- The party 2 talk 'bout mathematics -

Asymptotic City

(make function not value Asymptotic City come alive)

speaker: Takenokoredarmy @691_7758337633

多重ガンマとは？

多重ガンマとは？

多重 Hurwitz ゼータ:

$$\zeta_r(s, w, \omega_1, \cdots, \omega_r) = \sum_{n_1, \cdots, n_r \geq 0} (n_1\omega_1 + \cdots + n_r\omega_r + w)^{-s}$$

多重ガンマとは？

多重 Hurwitz ゼータ:

$$\zeta_r(s, w, \omega_1, \cdots, \omega_r) = \sum_{n_1, \cdots, n_r \geq 0} (n_1\omega_1 + \cdots + n_r\omega_r + w)^{-s}$$

$$\xrightarrow{\text{Lerch の公式}} \quad \Gamma_r(w, \boldsymbol{\omega}) = \exp\left(\frac{\partial}{\partial s} \zeta_r(s, w, \boldsymbol{\omega}) \Big|_{s=0} \right)$$

多重ガンマとは？

多重 Hurwitz ゼータ:

$$\zeta_r(s, w, \omega_1, \cdots, \omega_r) = \sum_{n_1, \cdots, n_r \geq 0} (n_1\omega_1 + \cdots + n_r\omega_r + w)^{-s}$$

$$\xrightarrow{\text{Lerch の公式}} \quad \Gamma_r(w, \boldsymbol{\omega}) = \exp\left(\frac{\partial}{\partial s} \zeta_r(s, w, \boldsymbol{\omega}) \Big|_{s=0} \right)$$

注: これは ``Barnes の" 多重ガンマ.
ほかにも Vignéras のものなど色々あるがここでは扱わない.

多重ガンマっていうけどほんとにガンマ？

多重ガンマっていうけどほんとにガンマ？

・ガンマ関数の性質

周期性 $\Gamma(s+1) = \Gamma(s)s$

三角関数との関係 $\sin \pi s = s\Gamma(s)^{-1}\Gamma(1-s)^{-1}$

多重ガンマっていうけどほんとにガンマ？

・ガンマ関数の性質

周期性 $\Gamma(s+1)=\Gamma(s)s$

三角関数との関係 $\sin\pi s = s\Gamma(s)^{-1}\Gamma(1-s)^{-1}$

周期性 $\Gamma_r(s+\omega_i;\boldsymbol{\omega})=\Gamma_r(s;\boldsymbol{\omega})\Gamma(s;\boldsymbol{\omega}\langle i\rangle)^{-1}$

三角関数との関係 $S_r(w;\boldsymbol{\omega})=\Gamma_r(s;\boldsymbol{\omega})^{-1}\Gamma_r(|\boldsymbol{\omega}|-s;\boldsymbol{\omega})^{(-1)^{r+1}}$

多重ガンマっていうけどほんとにガンマ？

・ガンマ関数の性質

周期性 $\Gamma(s+1) = \Gamma(s)s$

三角関数との関係 $\sin \pi s = s\Gamma(s)^{-1}\Gamma(1-s)^{-1}$

周期性 $\Gamma_r(s+\omega_i;\boldsymbol{\omega}) = \Gamma_r(s;\boldsymbol{\omega})\Gamma(s;\boldsymbol{\omega}\langle i\rangle)^{-1}$

三角関数との関係 $S_r(s;\boldsymbol{\omega}) = \Gamma_r(s;\boldsymbol{\omega})^{-1}\Gamma_r(|\boldsymbol{\omega}|-s;\boldsymbol{\omega})^{(-1)^{r+1}}$

無限積表示忘れてない？

無限積表示忘れてない？

ふつうのガンマ:

$$\Gamma(s)^{-1} = se^{\gamma s} \prod_{n \geq 1} \left(1 + \frac{s}{n}\right) e^{-\frac{s}{n}}$$

無限積表示忘れてない？

ふつうのガンマ:

$$\Gamma(s)^{-1} = se^{\gamma s}\prod_{n\geq 1}\left(1+\frac{s}{n}\right)e^{-\frac{s}{n}}$$

