gray75gray0.75

[hang]Lecture 0 gray75— 0pt

Integrierter Kurs III

Theorieteil
Mitschrift von Tom Folgmann

18. April 2023

Inhaltsverzeichnis

Lecture 1

Einführung und Einleitung

mo 24 okt 10:00

Themen und Termine

1. Lagrange Formalismus
2. Symmetrien und Erhaltungssätze
3. Hamilton Mechanik
4. Spezielle Relativitätstheorie
5. Nichtlineare Dynamik

- Experimentelle Physik: Prof. Dr. Peter Baum
- Theoretische Physik: Prof. Dr. Oded Zilberberg

Übungsblätter mittwochs. Letzte Buchquelle wird befolgt. „Introduction to Lagragian & Hamiltonian mechanics“. Ziel: Lernen.

Klausuren

- Experimentalphysikklausur: 14.02.2023
- Theoretische Physik Klausur: 27.02.2023

1.1 Notation und kurze Wiederholung

Ziel: Übergang zu allgemeinerer Schreibweise, zur besseren Problemlösung. Wir arbeiten in den allermeisten Fällen auf $\text{Raum}_{\mathbb{R}}\left(\mathbb{R}^3\right)$.

- Position angegeben durch $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3$
- Geschwindigkeit angegeben durch $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$.

- Impuls angegeben durch $\mathbf{v}m =: \mathbf{p} \in \mathbb{R}^3$
- Für die Kraft angegeben durch $d\mathbf{p}\,(t)\,(1_\mathbb{R}) = \frac{\mathrm{d}\mathbf{p}(t)}{\mathrm{d}t} \overset{Newton}{=:} \mathbf{F}(t) \in \mathbb{R}^3$ benötigen wir eine Zeitparametrisierung. Damit hat $\mathbf{p}$ die Form $\mathbf{p} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$.
- Drehimpuls angegeben durch $\mathbf{r} \times \mathbf{p}(t) =: \mathbf{L}(t) \in \mathbb{R}^3$
- Drehmoment angegeben durch $\mathbf{r} \times \mathbf{F}(t) =: \mathbf{T}(t) \in \mathbb{R}^3$. Umgeschrieben mit Newton als $\mathbf{T}(t) = \mathbf{r}(t) \times \frac{\mathrm{d}\mathbf{p}(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}(t)\times\mathbf{p}(t)}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}(t)}{\mathrm{d}t} \times \mathbf{p} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{L}(t)}{\mathrm{d}t} - \mathbf{v}(t) \times \mathbf{v}m = \frac{\mathrm{d}\mathbf{L}(t)}{\mathrm{d}t}$.
- Arbeit angegeben durch $\int_{t_1}^{t_2} \left\langle \mathbf{F}(t), \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}(t)}{\mathrm{d}t} \right\rangle \lambda\,(dt) =: W$.

> **Erinnerung 1.** Mit X, Y endlichdim. VR und $x \in X$ gilt für $f : X \rightharpoonup Y$ und $\mu : X \rightharpoonup \mathbb{R}$ und $(\mu_x \cdot f_x)_{x\in\mathbb{R}}$ die Kettenregel
>
> $$d(f \cdot g)\,(x)\,(h) = df\,(x)\,(h) \cdot \mu + f \cdot d\mu\,(x)\,(h)$$

Wegen $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{v}(t)^2 = 2\mathbf{v}(t)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{v}(t)$ gilt

$$\begin{aligned} m\int_{t_1}^{t_2} \left\langle \mathbf{v}(t), \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} \right\rangle \lambda\,(dt) &\overset{\text{Kettenr.}}{=} m\int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left\langle \mathbf{v}(t), \mathbf{v}(t) \right\rangle \\ &= \frac{1}{2}m\int_{t_1}^{t_2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{v}(t)^2\,\lambda\,(dt) = W_{kin,2} - W_{kin,1}. \end{aligned}$$

> **Erinnerung 2.** Mit $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ konservativ und $x* \in \mathrm{Def}\,(F)$ gilt für alle $x \in \mathrm{Def}\,(F)$ für einen Kurvenzug $\kappa(x)$ von $x*$ nach x die Potentialdefinition/Stammfunktionsdefinition
>
> $$\phi := \left(\int_{\kappa(x)} F\right)_{x\in\mathrm{Def}(F)} := \left(\int_a^b \left\langle F(\gamma(t)), \gamma'(t) \right\rangle \lambda\,(dt)\right)_{x\in\mathrm{Def}(F)},$$
>
> wobei $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ eine Parametrisierung von $\kappa(x)$ ist. Für $x = x*$ ist $\kappa(x)$ geschlossen und es kann mit κ abgekürzt werden.

In einem konservativen System gilt

$$\int_\kappa \left\langle \mathbf{F}_{\mathbf{r}(t)}, \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}_t}{\mathrm{d}t} \right\rangle \lambda\,(dt) =: \oint \left\langle \mathbf{F}, \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} \right\rangle \lambda\,(dt) = 0_\mathbb{R} \qquad \kappa \text{ geschlossener Kurvenzug}$$

[*Dies wird zu einem Potential* $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ *führen!*] Für die Kraft können wir schreiben

$$\mathbf{F} = -\mathrm{grad}\,[\phi(\mathbf{r}) - \phi(0_{\mathbb{R}^3})]$$

Damit dann in konservativen Systemen: $W_{12} = E_{pot,2} - E_{pot,1} = E_{kin,2} - E_{kin,1}$. Daraus folgt, daß Energie in koservativen Systemen erhalten ist.

