演習形式で学ぶ圏論の基礎の基礎

2021/9/5.

梅崎直也（株式会社すうがくぶんか）

集合：ものの集まり。

X が集合　$x \in X$ か $x \notin X$

が決まっている。　属している　属してない

x が X の要素

$\mathbb{N}$：自然数全体の集合

0以上

$\mathbb{R}$：実数全体の集合

ϕ：空集合（要素をひとつももたない）

どんな x でも $x \notin \phi$

X の部分集合

X の要素のある部分で集めてできる集合

$X=\{0,1\}$ であれば

ϕ, $\{0\}$, $\{1\}$, $X=\{0,1\}$

の4つが部分集合

$P(X)=\{\phi, \{0\}, \{1\}, \{0,1\}\}$

を X のべキ集合という。

部分集合すべてを要素にもつ

$X = \{0, 1, 2\}$ なら

$P(X) = \{\phi, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0,1\}, \{0,2\}, \{1,2\}, X\}$

である.

$X \in P(X)$, $\phi \in P(X)$,

$\{0\} \in P(X)$ となっている

$A, B \in P(X)$ に対し,

和集合 $A \cup B \in P(X)$

共通部分 $A \cap B \in P(X)$

を定めることができる.

<u>例1.2.8</u> $X = \{0, 1, 2, 3\}$

$A = \{0, 1\}$, $B = \{1, 2\} \in P(X)$

に対し, $A \cup B = \{0, 1, 2\} \in P(X)$

・$A \subset A \cup B$

・$B \subset A \cup B$

・$T \in P(X)$ が $A \subset T$ かつ $B \subset T$ ならば $A \cup B \subset T$

例1.2.10 $X=\{0,1,2,3\}$

$A=\{0,1\}$. $B=\{1,2\} \in P(X)$

$T\in P(X)$ が $A\subset T$ かつ $B\subset T$ を

みたす → $T=\{0,1,2\}$, $\{0,1,2,3\}$

$A\cup B=\{0,1,2\}$ は ↑ ↗ の共部分.

例1.2.12 $X=\{0,1,2,3\}$

$A=\{0,1,2\}$, $B=\{1,2,3\}$ とすると,

$A\cap B=\{1,2\}$.

性質.

・$A\cap B\subset A$ かつ $A\cap B\subset B$

・$T\in P(X)$ が $T\subset A$ かつ $T\subset B$ ならば $T\subset A\cap B$ となる

例1.2.14 $X=\{0,1,2,3\}$

$A=\{0,1,2\}$, $B=\{1,2,3\}$ とすると,

$T\in P(X)$ で $T\subset A$ かつ $T\subset B$ となるものは

$T=\phi$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{1,2\}$ の4つ.

↑ $A\cap B$

和集合の「別定義」

定義 2.16 X: 集合, $A, B \in P(X)$

$\boxed{C} \in P(X)$ が A と B の和集合である

とは, 次をみたすこと.

1. $A \subset \boxed{C}$ かつ $B \subset \boxed{C}$

2. すべての $T \in P(X)$ に対し,

$A \subset T$ かつ $B \subset T$ ならば $\boxed{C} \subset T$

存在するか? 一通りか?

C が和 $\iff$ $C = A \cup B$ と示せる.

あとで圏の余極限の定義に一般化される.

$P(X)$ の中で包含関係について

$X \in P(X)$ は最大, $\phi \in P(X)$ は最小.

2.15 すべての $T \in P(X)$ に対しても $T \subset X$

すべての $T \in P(X)$ に対しても $\phi \subset T$

A も B も含む集合の中で最小.

自然数の整除関係

- nがmの約数

$\Updownarrow$

- AがBの部分集合

4と6の最小公倍数 $\boxed{12}$

- $\boxed{12}$は4の倍数かつ$\boxed{12}$は6の倍数
- すべての$n \in \mathbb{N}$に対し
  nが4の倍数かつnが6の倍数
  ならばnは$\boxed{12}$の倍数

$C = A \cup B$

1. $A \subset \boxed{C}$ かつ $B \subset \boxed{C}$
2. すべての$T \in P(X)$に対し、
   $A \subset T$ かつ $B \subset T$ ならば $\boxed{C} \subset T$

?

共通の一般化

圏の言葉で分かる.

写像 $f: X \to Y$ 定義域 行き先

集合 X の各要素に集合 Y の要素が1つ定まっているもの。

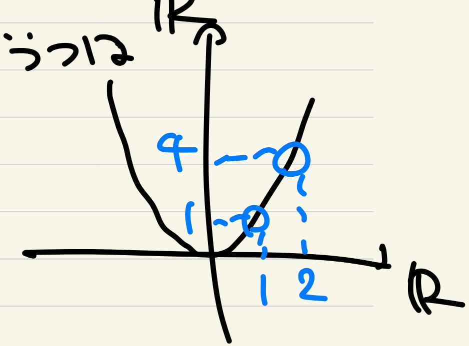
$x \in X$ に対応する Y の要素 $f(x)$ とかく。

例1) $X=\{0,1,2\}$, $Y=\{3,4\}$.

