終対象であるという役割を果たす。

一点集合 $X = \{x\}$ に対して $\mu(x, x) = x$ とすることで (X, μ, x) はモノイドとなる。一点集合はたくさんあるがどれでやっても本質的に同じ。この本質的に同じというのは、同型という概念で圏論的に述べることができる。直接示すこともできるし、終対象や始対象の性質として示すこともできる。一見違うものが同じだということを示すのに圏論の考え方を利用することもできる。

集合からモノイドを構成する方法を与えよう。

例 3.25 (自由モノイド)**.** 集合 X に対して、X が生成する自由モノイド FX とは、長さが有限の X の要素の文字列全体の集合 $F(X)_0$ に μ を文字列の結合で定めたもののこと。ここで単位元は空文字列「」で、これを 1 と表す。

例えば $X = \{a\}$ のとき、$F(X)_0 = \{1, a, aa, aaa, aaaa, \ldots\}$ であり、$\mu(aa, aaa) = aaaaa$ などとなる。$X = \{a, b\}$ のとき、$F(X)_0 = \{1, a, b, ab, aa, bb, ba, aaa, \ldots\}$ であり、$\mu(aba, bba) = ababba$ などとなる。

単に集合 X に $\mu, 1_X$ を適切に定めることで $(X, \mu, 1_X)$ をモノイドであるようにするのとは違うことに注意しよう。全ての集合に一斉に同じやり方でモノイドを対応させることができる。しかも集合の写像があればそれを利用してモノイドを関係付けることができる。

例 3.26. 自然数と掛け算で定まるモノイドは自由モノイドではないが $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ に掛け算を考えると自由モノイドになる。

自然数と足し算で定まるモノイドは自由モノイドだが $\mathbb{N} \setminus \{1\}$ に足し算をで考えると自由モノイドでなくなる。

自由モノイドに関係式を定めることでモノイドを作ることができる。例えば $F(\{a\})$ に $aa = 1$ という関係式を定めたものは であり、$aa = a$ という関係式を定めたものは である。

モノイド (M, μ, e) から集合 M を取り出す操作も関手的である。

	1_M	a
1_M	1_M	a
a	a	1_M

	1_M	a
1_M	1_M	a
a	a	a

例 3.27 (忘却関手)**.** モノイド (M, μ, e) に対して、単に集合 M を対応させる。

3.3 圏の定義

ここまで、圏に近い概念として有向グラフとモノイドを紹介した。これらと圏の関係をもう一度整理する。圏はある条件を満たす有向グラフに「射の合成」と「恒等射」というデータを付加したものである。モノイドは「対象が一つ」という条件を満たす圏である。

有向グラフと圏の違い。圏も対象（頂点）と射（向きのついた辺）からなるが、これについてさらに合成や恒等射というデータ、それらについての制約がある。射が合成できるか。合成の情報は絵からは見えない。

頂点が一つのグラフは集合と同一視できる。対象が一つの圏はモノイドと同一視できる。

グラフの定義とモノイドの定義をまず復習しよう。

定義 3.28 (グラフ)**.** グラフ G とは

1. 頂点の集合 $V(G)$
2. 各頂点 $x, y \in V(G)$ に対して辺の集合 $G(x, y)$

からなるもの。

これを明示的に $G = (V(G), \{G(x, y)\}_{x,y \in V(G) \times V(G)})$ などと書いたりもする。

定義 3.29 (モノイド)**.** モノイド M とは

1. 集合 M_0
2. 写像 $\mu : M_0 \times M_0 \to M_0$
3. 要素 $1_M \in M_0$

というデータからなる $M = (M_0, \mu, 1_M)$ であって、次の性質を満たすもの

1. 任意の $x, y, z \in M$ に対して $\mu(\mu(x, y), z) = \mu(x, \mu(y, z))$ が成り立つ。
2. 任意の $x \in M$ に対して $\mu(x, e) = x, \mu(e, x) = x$ が成り立つ。

これを踏まえて圏の定義を与える。

定義 3.30. 圏 C とは

1. 対象の集まり $\mathrm{Ob}(C)$

2. 各対象 $x, y \in \mathrm{Ob}(C)$ に対して射の集まり $C(x, y)$
3. 各対象 $x, y, z \in \mathrm{Ob}(C)$ に対して射の合成と呼ばれる写像 $c_{x,y,z} : C(y, z) \times C(x, y) \to C(x, z)$
4. 各対象 $x \in \mathrm{Ob}(C)$ に対して x 上の恒等射と呼ばれる射 $1_x \in C(x, x)$

からなり、以下の条件を満たすもの。

1. 結合法則任意の $w, x, y, z \in \mathrm{Ob}(C)$ と

$$c_{w,x,z}(c_{x,y,z}(h, g), f) = c_{w,y,z}(h, c_{w,x,y}(g, f))$$

   が成り立つ。
2. 恒等射の性質任意の $x, y \in \mathrm{Ob}(C)$ と $f \in C(x, y)$ に対し

$$c_{x,x,y}(f, 1_x) = f, c_{x,y,y}(1_y, f) = f$$

   が成り立つ。

$\mathrm{Ob}(C)$ の要素を C の対象、$C(x, y)$ の要素を C の射とよび $f : x \to y$ などと書く。

以前に与えた有向グラフ、モノイドの定義と改めて比較する。有向グラフは合成や恒等射というデータは持たない。有向グラフにこれらのデータを追加できるかは場合による。

与えられた集合にモノイドの構造を定めたの同様にして、与えられたグラフに圏の構造を定めたい。これが一通りとは限らないし、できるとも限らない。

逆にいうと、圏をグラフで図に表したときに射の合成や恒等射の情報は失われる。

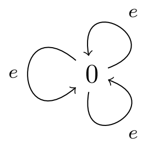
例 3.31. 有向グラフから圏を定めることができる例とできない例

$$0$$

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[loop left, "e"] \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[loop left, "e"] \arrow[loop right, "e"] \end{tikzcd}$$

$$0 \longrightarrow 1$$



モノイド (M, μ, e) は対象が一つの圏であると言える。射の集まりを M、演算が射の合成 μ、恒等射が単位元。条件を満たすのはモノイドの定義そのもの。

例 3.32. モノイドの例から圏の例を作る

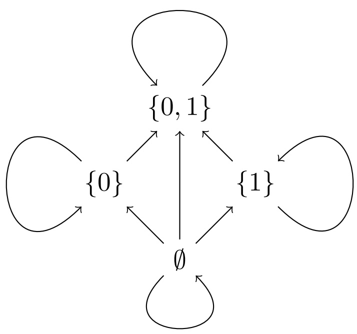
圏はグラフと演算表のデータからなると思うことができる。

以下ではこのテキストで主役となる圏の例を与える。

例 3.33. 集合 X の冪集合 $P(X)$ に包含を射とすることで圏を作ることができる。ハッセ図の話を思い出す。対象は X の部分集合、つまり $P(X)$ の要素である。$\mathrm{Ob}(C) = P(X)$ である。射は一点集合または空集合で、$C(A,B) = \begin{cases} \{i_{A,B}\} & A \subset B \\ \emptyset & A \not\subset B \end{cases}$ として定める。射の合成は A, B, C に対して $A \subset B$ かつ $B \subset C$ ならば $A \subset C$ であることから、一意的に定まる。これ以外の場合は空集合からの写像なので一意。恒等射は $i_{A,A}$ である。

空集合からの写像が一意であること、空集合や全体も部分集合としたことなどで定義がうまくいく。

例 3.34. $X = \{0, 1\}$ に対して上のように圏を定める。これについてグラフとして図示するとどうなるか。



この場合には、射の合成はグラフから一意的に決まる。

問題 3.35. $X = \{0, 1, 2\}$ にたいしてその部分集合を対象とし、包含によって射を定める。これによってできる圏を図示せよ。

例 3.36 (自然数と整除関係の圏)**.** $\mathrm{Ob}(C) = \mathbb{N}$ とし、$n, m \in \mathbb{N}$ の間に m が n の倍数であるとき、その時に限りただ一つの射を持つようにすると圏が定まる。

例 3.37. 対象の集まりが空集合である圏を空な圏という。

グラフとして絵に書いても合成の情報は完全には復元できないことに注意。

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[loop left, "e"] \arrow[loop right, "e"]
\end{tikzcd}$$

実際にはこの図は対象が一つなのでモノイドとして見ることもできる。要素が二つの集合にモノイドの構造を二通りの方法で入れることができたのを思い出そう。

注意 3.38. 圏から定まるグラフと一般のグラフの違いに注意しよう。グラフの場合、二つの矢印を繋いだ矢印があるとは限らない。

例 3.39. 有向グラフから圏を構成する（自由圏）どんどん矢印を繋いでいく。$\mathrm{Ob}(C) = V(G)$ とし、$C(x, y)$ は $x \to x_1 \to x_2 \to \cdots \to x_n \to y$ 全体。(つなげることができるグラフの辺の列を射とする。文字列と同じ考え方。) さらに各頂点 x に対して id_x も付け加わる。

頂点が一つのグラフは集合と見ることができた。対象が一つの圏はモノイドと見ることができる。グラフが頂点一つを持つ場合に自由圏を作ると自由モノイドに対応したものになる。

次のグラフ

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[loop left, "e"] \arrow[r] & 1 \arrow[loop right, "e"]
\end{tikzcd}$$

