

# 演習形式で学ぶ圏論の基礎の基礎（未完成版）

梅崎直也@unaoya（株式会社すうがくぶんか）

2021 年 9 月 5 日

La mathématique est l'art de donner le même nom à des choses différentes.

---

Science et Méthode, Henri Poincaré

これはまだ未完成です。完成版は講座当日 9/5 の朝 8 時に更新します。ご迷惑おかけしますがご了承ください。

## 目次

1	集合と写像	2
1.1	冪集合	2
1.2	写像	3
1.3	直積と直和	8
1.4	写像の合成と可換図式	9
1.5	空集合	10

## 1 はじめに

今回の講座の目標は、圏論の考え方を使って説明できる簡単な現象を紹介することです。具体的には「随伴関手の極限余極限の保存」という事実について、この事実を通して説明できる具体例である「写像による部分集合の像および逆像と和集合共通部分の関係」を紹介します。そのために、圏や関手の定義から始めて、随伴関手とは何か、極限余極限とは何か、を簡単な例とともに紹介します。

圏論における非常に重要な概念として自然変換がありますが、今日の講座では自然変換については一切扱いません。ただし、随伴の定義の中でこっそり出てきます。

このテキストの構成について説明します。まずは初めに圏などの概念を記述するための基礎として集合と写像について簡単に説明します。また集合や写像に関して圏論の言葉で扱うことができる例についても紹介します。次に圏の定義を説明しますが、いきなり圏の定義を説明するのではなく、圏よりも単純な概念であるグラフとモノイドという概念を先に説明します。これらは、圏の定義を理解する助けとなると同時に、グラフたちの構成する圏やモノイドたちの構成する圏など、圏の具体例を提供するものです。圏の定義を説明した後は、一つの圏の中で説明することができる圏論の概念である極限と余極限を扱います。目標である事実に関連して、部分集合の和や共通部分などが極限や余極限として理解できることを説明します。次に二つの圏の関係を記述する概念である関手について説明します。最後に二つの関手の特別な関係である随伴について説明し、随伴の考え方をを用いて理解できる現象の例をいくつか紹介します。

圏論を学ぶために web 上でご覧いただける資料を紹介します。名古屋大学情報学部・情報学研究科の木原貴行先生による[圏と論理へのいざない・レクチャーノート](#)は今回の講座と同じようにグラフの話から始めていて少ない予備知識で読めることと、論理と圏論の関係について書かれています。[壱大整域](#)は圏論について基本的な部分から非常に豊富な解説がありますが、多少数学に慣れている人向けです。[ゆる圏 YouTube](#)ではベーシック圏論の内容を丁寧に解説されています。梅崎自作の資料として、圏論の基本的な内容から米田の補題を目標としたノートを[こちらのページ](#)からご覧いただけます。こちらには自然変換も書いてあります。また、グラフの圏についての動画を [YouTube のチャンネル](#)に投稿する予定なのでご覧ください。

すうがくぶんかでは 10 月から後期集団講座を開講します。いずれも zoom を用いたオンライン講座で、アーカイブは 2 年間ご視聴いただけます。梅崎が担当する講座は『[ベーシック圏論](#)』を教科書にした講座と『[線形代数の世界](#)』を教科書にした講座で、この二講座については演習問題の添削を行います。質問対応、添削の対応も視聴期限と同じく 2 年間です。また、4 月から 8 月には『[集合と位相](#)』の講座を行いました。こちらは録画をご覧いただけます。もしご興味あれば各講座のページから詳細をご覧ください。

## 2 集合と写像

集合とはものの集まりのことで、別の言い方をすると何かが属するか属さないかを記述できるものである。つまり、 $X$  が集合であれば  $a \in X$  であるか  $a \notin X$  であるかが  $a$  に応じて決まっている。 $a \in X$  であることを  $a$  は  $X$  の要素であるという。

自然数は 0 以上の整数のこととする。自然数全体の集合を  $\mathbb{N}$  で表す。実数全体の集合を  $\mathbb{R}$  で表す。

集合は中かっこ  $\{, \}$  を用いて記述する。要素を全て列挙する方法で  $\{0, 1, 2, 3\}$  などと表す方法と、その集合に属する条件を用いて表す方法  $\{n \in \mathbb{N} \mid n \leq 3\}$  がある。よく  $\{f(x) \mid x \in X\}$  という形の記法が用いられるが、これは略記である。例えば 0 以上の偶数全体の集合  $\{2n \mid n \in \mathbb{N}\}$  は  $\{n \in \mathbb{N} \mid \text{ある } m \in \mathbb{N} \text{ が存在して } n = 2m \text{ となる。}\}$  の略記である。

写像は二つの集合の要素同士の対応である。これは計算方法や手続きではないことに注意しよう。 $X$  の要素を  $Y$  の要素に対応させる写像を  $f: X \rightarrow Y$  と表す。

### 2.1 冪集合

集合  $X$  の要素のうち一部分を集めてできる集合が  $X$  の部分集合である。一部分とはいっても、実際には  $X$  自身も  $X$  の部分集合であり、要素を一つも持たない集合である空集合  $\emptyset$  も  $X$  の部分集合である。

**定義 2.1** (部分集合). 集合  $Y$  が集合  $X$  の**部分集合**であるとは、任意の  $x$  について「 $x \in Y$  ならば  $x \in X$ 」が成り立つことをいう。このことを  $Y \subset X$  と表す。

**例 2.2.**  $X = \{0, 1\}$  であれば、 $X$  の部分集合は  $\emptyset, \{0\}, \{1\}, X$  の合計 4 つ。

$X$  の部分集合を全て集めた集合が存在する。これを  $X$  の冪集合という。

**定義 2.3** (冪集合). 集合  $X$  に対して、その部分集合を全て集めた集合を**冪集合**といい  $P(X)$  と書く。つまり、 $P(X) = \{x \mid x \subset X\}$  である。

**例 2.4.**  $X = \{0, 1\}$  であれば、 $P(X) = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, X\}$  である。

**問題 2.5.**  $X = \{0, 1, 2\}$  のとき  $P(X)$  はどのような集合か。

**解答.**  $P(X) = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0, 1\}, \{0, 2\}, \{1, 2\}, X\}$

集合  $X$  の部分集合が与えられたとき、そこから新しい部分集合を作る操作がある。

**定義 2.6** (和集合). 集合  $X$  の部分集合  $A, B$  に対してその**和集合**  $A \cup B$  とは  $\{x \in X \mid x \in A \text{ または } x \in B\}$  により定まる集合のこと。

**例 2.7.**  $X = \{0, 1, 2, 3\}, A = \{0, 1\}, B = \{1, 2\}$  に対し、 $A \cup B = \{0, 1, 2\}$  である。

和集合は次のように特徴付けることができる。集合  $X$  の部分集合  $A, B$  に対して、 $A \cup B$  は  $A$  も  $B$  も含む  $X$  の部分集合の中で包含関係について最小のものである。

同じことを少し言い換えると次のようになる。

**命題 2.8.** 集合  $X$  と  $A, B \in P(X)$  に対して、

1.  $A \subset A \cup B$  かつ  $B \subset A \cup B$  である。
2. 任意の  $T \in P(X)$  に対して「 $A \subset T$  かつ  $B \subset T$ 」ならば  $A \cup B \subset T$  である。

**例 2.9.**  $X = \{0, 1, 2, 3\}, A = \{0, 1\}, B = \{1, 2\}$  とする。 $T \subset X$  であって  $A \subset T$  かつ  $B \subset T$  を満たすものは  $\{0, 1, 2\}$  と  $\{0, 1, 2, 3\}$  の二つあり、 $A \cup B = \{0, 1, 2\}$  であった。

**定義 2.10** (共通部分). 集合  $X$  の部分集合  $A, B$  に対して、その**共通部分**  $A \cap B$  とは  $\{x \in X \mid x \in A \text{ かつ } x \in B\}$  により定まる集合のこと。

**例 2.11.**  $X = \{0, 1, 2, 3\}, A = \{0, 1, 2\}, B = \{1, 2, 3\}$  に対し、 $A \cap B = \{1, 2\}$  である。

この集合は次のように特徴付けることができる。

**命題 2.12.** 集合  $X$  の部分集合  $A, B$  に対して、 $A \cap B$  は  $A$  にも  $B$  にも含まれる  $X$  の部分集合の中で包含関係について最大のものである。

つまり、 $A, B \in P(X)$  に対して、 $A \cap B \subset A$  かつ  $A \cap B \subset B$  であり、任意の  $T \subset X$  に対して  $T \subset A$  かつ  $T \subset B$  ならば  $T \subset A \cap B$  である。

**例 2.13.**  $X = \{0, 1, 2, 3\}, A = \{0, 1, 2\}, B = \{1, 2, 3\}$  とする。 $T \subset X$  であって  $T \subset A$  かつ  $T \subset B$  を満たすものは  $\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}$  であり、 $A \cap B = \{1, 2\}$  であった。

集合  $X$  の冪集合  $P(X)$  においては次も成立する。

**命題 2.14.**  $X \in P(X)$  は次を満たす。任意の  $T \in P(X)$  に対し  $T \subset X$  が成り立つ。

$\emptyset \in P(X)$  は次を満たす。任意の  $T \in P(X)$  に対し  $\emptyset \subset T$  が成り立つ。

つまり、 $X$  は  $P(X)$  の中で包含関係について最大であり、 $\emptyset$  は包含関係について最小である。

この特徴づけを定義に採用することができる。ただし、このような定義の仕方には注意が必要。「最も」みたいなやつはあるとは限らない。一意性も保証するとは限らない。定義が存在を保証するとは限らない。これが共通部分です、と一つ作るのではなく、こういう性質を満たすものを共通部分と言えます、という定義。実際に作ったものがそれを満たすか？そういうものしかないか？などは別途証明が必要。とはとやると一意性？共通部分であるとは、という性質で述べると一意性は不要？

これは自然数における次の事実と似ている。最大公約数と最小公倍数。1 はあらゆる自然数の約数である。0 はあらゆる自然数の倍数である。 $a$  と  $b$  の最小公倍数  $l$  は  $a$  の倍数かつ  $b$  の倍数であり、かつ  $t$  が  $a$  の倍数かつ  $b$  の倍数であれば  $t$  は  $l$  の倍数である。 $a$  と  $b$  の最大公約数  $g$  は  $a$  の約数かつ  $b$  の約数であり、かつ  $t$  が  $a$  の約数かつ  $b$  の約数であれば  $t$  は  $g$  の約数である。

これらはのちに圏における始対象、終対象、和、積などの概念として捉えられることを説明する。

## 2.2 写像

次に写像について簡単に説明する。写像というのは関数とほとんど同じと思ってよく、数に関係する場合に関数と呼ぶことが多い。関数というと何らかの変換規則みたいなイメージを持つかもしれないが、数学では二つの集合の要素たちについての単なる対応づけでしかない。対応規則を数式や文章で記述できるかどうか、あ

るいはその計算手続きなどは問題にならない。

集合  $X, Y$  の間の写像  $f: X \rightarrow Y$  とは定義域と行き先、要素の対応を区別する。写像の一致はすべての要素の対応が一致すれば一致。

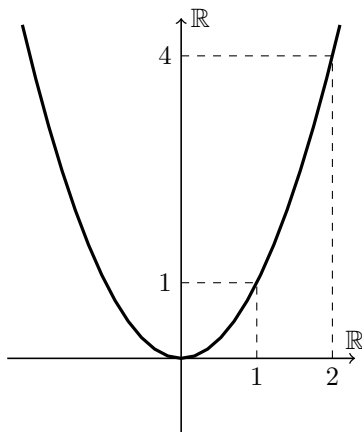
集合  $X$  から  $Y$  への写像  $f$  とは、全ての  $X$  の要素に対してある  $Y$  の要素を定める対応のことをいう。 $f$  が  $X$  から  $Y$  への写像であることを  $f: X \rightarrow Y$  と表す。また要素の対応を  $x \mapsto y$  のように表したり、 $y = f(x)$  のように表したりする。

関数のグラフを書いたのと同じように、写像もグラフを定めることができる。 $X$  や  $Y$  が小さければ次のような表を書いて理解できる。例えば  $X = \{0, 1, 2\}, Y = \{3, 4\}$  として  $f: X \rightarrow Y$  を  $f(0) = 4, f(1) = 3, f(2) = 4$  として定めたものは、

	0	1	2
3		○	
4	○		○

中学や高校で習ったように、 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  であればそのグラフを  $xy$  平面に書くことができる。

**例 2.15.**  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  を  $f(x) = x^2$  で定める。このグラフは次のようになる。



**例 2.16.**  $A = \{a, b, c\}, B = \{d, e\}$  として  $A \rightarrow B$  を定義しよう。例えば一つのやり方として  $f(a) = d, f(b) = e, f(c) = e$  とすればよい。これを

$$f = \begin{cases} a \mapsto d \\ b \mapsto e \\ c \mapsto e \end{cases}$$

と書くことにしよう。

**問題 2.17.** 上の集合  $A = \{a, b, c\}, B = \{d, e\}$  に対して  $A$  から  $B$  への写像は上の  $f$  以外にはどのようなものがあるか？全て列挙せよ。

**問題 2.18.** 上の集合  $A = \{a, b, c\}, B = \{d, e\}$  に加え  $C = \{x, y, z\}$  を考える。 $A$  から  $C$  への写像、 $B$  から  $C$  への写像を全て列挙せよ。

**例 2.19.** どのような集合  $X$  に対しても、空集合からの写像  $\emptyset \rightarrow X$  はただ一つだけ存在する。

空集合への写像  $f: X \rightarrow \emptyset$  は  $X$  が空集合でない限り存在しない。

**問題 2.20.** 一点集合  $S = \{*\}$  を考える。集合  $X$  から  $S$  への写像にはどのようなものがあるか？また  $S$  から集合  $X$  への写像にはどのようなものがあるか？

例えば  $X = A = \{a, b, c\}$ ,  $X = C = \{d, e\}$  などの場合にどのようなになるか考えよう。

**例 2.21.** 自然数  $n$  に対して、その次の自然数を対応させることにより写像  $s: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  を定める。つまり

$$s(n) = n + 1$$

あるいは

$$s: n \mapsto n + 1$$

と定める。

**例 2.22.** 自然数  $n$  を 3 倍するという操作により写像  $(3\times): \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  を定める。つまり

$$(3\times)(n) = 3n$$

あるいは

$$(3\times): n \mapsto 3n$$

と定める。

写像を使って集合の情報を取り出すことができる。

**例 2.23.**  $\{0, 1\}$  への写像は部分集合を考えるのと同じ。

次に写像を用いて部分集合の間の対応を二つ定める。それぞれ像と逆像と呼ばれるもので、像は関数の値域を求めること、逆像は不等式を解くことに相当する。

**定義 2.24** (像と逆像). 集合  $X, Y$  と写像  $f: X \rightarrow Y$  に対して以下を定義する。部分集合  $U \subset X$  の  $f$  による像とは  $f_*(U) = \{f(x) \mid x \in U\} = \{y \in Y \mid \exists x \in X (y = f(x))\} \subset Y$  のこと。部分集合  $V \subset Y$  の  $f$  による逆像とは  $f^*(V) = \{x \in X \mid f(x) \in V\} \subset X$  のこと。

