確率論的手法とそれに関連した話題

SF

2018 年 9 月 22 日

1　グラフ理論へようこそ

集合 X に対し $\begin{pmatrix} X \\ 2 \end{pmatrix} = \{S \subset X || S| = 2\}$ とする

ラベル付きグラフ G とは 集合の組 (V, E) で $E \subset \begin{pmatrix} V \\ 2 \end{pmatrix}$ であるようなものとし

(ラベルなし) グラフとはラベルありグラフを $G(V, E) \sim G'(V', E')$ をある全単射写像 $f : V \to V'$が存在しそこから誘導される射 $f : E \to E'$も全単射であるような G, G'を同一視したものとする

$G(V, \begin{pmatrix} V \\ 2 \end{pmatrix})$ を完全グラフといい K_nと書き、$(V, \begin{pmatrix} V \\ 2 \end{pmatrix} \setminus E)$ を G の補グラフと呼び$\overline{G}$と書く

$G(V, E), G'(V', E')$ について $V' \subset V, E' \subset E$ の時 G を G'の部分グラフといい $G' \subset G$ と書く

G' が G の誘導部分グラフであるとは G'が G の部分グラフで $x, y \in V'$の時 $(x, y) \in E \Leftrightarrow (x, y) \in E'$が成り立つことである 以下 G(V,E) をグラフとする

2　ramsey 理論

ramsey 理論とは無秩序に見える対象でもスケールを大きくすれば秩序が存在するみたいな主張群のことで例として

定理 2.1　ramsey の定理 (特別な場合)
頂点数 n の完全グラフの辺を二色に塗り分けたとき、n が十分大きければ「頂点数 m の同色完全グラフ」が必ず存在する。

定理 2.2　セレメディの定理
自然数の中で”正の密度” を持つような集合は任意に長い等差数列を持つ

などが挙げられる

ramsey の定理の条件を満たす最小の n をラムゼー数と呼び，R(m) と表す

実は

命題 2.1

$$2^{\frac{m}{2}} \leq R(m) \leq 2^{2m}$$

となる

今回はこの下界の部分を確率論的手法で示してみよう

3　turan's theorem

ラムゼー数の下界の証明は確かに確率論の考え方で簡単になったものの、使っているのは実質鳩ノ巣だしあまり威力は感じない、そこで確率論的手法で本質的に強い結果を出せる例を見ていこう

$\omega(G)$ を G 内最も大きな完全グラフの位数とし、

$\alpha(G)$ を G 内最も大きな独立集合の位数とする

自明に$\omega(G) = \alpha(\overline{G})$ である

そし次の定理が成り立つ

命題 3.1　Turan の定理

$$|E| \geq \frac{|V|^2}{2}\left(1 - \frac{1}{\omega(G)}\right)$$

これは帰納法で示すが今回は確率論的手法で次のより強い評価を示す

命題 3.2

$$\alpha(G) \geq \sum_{v \in V} \frac{1}{d(v)+1}$$

これが turan の定理より強いってことは簡単な演習問題だと思うので是非

4　交差数定理とその応用

さっきの定理は確かに確率論的手法が意外と使えるんだなと思わせてくれたが、その結果はグラフ理論の中で閉じていて、確かに独立集合を求めるのも大事なこと (現実で色々できそう？？できるだけ省コストで多くの頂点を監視したい時とか色々) だが、別にグラフ理論に興味がない人にはあまり面白みのない定理だったかもしれないし、確率的手法が思ってたより広範な対象に使えることを見るためにも次は他の分野に応用を持つ定理を見ていこう

cr(G) をグラフの平面埋め込み時の最小交差数とする

定理 4.1　交差数定理

$$cr(G) \geq \frac{|E|^3}{64|V|^2}$$

重要なのは $cr(G) = O(\frac{|E|^3}{|V|^2})$ であることで、著しいことにこの評価は漸近的に最善 (ある定数 C が存在し、任意に大きいグラフ G について $cr(G) \leq \frac{C|E|^3}{|V|^2}$ となるグラフ G が存在する) らしい (ここは確かめてません、申し訳ない)

これは結構強い定理で最小交差数自体特別なグラフに関して求めるのが大変なのに最善な下界がわかるというのがやばい (定数自体は同じ方法で改善できる) さらに驚くべきことにこの定理は加法的数論に応用を持っており次の定理が示される

定理 4.2

$$max\{|A+A|,|A\cdot A|\}=O(|A|^{\frac{5}{4}})$$

厳密に言うとこの定理の証明は交差数定理を使って一つ命題を証明し、それを利用して示すのだがその命題自体もグラフ理論以外の分野に属し、結果も興味深いのでここでその補題の用語の説明も含め書いてしまおうと思う

I(p,l) とは平面状に p 個の直線と l 個の点がある時に点 x が直線 y の上に乗ったいるような組 (x,y) の数である

命題 4.1

$$I(m,n)=O(m^{3/2}n^{3/2}+m+n)$$

以上でレジュメを終わります、以上の内容は機会があればどこかで公開しようかと思っています