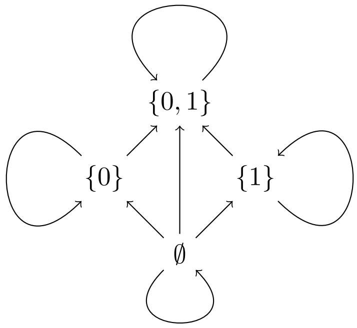
から自由圏を作る。射は $V(0,0) = \{a^n\}, V(1,1) = \{c^n\}, V(0,1) = \{c^n b a^m\}, V(1,0) = \emptyset$ になる。グラフを一部分だけ書くと次のようなになる。

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[loop above, "1_0"] \arrow[loop left, "a"] \arrow[loop below, "a^2"] \arrow[r, bend left, "b"] \arrow[r] \arrow[r, bend right, "cb"' , "ba"'] & 1 \arrow[loop above, "1_1"] \arrow[loop right, "c"] \arrow[loop below, "c^2"]
\end{tikzcd}$$

問題 3.40. $\{0, 1\}$ の部分集合と包含関係から定まるハッセ図をグラフと思ったとき、このグラフから上の方

法で自由圏を作るとどのような圏になるか

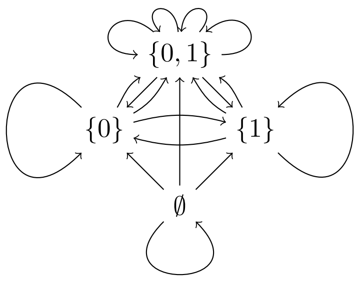
$$
\begin{tikzcd}
 & \{0,1\} & \\
\{0\} \arrow[ur] & & \{1\} \arrow[ul] \\
 & \emptyset \arrow[ul] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}
$$



上のように絵にかける圏だけではなく、とても大きな圏も重要である。

例 3.41. 集合の圏 **Set**

全てを絵に書くことは不可能なので、ごく一部だけ取り出す。$\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0,1\}$ だけについて、対象と射を有向グラフとして書いてみよう。



この図だけでは圏の情報としては不完全で合成の様子も捉える必要がある。そのために演算表を書いてみる。

問題 3.42. 上の図にさらに $\{2\}$ という集合も付け加えて全ての射を考えるとどのようになるか。

3.4 グラフの圏

集合の圏を作るのと同様に、グラフを集めて圏を作る。ここまでの説明では、一つのグラフが一つの圏と関連づけられていたが、ここではたくさんのグラフたちを集めて一つの圏を作る。

圏を作るために、グラフの射をまず定める必要がある。二つのグラフの関係を記述するものとしてグラフの射を定義する。これはグラフ準同型などとも呼ばれる。またグラフの射を用いてグラフの特徴を記述することができる。

グラフの持っている情報は頂点と辺であり、辺はその始点と終点が定まっていた。グラフの射はこれらの情報を保つものである。つまりあるグラフの頂点をあるグラフの頂点に対応させ、辺を辺に対応させ、その始点と終点を保つものである。正確に定義を与えると次のようになる。

定義 3.43 (グラフの射)**.** G, H をグラフとする。グラフの射 $f : G \to H$ とは

1. 頂点集合の間の写像 $f_V : V(G) \to V(H)$
2. グラフ G の各頂点 $x, y \in V(G)$ に対して辺集合の間の写像の族 $f_{x,y} : G(x, y) \to G(f(x), f(y))$

からなる写像の集まりのこと。x から y に向かう辺は $f(x)$ から $f(y)$ に向かう辺に対応づけられている。

例 3.44 (グラフの射の例)**.** グラフ G を

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[loop left, "2"] \arrow[r, "3"'] & 1 \end{tikzcd}$$

とし、グラフ H を

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[loop left, "3"] \arrow[r, "5"'] & 1 \arrow[loop below, "4"] \arrow[r, bend left, "7"] & 2 \arrow[l, bend left, "6"] \end{tikzcd}$$

とする。

G から H への射は全部で 4 個ある。

H から G への射は全部で 1 個ある。

複数の辺や頂点が同じ辺や頂点に対応してもよい。また、グラフの射が存在しないこともある。

問題 3.45. グラフ G と H を以下の図で定義する。

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[loop left, "e"] \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[rr, "a"] & & 2 \end{tikzcd}$$

$G \to H$ と $H \to G$ はどのようなものがあるか。

グラフ G_1, G_2, G_3 とそれらの間の射 $f_1 : G_1 \to G_2, f_2 : G_2 \to G_3$ が与えられたとき、f_1 と f_2 を合成してグラフの射 $f_2 \circ f_1 : G_1 \to G_3$ を定めることができる。

定義 3.46 (射の合成)**.** グラフ G_1, G_2, G_3 とそれらの間の射 $f_1 : G_1 \to G_2, f_2 : G_2 \to G_3$ に対し、グラフの射 $f_2 \circ f_1 : G_1 \to G_3$ を

1. $(f_2 \circ f_1)_V : V(G_1) \to V(G_3)$ を $(f_2)_V \circ (f_1)_V$ により定める。
2. 頂点 $x, y \in G_1$ に対して $(f_2 \circ f_1)_{x,y} : G_1(x, y) \to G_3((f_2 \circ f_1)(x), (f_2 \circ f_1)(y))$ を $(f_2)_{f_1(x), f_1(y)} \circ (f_1)_{x,y}$ により定める。

グラフの射には恒等射と呼ばれる特別な射がある。

定義 3.47 (恒等射)**.** グラフ G に対し恒等射 $1_G : G \to G$ とは以下のようにして定まるグラフの射。

1. $(\mathrm{id}_G)_V : V(G) \to V(G)$ を集合 $V(G)$ の恒等写像 $\mathrm{id}_{V(G)}$ とし
2. 頂点 $x, y \in V(G)$ に対して $(\mathrm{id}_G)_V : V(x, y) \to V(x, y)$ を恒等写像 $\mathrm{id}_{V(x,y)}$ とする。

グラフの射を使ってグラフの情報を取り出すことができる。

例 3.48.
1. 頂点を一つ持つグラフ
2. 二つの頂点とそれを結ぶ一つの辺を持つグラフ
3. 一つの頂点とその頂点を結ぶ一つの辺を持つグラフ

を考える。
グラフ G に対してこれらからの射はそれぞれ

1. 頂点集合
2. 辺全体の集合
3. ループになっている辺全体の集合

という集合と同一視できる。

これらは全てグラフに集合を対応させる操作で、しかも**関手的**である。このようにして、グラフに集合を対応させる操作が、あるグラフからの射の集合として**表現可能**な場合がある。

例 3.49. グラフの圏 **Graph** グラフ全体を対象の集まりとし、グラフの射を射の集まりとして圏が定まる。射の合成が定まり、結合律を満たす。恒等射が定まる。

これも一部の対象だけ絵を描いてみる。それらの対象の間の射は全部描く。グラフ G_0 を

$$0$$

G_1 を

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[loop above] \end{tikzcd}$$

G_2 を

$$0 \longrightarrow 1$$

で定める。

$$\begin{tikzcd}
G_1 \arrow[loop left] & & G_2 \arrow[ll] \arrow[loop right] \\
& G_0 \arrow[ul] \arrow[ur, shift left] \arrow[ur, shift right] \arrow[loop below] &
\end{tikzcd}$$

この各頂点がグラフを表している。

問題 3.50. グラフ G_3 を

$$0 \rightleftarrows 1$$

で定める。

これを追加して上の圏の図を書き直すとどうなるか。

グラフに対してその頂点集合を対応させる対応も、辺集合全体の直和を対応させる対応もいずれも**関手的**である。つまり、集合の写像 $f : X \to Y$ に対してグラフの射 $G(f) : G(X) \to G(Y)$ が定まる。さらに、$G(g \circ f) = G(g) \circ G(f), G(\mathrm{id}_X) = \mathrm{id}_{G(X)}$ である。

例 3.51. 集合からハッセ図を作る操作は関手的だろうか。つまり、写像 $f : X \to Y$ に対してグラフの射が定まるか？ $P(X)$ の要素と $P(Y)$ の要素を対応させる方法として、逆像 f^{-1} と像 f を紹介した。例えば $X = \{0, 1\}, Y = \{0\}$ とし、$f : X \to Y$ を $f(0) = f(1) = 0$ により定める。もし像を使うならば、$P(X)$ の要素に対して $f(\emptyset) = \emptyset, f(\{0\}) = f(\{1\}) = f(\{0, 1\}) = \{0\}$ であるが、$P(X)$ のハッセ図の $\{0\}$ から $\{1\}$ に向かう辺は $P(Y)$ の辺に対応させることができない。逆像を使うならば、$P(Y)$ の要素に対して $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset, f^{-1}(\{0\}) = \{0, 1\}$ だが、$P(Y)$ のハッセ図の $\emptyset$ から $\{0\}$ に向かう辺は $P(X)$ の辺に対応させることができない。いずれもグラフの射とはならない。

これに対して、ハッセ図ではなくて包含関係全てに対応させて辺を定めることにより、いずれも関手的になる。つまり、$P(X)$ に対応するグラフとして、頂点が $P(X)$ の要素、辺が $A \subset B$ のとき A から B に向かう辺、とすることによって、像をとる、逆像をとる、いずれについても関手的である。合成や恒等写像についての性質もみたされる。

3.5 モノイドの圏

二つのモノイドを結びつけるものとしてモノイドの射がある。集合の写像はモノイドは集合、写像、要素の三つの組であった。この三つの組みをうまく保存して対応させるものがモノイドの射である。

