演習形式で学ぶ圏論の基礎の基礎（未完成版）

梅崎直也@unaoya（株式会社すうがくぶんか）

2021 年 9 月 5 日

> La mathématique est l'art de donner le même nom à des choses différentes.
>
> Science et Méthode, Henri Poincaré

これはまだ未完成です。完成版は講座当日9/5の朝8時に更新します。ご迷惑おかけしますがご了承ください。

目次

1　集合と写像

集合とはものの集まりのことで、別の言い方をすると何かが属するか属さないかを記述できるものである。つまり、X が集合であれば $a \in X$ であるか $a \notin X$ であるかが a に応じて決まっている。$a \in X$ であることを a は X の要素であるという。

自然数は 0 以上の整数のこととする。自然数全体の集合を $\mathbb{N}$ で表す。実数全体の集合を $\mathbb{R}$ で表す。

集合は中かっこ $\{,\}$ を用いて記述する。要素を全て列挙する方法で $\{0,1,2,3\}$ などと表す方法と、その集合に属する条件を用いて表す方法 $\{n \in \mathbb{N} \mid n \leq 3\}$ がある。よく $\{f(x) \mid x \in X\}$ という形の記法が用いられるが、これは略記である。例えば 0 以上の偶数全体の集合 $\{2n \mid n \in \mathbb{N}\}$ は $\{n \in \mathbb{N} \mid$ ある $m \in \mathbb{N}$ が存在して $n = 2m$ となる。$\}$ の略記である。

写像は二つの集合の要素同士の対応である。これは計算方法や手続きではないことに注意しよう。X の要素を Y の要素に対応させる写像を $f : X \to Y$ と表す。

1.1　冪集合

集合 X の要素のうち一部分を集めてできる集合が X の部分集合である。一部分とはいっても、実際には X 自身も X の部分集合であり、要素を一つも持たない集合である空集合 $\emptyset$ も X の部分集合である。

定義 1.1 (部分集合)**.** 集合 Y が集合 X の**部分集合**であるとは、任意の x について「$x \in Y$ ならば $x \in X$」が成り立つことをいう。このことを $Y \subset X$ と表す。

例 1.2. $X = \{0,1\}$ であれば、X の部分集合は $\emptyset, \{0\}, \{1\}, X$ の合計 4 つ。

X の部分集合を全て集めた集合が存在する。これを X の冪集合という。

定義 1.3 (冪集合)**.** 集合 X に対して、その部分集合を全て集めた集合を**冪集合**といい $P(X)$ と書く。つまり、$P(X) = \{x \mid x \subset X\}$ である。

例 1.4. $X = \{0,1\}$ であれば、$P(X) = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, X\}$ である。

問題 1.5. $X = \{0,1,2\}$ のとき $P(X)$ はどのような集合か。

解答. $P(X) = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0,1\}, \{0,2\}, \{1,2\}, X\}$

集合 X の部分集合が与えられたとき、そこから新しい部分集合を作る操作がある。

定義 1.6 (和集合)**.** 集合 X の部分集合 A, B に対してその**和集合** $A \cup B$ とは $\{x \in X \mid x \in A$ または $x \in B\}$ により定まる集合のこと。

例 1.7. $X = \{0,1,2,3\}, A = \{0,1\}, B = \{1,2\}$ に対し、$A \cup B = \{0,1,2\}$ である。

和集合は次のように特徴付けることができる。集合 X の部分集合 A, B に対して、$A \cup B$ は A も B も含む X の部分集合の中で包含関係について最小のものである。

同じことを少し言い換えると次のようになる。

命題 1.8. 集合 X と $A, B \in P(X)$ に対して、

1. $A \subset A \cup B$ かつ $B \subset A \cup B$ である。
2. 任意の $T \in P(X)$ に対して「$A \subset T$ かつ $B \subset T$」ならば $A \cup B \subset T$ である。

例 1.9. $X = \{0,1,2,3\}, A = \{0,1\}, B = \{1,2\}$ とする。$T \subset X$ であって $A \subset T$ かつ $B \subset T$ を満たすものは $\{0,1,2\}$ と $\{0,1,2,3\}$ の二つあり、$A \cup B = \{0,1,2\}$ であった。

定義 1.10 (共通部分)**.** 集合 X の部分集合 A, B にたいして、その**共通部分** $A \cap B$ とは $\{x \in X \mid x \in A$ かつ $x \in B\}$ により定まる集合のこと。

