

1.1 Quantenmodelle – Teil 1

Ziel

Die Studierenden kennen akustische Resonanzen eines Rohr- und Kugelresonators und können deren Zusammenhang zu quantenmechanischen Systemen erklären. Sie kennen die Form verschiedener Kugelflächenfunktionen sowie deren Entartungsgrad und können den Zusammenhang zu den Quantenzahlen l und m erklären.

Hinweise zur Vorbereitung

Die Antworten auf diese Fragen sollten Sie vor der Versuchsdurchführung wissen. Sie sind die Grundlage für das Gespräch mit Ihrer Tutorin/Ihrem Tutor vor dem Versuch. Informationen zu diesen Themen erhalten Sie in der unten angegebenen Literatur.

- (a)
 - Wie ist ein Rohrresonator aufgebaut?
 - Wie entstehen stehende Schallwellen?
 - Wie können Schallwellen im eindimensionalen Rohrresonator mathematisch beschrieben werden?
 - Erklären Sie die Analogie zwischen Rohrresonator und quantenmechanischem Teilchen im Kasten.
- (b)
 - Wie ist ein Kugelresonator aufgebaut?
 - Welche Form haben die stehenden Schallwellen im Kugelresonator?
 - Wie ist die Symmetrieachse des Kugelresonators? Wo erwarten Sie großen Druck?
 - Wie können Schallwellen im Kugelresonator mathematisch beschrieben werden?
 - Erklären Sie die Analogie zwischen Kugelresonator und Wasserstoffatom.
 - Wie äußert sich eine energetische Entartung im Kugelresonator im Vergleich zum Wasserstoffatom?
 - Wie kann im Experiment diese Entartung aufgehoben werden?
 - Wie ist die Symmetrieachse des Kugelresonators, wenn die energetische Entartung aufgehoben ist?
 - Welche Größe wird im Kugelresonator-Experiment gemessen?

Zubehör

- TeachSpin Quantum-Analogs-Controller
- TeachSpin Schiene und Aluminiumzylinder (Rohrresonator)
- TeachSpin Kugelresonator
- Sinusgenerator
- Mehrkanal-Oszilloskop
- PC mit dem Programm **SpectrumSLC**

1.1.1 Grundlagen

1.1.2 Zusammenfassung der Grundlagen

Der Grundlagenteil dieses Versuchs ist sehr umfangreich gehalten. Grund ist, dass ein selbstständiges Aneignen des Wissens ohne den Hintergrund der Vorlesung sich bei diesem Thema als schwierig gestaltet. Der ausführliche Grundlagenteil soll Ihnen insbesondere zu Beginn des Semesters das Verständnis des Versuchs erleichtern. Vorab gibt es in diesem Abschnitt eine Zusammenfassung der wichtigsten Erkenntnisse. Lesen Sie zur Vorbereitung dennoch die gesamte Anleitung!

- Die Druckverteilung sowohl im Rohr- als auch im Kugelresonator kann mit einer Differentialgleichung namens Helmholtzgleichung berechnet werden.
- Die Aufenthaltswahrscheinlichkeitsdichte eines Elektrons kann mit einer Differentialgleichung namens Schrödingergleichung berechnet werden.
- Helmholtzgleichung und Schrödingergleichung haben eine identische winkelabhängige Lösung. Die radiale Lösung, der sog. Radialteil, ist aufgrund unterschiedlicher Potenziale verschieden.
- Im Experiment wird nur die winkelabhängige Lösung vermessen. Der Radialteil ist im Experiment nicht zugänglich, weil das Mikrofon nicht in den Resonator hinein bewegt werden kann.
- Die winkelabhängige Lösung besteht aus Kugelflächenfunktionen, die nichts anderes beschreiben als Eigenfunktionen des Winkelanteils des Laplace-Operators. Physikalisch beschreiben sie die stationäre, d. h. zeitunabhängige Druckverteilung auf der Kugeloberfläche des Kugelresonators.
- Analog beschreiben die Kugelflächenfunktionen bildlich gesprochen die stationäre Elektronenverteilung im Wasserstoffatom bei festem Radius. Physikalisch korrekt betrachtet man die Betragsquadrate der Kugelflächenfunktionen, um die Aufenthaltswahrscheinlichkeit des Elektrons im Wasserstoffatom zu erhalten.
- Zur Helmholtz- wie auch zur Schrödingergleichung gehören mehrere Lösungen, die die gleiche Frequenz bzw. Energie aufweisen. Sie werden als entartet bezeichnet. Gekennzeichnet werden diese Lösungen mit den Quantenzahlen l und m , die aus dem Schalenmodell der Chemie bekannt sind. l gibt an, ob das Orbital sphärisch, hantelförmig, ... ist. m gibt an, wie einzelne Lösungen mit festem l sich unter dem Einfluss eines Magnetfelds (Wasserstoffatom) oder einer leichten Deformation (Kugelresonator) verhalten.

1.1.3 Die Transferfunktion von Lautsprecher und Mikrofon

Betrachtet man das System aus Lautsprecher und Mikrofon selbst ohne einen Resonator dazwischen, so erkennt man, dass das Ausgangssignal am Mikrofon bei verschiedenen Frequenzen nicht konstant ist. Dieser Zusammenhang wird Transferfunktion oder auch Übertragungsfunktion genannt. Bei den im Aufbau verwendeten Lautsprechern und Mikrofonen weist die Transferfunktion üblicherweise ein erstes, ausgeprägtes Maximum bei etwa 460 Hz auf, das versehentlich mit einer Resonanz verwechselt werden könnte. Am ersten Versuchstag spielt dieser Effekt keine entscheidende Rolle, weil solch niedrige Frequenzen lediglich beim Spektrum des Rohrresonators auftreten, bei welchem in der verwendeten Konfiguration die erste Resonanz ziemlich exakt mit dem ersten Maximum der Transferfunktion zusammenfällt. Die Resonanz erscheint dadurch etwas breiter, was sich aber auf die Berechnung der Schallgeschwindigkeit kaum auswirkt. Beim zweiten Versuchsteil ist es allerdings wichtig, die Position der Maxima der Transferfunktion zu

kennen, weil hier auch niedrigere Frequenzen vorkommen und die Maxima der Transferfunktion unabhängig von Resonanzen auftreten.

Abbildung 1.1 zeigt die Transferfunktion eines Lautsprecher-Mikrofon-Systems, dessen drei Maxima bei 0,46 kHz, 2,11 kHz und, ganz schwach ausgeprägt, bei 4,58 kHz liegen.

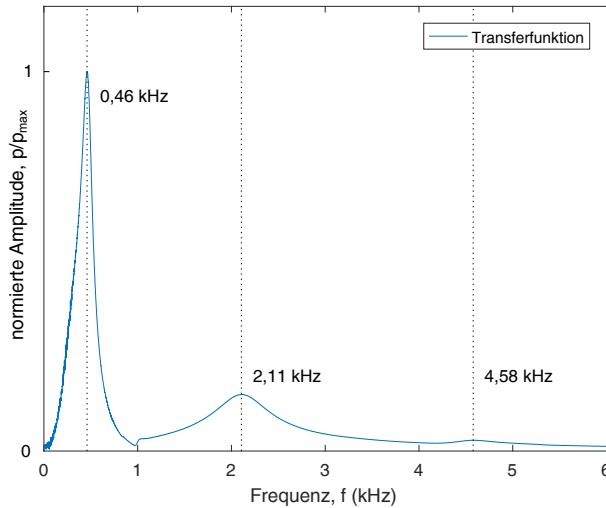


Abbildung 1.1: Transferfunktion mit den drei relevanten Maxima.

1.1.4 Der Rohrresonator

Stationäre Druckverteilung in einem Rohrresonator

Der Rohrresonator besteht aus einem Rohr, an dessen einem Ende ein Lautsprecher und an dessen anderem Ende ein Mikrofon angeschlossen ist. Eine Resonanz in diesem Resonator tritt auf, wenn sich eine stehende Welle bildet. Die Schallwelle, die vom Lautsprecher erzeugt wird, wird zwischen den Enden des Resonators reflektiert. Eine Resonanz entsteht, wenn die zweimal reflektierte Welle in Phase mit der vom Lautsprecher erzeugten Welle ist und dadurch konstruktiv mit der ursprünglichen Welle interferiert. Die Druckverteilung im Rohrresonator ist dann stationär, d. h. sie ändert sich im Laufe der Zeit nicht. Dies ist erfüllt, wenn die Rohrlänge L ein ganzzahliges Vielfaches $n = 1, 2, \dots$ ($n \in \mathbb{N}$) der halben Wellenlänge $\frac{\lambda}{2}$ ist:

$$L = n \frac{\lambda}{2} = n \frac{c}{2f}, \quad (1.1)$$

mit der Schallgeschwindigkeit c und der Frequenz f . Definiert man die sog. Kreiswellenzahl k über $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, so erhält man für k die Bedingung

$$k = \frac{n\pi}{L}. \quad (1.2)$$

Abbildung 1.2 oben zeigt die Amplitude p der Druckverteilung, bzw. deren Betrag $|p|$ für $n = 1$ einer stehenden Welle im Rohr. Beachten Sie, dass die Schwingung an sich longitudinaler Natur

ist. Es findet keine senkrecht zur Ausbreitungsrichtung der Schallwelle gerichtete Bewegung der Luftmoleküle statt.