定義 3.52 (モノイドの射)**.** モノイド $(M, \mu, e), (N, \nu, f)$ について、M から N への射とは、集合の写像 $g : M \to N$ であって、以下を満たすもの

$$g(\mu(x, y)) = \nu(g(x), g(y))$$
$$g(e) = f$$

これを可換図式で書いてみよう。

$$\begin{tikzcd}
M \times M \arrow[r, "\mu_M"] \arrow[d, "f \times f"'] & M \arrow[d, "f"'] \\
N \times N \arrow[r, "\mu_N"] & N
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\{1_M\} \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & M \arrow[d, "f"'] \\
\{1_N\} \arrow[r] & N
\end{tikzcd}$$

例 3.53. 加法によるモノイド $\mathbb{N}$ からそれ自身へのモノイドの射は $f(n) = n, f(n) = 2n$ などがある。

問題 3.54. $D = \{0, 1\}$ に $\mu(1, 1) = 0$ によりモノイドの構造を定める。このとき、モノイドの射 $D \to D, D \to \mathbb{N}, \mathbb{N} \to D$ にはどのようなものがあるか。

モノイドの射について演算票を通して理解する。

例 3.55. M を $\{1_M, a\}$ で $b \neq 1_M$ で $a^2 = 1_M$ で定める。N を $\{1_M, b, b^2\}$ でこの三つは相異なり $b^3 = 1_M$ として定め、モノイドの射 $f : M \to N$ はどのようなものか？集合の写像 $f : M_0 \to N_0$ を $f(1_M) = 1_N, f(b) = a$ として定めたとする。

まず M の演算表を書くと である。この表に書かれているものは全て M_0 の要素である。これらを f で対

	1_M	a
1_M	1_M	a
a	a	1_M

応する N_0 の要素に書き換えると となる。N の演算表 と上の票を比較すると、$\nu(b, b)$ のところが一致しな

	1_N	b
1_N	1_N	b
b	b	1_N

	1_N	b	b^2
1_N	1_N	b	b^2
b	b	b^2	1_N
b^2	b^2	1_N	b

い。このようなことが起こる場合には f はモノイドの射ではない。

問題 3.56. モノイドの射の合成と恒等射が定まる。それぞれ集合の写像の合成と恒等写像を用いればよい。これを可換図式を書くことで確かめよう。

例 3.57 (自由モノイドの関手性)**.** 集合 X から自由モノイド $F(X)$ を定めることができた。

これは関手性をもつ。つまり写像 $f : X \to Y$ があればモノイドの射 $F(f) : F(X) \to F(Y)$ が定めることができる。X の要素の列をそのまま f で書き換えて Y の要素の列だと思えばよい。$F(g \circ f) = F(g) \circ F(f), F(\mathrm{id}_X) = \mathrm{id}_{FX}$ が成り立つ。

例 3.58 (忘却の関手性)**.** モノイド $(M_0, \mu, 1_M)$ から M_0 を対応させる操作とモノイドの射 $f : (M_0, \mu, 1_M) \to (N_0, \nu, 1_N)$ に集合の写像 $f : M_0 \to N_0$ を対応させる操作は関手的である。

自由モノイドからの射はどのようなものがあるかを考えよう。M をモノイドとして $F(\{a, b\}$ からのモノイドの射は a, b の行き先を定めるごとにただ一つ存在する。

例えば $F(X) \to \mathbf{Set}(Y)$ は写像 $Y \to Y$ をいくつか選び出すことだと思える。X が基本操作、$F(X)$ が基本操作の列、$End(Y)$ が実際に起こること。

例 3.59. モノイドの圏 **Mon** モノイド全体を対象の集まりとし、モノイドの射を射の集まりとして圏が定まる。射の合成が定まり、結合律を満たす。恒等射が定まる。

例えば M_0 を $\{0\}$ により定まる 1 点モノイド、M_1 を $\{0, 1\}$ に $\mu(1, 1) = 0$ により定まるモノイド、M_2 を $\mu(1, 1) = 1$ により定まるモノイドとして、これらについてこれも一部の対象だけ絵を描いてみよう。これも各頂点がモノイドを表している。

問題 3.60. さらにモノイド M_3 を $X = \{0, 1\}$ として $\mathbf{Set}(X, X)$ に合成によって定まるモノイドとする。これを追加すると図はどうなるか。

3.6 同型

最後に圏の対象が同型であるという概念を定義する。

定義 3.61 (同型)**.** 圏 C の対象 x, y が同型であるとは、射 $f : x \to y, g : y \to x$ で $c(f, g) = 1_y, c(g, f) = 1_x$ を満たすものが存在することをいう。このとき f, g を同型射という。また x と y が同型であることを $x \simeq y$ と表す。

4　極限と余極限

何かの集まりを圏だと思うことによって、ものの関係性のみに注目することができる。圏は推移的な関係とその合成を抽象化した。プログラム、証明、電車の路線図。例えば同型という概念について。

小学校の算数でりんごを 2 個とりんごを 3 個合わせるとりんごが 5 個になるというのと、みかんを 2 個とみかんを 3 個合わせるとみかんが 5 個になるというのと、いずれも $2+3=5$ と抽象化でき、$2,3,5$ などがりんごの個数なのかみかんの個数なのかを気にすることがないという話をしたわけだけど、それと同じで集合の話なのかモノイドの話なのかグラフの話なのか気にせずそれらの関係性について一般に成り立つことを記述するのが圏論の考え方。

例えば二つの異なる集合とその間の二つの異なる写像、二つの異なるモノイドとその間の二つの異なる射、二つのグラフとその間の二つの異なる射、いずれも次のようなグラフと合成などの情報として理解する。

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r, bend left, "e"'] \arrow[r, bend right, "e"'] & 1 \end{tikzcd}$$

この視点によって異なる現象が同じやり方で記述できる。そのような例として極限と余極限ついて説明していこう。

まずは、部分集合の和や共通部分と自然数の最小公倍数や最大公約数の類似について復習する。共通部分 $A \cap B$ というのは A に含まれ B にも含まれる集合のうち最も大きなものであった。また、和集合 $A \cup B$ というのは A を含み B も含む集合のうち最も小さなものであった。これを次のように述べることができる。

命題 4.1. 集合 X と $A, B \in P(X)$ に対して、

1. $A \subset A \cup B$ かつ $B \subset A \cup B$ である。
2. 任意の $T \in P(X)$ に対して「$A \subset T$ かつ $B \subset T$」ならば $A \cup B \subset T$ である。

命題 4.2. 集合 X と $A, B \in P(X)$ に対して、

1. $A \cap B \subset A$ かつ $A \cap B \subset B$ である。
2. 任意の $T \in P(X)$ に対して「$T \subset A$ かつ $T \subset B$」ならば $T \subset A \cap B$ である。

自然数 a, b の最大公約数 g というのは a の約数であり b の約数でもある自然数のうち最も大きなものであった。自然数 a, b の最小公倍数 l というのは a の倍数であり b の倍数でもある自然数のうち最も小さなものであった。

1. 1 はあらゆる自然数の約数である。
2. 0 はあらゆる自然数の倍数である。
3. a と b の最小公倍数 l は a の倍数かつ b の倍数であり、かつ t が a の倍数かつ b の倍数であれば t は l の倍数である。
4. a と b の最大公約数 g は a の約数かつ b の約数であり、かつ t が a の約数かつ b の約数であれば t は g の約数である。

$P(X)$ の包含関係や $\mathbb{N}$ の整除関係から圏を定めることができた。この圏においては、二つの要素の間に包含関係や整除関係があることを射の存在によって記述した。この圏の言葉で上の現象を記述し直そう。

命題 4.3. 集合 X の部分集合と包含関係から定まる圏 $C(X)$ の対象 $A, B \in \mathrm{Ob}(C(X))$ に対し、以下が成り立つ。

1. $A \cap B \in \mathrm{Ob}(C(X))$ は射 $A \cap B \to A, A \cap B \to B$ をもつ。
2. $T \to A$ と $T \to B$ を持てば $T \to A \cap B$ が存在する。
3. $A \cup B \in \mathrm{Ob}(C(X))$ は射 $A \to A \cup B, B \to A \cup B$ をもつ。
4. $A \to T$ と $B \to T$ を持てば $A \cup B \to T$ が存在する。

集合の直積と直和について、その特徴づけを見てみよう。

命題 4.4. 集合 X, Y の直積集合 $X \times Y$ と射影 $p_1 : X \times Y \to X, p_2 : X \times Y \to Y$ は次を満たす。任意の集合 T と写像 $f_1 : T \to X, f_2 : T \to Y$ に対し、写像 $f : T \to X \times Y$ であって次の図式が可換になる、言い換えると $p_1 \circ f = f_1, p_2 \circ f = f_2$ を満たすものものがただ一つ存在する。

$$\begin{tikzcd}
 & T \arrow[dl, "f_1"'] \arrow[d, "f"] \arrow[dr, "f_2"] & \\
X & X \times Y \arrow[l, "p_1"] \arrow[r, "p_2"'] & Y
\end{tikzcd}$$

命題 4.5. 集合 X, Y の直和集合 $X + Y$ と埋め込み $j_1 : X \to X + Y, j_2 : Y \to X + Y$ は次を満たす。任意の集合 T と写像 $f_1 : X \to T, f_2 : Y \to T$ に対し、写像 $f : X + Y \to T$ であって次の図式が可換になる、言い換えると $f \circ j_1 = f_1, f \circ j_2 = f_2$ を満たすものものがただ一つ存在する。

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "j_1"] \arrow[dr, "f_1"] & X + Y \arrow[d, "f"] & Y \arrow[l, "j_2"'] \arrow[dl, "f_2"'] \\
 & T &
\end{tikzcd}$$

集合の圏においては二つの対象の間に射が複数ありうるので、単に射が存在するというだけでなく、射の選択や可換性についても言及する必要がある。逆にいうと、$P(X)$ や $\mathbb{N}$ の場合には特に可換性については述べずとも存在から自動的に従う。