1.2 Vielteilchensysteme

Unser Vorgehen startet bei der Differenzierung zwischen inneren und äußeren Kräften.

Information 1.1. Innere und äußeren Kräfte.

Wir nennen eine Kraft zwischen Teilchen eines betrachteten Systems Σ *innere Kräfte* und schreiben $\mathbf{F}^{\text{ext}}$, wenn sie nur zwischen diesen wechselwirkt. Eine von außen an Σ herangetragene Kraft nennen wir *äußere Kraft* und schreiben $\mathbf{F}^{\text{int}}$.

Seien also $N \in \mathbb{N}$ Teilchen in Σ gegeben. Dann können wir auseinanderziehen und erhalten

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{p}(t)}{\mathrm{d}t} = \mathbf{F} = \mathbf{F}_i^{ext} + \sum_{j\in[N]\setminus\{i\}} \mathbf{F}_{(j,i)}^{\text{int}}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{p}(t)}{\mathrm{d}t^2} = \sum_{i\in[N]} m_i \mathbf{v}_i = \underbrace{\sum_{i\in[N]} \mathbf{F}_i^{ext}}_{=:\mathbf{F}^{ext}} + \underbrace{\sum_{j\in[N]\setminus\{i\}} \mathbf{F}_{(j,i)}^{\text{int}}}_{=0_{\mathbb{R}^3}}.$$

. . . .

□ Schreibe die Funktionen $\mathbf{F}^{\text{int}}$ und $\mathbf{F}^{\text{ext}}$ auf.

. . . .

Es gilt bezüglich der Matrix $\mathbf{F}_{(i,j)} = -\mathbf{F}_{(j,i)}$.

Information 1.2. Der Massenschwerpunktweg.

Wir definieren als *Massenschwerpunktsweg* $\mathbf{R} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ eines Systems Σ den Quotienten $\mathbf{R} := \Big((\sum_{i\in[N]} m_i \cdot \mathbf{r}_i(t))/(\sum_{i\in[N]} m_i)\Big)_{t\in\mathbb{R}}$.

. . . .

□ Überlege die Funktionsformen von m und $\mathbf{r}$.

□ Berechne den Systemimpuls $\mathbf{p}_\Sigma$ und $\mathbf{F}_\Sigma$ als Ableitungen des Massenschwerpunktsweges.

Schreibe mit demselben Vorgehen den Systemdrehimpuls $\mathbf{L}_\Sigma$.

. . . .

Den Systemdrehimpuls können wir nun wieder aufspalten in die internen und externen Anteile, sodaß für dessen zeitliche Ableitung gilt

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{L}(t)}{\mathrm{d}t} = \sum_{i\in[N]} \mathbf{r}_i(t) \times (\mathbf{F}^{\text{ext}})_i^*(t) + \sum_{j\in[N]\setminus\{i\}} \mathbf{r}_i^*(t) \times (\mathbf{F}^{\text{int}})_{(j,i)}^*(t).$$

Wir definieren $\mathbf{r}_{ij}(t) := (\mathbf{r}_i^*(t) + \mathbf{r}_j^*(t))$. Damit $\mathbf{r}_{ij}(t) \times \mathbf{F}(t) = \mathbf{r}_i^*(t) \times \mathbf{F}(t) + \mathbf{r}_j^*(t) \times \mathbf{F}(t)$. Schreibe damit vereinfacht

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{L}(t)}{\mathrm{d}t} = \mathbf{L}^{ext}(t) + \frac{1}{2} \sum_{j \in [N] \setminus \{i\}} \mathbf{r}_{ij} \times \mathbf{F}_{ji} = \mathbf{T}^{ext}(t).$$

Fordere die Eigenschaft $\mathbf{r}_{ij} \times \mathbf{F}_{ji} = 0_{\mathbb{R}^3}$ für alle $i, j \in \mathbb{N}$, dann heißt das System ein Zentralkraftfeld.

Relative Koordinaten

Natürlich ist es auch möglich, über einen Umweg über den Massenschwerpunkt den Ort eines Teilchens zu definieren. Hierzu ist eine Verschiebung des Ursprungs notwendig.

Information 1.3. Verschiebung des Ursprungs.

Sei V ein K-Vektorraum und $v, w \in V$, dann ist $v = v - w + w =: \tilde{v} + w$ eine Verschiebung des Vektors v um w.