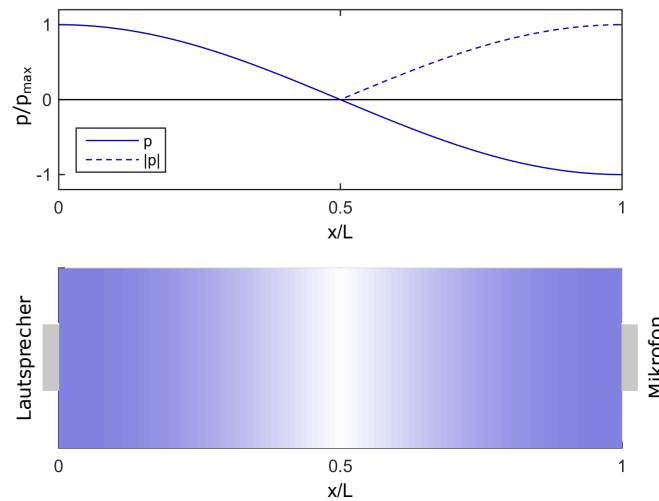


Abbildung 1.2: Stehende Schallwelle in einem Rohr, welches durch einen Lautsprecher und ein Mikrofon abgeschlossen wird.

Dies wird im unteren Teil der Abbildung verdeutlicht: Dieser zeigt das Rohr mit Lautsprecher und Mikrofon. Direkt am Lautsprecher und am Mikrofon befinden sich Stellen mit hohem Druck. In der Mitte befindet sich ein Druckminimum.

Mathematisch kann die (vereinfacht eindimensionale) Druckverteilung $P(x, t)$ im Rohrresonator mit Hilfe der Helmholtzgleichung in der Form

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} P(x, t) = \frac{1}{\rho \kappa} \frac{\partial^2}{\partial x^2} P(x, t) \quad (1.3)$$

berechnet werden. Dabei sind ρ die Dichte und κ die Kompressibilität. Nach Abseparieren der Zeitabhängigkeit über $P(x, t) = p(x) \cdot \cos(\omega t)$ erhält man die stationäre, also zeitunabhängige Differenzialgleichung für den Druck, die durch eine Kosinusfunktion gelöst wird.

Abbildung 1.3 zeigt ein Spektrum des Rohrresonators. Darin erkennt man, dass die mit dem Mikrofon gemessene Druckamplitude bei bestimmten Frequenzen Maxima hat, welche einer Resonanz entsprechen. Jedem Maximum kann also ein n zugeordnet werden, das die Resonanz charakterisiert. Die verschiedenen Frequenzen können entweder mit dem Sinusgenerator oder mit der Soundkarte des PCs auf den Lautsprecher gegeben werden.

Das Teilchen im Kasten

Auch Materie, die wir uns gewöhnlich als Teilchen wie Elektronen oder Protonen vorstellen, besitzt Welleneigenschaften. Die zugehörige Wellenlänge ist die sog. de Broglie-Wellenlänge eines Teilchens λ_B . Sie wird durch den Impuls p des Teilchens und das Planck'sche Wirkungsquantum $h = 6,626 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$ über $\lambda_B = h/p$ bestimmt. Sie ist derart klein, dass die daraus entstehenden Phänomene im Alltag nicht beobachtet werden können. Schallwellen in einem Rohr können als Analogon zum quantenmechanischen Teilchen, das in einem Kasten eingesperrt ist, dienen. Die

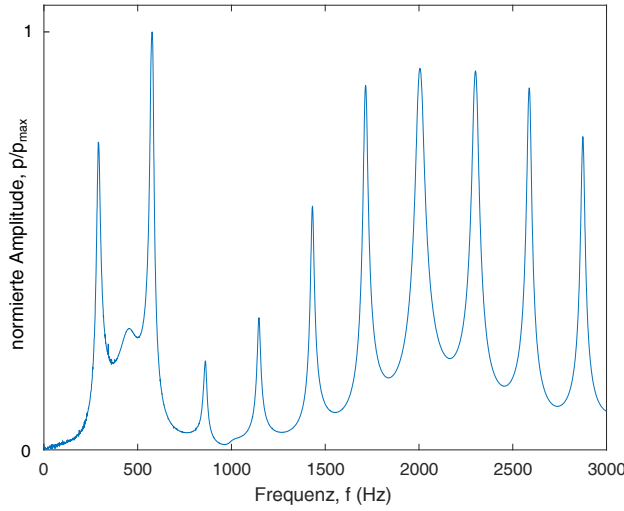


Abbildung 1.3: Spektrum des Rohrresonators.

Differenzialgleichung, die die Wellenfunktion $\Psi(x, t)$ des Teilchens beschreibt, ist die Schrödingergleichung:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(x, t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Psi(x, t) + V(x) \Psi(x, t) \quad (1.4)$$

mit der Teilchenmasse m , einem skalaren Potenzial $V(x)$ und $\hbar = \frac{h}{2\pi}$. Im Fall eines eindimensionalen Kastens der Länge L mit unendlich hohen Potenzialwänden ist $V(0 < x < L) = 0$, $V(x \geq L) \rightarrow \infty$ und ebenfalls $V(x \leq 0) \rightarrow \infty$. Dadurch reduziert sich in diesem Fall im Inneren des Kastens die Schrödingergleichung auf

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(x, t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Psi(x, t). \quad (1.5)$$

Diese Differenzialgleichung wird durch komplexe Wellenfunktionen gelöst, die zwischen den beiden Enden hin und her reflektiert werden. Die Wahrscheinlichkeit, ein Teilchen an einer bestimmten Stelle x zu finden, ist dabei nach der Kopenhagener Deutung der Quantenmechanik durch die Wahrscheinlichkeitsdichte $|\Psi(x, t)|^2$ gegeben. Multipliziert man diese mit der Elementarladung e , so erhält man die Ladungsdichte im Kasten. Durch Abseparation der Zeitabhängigkeit mit dem Ansatz $\Psi(x, t) = \psi(x) \cdot e^{-i\omega t}$ erhält man die zeitunabhängige Schrödingergleichung

$$E\psi(x) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi(x). \quad (1.6)$$

E bezeichnet dabei die Energie des Teilchens. Stehende Wellen entsprechen einer zeitunabhängigen Lösung von Gleichung (1.5), da einfallende und reflektierte Welle in Phase sind, d. h. sich Minima und Maxima im Laufe der Zeit im Raum nicht verschieben. Gleichung (1.6) wird durch ebene Wellen der Form

$$\psi(x) = A \cdot \sin(kx + \phi) \quad (1.7)$$

gelöst. A ist dabei eine komplexe Amplitude, k die Kreiswellenzahl und ϕ eine Phase. An den Rändern des Kastens, wo das Potenzial unendlich hoch ist, muss die Wellenfunktion null sein. Die Randbedingung $\psi(x=0) = 0$ bedingt $\phi = 0$ (oder ein ganzzahliges Vielfaches von π). Die zweite Randbedingung $\psi(x=L) = 0$ bedeutet, dass für die Kreiswellenzahl

$$k = \frac{n\pi}{L} \quad (1.8)$$

gelten muss, wobei n eine natürliche Zahl ist. Dies entspricht exakt Gleichung (1.2) für den Rohrresonator.

Abbildung 1.4 oben zeigt die Wellenfunktion $\psi(x)$ für $n = 1$ wobei nach Gleichung (1.8) gilt $\frac{\pi}{k} = L = \frac{\lambda_B}{2}$. Die Wellenfunktion unterscheidet sich von den Amplituden der Druckverteilung in Abbildung 1.2 lediglich durch die Position der Knoten und Bäuche. Der untere Teil der Abbildung verdeutlicht den Kasten mit den Potenzialwänden.

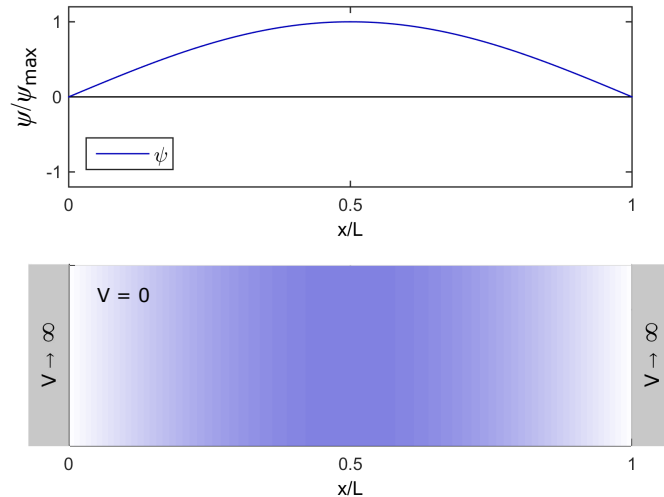


Abbildung 1.4: Eine Lösung der Schrödingergleichung für einen Potenzialtopf mit unendlich hohen Wänden.