これら三つの現象は圏における和や積という概念で同じように捉えることができる。

上では条件を満たすものの中での最大最小として和集合や共通部分、最小公倍数や最大公約数を特徴付けた。条件を考えずに単に最大最小を考えることもできる。

X の冪集合 $P(X)$ の包含関係について、$\emptyset, X$ は最大と最小である。

命題 4.6. X を集合とし、$P(X)$ をその冪集合とする。任意の $A \in P(X)$ に対し $\emptyset \subset A$ が成り立つ。任意の $A \in P(X)$ に対し $A \subset X$ が成り立つ。

$\mathbb{N}$ における 0 と 1 はそれぞれ整除関係についての最大と最小である。

命題 4.7. 任意の自然数 n に対し、0 は n の倍数である。任意の自然数 n に対し、n は 1 の倍数である。

これらも圏の言葉で記述すると次のようになる。

命題 4.8. 集合 X の部分集合と包含関係から定まる圏 $C(X)$ において、任意の $T \in \mathrm{Ob}(C(X))$ はただ一つの射 $\emptyset \to T$ を持つ。任意の $T \in \mathrm{Ob}(C(X))$ はただ一つの射 $T \to X$ を持つ。

命題 4.9. 自然数と整除関係の圏において、任意の $t \in \mathrm{Ob}(\mathbb{N})$ はただ一つの射 $t \to 0$ を持つ。任意の $t \in \mathrm{Ob}(\mathbb{N})$ はただ一つの射 $1 \to t$ を持つ。

空集合や一点集合が集合全体の中でどのような性質を満たすか。

命題 4.10. $\mathbf{Set}$ における $\emptyset$ と $\{*\}$ は次の性質を持つ。任意の $T \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Set})$ に対してただ一つの射 $\emptyset \to T$ が存在する。任意の $T \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Set})$ に対してただ一つの射 $T \to \{*\}$ が存在する。

これは始対象や終対象と呼ばれるものである。

始対象や和、終対象や積は余極限と極限の特別なものである。この節の最後にはより一般の極限や余極限についても簡単に紹介する。

4.1 始対象と終対象

まずは極限と余極限の最も簡単な例として終対象と始対象を紹介しよう。上で述べたように、最大や最小という概念の一般化であると思うことができる。

定義 4.11 (終対象)**.** 圏 C の対象 x が**終対象**であるとは、任意の C の対象 y に対して $C(y, x)$ がただ一つの要素からなることをいう。つまり、任意の C の対象 y に対して y から x への射がただ一つであることをいう。

定義 4.12 (始対象)**.** 圏 C の対象 x が**始対象**であるとは、任意の C の対象 y に対して $C(x, y)$ がただ一つの要素からなることをいう。つまり、任意の C の対象 y に対して x から y への射がただ一つであることをいう。

例 4.13. 以下のグラフに対しては、一通りの方法で圏の構造を定めることができる。

$$
\begin{tikzcd}
1 \arrow[loop left, "1_1"] & 0 \arrow[l, "4"] \arrow[r, "6"] \arrow[d, "5"] \arrow[loop above, "1_0"] & 3 \arrow[loop right, "1_3"] \\
& 2 \arrow[loop below, "1_2"] &
\end{tikzcd}
$$

0 が始対象、終対象はなし。

$$
\begin{tikzcd}
1 \arrow[loop left, "1_1"] \arrow[dr, "8"] & 0 \arrow[l, "4"] \arrow[r, bend left, "6"] \arrow[r, bend right, "7"'] \arrow[d, "5"] \arrow[loop above, "1_0"] & 3 \arrow[loop right, "1_3"] \arrow[dl, "9"] \\
& 2 \arrow[loop below, "1_2"] &
\end{tikzcd}
$$

始対象はなし、2 が終対象。

問題 4.14. 以下のグラフに対しては、一通りの方法で圏の構造を定めることができる。この圏について、それぞれ始対象と終対象がどれであるか述べよ。

1.

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[loop left, "1_0"] \arrow[r, shift left, "2"] \arrow[r, shift right, "3"'] & 1 \arrow[loop right, "1_1"] \end{tikzcd}$$

2.

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[loop left, "1_0"] \arrow[r, shift left, "2"] & 1 \arrow[loop right, "1_1"] \arrow[l, shift left, "3"] \end{tikzcd}$$

3.

$$\begin{tikzcd} & 2 \arrow[loop above, "1_2"] \\ 0 \arrow[loop left, "1_0"] \arrow[ur, bend left, "6"] \arrow[ur, "5"'] & 1 \arrow[l, "4"] \arrow[u, "3"'] \arrow[loop below, "1_1"] \end{tikzcd}$$

解答. 1. 始対象も終対象もなし。

2. $0, 1$ ともに始対象でありかつ終対象である。

3. 1 が始対象、終対象はなし。

上の例でも見たように、一般に圏 C において始対象や終対象は存在するとは限らないし、存在したとしてもただ一つとは限らない。

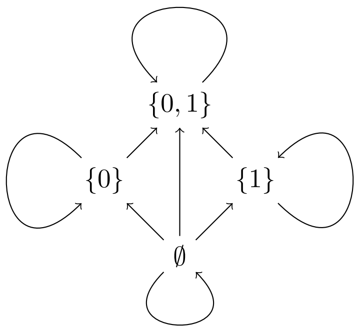
冒頭で紹介した例をもう一度確認しよう。

例 4.15 ($P(X)$ の始対象と終対象)**.** 集合 X の冪集合 $P(X)$ から、前の例のようにして圏 $C(X)$ を作る。対象は $P(X)$ の要素つまり X の部分集合とする。つまり、$\mathrm{Ob}(C(X)) = P(X)$ とする。また、$C(X)(A, B)$ は包含関係 $A \subset B$ が成立するとき、またその時に限り射をただ一つ持つ。

この圏では $\emptyset$ が始対象、X が終対象である。というのも $\emptyset$ は全ての X の部分集合 A に対して $\emptyset \subset A$ となり、この圏の定義から $C(\emptyset, A)$ はただ一つの要素を持つ。また X 自身は全ての X の部分集合 A に対して $A \subset X$ となり、この圏の定義から $C(A, X)$ はただ一つの要素を持つ。

また、始対象や終対象はこれ以外にないこともわかる。というのも A が始対象であれば $A \subset \emptyset$ でなければならないため、$A = \emptyset$ である。A が終対象であれば $X \subset A$ でなければならないため、$A = X$ である。

例えば $X = \{0,1\}$ の場合、$C(X)$ をグラフで表示すると

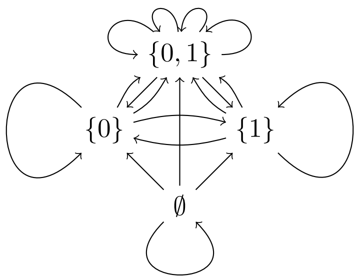


となり $\emptyset$ が始対象、X が終対象である。

例 4.16 (自然数の整除の圏の始対象と終対象)**.** 自然数の整序の圏では 1 が始対象、0 が終対象である。

例 4.17 (**Set** の始対象と終対象)**.** 集合の圏 **Set** において空集合 $\emptyset$ が始対象であり、要素を 1 つ持つ集合が終対象である。任意の集合 X にたいし $\emptyset$ を定義域にもつ写像 $\emptyset \to X$ はただ一つ存在していた。また、任意の集合 X と任意の 1 点集合 $\{a\}$ にたいし、写像 $f : X \to \{a\}$ は全ての $x \in X$ にたいして $f(x) = a$ とすることで定まるただ一つの写像である。終対象はたくさんあるが、それらは全て **Set** において同型である。一方で始対象は空集合ただ一つである。というのも、写像 $X \to \emptyset$ が存在するためには $X = \emptyset$ でなければならないためである。

問題 4.18. 次の **Set** の部分圏において、始対象と終対象はどうなるか？



解答. $\emptyset$ が始対象であり、終対象は存在しない。

例 4.19 (**Mon** の始対象と終対象)**.** モノイドの圏 **Mon** において、1 つの要素からなる集合 $\{x\}$ の上に定まる唯一のモノイド $(\{x\}, \mu, x)$ が始対象かつ終対象である。

まず始対象であることを確かめる。$(M_0, \mu, 1_M)$ をモノイドとする。このとき、モノイドの射 $f : (\{x\}, \mu, x) \to (M_0, \mu, 1_M)$ はまず集合の写像 $f : \{x\} \to M_0$ を定める必要がある。これはたくさんありうるが、さらに単位元についての条件 $f(x) = 1_M$ を満たすことからただ一つに決まる。

次に終対象であることを確かめる。モノイドの射 $f : (M_0, \mu, 1_M) \to (\{x\}, \mu, x)$ はまず集合の写像 $f : M_0 \to \{x\}$ を定める必要がある。これは値が x の定数写像ただ一つに決まる。この写像は $f(1_M) = x$ となり、$f(\mu(m, n)) = x, \mu(f(m), f(n)) = \mu(x, x) = x$ となるためモノイドの射である。

問題 4.20. 逆に **Mon** における始対象であれば 1 点モノイドであること、終対象であれば 1 点モノイドであることを示せ。

1 点集合がたくさんあるので要素が一つのモノイドはたくさんあるが、それらは全て同型である。

例 4.21 (**Graph** での始対象と終対象)**.** 有向グラフの圏 **Graph** において、空グラフが始対象であり、終対象は頂点と辺がそれぞれ 1 つのグラフ L である。

