演習形式で学ぶ圏論の基礎の基礎

2021/9/5.

梅崎直也（株式会社すうがくぶんか）

集合：ものの集まり.

X が集合　$x \in X$ か $x \notin X$
が決まっている.
属している　属してない

x が X の要素.

$\mathbb{N}$ ：自然数全体の集合
0以上

$\mathbb{R}$ ：実数全体の集合

ϕ ：空集合（要素をひとつももたない）

どんな x でも $x \notin \phi$

X の部分集合

X の要素のある部分で
集めてできる集合

$X = \{0, 1\}$ であれば

$\phi, \{0\}, \{1\}, X = \{0, 1\}$

の4つが部分集合

$P(X) = \{\phi, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}\}$

を X のべき集合という.
部分集合すべてを要素にもつ

$X = \{0, 1, 2\}$ なら

$P(X) = \{\phi, \{0\}, \{1\}, \{2\},$
$\{0,1\}, \{0,2\}, \{1,2\}, X\}$

である.

$X \in P(X)$, $\phi \in P(X)$,

$\{0\} \in P(X)$ となっている

$A, B \in P(X)$ に対し,

和集合 $A \cup B \in P(X)$

共通部分 $A \cap B \in P(X)$

を定めることができる.

例 2.8　$X = \{0, 1, 2, 3\}$

$A = \{0, 1\}$, $B = \{1, 2\} \in P(X)$

に対し, $A \cup B = \{0, 1, 2\} \in P(X)$

・$A \subset A \cup B$

・$B \subset A \cup B$

・$T \in P(X)$ が $A \subset T$ かつ $B \subset T$

ならば $A \cup B \subset T$

例2.10 $X=\{0,1,2,3\}$

$A=\{0,1\},\ B=\{1,2\}\in P(X)$

$T\in P(X)$ が $A\subset T$ かつ $B\subset T$ を

みたす → $T=\{0,1,2\},\ \{0,1,2,3\}$

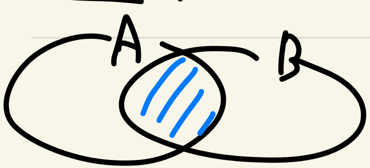
$A\cup B=\{0,1,2\}$ は ↑ ↗ の部分.

例2.12 $X=\{0,1,2,3\}$

$A=\{0,1,2\},\ B=\{1,2,3\}$ とするとき,

$A\cap B=\{1,2\}$.

性質. ・$A\cap B\subset A$ かつ $A\cap B\subset B$



・$T\in P(X)$ が $T\subset A$ かつ $T\subset B$ ならば $T\subset A\cap B$ となる

例2.14 $X=\{0,1,2,3\}$

$A=\{0,1,2\},\ B=\{1,2,3\}$ とするとき,

$T\in P(X)$ で $T\subset A$ かつ $T\subset B$ となるものは

$T=\phi,\ \{1\},\ \{2\},\ \{1,2\}$ の4つ.

↑ $A\cap B$

和集合 の「別定義」

定義 2.16 X : 集合, $A, B \in P(X)$

$\boxed{C} \in P(X)$ が $\boxed{A \text{ と } B \text{ の和集合である}}$

とは, 次をみたすこと.

1. $A \subset \boxed{C}$ かつ $B \subset \boxed{C}$
2. すべての $T \in P(X)$ に対し,

   $A \subset T$ かつ $B \subset T$ ならば $\boxed{C} \subset T$

AもBも含む集合の中で最小.

存在するか? 一通りか?

C が和 $\Longleftrightarrow C = A \cup B$ と示せる.

あとで圏の余極限の定義に一般化される.

$P(X)$ の中で包含関係について

$X \in P(X)$ は最大, $\phi \in P(X)$ は最小.

2.15 すべての $T \in P(X)$ に対しても $T \subset X$

すべての $T \in P(X)$ に対しても $\phi \subset T$

自然数の整除関係

・n が m の約数

$\Updownarrow$

・A が B の部分集合

4と6の最小公倍数 $\boxed{12}$

・$\boxed{12}$は4の倍数かつ$\boxed{12}$は6の倍数

・すべての $n \in \mathbb{N}$ に対し

n が4の倍数かつ n が6の倍数

ならば n は$\boxed{12}$の倍数

$C = A \cup B$

1. $A \subset \boxed{C}$ かつ $B \subset \boxed{C}$
2. すべての $T \in P(X)$ に対し、

$A \subset T$ かつ $B \subset T$ ならば $\boxed{C} \subset T$

? 共通の一般化

圏の言葉で書ける.

写像 $f: X \to Y$ 　定義域　行き先

集合Xの各要素に集合Yの要素が1つ定まっているもの。

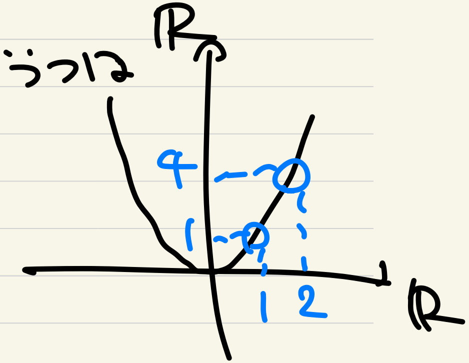
$x \in X$ に対応するYの要素 $f(x)$ とかく。

例1) $X=\{0,1,2\}$, $Y=\{3,4\}$.

$f: X \to Y$ を $f(0)=4$, $f(1)=3$, $f(2)=4$ で定める。

Y \ X	0	1	2
3		○	
4	○		○

例2.20 $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を $f(x)=x^2$ で定めると、グラフは



問2.21 $\{0,1,2\}$から$\{3,4\}$への写像をすべて求めよ。

	0	1	2
3	O	O	O
4			

	0	1	2
3		O	O
4	O		

	0	1	2
3	O		O
4		O	

	0	1	2
3			O
4	O	O	

	0	1	2
3	O	O	
4			O

	0	1	2
3		O	
4	O		O

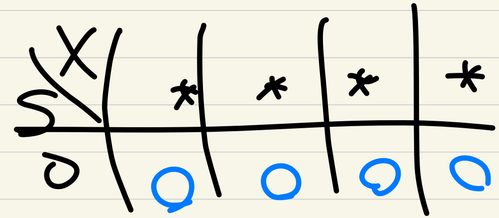
	0	1	2
3	O		
4		O	O

	0	1	2
3			
4	O	O	O

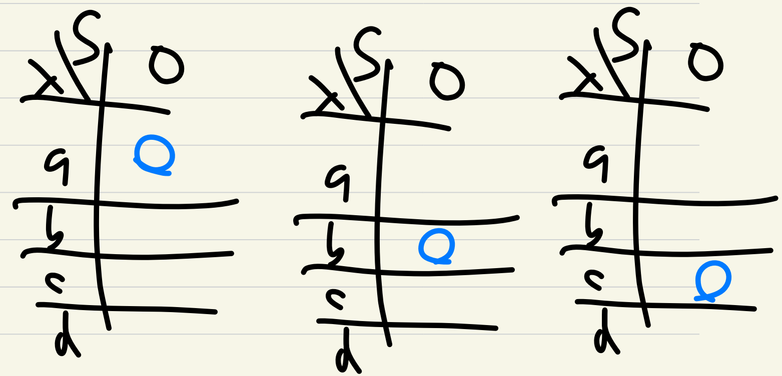
11:12〜

$S=\{0\}$ とする.

・XからSへの写像はただ1つ
すべての $x\in X$, $f(x)=0$



・SからXへの写像は
$f(0)$ をえらぶ = Xの要素を1つえらぶ
ことにおうじて1つきまる.