例 1.11. $X = \{0,1,2,3\}, A = \{0,1,2\}, B = \{1,2,3\}$ に対し、$A \cap B = \{1,2\}$ である。

この集合は次のように特徴付けることができる。

命題 1.12. 集合 X の部分集合 A, B に対して、$A \cap B$ は A にも B にも含まれる X の部分集合の中で包含関係について最大のものである。

つまり、$A, B \in P(X)$ に対して、$A \cap B \subset A$ かつ $A \cap B \subset B$ であり、任意の $T \subset X$ に対して $T \subset A$ かつ $T \subset B$ ならば $T \subset A \cap B$ である。

例 1.13. $X = \{0,1,2,3\}, A = \{0,1,2\}, B = \{1,2,3\}$ とする。$T \subset X$ であって $T \subset A$ かつ $T \subset B$ を満たすものは $\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}$ であり、$A \cap B = \{1,2\}$ であった。

集合 X の冪集合 $P(X)$ においては次も成立する。

命題 1.14. $X \in P(X)$ は次を満たす。任意の $T \in P(X)$ に対し $T \subset X$ が成り立つ。

$\emptyset \in P(X)$ は次を満たす。任意の $T \in P(X)$ に対し $\emptyset \subset T$ が成り立つ。

つまり、X は $P(X)$ の中で包含関係について最大であり、$\emptyset$ は包含関係について最小である。

この特徴づけを定義に採用することができる。ただし、このような定義の仕方には注意が必要。「最も」みたいなやつはあるとは限らない。一意性も保証するとは限らない。定義が存在を保証するとは限らない。これが共通部分です、と一つ作るのではなく、こういう性質を満たすものを共通部分と言えます、という定義。実際に作ったものがそれを満たすか？そういうものしかないか？などは別途証明が必要。とはとやると一意性？共通部分であるとは、という性質で述べると一意性は不要？

これは自然数における次の事実と似ている。最大公約数と最小公倍数。1 はあらゆる自然数の約数である。0 はあらゆる自然数の倍数である。a と b の最小公倍数 l は a の倍数かつ b の倍数であり、かつ t が a の倍数かつ b の倍数であれば t は l の倍数である。a と b の最大公約数 g は a の約数かつ b の約数であり、かつ t が a の約数かつ b の約数であれば t は g の約数である。

これらはのちに圏における始対象、終対象、和、積などの概念として捉えられることを説明する。

1.2 写像

次に写像について簡単に説明する。写像というのは関数とほとんど同じと思ってよく、数に関係する場合に関数と呼ぶことが多い。関数というと何らかの変換規則みたいなイメージを持つかもしれないが、数学では二つの集合の要素たちについての単なる対応づけでしかない。対応規則を数式や文章で記述できるかどうか、あ

るいはその計算手続きなどは問題にならない。

集合 X, Y の間の写像 $f: X \to Y$ とは定義域と行き先、要素の対応を区別する。写像の一致はすべての要素の対応が一致すれば一致。

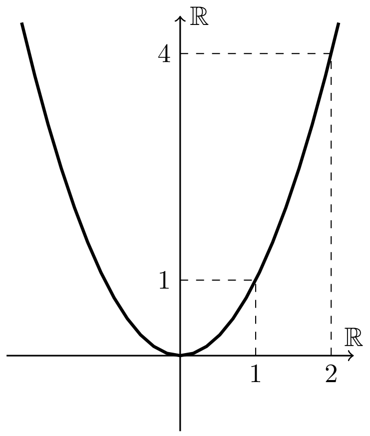
集合 X から Y への写像 f とは、全ての X の要素に対してある Y の要素を定める対応のことをいう。f が X から Y への写像であることを $f\colon X \to Y$ と表す。また要素の対応を $x \mapsto y$ のように表したり、$y = f(x)$ のように表したりする。

関数のグラフを書いたの同じように、写像もグラフを定めることができる。X や Y が小さければ次のような表を書いて理解できる。例えば $X = \{0, 1, 2\}, Y = \{3, 4\}$ として $f: X \to Y$ を $f(0) = 4, f(1) = 3, f(2) = 4$ として定めたものは、

	0	1	2
3		○	
4	○		○

中学や高校で習ったように、$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ であればそのグラフを xy 平面に書くことができる。