まず始対象について。任意のグラフ G に対してグラフの射 $f : \emptyset \to G$ はただ一つである。頂点の対応を $\emptyset \to V(G)$ なる唯一の写像で定めたもののみ。

逆にグラフ H が始対象であれば H は空グラフである。もしグラフ H が任意のグラフ G に対してグラフの射 $f : H \to G$ をただ一つ持つとしよう。特に G として離散グラフを考えることによって、H は辺を持たないことがわかる。よって H は離散グラフであり、さらに $V(H)$ は任意の集合に対してただ一つの写像を持つことがわかる。よって $V(H) = \emptyset$ とわかる。頂点集合が $\emptyset$ であるグラフは空グラフのみ。

次に終対象について。$f : G \to L$ は $V(G) \to \{*\}$ なる唯一の写像と $V(x, y) \to \{*\}$ なる唯一の写像たちで定まるもの。

逆にグラフ H が終対象であるとしよう。つまり、グラフ H は任意のグラフ G に対してグラフの射 $f : G \to H$ をただ一つ持つ。まず、G を離散グラフとすることで $V(H)$ は全ての集合からただ一つの写像を持つことがわかる。よって $V(H) = \{*\}$ である。さらに G として頂点を一つ持つグラフとすることで、$V(*, *)$ は全ての集合からただ一つの写像を持つことがわかる。よって $V(*.*) = \{*\}$ である。

問題 4.22. 頂点が一つで辺を持たないグラフは圏 **Graph** における始対象でも終対象でもない。このことを説明せよ。

解答. 始対象でないこと。空グラフへの射は存在しない。あるいは頂点が複数あるグラフへの射は複数存在する。

終対象でないこと。頂点一つ辺一つのグラフからの射が存在しない。あるいは辺を一つ以上持つグラフからの射が存在しない。

Set, **Mon**, **Graph** などの間には対象の対応があった。これらについて始対象や終対象の関係を調べよう。

例 4.23. モノイド $(M_0, \mu, 1_M)$ に M_0 を対応させる。この対応のもとで **Mon** における終対象は **Set** における終対象に対応する。一方で、**Mon** における始対象は **Set** における始対象には対応しない。

例 4.24. 集合 X に自由モノイド $F(X)$ を対応させる。**Set** の始対象 $\emptyset$ に対してその自由モノイドは 1 点モノイドであり、これは **Mon** の始対象である。**Set** の終対象 $\{a\}$ に対してその自由モノイドは $\{1, a, aa, \ldots\}$ に結合を μ として定めたモノイドで、これは $\mathbb{N}$ とその加法から定まるモノイドと同型なモノイド。これは **Mon** の終対象ではない。

例 4.25. グラフ G に対してグラフの頂点集合 $V(G)$ を対応させる。

Graph の始対象は **Set** の始対象に対応し、終対象も終対象に対応する。

例 4.26. 集合 X に離散グラフ $G(X)$ を対応させる。

Set の始対象は **Graph** の始対象に対応するが、終対象は終対象に対応しない。

4.2 和と積

極限と余極限の次の例として和と積を紹介する。この節の冒頭に紹介したように、集合の直和と直積、部分集合の和と共通部分、自然数の最小公倍数と最大公約数などが和と積の例である。実際には対象をいくつ指定しても和や積は定義できるが、ここでは簡単のため二つの対象の和や積についてのみ扱う。

定義 4.27 (和)**.** 圏 C の対象 x, y に対してその**和**とは対象 s と射 $j_1 : x \to s, j_2 : y \to s$ であって、任意の対象 t と射 $f_1 : x \to t, f_2 : y \to t$ に対してただ一つの射 $f : s \to t$ が存在して次の図式が可換になるもののこと。つまり、$c(f, j_1) = f_1, c(f, j_2) = f_2$ が成り立つこと。

$$\begin{tikzcd}
x \arrow[r, "j_1"] \arrow[dr, "f_1"'] & s \arrow[d, "f"] & y \arrow[l, "j_2"'] \arrow[dl, "f_2"] \\
& t &
\end{tikzcd}$$

和は存在するとは限らないが、もし存在すれば全て同型になり、しかもその同型射は一つに定まる。つまり、s, s' がいずれも x, y の和であれば、$f : s \to s'$ 及び $g : s' \to s$ であって $c(g, f) = 1_s, c(f, g) = 1_{s'}$ を満たすものがただ一つだけ存在する。

このを s を $x + y$ で表す。

定義 4.28 (積)**.** 圏 C の対象 x, y に対してその**積**とは対象 p と射 $p_1 : p \to x, p_2 : p \to y$ であって、任意の対象 t と射 $f_1 : t \to x, f_2 : t \to y$ に対してただ一つの射 $f : t \to p$ が存在して次の図式が可換になるもののこと。つまり、$c(p_1, f) = f_1, c(p_2, f) = f_2$ が成り立つこと。

$$\begin{tikzcd}
& t \arrow[dl, "f_1"'] \arrow[d, "f"] \arrow[dr, "f_2"] & \\
x & p \arrow[l, "p_1"] \arrow[r, "p_2"'] & y
\end{tikzcd}$$

積は存在するとは限らないが、もし存在すれば全て同型になり、しかもその同型射は一つに定まる。つまり、s, s' がいずれも x, y の和であれば、$f : s \to s'$ 及び $g : s' \to s$ であって $c(g, f) = 1_s, c(f, g) = 1_{s'}$ を満たすものがただ一つだけ存在する。

この p を $x \times y$ で表す。

冒頭に紹介した例を再度確認しよう。

例 4.29. 集合 X の冪集合 $P(X)$ と包含により定まる圏において、$A, B \in P(X)$ の和集合と共通部分が圏における和と積であることを確かめよう。

問題 4.30. 自然数の整除関係から定まる圏において、最大公約数と最小公倍数は和と積であることを確かめよ。

例 4.31 (**Set** の和と積)**.** 集合の圏 **Set** において、集合の直積と集合の直和は集合の圏における積と和である。

X, Y を集合とし、集合の直積 $X \times Y$ 及び射影 $p_1 : X \times Y \to X, p_2 : X \times Y \to Y$ を考えると、これが **Set** の積になることを確かめよう。

例 4.32. 以下のグラフに対しては、一通りの方法で圏の構造を定めることができる。

$$
\begin{tikzcd}
2 \arrow[loop left, "1_2"] \arrow[r, "8"'] & 3 \arrow[loop right, "1_3"] \\
0 \arrow[loop left, "1_0"] \arrow[u, "5"'] \arrow[ur, "6"'] \arrow[r, "4"'] & 1 \arrow[loop right, "1_1"] \arrow[u, "7"']
\end{tikzcd}
$$

1 と 2 の積は 0 であり、1 と 2 の和は 3 である。

$$
\begin{tikzcd}
2 \arrow[loop left, "1_2"] & 3 \arrow[loop right, "1_3"] \\
0 \arrow[loop left, "1_0"] \arrow[u, "5"'] \arrow[ur, "7"] \arrow[r, "4"'] & 1 \arrow[loop right, "1_1"] \arrow[u, "8"'] \arrow[ul, "6"]
\end{tikzcd}
$$

2 と 3 の積は 1 であり、2 と 3 の和は存在しない。

問題 4.33. 以下のグラフに対しては、一通りの方法で圏の構造を定めることができる。この圏について、2 と 3 の和と積を求めよ。

1.

$$
\begin{tikzcd}
2 \arrow[loop left, "1_2"] & 3 \arrow[loop right, "1_3"] \\
0 \arrow[loop left, "1_0"] \arrow[u, "6"'] \arrow[ur, "8"] \arrow[r, bend left, "4"] \arrow[r, bend right, "5"'] & 1 \arrow[loop right, "1_1"] \arrow[u, "9"'] \arrow[ul, "7"]
\end{tikzcd}
$$

2.

$$
\begin{tikzcd}
2 \arrow[loop left, "1_2"] \arrow[r, "10"'] & 3 \arrow[loop right, "1_3"] \\
0 \arrow[loop left, "1_0"] \arrow[u, "6"'] \arrow[ur, "8"] \arrow[r, bend left, "5"] & 1 \arrow[loop right, "1_1"] \arrow[u, "9"'] \arrow[ul, "7"] \arrow[l, bend left, "4"]
\end{tikzcd}
$$

解答. 1. 和はなし、積はなし

2. 和は 3 で積 $0, 1$

例 4.34 (**Mon** の和と積). モノイドの圏 **Mon** における和と積について。

モノイド (M, μ, e) と (N, ν, f) の直積とは、集合としての直積 $M \times N$ に、単位元を (e, f) で、演算を $\mu \times \nu((m,n),(m',n')) = (\mu(m,m)', \nu(n,n'))$ で定めたもの。これがモノイドになるか確かめよう。

また $M \times N \to M, M \times N \to N$ を $(m,n) \mapsto m, (m,n) \mapsto n$ で定める。これらはモノイドの射になるか確かめよう。

これはモノイドの圏における積である。モノイドの直積 $M \times N$ はモノイドの射 $pr_1 : M \times N \to M$ と $pr_2 : M \times N \to N$ を持つ。

モノイド Z とモノイドの射 $q_1 : Z \to M, q_2 : Z \to N$ に対し、必ずただ一つのモノイドの射 $u : Z \to M \times N$ が存在し、$u \circ pr_1 = q_1, u \circ pr_2 = q_2$ を満たす。

モノイドの和は難しい。例えば集合としての直和 $\mathbb{N} + \mathbb{N}$ に $j_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{N} + \mathbb{N}, j_2 : \mathbb{N} \to \mathbb{N} + \mathbb{N}$ を考えると、単位元をどう定めようともどちらかはモノイドの射ではなくなる。積の場合には集合としての直積に射影を考えたものがモノイドの射になっていたのとは対照的である。