Sei nun speziell $w := \mathbf{R}(t)$ und $v := \mathbf{r}(t)$, dann können wir als Relativkoordinate schreiben

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(t) - \mathbf{R}(t) + \mathbf{R}(t) =: \tilde{\mathbf{r}}(t) + \mathbf{R}(t).$$

Für den relativen Drehimpuls ergibt sich als Beispiel die Beziehung und damit

$$\mathbf{L}(t) = \mathbf{R}(t) \times M\mathbf{V}(t) + \sum_{i \in [N]} \tilde{\mathbf{r}}_i^*(T) \times \tilde{\mathbf{p}}_i^*(t).$$

Für die kinetische Energie folgt weiter

$$W_{kin} = \frac{1}{2} \sum_{i \in [N]} m_i \mathbf{v}_i^2 = \frac{1}{2} M \cdot \mathbf{V}(t)^2 + \frac{1}{2} \sum_{i \in [N]} m_i \tilde{\mathbf{v}}_i^*(t)^2.$$

. . . .

(✎4) □ Rechne die Behauptung nach, indem du die Definitionen verwendest. Warum fallen zwei Summanden weg?

. . . .

1.3 Zwangsbedingungen und verallgemeinerte Koordinaten

Es gibt verschiedene Arten der Zwänge, die wir zur Unterscheidung klassifizieren wollen.

Information 1.4. Zwangsbedingungsklassifizierung.

Seien $[N]$ Teilchen im System Σ in $\text{Raum}_{\mathbb{R}}\left(\mathbb{R}^3\right)$ und $f : \mathbb{R} \times (\mathbb{R}^3)^N \to \mathbb{R}$ die *Zwangsfunktion*, dann unterscheiden wir zwischen den folgenden Fällen:

$$f(t, (\gamma_1^*(t), ..., \gamma_N^*(t))) = 0_{\mathbb{R}} \qquad \textit{holonom}$$
$$f(t, (\gamma_1^*(t), ..., \gamma_N^*(t))) \lesseqgtr 0_{\mathbb{R}} \qquad \textit{anholonom}$$

Weiter können wir zwischen *explizit* und *implizit* zeitabhängigen Zwangsfunktionen unterscheiden; Erstere nennen wir *rheonom*, letztere *skleronom*.

In den meisten Fällen werden wir in <u>holonomen rheonomen</u> Zwangssituationen arbeiten. Beispielsweise ist die Zwangsbedingung einer Kreisbahn durch $(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)^2 - \mathbf{c}_{ij}^2 = 0_{\mathbb{R}^3}$ für ein $c \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ holonom, jedoch skleronom.

Information 1.5. Freiheitsgrade.

Die Anzahl der Freiheitsgrade in Σ berechnen wir durch

$$\texttt{Freiheitsgrade}(\Sigma) := \dim(V) \cdot N - k$$

für k Zwangsbedingungen und V als K-Vektorraum.

Sehr geehrte Damen und Herren, dies ist eine extrem lange Zeile, die ihren Job einzig in der Darstellung der Umbruchmethode hat, welche TeXShop verwendet. Vielen Dank für Ihr Verständnis.

Lecture 2

D'Alembertscher Grundsatz und Lagrangesche Gleichungen

di 25 okt 08:15

Betrachten wir ein System Σ in welchem $N \in \mathbb{N}$ Teilchen gegeben seien. Dann ist der i-te Ortsvektor gleich

$$\mathbf{r}_i^*(t, q(t)) = \mathbf{r}_i(t, (q_1^*(t), \dots, q_{3N-k}^*(t))),$$

mit $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{3N-k}$ als *Parameterfunktion.*

Information 2.1. Die Parameterfunktion.

Eine Funktion $q \in C^n(K, K^M)$ mit $M := \dim(V) \cdot N - k$ nennen wir *n-fache M-Parameterfunktion* auf $\mathrm{Raum}_K\,(V)$.

2.1 Virtuelle Verschiebung

Die virtuelle Verschiebung ist eine kleine Verschiebung der Parameter des Systems unter Berücksichtigung aller möglichen Zwänge. Sie ist eine Funktion $h \in C^n(K, K^M)$ mit $M := \dim(V) \cdot N - k$ und verschiebt den Ort $\mathbf{r}$ eines Teilchens gemäß

$$d\mathbf{r}\left(t, (q(t), q'(t))\right)(H) \approx \mathbf{r}((t, (q(t), q'(t))) + H) - \mathbf{r}(t, (q(t), q'(t)))$$

für H als Platzhalter von $(0, (h(t), h'(t)))$.

Information 2.2. Virtuelle Verschiebung.

Als *virtuelle Verschiebung* bezeichnen wir eine Änderung der Parameter einer Funktion $f : \mathbb{R} \times (\mathbb{R}^d)^{p+1}$ mit der Parameterfunktion $q \in C^p(\mathbb{R}, \mathbb{R}^d)$ und der Verschiebung $h \in C^p(\mathbb{R}, \mathbb{R}^d)$ unter konstantem Zeitparameter $t \in \mathbb{R}$.