像や逆像には通常  $f, f^{-1}$  の記号が使われるが、これは紛らわしいので今回は  $f_*, f^*$  を用いることにする。

**例 2.25.**  $X = \{0, 1, 2\}, Y = \{3, 4\}$  とする。

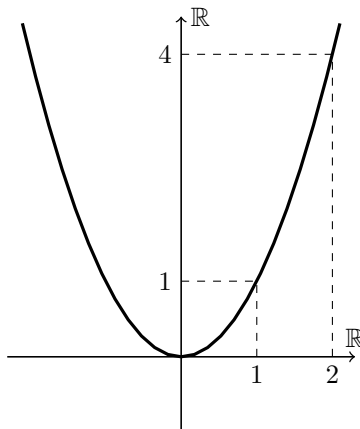
$f: X \rightarrow Y$  を  $f(0) = f(1) = 3, f(2) = 4$  により定める。 $f_*(\{0, 1\}), f_*(\{0, 2\}), f^*(\{3\}), f^*(\{4\})$  を求めよ。

	0	1	2
3	○	○	
4			○

$g: Y \rightarrow X$  を  $f(3) = g(4) = 0$  により定める。 $g_*(\{3\}), g_*(\{3, 4\}), g^*(\{0\}), g^*(\{1, 2\})$  を求めよ。

	3	4
0	○	○
1		
2		

**例 2.26.**  $X, Y$  を共に実数全体の集合  $\mathbb{R}$  とし、 $f: X \rightarrow Y$  を  $f(x) = x^2$  により定める。



$f_*(\{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 2\})$ ,  $f_*(\{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 1\})$ ,  $f^*(\{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 2\})$ ,  $f^*(\{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 1\})$  を求めよ。

二つの写像を**合成**することで新しく写像を定めることができる。

**定義 2.27** (写像の合成).  $X, Y, Z$  を集合とし、 $f: X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow Z$  をそれらの間の写像とする。このとき、 $f$  と  $g$  の合成写像  $g \circ f: X \rightarrow Z$  とは、 $x \in X$  に対して  $g(f(x))$  を対応させることで定まる写像。

集合  $X$  に対して定義域と行き先が  $X$  であるような写像のうちで特別なものがある。

**定義 2.28** (恒等写像).  $X$  を集合とする。恒等写像  $\text{id}_X: X \rightarrow X$  とは、 $\text{id}_X(x) = x$  で定まる写像のこと。

1.  $X$  の要素  $x$  から写像  $f$  を使って  $f(x) \in Y$  を対応させる。
2. 次にこの  $Y$  の要素  $f(x)$  から写像  $g$  を使って  $g(f(x)) \in Z$  を対応させる。

このようにして定義される写像が  $f$  と  $g$  の合成写像  $g \circ f$  である。

**定義 2.29** (合成写像). 写像  $f: X \rightarrow Y$  と  $g: Y \rightarrow Z$  の合成写像  $g \circ f: X \rightarrow Z$  とは、次で定まる  $X$  から  $Z$  への写像。

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

この式の読み方は  $g \circ f$  が新しい写像の名前で、それを計算する手続きが  $g(f(x))$  で与えられるということ。

**例 2.30.** 上の  $s: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, s(n) = n + 1$  を合成して  $s \circ s: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  を定める。これは

$$(s \circ s)(n) = s(s(n)) = s(n + 1) = (n + 1) + 1 = n + 1 + 1 = n + 2$$

となり、自然数  $n$  に対してその次の自然数を対応させる写像。

**問題 2.31.**  $s \circ s \circ s$  はどのような写像か？

また  $p \circ (3 \times), (3 \times) \circ p$  はそれぞれどのような写像か？

**例 2.32.** 集合  $A = \{a, b, c\}, B = \{d, e\}, C = \{x, y, z\}$  を考える。適当に写像  $f: A \rightarrow B$  と  $g: B \rightarrow C$ 、 $h: C \rightarrow A$  を定め、それらの合成を計算しよう。例えば

$$f = \begin{cases} a \mapsto d \\ b \mapsto e \\ c \mapsto e, \end{cases} \quad g = \begin{cases} d \mapsto x \\ e \mapsto z, \end{cases} \quad h = \begin{cases} x \mapsto a \\ y \mapsto b \\ z \mapsto a \end{cases}$$

とする。

このとき、 $g \circ f: A \rightarrow C$  は  $a \mapsto d \mapsto x, b \mapsto e \mapsto z, c \mapsto e \mapsto z$  で定まる写像、つまり

$$g \circ f = \begin{cases} a \mapsto x \\ b \mapsto z \\ c \mapsto z \end{cases}$$

である。

**問題 2.33.** 上の集合  $A, B, C$  と  $f, g, h$  について、 $h \circ g, h \circ (g \circ f), (h \circ g) \circ f$  を計算せよ。

**例 2.34.** 集合  $W, X, Y, Z$  とそれらの間の写像  $f: W \rightarrow X, g: X \rightarrow Y, h: Y \rightarrow Z$  について、 $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$  であることを証明しよう。

写像の等式を示すためには任意の  $x \in X$  に対して、

$$(h \circ (g \circ f))(x) = ((h \circ g) \circ f)(x)$$

であることを示せばよい。左辺は

$$(h \circ (g \circ f))(x) = h((g \circ f)(x)) = h(g(f(x)))$$

であり、右辺は

$$((h \circ g) \circ f)(x) = (h \circ g)(f(x)) = h(g(f(x)))$$

であるのでこれらは一致する。

**問題 2.35.** 恒等写像に対して  $\text{id}_X \circ f = f, f \circ \text{id}_X = f$  であることを証明しよう。

以上の  $f^*, f_*$  はそれぞれ冪集合の間の写像  $f_*: P(X) \rightarrow P(Y), f^*: P(Y) \rightarrow P(X)$  を定めている。まとめると、集合  $X$  から集合  $P(X)$  を定め、写像  $f: X \rightarrow Y$  から  $f_*: P(X) \rightarrow P(Y), f^*: P(Y) \rightarrow P(X)$  を対応させることができる。この対応は**関手的**である。つまり、

$$\begin{aligned} f^{-1}(g^{-1}(W)) &= (g \circ f)^{-1}(W) \\ \text{id}_X^{-1}(U) &= U \\ g(f(U)) &= (g \circ f)(U) \\ \text{id}_X(U) &= U \end{aligned}$$

を満たす。

さて、 $f_*, f^*$  と  $\cap, \cup$  の関係について調べよう。



**命題 2.36.**  $X, Y$  を集合とし、 $f: X \rightarrow Y$  を写像とする。集合  $X$  の部分集合  $A, B$  及び集合  $Y$  の部分集合  $C, D$  に対し

$$\begin{aligned}f_*(A \cap B) &\subset f_*(A) \cap f_*(B) \\f_*(A \cup B) &= f_*(A) \cup f_*(B) \\f^*(C \cap D) &= f^*(C) \cap f^*(D) \\f^*(C \cup D) &= f^*(C) \cup f^*(D)\end{aligned}$$

が成り立つ。

集合の基本的な性質を使って証明できることを確認する。

二次関数の例で成立と不成立を確認する。

簡単な場合に帰着できるか？ということを考えたい。それを保証する。

この式と随伴の関係。

随伴について簡単に。**TODO** **ここを定義に合わせた述べ方にする。普遍性の記述と近いように書く。最大とか最小とか使えろと良い。**

**問題 2.37.** 集合  $X, Y$  の間の写像  $f: X \rightarrow Y$  に対し、 $U \subset f^{-1}(V)$  と  $f(U) \subset V$  が同値であることを示せ。

**解答 2.38.** まず  $U \subset f^{-1}(V) \Rightarrow f(U) \subset V$  であることを証明する。 $x \in f(U)$  とする。このときある  $y \in U$  が存在して  $x = f(y)$  であり、仮定から  $y \in U \subset f^{-1}(V)$  であるから  $f(y) \in V$  である。したがって  $x \in V$  となる。逆に  $f(U) \subset V \Rightarrow U \subset f^{-1}(V)$  であることを証明する。 $x \in U$  とする。 $f(x) \in f(U) \subset V$  であるから  $x \in f^{-1}(V)$  である。

これにより、 $f^{-1}$  や  $f$  の定義を書き換えることができる。(どちらかを定義した上でもう片方を定義する。)

例えば像  $f$  のはじめのような定義を与えた上で  $f^{-1}$  の定義を次のように与える。 $V \subset Y$  に対し  $f^{-1}(V) \subset X$  を定義にはなっている。(部分集合を定めることは間違いない。一意性がなくても定義と言える?) このようなものが存在するか、一意的かは証明が必要。

**問題 2.39.** 逆に  $f^{-1}$  の定義をはじめのように与えた上で  $f$  の定義を

## 2.3 直積と直和

集合の直和と直積について。部分集合に対する和集合や共通部分とは異なる。

$xy$  座標や 2 次元のテーブルが直積として想定するもの。

要素のペア (あるいは列、族) を一つの要素であるかのように記述できる。

二つの集合から、その直積という新しい集合を作る。これは、与えられた二つの集合から一つずつ要素を取り出してペアを作り、それを全て集めた集合である。

	$e$	$a$
$e$	$e$	$a$
$a$	$a$	$a$

**定義 2.40** (直積). 集合  $X, Y$  の直積とは  $X$  の要素と  $Y$  の要素を一つずつ並べたペアを全て集めた集合

$$X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X, y \in Y\}$$

**例 2.41.**  $A = \{a, b, c\}, B = \{d, e\}, C = \{x, y, z\}$  のとき、 $A \times B = \{(a, d), (a, e), (b, d), (b, e), (c, d), (c, e)\}$  である。

**問題 2.42.** 上の集合  $A = \{a, b, c\}, B = \{d, e\}, C = \{x, y, z\}$  について、 $B \times A, A \times A, B \times C, (A \times B) \times C, A \times (B \times C)$  はそれぞれどのような集合か。

**例 2.43.**

$$\mathbb{N} \times \mathbb{N} = \{(n, m) \mid n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N}\} = \{(0, 0), (0, 1), (0, 2), \dots, (1, 0), (1, 1), (2, 1), \dots, (2, 0), (2, 1), (2, 2), \dots\}$$

二つの集合から、その直和という新しい集合を作る。これは、与えられた二つの集合の要素を全て集めた集合である。二つの集合の和集合  $\cup$  とは違うことに注意しよう。

**定義 2.44** (直和). 集合  $X, Y$  の直和とは  $X$  の要素と  $Y$  の要素を全て集めた集合。

$$X \amalg Y = \{x \mid x \in X \text{ または } x \in Y\}$$

ただし元々  $X$  に入っていたものと  $Y$  に入っていたものは区別する。この区別を明確にするため、

$$X \amalg Y = \{(x, 0) \text{ または } (y, 1) \mid x \in X, y \in Y\}$$

のようにも書く。

**例 2.45.**  $A = \{a, b, c\}, B = \{d, e\}, C = \{x, y, z\}$  のとき、 $A \amalg B = \{a, b, c, d, e\}$  である。

**問題 2.46.** 上の集合  $A = \{a, b, c\}, B = \{d, e\}, C = \{x, y, z\}$  について、 $B \amalg A, A \amalg A, B \amalg C, (A \amalg B) \amalg C, A \amalg (B \amalg C)$  はそれぞれどのような集合か。

**例 2.47.**

$$\mathbb{N} \amalg \mathbb{N} = \{(n, 0) \text{ または } (m, 1) \mid n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N}\} = \{(0, 0), (1, 0), (2, 0), \dots, (0, 1), (1, 1), (2, 1), \dots\}$$

## 2.4 写像の合成と可換図式

写像の合成について、演算表、写像の合成も写像だよ

写像の合成も足し算や掛け算のようなもので、簡単な場合には次のような表にまとめることができる。

写像の集合。

いくつかの集合とそれらの間の写像を図で表す。その合成についての等式が成立することを図式が可換であるという。

可換な例と可換でない例。

可換図式というのはいくつかの写像の合成の等式を可視化したものである。

### 2.4.1 Set

二つの集合から、その間の写像全てを集めた集合を作る。

**定義 2.48.** 集合  $X$  から集合  $Y$  への写像全体の集合を  $\mathbf{Set}(X, Y)$  とかく。これを  $Y^X$  とも書く。特に  $\mathbf{Set}(X, X) = \mathbf{End}(X)$  と書く。

**例 2.49.**  $A = \{a, b, c\}, B = \{d, e\}, C = \{x, y, z\}$  のとき、 $\mathbf{Set}(A, B) = \{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7, f_8\}$  である。ここで

$$\begin{aligned} f_1 &= \begin{cases} a \mapsto d \\ b \mapsto d \\ c \mapsto d \end{cases} & f_2 &= \begin{cases} a \mapsto d \\ b \mapsto d \\ c \mapsto e \end{cases} & f_3 &= \begin{cases} a \mapsto d \\ b \mapsto e \\ c \mapsto d \end{cases} & f_4 &= \begin{cases} a \mapsto d \\ b \mapsto e \\ c \mapsto e \end{cases} \\ f_5 &= \begin{cases} a \mapsto e \\ b \mapsto d \\ c \mapsto d \end{cases} & f_6 &= \begin{cases} a \mapsto e \\ b \mapsto d \\ c \mapsto e \end{cases} & f_7 &= \begin{cases} a \mapsto e \\ b \mapsto e \\ c \mapsto d \end{cases} & f_8 &= \begin{cases} a \mapsto e \\ b \mapsto e \\ c \mapsto e \end{cases} \end{aligned}$$

である。

**問題 2.50.** 上の集合  $A = \{a, b\}, B = \{c, d\}, C = \{x, y, z\}$  について、 $\mathbf{Set}(B, C), \mathbf{Set}(A, C), \mathbf{Set}(A, \mathbf{Set}(B, C))$  はそれぞれどのような集合か。

写像の合成によって、写像  $\mathbf{Set}(A, B) \times \mathbf{Set}(B, C) \rightarrow \mathbf{Set}(A, C)$  が定義される。

**例 2.51.**

$$\mathbf{Set}(\mathbb{N}, \mathbb{N}) = \{(a_n) \mid n \in \mathbb{N}, a_n \in \mathbb{N}\} = \{(0, 0, 0, 0, \dots), (1, 0, 1, 1, \dots), (0, 1, 2, 3, \dots), \dots\}$$