モノイドの直積からモノイド構造を忘却すると、集合としての直積と同型になる。逆に集合の直積から自由モノイドを作るのは、それぞれの集合から自由モノイドを作りその積を取ったものと同型にならない。

自由モノイドと積和の関係は随伴を通して一般的に理解できる。$F(X \times Y) \simeq F(X) \times F(Y)$ か？ $F(X + Y) \simeq F(X) + F(Y)$ か？

例 4.35 (**Graph** の和と積). G_1, G_2 に対して $G_1 + G_2$ および $G_1 \times G_2$ はどのようなグラフになるか。

まず和について考える。$V(G_1 + G_2)$ は集合としての直和 $V(G_1) + V(G_2)$ とし、辺集合 $(G_1 + G_2)(x, y)$ は x, y 共に G_1 または G_2 のとき元の辺集合で、異なるグラフの頂点の場合には辺集合は空とする。これが和の条件を満たすことを確かめよう。

次に積について考える。$V(G_1 \times G_2)$ は集合としての直積 $V(G_1) \times V(G_2)$ とし、辺集合 $(G_1 \times G_2)((x,y),(x',y'))$ は辺集合の直積 $G_1(x,x') \times G_2(y,y')$ とする。これによりグラフが定まり、これが積の条件を満たすことを確かめよう。

積や和は圏 C の対象に対して射の対という集合を対応させるという対応を表現する。

一般に積や和が存在するとは限らないが、存在すればそれらは全て同型であり、しかもその同型射はただ一つ。

4.3 一般の極限と余極限

極限や余極限は圏 C と図式 $D : I \to C$ から定まる。この図式を特別なものにしたのが積や和であり、その積や和を特別な圏 C について考えると上の話。

圏 C の対象や射を適切に選ぶことによって図式が定まるが、それにたいして極限や余極限が定義できる。圏における図式というのは正確にいうと小圏 I からの関手 $D : I \to C$ である。

I を空圏とする。つまり対象や射を何も指定しない。すると、その余極限は始対象であり、極限は終対象である。

I を次の圏とする。

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[loop left, "e"] & 1 \arrow[loop left, "e"] \end{tikzcd}$$

つまり、対象を二つ指定し、射は何も指定しない。すると、その余極限は和であり、極限は積である。

例 4.36 (引き戻し)**.** 考える図式は

$$\begin{tikzcd} 2 \arrow[loop left] \arrow[d] & \\ 0 \arrow[loop left] & 1 \arrow[l] \arrow[loop right] \end{tikzcd}$$

例 4.37 (押し出し)**.**

$$\begin{tikzcd} 2 \arrow[loop left] & \\ 0 \arrow[loop left] \arrow[u] \arrow[r] & 1 \arrow[loop right] \end{tikzcd}$$

例 4.38. $\mathbb{N}$ に大小関係を定めてできる圏を I とする。これに対する図式は C の対象の列を考えることになる。

$P(X)$ において、この図式の極限よ余極限は $\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n, \bigcap_{n=0}^{\infty} A_n$ である。

5 関手

グラフにはグラフの射、モノイドにはモノイドの射、によってそれらの構造を保ちながら二つの対象を比べることができた。圏はグラフやモノイドの一般化であると思うと、同じように圏の射を考えることができるか。さらにそれを用いて圏の圏を同じように二つの圏を比べるために、圏の射というべき概念を導入する。

これまで関手的な構成と言っていたものは、実際には関手である。それらについて復習する。

ここまでに関手的な構成として現れたものは、実際に関手となる。

例 5.1 (自由モノイド). 集合から自由モノイドを作るという操作は関手的であった。つまり、写像 $f : X \to Y$ に対してモノイドの射 $F(f) : F(X) \to F(Y)$ が定まり、$F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$ および $F(\mathrm{id}_X) = \mathrm{id}_{F(X)}$ が成り立っていた。

これにより関手 $F : \mathbf{Set} \to \mathbf{Mon}$ が定まる。

例 5.2. モノイド (M, μ, e) からを μ, e 忘却して集合 M を対応させる。これはモノイドの圏から集合の圏への関手である。この関手を $U : \mod \to \mathbf{Set}$ と表すことにしよう。つまり、対象の対応を $U(M, \mu, e) = M$ で定め、射の対応を $U(f) = f$ とする。実際にモノイドの射 $f : (M, \mu, e) \to (N, \nu, e')$ は集合の写像 $f : M \to N$ であって適当な条件を満たすものであった。そして、モノイドの射の合成は写像の合成、モノイドの恒等射は恒等写像であった。つまり $U(g \circ f) = g \circ f = U(g) \circ U(f)$ であり、$U(\mathrm{id}_{(M,\mu,e)}) = \mathrm{id}_{U(M)}$ である。

例 5.3. 集合から有向グラフを作る二つの方法はいずれも関手的であった。

これにより関手 $\mathbf{Set} \to \mathbf{Graph}$ が定まる。

例 5.4. 集合に離散グラフを対応させる。

例 5.5. 冪集合をとる操作も関手 $P : \mathbf{Set} \to \mathbf{Set}$ になる。集合 X にたいして $P(X)$ を対応させ、写像 $f : X \to Y$ にたいして写像 $f_* : P(X) \to P(Y)$ を対応させる。

では逆像は関手にならないか？写像 $f : X \to Y$ にたいして写像 $f^* : P(Y) \to P(X)$ が対応する。射の向きが逆になっている。反変関手。$\mathbf{Set}^{\mathrm{op}}$

では、関手の定義を見ていこう。その前にグラフの射とモノイドの射の定義を復習する。

定義 5.6 (グラフの射). G, H をグラフとする。グラフの射 $f : G \to H$ とは

1. 頂点集合の間の写像 $f_V : V(G) \to V(H)$
2. グラフ G の各頂点 $x, y \in V(G)$ に対して辺集合の間の写像の族 $f_{x,y} : G(x, y) \to G(f(x), f(y))$

からなる写像の集まりのこと。x から y に向かう辺は $f(x)$ から $f(y)$ に向かう辺に対応づけられている。

定義 5.7 (モノイドの射). モノイド $(M, \mu, e), (N, \nu, f)$ について、M から N への射とは、集合の写像 $g : M \to N$ であって、以下を満たすもの

$$g(\mu(x, y)) = \nu(g(x), g(y))$$
$$g(e) = f$$

定義 5.8 (関手). C, D を圏とする。関手 $F : C \to D$ とは

1. 写像 $F_{\mathrm{Ob}} : \mathrm{Ob}(C) \to \mathrm{Ob}(D)$
2. 各 $x, y \in \mathrm{Ob}(C)$ に対して写像 $F_{x,y} : C(x,y) \to C(F(x), F(y))$

からなり、以下の条件を満たす

1. $x, y, z \in \mathrm{Ob}(C), f \in C(x,y), f' \in C(y,z)$ に対して $F_{x,z}(c_{x,y,z}(f', f)) = d_{F_{\mathrm{Ob}}(x), F_{\mathrm{Ob}}(y), F_{\mathrm{Ob}}(z)}(F_{y,z}(f'), F_{x,y}(f))$
2. $F_{x,x}(\mathrm{id}_x) = \mathrm{id}_{F_{\mathrm{Ob}}(x)}$

関手の例は以下のようなものがある。

例 5.9. 写像 $f : X \to Y$ により像をとる写像 $f_* : P(X) \to P(Y)$ と逆像をとる写像 $f^* : P(Y) \to P(X)$ が定まった。これらは部分集合と包含関係の圏 $C(X), C(Y)$ の間の関手 $f_* : C(X) \to C(Y), f^* : C(Y) \to C(X)$ を定める。つまり、$A \subset B$ のとき $f(A) \subset f(B)$ であり、$C \subset D$ のとき $f^{-1}(C) \subset f^{-1}(D)$ である。$A \subset B$ かつ $B \subset C$ のとき $f(A) \subset f(C)$ である。

小さい圏の間の関手の例

例 5.10.

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[loop left, "2"] \end{tikzcd}$$

からの関手は対象を一つ選ぶこと。グラフの場合と違うことに注意しよう。

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[loop left, "1_0"] & 1 \arrow[loop right, "1_1"] \end{tikzcd}$$

からの関手は対象のペアを一組選ぶこと。

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[loop left, "1_0"] \arrow[r, "2"'] & 1 \arrow[loop right, "1_1"] \end{tikzcd}$$

からの関手は射を一つ選ぶこと。

$$
\begin{tikzcd}
& 2 \arrow[loop above, "1_2"] \\
0 \arrow[r, "3"'] \arrow[ur, "4"'] \arrow[loop below, "1_0"] & 1 \arrow[u, "5"'] \arrow[loop below, "1_1"]
\end{tikzcd}
$$

からの関手は合成可能な射の組を選ぶこと。三角形の可換図式。

$$
\begin{tikzcd}
2 \arrow[r, "8"'] \arrow[loop above, "1_2"] & 3 \arrow[loop above, "1_3"] \\
0 \arrow[u, "5"] \arrow[ur, "6"'] \arrow[r, "4"'] \arrow[loop below, "1_0"] & 1 \arrow[u, "7"'] \arrow[loop below, "1_1"]
\end{tikzcd}
$$