Lebensdauer

In den meisten Fällen haben Eigenzustände keine unendliche Lebensdauer. In der klassischen Physik kommt es zu Zerfällen durch Verlust von Energie durch Reibung, wohingegen in der Quantenmechanik nur der Grundzustand stabil ist. Angeregte (metastabile) Zustände mit höherer Energie zerfallen in den Grundzustand, der den Eigenzustand des Systems mit der niedrigsten Energie beschreibt. Dieser Effekt ist in den Differenzialgleichungen nicht enthalten. Man kann den Zerfall jedoch leicht in der Wellenfunktion $\cos(\omega t)$ bzw. $e^{i\omega t}$ berücksichtigen. Mit einem schwingenden und einem dämpfenden Faktor mit Dämpfungskonstante λ ergibt sich entsprechend $e^{-\lambda t} \cos(\omega t)$ bzw. $e^{-\lambda t - i\omega t}$. Im Falle einer endlichen Lebensdauer kann die Wellenfunktion nicht einer einzelnen Eigenfrequenz ω_0 zugeordnet werden, sondern enthält ein Spektrum

von Frequenzen, das durch eine Fouriertransformation bestimmt werden kann. Aus der Fouriertransformation ergibt sich die sogenannte Spektralfunktion $A(\omega)$, die im klassischen Fall die Amplitude als Funktion der Frequenz beschreibt. Im quantenmechanischen Fall ist $|A(\omega)|^2$ die Wahrscheinlichkeit, ein Teilchen mit der Energie $E = \hbar\omega$ zu messen. Man erhält für die Spektralfunktion

$$A(\omega) = \frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}}{\lambda + i(\omega_0 - \omega)} \quad (1.9)$$

und für das Betragsquadrat die sogenannte Lorentzkurve

$$|A(\omega)|^2 = \frac{\frac{1}{2\pi}}{(\omega_0 - \omega)^2 + \lambda^2} \quad (1.10)$$

Die Breite der Verteilung hängt direkt mit der Lebensdauer τ des Eigenzustands zusammen. Die Lebensdauer bezeichnet dabei die Zeit, nach der die Amplitude des Zustandes auf den Bruchteil $\frac{1}{e}$ abgefallen ist. Die Halbwertsbreite (*engl.* *full width at half maximum*) entspricht dabei der doppelten Dämpfungskonstanten (2λ), woraus die Lebensdauer

$$\tau = \frac{1}{\lambda} \quad (1.11)$$

sowie die Energie des metastabilen Zustands $\Gamma = \hbar\lambda$ berechnet werden kann.

Im Akustikexperiment ist die Situation ein wenig anders, kommt dem quantenmechanischen Analogon jedoch sehr nahe. Eine Schallwelle nahe einer Eigenfrequenz kann als getriebener gedämpfter harmonischer Oszillator betrachtet werden. Unter Betrachtung einer Anregung durch den Lautsprecher $K \cos(\omega t)$ kann die lineare Differenzialgleichung

$$\frac{d^2 p}{dt^2} + 2\gamma \frac{dp}{dt} + \omega_0^2 p = K \cos(\omega t) \quad (1.12)$$

analog zu den Experimenten „Torsionsoszillator“ und „Schwingkreis“ gelöst werden und für ausreichend große t die partikuläre, zeitunabhängige Lösung weiter verwendet werden. Die Amplitude hängt dabei vom Verhältnis $\frac{\omega}{\omega_0}$ der Kreisfrequenz ω der treibenden Kraft zur betrachteten Eigenkreisfrequenz ω_0 ab.

$$A(\omega) = \frac{K}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\gamma\omega)^2}} \quad (1.13)$$

Vergleich von Schallwellen mit einem quantenmechanischen Teilchen im Kastenpotenzial

Im klassischen Fall von Schallwellen bildet sich im Rohr eine stationäre Verteilung der Druckamplitude aus. Im Fall des quantenmechanischen Teilchens handelt es sich um eine stationäre Wahrscheinlichkeitsverteilung. Die Randbedingungen unterscheiden sich: Während bei der Druckverteilung bedingt durch den Versuchsaufbau an den Enden des Rohrs Stellen maximaler Druckunterschiede liegen, verschwindet die Wahrscheinlichkeitsdichte beim quantenmechanischen Teilchen an den Potenzialwänden. Dies hat allerdings keinen Einfluss auf die erlaubten Wellenlängen, bzw. Frequenzen im Rohr. Sowohl bei dem quantenmechanischen Teilchen als auch bei stehenden Wellen in einem Rohr sind nur Wellen mit einer Kreiswellenzahl k erlaubt, die ein ganzzahliges Vielfaches von π/L ist.

1.1.5 Der Kugelresonator

Das Prinzip dieses Versuchsteils ist identisch zum Rohrresonator. Lediglich die Form des Resonators unterscheidet sich. Es handelt sich jetzt um eine Hohlkugel, bestehend aus einer unteren und einer oberen Kugelhälfte, die gegeneinander verdreht werden können, um die Amplituden der Resonanzen winkelabhängig messen zu können. Auch im Kugelresonator bildet sich eine stehende Welle aus. Der Drehwinkel werde mit α bezeichnet und kann an einer Skala an einer der Halbkugeln abgelesen werden. Unter einem Winkel von 45° gegen die Horizontale sind in der unteren/oberen Halbkugel ein Lautsprecher/Mikrofon eingebaut. Diese stehen sich bei einem Winkel von $\alpha = 180^\circ$ gegenüber (siehe Abbildung 1.6). Da das Mikrofon nicht in den Resonator hinein bewegt werden kann, kann der radiusabhängige Teil der Lösung der zugehörigen Differenzialgleichung nicht gemessen werden.

Ziel des ersten Unterabschnitts dieses Kapitels ist es, die Druckverteilung auf der Kugeloberfläche zu verstehen. Der zweite Unterabschnitt befasst sich damit, was passiert, wenn die Kugelsymmetrie gebrochen wird, indem zwischen die beiden Kugelhälften Distanzringe eingelegt werden. Im dritten Unterabschnitt wird die Analogie zum Wasserstoffatom erklärt.

Stationäre Druckverteilung im Kugelresonator

Die Kugelsymmetrie des dreidimensionalen Problems legt die Behandlung in Kugelkoordinaten nahe und ermöglicht die Separation in einen radialen und einen winkelabhängigen Teil der Helmholtzgleichung. Abbildung 1.5 zeigt die Konvention der Koordinaten: Der Polarwinkel θ wird von der positiven z -Achse aus in Richtung negative z -Achse von 0 bis π gemessen. Der Azimutwinkel φ wird ab der positiven x -Achse gegen den Uhrzeigersinn von 0 bis 2π gemessen.

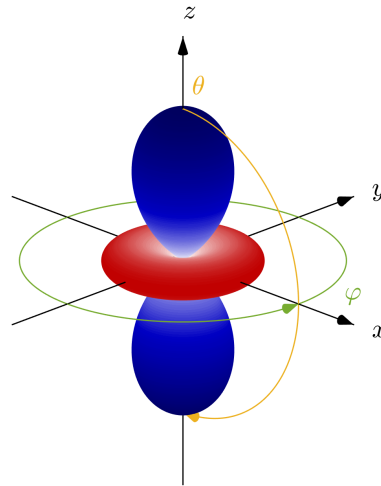


Abbildung 1.5: Konvention der Koordinaten

Für den Druck $P(\vec{r}, t)$ der Schallwellen im Kugelresonator gilt analog zum Rohrresonator wieder die Helmholtzgleichung, allerdings in der dreidimensionalen Form:

$$\frac{\partial^2 P(\vec{r}, t)}{\partial t^2} = \frac{1}{\rho\kappa} \Delta P(\vec{r}, t) \quad , \quad (1.14)$$

mit der Dichte ρ und der Kompressibilität κ . Setzt man für den Druck den Ansatz $P(\vec{r}, t) = p(\vec{r}) \cos(\omega t)$ mit der Frequenz ω der Schallwellen ein, so erhält man mit $1/c^2 = \rho\kappa$ die stationäre Druckverteilung

$$-\frac{\omega^2}{c^2} p(\vec{r}) = \Delta p(\vec{r}) \quad . \quad (1.15)$$

Drückt man \vec{r} und den Laplace-Operator Δ in Kugelkoordinaten aus, so ergibt sich folgende Differenzialgleichung für $p(r, \theta, \varphi)$:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} p(r, \theta, \varphi) \right) - \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} p(r, \theta, \varphi) \right) - \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} p(r, \theta, \varphi) \\ = \frac{\omega^2}{c^2} p(r, \theta, \varphi) \quad . \end{aligned} \quad (1.16)$$

Diese Differenzialgleichung kann durch Einsetzen des Ansatzes $p(r, \theta, \varphi) = Y_l^m(\theta, \varphi) \cdot f(r)$ in zwei Differenzialgleichungen getrennt werden, von denen die eine nur noch vom Polarwinkel θ und vom Azimutwinkel φ und die andere nur noch vom Radius r abhängt. Die Differenzialgleichung, die nur noch von den Winkeln θ und φ abhängt, lautet

$$-\left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right] Y_l^m(\theta, \varphi) = l(l+1) Y_l^m(\theta, \varphi) \quad . \quad (1.17)$$

Die $Y_l^m(\theta, \varphi)$ heißen Kugelflächenfunktionen. Physikalisch beschreiben sie, wie die stationäre, d. h. zeitunabhängige Verteilung der Druckamplitude auf der Kugeloberfläche des Kugelresonators aussieht. Die Druckverteilung innerhalb der Kugel wird durch den Radialteil¹ $f_n(r)$ beschrieben.