多重ガンマ:

$$\Gamma_r(s;\boldsymbol{\omega})^{-1} = \rho_r(\boldsymbol{\omega})se^{P(s)}\prod_{\mathbf{0}\neq\mathbf{n}\geq\mathbf{0}}\left(1+\frac{s}{\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\omega}}\right)e^{-\frac{s}{\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\omega}}+\frac{1}{2}\frac{s^2}{(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\omega})^2}+\cdots+(-1)^r\frac{1}{r}\frac{s^r}{(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\omega})^r}}$$

無限積表示忘れてない？

ふつうのガンマ:

$$\Gamma(s)^{-1} = s e^{\gamma s} \prod_{n \geq 1} \left(1 + \frac{s}{n}\right) e^{-\frac{s}{n}}$$

多重ガンマ:

$$\Gamma_r(s;\boldsymbol{\omega})^{-1} = \boxed{\rho_r(\boldsymbol{\omega})} s e^{P(s)} \prod_{\mathbf{0} \neq \mathbf{n} \geq \mathbf{0}} \left(1 + \frac{s}{\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\omega}}\right) e^{-\frac{s}{\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\omega}} + \frac{1}{2}\frac{s^2}{(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\omega})^2} + \cdots + (-1)^r \frac{1}{r}\frac{s^r}{(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\omega})^r}}$$

何コレ?

$\rho_r(\boldsymbol{\omega})$ って何？

$\rho_r(\boldsymbol{\omega})$ って何？

$\rightarrow$ Stirling 保型形式とよばれるもの.

ひとことで言うと ``多重ガンマの0での留数''

$\rho_r(\boldsymbol{\omega})$ って何？

$\rightarrow$ Stirling 保型形式とよばれるもの.

ひとことで言うと ``多重ガンマの0での留数"

$r=1$ ではかんたんに求まる:

$$\rho_1(\omega_1) = \sqrt{\frac{2\pi}{\omega_1}}.$$

じゃあ $r=2$ は?

じゃあ $\boldsymbol{r = 2}$ は?

ほぼ何もわからない.

じゃあ $r = 2$ は?

ほぼ何もわからない.

かろうじてわかっていること:

$$\rho_2(1,1) = \sqrt{2\pi}e^{-\zeta'(-1)}$$

じゃあ $r = 2$ は?

ほぼ何もわからない.

$r > 1$ に対して Stirling 保型形式の情報を得るのは (かなり) むずかしい問題っぽい.

どーすんの？

どーすんの？

→そこに新谷卓郎が一石を投じた.

どーすんの？

→そこに新谷卓郎が一石を投じた.

Theorem (Shintani, 1980).

$$\rho_2(1,\tau)\rho_2(1,-\tau) = (2\pi)^{3/2}\tau^{-1/2}\eta(\tau)e^{\pi i(1/4+1/12\tau)}$$

T. Shintani, ``A proof of the classical Kronecker limit formula",
Tokyo J. Math., 3 (1980) 191--199

新谷先生は何やったの？

証明に際して, 多重ガンマ関数の
``新谷型無限積表示" を示した.

新谷先生は何やったの？

証明に際して, 多重ガンマ関数の

``新谷型無限積表示" を示した.

$$\Gamma_2(w;1,z)\rho_2(1,z) = (2\pi)^{w/2} z^{(w-w^2)/2z-w/2} e^{(w^2-w)\gamma/2z} \times \Gamma(w) \prod_{n\geq 1} \frac{\Gamma(w+nz)}{\Gamma(1+nz)} e^{(w-w^2)/2nz} (nz)^{1-w}$$

こんなもんどうやって示すの？

こんなもんどうやって示すの？

証明の方針:

1. 二重ガンマ Γ_2 の漸近展開を示す
2. 漸近展開から無限積表示を導く

こんなもんどうやって示すの？

証明の方針:

1. 二重ガンマ Γ_2 の漸近展開を示す
2. 漸近展開から無限積表示を導く

二重ガンマの漸近展開ってなに？

要するに ``Stirling の公式" の一般化

二重ガンマの漸近展開ってなに？

要するに ``Stirling の公式" の一般化

Stirling の公式: $$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

$$\to \ \log\Gamma(z) \sim (z-1/2)\log z - z + \log\sqrt{2\pi}$$

二重ガンマの漸近展開ってなに？

要するに ``Stirling の公式'' の一般化

新谷による ``Γ_2 での Stirling の公式'':