$f:\phi\to X$ はただ1つ存在, $f:X\to\phi$ は
$X\neq\phi$ なら存在しない
$X=\phi$ ならただ1つ

写像の合成

$f: X \to Y$, $g: Y \to Z$ に対し

$g \circ f: X \to Z$ を,

$(g \circ f)(x) = g(f(x))$ で定める.

重要な性質.

結合律: $f: W \to X$, $g: X \to Y$

$h: Y \to Z$ に対し,

$$\boxed{h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f}$$

← どこまでいけば結果はいつもひとしい.

恒等写像:

集合 X に対し, $id_X: X \to X$

$id_X(x) = x$ で定める

$$\boxed{\begin{aligned} id_Y \circ f &= f \\ f \circ id_X &= f \end{aligned}}$$

$X = \{x_1, x_2\}$, $Y = \{y_1, y_2\}$

$f_1 : X \to Y$ $\quad f_1(x_1) = y_1$

$f_1(x_2) = y_2$

$f_2 : X \to Y$ $\quad f_2(x_1) = y_2$

$f_2(x_2) = y_1$

$y_1 \neq y_2$ 이므로 $f_1 \neq f_2$

예 2.30 $\quad X = \{0, 1\}$.

id_X

f_0	0	1
0	O	
1		O

f_1	0	1
0	O	O
1		

f_2	0	1
0		O
1	O	

f_3	0	1
0		
1	O	O

의 4가지 $X \to X$ 함수.

f_i 와 f_j 의 합성 $f_i \circ f_j$

id_X

$f_j \backslash f_i$	f_0	f_1	f_2	f_3
$id_X = f_0$	f_0	f_1	f_2	f_3
f_1	f_1	f_1	f_3	f_3
f_2	f_2	f_1	f_0	f_3 $\leftarrow f_3 \circ f_2$
f_3	f_3	f_1	f_1	f_3

可換図式

例1.2.31 $W=\{0,1\}$, $X=\{2,3,4\}$

$Y=\{5,6\}$, $Z=\{7,8,9\}$

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "i"] & Z \\
W \arrow[u, "g"] \arrow[r, "f"'] & X \arrow[u, "h"']
\end{tikzcd}$$

← 図式.

→ jにすると可換ではない.

f	0	1
2		
3	○	
4		○

g	0	1
5		○
6	○	

h (j)	2	3	4
7			
8	○ (○)	○ (○)	(○)
9			○

i	5	6
7		
8		○
9	○	

図式が可換

(⇔) すべての合成が どの経路でも一致

この図では $\boxed{h\circ f = i\circ g}$

$j\circ f \neq i\circ g$

左辺: $0\mapsto 8$

$1\mapsto \cancel{9}$ 8

右辺: $0\mapsto 8$

$1\mapsto 9$

同じ.

像と逆像 (ずいはんの例)

写像 $f: X \to Y$ を使って

逆像

像 → $f_*: P(X) \to P(Y)$, $f^*: P(Y) \to P(X)$

を定める

$A \in P(X)$ に対し、

関数の値域

$f_*(A) = \{ y \in Y \mid f(x) = y$ となる $x \in A$ が存在 $\}$

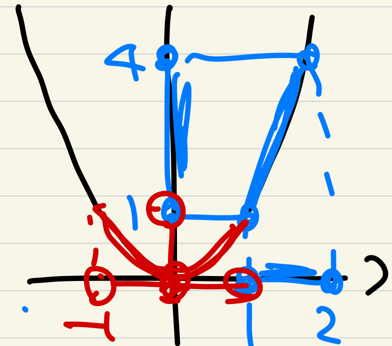
$B \in P(Y)$ に対し、

不等式をとく。

$f^*(B) = \{ x \in X \mid f(x) \in B \}$

例1.2.36 $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f(x) = x^2$



・$A = \{1 < x < 2\}$ なら

$f_*(A) = \{1 < x < 4\}$

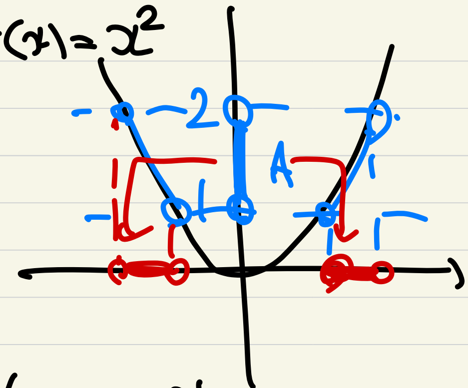
・$A = \{-1 < x < 1\}$ のとき

$f_*(A) = \{0 \leq x < 1\}$ である。

$\{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 4\}$

$\{y \in \mathbb{R} \mid 1 < y < 4\}$

$f(x) = x^2$

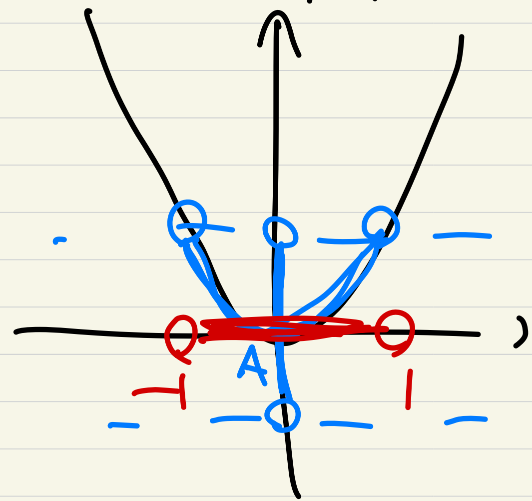


$A = \{1 < x < 2\}$ とする

$$f^*(A) = \{1 < f(x) < 2\}$$
$$= \{1 < x^2 < 2\}$$
$$= \{-\sqrt{2} < x < -1,\ 1 < x < \sqrt{2}\}$$

$A = \{-1 < x < 1\}$ とする,

$$f^*(A) = \{-1 < x^2 < 1\}$$
$$= \{-1 < x < 1\}$$



$f : X \to Y$

<u>例 2.38</u> $X = \{0, 1, 2\}$

$Y = \{3, 4\}$

f	0	1	2
3	○	○	
4			○

とする.

$g : Y \to X$ と $g^* : P(X) \to P(Y)$

	3	4
0	○	○
1		
2		

とする

$f_*(\{0, 1\}) = \{3\}$

$f_*(\{0, 2\}) = \{3, 4\}$

$g_*(\{3\}) = \{0\}$

$g_*(\{3, 4\}) = \{0\}$

像

$f^*(\{3\}) = \{0, 1\}$

$f^*(\{4\}) = \{2\}$

$g^*(\{0\}) = \{3, 4\}$

$g^*(\{1, 2\}) = \phi$ ← $P(Y)$の要素

逆像

$f: X \to Y.$

13:00 ~

$f_*: P(X) \to P(Y)$

$P(X)$ や $P(Y)$: $\cap$, $\cup$ ができる

$f_*(A \cap B) \subset f_*(A) \cap f_*(B)$

$f_*(A \cup B) = f_*(A) \cup f_*(B)$

= には必ずしもならない.

$\sin(x+y) \cancel{=} \sin x + \sin y$

$f^*: P(Y) \to P(X)$

に対しては

$f^*(C \cap D) = f^*(C) \cap f^*(D)$

$f^*(C \cup D) = f^*(C) \cup f^*(D)$

分配法則

やりたいこと

= が成立する条件は?

