q & Q

アブスト

物理学 (ここではかなり広い範囲を指している) において、同じ対象を異なる枠組み・理論で捉えられる、という現象がしばしば観察されている。そしてこれらの現象は、非自明な命題や予想として数学の言葉に翻訳されてきた。今回はその一例として、2009 年頃に発見された『4 次元・2 次元対応』と呼ばれる物理的現象から導かれる、恒等式について紹介する。

この『4 次元・2 次元対応』は、物理学に於いて場の量子論と呼ばれる枠組みで記述される一般的な主張である。その一つ実現例である「2 次元-G_q 対称-位相的 Yang-Mills 理論の n 点相関関数」と「高々 G^n フレーバー対称性をもつ 4 次元 $\mathcal{N}=2$ 超共形場理論 (特にクラス S 理論) の Schur 演算子がなす指標」とが一致する物理学的現象を、なるべく数学者フレンドリーな言葉で説明したい。

その後、この現象の最も簡単な例から (~~Ramanujan もびっくりの~~) 非自明な恒等式が得られる事をみる。また時間的余裕があれば、上の物理的主張に関連した、一般化結び目に付随する一連の恒等式の例 (私の過去の研究結果からの副産物) についても簡単に紹介したい。

予備知識

発表は『物理学の命題の説明』と『数学的帰結・結果の紹介』から構成される。後者においては、本レジュメの定義さえあればひとまず事足りる。

前者においては、(単純)Lie 代数・Lie 群とその (有限次元) 表現論& 指標に馴染みがある事を前提としている。ただし馴染みのない方は $G=U(1)\sim S^1$、$\hat{G}=\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(G=U(1),\mathbb{C})\simeq\mathbb{Z}$, $\mathcal{H}(S^1)\sim\mathbb{C}((z))$ と思ってもらってもよい。(ただしこの場合、相関関数は所謂 δ -"関数"になるため、厳密には well-defined ではない。)

定義 (本発表中では特に説明なく用いる)

以下、$q\in\mathbb{C}$ で、$|q|<1$ とする。

$$\textbf{q-Pochhammer symbol}\quad (x;q)_n := \prod_{i=0}^{n-1}(1-xq^i) \tag{1}$$

$$\textbf{q-number}\quad [n]_q := \frac{q^{n/2}-q^{-n/2}}{q^{1/2}-q^{-1/2}} \quad \text{for} \quad n\in\mathbb{Z}_{\geq 1} \qquad [0]_q := 1 \tag{2}$$

$$\textbf{q-factorial}\quad [n]_q! := \prod_{i=0}^{n}[i]_q \quad \text{for} \quad n\in\mathbb{Z}_{\geq 0} \tag{3}$$

$$\textbf{q-binomial}\quad \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}_q := \frac{[n]_q!}{[k]_q!\,[n-k]_q!} \tag{4}$$

$$\textbf{character}\quad \textbf{(指標)}\quad \chi_{(n_1,\ldots,n_N)}(a) := \frac{\det\limits_{1\leq i,j\leq N}\left(a_i^{n_j+N-j}\right)}{\det\limits_{1\leq i,j\leq N}\left(a_i^{N-j}\right)} \in \mathbb{Z}\left[a_1,\ldots,a_N\right] \tag{5}$$

$$\text{where}\quad a := (a_1,a_2,\ldots,a_N),\ \ \prod_{i=1}^{N}a_i = 1,\ \ n_1\geq n_2\geq\ldots\geq n_N, n_i\in\mathbb{Z}$$