例 1.15. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を $f(x) = x^2$ で定める。このグラフは次のようになる。



例 1.16. $A = \{a, b, c\}, B = \{d, e\}$ として $A \to B$ を定義しよう。例えば一つのやり方として $f(a) = d, f(b) = e, f(c) = e$ とすればよい。これを

$$f = \begin{cases} a \mapsto d \\ b \mapsto e \\ c \mapsto e \end{cases}$$

と書くことにしよう。

問題 1.17. 上の集合 $A = \{a, b, c\}, B = \{d, e\}$ に対して A から B への写像は上の f 以外にはどのようなものがあるか？全て列挙せよ。

問題 1.18. 上の集合 $A = \{a, b, c\}, B = \{d, e\}$ に加え $C = \{x, y, z\}$ を考える。A から C への写像、B から C への写像を全て列挙せよ。

例 1.19. どのような集合 X に対しても、空集合からの写像 $\emptyset \to X$ はただ一つだけ存在する。
空集合への写像 $f : X \to \emptyset$ は X が空集合でない限り存在しない。

問題 1.20. 一点集合 $S = \{*\}$ を考える。集合 X から S への写像にはどのようなものがあるか？また S から集合 X への写像にはどのようなものがあるか？
例えば $X = A = \{a, b, c\}, X = C = \{d, e\}$ などの場合にどのようになるか考えよう。

例 1.21. 自然数 n に対して、その次の自然数を対応させることにより写像 $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ を定める。つまり

$$s(n) = n + 1$$

あるいは

$$s : n \mapsto n + 1$$

と定める。

例 1.22. 自然数 n を 3 倍するという操作により写像 $(3\times) : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ を定める。つまり

$$(3\times)(n) = 3n$$

あるいは

$$(3\times) : n \mapsto 3n$$

と定める。

写像を使って集合の情報を取り出すことができる。

例 1.23. $\{0, 1\}$ への写像は部分集合を考えるのと同じ。

次に写像を用いて部分集合の間の対応を二つ定める。それぞれ像と逆像と呼ばれるもので、像は関数の値域を求めること、逆像は不等式を解くことに相当する。

定義 1.24 (像と逆像)**.** 集合 X, Y と写像 $f : X \to Y$ に対して以下を定義する。部分集合 $U \subset X$ の f による像とは $f_*(U) = \{f(x) \mid x \in U\} = \{y \in Y \mid \exists x \in X(y = f(x))\} \subset Y$ のこと。部分集合 $V \subset Y$ の f による逆像とは $f^*(V) = \{x \in X \mid f(x) \in V\} \subset X$ のこと。

像や逆像には通常 f, f^{-1} の記号が使われるが、これは紛らわしいので今回は f_*, f^* を用いることにする。

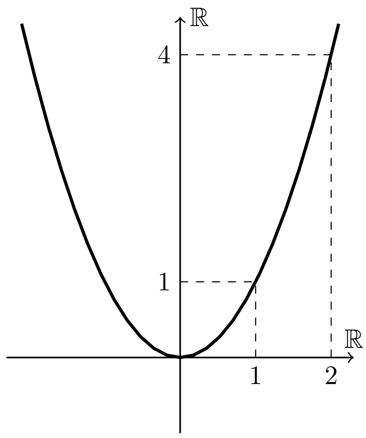
例 1.25. $X = \{0, 1, 2\}, Y = \{3, 4\}$ とする。
$f : X \to Y$ を $f(0) = f(1) = 3, f(2) = 4$ により定める。$f_*(\{0, 1\}), f_*(\{0, 2\}), f^*(\{3\}), f^*(\{4\})$ を求めよ。

	0	1	2
3	○	○	
4			○

$g : Y \to X$ を $f(3) = g(4) = 0$ により定める。$g_*(\{3\}), g_*(\{3, 4\}), g^*(\{0\}), g^*(\{1, 2\})$ を求めよ。

	3	4
0	○	○
1		
2		

例 1.26. X, Y を共に実数全体の集合 $\mathbb{R}$ とし、$f : X \to Y$ を $f(x) = x^2$ により定める。



$f_*(\{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 2\}), f_*(\{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 1\}), f^*(\{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 2\}), f^*(\{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 1\})$ を求めよ。