二重ガンマの漸近展開ってなに？

要するに ``Stirling の公式" の一般化

新谷による ``Γ_2 での Stirling の公式":

$$\log \Gamma_2(w; 1, z) = \frac{LG(w)}{z} - B_1 \log \frac{\Gamma(w)}{\sqrt{2\pi}} - \psi(w) B_2 \frac{z}{2} + O(w^{-1})$$

二重ガンマの漸近展開ってなに？

要するに ``Stirling の公式" の一般化

新谷による ``Γ_2 での Stirling の公式":

$$\log\Gamma_2(w;1,z)=\frac{LG(w)}{z}-B_1\log\frac{\Gamma(w)}{\sqrt{2\pi}}-\psi(w)B_2\frac{z}{2}+O(w^{-1})$$

ここで $LG(w):=\frac{1}{2\pi i}\int_{I(\lambda,\infty)}\frac{e^{-wt}}{1-e^{-t}}\frac{\log t}{t^2}\,dt+\frac{\gamma-\pi i}{2}B_2(z)$

定義はどうでも良くて, 重要なのは $-LG'(z)=\log(\Gamma(z)/\sqrt{2\pi})$ という事実

$$\log \Gamma_2(w;1,z) = \frac{LG(w)}{z} - B_1 \log \frac{\Gamma(w)}{\sqrt{2\pi}} - \psi(w) B_2 \frac{z}{2} + O(w^{-1})$$

定義はどうでも良くて, 重要なのは $-LG'(z) = \log(\Gamma(z)/\sqrt{2\pi})$ という事実

$$\log \Gamma_2(w;1,z) = \frac{LG(w)}{z} - B_1 \log \frac{\Gamma(w)}{\sqrt{2\pi}} - \psi(w) B_2 \frac{z}{2} + O(w^{-1})$$

定義はどうでも良くて, 重要なのは $-LG'(z) = \log(\Gamma(z)/\sqrt{2\pi})$ という事実

予想.

log(r重ガンマ) の漸近展開は
「よくわからん積分で書けるやつ × ベルヌーイ数っぽいやつ」を
係数に持つ, 周期(ω_1,...,ω_r)の多項式で書けるのではないか?

$$\log\Gamma_2(w;1,z)=\frac{LG(w)}{z}-B_1\log\frac{\Gamma(w)}{\sqrt{2\pi}}-\psi(w)B_2\frac{z}{2}+O(w^{-1})$$

定義はどうでも良くて, 重要なのは $-LG'(z)=\log(\Gamma(z)/\sqrt{2\pi})$
という事実

予想.

log(r重ガンマ) の漸近展開は

「よくわからん積分で書けるやつ×ベルヌーイ数っぽいやつ」を係数に持つ, 周期(ω_1,...,ω_r)の多項式で書けるのではないか?

予想.

log(r重ガンマ) の漸近展開は
「よくわからん積分で書けるやつ × ベルヌーイ数っぽいやつ」を係数に持つ, 周期(ω_1,...,ω_r)の多項式で書けるのではないか?

Theorem(Katayama-Ohtsuki, 1998).

$$\log\Gamma_r(w+a,\boldsymbol{\omega}) = \sum_{n=0}^{r}\frac{(-1)^n{}_rS_1^{(r-n+1)}(a;\boldsymbol{\omega})(-w)^{r-n}}{(r-n)!}(H_{r-n}-\log w) - \frac{(-1)^r{}_rS_2(a;\boldsymbol{\omega})}{2w} + O(w^{-2})$$

$$\log \Gamma_r(w + a, \boldsymbol{\omega}) = \sum_{n=0}^{r} \frac{(-1)^n {}_rS_1^{(r-n+1)}(a; \boldsymbol{\omega})(-w)^{r-n}}{(r-n)!}(H_{r-n} - \log w) - \frac{(-1)^r {}_rS_2(a; \boldsymbol{\omega})}{2w} + O(w^{-2})$$