からの関手は可換図式と思える。

問題 5.11. これらから自然数と整除関係の圏への関手はどのようなものか。

対象や射（頂点や辺）の行き先が同じでもよい。合成が保たれないとダメなことに注意しよう。

定義 5.12 (関手の合成)**.** 圏 C, D, E と関手 $F : C \to D, G : D \to E$ に対し、関手の合成 $G \circ F : C \to E$ を次のようにして定めることができる。対象の対応を $(G \circ F)_{\mathrm{Ob}} = (G_{\mathrm{Ob}}) \circ (F_{\mathrm{Ob}})$ とし、射の対応を $(G \circ F)_{x,y} = G_{F_{\mathrm{Ob}}(x),F_{\mathrm{Ob}}(y)} \circ F_{x,y}$ により定める。

定義 5.13 (恒等関手)**.** 圏 C に対し、恒等関手 $1_C : C \to C$ とは $(1_C)_{\mathrm{Ob}} = \mathrm{id}_{\mathrm{Ob}(C)}$ とし、$(1_C)_{x,y} = \mathrm{id}_{C(x,y)}$ として定まる関手。

関手の合成は結合的であり、恒等関手は恒等的である。以上のことから、圏の圏 **Cat** を定めることができる。

定義 5.14 (圏の圏)**.** 対象が圏で射が関手であるような圏 **Cat** が定まる。

例 5.15 (自由圏)**.** 有向グラフから自由圏を作る操作は関手的である。これは関手 **Graph** $\to$ **Cat** を定める。
グラフの射 $f : G \to H$ から関手 $F(f) : F(G) \to F(H)$ が次のように定まる。まず対象の対応を $F(f)_{\mathrm{Ob}} : \mathrm{Ob}(F(G)) \to \mathrm{Ob}(F(H))$ を $f_V : V(G) \to V(H)$ とすればよい。さらに、$x, y \in V(G)$ に対し、$F(f)_{x,y} : F(G)(x, y) \to F(H)(x, y)$ を射の列 $(f_0, f_1, \ldots, f_n)$ に対し $(f(f_0), f(f_1), \ldots, f(f_n))$ を対応させる。これにより関手が定まる。

これまで圏の様子を見るためにグラフを書いていたが、これは忘却関手である。

例 5.16 (忘却関手)**.** 圏から合成と恒等射を忘却して有向グラフを対応させることができる。圏 C のデータ

$\mathrm{Ob}(C), C(x,y), c_{x,y,z}, \mathrm{id}_x$ から $c_{x,y,z}, \mathrm{id}_x$ を忘れてグラフ G として $V(G) = \mathrm{Ob}(C), G(x,y) = C(x,y)$ により定める。これは関手 $U : \mathbf{Cat} \to \mathbf{Graph}$ を定める。

関手 $F : C \to D$ からグラフの射 $U(F)$ が定まる。

例 5.17. モノイドを圏とみなすことができた。モノイド (M, μ, e) から圏 C を $\mathrm{Ob}(C) = \{0\}, C(0,0) = M, c_{0,0,0} = \mu, \mathrm{id}_0 = e$ として定めることができる。実際、圏の条件がモノイドの条件に対応する。さらにモノイドの射が関手を定め、モノイドの圏 **Mon** から圏の圏 **Cat** への関手 $\mathbf{Mon} \to \mathbf{Cat}$ を定める。

関手が極限を保存あるいは余極限を保存するとは、次のような事実をいう。F, G を圏 C から D への関手とする。

$$F(\lim_I D) \simeq \lim_I FD$$
$$G(colim_I D) \simeq colim_I GD$$

例えば積や和で言えば

$$F(X \times Y) \simeq F(X) \times F(Y)$$
$$G(X + Y) \simeq G(X) + G(Y)$$

が成り立つことをいう。さらに特別な極限余極限として、始対象終対象の保存が言える。つまり x が C の始対象であれば $F(x)$ は D の始対象であり、y が D の終対象であれば $G(y)$ は C の終対象である。

これらが必ずしも成立しないことはこれまで例で見た通り。例えばモノイドの和積、始対象終対象がそれを忘却した集合のそれと一致するか？関手 U が積を保つが和は保たない、終対象は保つが始対象は保たない。

6 随伴

二つの圏 C と D の関係を記述する一つの方法が随伴関手を用いるものである。また、ここまで見てきたような、極限や余極限と関手の関係性にも随伴の性質が深く関係している。

二つの関手の関係として随伴がある。自由モノイド関手とモノイドから集合への忘却関手がその例である。

以前に見たように、自由モノイド $F(X)$ からモノイド M への射は X から M への写像で一意的に定まった。これが随伴の典型的な例の一つである。

6.1 随伴の定義と例

例 6.1 (自由モノイドと忘却)**.** 集合 X から定まる自由モノイド $F(X)$ を考える。自由モノイド $F(X)$ からモノイド $(M_0, \mu, 1_M)$ への射は自由モノイドの文字の行き先、つまり X の要素の行き先を決めることで一意的に定まった。つまり、集合 X から M_0 への写像は一意的に $F(X) \to M$ に拡張できた。$F(X) \to M$ はモノイドの圏における射だから、「拡張」という言葉を正確に集合の圏で述べるために、$X \to U(M) = M_0$ は $U(F(X)) \to U(M)$ に一意的に拡張できるということにする。

このことを、集合 X から定まる自由モノイド $F(X)$ を与える関手 $F : \mathbf{Set} \to \mathbf{Mon}$ とモノイド M の忘却関手 $U : \mathbf{Mon} \to \mathbf{Set}$ は随伴 $F \dashv U$ であるという。

これは実は次のように述べることができる。任意の集合 X とモノイド M に対して $\mathbf{Set}(X, U(M))$ と $\mathbf{Mon}(F(X), M)$ に自然な同一視が定まる。

例 6.2 (離散グラフと頂点集合)**.** 集合 X に離散グラフ $G(X)$ を対応させる関手 $G : \mathbf{Set} \to \mathbf{Graph}$ とグラフにその頂点集合を対応させる関手 $V : \mathbf{Graph} \to \mathbf{Set}$ を考える。集合 X とグラフ H に対して、写像 $X \to V(G)$ があればグラフの射 $G(X) \to H$ へのグラフの射で $X \to V(G(X))$ を $V(G(X) \to V(H)$ に拡張するものを一意的に定めることができる。

集合 X から離散グラフ $G(X)$ を対応させる関手 $G : \mathbf{Set} \to \mathbf{Graph}$ とグラフに対してその頂点集合を対応させる関手 $V : \mathbf{Graph} \to \mathbf{Set}$ は随伴 $D \dashv V$ である。これは次のようにも述べられる。任意の集合 X とグラフ H に対して、$\mathbf{Set}(X, V(H))$ と $\mathbf{Graph}(G(X), H)$ に自然な同一視が定まる。

随伴の定義を二通り与える。

定義 6.3. 圏 C, D の間の関手 $F : C \to D, G : D \to C$ が随伴 $F \dashv G$ であるとは、C の各対象 x に対して「自然な」射 $\eta_x : x \to G(F(x))$ が定まり、任意の C の射 $f : x \to G(y)$ に対して D の射 $\bar{f} : F(x) \to y$ であって、$G(\bar{f}) : G(F(x)) \to G(y)$ が f の拡張になる、つまり次の図式が可換になるものが一意的に存在することをいう。

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, "\eta_x"] \arrow[dr, "f"'] & G(F(x)) \arrow[d, "\bar{f}"] \\ & G(y) \end{tikzcd}$$

定義 6.4 (随伴)**.** 圏 C, D の間の関手 $F : C \to D$ と $G : D \to C$ が随伴 $F \dashv G$ であるとは、C の対象 x と

D の対象 y について「自然な」対応

$$C(Fx, y) \simeq D(x, Gy)$$

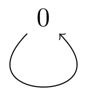
があることをいう。

このとき $F \dashv G$ と表す。

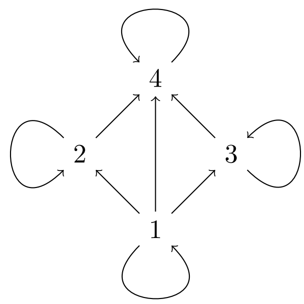
例 6.5 (始対象や終対象と随伴)**.** C を対象一つで恒等射のみの圏として、$F : C \to D$ と $G : D \to C$ を考える。関手 G は一意的に定まる。C をグラフで表すと

F をどう定めると G の随伴になるか？ $F \dashv G$ になるケースと $G \dashv F$ になるケースを両方考える。

絵に書いて理解する。まず C は



であり、D を次のグラフに定まる圏とする。



関手 $F : C \to D$ は D の対象を一つ選ぶことに相当する。

まず $F \dashv G$ となるためには？ $0 \to G(F(0)) = 1_0$ である。D の対象 x と任意の射 $f : 0 \to G(x)$ を選ぶが、実際には $G(x) = 0, f = 1_0$ のみである。これが拡張を持つか。まず $\bar{f} : F(0) \to x$ が存在せねばならない。拡張であるための条件は C の射がただ一つなので自動的に満たされるので、結局 D の射 $F(0) \to x$ が一意的に存在するという条件になる。つまり $F(0)$ は始対象であるということ。

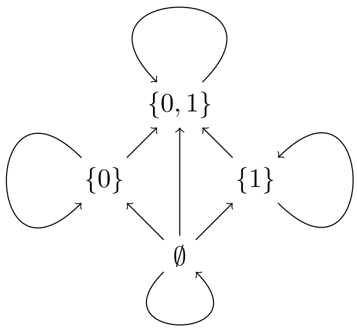
次に $G \dashv F$ となるためには？まず任意の $x \in \mathrm{Ob}(D)$ に対して $\eta_x : x \to F(G(x)) = F(0)$ が定まる必要がある。さらに、C の対象 y と任意の D の射 $f : x \to F(y)$ が一意的に C の射で $\bar{f} : G(x) \to y$ であって、f の拡張 $F(\bar{f}) : F(G((x)) \to F(y)$ を定めるかを考える。$y = 0, \bar{f} = 1_0$ しか有り得ないため、$F(\bar{f}) = 1_{F(0)}$ である。したがって、$f = \eta_x$ となり、任意の x に対して $x \to F(0)$ が一意的に存在することが従う。よって $F(0)$ は終対象である。