二つの写像を**合成**することで新しく写像を定めることができる。

定義 1.27 (写像の合成)**.** X, Y, Z を集合とし、$f : X \to Y, g : Y \to Z$ をそれらの間の写像とする。このとき、f と g の合成写像 $g \circ f : X \to Z$ とは、$x \in X$ に対して $g(f(x))$ を対応させることで定まる写像。

集合 X に対して定義域と行き先が X であるような写像のうちで特別なものがある。

定義 1.28 (恒等写像)**.** X を集合とする。恒等写像 $\mathrm{id}_X : X \to X$ とは、$\mathrm{id}_X(x) = x$ で定まる写像のこと。

1. X の要素 x から写像 f を使って $f(x) \in Y$ を対応させる。
2. 次にこの Y の要素 $f(x)$ から写像 g を使って $g(f(x)) \in Z$ を対応させる。

このようにして定義される写像が f と g の合成写像 $g \circ f$ である。

定義 1.29 (合成写像)**.** 写像 $f : X \to Y$ と $g : Y \to Z$ の合成写像 $g \circ f : X \to Z$ とは、次で定まる X から Z への写像。

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

この式の読み方は $g \circ f$ が新しい写像の名前で、それを計算する手続きが $g(f(x))$ で与えられるということ。

例 1.30. 上の $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, s(n) = n + 1$ を合成して $s \circ s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ を定める。これは

$$(s \circ s)(n) = s(s(n)) = s(n + 1) = (n + 1) + 1 = n + 1 + 1 = n + 2$$

となり、自然数 n に対してその次の次の自然数を対応させる写像。

問題 1.31. $s \circ s \circ s$ はどのような写像か？

また $p \circ (3\times), (3\times) \circ p$ はそれぞれどのような写像か？

例 1.32. 集合 $A = \{a, b, c\}, B = \{d, e\}, C = \{x, y, z\}$ を考える。適当に写像 $f : A \to B$ と $g : B \to C$、$h : C \to A$ を定め、それらの合成を計算しよう。例えば

$$f = \begin{cases} a \mapsto d \\ b \mapsto e \\ c \mapsto e, \end{cases} \quad g = \begin{cases} d \mapsto x \\ e \mapsto z, \end{cases} \quad h = \begin{cases} x \mapsto a \\ y \mapsto b \\ z \mapsto a \end{cases}$$

とする。

このとき、 $g \circ f : A \to C$ は $a \mapsto d \mapsto x, b \mapsto e \mapsto z, c \mapsto e \mapsto z$ で定まる写像、つまり

$$g \circ f = \begin{cases} a \mapsto x \\ b \mapsto z \\ c \mapsto z \end{cases}$$

である。

問題 1.33. 上の集合 A, B, C と f, g, h について、$h \circ g, h \circ (g \circ f), (h \circ g) \circ f$ を計算せよ。

例 1.34. 集合 W, X, Y, Z とそれらの間の写像 $f : W \to X, g : X \to Y, h : Y \to Z$ について、$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$ であることを証明しよう。

写像の等式を示すためには任意の $x \in X$ に対して、

$$(h \circ (g \circ f))(x) = ((h \circ g) \circ f)(x)$$

であることを示せばよい。左辺は

$$(h \circ (g \circ f))(x) = h((g \circ f)(x)) = h(g(f(x)))$$

であり、右辺は

$$((h \circ g) \circ f)(x) = (h \circ g)(f(x)) = h(g(f(x)))$$

であるのでこれらは一致する。

問題 1.35. 恒等写像に対して $\mathrm{id}_X \circ f = f, f \circ \mathrm{id}_X = f$ であることを証明しよう。

以上の f^*, f_* はそれぞれ冪集合の間の写像 $f_* : P(X) \to P(Y), f^* : P(Y) \to P(X)$ を定めている。まとめると、集合 X から集合 $P(X)$ を定め、写像 $f : X \to Y$ から $f_* : P(X) \to P(Y), f^* : P(Y) \to P(X)$ を対応させることができる。この対応は**関手的**である。つまり、

$$\begin{aligned} f^{-1}(g^{-1}(W)) &= (g \circ f)^{-1}(W) \\ \mathrm{id}_X^{-1}(U) &= U \\ g(f(U)) &= (g \circ f)(U) \\ \mathrm{id}_X(U) &= U \end{aligned}$$