In der Differenzialgleichung (1.17) taucht nicht nur die Kugelflächenfunktion $Y_l^m(\theta, \varphi)$ auf, sondern auch eine unbekannte Zahl l , die zur Verdeutlichung bereits als Index an die Kugelflächenfunktion angehängt ist. Dies bedeutet, dass die Differenzialgleichung nicht nur eine Lösung, sondern mehrere Lösungen hat, die je nach Wert von l unterschiedlich sind. Es kann gezeigt werden, dass die l nicht-negativ, ganzzahlig sein müssen, d. h. $l \in \mathbb{N}_0$. Bestimmt man die Kugelflächenfunktionen, erhält man

$$Y_l^m(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{(2l+1)(l-m)!}{4\pi(l+m)!}} \cdot P_l^m(\cos \theta) \cdot e^{im\varphi} \quad . \quad (1.18)$$

Die $P_l^m(\cos \theta)$ heißen zugeordnete Legendre-Polynome². Sie können über

¹Die Lösungen der zugehörigen Differenzialgleichung sind die Besselfunktionen mit halbzahligen Index. Da der Radialteil in diesem Experiment nicht gemessen werden kann, soll hier nicht weiter darauf eingegangen werden. Eine detaillierte Lösung der Helmholtzgleichung findet sich in [1].

²Nicht zu verwechseln mit dem Druck $P(\vec{r}, t)$.

$$P_l^m(\cos \theta) = \frac{(-1)^m}{2^l l!} (1 - \cos^2 \theta)^{m/2} \frac{d^{l+m}}{d(\cos \theta)^{l+m}} (\cos^2 \theta - 1)^l, \quad (1.19)$$

berechnet werden. Hierbei tritt ein weiterer Wert, m auf, von dem die Kugelflächenfunktionen ebenfalls abhängen. Auch m wird als Index kenntlich gemacht. Es kann gezeigt werden, dass die m der Einschränkung $-l \leq m \leq l$ genügen müssen, wobei die m ganzzahlig sind, d. h. $m \in \mathbb{Z}$. Dies bedeutet, dass es zu jedem l nicht nur eine Kugelflächenfunktion gibt, die die Differenzialgleichung (1.17) löst, sondern $2l + 1$, die durch die verschiedenen m gekennzeichnet werden.

Physikalisch bedeutet das, dass es bei festem l für eine Kugeloberfläche mehrere Schwingungsmöglichkeiten gibt, die alle die gleiche Frequenz bzw. Energie besitzen. Man sagt, die Kugelflächenfunktionen mit den unterschiedlichen m , die alle zu einem l gehören, sind entartet. Man spricht in diesem Fall von m -Entartung oder Entartung bezüglich m . Da sie die gleiche Frequenz bzw. Energie haben, treten sie im Spektrum an der gleichen Stelle auf. Dies gilt aber nur für den kugelsymmetrischen Fall. Was passiert, wenn die Kugelsymmetrie aufgehoben wird, wird im nächsten Abschnitt diskutiert.

Die zu kleinen l zugeordneten Legendre-Polynome sind verhältnismäßig einfach und in Tabelle 1.1 aufgelistet.

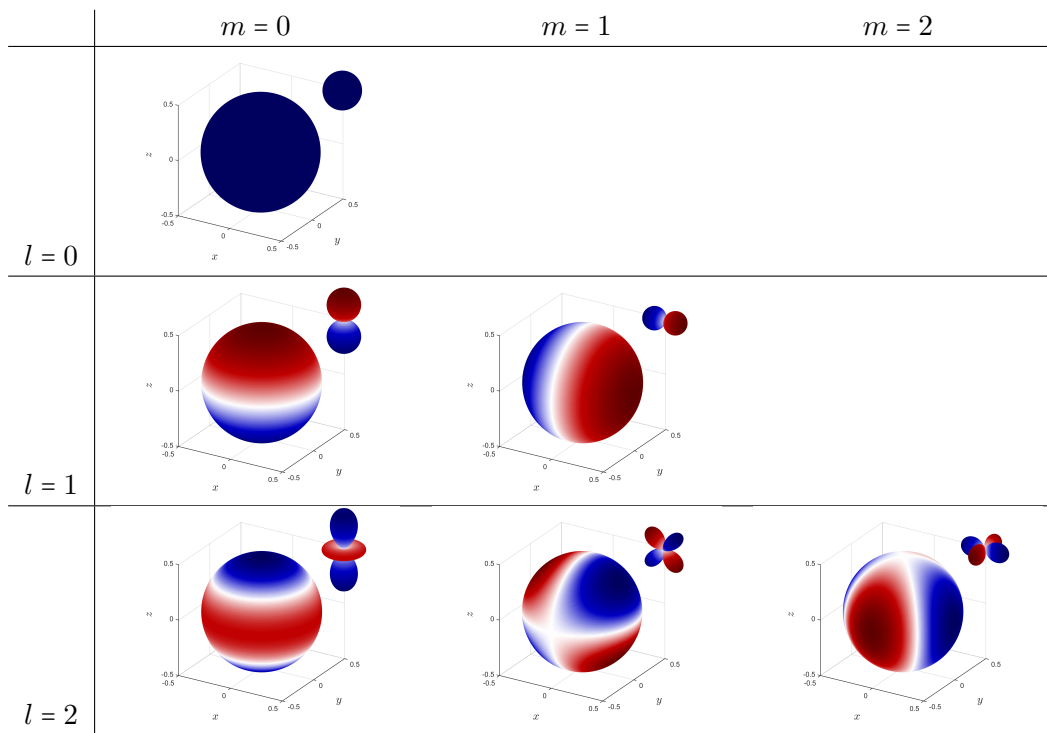
Tabelle 1.1: Legendre-Polynome bis $l = 2$.

	$m = 0$	$m = \pm 1$	$m = \pm 2$
$l = 0$	$P_0^0(\cos \theta) = 1$		
$l = 1$	$P_1^0(\cos \theta) = \cos \theta$	$P_1^{\pm 1}(\cos \theta) = \mp \sin \theta$	
$l = 2$	$P_2^0(\cos \theta) = \frac{1}{2}(3 \cos^2 \theta - 1)$	$P_2^{\pm 1}(\cos \theta) = \mp 3 \cos \theta \sin \theta$	$P_2^{\pm 2}(\cos \theta) = 3 \sin^2 \theta$

Tabelle 1.2 zeigt die daraus berechneten Realteile der Kugelflächenfunktionen $\text{Re}\{Y_l^m(\theta, \varphi)\}$ bis $l = 2$. Warum ausgerechnet der Realteil von Interesse ist, wird im Abschnitt weiter unten („Was wird im Kugelresonator-Experiment gemessen?“) erklärt.

Zu jeder (l, m) -Konfiguration gibt es eine große Abbildung einer Kugel mit einer kleinen Figur rechts oben. Die Kugeln haben einen beliebig gewählten, festen Radius; hier 0.5. Das jeweilige Koordinatensystem bezieht sich nur auf die zugehörige große Kugel. Dunkle Stellen auf der Kugeloberfläche, also Stellen in dunklem Blau oder dunklem Rot, entsprechen Stellen mit großer Druckamplitude, wohingegen weiße Linien Knotenlinien ohne Druckschwankungen darstellen. Die Farben selbst spielen im Experiment keine Rolle, da sie unterschiedliche Phasen darstellen, welche im Experiment nicht gemessen werden.

Interessant werden die Farben erst, wenn man die Kugelflächenfunktionen als Eigenschwingungen einer Kugeloberfläche, beispielsweise einer Seifenblase betrachtet. An weißen Knotenlinien schwingt die Kugeloberfläche nicht. Stellen mit unterschiedlicher Farbe hingegen schwingen gegenphasig. Bildlich bedeutet dies z. B. für den Fall $l = 1$ und $m = 0$: wenn die obere Kugelhälfte in rot gerade nach außen vom Kugelmittelpunkt weg ausgelenkt ist, dann ist die untere, blaue Kugelhälfte gerade nach innen zum Kugelmittelpunkt hin ausgelenkt.

Tabelle 1.2: Realteil der Kugelflächenfunktionen $\text{Re}\{Y_l^m(\theta, \varphi)\}$ bis zu $l = 2$ zu positiven m .

Die Anzahl der Knotenlinien lässt sich aus l ableiten. Die Mode mit $l = 0$ hat keine Knotenlinie, die Moden mit $l = 1$ haben eine Knotenlinie, die Moden mit $l = 2$ haben zwei Knotenlinien, usw. Wie viele der Knotenlinien (in dem hier gewählten Koordinatensystem) horizontal und/oder vertikal verlaufen, lässt sich auf vergleichbare Weise aus m bestimmen.