Beispiel 1. In einem Gleichgewichtssystem ist die Nettokraft auf ein Teilchen gleich dem Nullvektor, also $\sum_{i\in[N]\setminus\{j\}}\mathbf{F}_{(i,j)} = 0_{\mathbb{R}_3}$. Mit der virtuellen Verschiebung mit einbezogen gilt

$$\sum_{i\in[N]}\langle\mathbf{F}_i, \delta\mathbf{r}_i\rangle = 0_{\mathbb{R}^3}$$

mit $\mathbf{F}_i = \mathbf{F}_i^{ext} + \sum_{j\in[N]\setminus\{i\}}\mathbf{F}_{(i,j)}$. Die Gesamtkraft ist dann die Summe der externen und der Zwangskräfte:

$$\mathbf{F}_i = \mathbf{F}_i^a + \mathbf{f}_i.$$

Behauptung. Wir gehen nun davon aus, daß die virtuelle Verschiebung senkrecht zur Zwangskraft verläuft, also

$$\langle\mathbf{f}_i, \delta\mathbf{r}_i\rangle = 0_{\mathbb{R}^3}.$$

Begründung 1. Dies liegt daran, daß die Zwänge eine Verschiebung „verhindern“; Kräfte aus Zwängen verrichten also keine Arbeit!

Durch diese Annahme wird erstmal die Reibung aus dem System ausgeschlossen. Auf diese kommen wir später zurück.

Information 2.3. D'Alembertsches Prinzip für statische Systeme.

Es gilt ihmentsprechend

$$\sum_{i\in[N]}\langle\mathbf{F}_i^a, \delta\mathbf{r}_i\rangle = 0_{\mathbb{R}^3}.$$

Man sagt auch „Gesetz über virtuelle Arbeit“.

2.2 Dynamischer Fall

Die Bewegungsgleichung des i-ten Teilchens ist durch das zweite Newtonsche Gesetz mit

$$\mathbf{F}_i - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{p}_i = 0_{\mathbb{R}^3}.$$

Information 2.4. Dynamisches D'Alembertsches Prinzip.

$$\sum_{i\in[N]} \left\langle \mathbf{F}_i - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{p}_i, \delta\mathbf{r}_i \right\rangle = \sum_{i\in[N]} \left[\langle \mathbf{F}_i, \delta\mathbf{r}_i\rangle - \left\langle \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{p}_i, \delta\mathbf{r}_i \right\rangle \right] = 0_{\mathbb{R}}.$$

Vorteil des Prinzips

Der Vorteil liegt darin, daß die Zwangskräfte eleminiert wurden! Unter der Annahme, daß die Zwänge holonom sind, können wir verallgemeinerte Koordinaten wie oben vorgestellt verwenden.

$$\mathbf{v}_i = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{r}_i = \sum_{i\in[N]} \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}_i}{\mathrm{d}q_i} q_i'(t) + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} = \mathbf{v}_i(q_1, \ldots, q_{3N-k}, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_{3N-k}, t)$$
$$=: \mathbf{v}_i(t, (q(t), q'(t))).$$

Damit können wir auch die virtuelle Verschiebung in den neuen Koordinaten ausdrücken:

$$\delta\mathbf{r}_i = \sum_{j\in[N]} \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}\delta q_j.$$

Bemerke, daß die virtuelle Verschiebung nur Koordinatenverschiebungen beinhaltet, also zu einem fixen Zeitpunkt stattfindet.

2.2.1 Genauere Betrachtung des Prinzips

Behauptung. Man kann den ersten Term des dynamischen D'ALEMBERTsches Prinzips umschreiben.

Begründung 2.

$$\sum_{i\in[N]} \langle \mathbf{F}_i, \delta\mathbf{r}_i\rangle = \sum_{(i,j)\in[N]^2} \left\langle \mathbf{F}_i^a, \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}\delta q_j \right\rangle = \sum_{j\in[N]} Q_j \delta q_j.$$

Information 2.5. Verallgemeinerte Kraft.

Die verallgemeinerte Kraft Q_j definieren wir mit

$$Q_j := \sum_{i\in[N]} \left\langle \mathbf{F}_i^a, \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right\rangle.$$

Die Dimension/Einheit von $Q_j \delta q_j$ ist diejenige der Arbeit, diejenigen von Q_j und δq_j sind allerdings systemabhängig.

2.2.2 Betrachtung des zweiten Terms im d'Alembertschen Prinzip

Behauptung. Man kann den zweiten Term des dynamischen d'Alembertsches Prinzips umschreiben.

Begründung 3. Er lautet

$$\sum_{i\in[N]} \left\langle \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{p}_i, \delta \mathbf{r}_i \right\rangle = \sum_{(i,j)\in[N]^2} \left\langle m_i \frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}_i}{\mathrm{d}t^2}, \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}\delta q_j \right\rangle .$$

Mit der Kettenregel folgt dann

$$\sum_{(i,j)\in[N]^2} \left\langle m \frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}_i}{\mathrm{d}t^2}, \frac{\partial r_i}{\partial q_j}\delta q_j \right\rangle = \sum_{i\in[N]} \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left\langle m_i \mathbf{r}_i, \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_i} \right\rangle - m_i \mathbf{r}_i \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial q_j}\mathbf{r}_i \right] .$$

In der Übung zeigen wir

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial q_j}\mathbf{r}_i = \frac{\partial}{\partial q_j}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{r}_i \qquad \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial q_j'} = \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_i}.$$

