多項式環の初歩から永田予想へ

須田順也

2018 年 9 月 23 日

多項式は我々に馴染みの深い数学的対象である.特に, 体 k を固定 (環でももちろんよい) し, k の元を係数とした多項式全体の集合 $k[x]$(1 変数) や $k[x_1, x_2, \ldots, x_n]$(n 変数) は多くの数学分野に登場し, それぞれの分野に応じて研究の対象や道具となる.多項式環 $k[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ を解析する方法は多々あるが, 今回は下記のように定義された多項式環の写像のうち, 自己同型なものをメインにしたアプローチを紹介する.

$f_1, f_2, \ldots, f_n \in k[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ とし, 次のような写像 $(f_1, f_2, \ldots, f_n)$ を考える.

$$\begin{array}{cccc} (f_1, f_2, \ldots, f_n): & k\,[x_1, x_2, \ldots, x_n] & \longrightarrow & k\,[x_1, x_2, \ldots, x_n] \\ & \Cup & & \Cup \\ & g\,(x_1, x_2, \ldots, x_n) & \longmapsto & g(f_1, f_2, \ldots, f_n) \end{array}$$

体 k 上の多項式環 $k[\mathbf{x}] = k[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ の (上記の様な) 自己同型写像全体の集合を $\mathrm{Aut}_k\, k[\mathbf{x}]$ と書く.この集合は写像の合成によって群をなす.また, $k[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ の自己同型には, 次のような簡単なつくり方がある.

$1 \leq l \leq n,\ a \in k^*$($k$ の単元全体の集合), $p \in k[x_1, x_2, \ldots, x_{l-1}, x_{l+1}, \ldots, x_n]$ に対し

$$(x_1, \ldots, x_{l-1}, ax_l + p, x_{l+1}, \ldots, x_n)$$

このような自己同型写像を¨基本自己同型写像¨という.$k[\mathbf{x}]$ の自己同型写像 $(f_1, f_2, \ldots, f_n)$ が順 (tame) であるとは, これが $k[\mathbf{x}]$ の基本自己同型写像の合成であらわせるときをいい, 順でないとき野生 (wild) であるという.$k[\mathbf{x}]$ の順な自己同型全体写像全体の集合を $\mathrm{T}(n, k)$ とかき, $\mathrm{T}(n, k)$ は $\mathrm{Aut}_k\, k[\mathbf{x}]$ の部分群となる.ここで, 以下のような問題を考える.

【問題】

$k[\mathbf{x}]$ の全ての自己同型は順であるか.すなわち, $\mathrm{Aut}_k\, k[\mathbf{x}] = \mathrm{T}(n, k)$ が成り立つか.

$n = 1$ のとき, $\mathrm{Aut}_k\, k[\mathbf{x}] = \mathrm{T}(1, k)$ である.また, $n = 2$ のとき, H.Jung により, $\mathrm{Aut}_k\, k[\mathbf{x}] = \mathrm{T}(2, k)$ であることもわかっている.永田雅宜先生は、$n = 3$ のとき以下のような $k[x_1, x_2, x_3]$ の自己同型写像 $F = (f_1, f_2, f_3)$ を反例として考え、その野生性を予想した。

$$f_1 = x_1 - 2(x_1x_3 + x_2^2)x_2 - (x_1x_3 + x_2^2)^2x_3, \quad f_2 = x_2 + (x_1x_3 + x_2^2)x_3, \quad f_3 = x_3$$

この写像が自己同型であることは容易に示せるが, その野生性を示すことは難しく, 長い間,「予想」にとどまっていた. しかし, 2004 年に I.P.Shestakov と U.U.Umirbaev によってこれが証明され, ついに $\mathrm{Aut}_k\, k[\mathbf{x}] \neq \mathrm{T}(3, k)$ であることがわかった. 今回は, 上記の内容をもう少し詳しく説明するとともに, 永田予想のその後についてもお話しようと思っています.なお, 本発表の内容を首都大学東京の黒田茂先生が講義ノートとして、詳しくまとめられています.本発表でも参考文献として, 参照させていただいています.