## 2.5 空集合

要素を一つも持たない集合がただ一つ存在し、それを空集合とよび  $\emptyset$  で表す。

これはつまらないもののようだが意外と重要で、

0 の発見

背理法

空集合の扱いは慣れていないと難しいので改めてまとめる。

$\emptyset$  と  $X$  の直積は  $\emptyset$  である。

$\emptyset$  から  $X$  への写像はただ一つ存在する。 $X$  から  $\emptyset$  への写像は  $X = \emptyset$  のときはただ一つ、 $X \neq \emptyset$  の時は存在しない。これらは写像の定義から導くことができる。

$\emptyset$  は如何なる集合  $X$  に対してもその部分集合である。つまり  $\emptyset \subset X$  が成り立つ。

これは  $\forall x(x \in X \rightarrow P(x))$  が  $X = \emptyset$  のとき真である、さらにいうと  $Q \rightarrow P$  が  $Q$  が偽なとき真であるという事実に基づく。

### 3 圏の定義

ここから圏の定義と基本的な例について説明していく。圏は、対象、射、合成、恒等射という4種類のデータから構成されるものである。この4つをいきなり扱うと難しいので、段階的に導入していくことにする。

まずはグラフという概念について説明しよう。これは上の4要素でいうと対象と射のみを考えて合成と恒等射については考えないということになる。関数のグラフではなく、グラフ理論などででてくるグラフ。ものの関係性などを頂点と辺の図で表現する。電車の路線図とか登場人物の相関図とか（辺に情報が乗ってるのともう少し構造をつける。）

次にモノイドという概念について説明する。モノイドは圏のうちで特別なもので、対象（頂点）が一つのものである。この概念を通して、合成や恒等射についての理解したい。

頂点が一つのグラフは単なる集合だと思える。グラフの射は集合の写像である。これと同じように対象が一つの圏は単なるモノイドだと思える。

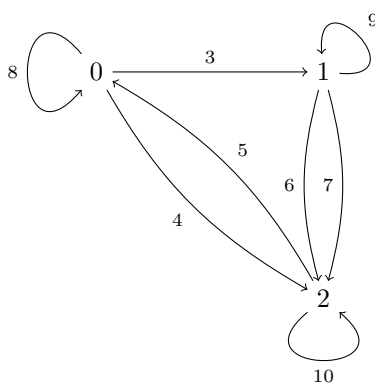
一方でグラフやモノイドも集合と同じように数学的对象である。圏のためでなく、独立して重要な概念。そして、グラフたちやモノイドたちによってそれぞれ一つの圏を定めることができる。その二重の役割を持つことに注意したい。

#### 3.1 グラフ

圏の定義を紹介する前に、圏について直感的に理解するための補助となるグラフの概念について説明する。グラフとは、頂点と向きのついた辺からなる図形のことである。辺に向きがついているため有向グラフと呼ばれることが多いが、今回は単にグラフという。

次のような図で表されるものがグラフである。

例 3.1.



これを集合の言葉を使って定式化する。

**定義 3.2 (グラフ).** グラフ  $G$  とは

1. 頂点の集合  $V(G)$
2. 各頂点  $x, y \in V(G)$  に対して辺の集合  $G(x, y)$

からなるもの。

これを明示的に  $G = (V(G), (G(x, y))_{(x, y) \in V(G) \times V(G)})$  などと書いたりもする。

この  $(G(x, y))_{(x, y) \in V(G) \times V(G)}$  という記法は添字づけられた集合族というもので、 $V(G) \times V(G)$  の各要素ごとに、つまり  $V(G)$  の要素の対ごとに集合  $V(x, y)$  を与えるという意味の記法。数列  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  が  $\mathbb{N}$  の各要素つまり自然数に対して数  $a_n$  を与えるというのと同じ。

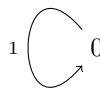
**例 3.3.** 上の例は

$$\begin{aligned} V(G) &= \{0, 1, 2\}, \\ V(0, 0) &= \{7\}, V(0, 1) = \{3\}, V(0, 2) = \{4\}, \\ V(1, 0) &= \emptyset, V(1, 1) = \{8\}, V(1, 2) = \{5, 6\}, \\ V(2, 0) &= \emptyset, V(2, 1) = \emptyset, V(2, 2) = \{9\} \end{aligned}$$

として定まる。

今回の定義では二つの頂点の間に複数の辺が存在するグラフや、同じ頂点を始点と終点に持つ辺が存在するグラフも許していることに注意しよう。

**問題 3.4.** 次の図を集合を用いて記述せよ。



**解答.**

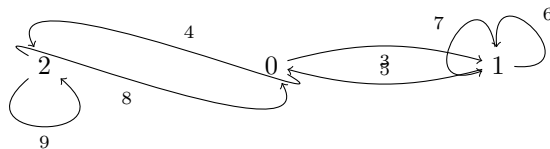
$$V(G) = \{0, 1\}, V(0, 0) = \{4\}, V(0, 1) = \{2, 3\}, V(1, 1) = \emptyset, V(1, 0) = \emptyset$$

$$V(G) = \{0\}, V(0, 0) = \{1\}$$

**問題 3.5.** 次のグラフを図示せよ。

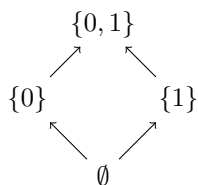
$$\begin{aligned} V(G) &= \{0, 1, 2\}, \\ V(0, 0) &= \emptyset, V(0, 1) = \{3\}, V(0, 2) = \{4\}, \\ V(1, 0) &= \{5\}, V(1, 1) = \{6, 7\}, V(1, 2) = \emptyset, \\ V(2, 0) &= \{8\}, V(2, 1) = \emptyset, V(2, 2) = \{9\} \end{aligned}$$

解答.



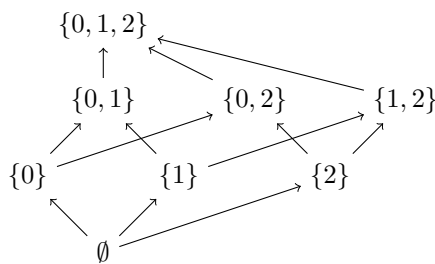
数学的な現象を捉えるグラフの例としてハッセ図を紹介しよう。集合の包含関係や数の大小関係、整除関係など、ある集合の要素の間に順序が定まっているときに、次の方法でグラフを定める。一つ一つの要素を頂点として、二つの頂点  $x, y$  に対して  $y$  が  $x$  の「すぐ上」、つまり  $x \leq y$  であってかつ  $x \leq z \leq y$  となるような  $z$  が存在しないとき、またそのときに限り辺を書く。

**例 3.6.**  $P(\{0, 1\})$  の要素  $\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}$  には包含関係が定まる。この包含関係を大小関係だと思って、上のルールにしたがってグラフを定める。これを図示すると以下ようになる。



**問題 3.7.**  $P(\{0, 1, 2\})$  から上と同じようにして、包含関係によるハッセ図をかけ。

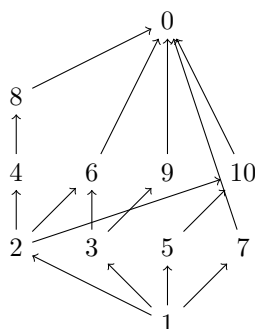
解答.



**例 3.8.** 10 以下の自然数について、通常の大小関係でハッセ図をかく。

$$0 \longrightarrow 1 \longrightarrow 2 \longrightarrow 3 \longrightarrow 4 \longrightarrow 5 \longrightarrow 6 \longrightarrow 7 \longrightarrow 8 \longrightarrow 9 \longrightarrow 10$$

例 3.9. 10 以下の自然数について、整除関係を大小だと思って以下のようにグラフに表す。



例 3.10 (空グラフ). 頂点も辺も持たないグラフを空グラフと呼ぶ。  $V(G) = \emptyset$  であり、辺集合は存在しない。

集合からグラフを作る方法を二つ紹介しよう。

例 3.11 (離散グラフ). 集合  $X$  に対しグラフ  $G(X)$  を頂点集合  $V(G(X)) = X$  とし、  $x, y \in V(G(X)) = X$  にたいして辺集合  $G(X)(x, y) = \emptyset$  とすることで定める。

これは辺を一つも持たず集合  $X$  の要素に対応した頂点をもつグラフとなる。これを**離散グラフ**という。

辺を持たないグラフは集合と同じだと思える。集合が単に要素が所属しているという情報を持つのにに対し、グラフは集合の要素の間に何らかの関係があるという情報を持たせたものと言える。

冪集合のように集合が要素であるような集合を考えることができた。冪集合の要素の間には包含関係がある。この包含関係の情報も取り出すには単に冪集合を集合と思うのではなくて、グラフとして表現するのがよい。

例えば  $\{1, 2, 3, 6\}$  の整除関係をグラフに表したものと  $P(\{0, 1\})$  の包含関係をグラフに表したものは同じ形になる。

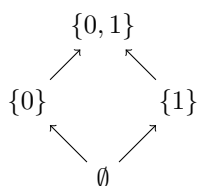
例 3.12. 集合  $X$  に対しグラフ  $M(X)$  を頂点集合  $\{0\}$  に  $M(X)(0, 0) = X$  として定める。これは頂点が一つだけで集合  $X$  の要素に対応した辺を持つグラフである。

逆にグラフに集合を対応させる。

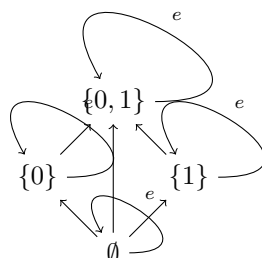
例 3.13. グラフ  $G$  にたいしてその頂点集合  $V(G)$  を対応させる。

例 3.14. グラフ  $G$  にたいしてその辺全体の集合  $\coprod_{(x,y) \in V(G) \times V(G)} V(x, y)$  を対応させる。

$X = \{0, 1\}$  にたいしてグラフ



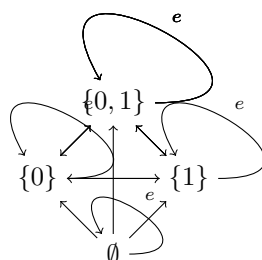
ではなく



を考えることになる。

**例 3.15.** さらにより一般に集合と写像を適当に集めることでグラフを定めることができる。

$\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0,1\}$  について、包含以外の写像全てに辺としてみよう。



これらは互いに部分グラフの関係になっている。

## 3.2 モノイド

ここまではグラフの概念を見てきた。これは圏を構成する四つのデータのうち、合成と恒等射についてはとらずに無視していた。次に圏の定義に近づけるために合成と恒等射についても考えることにする。ただいきなり一般にやらず、圏のうちで対象が一つという条件を満たす比較的単純な圏だけに限って話をする。これはモノイドという概念とみなすことができる。

モノイドの典型例として自然数の加法と自然数の乗法がある。自然数の加法つまり足し算は、二つの自然数に対して自然数を対応させる写像である。 $2 + 3 = 5$  というのを写像っぽさを強調して  $+(2, 3) = 5$  というように記述することにしよう。この  $+$  は写像  $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  を定める。

さらに、足し算は結合法則を満たす。つまり  $(1 + 2) + 3$  も  $1 + (2 + 3)$  もいずれも同じ。 $+(+(1, 2), 3) = +(1, +(2, 3))$  ということ。

**問題 3.16.** 以下を計算せよ。 $+(+(+(2, 3), 4), +(1, 6))$

以下の足し算を写像の記号を用いて表示しなせ。



	$e$	$a$
$e$	$e$	$a$
$a$	$a$	$a$

	$e$	$a$
$e$	$e$	$a$
$a$	$a$	$a$

	$e$	$a$
$e$	$e$	$a$
$a$	$a$	$a$

また、0 という特別な要素があり、ここではひとまず足し算という一つの操作のみに注目している。 $(\mathbb{N}, \mu, 0)$  という三つ組を考えている。

同じく自然数のかけ算という一つの操作のみに注目しよう。かけ算も二つの自然数に対して自然数を対応させる写像である。 $2 \times 3 = 6$  というのを

もう少し別のモノイドの例を紹介する。

**例 3.17** (集合の自己写像). 集合  $X$  に対して、 $X$  から  $X$  への写像全体の集合を  $\text{End}(X)$  と表す。写像の合成は二つの写像に対して一つの写像を対応させる写像を定める。このとき、 $c: \text{End}(X) \times \text{End}(X) \rightarrow \text{End}(X)$  の演算を写像の合成  $(f, g) \mapsto f \circ g$  でさだめ、 $1 = \text{id}_X$  とする。

これは結合法則をみたし、恒等写像がある。これについては交換法則は成り立たない。これにより  $(\text{End}(X), \circ, \text{id}_X)$  はモノイドになる。

例えば  $X = \{0, 1\}$  としよう。このとき、 $\text{End}(X) = \text{End}(\{0, 1\})$  はどのようなモノイドか？

$\text{End}(X)$  は 4 つの要素からなる集合であり、その演算表は次のようになる。

**例 3.18.**  $\text{End}(X)$  全体ではなくその一部分を考えることもできる。例えば  $X = \mathbb{N}$  とし、 $s: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  を  $s(n) = n + 1$  と定めると  $s \in \text{End}(\mathbb{N})$  である。 $\{\text{id}_{\mathbb{N}}, s, s^2, s^3, \dots\}$  を考えるとこれもモノイドとなる。

$X = \{0, 1\}$  で、 $n: X \rightarrow X$  を  $n(0) = 1, n(1) = 0$  として定める。 $n^2 = \text{id}_X$  であり、 $\{\text{id}_X, n\}$  はモノイドとなる。

モノイドは「数」の集まりというより「操作」の集まりようなものだと思うのかもしれない。オートマトンとかチューリング機械とか？数もその数だけの平行移動と思うことにすればよい。上の例の  $s$  のように。(状態遷移の図とグラフの話を混同しないように) モノイドの同型。

以上の例を踏まえてモノイドの定義を与える。

**定義 3.19** (モノイド). モノイド  $M$  とは

1. 集合  $M_0$
2. 写像  $\mu: M_0 \times M_0 \rightarrow M_0$
3. 要素  $1_M \in M_0$

というデータからなる  $M = (M_0, \mu, 1_M)$  であって、次の性質を満たすもの

1. 任意の  $x, y, z \in M$  に対して  $\mu(\mu(x, y), z) = \mu(x, \mu(y, z))$  が成り立つ。
2. 任意の  $x \in M$  に対して  $\mu(x, e) = x, \mu(e, x) = x$  が成り立つ。

単に  $M$  と省略する。 $\mu$  を演算、 $e$  を単位元と呼ぶ。場合によっては単位元は存在のみを定義にしている、それを要素として指定しないこともある。実際には単位元は存在のみを仮定して一意であることが証明できるため、どちらの定義を採用しても差はない。