$f: X \to Y$ を $f(0)=4$, $f(1)=3$, $f(2)=4$ で定める。

$Y \backslash X$	0	1	2
3		○	
4	○		○

例2.20 $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を $f(x)=x^2$ で定めると、グラフは



問2.21 $\{0,1,2\}$ から $\{3,4\}$ への写像をすべて求めよ。

	0	1	2
3	O	O	O
4			

	0	1	2
3		O	O
4	O		

	0	1	2
3	O		O
4		O	

	0	1	2
3			O
4	O	O	

	0	1	2
3	O	O	
4			O

	0	1	2
3		O	
4	O		O

	0	1	2
3	O		
4		O	O

	0	1	2
3			
4	O	O	O

11:12〜

S = {0} とする.

・X から S への写像はただ1つ
　すべての $x \in X$, $f(x) = 0$

X \ S	*	*	*	*
0	○	○	○	○

・S から X への写像は
　f(0) を選ぶ = X の要素を1つ選ぶ
ことに応じて1つきまる.

S \ X	0
a	○
b	
c	
d	

S \ X	0
a	
b	○
c	
d	

S \ X	0
a	
b	
c	○
d	

$f : \phi \to X$ はただ1つ存在, $f : X \to \phi$ は
$X \neq \phi$ なら存在しない
$X = \phi$ なら ただ1つ

写像の合成

$f: X \to Y$, $g: Y \to Z$ に対し

$g \circ f: X \to Z$ を、

$(g \circ f)(x) = g(f(x))$ で定める.

重要な性質.

結合律: $f: W \to X$, $g: X \to Y$

$h: Y \to Z$ に対し,

$$\boxed{h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f}$$

← とまでいけば
結果はいつもひとしい.

恒等写像:

集合Xに対し, $\mathrm{id}_X: X \to X$

$\mathrm{id}_X(x) = x$ で定義

$$\boxed{\begin{aligned} \mathrm{id}_Y \circ f &= f \\ f \circ \mathrm{id}_X &= f \end{aligned}}$$

$X = \{x_1, x_2\}$, $Y = \{y_1, y_2\}$

$f_1 : X \to Y$ $\quad f_1(x_1) = y_1$, $f_1(x_2) = y_2$

$f_2 : X \to Y$ $\quad f_2(x_1) = y_2$, $f_2(x_2) = y_1$

$y_1 \neq y_2$ 이면 $f_1 \neq f_2$

p134 2.30 $\quad X = \{0, 1\}$.

$f_0 = \mathrm{id}_X$

f_0	0	1
0	O	
1		O

f_1	0	1
0	O	O
1		

f_2	0	1
0		O
1	O	

f_3	0	1
0		
1	O	O

이 4가지는 $X \to X$ 함수다.

f_i 와 f_j 의 합성 $f_i \circ f_j$

$f_j \backslash f_i$	$f_0 = \mathrm{id}_X$	f_1	f_2	f_3
$\mathrm{id}_X = f_0$	f_0	f_1	f_2	f_3
f_1	f_1	f_1	f_3	f_3
f_2	f_2	f_1	f_0	f_3 ← $f_3 \circ f_2$
f_3	f_3	f_1	f_1	f_3

可換図式

例2.3.1　$W=\{0,1\}$, $X=\{2,3,4\}$

$Y=\{5,6\}$, $Z=\{7,8,9\}$

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{i} & Z \\ {\scriptstyle g}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle h} \\ W & \xrightarrow{f} & X \end{array}$$

← 図式.

↳ jにすると可換ではない.

f	0	1
2		
3	○	
4		○

g	0	1
5		○
6	○	

h	2	3	4
7			
8	○	○	
9			○

i	5	6
7		
8		○
9	○	

図式が可換

(⇔) すべての合成がどの経路でも一致

この図では ~~jのときでも~~ $\boxed{h\circ f = i\circ g}$

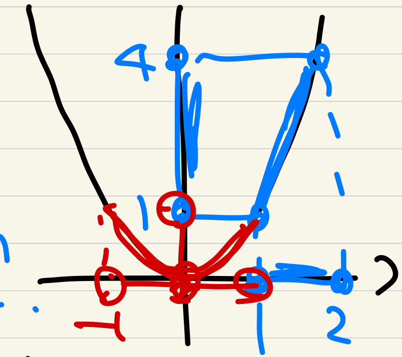
左: $0 \mapsto 8$
$1 \mapsto \cancel{9}$ 8

右: $0 \mapsto 8$
$1 \mapsto 9$

同じ.