${}_rS_n$ は多重 Bernoulli 多項式(``ベルヌーイ数っぽいやつ"):

$$\frac{(-1)^r t e^{wt}}{\prod_{i=0}^{r-1}(1-e^{-\omega_i t})} = \sum_{k=1}^{r}(-1)^k {}_rS_1^{(k+1)}(w;\boldsymbol{\omega})t^{1-k} + \sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n-1}{}_rS'_n(w;\boldsymbol{\omega})t^n}{n!}$$

$$\log\Gamma_r(w+a,\boldsymbol{\omega}) = \sum_{n=0}^{r}\frac{(-1)^n {}_rS_1^{(r-n+1)}(a;\boldsymbol{\omega})(-w)^{r-n}}{(r-n)!}(H_{r-n}-\log w) - \frac{(-1)^r {}_rS_2(a;\boldsymbol{\omega})}{2w} + O(w^{-2})$$

${}_rS_n$ は多重 Bernoulli 多項式(``ベルヌーイ数っぽいやつ''):

$$\frac{(-1)^r t e^{wt}}{\prod_{i=0}^{r-1}(1-e^{-\omega_i t})} = \sum_{k=1}^{r} (-1)^k {}_rS_1^{(k+1)}(w;\boldsymbol{\omega}) t^{1-k} + \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1} {}_rS_n'(w;\boldsymbol{\omega}) t^n}{n!}$$

``よくわからん積分で書けるやつ'':

$$\frac{(-w)^n}{n!}(H_n - \log w) = \frac{1}{2\pi i}\int_{I(\lambda,\infty)} e^{-wt} t^{-n-1} \log t \, dt + (\gamma - \pi i)\frac{(-w)^n}{n!}$$

$$\log \Gamma_r(w+a,\boldsymbol{\omega}) = \sum_{n=0}^{r} \frac{(-1)^n {}_rS_1^{(r-n+1)}(a;\boldsymbol{\omega})(-w)^{r-n}}{(r-n)!}(H_{r-n} - \log w) - \frac{(-1)^r {}_rS_2(a;\boldsymbol{\omega})}{2w} + O(w^{-2})$$

問題点 その1

問題点 その1

新谷の表示: B_n と $LG^{(n)}(w)$ の線形和

片山-大槻の表示: ${}_rS_n$ と $\dfrac{(-w)^n(H_n - \log w)}{n!}$ の線形和

問題点 その1

新谷の表示: B_n と $LG^{(n)}(w)$ の線形和

単純　　複雑

複雑　　単純

片山-大槻の表示: ${}_rS_n$ と $\dfrac{(-w)^n(H_n - \log w)}{n!}$ の線形和

問題点 その1

新谷の表示: B_n と $LG^{(n)}(w)$ の線形和

単純 複雑

複雑 単純

片山-大槻の表示: ${}_rS_n$ と $\dfrac{(-w)^n(H_n - \log w)}{n!}$ の線形和

→統一したい!

問題点 その2

問題点 その2

新谷と片山-大槻のそれぞれの表示には
共通点がある:

問題点 その2

新谷と片山-大槻のそれぞれの表示には
共通点がある:

``よくわからん積分で書けるやつ" の漸近展開を別途
示す必要がある.

問題点 その2

新谷と片山-大槻のそれぞれの表示には
共通点がある:

``よくわからん積分で書けるやつ" の漸近展開を別途
示す必要がある.

$$LG(w) = -\frac{w^2}{2}\log w + \frac{3}{4}w^2 - B_1(w\log w - w) - \frac{B_2}{2}\log w + O(w^{-1})$$

$\dfrac{(-w)^n(H_n - \log w)}{n!}$ については調和数の漸近展開より明らか.

これらを同時に解決
する方法が存在する.

Kinkelin の ``多重" ガンマ関数

$$G_r^K(x) = \exp\left(\frac{\partial}{\partial s}\zeta(s,x)\bigg|_{s=1-r} - \zeta'(1-r) \right)$$

Kinkelin の ``多重" ガンマ関数

$$G_r^K(x) = \exp\left(\frac{\partial}{\partial s}\zeta(s,x)\Big|_{s=1-r} - \zeta'(1-r) \right)$$

これを ``Barnes 的に" 多重化してみる.