これを図式で書いてみよう。

$$\begin{array}{ccc} M \times M \times M & \xrightarrow{\mu_x \times \text{id}_M} & M \times M \\ \text{id}_M \times \mu_M \downarrow & & \mu_M \downarrow \\ M \times M & \xrightarrow{\mu_M} & M \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} M \times \{1_M\} & \xrightarrow{\text{id}_M \times i_M(1_M)} & M \times M \\ pr_1 \downarrow & & \mu_M \downarrow \\ M & \xrightarrow{\text{id}_M} & M \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \{1_M\} \times M & \xrightarrow{i_M(1_M) \times \text{id}_M} & M \times M \\ pr_2 \downarrow & & \mu_M \downarrow \\ M & \xrightarrow{\text{id}_M} & M \end{array}$$

冒頭に述べた例をもう一度整理する。

**例 3.20.** 自然数全体の集合  $\mathbb{N}$  と写像  $+: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  を普通の足し算  $+: (n, m) \mapsto n + m$  でさだめよう。このとき、 $(\mathbb{N}, +, 0)$  はモノイドになる。つまり、結合法則と単位法則をみたすことが確かめられる。

**例 3.21.** 自然数全体の集合  $\mathbb{N}$  と写像  $\times: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  を普通の掛け算  $\times: (n, m) \mapsto nm$  でさだめよう。このとき、 $(\mathbb{N}, \times, 1)$  はモノイドになる。つまり、結合法則と単位法則をみたすことが確かめられる。

**例 3.22.** 集合  $X$  に対して  $M_0 = \text{Set}(X, X)$  とし、 $\mu$  を写像の合成で定め、 $1_M$  を恒等写像  $\text{id}_X$  とすることでモノイドが定まる。

**例 3.23.**  $M$  の要素の個数が2であるようなモノイドにはどのようなものがあるか考えてみよう。 $M = \{a, b\}$  とおいてみる。 $a \neq b$  である。モノイドを定義するには、特別な要素  $1_M \in M$  と写像  $\mu_M: M \times M \rightarrow M$  を決める必要がある。 $1_M = a$  とするか、 $1_M = b$  とするかふた通りの場合があるがどちらでも同じなので  $1_M = a$  としてみる。

$\mu_M: M \times M \rightarrow M$  を決める必要がある。まず集合の写像として可能性は16通りある。そのうちで、 $1_M$  の行き先は自動的に決まることから絞り込めて、

これらのそれぞれについて、モノイドの定義を満たすかを確認してみよう。

演算表を作る。直積集合は要素のくみ。 $xy$  平面とか二次元のテーブルのようなもの。

**問題 3.24.**  $M$  の要素の個数が3であるようなモノイドにはどのようなものがあるか？演算表をかけ。

集合  $M$  が同じでも、 $\mu, e$  の定め方で異なるモノイドが得られる。

	$e$	$a$
$e$	$e$	$a$
$a$	$a$	$a$

特別なモノイドとして次を紹介する。

**例 3.25** (一点モノイド).  $S = \{0\}$  に  $\mu(0, 0) = 0, e = 0$  とするとモノイドになる。

これはつまらないもののように見えるが、モノイドの圏における始対象かつ終対象であるという役割を果たす。始対象や終対象について説明するためにもモノイドの射について次に説明する。

一点集合  $X = \{x\}$  に対して  $\mu(x, x) = x$  とすることで  $(X, \mu, x)$  はモノイドとなる。一点集合はたくさんあるがどれをやっても本質的に同じ。この本質的に同じというのは、同型という概念で圏論的に述べることができる。これについては後で。直接示すこともできるし、終対象や始対象の性質として示すこともできる。一見違うものが同じだということを示すのに圏論の考え方を利用することもできる。

集合からモノイドを構成する方法を与えよう。

**例 3.26** (自由モノイド). 集合  $X$  に対して、 $X$  が生成する自由モノイド  $FX$  とは、長さが有限の  $X$  の要素の文字列全体の集合に演算は文字列の結合で定めたこと。ここで単位元は空文字列「」で、これを 1 と表す。

例えば  $X = \{a\}$  のとき、 $FX = \{1, a, aa, aaa, aaaa, \dots\}$  であり、 $\mu(aa, aaa) = aaaaa$  などとなる。 $X = \{a, b\}$  のとき、 $FX = \{1, a, b, ab, aa, bb, ba, aaa, \dots\}$  であり、 $\mu(aba, bba) = ababba$  などとなる。

これは関手性をもつ。つまり写像  $f: X \rightarrow Y$  があればモノイドの射  $Ff: FX \rightarrow FY$  が定まり、いつもの二条件を満たす。 $F(g \circ f) = Fg \circ Ff, F(\text{id}_X) = \text{id}_{FX}$

自由モノイドを構成する手続きは関手的である。単に集合  $X$  に  $\mu, 1_X$  を適切に定めることで  $(X, \mu, 1_X)$  をモノイドであるようにするのは違うことに注意しよう。全ての集合に一斉に同じやり方でモノイドを対応させることができる。しかも集合の写像があればそれを利用してモノイドを関係付けることができる。

文字ではなくて、命令やプログラムなどを基本単位だと思ってもよい。文字列ではなくて命令の列やプログラムの列。ただし、実行結果は自由でなくなることもある。

**例 3.27.**  $\mathbb{N}$  の部分モノイド、特に自由でないもの。自然数の掛け算モノイドは自由ではないが  $\mathbb{N} \setminus \{0\}$  で考えると自由になる。

自然数の足し算モノイドは自由だが  $\mathbb{N} \setminus \{1\}$  で考えると自由でなくなる。

**例 3.28.** 文字列の書き換えが決まっているもの。

生成式と関係式。一つのモノイドを定義はできる。モノイドという概念の定義ではない。

自由モノイドに関係式を定めることでモノイドを作ることができる。 $\mathbb{N} \setminus \{1\}$  を考える。これは自由ではない。 $ab = ba, a^3 = b^2$  で定まるものと一致する？

逆にモノイド  $(M, \mu, e)$  から集合  $M$  を取り出す操作も関手的である。

**例 3.29** (忘却関手). モノイド  $(M, \mu, e)$  に対して、単に集合  $M$  を対応させる。

モノイドとその射を適当に集めることで有向グラフを定めることができる。

### 3.3 圏の定義

ここまで、圏に近い概念として有向グラフとモノイドを紹介した。これらと圏の関係をもう一度整理する。圏はある条件を満たす有向グラフに「射の合成」と「恒等射」というデータを付加したものである。モノイドは「対象が一つ」という条件を満たす圏である。

有向グラフと圏の違い。圏も対象（頂点）と射（向きのついた辺）からなるが、これについてさらに合成や恒等射というデータ、それらについての制約がある。射が合成できるか。合成の情報は絵からは見えない。

頂点が一つのグラフは集合と同一視できる。対象が一つの圏はモノイドと同一視できる。

グラフの定義とモノイドの定義をまず復習しよう。

**定義 3.30** (グラフ). グラフ  $G$  とは

1. 頂点の集合  $V(G)$
2. 各頂点  $x, y \in V(G)$  に対して辺の集合  $G(x, y)$

からなるもの。

これを明示的に  $G = (V(G), \{G(x, y)\}_{x, y \in V(G) \times V(G)})$  などと書いたりもする。

**定義 3.31** (モノイド). モノイド  $M$  とは

1. 集合  $M_0$
2. 写像  $\mu : M_0 \times M_0 \rightarrow M_0$
3. 要素  $1_M \in M_0$

というデータからなる  $M = (M_0, \mu, 1_M)$  であって、次の性質を満たすもの

1. 任意の  $x, y, z \in M$  に対して  $\mu(\mu(x, y), z) = \mu(x, \mu(y, z))$  が成り立つ。
2. 任意の  $x \in M$  に対して  $\mu(x, e) = x, \mu(e, x) = x$  が成り立つ。

これを踏まえて圏の定義を与える。

**定義 3.32.** 圏  $C$  とは

1. 対象の集まり  $\text{Ob}(C)$
2. 各対象  $x, y \in \text{Ob}(C)$  に対して射の集まり  $C(x, y)$
3. 各対象  $x, y, z \in \text{Ob}(C)$  に対して射の合成と呼ばれる写像  $c_{x, y, z} : C(y, z) \times C(x, y) \rightarrow C(x, z)$
4. 各対象  $x \in \text{Ob}(C)$  に対して  $x$  上の恒等射と呼ばれる射  $1_x \in C(x, x)$

からなり、以下の条件を満たすもの。

1. 結合法則任意の  $w, x, y, z \in \text{Ob}(C)$  と

$$c_{w, x, z}(c_{x, y, z}(h, g), f) = c_{w, y, z}(h, c_{w, x, y}(g, f))$$

が成り立つ。

2. 恒等射の性質 任意の  $x, y \in \text{Ob}(C)$  と  $f \in C(x, y)$  に対し

$$c_{x,x,y}(f, 1_x) = f, c_{x,y,y}(1_y, f) = f$$

が成り立つ。

$\text{Ob}(C)$  の要素を  $C$  の対象、 $C(x, y)$  の要素を  $C$  の射とよび  $f: x \rightarrow y$  などと書く。

以前に与えた有向グラフ、モノイドの定義と改めて比較する。有向グラフは合成や恒等射というデータは持たない。有向グラフにこれらのデータを追加できるかは場合による。

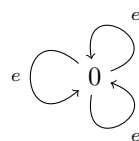
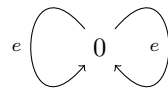
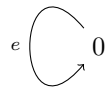
与えられた集合にモノイドの構造を定めたの同様に、与えられたグラフに圏の構造を定めたい。これが一通りとは限らないし、できるとも限らない。(存在と一意性。)

逆にいうと、圏をグラフで図に表したときに射の合成や恒等射の情報は失われる。「忘却」

自由モノイドが関手的な構成であったのと同様に、グラフから自由圏を作るという関手的な構成がある。

**例 3.33.** 有向グラフから圏を定めることができる例とできない例

0



モノイド  $(M, \mu, e)$  は対象が一つの圏であると言える。射の集まりを  $M$ 、演算が射の合成  $\mu$ 、恒等射が単位元。条件を満たすのはモノイドの定義そのもの。

**例 3.34.** モノイドの例から圏の例を作る

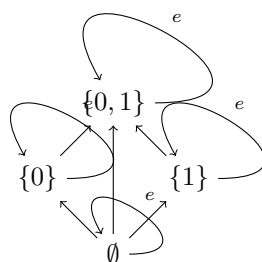
グラフと演算表のデータからなる。

以下ではこのテキストで主役となる圏の例を与える。

**例 3.35.** 集合  $X$  の冪集合  $P(X)$  に包含を射とすることで圏を作ることができる。ハッセ図の話を思い出す。対象は  $X$  の部分集合、つまり  $P(X)$  の要素である。  $\text{Ob}(C) = P(X)$  である。射は一点集合または空集合で、  $C(A, B) = \begin{cases} \{i_{A,B}\} & A \subset B \\ \emptyset & A \not\subset B \end{cases}$  として定める。射の合成は  $A, B, C$  に対して  $A \subset B$  かつ  $B \subset C$  ならば  $A \subset C$  であることから、一意的に定まる。これ以外の場合は空集合からの写像なので一意。(射の合成という写像が定義できるか? 行き先が空になるかどうかに注意する。) 恒等射は  $i_{A,A}$  である。

空集合からの写像が一意であること、空集合や全体も部分集合としたことなどで定義がうまくいく。

**例 3.36.**  $X = \{0, 1\}$  に対して上のように圏を定める。これについてグラフとして図示するとどうなるか。



この場合には、射の合成はグラフから一意に決まる。

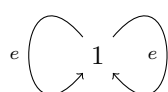
**問題 3.37.**  $X = \{0, 1, 2\}$  にたいしてその部分集合を対象とし、包含によって射を定める。これによってできる圏を図示せよ。

これ以外の例

**例 3.38.** 小さい圏の例

**例 3.39.** 空な圏

グラフとして絵に書いても合成の情報は完全には復元できないことに注意。



	$e$	$a$
$e$	$e$	$a$
$a$	$a$	$a$

	$e$	$a$
$e$	$e$	$a$
$a$	$a$	$a$

実際にはこの図は対象が一つなのでモノイドとして見ることもできる。要素が二つの集合にモノイドの構造を二通りの方法で入れることができたのを思い出そう。

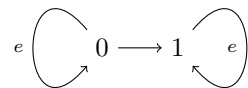
**注意 3.40.** 圏から定まるグラフと一般のグラフの違いに注意しよう。グラフの場合、二つの矢印を繋いだ矢印があるとは限らない。

**例 3.41.** 有向グラフから圏を構成する（自由圏） どんどん矢印を繋いでいく。  $\text{Ob}(C) = V(G)$  とし、  $C(x, y)$  は  $x \rightarrow x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow \cdots \rightarrow x_n \rightarrow y$  全体。（つなげることができるグラフの辺の列を射とする。文字列と同じ考え方。）  $\text{id}_x$  も付け加わる。

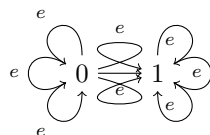
自由モノイドとの比較。

頂点が一つのグラフは集合と見ることができた。対象が一つの圏はモノイドと見るができる。

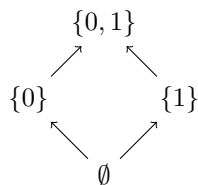
次のグラフ



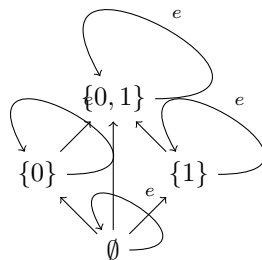
から自由圏を作る。射は  $V(0, 0) = \{a^n\}$ ,  $V(1, 1) = \{c^n\}$ ,  $V(0, 1) = \{c^n b a^m\}$ ,  $V(1, 0) = \emptyset$  になる。（書けないけど）グラフは次のような感じになる。



**問題 3.42.**  $\{0, 1\}$  の部分集合と包含関係から定まるハッセ図をグラフと思ったとき、このグラフから上の方法で自由圏を作るとどのような圏になるか



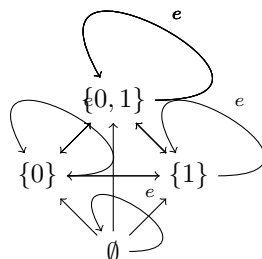
	$e$	$a$
$e$	$e$	$a$
$a$	$a$	$a$



上のように絵にかけける圏だけではなく、とても大きな圏も重要である。

### 例 3.43. 集合の圏 Set

全てを絵に書くことは不可能なので、ごく一部だけ取り出す。 $\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}$  だけについて、対象と射を有向グラフとして書いてみよう。合成の様子を理解する。