Begründung 4. Wir führen aus:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial q_j}\mathbf{r}_i = \sum_{k\in[N]} \partial_{q_j}\partial_{q_k}\mathbf{r}_i \cdot q_k'(t) + \partial_{q_j}\partial_t \mathbf{r}_i$$

und für die rechte Seite

$$\frac{\partial}{\partial q_j}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{r}_i =: \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_i} = \frac{\partial}{\partial q_j}\left[\sum_{k\in[N]} \partial_{q_k}\mathbf{r}_i \cdot q_k'(t) + \partial_t \mathbf{r}_i \right] .$$

Damit erreicht man

$$\begin{aligned}\sum_{(i,j)\in[N]^2}\left\langle m\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}_i}{\mathrm{d}t^2},\frac{\partial r_i}{\partial q_j}\delta q_j\right\rangle &= \sum_{i\in[N]}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\langle m_i\mathbf{v}_i,\frac{\partial}{\partial q_j}\mathbf{v}_i\right\rangle - m_i\mathbf{v}_i\frac{\partial}{\partial q_j}\mathbf{v}_i\right]\\ &= \sum_{i\in[N]}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial\dot{q}_j}\left(\frac{1}{2}m_i\mathbf{v}_i^2\right) - \frac{\partial}{\partial q_j}\left(\frac{1}{2}m_i\mathbf{v}_i^2\right)\right]\\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial\dot{q}_j}W_{kin} - \frac{\partial}{\partial q_j}W_{kin}.\end{aligned}$$

Information 2.6. Grundsatz von D'Alembert.

Damit folgt der Grundsatz unter h o l o n o m e n Bedingungen mit

$$\sum_{j\in[N]}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial\dot{q}_j}W_{kin} - \frac{\partial}{\partial q_j}W_{kin} - Q_j\right]\delta q_j = 0_{\mathbb{R}^3}.$$

Behauptung. Jeder Term innerhalb der Summation selbst ist gleich $0_{\mathbb{R}^3}$. Damit dann

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial\dot{q}_j}W_{kin} - \frac{\partial}{\partial q_j}W_{kin} = Q_j$$

2.3 Konservative Systeme

Voraussetzung. Es gilt $\mathbf{F}_i = -\operatorname{div}_i\phi$ und $\phi = \phi(q_j)$.

Setzen wir dies in die Definition von Q_j ein, dann folgt

$$Q_j = \sum_{i\in[N]}\left\langle\mathbf{F}_i,\frac{\partial r_i}{\partial q_j}\right\rangle = -\sum_{i\in[N]}\left\langle\operatorname{div}_i\phi,\frac{\partial\mathbf{r}_i}{\partial q_j}\right\rangle = -\frac{\partial}{\partial q_j}\phi.$$

Damit dann

$$\frac{\partial}{\partial\dot{q}_j}\phi = 0_{\mathbb{R}^3}.$$

Information 2.7. Lagrange Funktion und Gleichung.

Es gilt mit $L := E_{kin} - \phi$ in holonomen und konservativen Systemen der Zusammenhang

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0_{\mathbb{R}^3}.$$

Es ist L hier nicht eindeutig definiert! Die Physik bleibt dieselbe, wenn

$$L' := L + \frac{\mathrm{d}\mathbf{f}(q,t)}{\mathrm{d}t}$$

mit $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$.

2.4 Reibung und andere geschwindigkeitsabhängige Potentiale

Behauptung. Sei ein geschwindigkeitsabhänhiges Potential mit

$$\psi = \psi(q_j, \dot{q}_j)$$

gegeben. Dann gilt

$$Q_j = -\frac{\partial \psi}{\partial q_j} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \psi}{\partial \dot{q}_j}.$$

Begründung 5. Folgt in der Übung.

Erinnerung 3. Für die Lorentzkraft gilt die Gleichung $\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$.

Als Skalarfeld ausgedrückt mithilfe der Gleichungen

$$\operatorname{div}\mathbf{B} = 0_{\mathbb{R}^3} \Rightarrow \operatorname{rot}\mathbf{A} = \mathbf{B} \qquad \operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

und der Folgerung

$$\operatorname{rot}\left[\underbrace{\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}}_{-\operatorname{div}\Phi}\right] = 0_{\mathbb{R}^3}$$

ergibt sich dann

$$\mathbf{F} = q\left[-\operatorname{div}\Phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \mathbf{v} \times \operatorname{rot}\mathbf{A}\right].$$

Der Grund für diese Umformungen ist die g a u g e I n v a r i a n z, welche später in der SPEZIELLEN RELATIVITÄTSTHEORIE relevant wird.

Information 2.8. Einsteinsche Summenkonvention.

$$\langle A, B\rangle = \sum_{i\in[N]} A_i B_i = A_i B_i.$$

Damit können wir „vereinfacht“ schreiben

$$[\mathbf{v}\times \operatorname{rot}\mathbf{A}]_i = \mathbf{v}_j\partial_i\mathbf{A}_j - \mathbf{v}_j\partial_i\mathbf{A}_j$$

und es folgt die folgende Infobox.

Information 2.9. Lorentz und Einstein.