→ ずいぶん

(b) 2.43

$X = \{0, 1, 2\}, \quad Y = \{3, 4\}$

f	0	1	2
3	O	O	
4			O

$A = \{0\}, \quad B = \{1\}$

$f_*(A) = \{3\}, \quad f_*(B) = \{3\}$

$A \cup B = \{0, 1\} \quad f_*(A \cup B) = \{3\}$

$f_*(A \cup B) = f_*(A) \cup f_*(B)$

$A \cap B = \phi .$

$f_*(A \cap B) = \phi$

$$f_*(A) \cap f_*(B) \neq f_*(A \cap B)$$

$$\underset{\{3\}}{\parallel} \qquad\qquad \underset{\phi}{\parallel}$$

$f_*(A\cap B) \subset \boxed{f_*(A)} \cap \boxed{f_*(B)}$

を示したい.

・ $f_*(A\cap B) \subset f_*(A)$

・ $f_*(A\cap B) \subset f_*(B)$

を示せば〜 共通部分の「別定義」

から $f_*(A\cap B) \subset f_*(A)\cap f_*(B)$

$A\cap B \subset A$ かつ $A\cap B \subset B$

⇝ $f_*(A\cap B) \subset f_*(A)$ かつ $f_*(A\cap B) \subset f_*(B)$

$f_*(A\cup B) = f_*(A)\cup f_*(B)$

$\supset$

$f_*(A\cup B) \supset f_*(A)\cup f_*(B)$ を示す.

$A\cup B \supset A$ かつ $A\cup B \supset B$

$f_*(A\cup B) \supset f_*(A)$ かつ $f_*(A\cup B) \supset f_*(B)$

$\boxed{\text{和集合の別定義で}}$

$f_*(A\cup B) \supset f_*(A)\cup f_*(B)$

となる

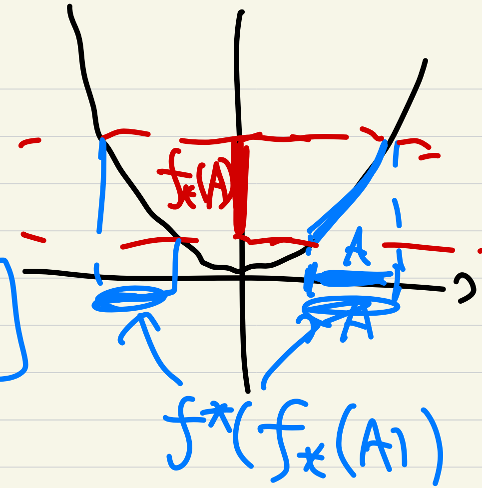
$\supset$ は $\supseteq$ のイミ

$f_*(A\cup B) \subset f_*(A)\cup f_*(B)$

はどうやるか？

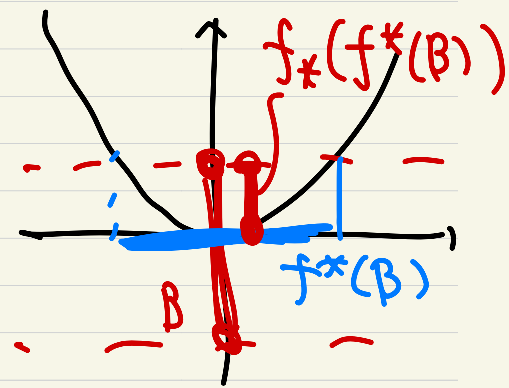
$\boxed{f_* \dashv f_* \ (f_* と f^* のずいはん)}$ を使う。

$$P(X) \underset{f^*}{\overset{f_*}{\rightleftarrows}} P(Y)$$



・$A\in P(X)$ に対し $A\subset f^*(f_*(A))$

・$B\in P(Y)$ に対し $f_*(f^*(B))\subset B$



$f_*(A)\subset B \Leftrightarrow A\subset f^*(B)$

$C \in P(X)$, $D \in P(Y)$

$f_*(C) \subset D \iff C \subset f^*(D)$

を使って、

$f_*(A) と f_*(B)$ の

$f_*(A \cup B)$ が和集合の「別定義」でみたすことを示す

$T \in P(Y)$,

$f_*(A) \subset T$ かつ $f_*(B) \subset T$

ならば $f_*(A \cup B) \subset T$

を示せば先ほどとあわせて

$f_*(A \cup B) = f_*(A) \cup f_*(B)$

$f_*(A \cup B) \subset T$ を示したい

$A \cup B \subset f^*(T)$ と同値.

$A \subset f^*(T)$ かつ $B \subset f^*(T)$

$f_*(A) \subset T$ かつ $f_*(B) \subset T$

と同値.

集合の直積

$$X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X,\ y \in Y\}$$

$X = \{0, 1, 2\}$, $Y = \{3, 4\}$

$$X \times Y = \{(0,3), (0,4), (1,3), (1,4), (2,3), (2,4)\}$$

	0	1	2
3	(0,3)	(1,3)	(2,3)
4	(0,4)	(1,4)	(2,4)

xy平面 : $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

写像のグラフ

	0	1	2
3	○		○
4		○	

$X \times Y$の部分集合で
ある性質をみたすもの.

$f_j \backslash f_i$	f_0 (id_X)	f_1	f_2	f_3
$id_X = f_0$	f_0	f_1	f_2	f_3
f_1	f_1	f_1	f_3	f_3
f_2	f_2	f_1	f_0	f_3 ← $f_3 \circ f_2$
f_3	f_3	f_1	f_1	f_3

XからXへの写像全体 $\mathrm{Set}(X,X)$

$\mathrm{Set}(X,Y)$で XからYへの写像全体の集合

$\boxed{f \in \mathrm{Set}(X,Y) \iff f\text{はXからYへの写像}}$

$c(f_1, f_3) = f_1$

$$c : \underbrace{\mathrm{Set}(X,X) \times \mathrm{Set}(X,X)}_{\text{表の枠組み}} \longrightarrow \underbrace{\mathrm{Set}(X,X)}_{\text{表のなかみ}}$$

$c(f_3, f_2) = f_3$

$\| $

$f_3 \circ f_2$

$f: X \to Y$ と $g: Y \to Z$ を合成
$g \circ f$

$\rightsquigarrow$

$c : \mathrm{Set}(Y,Z) \times \mathrm{Set}(X,Y) \to \mathrm{Set}(X,Z)$

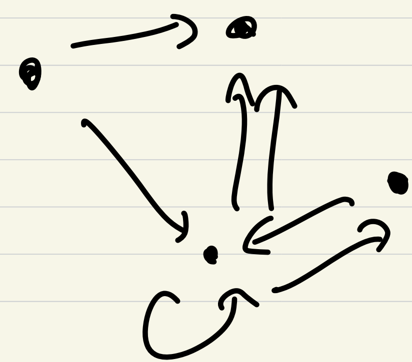
という写像が定まる

$c(g,f) = g \circ f$.