演算表を書いてみよう。

**問題 3.44.** 上の図にさらに  $\{2\}$  という集合も付け加えて全ての射を考えるとどのようなになるか。

## 3.4 グラフの圏

集合の圏を作るのと同様に、グラフを集めて圏を作る。ここまでの説明では、一つのグラフが一つの圏と関連づけられていたが、ここではたくさんのグラフたちを集めて一つの圏を作る。

圏を作るために、グラフの射をまず定める必要がある。

二つのグラフの関係を記述するものとしてグラフの射を定義する。これはグラフ準同型などとも呼ばれる。またグラフの射を用いてグラフの特徴を記述することができる。例えば頂点、辺、ループの個数を取り出す。

グラフの持っている情報は頂点と辺であり、辺はその始点と終点が定まっていた。グラフの射はこれらの情



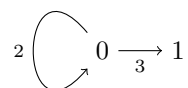
報を保つものである。つまりあるグラフの頂点があるグラフの頂点に対応させ、辺を辺に対応させ、その始点と終点を保つものである。正確に定義を与えると次のようになる。

**定義 3.45** (グラフの射).  $G, H$  をグラフとする。グラフの射  $f : G \rightarrow H$  とは

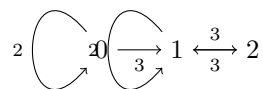
1. 頂点集合の間の写像  $f_V : V(G) \rightarrow V(H)$
2. グラフ  $G$  の各頂点  $x, y \in V(G)$  に対して辺集合の間の写像の族  $f_{x,y} : G(x, y) \rightarrow G(f(x), f(y))$

からなる写像の集まりのこと。  $x$  から  $y$  に向かう辺は  $f(x)$  から  $f(y)$  に向かう辺に対応づけられている。

**例 3.46** (グラフの射の例). グラフ  $G$  を



とし、グラフ  $H$  を



とする。

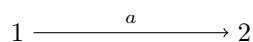
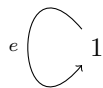
$G$  から  $H$  への射には

$H$  から  $G$  への射には

複数の辺や頂点と同じ辺や頂点に対応してもよい。

グラフの射が存在しないこともある。

**例 3.47.** グラフ  $G$  と  $H$  を以下の図で定義する。



$G \rightarrow H$  と  $H \rightarrow G$  はどのようなものがあるか。

演習問題

空グラフからのグラフの射

グラフ  $G_1, G_2, G_3$  とそれらの間の射  $f_1 : G_1 \rightarrow G_2, f_2 : G_2 \rightarrow G_3$  が与えられたとき、 $f_1$  と  $f_2$  を合成してグラフの射  $f_2 \circ f_1 : G_1 \rightarrow G_3$  を定めることができる。

**定義 3.48** (射の合成).

グラフの射には恒等射と呼ばれる特別な射がある。

**定義 3.49** (恒等射). グラフ  $G$  に対し恒等射  $1_G : G \rightarrow G$  とは以下のようにして定まるグラフの射。

1.  $(\text{id}_G)_V : V(G) \rightarrow V(G)$  を集合  $V(G)$  の恒等写像  $\text{id}_{V(G)}$  とし
2. 頂点  $x, y \in V(G)$  に対して  $(\text{id}_G)_V : V(x, y) \rightarrow V(x, y)$  を恒等写像  $\text{id}_{V(x, y)}$  とする。

グラフの射を使ってグラフの情報を取り出すことができる。

**例 3.50.** 頂点を一つ持つグラフ、

二つの頂点とそれを結ぶ一つの辺を持つグラフ

一つの頂点とその頂点を結ぶ一つの辺を持つグラフ

を考える。

グラフ  $G$  に対してこれらからの射はそれぞれ頂点集合、辺集合の直和、ループになっている辺全体という集合を表す。

このようにして、グラフに集合を対応させる操作が、あるグラフからの射の集合として**表現可能**な場合がある。

これらは全てグラフに集合を対応させる操作で、しかも**関手的**である。

**例 3.51.** 彩色とグラフの射の関係

**例 3.52.** グラフの圏 **Graph** グラフ全体を対象の集まりとし、グラフの射を射の集まりとして圏が定まる。射の合成が定まり、結合律を満たす。恒等射が定まる。

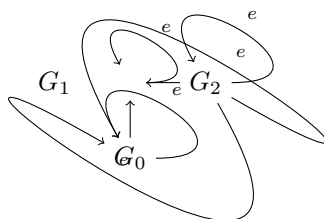
これも一部の対象だけ絵を描いてみる。それらの対象の間の射は全部描く。

0



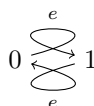
$0 \longrightarrow 1$

たちについて



この各頂点がグラフを表している。

**問題 3.53.**



も追加するとどうなるか？

グラフに対してその頂点集合を対応させる対応も、辺集合全体の直和を対応させる対応もいずれも**関手的**である。つまり、集合の写像  $f : X \rightarrow Y$  に対してグラフの射  $G(f) : G(X) \rightarrow G(Y)$  が定まる。さらに、 $G(g \circ f) = G(g) \circ G(f)$ ,  $G(\text{id}_X) = \text{id}_{G(X)}$  である。

**例 3.54.** 集合からハッセ図を作る操作は関手的だろうか。つまり、写像  $f : X \rightarrow Y$  に対してグラフの射が定まるか？  $P(X)$  の要素と  $P(Y)$  の要素を対応させる方法として、逆像  $f^{-1}$  と像  $f$  を紹介した。例えば  $X = \{0, 1\}$ ,  $Y = \{0\}$  とし、 $f : X \rightarrow Y$  を  $f(0) = f(1) = 0$  により定める。もし像を使うならば、 $P(X)$  の要素に対して  $f(\emptyset) = \emptyset$ ,  $f(\{0\}) = f(\{1\}) = f(\{0, 1\}) = \{0\}$  であるが、 $P(X)$  のハッセ図の  $\{0\}$  から  $\{1\}$  に向かう辺は  $P(Y)$  の辺に対応させることができない。逆像を使うならば、 $P(Y)$  の要素に対して  $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$ ,  $f^{-1}(\{0\}) = \{0, 1\}$  だが、 $P(Y)$  のハッセ図の  $\emptyset$  から  $\{0\}$  に向かう辺は  $P(X)$  の辺に対応させることができない。いずれもグラフの射とはならない。

これに対して、ハッセ図ではなくて包含関係全てに対応させて辺を定めることにより、いずれも関手的になる。つまり、 $P(X)$  に対応するグラフとして、頂点が  $P(X)$  の要素、辺が  $A \subset B$  のとき  $A$  から  $B$  に向かう辺、とすることによって、像をとる、逆像をとる、いずれについても関手的である。合成や恒等写像についての性質もみたまされる。

	$1_M$	$a$
$1_M$	$1_M$	$a$
$a$	$a$	$1_M$

	$1_N$	$b$
$1_N$	$1_N$	$b$
$b$	$b$	$1_N$

### 3.5 モノイドの圏

二つのモノイドを結びつけるものとしてモノイドの射がある。集合の写像はモノイドは集合、写像、要素の三つの組であった。この三つの組みをうまく保存して対応させるものがモノイドの射である。

**定義 3.55** (モノイドの射). モノイド  $(M, \mu, e), (N, \nu, f)$  について、 $M$  から  $N$  への射とは、集合の写像  $g : M \rightarrow N$  であって、以下を満たすもの

$$\begin{aligned} g(\mu(x, y)) &= \nu(g(x), g(y)) \\ g(e) &= f \end{aligned}$$

これを可換図式で書いてみよう。

$$\begin{array}{ccc} M \times M & \xrightarrow{\mu_M} & M \\ f \times f \downarrow & & \downarrow f \\ N \times N & \xrightarrow{\mu_N} & N \end{array}$$
  

$$\begin{array}{ccc} \{1_M\} & \longrightarrow & M \\ f \downarrow & & \downarrow f \\ \{1_N\} & \longrightarrow & N \end{array}$$

**例 3.56.** 加法によるモノイド  $\mathbb{N}$  からそれ自身へのモノイドの射は  $f(n) = n, f(n) = 2n$  などがある。

**問題 3.57.**  $D = \{0, 1\}$  に  $\mu(1, 1) = 0$  によりモノイドの構造を定める。このとき、モノイドの射  $D \rightarrow D, D \rightarrow \mathbb{N}, \mathbb{N} \rightarrow D$  にはどのようなものがあるか。

モノイドの射について演算票を通して理解する。

**例 3.58.**  $M$  を  $\{1_M, a\}$  で  $b \neq 1_M$  で  $a^2 = 1_M$  で定める。 $N$  を  $\{1_M, b, b^2\}$  でこの三つは相異なり  $b^3 = 1_M$  として定め、モノイドの射  $f : M \rightarrow N$  はどのようなものか？集合の写像  $f : M_0 \rightarrow N_0$  を  $f(1_M) = 1_N, f(b) = a$  として定めたとする。

まず  $M$  の演算表を書くとである。この表に書かれているものは全て  $M_0$  の要素である。これらを  $f$  で対応する  $N_0$  の要素に書き換えるととなる。 $N$  の演算表 と上の票を比較すると、 $\nu(b, b)$  のところが一致しない。このようなことが起こる場合には  $f$  はモノイドの射ではない。

	$1_N$	$b$	$b^2$
$1_N$	$1_N$	$b$	$b^2$
$b$	$b$	$b^2$	$1_N$
$b^2$	$b^2$	$1_N$	$b$

**問題 3.59.** 合成はまたモノイドの射であり、恒等写像もモノイドの射である。これを可換図式を書くことで確かめよう。

**例 3.60.** 自由モノイドの関手性

**例 3.61.** 忘却の関手性

自由モノイドからの射  $F(X) \rightarrow \text{End}(Y)$   $Y = \{0, 1\}$  を true false と思つて、 $X = \{a, b\}$  を 2 元集合として、論理和論理積否定などを写すことで射をいろいろ作れる。 $X$  が基本操作、 $F(X)$  が基本操作の列、 $\text{End}(Y)$  が実際に起こること。

射を使ってモノイドから集合を作る  $\mathbb{N}$  からの射、 $\{0, 1\}$  からの射

$X$  に対して  $\text{End}(X)$  を対応させる手続きは関手的か？

**例 3.62.** モノイドの圏 **Mon** モノイド全体を対象の集まりとし、モノイドの射を射の集まりとして圏が定まる。射の合成が定まり、結合律を満たす。恒等射が定まる。

例えば  $M_0$  を  $\{0\}$  により定まる 1 点モノイド、 $M_1$  を  $\{0, 1\}$  に  $\mu(1, 1) = 0$  により定まるモノイド、 $M_2$  を  $\mu(1, 1) = 1$  により定まるモノイドとして、これらについてこれも一部の対象だけ絵を描いてみる。

この各頂点がモノイドを表している。

**問題 3.63.**  $M_3$  を追加するとどうなるか

小学校の算数でりんごを 2 個とりんごを 3 個合わせるとりんごが 5 個になるというのと、みかんを 2 個とみかんを 3 個合わせるとみかんが 5 個になるというのと、いずれも  $2 + 3 = 5$  と抽象化でき、2, 3, 5 などがりんごの個数なのかみかんの個数なのかを気にすることがないという話をしたわけだけど、それと同じで集合の話なのかモノイドの話なのかグラフの話なのか気にせずそれらの関係性について一般に成り立つことを記述するのが圏論の考え方。

例えば二つの異なる集合とその間の二つの異なる写像、二つの異なるモノイドとその間の二つの異なる射、二つのグラフとその間の二つの異なる射、いずれも次のようなグラフと合成などの情報として理解する。



圏の圏はどうか？グラフの射やモノイドの射を考えるのと同じように、圏の射を考える。これが関手と呼ばれる概念。

## 3.6 同型

**定義 3.64.** 同型射

## 4 極限と余極限

何かの集まりを圏だと思うことによって、ものの関係性のみに注目することができる。圏は推移的な関係とその合成を抽象化した。プログラム、証明、電車の路線図。例えば同型という概念について。

この視点によって異なる現象が同じやり方で記述できる。そのような例として極限と余極限について説明していこう。

まずは、部分集合の和や共通部分と自然数の最小公倍数や最大公約数の類似について復習する。共通部分  $A \cap B$  というのは  $A$  に含まれ  $B$  にも含まれる集合のうち最も大きなものであった。また、和集合  $A \cup B$  というのは  $A$  を含み  $B$  も含む集合のうち最も小さなものであった。これを次のように述べることができる。

**命題 4.1.** 集合  $X$  の部分集合  $A, B$  に対し、以下が成り立つ。

1.  $C \subset A$  かつ  $C \subset B$  ならば  $C \subset A \cap B$  でありかつ  $A \cap B \subset A$  かつ  $A \cap B \subset B$  である。
2.  $A \subset C$  かつ  $B \subset C$  ならば  $A \cup B \subset C$  でありかつ  $A \subset A \cup B$  かつ  $B \subset A \cup B$  である。

最大公約数  $d$  というのは  $m$  の約数であり  $n$  の約数でもある自然数のうち最も大きなものであった。(0 の扱いに注意が必要。) 最小公倍数  $d$  というのは  $m$  の倍数であり  $n$  の倍数でもある自然数のうち最も小さなものであった。(0 の扱いに注意が必要。)

**命題 4.2.** 自然数  $m, n$  に対し、以下が成り立つ。

1.  $l|m$  かつ  $l|n$  ならば  $l|d$  でありかつ  $d|m$  かつ  $d|n$  である。
2.  $m|l$  かつ  $n|l$  ならば  $d|l$  でありかつ  $m|d$  かつ  $n|d$  である。

$P(X)$  の包含関係や  $\mathbb{N}$  の整除関係から圏を定めることができた。この圏においては、二つの要素の間に包含関係や整除関係があることを射の存在によって記述した。この圏の言葉で上の現象を記述し直そう。

**命題 4.3.** 集合  $X$  の部分集合と包含関係から定まる圏  $C(X)$  の対象  $A, B \in \text{Ob}(C(X))$  に対し、以下が成り立つ。 $A \cap B \in \text{Ob}(C(X))$  は射  $A \cap B \rightarrow A, A \cap B \rightarrow B$  をもち、 $C \rightarrow A$  と  $C \rightarrow B$  を持てば  $C \rightarrow A \cap B$  が存在する。 $A \cup B \in \text{Ob}(C(X))$  は射  $A \rightarrow A \cup B, B \rightarrow A \cup B$  をもち、 $A \rightarrow C$  と  $B \rightarrow C$  を持てば  $A \cup B \rightarrow C$  が存在する。

集合の直積と直和について、その特徴づけを見てみよう。

**命題 4.4.** 集合  $X, Y$  の直積集合  $X \times Y$  と射影  $p_1 : X \times Y \rightarrow X, p_2 : X \times Y \rightarrow Y$  は次を満たす。任意の集合  $T$  と写像  $f_1 : T \rightarrow X, f_2 : T \rightarrow Y$  に対し、写像  $f : T \rightarrow X \times Y$  であって次の図式が可換になる、言い換えると  $p_1 \circ f = f_1, p_2 \circ f = f_2$  を満たすものものがただ一つ存在する。