Die kleinen Figuren in den einzelnen Bildern zeigen Orbitale, wie man sie gewöhnlich aus Chemie-Büchern kennt. Sie sind lediglich eine andere Darstellung der Kugeln, die den Vorteil hat, dass keine Farbintensitäten benötigt werden. Die Amplitude ist hierbei nicht in der Farbintensität kodiert, sondern im Abstand vom Ursprung, wobei der Ursprung hier in der vertikalen Mitte jeder Figur liegt. Je größer der Abstand vom Ursprung, desto stärker ist der Druckschwankung an dieser Stelle. Beispielsweise ist bei der Mode mit $l = 2$ und $m = 0$ klar zu erkennen, dass in den blauen Bereichen die Druckschwankung stärker ist als im roten Bereich. Die „Scheibe“ ist deutlich näher am Ursprung als die „Keulen“ es sind.

$\text{Re}\{Y_l^m(\theta, \varphi)\}$ von $+m$ und $-m$ zu einem bestimmten $|m|$ unterscheiden sich nur in der Phase. Dies bedeutet, dass Flächen, die hier blau erscheinen, für das entsprechende $-m$ rot sind. Weil der Unterschied gut vorstellbar ist, soll hier die Darstellung der Kugelflächenfunktionen zu den positiven m genügen. Für bestimmte m sind die Realteile sogar identisch, dann unterscheiden sich allerdings die beiden Imaginärteile in ihrer Phase.

In Tabelle 1.2 mag etwas irritieren, dass die kleinen Abbildungen unterschiedlich groß sind. Insbesondere bei $l = 1$ fällt diese Tatsache auf. Grund dafür ist aber nicht eine tatsächlich unterschiedliche Größe, was unterschiedliche Amplituden für $m = 0$ und $m = 1$ bedeuten würde, sondern nur eine unterschiedliche Skalierung. Gleiche Farbintensität bedeutet stets gleiche Amplitude.

Der Zustand $l = 0$ und $m = 0$ entspricht einer konstanten Druckverteilung im Resonator. Da die Wände der Kugel fest sind und dem dauerhaft nach außen wirkenden Druck nicht nachgeben,

kommt es in diesem Fall zu keiner Schwingung. Die entsprechende Frequenz liegt theoretisch bei 0 Hz und kann somit nicht beobachtet werden.

Der Kugeleresonator mit Zwischenringen – Symmetriebrechung

Hebt man die Kugelsymmetrie auf, indem man z. B. wie im Versuch Distanzringe zwischen die beiden Halbkugeln legt und die Kugel damit vertikal leicht in die Länge zieht, dann wird die Entartung der einzelnen m -Unterzustände aufgehoben. Dies bedeutet, dass die verschiedenen Kugelflächenfunktionen zu einem l nicht mehr die gleiche, sondern geringfügig unterschiedliche Energie haben. Im Spektrum erscheinen sie dann nicht mehr bei der gleichen Frequenz, sondern als Gruppe von $l + 1$ Peaks.

Eigentlich sollten $2l + 1$ Resonanzen auftreten, weil es zu jedem l insgesamt $2l + 1$ verschiedene m gibt. Die $+m$ und $-m$, die zu einem bestimmten m gehören bleiben aber entartet. Dies erscheint logisch, wenn man sich vergegenwärtigt, dass sie sich wie oben beschrieben nur in der Phase unterscheiden. Die Kugelflächenfunktionen sind durch die Verformung des Resonators nicht mehr die exakte Lösung, können aber näherungsweise als Lösung angenommen werden, da die Verformung gering ist.

Der Kugeleresonator als Modell für das Wasserstoffatom

Das Wasserstoffatom mit einem einzigen Elektron im Coulombpotential des Kerns ist gut geeignet, um daran die grundlegenden Phänomene der Quantenphysik in Atomen zu studieren. Durch seinen einfachen Aufbau ohne jegliche Korrelationen zwischen mehreren Elektronen kann die zugehörige Schrödingergleichung analytisch gelöst werden.

Für das Wasserstoffatom soll hier die Lösung der dreidimensionalen, zeitunabhängigen Schrödingergleichung

$$E\psi(\vec{r}) = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi(\vec{r}) + V(r)\psi(\vec{r}) \quad (1.20)$$

dargestellt werden. $V(r) = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}$ steht für das Coulombpotential des Kerns. Ausgedrückt in Kugelkoordinaten lautet die Schrödingergleichung

$$\begin{aligned} E\psi(r, \theta, \varphi) = & \frac{\hbar^2}{2mr^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \psi(r, \theta, \varphi)}{\partial r} \right) + \frac{\hbar^2}{2mr^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \psi(r, \theta, \varphi)}{\partial \theta} \right) \\ & + \frac{\hbar^2}{2mr^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \psi(r, \theta, \varphi)}{\partial \varphi^2} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \psi(r, \theta, \varphi). \end{aligned} \quad (1.21)$$

Gleichung (1.21) kann wieder mit Hilfe eines Separationsansatzes $\psi(r, \theta, \varphi) = Y_l^m(\theta, \varphi) R_{n,l}(r)$ in zwei Differenzialgleichungen getrennt werden. Die Kugelflächenfunktionen $Y_l^m(\theta, \varphi)$ lösen auch hier die rein von den Winkeln abhängige Differenzialgleichung

$$-\left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right] Y_l^m(\theta, \varphi) = l(l+1) Y_l^m(\theta, \varphi), \quad (1.22)$$

die zur Differenzialgleichung (1.17) identisch ist. $R_{n,l}(r)$ löst die Radialgleichung³, die sich von der des Kugelresonators unterscheidet, aber hier ebenfalls nicht von Interesse ist.

An dieser Stelle muss allerdings noch auf die weitere Quantenzahl n eingegangen werden, die im Radialteil des Wasserstoffatoms auftritt. Auch in der Lösung des Radialteils des Kugelresonators würde eine solche Zahl n auftreten. In dieser sog. Hauptquantenzahl unterscheiden sich das Wasserstoffatom und der Kugelresonator. Dadurch treten die Resonanzen der beiden Systeme im Spektrum nicht in der gleichen Reihenfolge auf. Insbesondere sind die verschiedenen l zu einem bestimmten n beim Kugelresonator nicht entartet, beim Wasserstoffatom jedoch schon (s. u.). Der Unterschied kann auf die unterschiedlichen Potenziale zurückgeführt werden.

Die Hauptquantenzahl ist bekannt aus dem Schalenmodell der Chemie: $n = 1$ entspricht der K-Schale, $n = 2$ der L-Schale, usw. Alle Zustände des Wasserstoffatoms mit gleicher Hauptquantenzahl haben die gleiche Energie. Wie bereits gezeigt, können die möglichen Zustände im Wasserstoffatom (Kugelresonator) im Gegensatz zum Teilchen im Kasten (Rohrresonator) nicht mit der Quantenzahl n allein klassifiziert werden. Zu einer gegebenen Hauptquantenzahl werden noch die beiden Nebenquantenzahlen l und m benötigt. l heißt Drehimpulsquantenzahl. Bei genauerer Betrachtung der Differenzialgleichungen stellt sich heraus, dass zu jedem gegebenen n für die Drehimpulsquantenzahl $0 \leq l \leq n-1$ gilt. D. h. es gibt n Unterzustände, die mit jeweils einem anderen l beschrieben werden, aber theoretisch alle dieselbe Energie besitzen. Die Drehimpulsquantenzahl ist ebenfalls aus der Chemie bekannt. Sie bezeichnet die verschiedenen Orbitale, auf denen sich das Elektron befinden kann. $l = 0$ entspricht dabei dem s-Orbital, $l = 1$ dem p-Orbital, $l = 2$ dem d-Orbital, usw. Der Zustand eines Elektrons kann jetzt mit den beiden Quantenzahlen charakterisiert werden. So befindet sich das einzige Elektron, das das Wasserstoffatom besitzt, im Grundzustand im 1s Zustand ($n = 1$ und damit $l = 0$).

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass der winkelabhängige Teil des Drucks p im Kugelresonator identisch zu dem winkelabhängigen Teil der Elektronenwellenfunktion ψ ist. Da die Radialteile verschieden sind, unterscheidet sich die Hauptquantenzahl n .

Für Mehrelektronensysteme kann jedes Orbital mit mehreren Elektronen besetzt werden, die sich in ihrer magnetischen Quantenzahl m und ihrem Spin unterscheiden. Wie bereits erwähnt kann die magnetische Quantenzahl insgesamt $(2l+1)$ ganzzahlige Werte im Bereich $-l \leq m \leq l$ annehmen. Auch im Wasserstoffatom gilt, dass im kugelsymmetrischen Fall die Energiewerte der verschiedenen magnetischen Quantenzahlen m für jedes l gleich, also entartet sind. Befindet sich ein Atom in einem Magnetfeld B , so sind die m -Unterniveaus nicht mehr energetisch gleich (Zeeman-Effekt). Sie verschieben sich in ihrer Energie gemäß $\Delta E = m\mu_B B$, wobei μ_B das Bohr'sche Magneton bezeichnet. Es kommt zu einer äquidistanten Aufspaltung der Energiezustände. Eine Aufhebung der m -Entartung soll im letzten Versuchsteil mit Hilfe der Deformierung des Kugelresonators durch Zwischenringe veranschaulicht werden.

Was wird im Kugelresonator-Experiment gemessen?