圏の定義

$\left.\begin{array}{l}\text{グラフ}\\ \text{モノイド}\end{array}\right\} \to$ 圏

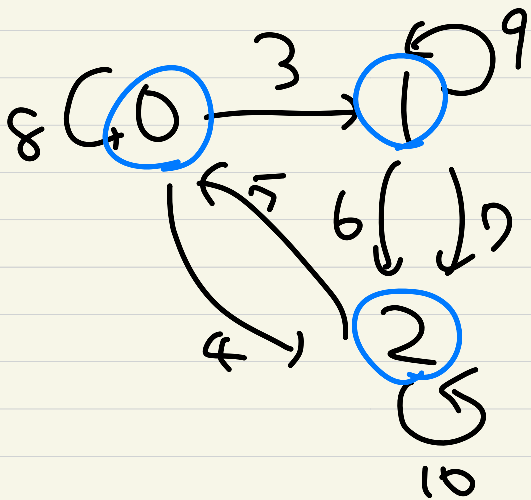
グラフ：点と辺でものの関係を表す。



グラフ G に、頂点の集合 $V(G)$

・$x, y \in V(G)$ に対し　　無限でOK.

x から y への辺の集合 $G(x,y)$



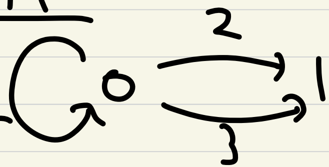
$V(G) = \{0, 1, 2\}$

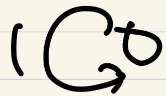
$G(0,1) = \{3\}$, $G(1,2) = \{6, 7\}$

$G(0,2) = \{4\}$　$G(1,0) = \phi$.

$G(0,0) = \{8\}$　$\vdots$

1b) 3.4

G_1: 

G_2: 

$V(G_1) = \{0, 1\}$

$G_1(0,0) = \{4\}$

$G_1(0,1) = \{2,3\}$

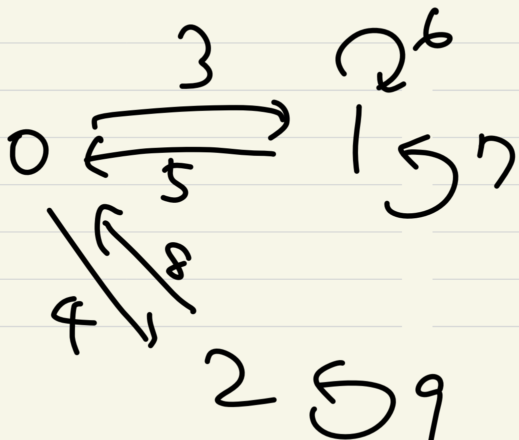
$G_1(1,0) = \phi$

$G_1(1,1) = \phi$

$V(G_2) = \{0\}$

$G_2(0,0) = \{1\}$

1b) 3.5

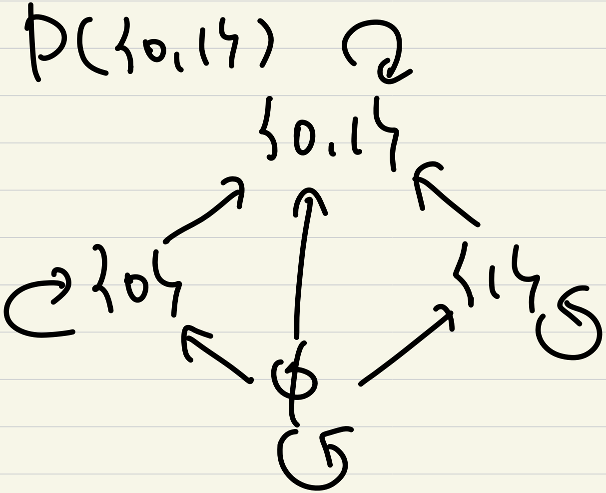


ベキ集合と包含からグラフを作る

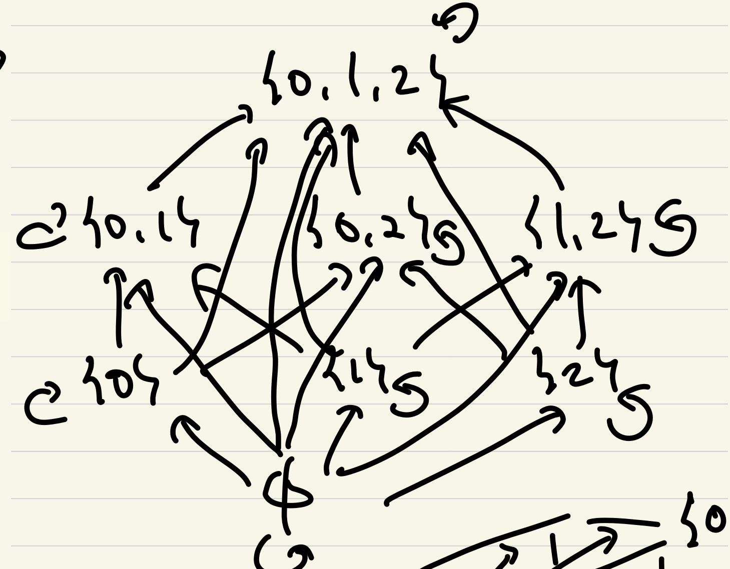
頂点は $P(X)$ の要素

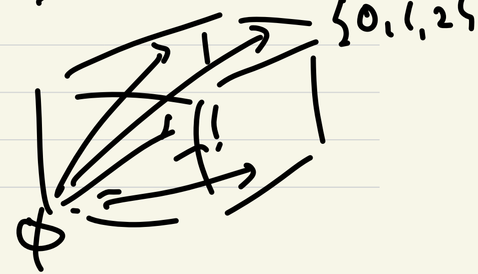
辺は $A \subset B$ に1つもつ

$P(\{0,1\})$



$P(\{0,1,2\})$ から同じことをやる

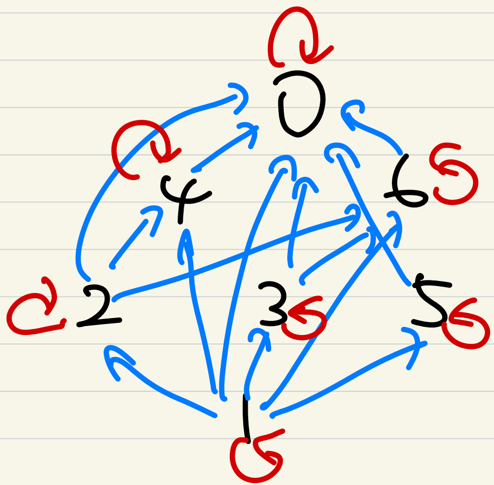




自然数ごとに頂点

nがmの倍数のとき

m → n



(0~6のみかく?)

↑ 要素間の

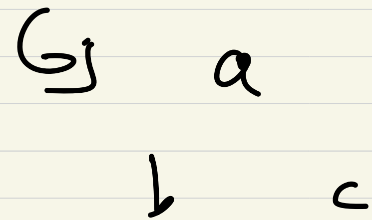
集合 + 何らかの関係

という情報

↖いろんな種類.

離散グラフ:

辺が1つもない.



$\{a, b, c\} = V(G)$

$G(x, y) = \phi$

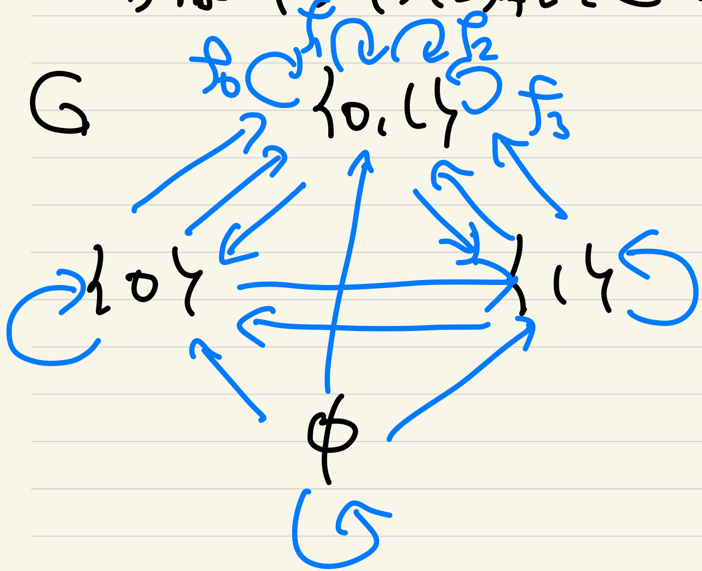
なので情報としては

単なる集合.