Mit der EINSTEINschen Summenkonvention und den Maxwellgleichungen gilt für die Lorentzkraft

$$\mathbf{F}_i = q(-\partial_i\Phi - \partial_t\mathbf{A}_i + \mathbf{v}_j\partial_i\mathbf{A}_j - \mathbf{v}_j\partial_i\mathbf{A}_j).$$

Mit der Linearität der partiellen Ableitung folgt $\mathbf{v}_j\partial_i\mathbf{A}_j = \partial_i(\mathbf{v}_j\mathbf{A}_j)$ und wegen

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{A}_i = \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{A}_i + \partial_j(\mathbf{v}_j\mathbf{A}_j)$$

erweitert sich die Gleichung zu

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_i &= q\left[-\partial_i\Phi + \partial_i\langle\mathbf{v},\mathbf{A}\rangle - \frac{\mathrm{d}\mathbf{A}_i}{\mathrm{d}t}\right]\\ &= q\left[-\partial_i(\Phi - \langle\mathbf{v},\mathbf{A}\rangle) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial\mathbf{v}_i}\langle\mathbf{v},\mathbf{A}\rangle\right]\\ &= -\partial_i\psi + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{v}_i}.\end{aligned}$$

Lecture 3

Wiederholung und Reibung

di 25 okt 10:30

Wir haben bisher gesehen, daß monogene Systeme, die entweder durch $U(t, (\mathbf{q}, \mathbf{q}'))$ oder $V(\mathbf{r})$ beschrieben werden, zu Lagrange-Gleichungen führen.

monogen: auf System wirkende besonders bequem mathematisch modellierbar

Der grobe Ablauf wird immer sein

1. Freiheitsgrade bestimmen mit $\dim(\text{Raum}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n)) \cdot N - k$, wobei N die Teilchenanzahl und k die Anzahl der Zwangsbedingungen/Einschränkungen ist.
2. q finden
3. $L(t, (q, q')) = T(t, (q, q')) - V(t, (q, q'))$ aufstellen
4. Die partiellen Ableitungen nach den Komponenten bestimmen: $\partial_q T$, $\partial_{q'} T$, $\partial_q V$ und $\partial_{q'} V$.

Dann liefert das Lagrange-PDP mit

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{\partial}{\partial b} L(s, (a, b))\Big|_{\substack{a=q(s)\\ b=q'(s)}}\right)\Bigg|_{s=t} = \frac{\partial}{\partial a} L(t, (a, b))\Big|_{\substack{a=q(s)\\ b=q'(s)}} \tag{3.1}$$

die Bewegungsgleichung. Die Gleichung muss N mal gelöst werden.

> **Beispiel 2.** Betrachte ein Partikel in kartesischen Koordinaten mit $V(t, (a, b)) = 0_{\mathbb{R}}$. Setze
>
> $$q(t) := x(t) \in \mathbb{R}^3$$
>
> und $T(t, (q, q')) = m/2\,||x'(t)||_2^2 = m/2\,||q'(t)||_2^2$. Damit folgt dann für $i \in [3]$
>
> $$\frac{\partial}{\partial a_i} T(t, (a, q'(t)))|_{a=q(t)} = 0_{\mathbb{R}}, \qquad \frac{\partial}{\partial b_i} T(t, (q(t), b))|_{b=q'(t)} = m q_i'(t).$$

Damit ist in (3.1) die rechte Seite des Systems immer $0_{\mathbb{R}}$, sodaß

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} m q_i'(s)|_{s=t} = 0_{\mathbb{R}} =: m q_i''(t).$$

Zwangsbedingungen. Setze nun $x_2(t), x_3(t) = 0_{\mathbb{R}} = q_2(t), q_3(t)$ voraus. Mit einem Potential

$$V(t, (q(t), q'(t))) = \left\langle (F_i(q_i(t)))_{i\in[3]}, q(t) \right\rangle, \qquad F_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

gilt dann $V(t, (q(t), q'(t)) = F_1(q_1(t)) \cdot q_1(t)$. Setze ein affinlineares Potential voraus, dann gilt insgesamt

$$V(t, (q(t), q'(t))) = F_1(q_1(t)) \cdot q_1(t) + V_0.$$

Damit ist dann die rechte Seite in (3.1) nicht mehr gleich $0_{\mathbb{R}}$ und wir erhalten

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial a_1} V(t, (a, q'(t)))\Big|_{a=q(t)} \\ &\qquad = \left(a_1 \cdot \frac{\partial}{\partial a_1} F_1(a_1) + F_1(a_1) \cdot \frac{\partial}{\partial a_1} a_1 \right) \Bigg|_{a=q(t)} \\ &\qquad = \left(F_1'(a_1) \cdot a_1 + F_1(a_1) \right) \big|_{a=q(t)} \\ &\qquad = F_1'(q_1(t)) \cdot q_1(t) + F_1(q_1(t)). \end{aligned}$$

Damit ergibt sich mit (3.1) gerade

$$m q_1''(t) = F_1'(q_1(t)) \cdot q_1(t) + F_1(q_1(t)) \qquad\qquad m q_i''(t) = 0_{\mathbb{R}}$$

für $i \in \{2, 3\}$. Von hieraus könnte man den Exponentialansatz zur Lösung verwenden.