In der Theorie wurde gezeigt, dass $p \sim Y_l^m(\theta, \varphi)$. Im ersten Versuchsteil ist der Resonator kugelsymmetrisch (keine Zwischenringe). Die einzige leichte Brechung der Symmetrie stellt der Lautsprecher dar (vgl. Abbildung 1.6). Dieser strahlt fast ausschließlich in Richtung Kugelmitte ab, was dazu führt, dass die Verbindungslinie vom Lautsprecher durch die Kugelmitte zur Symmetrieachse des Systems wird. Die Kugelflächenfunktionen „liegen“ also schief im Resonator, wie

³Auch diese Radialgleichung soll hier nicht explizit gelöst werden. Eine detaillierte Lösung für das Wasserstoffatom und für ein Teilchen in einem kugelsymmetrischen Potentialtopf findet sich in [2].

in Abbildung 1.6 eingezeichnet. Außerdem werden vom Lautsprecher vorzugsweise m -Moden angeregt, die eine nicht verschwindende Komponente in dieser Symmetrieachse besitzen. Vergleicht man die Kugelflächenfunktionen in Tabelle 1.2, erkennt man, dass ausschließlich die Funktionen mit $m = 0$ einen nicht verschwindenden Beitrag in Symmetrierichtung haben. Im ersten Versuchsteil werden folglich vorzugsweise ($m = 0$)-Moden angeregt. Für $m = 0$ ist $Y_l^{m=0}(\theta, \varphi)$ reell, da die $P_l^m(\cos \theta)$ reell sind und $e^{im\varphi} = 1$ gilt, d. h.

$$\begin{aligned} p(r, \theta, \varphi) &\sim Y_l^0(\theta, \varphi) \\ &= \operatorname{Re}\{Y_l^0(\theta, \varphi)\} \sim \cos(m\varphi). \end{aligned}$$

Im zweiten Teil des Experiments werden Zwischenringe zwischen oberer und unterer Halbkugel eingeführt und der Resonator somit in vertikaler Richtung verlängert. Dadurch wird die Kugelsymmetrie gebrochen. Die Kugelflächenfunktionen sind durch die Veränderung des Resonators keine exakte Lösung mehr. Die Veränderung ist aber derart gering, dass man die Kugelflächenfunktionen näherungsweise weiterhin als Lösung annehmen kann. Dem System wird durch die Verlängerung eine neue Symmetrieachse aufgezwungen, die jetzt nicht mehr vom Lautsprecher ausgeht, sondern vertikal ist. Die Kugelflächenfunktionen „stehen“ jetzt also aufrecht im Resonator, wie in Tabelle 1.2. Diese Symmetriebrechung wiegt stärker als die, die der Lautsprecher hervorruft. Der Lautsprecher kann folglich nicht nur ($m = 0$)-Moden, sondern auch andere Moden anregen.

Zu beachten ist, dass die energetische Entartung der einzelnen Moden durch die Symmetriebrechung aufgehoben wird, d. h. sie erscheinen bei leicht unterschiedlichen Frequenzen. Einzig die Moden mit dem selben $|m|$, z. B. $m = \pm 1$, sind weiterhin entartet und werden vom Lautsprecher bei der gleichen Frequenz zu gleichen Teilen angeregt. Dies führt dazu, dass immer eine Überlagerung der ($\pm m$)-Moden erzeugt wird, also

$$\begin{aligned} p(r, \theta, \varphi) &\sim Y_l^m(\theta, \varphi) \pm Y_l^{-m}(\theta, \varphi) \\ &= Y_l^m(\theta, \varphi) \pm (-1)^m \cdot [Y_l^m(\theta, \varphi)]^* \\ &= \begin{cases} 2 \operatorname{Re}\{Y_l^m(\theta, \varphi)\} \sim \cos(m\varphi) & \text{für } + \text{ und } m \text{ gerade} \\ & \text{oder } - \text{ und } m \text{ ungerade} \\ 2i \operatorname{Im}\{Y_l^m(\theta, \varphi)\} \sim i \sin(m\varphi) & \text{für } + \text{ und } m \text{ ungerade} \\ & \text{oder } - \text{ und } m \text{ gerade} \end{cases} \end{aligned}$$

Ein imaginärer Druck p ist keine physikalisch sinnvolle Lösung. Im Experiment werden also nicht die $Y_l^m(\theta, \varphi)$ selbst, sondern immer etwas proportional zum Realteil, d. h. proportional zu $\cos(m\varphi)$ gemessen. Dass die imaginäre Lösung nicht angeregt werden kann, kann auch noch mit einer weiteren Symmetriebrechung durch den Lautsprecher begründet werden, der wieder nur die Überlagerungen anregt, die eine verschwenderische Komponente entlang seiner Abstrahlrichtung besitzen. Dies sind genau die Überlagerungen, die durch $\cos(m\varphi)$ beschrieben werden. Da die Phase mit der im Versuch verwendeten Messmethode nicht bestimmt werden kann, wird sogar nur eine Amplitude proportional zu $|\cos(m\varphi)|$ gemessen.

1.1.6 Versuchsdurchführung

Hinweis: Speichern Sie alle aufgenommenen Spektren lokal auf dem Computer, nicht nur als

Bilddateien, sondern auch als Textdateien. Sie benötigen eine Kopie dieser Daten für Ihre Auswertung.

Wichtig: Sie müssen dazu jede Messung einzeln auswählen und separat speichern! Das Programm speichert nur die aktuell ausgewählte Messung als Datensatz (*.dat), aber immer das gesamte Bild (*.jpg) mit allen auf dem Monitor sichtbaren Messungen!

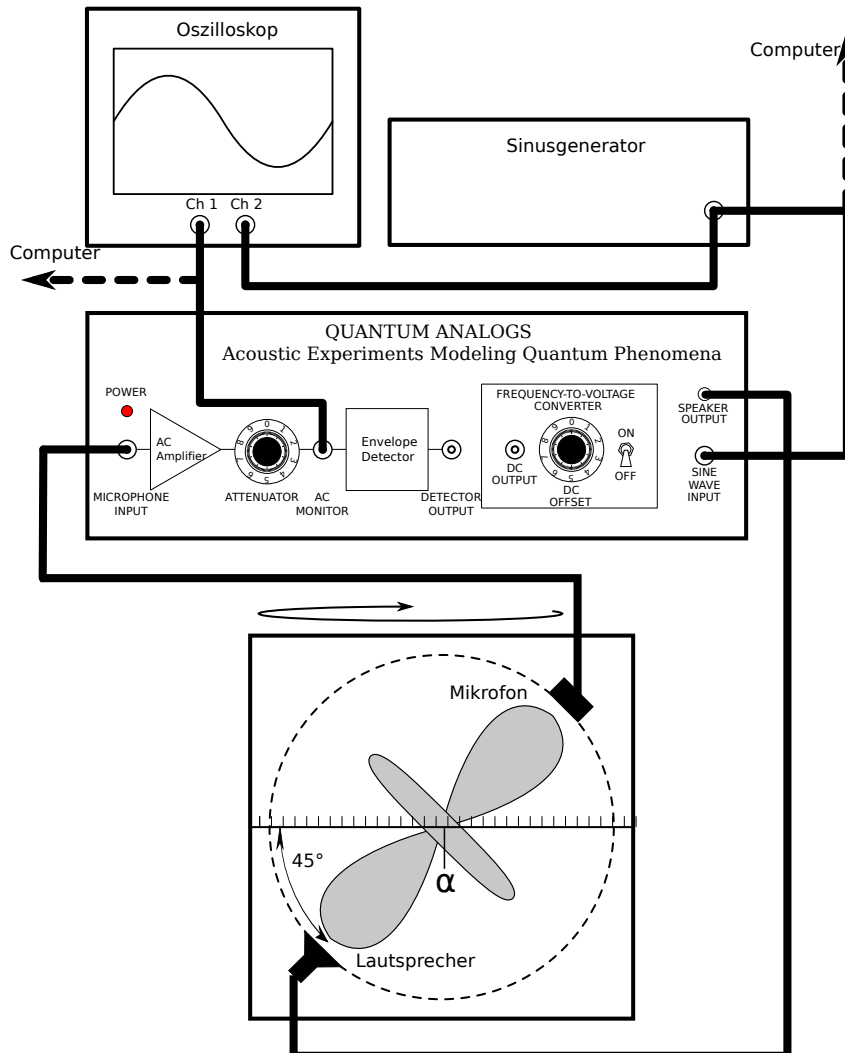


Abbildung 1.6: Schematische Darstellung des Aufbaus

Vorversuch: die Transferfunktion von Lautsprecher und Mikrofon

Wie in den Grundlagen erläutert, ist es beim zweiten Versuchsteil wichtig, die Position der Maxima der Transferfunktion zu kennen. Aus diesem Grund messen Sie zuerst exemplarisch eine Transferfunktion:

- Bauen Sie einen sehr kurzen Rohrresonator mit nur einem einzigen, 12,5 mm langen Rohrsegment auf. Durch die kurze Rohrlänge tritt die erste Resonanz erst außerhalb des Messbereichs bei 13,7 kHz auf.

(Wenn Sie nicht glauben, dass der Effekt auch ohne Rohr auftritt, dürfen Sie gerne das Mikrofon direkt vor den Lautsprecher halten, ohne einen Resonator aufzubauen. Leider ist dann die Qualität der Messung nicht so gut, weil sie stark von Störgeräuschen beeinflusst wird. Schirmen Sie das System mit Ihrer Hand etwas ab.)