集合  $X, Y$  の直和集合  $X + Y$  と埋め込み  $j_1 : X \rightarrow X + Y, j_2 : Y \rightarrow X + Y$  は次を満たす。任意の集合  $T$  と写像  $f_1 : X \rightarrow T, f_2 : Y \rightarrow T$  に対し、写像  $f : X + Y \rightarrow T$  であって次の図式が可換になる、言い換えると  $f \circ j_1 = f_1, f \circ j_2 = f_2$  を満たすものものがただ一つ存在する。

集合の圏においては二つの対象の間に射が複数ありうるので、単に射が存在するというだけでなく、射の選択や可換性についても言及する必要がある。逆にいうと、 $P(X)$  や  $\mathbb{N}$  の場合には特に可換性については述べずとも存在から自動的に従う。

これら三つの現象は圏における和や積という概念で同じように捉えることができる。

上では条件を満たすものの中での最大最小として和集合や共通部分、最小公倍数や最大公約数を特徴付けた。条件を考えずに単に最大最小を考えることもできる。

$X$  の冪集合  $P(X)$  の包含関係について、 $\emptyset, X$  は最大と最小である。

**命題 4.5.**  $X$  を集合とし、 $P(X)$  をその冪集合とする。任意の  $A \in P(X)$  に対し  $\emptyset \subset A$  が成り立つ。任意の  $A \in P(X)$  に対し  $A \subset X$  が成り立つ。

$\mathbb{N}$  における 0 と 1 はそれぞれ整除関係についての最大と最小である。

**命題 4.6.** 任意の自然数  $n$  に対し、0 は  $n$  の倍数である。任意の自然数  $n$  に対し、 $n$  は 1 の倍数である。

これらも圏の言葉で記述すると次のようになる。

**命題 4.7.** 集合  $X$  の部分集合と包含関係から定まる圏  $C(X)$  において、任意の  $A \in \text{Ob}(C(X))$  はただ一つの射  $\emptyset \rightarrow A$  を持つ。任意の  $A \in \text{Ob}(C(X))$  はただ一つの射  $A \rightarrow X$  を持つ。

**命題 4.8.** 自然数と整除関係の圏において、任意の  $n \in \text{Ob}(\mathbb{N})$  はただ一つの射  $n \rightarrow 0$  を持つ。任意の  $n \in \text{Ob}(\mathbb{N})$  はただ一つの射  $1 \rightarrow n$  を持つ。

空集合や一点集合が集合全体の中でどのような性質を満たすか。

**命題 4.9.** Set における  $\emptyset$  と  $\{*\}$  は

これは始対象や終対象と呼ばれるもので、これも極限や余極限の特別なもの。

始対象や和、終対象や積は余極限と極限の特別なものである。この節の最後にはより一般の極限や余極限についても簡単に紹介する。

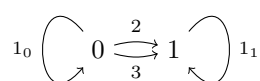
## 4.1 始対象と終対象

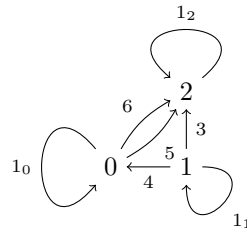
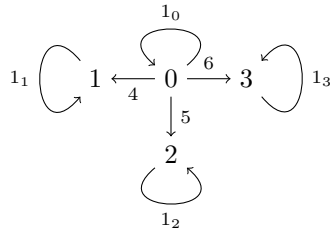
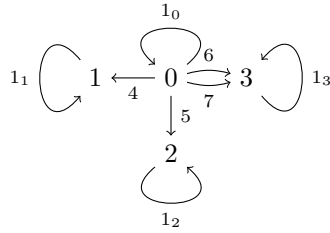
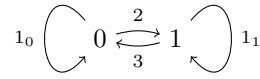
まずは極限と余極限の最も簡単な例として終対象と始対象を紹介しよう。上で述べたように、最大や最小という概念の一般化であると思うことができる。

**定義 4.10** (終対象). 圏  $C$  の対象  $x$  が**終対象**であるとは、任意の  $C$  の対象  $y$  に対して  $C(y, x)$  がただ一つの要素からなることをいう。つまり、任意の  $C$  の対象  $y$  に対して  $y$  から  $x$  への射がただ一つであることをいう。

**定義 4.11** (始対象). 圏  $C$  の対象  $x$  が**始対象**であるとは、任意の  $C$  の対象  $y$  に対して  $C(x, y)$  がただ一つの要素からなることをいう。つまり、任意の  $C$  の対象  $y$  に対して  $x$  から  $y$  への射がただ一つであることをいう。

**例 4.12.** 以下のグラフに対しては、一通りの方法で圏の構造を定めることができる。この圏について、それぞれ始対象と終対象がどれであるか述べよ。





上の例でも見たように、一般に圏  $C$  において始対象や終対象は存在するとは限らないし、存在したとしてもただ一つとは限らない。

冒頭で紹介した例をもう一度確認しよう。

**例 4.13** ( $P(X)$  の始対象と終対象). 集合  $X$  の冪集合  $P(X)$  から、前の例のようにして圏  $C(X)$  を作る。対象は  $P(X)$  の要素つまり  $X$  の部分集合とする。つまり、 $\text{Ob}(C(X)) = P(X)$  とする。また、 $C(X)(A, B)$  は包含関係  $A \subset B$  が成立するとき、またその時に限り射をただ一つ持つ。

この圏では  $\emptyset$  が始対象、 $X$  が終対象である。というのも  $\emptyset$  は全ての  $X$  の部分集合  $A$  に対して  $\emptyset \subset A$  となり、この圏の定義から  $C(\emptyset, A)$  はただ一つの要素を持つ。また  $X$  自身は全ての  $X$  の部分集合  $A$  に対して  $A \subset X$  となり、この圏の定義から  $C(A, X)$  はただ一つの要素を持つ。

また、始対象や終対象はこれ以外にないこともわかる。というのも  $A$  が始対象であれば  $A \subset \emptyset$  でなければならないため、 $A = \emptyset$  である。 $A$  が終対象であれば  $X \subset A$  でなければならないため、 $A = X$  である。

例えば  $X = \{0, 1\}$  の場合、 $C(X)$  をグラフで表示すると

となり  $\emptyset$  が始対象、 $X$  が終対象である。



**例 4.14** (自然数の整除の圏の始対象と終対象). 自然数の整除の圏では 1 が始対象、0 が終対象である。

**例 4.15** (Set の始対象と終対象). 集合の圏 **Set** において空集合  $\emptyset$  が始対象であり、要素を 1 つ持つ集合が終対象である。任意の集合  $X$  にたいし  $\emptyset$  を定義域にもつ写像  $\emptyset \rightarrow X$  はただ一つ存在していた。また、任意の集合  $X$  と任意の 1 点集合  $\{a\}$  にたいし、写像  $f: X \rightarrow \{a\}$  は全ての  $x \in X$  にたいして  $f(x) = a$  とすることで定まるただ一つの写像である。終対象はたくさんあるが、それらは全て **Set** において同型である。一方で始対象は空集合ただ一つである。というのも、写像  $X \rightarrow \emptyset$  が存在するためには  $X = \emptyset$  でなければならないためである。

**問題 4.16.** 次の **Set** の部分圏において、始対象と終対象はどうなるか？

**例 4.17** (**Mon** の始対象と終対象). モノイドの圏 **Mon** において、1 つの要素からなる集合  $\{x\}$  の上に定まる唯一のモノイド  $(\{x\}, \mu, x)$  が始対象かつ終対象である。まず始対象であることを証明する。 $(M, \mu, e)$  をモノイドとする。このとき、モノイドの射  $f: (\{x\}, \mu, x) \rightarrow (M, \mu, e)$  はまず集合の写像  $f: \{x\} \rightarrow M$  を定める必要がある。これはたくさんありうるが、さらに単位元についての条件  $f(x) = e$  を満たすことからただ一つに決まる。一方、モノイドの射  $f: (M, \mu, e) \rightarrow (\{x\}, \mu, x)$  はまず集合の写像  $f: M \rightarrow \{x\}$  を定める必要がある。これは値が  $x$  の定数写像ただ一つに決まり、さらに  $f(e) = x$  となり、 $f(\mu(m, n)) = x, \mu(f(m), f(n)) = \mu(x, x) = x$  となるためモノイドの射である。

1 点集合がたくさんあるので要素が一つのモノイドはたくさんあるが、それらは全て同型である。

**例 4.18** (**Graph** での始対象と終対象). 有向グラフの圏 **Graph** において、空グラフが始対象であり、終対象は頂点と辺がそれぞれ 1 つのグラフ  $L$  である。まず始対象について。  $f: \emptyset \rightarrow G$  はただ一つ。頂点の対応を  $\emptyset \rightarrow V(G)$  なる唯一の写像で定めたもの。

また始対象であれば空グラフである。忘却を使う！

終対象について。  $f: G \rightarrow L$  は  $V(G) \rightarrow \{*\}$  なる唯一の写像と  $V(x, y) \rightarrow \{*\}$  なる唯一の写像たちで定まるもの。逆について、これも忘却でできる？

(両側随伴ある？)

**問題 4.19.** 頂点が一つで辺を持たないグラフは圏 **Graph** における始対象でも終対象でもない。このことを説明せよ。

**解答.** 始対象でないこと。空グラフへの射は存在しない。あるいは頂点が複数あるグラフへの射は複数存在する。

終対象でないこと。頂点一つ辺一つのグラフからの射が存在しない。あるいは辺を一つ以上持つグラフからの射が存在しない。

**例 4.20.** ロジック？

**TODO 始対象や終対象と関手の関係を関手という言葉を持ち出さずにまずは述べる**

**Set, Mon, Graph** などの間には対象の対応があった。これらについて始対象や終対象の関係を調べよう。

**例 4.21.** モノイドの忘却

**例 4.22.** グラフの頂点集合

**例 4.23.** 自由モノイド。**Set** の始対象  $\emptyset$  に対してその自由モノイドは 1 点モノイドであり、これは **Mon** の始対象である。**Set** の終対象  $\{a\}$  に対してその自由モノイドは  $\{a^n\}$  であり、これは **Mon** の終対象ではない。

**例 4.24.** 離散グラフ

## 4.2 和と積

極限と余極限の次の例として和と積を紹介する。この節の冒頭に紹介したように、集合の直和と直積、部分集合の和と共通部分、自然数の最小公倍数と最大公約数などが和と積の例である。冒頭では二つの対象に対して和や積を述べたが、実際には対象をいくつ指定しても和や積は定義できる。ここでは簡単のため、二つの対象の和や積についてのみ扱う。

**定義 4.25 (和).** 圏  $C$  の対象  $x, y$  に対してその**和**とは対象  $s$  と射  $j_1 : x \rightarrow s, j_2 : y \rightarrow s$  であって、任意の対象  $t$  と射  $f_1 : x \rightarrow t, f_2 : y \rightarrow t$  に対してただ一つの射  $f : s \rightarrow t$  が存在して次の図式が可換になるものこと。つまり、 $c(f, j_1) = f_1, c(f, j_2) = f_2$  が成り立つこと。

**定義 4.26 (積).** 圏  $C$  の対象  $x, y$  に対してその**積**とは対象  $p$  と射  $p_1 : p \rightarrow x, p_2 : p \rightarrow y$  であって、任意の対象  $t$  と射  $f_1 : t \rightarrow x, f_2 : t \rightarrow y$  に対してただ一つの射  $f : t \rightarrow p$  が存在して次の図式が可換になるものこと。つまり、 $c(p_1, f) = f_1, c(p_2, f) = f_2$  が成り立つこと。

冒頭に紹介した例を再度確認しよう。

**例 4.27.** 集合  $X$  の冪集合  $P(X)$  と包含により定まる圏において、 $A, B \in P(X)$  の和集合と共通部分が圏における和と積であることを確かめよう。

$A \cap B$  は  $A$  にも  $B$  にも含まれる部分集合の中で最大のものであった。つまり、 $C \subset A$  かつ  $C \subset B$  ならば  $C \subset A \cap B$  であり、かつ  $A \cap B \subset A$  かつ  $A \cap B \subset B$  である。

**例 4.28.** 自然数の整除関係から定まる圏において、最大公約数と最小公倍数は和と積である。

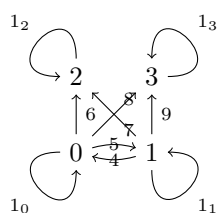
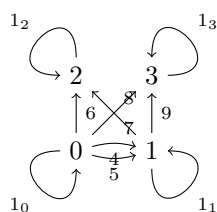
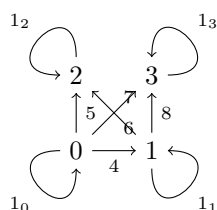
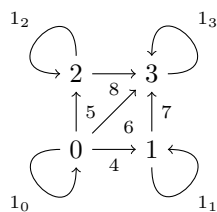
これは演習問題にする。

**例 4.29 (Set の和と積).** 集合の圏 **Set** において、集合の直積と集合の直和は集合の圏における積と和である。

$X, Y$  を集合とし、集合の直積  $X \times Y$  及び射影  $p_1 : X \times Y \rightarrow X, p_2 : X \times Y \rightarrow Y$  を考えると、これが **Set** の積になることを確かめよう。任意の集合  $T$  と写像  $f_1 : T \rightarrow X, f_2 : T \rightarrow Y$  に対し、 $f : T \rightarrow X \times Y$  を  $t \in T$  に対して  $f(t) = (f_1(t), f_2(t))$  とすることで定める。すると、

**例 4.30.** 以下のグラフに対しては、一通りの方法で圏の構造を定めることができる。この圏とその指定され

た対象について、それぞれ始対象と終対象がどれであるか述べよ。



**例 4.31 (Mon の和と積).** モノイドの圏 **Mon** における和と積について。

**TODO モノイドの積は前にやっておこう** モノイド  $(M, \mu, e)$  と  $(N, \nu, f)$  の直積とは、集合としての直積  $M \times N$  に、単位元を  $(e, f)$  で、演算を  $\mu \times \nu((m, n), (m', n')) = (\mu(m, m'), \nu(n, n'))$  で定めたもの。これがモノイドになるか確かめよう。

また  $M \times N \rightarrow M, M \times N \rightarrow N$  を  $(m, n) \mapsto m, (m, n) \mapsto n$  で定める。これらはモノイドの射になるか確かめよう。実はこれはモノイドの圏における積である。モノイドの直積  $M \times N$  はモノイドの射  $pr_1 : M \times N \rightarrow M$  と  $pr_2 : M \times N \rightarrow N$  を持つ。