$X=\{0,1\}$　$P(X)$の要素を頂点

写像1つ1つに対して辺..

G



$V(G)=P(X)$

$G(x,y)=Set(x,y)$

モノイド

$X=\{0,1\}$

$Set(X,X)=\{f_0,f_1,f_2,f_3\}$

$c: Set(X,X)\times Set(X,X)\to Set(X,X)$

$f_0=id_X$

$\mathbb{N}$, $+:\mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{N}$, 0

	0	1	2	3	...
0	0	1	2	3	
1	1	2	3	4	
2	2	3	4	5	
3	3	4	5	6	
⋮					

$\mathbb{N}$, $\times : \mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{N}$, 1

	0	1	2	3	⋯
0	0	0	0	0	
1	0	1	2	3	
2	0	2	4	6	
3	0	3	6	9	
⋮					

同

同

定義 3.19

モノイド M とは

1. 集合 M_0
2. 写像 $\mu : M_0 \times M_0 \to M_0$
3. $1_M \in M_0$ 単位元

という $(M_0, \mu, 1_M)$ であって,

- 結合律 $\mu(\mu(x,y),z) = \mu(x,\mu(y,z))$
- 単位元 $\mu(x, 1_M) = x$

  $\mu(1_M, x) = x$

• M_0 が要素2つ $\{1_M, b\}$ のとき、μ でうまく定めて
(M_0, μ, 1_M) がモノイドになるようにしたい。

	1_M	b
1_M	1_M	b
b	b	?

1_M でも b でも どっちでもうまくいく。

M_0 から (M_0, μ, 1_M) をモノイドにする方法はたくさんありうる。

• $M_0 = \{1_M\}$ の場合には 1通り

μ	1_M
1_M	1_M

	1	b
1	1	b
b	b	b

$bb = b$

自由モノイド

集合からモノイドを作る
統一的に作る方法（→ 関手）

集合 X から $F(X)_0$: X の要素の有限個の文字列全体.

$X=\{a\}$ $\quad F(X)_0=\{1, a, aa, aaa, \cdots\}$

$X=\{a, b\}$ $\quad F(X)_0=\{1, a, b, aa, ab, ba, bb, aaa, aab, \ldots\}$

$ab \neq ba$

μ を文字列の結合.

$\mu(ab, ba)$
$= abba$

$\mu(1, aba)$
$= aba$

1 が単位元.

定義3.30　圏 C とは

1. $\mathrm{Ob}(C)$ という「集合」

これの要素：対象

2. $x, y \in \mathrm{Ob}(C)$ に対して $C(x,y)$ という「集合」

これの要素：x から y への射

3. $x, y, z \in \mathrm{Ob}(C)$

射の合成

$c_{x,y,z} : C(y,z) \times C(x,y) \to C(x,z)$

4. $x \in \mathrm{Ob}(C)$ に対し $1_x \in C(x,x)$

恒等射。

のデータで　結合法則と $\boxed{\text{恒等射の性質}}$ をみたす

$c_{x,x,y}(f, 1_x) = f$

$C(x,x)$ を M_0 として

もし $\mathrm{Ob}(C) = \{x\}$ なら

$c_{x,x,x} = \mu$ として

モノイドになる

例 3.31

0 : 頂点1つ, 辺なし

⇝ 圏とはみなせない.
恒等射がないから.

$e \circlearrowright 0$: 頂点1つ, 辺1つ

$Ob(C) = \{0\}$,

$C(0,0) = \{e\}$

によって圏を定める.

$c_{0,0,0} : \{e\} \times \{e\} \to \{e\}$.

$$0 \xrightarrow{f} 1$$

⇝ 圏とはみなせない

$$1_0 \circlearrowright 0 \xrightarrow{f} 1 \circlearrowleft 1_1$$

圏とみなせる

$f \circ 1_0$

	1_0	f	1_1
1_0	1_0	f	×
f	×	×	f
1_1	×	×	1_1

(3.4)

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[loop left, "1_0"] \arrow[r, shift left, "f"] & 1 \arrow[l, shift left, "g"] \arrow[loop right, "1_1"] \end{tikzcd}$$

	1_0	f	g	1_1
1_0	1_0	f	X	X
f	X	X	1_0	f
g	g	1_1	X	X
1_1	X	X	g	1_1

$g \circ f$ $\boxed{\underline{f}, \underline{g},}$

$Ob(C) = \{0, 1\}$

$C(0,0) = \{1_0\}$

$C(0,1) = \{f\}$

$C(1,0) = \{g\}$

$C(1,1) = \{1_1\}$

1_x

1_0

1_1

1_a

1_b

集合Xから $P(X)$ の要素を対象として、包含に対し射を定める。

$X=\{0,1\}$ なら

$$
\begin{tikzcd}
& \{0,1\} \arrow[loop above] & \\
\{0\} \arrow[ur] \arrow[loop left] & & \{1\} \arrow[ul] \arrow[loop right] \\
& \phi \arrow[ul] \arrow[ur] \arrow[uu] \arrow[loop below] &
\end{tikzcd}
$$

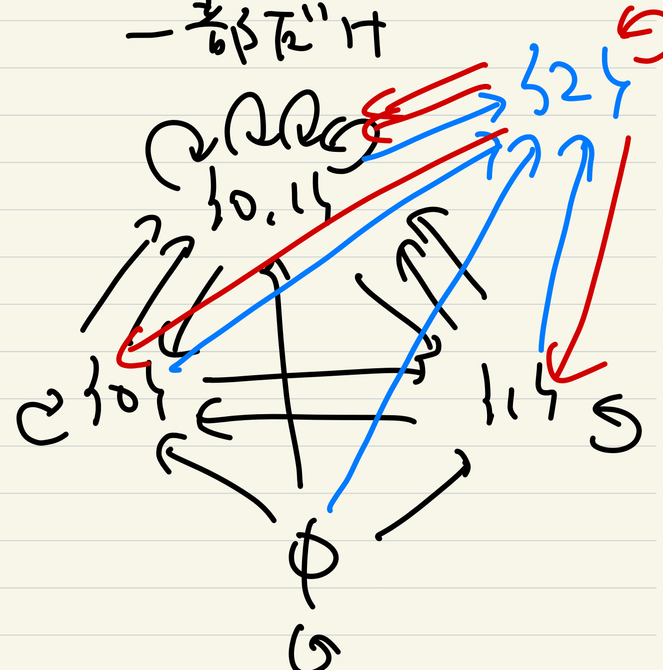
これも1通りの方法で射の合成、恒等射を定めることができる。

集合「全体」の圏 Set

・対象は集合
・射は写像
・射の合成は写像の合成
・恒等射は恒等写像.