たけのこ赤軍の考察

多重多重ガンマ関数 (?)

$$\Gamma_{r,k}(w;\boldsymbol{\omega}) = \exp\left(\frac{\partial}{\partial s}\zeta_r(s, w; \boldsymbol{\omega})\bigg|_{s=-k} \right)$$

たけのこ赤軍の考察

多重多重ガンマ関数 (?)

$$\Gamma_{r,k}(w;\boldsymbol{\omega}) = \exp\left(\frac{\partial}{\partial s}\zeta_r(s,w;\boldsymbol{\omega})\Big|_{s=-k} \right)$$

...の積分表示

$$\log\Gamma_{r,k}(w;\boldsymbol{\omega}) = \frac{(-1)^k k!}{2\pi i}\int_{I(\lambda,\infty)} \frac{e^{-wt}}{\prod_{i=1}^{r}(1-e^{-\omega_i t})} t^{-k-1}\log t\,dt + (\gamma - \pi i - H_k)(-1)^k k! a_{r,k}(w;\boldsymbol{\omega})$$

たけのこ赤軍の考察

多重多重ガンマ関数 (?)

$$\Gamma_{r,k}(w;\boldsymbol{\omega}) = \exp\left(\frac{\partial}{\partial s}\zeta_r(s,w;\boldsymbol{\omega})\Big|_{s=-k} \right)$$

...の積分表示

$$\log\Gamma_{r,k}(w;\boldsymbol{\omega}) = \frac{(-1)^k k!}{2\pi i}\int_{I(\lambda,\infty)} \frac{e^{-wt}}{\prod_{i=1}^r (1-e^{-\omega_i t})} t^{-k-1}\log t\,dt + (\gamma - \pi i - H_k)(-1)^k k! a_{r,k}(w;\boldsymbol{\omega})$$

ここで $\frac{e^{-wt}}{\prod_{i=1}^r (1-e^{-\omega_i t})} = \sum_{n\geq -r} a_{r,n}(w;\boldsymbol{\omega})t^n$.

(片山-大槻の ${}_rS_n$ と本質的に同じ)

たけのこ赤軍の考察

ちょっと補正

$$P_r(k, w; \boldsymbol{\omega}) := \frac{(-1)^k}{k!} \log \Gamma_{r,k}(w; \boldsymbol{\omega}) + H_k a_{r,k}(w; \boldsymbol{\omega})$$

利点

$$LG(w) = P_1(1, w; 1)$$

$$\frac{(-w)^n (H_n - \log w)}{n!} = P_0(n, w; -)$$

利点

$$LG(w) = P_1(1, w; 1)$$

$$\frac{(-w)^n (H_n - \log w)}{n!} = P_0(n, w; -)$$

→``よくわからん積分で書けるやつ" を統一できる.

利点

当然, $P_r(0, w; \boldsymbol{\omega}) = \log \Gamma_r(w; \boldsymbol{\omega})$ なので...

利点

当然, $P_r(0, w; \boldsymbol{\omega}) = \log \Gamma_r(w; \boldsymbol{\omega})$ なので...

一般に $P_r(k, w; \boldsymbol{\omega})$ の漸近挙動を示してしまえばいい？

Theorem(Takenoko, 2018)

$$P_r(k, w+a; \boldsymbol{\omega}) = \sum_{l=-|B|}^{k+|A|} a_{|B|,l}(w; \omega_B) P_{|A|}(l-k, a; \omega_A) + O\left(\frac{1}{a}\right)$$

Thank U 4 Ur Attention!

References:

K. Katayama and M. Ohtsuki,

``On The Multiple Gamma-Functions", Tokyo J. of Math. Volume 21, no. 1 (1998), 159--182.

T. Shintani,

``A Proof of the Classical Kronecker Limit Formula", Tokyo J. of Math. Volume 03, no. 2 (1980), 191--199.

T. Shintani,

``On a Kronecker limit formula for real quadratic fields", J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math. , 24 (1977), 167--199.