モノイド  $Z$  とモノイドの射  $q_1 : Z \rightarrow M, q_2 : Z \rightarrow N$  に対し、必ずただ一つのモノイドの射  $u : Z \rightarrow M \times N$  が存在し、 $u \circ pr_1 = q_1, u \circ pr_2 = q_2$  を満たす。モノイドの和は難しい。例えば集合としての直和  $\mathbb{N} + \mathbb{N}$  に  $j_1 : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} + \mathbb{N}, j_2 : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} + \mathbb{N}$  を考えると、単位元をどう定めようともどちらかはモノイドの射ではなくなる。積の場合には集合としての直積に射影を考えたものがモノイドの射になっていたのとは対照的。

モノイドの和や積。二つの操作を同時に考えるのが積、二つの操作を続けて行うのが和。

モノイドの直積からモノイド構造を忘却すると、集合としての直積と同型になる。逆に集合の直積から自由モノイドを作るのは、それぞれの集合から自由モノイドを作りその積を取ったものと同型にならない。一方で直和についてはこれは成り立たない。このことは随伴を通して一般的に理解できる。自由モノイドと積和の関係。  $F(X \times Y) \simeq F(X) \times F(Y)$  か？  $F(X \amalg Y) \simeq F(X) \amalg F(Y)$  か？

**例 4.32 (Graph の和と積).** グラフの圏 **Graph** において和と積はどのようなものになるか？

$G_1, G_2$  に対して  $G_1 + G_2$  および  $G_1 \times G_2$  はどのようなグラフになるか。まず和について考える。 $V(G_1 + G_2)$  は集合としての直和  $V(G_1) + V(G_2)$  とし、辺集合  $(G_1 + G_2)(x, y)$  は  $x, y$  共に  $G_1$  または  $G_2$  のとき元の辺集合で、異なるグラフの頂点の場合には辺集合は空とする。これが和の条件を満たすことを確かめよう。

グラフの和や積。二つのグラフを並べて考えるのが和、立体的に考えるのが積。

**例 4.33 (ロジック).** 論理積と論理和条件の和と積。「または」と「かつ」

**TODO 関手のところに移動する** 積や和の表現可能関手としての解釈についても一言。射のペアを表現する。

### 4.3 一般の極限と余極限

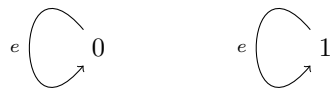
極限や余極限は圏  $C$  と図式  $D : I \rightarrow C$  から定まる。この図式を特別なものにしたのが積や和であり、その積や和を特別な圏  $C$  について考えると上の話。

圏  $C$  の対象や射を適切に選ぶことによって図式が定まるが、それにたいして極限や余極限が定義できる。圏

における図式というのは正確にいうと小圏  $I$  からの関手  $D : I \rightarrow C$  である。**TODO 関手をまだやってないので書き方を工夫する**

$I$  を以下のものにすると、始対象終対象、和や積、押し出し、引き戻しになる。 $I = \emptyset$

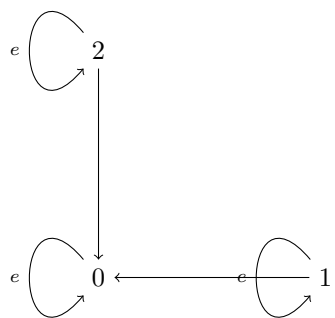
図式は二点の離散圏からの関手を考えることになる。



これと始対象の関係  $C$  の対象  $x, y$  から、次のように圏を定める。 $(t, f_1, f_2)$  を対象とし、射をこの圏の始対象が積  $(p, p_1, p_2)$  である。

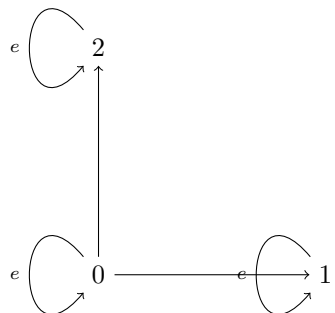
これと終対象の関係。  $C$  の対象  $x, y$  から、次のように圏を定める。 $(t, f_1, f_2)$  を対象とし、射をこの圏の終対象が積  $(p, p_1, p_2)$  である。

**例 4.34** (引き戻し). 考える図式は



グラフの圏での例

**例 4.35** (押し出し).



グラフの圏での例

積や和と同様に、引き戻しと押し出しもある圏の始対象終対象として記述することができる。引き戻しの特別なものが積であり、押し出しの特別なものが和である。

$\mathbb{N}$  に大小関係を定めてできる圏。これについての  $\lim$  と  $\operatorname{colim}$  は。  $\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n, \bigcap_{n=0}^{\infty} A_n$  とか極限っぽさは？  $p$  進数とか無限級数とか、無限小近傍とか  $\mathbb{R}$  の開区間と包含のなす圏、そこ上の関数を考えて **Set** で余極限を考える。層の茎てきな。

## 5 関手

有向グラフには有向グラフの射、モノイドにはモノイドの射、によってそれらの構造を二つの対象を比べることができた。これらの定義を復習する。同じように二つの圏を比べるために、圏の射というべき概念を導入する。

これまで関手的な構成と言っていたものは、実際には関手である。それらについて復習する。

自由モノイドと忘却離散グラフと忘却冪集合

**例 5.1.** 冪集合をとる操作も関手  $P : \mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{Set}$  になる。集合  $X$  にたいして  $P(X)$  を対応させ、写像  $f : X \rightarrow Y$  にたいして写像  $f_* : P(X) \rightarrow P(Y)$  を対応させる。

では逆像は関手にならないか？写像  $f : X \rightarrow Y$  にたいして写像  $f^* : P(Y) \rightarrow P(X)$  が対応する。射の向きが逆になっている。反変関手。  $\mathbf{Set}^{\text{op}}$

ここまでに関手的な構成として現れたものは、実際に関手となる。

**例 5.2** (自由モノイド). 集合から自由モノイドを作るという操作は関手的であった。つまり、写像  $f : X \rightarrow Y$  に対してモノイドの射  $F(f) : F(X) \rightarrow F(Y)$  が定まり、 $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$  および  $F(\text{id}_X) = \text{id}_{F(X)}$  が成り立っていた。

これにより関手  $F : \mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{Mon}$  が定まる。

**例 5.3.** 集合から有向グラフを作る二つの方法はいずれも関手的であった。

これにより関手  $\mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{Graph}$  が定まる。

**例 5.4.** モノイド  $(M, \mu, e)$  から  $\mu, e$  を忘却して集合  $M$  を対応させる。これはモノイドの圏から集合の圏への関手である。この関手を  $U : \mathbf{mod} \rightarrow \mathbf{Set}$  と表すことにしよう。つまり、対象の対応を  $U(M, \mu, e) = M$  で定め、射の対応を  $U(f) = f$  とする。実際にモノイドの射  $f : (M, \mu, e) \rightarrow (N, \nu, e')$  は集合の写像  $f : M \rightarrow N$  であって適当な条件を満たすものであった。そして、モノイドの射の合成は写像の合成、モノイドの恒等射は恒等写像であった。つまり  $U(g \circ f) = g \circ f = U(g) \circ U(f)$  であり、 $U(\text{id}_{(M, \mu, e)}) = \text{id}_{U(M)}$  である。

モノイドの和積、始対象終対象が集合のそれと一致するか？関手  $U$  が積を保つが和は保たない、終対象は保つが始対象は保たない。

モノイドの積をなぜあのように定めるか？の手がかりに随伴がある。一方で和については？

**例 5.5.** 有向グラフから構造を忘却して集合を作る頂点集合？辺集合？ループ

関手  $\mathbf{Graph} \rightarrow \mathbf{Set}$  を定める。

では、関手の定義を見ていこう。その前にグラフの射とモノイドの射の定義を復習する。

**定義 5.6** (グラフの射).  $G, H$  をグラフとする。グラフの射  $f : G \rightarrow H$  とは

1. 頂点集合の間の写像  $f_V : V(G) \rightarrow V(H)$
2. グラフ  $G$  の各頂点  $x, y \in V(G)$  に対して辺集合の間の写像の族  $f_{x,y} : G(x, y) \rightarrow G(f(x), f(y))$

からなる写像の集まりのこと。  $x$  から  $y$  に向かう辺は  $f(x)$  から  $f(y)$  に向かう辺に対応づけられている。

**定義 5.7** (モノイドの射). モノイド  $(M, \mu, e), (N, \nu, f)$  について、 $M$  から  $N$  への射とは、集合の写像  $g : M \rightarrow N$  であって、以下を満たすもの

$$\begin{aligned} g(\mu(x, y)) &= \nu(g(x), g(y)) \\ g(e) &= f \end{aligned}$$

**定義 5.8** (関手).  $C, D$  を圏とする。関手  $F : C \rightarrow D$  とは

1. 写像  $F_{\text{Ob}} : \text{Ob}(C) \rightarrow \text{Ob}(D)$
2. 各  $x, y \in \text{Ob}(C)$  に対して写像  $F_{x,y} : C(x, y) \rightarrow C(F(x), F(y))$

からなり、以下の条件を満たす

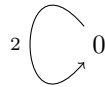
1.  $x, y, z \in \text{Ob}(C), f \in C(x, y), f' \in C(y, z)$  に対して  $F_{x,z}(c_{x,y,z}(f', f)) = d_{F_{\text{Ob}}(x), F_{\text{Ob}}(y), F_{\text{Ob}}(z)}(F_{y,z}(f'), F_{x,y}(f))$
2.  $F_{x,x}(\text{id}_x) = \text{id}_{F_{\text{Ob}}(x)}$

関手の例

**例 5.9.** 写像  $f : X \rightarrow Y$  により像をとる写像  $f_* : P(X) \rightarrow P(Y)$  と逆像をとる写像  $f^* : P(Y) \rightarrow P(X)$  が定まった。これらは部分集合と包含関係の圏  $C(X), C(Y)$  の間の関手  $f_* : C(X) \rightarrow C(Y), f^* : C(Y) \rightarrow C(X)$  を定める。つまり、 $A \subset B$  のとき  $f(A) \subset f(B)$  であり、 $C \subset D$  のとき  $f^{-1}(C) \subset f^{-1}(D)$  である。 $A \subset B$  かつ  $B \subset C$  のとき  $f(A) \subset f(C)$  である。

小さい圏の間の関手の例

**例 5.10.**

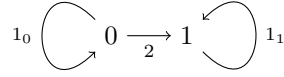


からの関手は対象を一つ選ぶこと。グラフの場合と違うことに注意しよう。

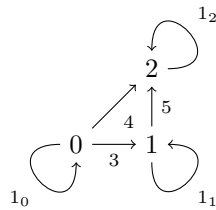


からの関手は対象のペアを一組選ぶこと。

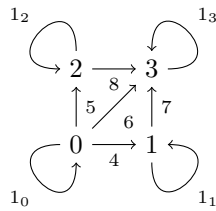




からの関手は射を一つ選ぶこと。



からの関手は合成可能な射の組を選ぶこと。三角形の可換図式。



からの関手は可換図式と思える。

対象や射（頂点や辺）の行き先が同じでもよい。

合成が保たれないとダメ。ダメな例。

これらから自然数の整除の圏への関手はどのようなものか。

**定義 5.11** (関手の合成). 圏  $C, D, E$  と関手  $F : C \rightarrow D, G : D \rightarrow E$  に対し、関手の合成  $G \circ F : C \rightarrow E$  を次のようにして定める。

**定義 5.12** (恒等関手). 圏  $C$  に対し、恒等関手  $1_C : C \rightarrow C$  とは

関手の合成は結合的であり、恒等関手は恒等的である。以上のことから、圏の圏 **Cat** を定めることができる。

**定義 5.13** (圏の圏). 対象が圏で射が関手であるような圏 **Cat**

**例 5.14** (自由圏). 有向グラフから自由圏を作る操作は関手的である。これは関手 **Graph**  $\rightarrow$  **Cat** を定める。

グラフの射  $f : G \rightarrow H$  から関手  $F(f) : F(G) \rightarrow F(H)$  が次のように定まる。まず対象の対応を  $F(f)_{\text{Ob}} : \text{Ob}(F(G)) \rightarrow \text{Ob}(F(H))$  を  $f_V : V(G) \rightarrow V(H)$  とすればよい。さらに、 $x, y \in V(G)$  に対し、 $F(f)_{x,y} : F(G)(x, y) \rightarrow F(H)(x, y)$  を射の列  $(f_0, f_1, \dots, f_n)$  に対し  $(f(f_0), f(f_1), \dots, f(f_n))$  を対応させる。これにより関手が定まる。

## TODO サイズの問題に注意

これまで圏の様子を見るためにグラフを書いていたが、これは忘却関手である。

**例 5.15** (忘却関手). 圏から合成と恒等射を忘却して有向グラフを対応させることができる。圏  $C$  のデータ  $\text{Ob}(C), C(x, y), c_{x,y,z}, \text{id}_x$  から  $c_{x,y,z}, \text{id}_x$  を忘れてグラフ  $G$  として  $V(G) = \text{Ob}(C), G(x, y) = C(x, y)$  により定める。これは関手  $U : \mathbf{Cat} \rightarrow \mathbf{Graph}$  を定める。

関手  $F : C \rightarrow D$  からグラフの射  $U(F)$  が定まる。

**例 5.16.** モノイドを圏とみなすことができた。モノイド  $(M, \mu, e)$  から圏  $C$  を  $\text{Ob}(C) = \{0\}, C(0, 0) = M, c_{0,0,0} = \mu, \text{id}_0 = e$  として定めることができる。実際、圏の条件がモノイドの条件に対応する。これはモノイドの圏  $\mathbf{Mon}$  から圏の圏  $\mathbf{Cat}$  への関手  $\mathbf{Mon} \rightarrow \mathbf{Cat}$  を定める。射の対応。モノイドの射が関手を定める。

## 6 随伴

二つの圏  $C$  と  $D$  の関係を記述する一つの方法が随伴関手を用いるものである。また、ここまで見てきたような、極限や余極限と関手の関係性にも随伴の性質が深く関係している。

二つの関手の関係として随伴がある。自由モノイド関手とモノイドから集合への忘却関手がその例である。

以前に見たように、自由モノイド  $F(X)$  からモノイド  $M$  への射は  $X$  から  $M$  への写像で一意的に定まった。これが随伴の典型的な例の一つである。

### 6.1 随伴の定義と例

**例 6.1** (自由モノイドと忘却). 集合  $X$  から定まる自由モノイド  $F(X)$  を考える。自由モノイド  $F(X)$  からモノイド  $M$  への射は自由モノイドの文字、つまり  $X$  の要素の行き先を決めることで一意的に定まった。つまり、集合  $X$  からモノイド  $M$  への写像は一意的に  $F(X) \rightarrow M$  に拡張できた。 $F(X) \rightarrow M$  はモノイドの圏における射だから、「拡張」という言葉を正確に集合の圏で述べるために、 $X \rightarrow U(M)$  は  $U(F(X)) \rightarrow U(M)$  に一意的に拡張できる。

