合同数問題と保型形式

tsujimotter

2018 年 9 月 21 日

3 辺が有理数である直角三角形の面積になるような正整数 n を合同数という．定義から，正整数 n が合同数である条件は，次を満たす $X, Y, Z \in \mathbb{Q}^\times$ が存在することと言い換えることができる．

$$\begin{cases} X^2 + Y^2 = Z^2 \\ \dfrac{XY}{2} = n \end{cases} \tag{1}$$

$n = 5, 6, 7, 13, 14, 15, 20, 21, \ldots$ などの数が合同数であることが知られているが，一般に与えられた正整数が合同数であることを判定することは一般に難しい．この問題を**合同数問題**という．

合同数問題に対する現在のアプローチは，楕円曲線に置き換えることである．式 (1) を満たす (X, Y, Z) に対して適切な変数変換 $(X, Y, Z) \mapsto (x, y)$ を施すと，次の関係式を満たす．

$$E_n \colon y^2 = x^3 - n^2 x \tag{2}$$

E_n は虚数乗法を持つ楕円曲線であり，いくらかの議論によって E_n の $\mathbb{Q}$-有理点が無限位数の点を持つならば，n が合同数であることが分かる．つまり，$\operatorname{rank} E_n(\mathbb{Q}) > 0$．また，弱 BSD 予想を仮定すると

$$\operatorname{rank} E_n(\mathbb{Q}) > 0 \Longleftrightarrow L(E_n, 1) = 0 \tag{3}$$

がいえる．$\Longrightarrow$ についてはコーツ・ワイルズによって示されている．

本発表の目的は，上の条件が半整数ウェイトの**保型形式**を使って記述できるという興味深い結果を紹介することである．最終的には，n が奇数のとき $L(E_n, 1)$ が重さ 3/2 の保型形式 $f(z)$ の q-展開の n 番目の係数を用いて書けて，$f(z)$ がテータ関数 $\Theta(z) := \sum_{x \in \mathbb{Z}} q^{x^2}$ を用いて

$$f(z) = (\Theta(z) - \Theta(4z))(\Theta(32z) - \frac{1}{2}\Theta(8z))\Theta(2z) \tag{4}$$

と表すことができる．$f(z)$ の n 番目の q-係数を調べることで，n が平方因子を持たない奇数のとき n が合同数であるための必要条件

$$\#\{(x, y, z) \in \mathbb{Z}^3 \mid n = 2x^2 + y^2 + 32z^2\} = \frac{1}{2}\#\{(x, y, z) \in \mathbb{Z}^3 \mid n = 2x^2 + y^2 + 8z^2\} \tag{5}$$

を導くことができる．なお，弱 BSD 予想を仮定すれば，逆も成り立つ．

参考文献

[1] N. コブリッツ, “楕円曲線と保型形式, ” シュプリンガー・ジャパン (2006).