Beispiel 3. Betrachte zwei Massen im Gravitationsfeld, welche mit einem Seil über eine fixe Rolle miteinander verbunden sind. In drei Dimensionen wären $3 \cdot 2$ Freiheitsgrade möglich, jedoch bewegen sich die Objekte nur in einer Linie, also $1 \cdot 2 = 2$. Hat das Seil die Länge l und die Massen die Abstände $x_1(t), x_2(t)$ zur Rotationsachse der Rolle, so gilt

$$x_1(t) + x_2(t) = l \iff x_2(t) = l - x_1(t).$$

Damit sind die Ableitungen bis auf Vorzeichen gleich: $x_1'(t) = -x_2'(t)$. Insbesondere kann $x_2(t)$ durch $x_1(t)$ ausgedrückt werden, wodurch nur noch ein

Freiheitsgrad besteht! Setze dann $q(t) := x_1(t)$ und schreibe

$$T(t,(q(t),q'(t))) = \frac{1}{2}q'(t)^2 \cdot \sum_{i\in[2]} m_i.$$

Potentialsuche. Suche ein passendes Potential V, welches das System beschreibt. Wähle die Summe der potentiellen Energien der einzelnen Teilchen, also

$$\begin{aligned} V(t,(q(t),q'(t))) = -m_1 g \cdot q(t) - m_2 g \cdot (l - q(t)) \\ = q(t) \cdot g \cdot (m_2 - m_1) - m_2 g l. \end{aligned}$$

Dann folgt die Lagrangegleichung mit

$$\frac{1}{2}q'(t)^2 \cdot (m_1 + m_2) = q(t) g \cdot (m_2 - m_1) - m_2 g l$$

und mit (3.1) dann schließlich

$$q''(t) \cdot (m_1 + m_2) = g \cdot (m_2 - m_1).$$

3.1 Reibung

DGPs der Form

$$m x''(t) - \gamma x'(t) + k x(t) = 0$$

lassen sich für gewöhnlich mit dem Exponentialansatz

$$x(t) = \exp\left(\mathring{i}\sqrt{\frac{k}{m}}t - \frac{\gamma}{2}t\right)$$

lösen. Als eine weitere wichtige, nicht konservative Kraft ist die Reibung zu betrachten. Für ein holonomes System lassen sich die Lagrange-Gleichungen immer in die Form

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{\partial}{\partial b} L(s,(a,b))\Big|_{\substack{a=q(s)\\ b=q'(s)}}\right)\Bigg|_{s=t} - \frac{\partial}{\partial a} L(t,(a,b))\Big|_{\substack{a=q(s)\\ b=q'(s)}} = Q \qquad Q \in \mathbb{R}$$

bringen.

Beispiel 4. Reibung entlang der e_1-Achse. Bewegt sich ein Teilchen auf dieser und erfährt Reibung, die proportional zu seiner Geschwindigkeit $x_1'(t)$ ist, dann können wir schreiben

$$F_1(t) = -k_1 x_1'(t) = -\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{1}{2}k_1 a^2\right)\Big|_{a=x_1'(t)}$$

und für den gesamten Vektor

$$F(t) = \left(-k_i x_i'(t)\right)_{i\in[3]} \qquad k_i \in \mathbb{R}.$$

Diesen können wir über die Rayleighsche Dissipationsfunktion ausdrücken:

$$F(t) = -\operatorname{div} f(b)|_{b=x'(t)} := -\left(\frac{\partial}{\partial b_i}\left(\frac{k_i}{2}\cdot b_i^2\right)\Big|_{b_i=x_i'(t)}\right)_{i\in[3]}. \tag{3.2}$$

Die genannte Funktion ist für N Teilchen allgemeiner

$$f(v(t)) := \frac{1}{2}\sum_{i\in[N]}\left(k_{(i,1)}v_{(i,1)}(t)^2 + k_{(i,2)}v_{(i,2)}(t)^2 + k_{(i,3)}v_{(i,3)}(t)^2\right),$$

wobei $v(t) := (x_i'(t))_{i\in[N]}$ und $x_i(t) \in \mathbb{R}^3$, sowie $k \in \mathbb{R}^{N\times 3}$. Man kann nun die generalisierte Kraft Q_j nach dessen Definition so ausdrücken, daß die Reibung berücksichtigt wird:

$$\begin{aligned}
Q_j &:= \sum_{i\in[N]}\left\langle \mathbf{F}_i, \partial_{q_j}\mathbf{r}_i\left(t,(q(t),q'(t))\right)\right\rangle \\
&\overset{(3.2)}{=} -\sum_{i\in[N]}\left\langle \operatorname{div} f(b)|_{b=x'(t)}, \partial_{q_j}\mathbf{r}_i\left(t,(q(t),q'(t))\right)\right\rangle \\
&\overset{(*)}{=} -\sum_{i\in[N]}\left\langle \operatorname{div} f(b)|_{b=x'(t)}, \partial_{q_j'}\mathbf{r}_i'\left(t,(q(t),q'(t))\right)\right\rangle \\
&= -\partial_{q_j'} f\left(q'(t)\right)
\end{aligned}$$

mit (*)
$pdiff\mathbf{r}_i q_j t,(q(t),q'(t)) = \partial_{q_j'}\mathbf{r}_i'\left(t,(q(t),q'(t))\right)$. Damit folgt dann die Lagrangegleichung für Reibung.