15:15〜

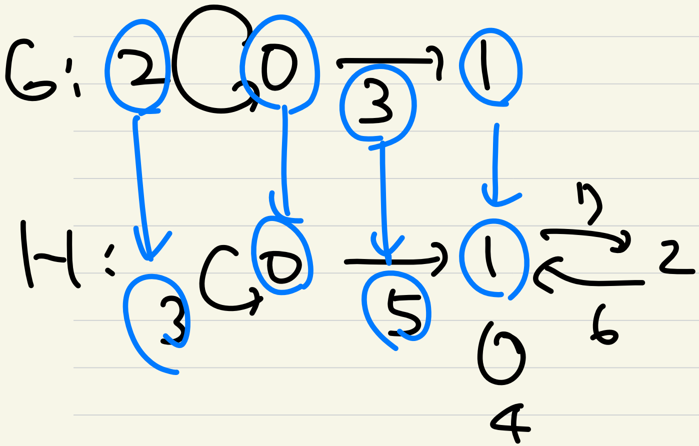
一部だけ



合成の情報もちゃんと
決まっている

グラフの射

3.44



$f: G \to H$ は

・頂点の間の写像 $f_V: V(G) \to V(H)$

$$\{0,1\} \to \{0,1,2\}$$

・辺の間の写像

$f_{x,y}: G(x,y) \to H(f(x), f(y))$

これらのデータからなるもの

(3,1)

$f_V(0) = 0$

$f_V(1) = 1$.

$f_{0,1}(3) = 5$

$f_{0,0}(2) = 3$

例 3.45

G:
$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[loop left, "e"] \end{tikzcd}$$

H:
$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, "a"'] & 2 \end{tikzcd}$$

このとき、GからHへの射 → ない.

・HからGへの射
$\begin{cases} \cdot\ f_V(1) = f_V(2) = 1 \\ \cdot\ f_{1,2}(a) = e \end{cases}$
1通り存在.

G':
$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, "a"] \arrow[loop below, "b"] & 2 \end{tikzcd}$$

射 $H \to G'$ は何こ ある?

→ 2こ.

$G' \to H$ は何こ あるか?

→ なし.

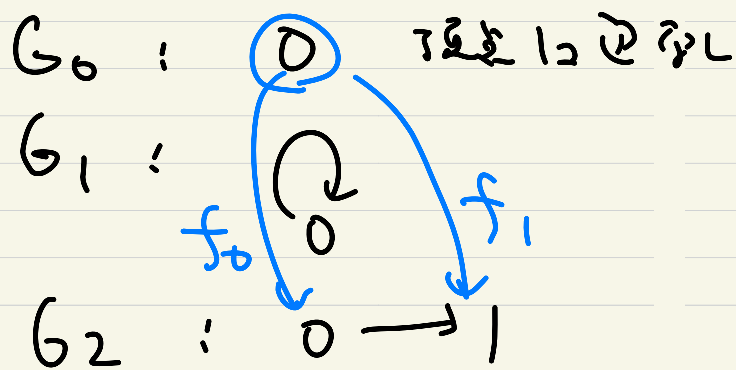
グラフ全体の圏 Graph

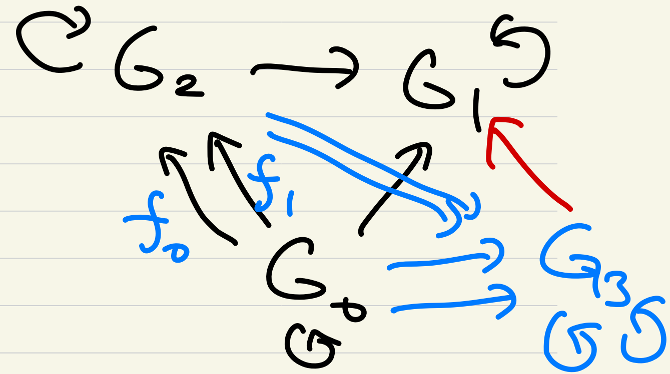
対象 が グラフ

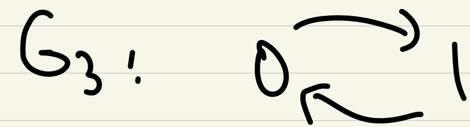
射 が グラフの射

として圏を定めることができる.

一部だけ絵をかく.







モノイド全体の圏 Mon

- 対象がモノイド
- 射が $\boxed{\text{モノイドの射}}$

$g: (M, \mu, e) \to (N, \nu, f)$

がモノイドの射とは

$g: M \to N$ 集合の間の写像、

$g(e) = f$

$g(\mu(x, y)) = \nu(g(x), g(y))$

例1) M を

	1_M	a
1_M	1_M	a
a	a	1_M

$M=\{1_M, a\}$

$\mu(a,a)=1_M$

N を

	1_N	b	b^2
1_N	1_N	b	b^2
b	b	b^2	1_N
b^2	b^2	1_N	b

3つことなる → $b^2 \neq 1_N$

で定める.

$f: M \to N$ モノイド射?

まず集合の写像

$\{1_M, a\} \to \{1_N, b, b^2\}$

$f(1_M)=1_N$

$f(a)=b$ としてみると?

fで かければ

	1_N	b
1_N	1_N	b
b	b	1_N

比較

$\nu(g(x), g(y))$ ちがう → ダメ

$g(\mu(x,y))$

$f_j \backslash f_i$	f_0 (id)	f_1	f_2	f_3
id = f_0	f_0	f_1	f_2	f_3
f_1	f_1	f_1	f_3	f_3
f_2	f_2	f_1	f_0	f_3 ← $f_3 \circ f_2$
f_3	f_3	f_1	f_1	f_3

Set({0,1})

モノイドの射

$f: M \to \mathrm{Set}(\{0,1\})$ は

どんなものがあるか？

$f(a)$をどう決めるか？

$f(1_M) = f_0$.　$f(a) = f_0$

f_2

a 2通り.

M	1_M	a
1_M	1_M	a
a	a	1_M

→

	f_0	f_1
f_0	f_0	f_1
f_1	f_1	f_0

極限と余極限

和集合 $P(X) \ni A, B$

S が和集合

$\Leftrightarrow$ ・ $A \subset S$ かつ $B \subset S$

・ $T \in P(X)$ が $A \subset T$ かつ $B \subset T$

に対し $S \subset T$

最小公倍数 $n, m \in \mathbb{N}$

l が最小公倍数

$\Leftrightarrow$ ・ l が n の倍数 かつ l が n の倍数

・ $t \in \mathbb{N}$ が n の倍数 かつ m の倍数 ならば t は l の倍数

$\boxed{P(X) \text{と包含の圏}}$ C

$A, B \in Ob(C)$

S が和集合

$\Leftrightarrow$ ・ $A \to S$ かつ $B \to S$ がある

・ $T \in Ob(C)$ が

$A \to T$ があり

かつ $B \to T$ がある

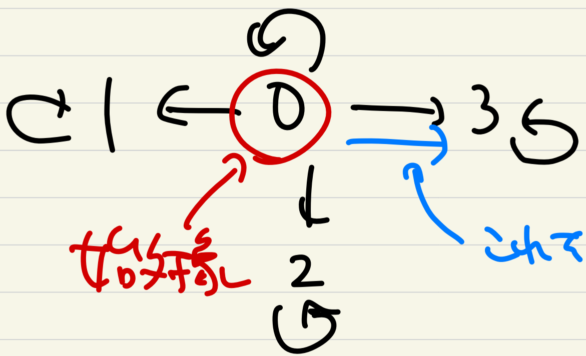
ならば $S \to T$ がある

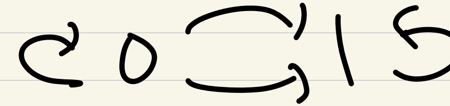
始対象

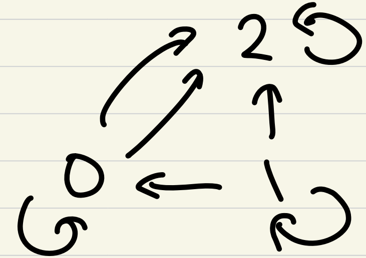
4.12

圏 C の対象 x が

始対象 $\iff$ すべての $y \in Ob(C)$ に対し、$C(x,y)$ がただ1つの要素をもつこと.