- b) Verbinden Sie den Ausgang des Sinusgenerators mit dem **SINE WAVE INPUT** des TeachSpin-Controllers und dem ersten Kanal des Oszilloskops. Verbinden Sie den **SPEAKER OUTPUT** mit dem Lautsprecher. Verbinden Sie den **MICROPHONE INPUT** mit dem Mikrofon und **AC MONITOR** mit dem zweiten Kanal des Oszilloskops.
- c) Variieren Sie mit dem Sinusgenerator die Frequenz und beobachten Sie die Veränderungen der Signalthöhe am Oszilloskop.
- d) Nutzen Sie nun den Computer zur Aufzeichnung der Transferfunktion. Schließen Sie dafür den Lautsprecherausgang des Computers an **SINE WAVE INPUT** des TeachSpin-Controllers an und verbinden Sie **AC MONITOR** mit dem Mikrofoneingang des Computers. Achten Sie darauf, dass für die Lautstärkeregelung am Computer nicht **mute** eingestellt ist. Starten Sie das Programm **SpectrumSLC** und messen Sie mit geeigneten Einstellungen ein Spektrum von 0 Hz bis 10 000 Hz. Beachten Sie, dass Ihre Frequenzauflösung maßgeblich bestimmt, wie genau Sie bei der Auswertung die Resonanzfrequenzen bestimmen können.
- e) Speichern Sie das Spektrum ab und notieren Sie sich die Positionen der Maxima, insbesondere die des ersten Maximums.

Beachten Sie, dass die Transferfunktion vom Mikrofon und vom Lautsprecher abhängt. Es könnte also sein, dass sich die Maxima der Transferfunktion Ihres Kugelresonators an etwas anderer Stelle im Spektrum befinden als die Ihres Rohrresonators.

Teil 1: der Rohrresonator

- a) Setzen Sie aus den acht längsten Aluminiumzylindern (75 mm) ein Rohr mit einer Gesamtlänge von 600 mm zusammen, welches an seinen zwei Enden durch den Lautsprecher und das Mikrofon abgeschlossen ist. Messen Sie die Rohrlänge nach und bestimmen Sie eine dazu gehörige Unsicherheit.
- b) Ermitteln Sie durch Variation der Frequenz des Sinusgenerators die ersten zehn Resonanzen des Systems und notieren Sie deren Ordnung, zugehörige Frequenz und Unsicherheit.
- c) Nehmen Sie mit dem Computer ein Spektrum von 0 Hz bis 20 000 Hz auf.
- d) Setzen Sie dann ein Rohr aus nur zwei der längsten Zylindern zusammen und nehmen Sie analog zum vorigen Punkt erneut ein Spektrum auf.
- e) Notieren Sie sich den Luftdruck und die Raumtemperatur am Versuchstag. Beides kann z. B. an der Wetterstation im Praktikumsflur abgelesen werden.

Teil 2: der Kugelresonator ohne Zwischenringe

- f) Wechseln Sie jetzt zum Kugelresonator (siehe Abbildung 1.6). Schließen Sie diesen statt des Rohrresonators an und messen Sie analog zur letzten Messung dessen Spektrum von 100 Hz bis 10 000 Hz bei mindestens vier verschiedenen Winkeln α . (α bezeichnet den Drehwinkel zwischen oberer und unterer Halbkugel.) Messen Sie auf jeden Fall bei $\alpha = 0^\circ$ und 180° .
- g) Messen Sie ein weiteres Spektrum von 1200 Hz bis 7000 Hz für $\alpha = 180^\circ$. Wählen Sie dabei eine Auflösung und Scangeschwindigkeit, die es Ihnen ermöglicht die Position der Resonanzen hinreichend genau zu bestimmen.
 - a) Setzen Sie anschließend die Darstellung in **SpectrumSLC** auf „maximal“ und wählen Sie die Resonanzfrequenz bei 2300 Hz durch einen Linksklick auf die Position des

Maximums im Spektrum aus. Sie erhalten beim Linksklick keinerlei Feedback vom Programm!

Gehen Sie auf **Windows > Measure Wavefunction**. Variieren Sie den Winkel α in 10° -Schritten von 0° bis 180° von Hand am Kugelresonator und messen Sie an diesen Stellen die Amplitude mithilfe des Programms.

Sie werden vielleicht feststellen, dass die so erzeugten Polarschnitte sehr zackig aussehen und nicht abgerundet sind, wie eigentlich erwartet. Dies liegt daran, dass besonders direkt auf der Resonanz der Einfluss der Moden mit $m \neq 0$ besonders groß ist.

Nehmen Sie deshalb einen weiteren Polarschnitt bei einer Frequenz auf der vorderen oder hinteren Flanke des Peaks auf. Auf den Flanken ist der Einfluss der ($m \neq 0$)-Moden geringer. Wählen Sie bei der Auswertung den besseren Polarschnitt aus.

- b) Wiederholen Sie Punkt a) für mindestens drei weitere Resonanzen.
- h) Wählen Sie eine ausreichend hohe Messauflösung, um das Doppelmaximum bei ungefähr 5000 Hz scharf erkennen zu können und nehmen Sie ein Spektrum von diesem bei $\alpha = 0^\circ$, 180° und einem weiteren Winkel auf. Zeichnen Sie zudem für jedes Maximum einen Polarschnitt auf.

Teil 3: der Kugelresonator mit Zwischenringen

- i) Messen Sie ein weiteres Spektrum von 1200 Hz bis 7000 Hz bei $\alpha = 180^\circ$ mit einer **time per step** von mindestens 50 ms und hoher Frequenzauflösung. Verwenden Sie dabei die beiden Zwischenringe, die zusammen 9 mm dick sind.
- j) Verwenden Sie weiter die Zwischenringe mit 9 mm Dicke und messen Sie zunächst die Winkelabhängigkeit der zwei Resonanzen bei 2100 Hz und 2300 Hz. Achten Sie darauf, dass Sie im Programm **Windows > Measure Wavefunction** das Häkchen bei **lifted degeneracy** (lifted degeneracy = aufgehobene Entartung⁴) gesetzt haben.
Hier können Sie ohne Bedenken direkt auf der Resonanz messen, da die Entartung aufgehoben ist. Sie müssen nicht wie im obigen Fall mehrere Schnitte pro Resonanz aufnehmen.
- k) Messen Sie analog zum vorigen Punkt die Winkelabhängigkeit der Resonanzen im Bereich von 3300 Hz bis 3800 Hz.
- l) Untersuchen Sie die Aufspaltung der Resonanzen bei 2100 Hz und 2300 Hz in Abhängigkeit der Dicke der Zwischenringe von 0, 3, 6 und 9 mm bei $\alpha = 180^\circ$. Messen Sie dafür für jede Dicke ein geeignetes Spektrum mit hoher Auflösung.
- m) optionale Zusatzaufgabe: Messen Sie zusätzlich ein hochaufgelöstes Spektrum im Bereich 5500 Hz bis 6600 Hz, sodass sechs Maxima sichtbar werden. Messen Sie hierzu bei $\alpha = 0^\circ$ und 180° . Versuchen Sie wie schon zuvor, auf den Maxima einen Azimutalschnitt aufzunehmen. Berücksichtigen Sie ggf. bereits untersuchte Resonanzen.

1.1.7 Auswertung

Hinweise:

- Sie können das während des Versuchs verwendete Programm **SpectrumSLC** frei vom AP-Server oder von der Seite <https://www.uni-kassel.de/fb10/institute/>

⁴Da Sie in diesem Versuchsteil die Entartung bezüglich m mit den Zwischenringen aufgehoben haben, müssen Sie dem Programm sagen, dass nun eine andere Symmetrieachse vorherrscht.

physik/forschungsgruppen/oberflaechenphysik/quantum-analogs.html herunterladen. In diesem können Sie die aufgenommenen Spektren noch einmal laden und fitten. An gleicher Stelle finden Sie weitere Programme zur Verwendung in diesem Versuch, u. a. PlotYlm.exe.

- Teil der Auswertung dieses Versuchs ist insbesondere die vergleichende Diskussion der Ergebnisse mit dem entsprechenden quantenmechanischen Analogon.

Allgemeines

- Stellen Sie die Transferfunktion (Mikrofonsignal als Funktion der Frequenz des Lautsprechers) grafisch dar.
- Bestimmen Sie die Maxima der Transferfunktion.

Teil 1: der Rohrresonator

- Stellen Sie die mit dem Oszilloskop gemessenen Resonanzfrequenzen des Rohrresonators in Abhängigkeit ihrer Ordnung grafisch dar. Bestimmen Sie die Schallgeschwindigkeit c aus der Steigung der Ausgleichsgeraden.
- Bestimmen Sie die ersten zehn Resonanzfrequenzen aus dem mit dem Computer gemessenen Spektrum des langen Rohres. Ermitteln Sie auch hier die Schallgeschwindigkeit wie bei der Messung mit dem Oszilloskop.
- Vergleichen Sie beide erhaltenen Werte für die Schallgeschwindigkeit untereinander und mit dem Literaturwert. Sind die Messungen miteinander verträglich und sind sie mit dem Literaturwert verträglich?