を満たす。

さて、f_*, f^* と $\cap, \cup$ の関係について調べよう。

命題 1.36. X, Y を集合とし、$f : X \to Y$ を写像とする。集合 X の部分集合 A, B 及び集合 Y の部分集合 C, D に対し

$$
\begin{aligned}
f_*(A \cap B) &\subset f_*(A) \cap f_*(B) \\
f_*(A \cup B) &= f_*(A) \cup f_*(B) \\
f^*(C \cap D) &= f^*(C) \cap f^*(D) \\
f^*(C \cup D) &= f^*(C) \cup f^*(D)
\end{aligned}
$$

が成り立つ。

集合の基本的な性質を使って証明できることを確認する。

二次関数の例で成立と不成立を確認する。

簡単な場合に帰着できるか？ということを考えたい。それを保証する。

この式と随伴の関係。

随伴について簡単に。TODO ここを定義に合わせた述べ方にする。普遍性の記述と近いように書く。最大とか最小とか使えると良い。

問題 1.37. 集合 X, Y の間の写像 $f : X \to Y$ に対し、$U \subset f^{-1}(V)$ と $f(U) \subset V$ が同値であることを示せ。

解答 1.38. まず $U \subset f^{-1}(V) \Rightarrow f(U) \subset V$ であることを証明する。$x \in f(U)$ とする。このときある $y \in U$ が存在して $x = f(y)$ であり、仮定から $y \in U \subset f^{-1}(V)$ であるから $f(y) \in V$ である。したがって $x \in V$ となる。逆に $f(U) \subset V \Rightarrow U \subset f^{-1}(V)$ であることを証明する。$x \in U$ とする。$f(x) \in f(U) \subset V$ であるから $x \in f^{-1}(V)$ である。

これにより、f^{-1} や f の定義を書き換えることができる。(どちらかを定義した上でもう片方を定義する。)

例えば像 f のはじめのような定義を与えた上で f^{-1} の定義を次のように与える。$V \subset Y$ に対し $f^{-1}(V) \subset X$ を定義にはなっている。(部分集合を定めることは間違いない。一意性がなくても定義と言える？）このようなものが存在するか、一意的かは証明が必要。

問題 1.39. 逆に f^{-1} の定義をはじめのように与えた上で f の定義を

1.3 直積と直和

集合の直和と直積について。部分集合に対する和集合や共通部分とは異なる。

xy 座標や 2 次元のテーブルが直積として想定するもの。

要素のペア（あるいは列、族）を一つの要素であるかのように記述できる。

二つの集合から、その直積という新しい集合を作る。これは、与えられた二つの集合から一つずつ要素を取り出してペアを作り、それを全て集めた集合である。

	e	a
e	e	a
a	a	a

定義 1.40 (直積)**.** 集合 X, Y の直積とは X の要素と Y の要素を一つずつ並べたペアを全て集めた集合

$$X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X, y \in Y\}$$

例 1.41. $A = \{a, b, c\}, B = \{d, e\}, C = \{x, y, z\}$ のとき、$A \times B = \{(a, d), (a, e), (b, d), (b, e), (c, d), (c, e)\}$ である。

問題 1.42. 上の集合 $A = \{a, b, c\}, B = \{d, e\}, C = \{x, y, z\}$ について、$B \times A, A \times A, B \times C, (A \times B) \times C, A \times (B \times C)$ はそれぞれどのような集合か。

例 1.43.

$$\mathbb{N} \times \mathbb{N} = \{(n, m) \mid n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N}\} = \{(0,0), (0,1), (0,2), \ldots, (1,0), (1,1), (2,1), \ldots, (2,0), (2,1), (2,2), \ldots\}$$

二つの集合から、その直和という新しい集合を作る。これは、与えられた二つの集合の要素を全て集めた集合である。二つの集合の和集合 $\cup$ とは違うことに注意しよう。

定義 1.44 (直和)**.** 集合 X, Y の直和とは X の要素と Y の要素を全て集めた集合。

$$X \amalg Y = \{x \mid x \in X \text{ または } x \in Y\}$$

ただし元々 X に入っていたものと Y に入っていたものは区別する。この区別を明確にするため、

$$X \amalg Y = \{(x, 0) \text{ または } (y, 1) \mid x \in X, y \in Y\}$$

のようにも書く。

例 1.45. $A = \{a, b, c\}, B = \{d, e\}, C = \{x, y, z\}$ のとき、$A \amalg B = \{a, b, c, d, e\}$ である。

