广义相对论学习笔记（day0）

pupllen

2023 年 3 月 4 日

我们首先从数学上，从狭义相对论的条件中引入定义。

首先定义的相对论中的一个几何概念（亦即研究对象）是时空，即数学定义为：

Spacetime is a manifold of events that endowed with a metric.

时空是事件有度规的流形

这个定义又由 3 个概念组成，它们分别定义为:

流形（manifold）: A set of points with well-understood connectedness properties.

一组符合某种物理前提的点集，有良好的连通性。

事件（events）: Where and when something happens, usually we label it with coordinates.

时空中的点，一般写为一组坐标。

度规（metric）: A notion of distance between events.

描述时空中点之间的几何关系（通常是距离）的物理量。

有了这些基本概念，我们接下来便讨论最简单的一种情况：没有引力的时空。

为了方便讨论，接下来我们只用正交（orthogonal）的坐标系。

这个时空的事件可以写为一组四维坐标，即 (t, x, y, z)，表示时间的 t 与位置的三维向量 $\vec{x} = (x, y, z)$。

现在我们假设时空中有两个事件，即 (t_1, x_1, y_1, z_1) 和 (t_2, x_2, y_2, z_2)。

假设在某个时刻，事件 1 的位置向事件 2 的位置发射了一束光，在位置 2 接收到这束光时，又将其反射回位置 1。记发射时 $t_1 = t_{1e}$，接收到反射光时 $t_1 = t_{1r}$，而位置 2 反射时为 $t_2 = t_{2b}$。由于我们讨论的是没有引力的情况，因此在惯性参考系下（inertial frame）狭义相对论的光速不变假设意味着，如果一开始时且有 $t_1 = t_2 = 0$，则下式成立：

$$t_{2b} = \frac{1}{2}(t_{1e} + t_{1r}) \tag{1}$$

通过这样的方式，我们实际上是校准了 2 个时钟。

有了时间，配合上原本一般坐标系的表示距离的方式，我们可以定义事件关于时空的距离（spacetime interval）：

$$s^2 = -(c\Delta t)^2 + (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 \tag{2}$$

我们会看到，其中 c 为光速这件事和时空距离在惯性坐标系中不变是等价的，或者更一般地说，存在一个将时间和空间相互转换的固定因子，当其为光速时，时空距离在惯性坐标系中不变。

现在需要引入一些方便的记号，也是之后广义相对论主要使用的，记：

$$x^\mu \Rightarrow \mu \in (t, x, y, z) \,\mathrm{or}\, (0, 1, 2, 3)$$

且

$$c = 1$$

因此我们可以写出一种表示时空距离更紧凑的形式，即利用矩阵（度规）的形式，引入：

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{3}$$

那么时空距离就可以写为：

$$s^2 = \eta_{\mu\nu} \Delta x^\mu \Delta x^\nu \tag{4}$$

这里使用了爱因斯坦约定求和：对重复出现的指标时，式子自动对指标依次求和。