像と逆像 (ずいはんの例)

例1.2.36 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2$



写像 $f: X\to Y$ を使って

逆像

像 → $f_*: P(X)\to P(Y)$, $f^*: P(Y)\to P(X)$

を定める

関数の値域

$A\in P(X)$ に対し、

$f_*(A)=\{y\in Y \mid f(x)=y$ となる $x\in A$ が存在$\}$

不等式をとく

$B\in P(Y)$ に対し、

$f^*(B)=\{x\in X \mid f(x)\in B\}$

・$A=\{1<x<2\}$ なら

$f_*(A)=\{1<x<4\}$

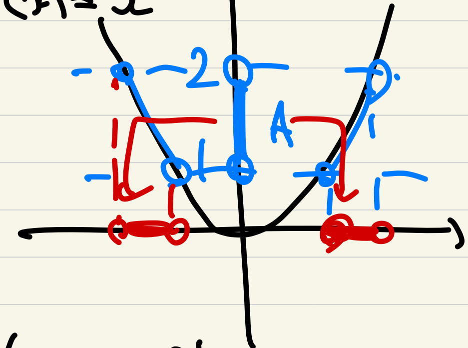
・$A=\{-1<x<1\}$ のとき

$f_*(A)=\{0\leqq x<1\}$ である.

$\{x\in\mathbb{R} \mid 1<x<4\}$

$\{y\in\mathbb{R} \mid 1<y<4\}$

$f(x) = x^2$

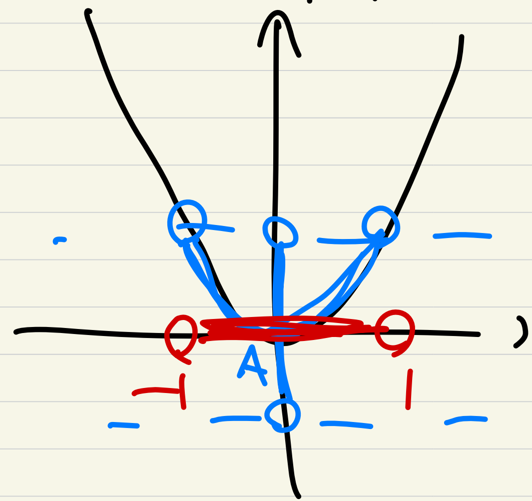


$A = \{1 < x < 2\}$ とする

$$f^*(A) = \{1 < f(x) < 2\}$$
$$= \{1 < x^2 < 2\}$$
$$= \{-\sqrt{2} < x < -1,\ 1 < x < \sqrt{2}\}$$

$A = \{-1 < x < 1\}$ とする,

$$f^*(A) = \{-1 < x^2 < 1\}$$
$$= \{-1 < x < 1\}$$



$f: X \to Y$

{3} 2.38 $\quad X = \{0, 1, 2\}$

$Y = \{3, 4\}$

f	0	1	2
3	○	○	
4			○

とする.

$g: Y \to X$ と

	3	4
0	○	○
1		
2		

とする

$f_*(\{0,1\}) = \{3\}$ $\qquad g_*(\{3\}) = \{0\}$

$f_*(\{0,2\}) = \{3,4\}$ $\qquad g_*(\{3,4\}) = \{0\}$

像

$f^*(\{3\}) = \{0,1\}$ $\qquad g^*(\{0\}) = \{3,4\}$

$f^*(\{4\}) = \{2\}$ $\qquad g^*(\{1,2\}) = \phi$

逆像

$f : X \to Y.$

$f_* : P(X) \to P(Y)$

$P(X)$ や $P(Y)$: $\cap$, $\cup$ ができる

$$\boxed{\begin{aligned} f_*(A \cap B) &\subset f_*(A) \cap f_*(B) \\ f_*(A \cup B) &= f_*(A) \cup f_*(B) \end{aligned}}$$

= には必ずしもならない.

$\cancel{\sin(x+y) = \sin x + \sin y}$

$f^* : P(Y) \to P(X)$

に対しては

$$\boxed{\begin{aligned} f^*(C \cap D) &= f^*(C) \cap f^*(D) \\ f^*(C \cup D) &= f^*(C) \cup f^*(D) \end{aligned}}$$

分配法則

やりたいこと

= が成立する条件は?

$\to$ ずいはん

(b) 2.43

$X = \{0,1,2\}, \quad Y = \{3,4\}$

f	0	1	2
3	O	O	
4			O

$A = \{0\}, \quad B = \{1\}$

$f_*(A) = \{3\}, \quad f_*(B) = \{3\}$

$A \cup B = \{0,1\} \quad f_*(A \cup B) = \{3\}$

$f_*(A \cup B) = f_*(A) \cup f_*(B)$

$A \cap B = \emptyset.$

$f_*(A \cap B) = \emptyset$

$$\underbrace{f_*(A) \cap f_*(B)}_{=\{3\}} \neq \underbrace{f_*(A \cap B)}_{=\emptyset}.$$