問題 1.46. 上の集合 $A = \{a, b, c\}, B = \{d, e\}, C = \{x, y, z\}$ について、$B \amalg A, A \amalg A, B \amalg C, (A \amalg B) \amalg C, A \amalg (B \amalg C)$ はそれぞれどのような集合か。

例 1.47.

$$\mathbb{N} \amalg \mathbb{N} = \{(n, 0) \text{ または } (m, 1) \mid n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N}\} = \{(0,0), (1,0), (2,0), \ldots, (0,1), (1,1), (2,1), \ldots\}$$

1.4 写像の合成と可換図式

写像の合成について、演算表、写像の合成も写像だよ

写像の合成も足し算や掛け算のようなもので、簡単な場合には次のような表にまとめることができる。

写像の集合。

いくつかの集合とそれらの間の写像を図で表す。その合成についての等式が成立することを図式が可換であるよいう。

可換な例と可換でない例。

可換図式というのはいくつかの写像の合成の等式を可視化したものである。

1.4.1 Set

二つの集合から、その間の写像全てを集めた集合を作る。

定義 1.48. 集合 X から集合 Y への写像全体の集合を $\mathbf{Set}(X,Y)$ とかく。これを Y^X とも書く。特に $\mathbf{Set}(X,X)=\mathrm{End}(X)$ と書く。

例 1.49. $A=\{a,b,c\},B=\{d,e\},C=\{x,y,z\}$ のとき、$\mathbf{Set}(A,B)=\{f_1,f_2,f_3,f_4,f_5,f_6,f_7,f_8\}$ である。ここで

$$
f_1=\begin{cases}a\mapsto d\\ b\mapsto d\\ c\mapsto d\end{cases}\quad
f_2=\begin{cases}a\mapsto d\\ b\mapsto d\\ c\mapsto e\end{cases}\quad
f_3=\begin{cases}a\mapsto d\\ b\mapsto e\\ c\mapsto d\end{cases}\quad
f_4=\begin{cases}a\mapsto d\\ b\mapsto e\\ c\mapsto e\end{cases}
$$
$$
f_5=\begin{cases}a\mapsto e\\ b\mapsto d\\ c\mapsto d\end{cases}\quad
f_6=\begin{cases}a\mapsto e\\ b\mapsto d\\ c\mapsto e\end{cases}\quad
f_7=\begin{cases}a\mapsto e\\ b\mapsto e\\ c\mapsto d\end{cases}\quad
f_8=\begin{cases}a\mapsto e\\ b\mapsto e\\ c\mapsto e\end{cases}
$$

である。

問題 1.50. 上の集合 $A=\{a,b\},B=\{c,d\},C=\{x,y,z\}$ について、$\mathbf{Set}(B,C),\mathbf{Set}(A,C),\mathbf{Set}(A,\mathbf{Set}(B,C))$ はそれぞれどのような集合か。

写像の合成によって、写像 $\mathbf{Set}(A,B)\times\mathbf{Set}(B,C)\to\mathbf{Set}(A,C)$ が定義される。

例 1.51.

$$\mathbf{Set}(\mathbb{N},\mathbb{N})=\{(a_n)\mid n\in\mathbb{N},a_n\in\mathbb{N}\}=\{(0,0,0,0,\ldots),(1,0,1,1,\ldots),(0,1,2,3,\ldots),\ldots\}$$

1.5 空集合

要素を一つも持たない集合がただ一つ存在し、それを空集合とよび $\emptyset$ で表す。

これはつまらないもののようだが意外と重要で、

0 の発見

背理法

空集合の扱いは慣れていないと難しいので改めてまとめる。

$\emptyset$ と X の直積は $\emptyset$ である。

$\emptyset$ から X への写像はただ一つ存在する。X から $\emptyset$ への写像は $X=\emptyset$ のときはただ一つ、$X\neq\emptyset$ の時は存在しない。これらは写像の定義から導くことができる。

$\emptyset$ は如何なる集合 X に対してもその部分集合である。つまり $\emptyset\subset X$ が成り立つ。

これは $\forall x(x\in X\to P(x))$ が $X=\emptyset$ のとき真である、さらにいうと $Q\to P$ が Q が偽なとき真であるという事実に基づく。