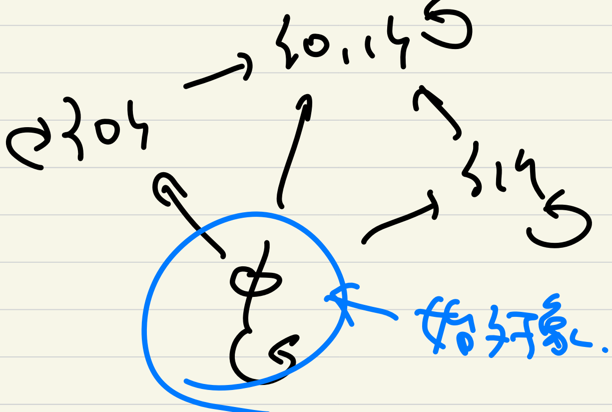






P(X)と包含の圏では

φが必ず始対象



始対象：最小性の拡張

Set: φが始対象.

Mon: 1点モノイドが始対象.

$f:(\{0\},\mu,0)\to(M,\nu,1_M)$

$f(0)=1_M$ ただ1つ射が存在.

Graph: 空グラフが始対象

圏 C における対象の和.

$x, y \in Ob(C)$ に対し,

$S \in Ob(C)$, $j_1 : x \to S$, $j_2 : y \to S$

が x と y の和であるとは,

すべての $t \in Ob(C)$, $f_1 : x \to t$, $f_2 : y \to t$

に対し, 一意的に $f : S \to t$ が存在して

図式が可換

$f \circ j_1 = f_1$

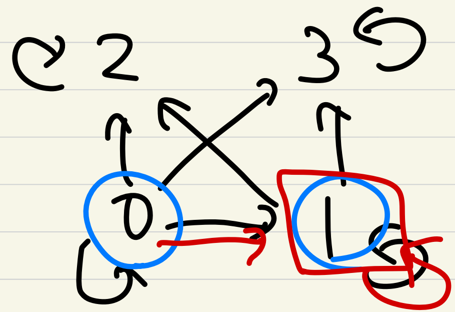
$f \circ j_2 = f_2$

$$
\begin{tikzcd}
x \arrow[r, "j_1"] \arrow[dr, "f_1"'] & S \arrow[d, "f"] & y \arrow[l, "j_2"'] \arrow[dl, "f_2"] \\
& t &
\end{tikzcd}
$$

例) $P(X)$ と包含

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r] \arrow[dr, "A \subset T"'] & A \cup B \arrow[d, "A \cup B \subset T"] & B \arrow[l] \arrow[dl, "B \subset T"] \\
& T &
\end{tikzcd}
$$

例4 4,3,2



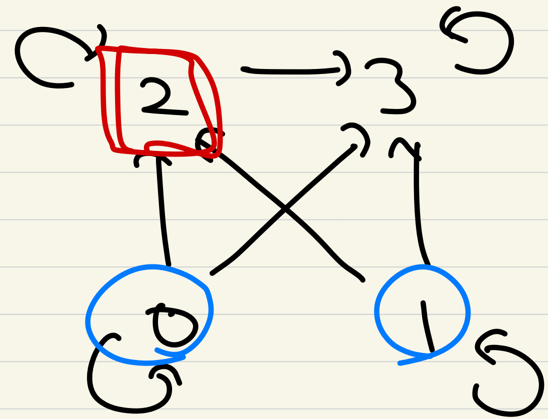
0と1の和 ⤳ 1

0→1, 1→1

0→2, 1→2 に分れ 1→2が1つ

0→3, 1→3 に分れ 1→3が1つ

例4

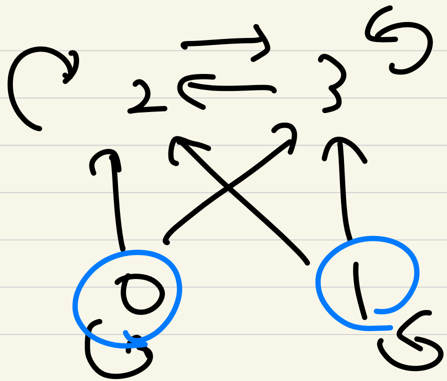


0と1の和.

0→2, 1→2 ⤳ 2→2

0→3, 1→3 ⤳ 2→3

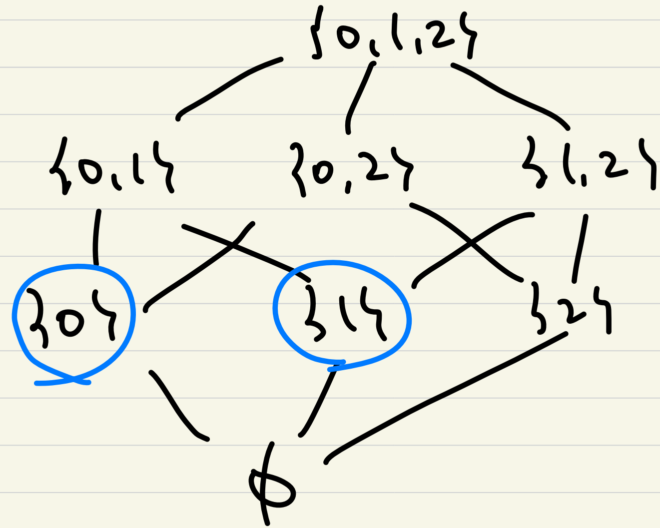
2が0と1の和.



0と1の和は？

⇝ 2も3もどちらも和になる.

P({0, 1, 2})と包含



{0}と{1}の和　{0,1}

集合の直積 $X\times Y$, p_1, p_2

は Set の積　　$p_1(x,y)=x$

$p_2(x,y)=y$

$$\begin{tikzcd}
 & T \arrow[dl, "f_1"'] \arrow[d, "f"] \arrow[dr, "f_2"] & \\
X & X\times Y \arrow[l, "p_1"] \arrow[r, "p_2"'] & Y
\end{tikzcd}$$

$p_1\circ f=f_1$, $p_2\circ f=f_2$

となる $f: T\to X\times Y$ が

ただ1つ存在する.

$f(t)=(f_1(t), f_2(t))$

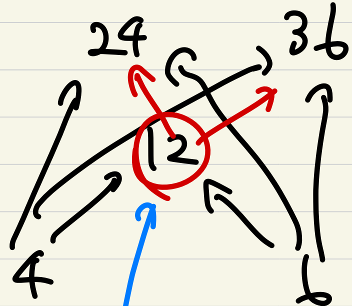
と定めれば

$p_1\circ f=f_1$, $p_2\circ f=f_2$

となる.

しかもこれに限られる.