集合  $X$  から定まる自由モノイド  $F(X)$  を与える関手と、モノイド  $M$  の忘却関手  $U$  は随伴になる。

まず自然変換  $\phi : \text{Set}(X, U(M)) \rightarrow \text{Monoids}(F(X), M)$  を次のように定める。 $f : X \rightarrow U(M)$  に対して、 $\phi(f) : F(X) \rightarrow M$  は  $F(X)$  の要素は  $X$  の要素の文字列なので、 $x_1 x_2 \cdots x_n$  のように記述でき、写像として  $\phi(f)(x_1 x_2 \cdots x_n) = f(x_1) f(x_2) \cdots f(x_n)$  と定めると、これがモノイドの射になっていることはすでに述べた。これが  $X, M$  について自然であることをみてみよう。 $f : X \rightarrow Y$  に対して  $F(f) : F(X) \rightarrow F(Y)$  が存在する。次の図式が可換になるというのが、自然であるということ。

**例 6.2** (離散グラフと頂点集合). 離散グラフを作る関手と頂点を取り出す関手は随伴である。集合  $X$  から離散グラフ  $F(X)$  を対応させる関手  $D : \mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{Graph}$  とグラフ  $G$  に対してその頂点集合を対応させる関手  $V : \mathbf{Graph} \rightarrow \mathbf{Set}$  は随伴  $D \dashv V$  である。 $X$  から  $V(G)$  への写像があれば  $D(X)$  から  $G$  へのグラフの射で  $V(D(X))$  から  $V(G)$  への写像に拡張するものを一意的に定める。

一方で集合から頂点一つのグラフを対応させる関手  $\mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{Graph}$  を  $F$  と表すことにすると、 $F$  は随伴を持たない？始対象が始対象に対応しない。終対象は終対象に対応するが、積が積に対応しない。辺全体をとるだとだめ特別な頂点をあらかじめ指定する、これはグラフの圏とは違うものになる（点付きグラフ。）極限との関係から理解できるか？

**例 6.3** (自由圏と忘却). グラフから自由圏を対応させる関手  $F : \mathbf{Graph} \rightarrow \mathbf{Cat}$  と、圏からグラフに忘却する関手  $U : \mathbf{Cat} \rightarrow \mathbf{Graph}$  は随伴？ $G$  から  $U(C)$  へのグラフの射があると、関手  $F(G) \rightarrow C$  が一意的に定まる。 $U(F(G)) \rightarrow U(C)$  に拡張。

この講座の中心的な随伴の例として次を紹介する。

**例 6.4** (像と逆像).  $f : X \rightarrow Y$  を集合の写像とし、それが定める順序集合の射  $f^{-1} : P(Y) \rightarrow P(X)$  と  $f : P(X) \rightarrow P(Y)$  は、冪集合  $P(X), P(Y)$  と包含関係から圏を定めたとき、それぞれ関手であり、これらは随伴になる。

$A \subset f^{-1}(B)$  ならば  $f^{-1}(f(A)) \subset f^{-1}(B)$  である。一般に  $A \subset f^{-1}(f(A))$  なので逆も言える。 $A \subset$

$f^{-1}(B)$  というのは  $x \in A$  ならば  $f(x) \in B$  ということである。

$A \subset f^{-1}(B)$  と  $f(A) \subset B$  は同値。

似たような式だが、 $A \subset f(B)$  と  $f^{-1}(A) \subset B$  は同値ではない。

もう少し異なる例。

**例 6.5** (カリー化). 集合  $S$  を一つ固定する。例えば  $S = \{0, 1\}$  などとして考えてよい。二つの関手  $F, G : \mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{Set}$  を  $F : X \mapsto X \times S$  と  $G : X \mapsto \mathbf{Hom}(S, X)$  で定める。射の対応も決める。 $F(f) = f \times \text{id}_S : X \times S \rightarrow Y \times S, G(f) = f_* : \mathbf{Set}(S, X) \rightarrow \mathbf{Set}(S, Y)$  これらが関手であることをちゃんと説明する。具体例。

これらは随伴である。

写像  $X \rightarrow G(F(X)) = \mathbf{Set}(S, X \times S)$  を  $x \in X$  に対して  $f_x : S \rightarrow X \times S$  を  $f_x(s) = (x, s)$  で定める。これは自然変換  $\text{id}_{\mathbf{Set}} \rightarrow GF$  を与える。

$X \rightarrow G(Z) = \mathbf{Set}(S, Z)$  に対し  $F(X) = X \times S \rightarrow Z$  が一意に定まり、 $G(F(X)) \rightarrow G(Z)$  に拡張される。 $X \rightarrow \mathbf{Set}(Y, Z)$  があると、 $X \times Y \rightarrow Z$  が定まる。さらに  $\mathbf{Set}(Y, X \times Y) \rightarrow \mathbf{Set}(Y, Z)$  に拡張される。

逆に  $X \times S \rightarrow Z$  から  $X \rightarrow \mathbf{Set}(S, Z)$  が定まるか？

別の言い方をすると自然な対応

$$\mathbf{Set}(X \times Y, Z) \simeq \mathbf{Set}(X, \mathbf{Set}(Y, Z))$$

が成立する。

これはより一般の圏における冪対象の定義になる。つまり積をとる関手の随伴として。

$P(X)$  において、 $A \mapsto A \cap S$  の随伴は？これは命題と真理集合の対応において、どのような意味を持つか？  
 $P(X)(A \cap B, C) \simeq P(X)A, C^B$  となる  $C^B$  はどのような  $X$  の部分集合か？

**例 6.6.** ロジック？  $P \rightarrow (Q \rightarrow R)$  と  $P \wedge Q \rightarrow R$  の対応。(カリー化)

随伴の定義を与える。

**定義 6.7.** コンマ圏の始対象

よく見る定義？

**定義 6.8** (随伴). 関手  $F : C \rightarrow D$  と  $G : D \rightarrow C$  が随伴であるとは、 $C$  の対象  $x$  と  $D$  の対象  $y$  について自然な対応

$$C(Fx, y) \simeq D(x, Gy)$$

があることをいう。

正確には、これらが  $C$  及び  $D$  から  $\mathbf{Set}$  への二つの関手を定めていて、その間に自然変換で一对一になるものをいう。

**例 6.9.** 絵にかける圏での例は？

$P(\{0\}), P(\{0, 1\})$  の像と逆像を絵に書いて。

始対象や終対象が随伴でかける話を絵で描いて。 $C$  を対象一つで恒等射のみの圏として、 $F : C \rightarrow D$  と  $G : D \rightarrow C$  を考える。 $G$  はすべて潰すもので、これは関手になる。

$F$  をどう定めると  $G$  の随伴になるか？

随伴はあれば一意。

## 6.2 極限と随伴の関係

さて、いよいよ目標であった事実を述べる。

**定理 6.10.** 圏  $C, D$  の間の関手  $F : C \rightarrow D, G : D \rightarrow C$  の随伴  $F \dashv G$  に対し、 $F$  は余極限を保存し、 $G$  は極限を保存する。

$F \dashv G$  のとき  $F$  が  $G$  の左随伴関手、 $G$  が  $F$  の右随伴関手である。つまり、関手  $F : C \rightarrow D$  が右随伴  $G$  を持てば余極限を保存し左随伴を持てば極限を保存する。

極限を保存あるいは余極限を保存とは、次のような事実。

$$\begin{aligned} F(\lim_I D) &\simeq \lim_I F D \\ G(\operatorname{colim}_I D) &\simeq \operatorname{colim}_I G D \end{aligned}$$

例えば積や和で言えば

$$\begin{aligned} F(X \times Y) &\simeq F(X) \times F(Y) \\ G(X + Y) &\simeq G(X) + G(Y) \end{aligned}$$

が成り立つこと。これらが必ずしも成立しないことはこれまで例で見た通り。**TODO 例を明示する**

さらに特別な極限余極限として、始対象終対象の保存が言える。つまり  $x$  が  $C$  の始対象であれば  $F(x)$  は  $D$  の始対象であり、 $y$  が  $D$  の終対象であれば  $G(y)$  は  $C$  の終対象である。

**TODO どこかで同型の定義をやらないといけない！**

この定理の例として、冒頭で紹介した像や逆像と和や共通部分の関係について理解しよう。

**例 6.11.**  $X, Y$  を集合とし、 $f : X \rightarrow Y$  を写像とする。集合  $X$  の部分集合  $A, B$  及び集合  $Y$  の部分集合  $C, D$  に対し

$$\begin{aligned} f_*(A \cap B) &\subset f_*(A) \cap f_*(B) \\ f_*(A \cup B) &= f_*(A) \cup f_*(B) \\ f^*(C \cap D) &= f^*(C) \cap f^*(D) \\ f^*(C \cup D) &= f^*(C) \cup f^*(D) \end{aligned}$$

が成り立つ。

この事実のうち

$$\begin{aligned}f(A \cup B) &= f(A) \cup f(B) \\ f^{-1}(C \cap D) &= f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)\end{aligned}$$

は上の定理の特別な場合と理解できる。つまり、 $f$  と  $f^{-1}$  が随伴  $f^{-1} \dashv f$  であることから、 $f^{-1}$  は余極限を保ち  $f$  は極限を保つ。 $\cap, \cup$  はそれぞれの圏  $P(X), P(Y)$  における極限と余極限であったから、

$$\begin{aligned}f(A \cup B) &= f(A) \cup f(B) \\ f^{-1}(C \cap D) &= f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)\end{aligned}$$

は随伴関手による余極限、極限の保存として理解できる。

では他の二つについてはどうか？はじめに見たように

$$f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$$

は一般には成立しない。したがって、像をとる関手  $f: P(X) \rightarrow P(Y)$  は一般には極限を保存せず、定理より左随伴を持たないことがわかる。また終対象を保たないことも言える。もちろん反例の存在こそが左随伴を持たないことの証明になるのだが、もう少し定義に則した形で理解しよう。 $f$  が適当な性質を満たせば随伴が存在するか？

つまり  $g: P(Y) \rightarrow P(X)$  をどう定めようとも  $g \dashv f$  とはならない。(実際には  $X, Y, f$  に依存するからこのままでは不正確。特別な  $X, Y, f$  については左随伴を持つこともある？)  $g$  は  $C \subset Y$  に対して  $g(C) \subset X$  を定め、 $C \subset D$  に対して  $g(C) \subset g(D)$  であるようなもの。これが  $f$  の左随伴であるとは、

次に

$$f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$$

について。また  $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$  つまり始対象の保存について。これが成立することは右随伴を持つための必要条件でしかないが、しかし右随伴を持つことを期待できる。では逆像が和と交換するのは？随伴があるはず？どういふものが随伴になるのか調べたい。随伴であるべき関手を条件から絞る

関手  $g: P(X) \rightarrow P(Y)$  を定めて随伴  $f^{-1} \dashv g$  となるようにしよう。(ここも本当は  $X, Y$  によらない議論をするために枠組みを変えた方がいいのだが。)

関手  $g$  は  $A \subset X$  に対し  $g(A) \subset Y$  を定め、 $A \subset B$  に対して  $g(A) \subset g(B)$  であるもの。 $g(A)$  をどう定めるか？  $C \subset Y$  に対し、 $C \subset g(A)$  であれば  $f^{-1}(C) \subset A$  であり、かつ  $g(f^{-1}(C)) \subset g(A)$  となるもの。 $C \subset g(f^{-1}(C))$  でもある。

$g$  は左随伴を持つので極限を保つ。

まず  $x \in g(A)$  であれば  $\{x\} \subset g(A)$  であるので、 $f^{-1}(x) \subset A$  である。逆にこのような  $x$  をすべて集めたものが  $g(A)$  であることを示したい。 $f^{-1}(x) \subset A$  であるとする。このとき  $g(f^{-1}(x)) \subset g(A)$  である。一方で  $\{x\} \subset g(f^{-1}(\{x\}))$  なので  $x \in g(A)$  である。つまり、 $x \in g(A)$  と  $f^{-1}(x) \subset A$  が同値であるはずで、これを用いて関手を定めればよく、実際に関手となることも示すことができる。つまり、 $A \subset B$  ならば  $g(A) \subset g(B)$  である。

随伴の別の定義を用いれば次のように考えることもできる。 $f_!(U) = \{y \in Y \mid f^{-1}(y) \subset U\}$  とする。 $V \subset f_!(U)$  と  $f^{-1}(V) \subset U$  が同値であることを示せ。

まず  $V \subset f_!(U) \Rightarrow f^{-1}(V) \subset U$  であることを証明する。 $x \in f^{-1}(V)$  とする。 $f(x) \in V \subset f_!(U)$  であり、 $f^{-1}(f(x)) \subset U$  であるから、 $f(x) \in U$  となる。逆に  $f^{-1}(V) \subset U \Rightarrow V \subset f_!(U)$  であることを証明する。 $x \in V$  とする。 $f^{-1}(x) \subset f^{-1}(V) \subset U$  より  $x \in f_!(U)$  である。

まとめると逆像は左右両方の随伴を持つことがわかる。像と和が交換する理由、逆像が随伴だから、同時に逆像が共通部分と交換することもわかる。

**例 6.12.** この話を真理集合と結びつけると量子子と随伴の関係になる？量子子の随伴としての解釈論理と圏論、とぼすとか？

**例 6.13.** モノイドの圏 **Mon** における和と積について。モノイドの和及び積と忘却関手  $U : \mathbf{Mon} \rightarrow \mathbf{Set}$  の関係を調べる。和や積について考える前に、始対象と終対象について考える。1 点モノイド  $S = \{0\}$  は **Mon** における始対象でありかつ終対象であった。 $U(S) = \{0\}$  であり、これは **Set** における終対象ではあるが始対象ではない。自由モノイド関手を  $F : \mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{Mon}$  とすると、 $F \dashv U$  であった。したがって、 $U$  は極限を保存するが余極限は保存せず、終対象は保存されるが始対象の保存はここからは従わない。実際に始対象は保存されないので、 $U$  は右極限を持たないことがわかる。

積については忘却で保存されるので、モノイドの積についてその集合は集合の積である。これは以前に見た通り。

では和はどうか？和については忘却がそれを保つことは一般論からは従わない。

一方で、自由モノイド関手についてはそれが右随伴を持つことから余極限を保存する。特に和を保つから、自由モノイドの和については和の自由モノイドとして計算できる。つまり  $F(X + Y) = F(X) + F(Y)$  である。例えば  $\mathbb{N} + \mathbb{N}$  は二文字から生成される自由モノイドであり、その忘却は集合としての直和よりは大きい。

モノイドの和は集合の直和よりは難しい。一般のモノイドの和は？

**例 6.14.** グラフの圏に関連して何かしら。単体的集合とか？