この講座の中心的な随伴の例として次を紹介する。

例 6.6 (像と逆像)**.** $f : X \to Y$ を集合の写像とし、それが定める写像 $f^* : P(Y) \to P(X)$ と $f_* : P(X) \to P(Y)$ は、冪集合 $P(X), P(Y)$ と包含関係から圏を定めたとき、それぞれ関手である。これらは随伴 $f_* \dashv f^*$ になる。

前に見たように $A \subset f^*(B)$ ならば $f^*(f_*(A)) \subset f^*(B)$ である。一般に $A \subset f^*(f_*(A))$ なので逆も言える。$A \subset f^*(B)$ と $f_*(A) \subset B$ は同値。

$P(\{0\}), P(\{0,1\})$ について、$f : \{0,1\} \to \{0\}$ や $g : \{0\} \to \{0,1\}$ を定めた上で、像と逆像の随伴を絵に書いて説明しよう。



例 6.7 (カリー化)**.** 集合 S を一つ固定する。例えば $S = \{0,1\}$ などとして考えてよい。二つの関手 $F, G : \mathbf{Set} \to \mathbf{Set}$ を $F : X \mapsto X \times S$ と $G : X \mapsto \mathrm{Hom}(S, X)$ で定める。射の対応は $F(f) = f \times \mathrm{id}_S : X \times S \to Y \times S, G(f) = f_* : \mathbf{Set}(S, X) \to \mathbf{Set}(S, Y)$ で定める。これらは随伴 $F \dashv G$ である。

写像 $X \to G(F(X)) = \mathbf{Set}(S, X \times S)$ を $x \in X$ に対して $f_x : S \to X \times S$ を $f_x(s) = (x, s)$ で定める。これは自然変換 $\mathrm{id}_{\mathbf{Set}} \to GF$ を与える。

$X \to G(Z) = \mathbf{Set}(S, Z)$ に対し $F(X) = X \times S \to Z$ が一意に定まり、$G(F(X)) \to G(Z)$ に拡張される。$X \to \mathbf{Set}(Y, Z)$ があると、$X \times Y \to Z$ が定まる。さらに $\mathbf{Set}(Y, X \times Y) \to \mathbf{Set}(Y, Z)$ に拡張される。

逆に $X \times S \to Z$ から $X \to \mathbf{Set}(S, Z)$ が定まり、自然な同一視

$$\mathbf{Set}(X \times Y, Z) \simeq \mathbf{Set}(X, \mathbf{Set}(Y, Z))$$

が存在する。

例 6.8. 集合 X の部分集合 X と包含関係の定める圏 $C(X)$ において、$S \in P(X)$ を一つ固定する。$A \mapsto A \cap S$ によって関手が定まる。

これの随伴これは命題と真理集合の対応において、どのような意味を持つか？

例 6.9 (自由圏と忘却)**.** グラフから自由圏を対応させる関手 $F : \mathbf{Graph} \to \mathbf{Cat}$ と、圏からグラフに忘却する関手 $U : \mathbf{Cat} \to \mathbf{Graph}$ は随伴である。G から $U(C)$ へのグラフの射があると、関手 $F(G) \to C$ が一意的に定まる。$U(F(G)) \to U(C)$ に拡張。

6.2 極限と随伴の関係

さて、いよいよ目標であった事実を述べる。

定理 6.10. 圏 C, D の間の関手 $F : C \to D, G : D \to C$ の随伴 $F \dashv G$ に対し、F は余極限を保存し、G は極限を保存する。

$F \dashv G$ のとき F が G の左随伴関手、G が F の右随伴関手である。つまり、関手 $F : C \to D$ が右随伴 G を持てば余極限を保存し左随伴を持てば極限を保存する。

この定理の例として、冒頭で紹介した像や逆像と和や共通部分の関係について理解しよう。

例 6.11. X, Y を集合とし、$f : X \to Y$ を写像とする。集合 X の部分集合 A, B 及び集合 Y の部分集合 C, D に対し

$$
\begin{aligned}
f_*(A \cap B) &\subset f_*(A) \cap f_*(B) \\
f_*(A \cup B) &= f_*(A) \cup f_*(B) \\
f^*(C \cap D) &= f^*(C) \cap f^*(D) \\
f^*(C \cup D) &= f^*(C) \cup f^*(D)
\end{aligned}
$$

が成り立つ。

この事実のうち

$$
\begin{aligned}
f_*(A \cup B) &= f_*(A) \cup f_*(B) \\
f^*(C \cap D) &= f^*(C) \cap f^*(D)
\end{aligned}
$$

は上の定理の特別な場合と理解できる。つまり、f と f^* が随伴 $f^* \dashv f$ であることから、f^* は余極限を保ち f は極限を保つ。$\cap, \cup$ はそれぞれの圏 $P(X), P(Y)$ における極限と余極限であったから、

$$
\begin{aligned}
f_*(A \cup B) &= f_*(A) \cup f_*(B) \\
f^*(C \cap D) &= f^*(C) \cap f^*(D)
\end{aligned}
$$

は随伴関手による余極限、極限の保存として理解できる。

では他の二つについてはどうか？はじめに見たように

$$
f_*(A \cap B) = f_*(A) \cap f_*(B)
$$

は一般には成立しない。したがって、像をとる関手 $f_* : P(X) \to P(Y)$ は一般には極限を保存せず、定理より左随伴を持たないことがわかる。また終対象を保たないことも言える。

次に

$$
f^*(C \cup D) = f^*(C) \cup f^*(D)
$$

について。また $f^*(\emptyset) = \emptyset$ つまり始対象の保存について。これが成立することは右随伴を持つための必要条件でしかないが、しかし右随伴を持つことを期待できる。どういうものが随伴になるのか調べたい。随伴であるべき関手を条件から絞る

関手 $g : P(X) \to P(Y)$ を定めて随伴 $f^* \dashv g$ となるようにしよう。

関手 g は $A \subset X$ に対し $g(A) \subset Y$ を定め、$A \subset B$ に対して $g(A) \subset g(B)$ であるもの。$g(A)$ をどう定めるか？ $C \subset Y$ に対し、$C \subset g(A)$ であれば $f^*(C) \subset A$ であり、かつ $g(f^*(C)) \subset g(A)$ となるもの。$C \subset g(f^*(C))$ でもある。

g は左随伴を持つので極限を保つ。

まず $x \in g(A)$ であれば $\{x\} \subset g(A)$ であるので、$f^*(x) \subset A$ である。逆にこのような x をすべて集めたものが $g(A)$ であることを示したい。$f^*(x) \subset A$ であるとする。このとき $g(f^*(x)) \subset g(A)$ である。一方で

$\{x\} \subset g(f^*(\{x\}))$ なので $x \in g(A)$ である。つまり、$x \in g(A)$ と $f^*(x) \subset A$ が同値であるはずで、これを用いて関手を定めればよく、実際に関手となることも示すことができる。つまり、$A \subset B$ ならば $g(A) \subset g(B)$ である。

随伴の別の定義を用いれば次のように考えることもできる。$f_!(U) = \{y \in Y \mid f^*(y) \subset U\}$ とする。$V \subset f_!(U)$ と $f^*(V) \subset U$ が同値であることを示せ。

まず $V \subset f_!(U) \Rightarrow f^*(V) \subset U$ であることを証明する。$x \in f^*(V)$ とする。$f(x) \in V \subset f_!(U)$ であり、$f^*(f(x)) \subset U$ であるから、$f(x) \in U$ となる。逆に $f^*(V) \subset U \Rightarrow V \subset f_!(U)$ であることを証明する。$x \in V$ とする。$f^*(x) \subset f^*(V) \subset U$ より $x \in f_!(U)$ である。

まとめると逆像 f^* は左右両方の随伴 $f_* \dashv f^* \dashv f_!$ を持つことがわかる。像と和が交換する理由、逆像が随伴だから、同時に逆像が共通部分と交換することもわかる。

例 6.12. モノイドの圏 **Mon** における和と積について。モノイドの和及び積と忘却関手 $U : \mathbf{Mon} \to \mathbf{Set}$ の関係を調べる。和や積について考える前に、始対象と終対象について考える。1 点モノイド $S = \{(0\}$ は **Mon** における始対象でありかつ終対象であった。$U(S) = \{0\}$ であり、これは **Set** における終対象であはあるが始対象ではない。自由モノイド関手を $F : \mathbf{Set} \to \mathbf{Mon}$ とすると、$F \dashv U$ であった。したがって、U は極限を保存するが余極限は保存せず、終対象は保存されるが始対象の保存はここからは従わない。実際に始対象は保存されないので、U は右極限を持たないことがわかる。

積については忘却で保存されるので、モノイドの積についてその集合は集合の積である。これは以前に見た通り。

では和はどうか？和については忘却がそれを保つことはここからは従わない。

一方で、自由モノイド関手についてはそれが右随伴を持つことから余極限を保存する。特に和を保つから、自由モノイドの和については和の自由モノイドとして計算できる。つまり $F(X + Y) = F(X) + F(Y)$ である。例えば $\mathbb{N} + \mathbb{N}$ は二文字から生成される自由モノイドであり、その忘却は集合としての直和よりは大きい。