最小公倍数



4と6の最小公倍数

グラフの射っぽい

モノイドの射っぽい条件

関手　C, D: 圏

$F: C \to D$ 関手

グラフの射やモノイドの射を思い出す

- $F_{ob}: Ob(C) \to Ob(D)$
- $x, y \in Ob(C)$ に対し

$$F_{x,y}: C(x,y) \to C(Fx, Fy)$$

というデータがあって,

$$F_{x,x}(1_x) = 1_{Fx}$$

$$F(c(f,g)) = c(F(f), F(g))$$

例 5.9　$f : X \to Y$

写像　$f_* : P(X) \to P(Y)$

$f^* : P(Y) \to P(X)$

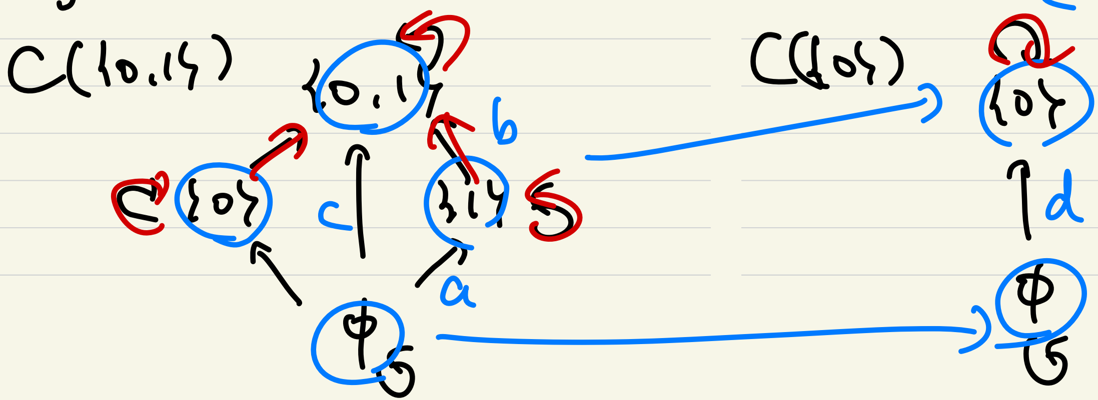
を用いて，$C(X)$，$C(Y)$ の

関手が定まる

$P(X)$と包含　　$P(Y)$と包含

f_*	ϕ	$\{0\}$	$\{1\}$	$\{0,1\}$
ϕ	○			
$\{0\}$		○	○	○

$f : \{0,1\} \to \{0\}$　$f(1) = f(0) = 0$.



d

$\|$

$f_*(c)$

$\|$

$f_*(b \circ a)$

$f_*(b) \circ f_*(a)$

$= e \circ d = d$

一致

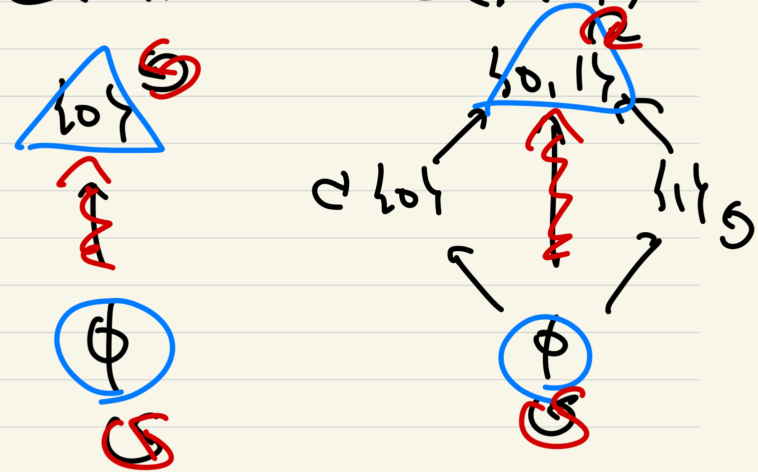
$f : \{0,1\} \to \{0\}$ ≅

	0	1
0	○	○

$f^* : P(\{0\}) \to P(\{0,1\})$

	ϕ	$\{0\}$
ϕ	○	
$\{0\}$		
$\{1\}$		
$\{0,1\}$		○

$C(\{0\})$ $\qquad$ $C(\{0,1\})$



$$
C:\quad
\begin{tikzcd}
2 \arrow[r] \arrow[loop above] & 3 \arrow[loop above] \\
0 \arrow[u] \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[loop below] & 1 \arrow[u] \arrow[loop below]
\end{tikzcd}
\qquad \xrightarrow{\ F\ } \qquad \text{自然数と整除関係の圏}
$$

はどんな写像なの？

Say

$$
\begin{tikzcd}
6 \arrow[r] \arrow[loop above] & 18 \arrow[loop above] \\
3 \arrow[u] \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[loop below] & 9 \arrow[u] \arrow[loop below]
\end{tikzcd}
$$

はOK.

$$
\xrightarrow{\ F\ }
\begin{tikzcd}
6 \arrow[r] & 18 \\
3 \arrow[u] \arrow[ur] \arrow[r] & 12 \arrow[u, "\times"]
\end{tikzcd}
$$

ダメ.

$f: X \to Y$ 写像

⇝ 2つの関手

$f^*: C(Y) \to C(X)$

$f_*: C(X) \to C(Y)$

$f_* \dashv f^*$ である

f_* は f^* の左随伴

f^* は f_* の右随伴

$A \to f^*(f_*(A))$

$A \in P(X)$ に対し $A \subset f^*(f_*(A))$

$B \in P(Y)$ に対し $f_*(f^*(B)) \subset B$

$f_*(f^*(B)) \to B$

$f_*(A) \subset B \iff A \subset f^*(B)$

$f_*(A) \to B \qquad A \to f^*(B)$

$F : C \to D$

$G : D \to C$ 関手.

$F \dashv G$ であるとは

(6.4) $\forall x \in Ob(C),\ \forall y \in Ob(D)$

に対し $D(Fx, y) \simeq C(x, Gy)$

自然に一対一対応する

$$C(X) \underset{f^*}{\overset{f_*}{\rightleftarrows}} C(Y)$$

$$C(Y)(f_*(A), B)$$

$$= C(X)(A, f^*(B))$$

$$\wr$$

$$f_*(A) \subset B \iff A \subset f^*(B)$$

もう1つ例

$F : \mathbf{Set} \to \mathbf{Mon}$

自由モノイド関手.

$F(\{a, b\}) = \{1, a, b, ab, aa, \ldots\}$

$\downarrow f$

$F(\{c, d\}) = \{1, c, d, cd, cc, \ldots$

$f(a) = c, \ f(b) = c$

$F(f) : F(\{a, b\}) \to F(\{c, d\})$

モノイドの射

$F(f)(abaa) = cccc$

忘却 $\mathbf{Mon} \to \mathbf{Set}$

$U(M_0, \mu, e) = M_0$

$F \dashv U$

文字のおきかえ

$\longrightarrow$ 文字列のおきかえ

$F(X) \to M$ モノイド射

$\updownarrow$ 1:1

$X \to U(M) = M_0$ 写像

$F(X)$ からMへのモノイド射は

Xの行き先で決めれば

ただ1つ決まる

$f: (\mathbb{N}, +, 0) \to (\mathbb{N}, +, 0)$

は $f(1)$ で決まる

$f(2) = f(1) + f(1)$

$f(3) = f(1) + f(1) + f(1)$

$M = \{1, a\}$, $a^2 = 1$ で定める

$f: M \to (\mathbb{N}, +, 0)$

は $f(a)$ で決まるけど

自由にはえらべない.

$f(a)$ によってはモノイド射にならない

$F \dashv G$ ならば

$F(X+Y) = F(X)+F(Y)$ ← 前々回でように
$G(X \times Y) = G(X) \times G(Y)$ 示せる

が成立.

$f_* \dashv f^*$

$f_*(A \cup B) = f_*(A) \cup f_*(B)$

$f^*(A \cap B) = f^*(A) \cap f^*(B)$