Um diese Frage zu beantworten, verwenden Sie einen Signifikanztest. Schätzen Sie damit ab, mit welcher Wahrscheinlichkeit die beiden Messungen übereinstimmen, bzw. mit welcher Wahrscheinlichkeit jede der Messungen mit dem Literaturwert übereinstimmt.

- Stellen Sie die beiden mit dem Computer aufgezeichneten Frequenzspektren dar und wählen Sie für die Resonanzen im Frequenzspektrum, das Sie für ein Rohr der Gesamtlänge 150 mm aufgenommen haben, eine passende Regressionsfunktion unter Verwendung von Gleichung (1.10). Passen Sie mindestens sieben aufgenommene Resonanzen an: Achten Sie hier darauf, dass die Transferfunktion die Amplitude und Breite entscheidend beeinflussen kann. Wählen Sie daher Resonanzen oberhalb der von Ihnen für die Transferfunktion bestimmten Maxima.

Berechnen Sie aus den Regressionsparametern unter Verwendung von Gleichung (1.11) die quantenmechanische Lebensdauer und tragen Sie $\gamma(n) \cong \lambda(n)$ zusammen mit $\tau(n)$ in Abhängigkeit der Ordnung auf.

Teil 2: der Kugelresonator ohne Zwischenringe

- Durch das Drehen der oberen Halbkugel konnte der Winkel α aus Abbildung 1.6 verändert werden. Welche Winkelabhängigkeit haben Sie damit in Versuchsteil 2 untersucht? Können in diesem Versuchsteil mit der verwendeten Anordnung von Mikrofon und Lautsprecher beide Winkelabhängigkeiten bestimmt werden? Begründen Sie Ihre Aussage.
- Wenden Sie sich den Übersichtsspektren von 100 Hz bis 10 000 Hz des Kugelresonators zu. Was beobachten Sie beim Vergleich der Spektren zu verschiedenen Winkeln bezüglich der Amplituden und der Resonanzfrequenzen, und wie können Sie Ihre Beobachtung erklären?
- Bilden Sie die Polarschnitte der von Ihnen untersuchten Resonanzen in Form eines Polarkoordinatensystems ab und bestimmen Sie daraus die zugrundeliegenden Kugelflächen-

funktionen. Geben Sie jeweils sowohl l als auch m an. Fitten Sie Ihre Daten in der entsprechenden Grafik an das zugeordnete Legendre-Polynom mit einer Funktion der Form $a \cdot |\operatorname{Re}(Y_l^m(\theta, \varphi))|$ an. Beachten Sie, dass Sie die Phase hier nicht richtig bestimmen können. Vergleichen Sie die Regressionsparameter der geeignet normierten Amplituden miteinander. Unterscheiden sich diese? Woran kann das liegen? Für die Bestimmung von l und m könnte das Programm `PlotYlm.exe` hilfreich sein. Beachten Sie, dass die Abbildung der von Ihnen während des Experiments aufgenommenen Bilder der Kugelschnitte (aufgrund der Auftragung ebendieser in einem eigenen Polarkoordinatendiagramm) überflüssig ist.

- j) Stellen Sie die Spektren des Doppelmaximums bei ungefähr 5000 Hz grafisch dar. Begründen Sie mithilfe der aufgenommenen Polarschnitte, um welche Resonanzen es sich dabei handelt und geben Sie hierfür l und m an. Auch wenn sie wie auch bei allen anderen Resonanzen des Akustikexperiments nicht direkt zugänglich ist, ist es hier von entscheidender Relevanz, auch die Ordnung n zu betrachten.

Teil 3: der Kugelresonator mit Zwischenringen

- k) Auch in diesem Versuchsteil wurde durch Drehen der oberen Halbkugel der Winkel α verändert. Welche Winkelabhängigkeit wird mit dieser Methode untersucht? Können in diesem Versuchsteil mit der verwendeten Anordnung von Mikrofon und Lautsprecher beide Winkelabhängigkeiten bestimmt werden? Begründen Sie Ihre Aussage.
- l) Vergleichen Sie die Spektren von 1200 Hz bis 7000 Hz bei $\alpha = 180^\circ$ mit und ohne Verwendung des 9 mm Zwischenringes. Ermitteln Sie aus dem Spektrum mit Zwischenring für mindestens vier Resonanzen das zugehörige l . Begründen Sie, wie Sie auf das jeweilige l schließen. Vergleichen Sie Ihre Werte für l mit denen, die Sie bei den Polarschnitten im vorherigen Auswertungspunkt erhalten haben.
- m) Bilden Sie die Azimutalschnitte der von Ihnen untersuchten Resonanzen im Bereich 2100 Hz bis 3800 Hz analog zum vorigen Versuchsteil in Form eines Polarkoordinatensystems ab. Zu welchen l und m gehören die Resonanzen?
- Passen Sie in der entsprechenden Grafik eine Funktion der Form $a \cdot |\operatorname{Re}(Y_l^m(\theta, \varphi))| = a \cdot |\cos(m\varphi)|$ an die Daten an. Wählen Sie m als festen Parameter und entscheiden Sie anhand des groben Verlaufs der Daten, welcher Wert für m am besten passt. Beachten Sie dabei, dass vom Programm `SpektrumSLC` in der Version 7.1 (21. Januar 2009) nicht der Winkel φ , sondern θ (als ob die Kugelflächenfunktion gekippt und nicht vertikal wäre) abgespeichert wird. (Dieser Umstand kann sich in künftigen Softwareversionen ändern!) Sie müssen folglich erst θ in φ umrechnen. Dazu benötigen Sie die Lösung der ersten Frage 1. Vergleichen Sie auch hier die Regressionsparameter der geeignet normierten Amplituden.
- n) Betrachten Sie jetzt die Spektren, die Sie durch Einlegen der verschiedenen Zwischenringe erhalten haben, in denen die Resonanzen bei 2100 Hz und 2300 Hz zu sehen sind. Ermitteln Sie die Positionen der Maxima durch einen Lorentz-Fit nach Gleichung (1.10) und berechnen Sie daraus die Frequenzaufspaltung der Maxima. Stellen Sie diese Aufspaltungsbreite in Abhängigkeit von der Dicke der Zwischenringe dar und fitten Sie mit einem geeigneten Modell. Welchen Zusammenhang zwischen Aufspaltung und Dicke finden Sie?
- o) Stellen Sie das gegebenenfalls aufgezeichnete Spektrum im Bereich von 5500 Hz bis 6600 Hz dar und versuchen Sie argumentativ und mit Hilfe der aufgenommenen Azimutalschnitte den einzelnen Resonanzen die entsprechenden Werte von l und m zuzuordnen.

1.1.8 Fragen und Aufgaben

- a) Wenn der Kugelresonator ohne Zwischenringe verwendet wird, entsprechen die Winkel θ und φ der Kugelflächenfunktionen nicht den Winkeln, die man üblicherweise für ein Koordinatensystem verwendet. In einem üblichen Koordinatensystem wäre die z -Achse vertikal ausgerichtet und nicht unter einem Winkel von 45° . Der Winkel α ist der Azimutwinkel eines solchen üblichen Koordinatensystems. Leiten Sie mit Hilfe einer Skizze her, wie der Winkel α mit dem Winkel θ zusammenhängt.
- b) optional: Zeigen Sie, dass Gleichung (1.13) einer Lorentzkurve (vgl. (1.10)) entspricht, wenn berücksichtigt wird, dass die Breite klein gegenüber der Resonanzfrequenz ist ($\gamma \ll \omega_0$) und ω damit als nahezu konstant im Frequenzbereich um das Maximum herum ist. Hinweis: Hierfür muss die Wellenfunktion, deren Lösung und somit auch die Amplitudenfunktion

$$A(\omega) = \frac{K}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\gamma\omega} \quad (1.23)$$

komplex betrachtet werden.

- c) Was können Sie für das Spektrum eines Rohrresonators ohne Blenden bei Frequenzen oberhalb 16 kHz erkennen?

1.1.9 Literaturhinweise

Eine detaillierte Lösung der Helmholtzgleichung findet sich in [1]. Das Buch steht nicht in der Bibliothek. Die einzelnen Kapitel können aber innerhalb des Uninetzes vom Springer-Verlag unter <http://www.springerlink.com> (Stichwortsuche Ehlötzky Mathematik) heruntergeladen werden.

Literaturverzeichnis

- [1] Fritz Ehlotzky. Angewandte Mathematik für Physiker. Springer-Verlag, Berlin, 2007. Das Buch steht nicht in der Bibliothek. Die einzelnen Kapitel können aber innerhalb des Uninetzes vom Springer-Verlag unter <http://www.springerlink.com> (Stichwortsuche **Ehlotzky Mathematik**) heruntergeladen werden.
- [2] Wolfgang Nolting. Grundkurs Theoretische Physik 5/2 – Quantenmechanik – Methoden und Anwendungen. Springer Verlag, Berlin/Heidelberg, 6. edition, 2006.
- [3] René Matzdorf. Quantum Analogs instructor’s manual. TeachSpin, Inc., 2495 Main Street, Buffalo, NY 14214-2153, USA, 2009.
- [4] Charles Kittel. Einführung in die Festkörperphysik. Oldenbourg Verlag, München, 14. edition, 2006.