Information 3.1. Lagrange-DGL mit Reibung.

Bezieht man die Reibungskraft in die Bewegung mit ein, folgt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{\partial}{\partial b}L(s,(a,b))\Big|_{\substack{a=q(s)\\ b=q'(s)}}\right)\Bigg|_{s=t} - \frac{\partial}{\partial a}L(t,(a,b))\Big|_{\substack{a=q(s)\\ b=q'(s)}} = -\partial_{q_j'} f\left(q'(t)\right).$$

Lecture 4

Hamilton

di 08 nov 08:15

4.1 Hamilton Prinzip und Aspekte der Variationsrechnung

Ziel ist, die Lagrange-Gleichung aus einem Integralprinzip herzuleiten.
Wir müssen uns hierzu der Variationsrechnung widmen. Ihr Grundproblem ist

$$\delta_{[t_1,t_2]}(S \circ F)\,(x)\,(h) = 0.$$

Wir können auch schreiben

$$\begin{aligned}\delta_{[t_1,t_2]}(S \circ F)\,(x)\,(h) \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left[\int_{[t_1,t_2]} F(t,((x+sh)(t),\ldots,D^k(x+sh)(t)))\,\lambda\,(dt)\right]\Bigg|_{s=0_{\mathbb{R}}} \\ &= 0_{\mathbb{R}}.\end{aligned}$$

. . . .

□ Beachte die genauen Definitionen der mal und plus Funktionen und notiere sie einmal sauber.

. . . .

Wir bezeichnen S als „Funktional“, denn ihr Definitionsbereich ist eine Menge von Wegen auf $\mathbb{R}^d$. Wir definieren nun die Menge der Wegvariationen $q \in Weg_{[}\,(k,])\,I\mathbb{R}^n$ mit $I \subseteq \mathbb{R}$. Die Anfangsbedingung ist hier nur die Gleichheit der Start- und Endpunkte. Wir schreiben

$$M_k := \left(\left(\left\{q \in Weg_{[}\,(k,])\,I\mathbb{R}^d : [q(t_1) = a]\ \&\ [q(t_2) = b]\right\}\right)_{(a,b)\in(\mathbb{R}^d)^2}\right)_{[t_1,t_2]\subseteq\mathbb{R}}.$$

Hierbei muss man beachten, daß die Menge $Weg_{[}\,(k,])\,I\mathbb{R}^d$ die Einschränkung der Menge $C^k(\mathbb{R},\mathbb{R}^d)$ durch weitere Anfangsbedingungen wie

1. $q \in C^k(\mathbb{R}, \mathbb{R}^d)$ soll strenge Monotonie vorweisen, also knickfrei sein: $\forall t \in I : q'(t) \neq 0_{\mathbb{R}^d}$

Beispiel 5. Man könnte also beispielsweise definieren

$$\mathit{Weg}_{[}\,(k,])\, I\mathbb{R}^d := \left\{ x \in C^k(\mathbb{R}, \mathbb{R}^d) : \forall t \in I : x'(t) \neq 0_{\mathbb{R}^d} \right\}.$$

Im Falle keiner Einschränkung gilt natürlich $\mathit{Weg}_{[}\,(k,])\, I\mathbb{R}^d = C^k(I, \mathbb{R}^d)$.

Im folgenden widmet man sich dem Problem, ein $q \in M_k(a, b)([t_1, t_2])$ zu finden, sodaß S minimal wird. Betrachten wir also zunächst einen Hintergrund.

Hintergrund 1. Wir müssen uns zunächst mit Variationsanalysis auseinandersetzen. In der Kategorie „Optimierung“ auf demselben Gebiet geht es um die Frage, durch welchen Weg ein Linienintegral über diesen extremal wird. Im **eindimensionalen** Fall wird folgendermaßen gehandelt. Definiere ähnlich wie oben

$$M_k : \left(\left(\left\{ x \in \mathit{Weg}_{[}\,(k,])\, [t_1, t_2]\mathbb{R}^d : [x(t_1) = a] \;\&\; [x(t_2) = b] \right\} \right)_{(a,b) \in (\mathbb{R}^d)^2} \right)_{[t_1, t_2] \subseteq \mathbb{R}}.$$

hier mit $I = [t_1, t_2] \subseteq \mathbb{R}$. Alle Vereinigungen verschiedener Intervalle auf $\mathbb{R}$ können durch Integralsummen leicht konstruiert werden.

Behauptung. $M_k(a, b)([t_1, t_2])$ für $(a, b) \in (\mathbb{R}^d)^2$ und $[t_1, t_2] \subseteq \mathbb{R}$ ist kein Vektorraum.

Begründung 6. ...

Auf dieser Menge kann das Funktional

$$S_\Phi : \begin{pmatrix} M_k(a, b)([t_1, t_2]) \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \int_{[t_1, t_2]} \Phi(t, (x, \ldots, D^k(x)))\, \lambda\,(dt) \end{pmatrix},$$

$$\Phi : \begin{pmatrix} \mathbb{R} \times (\mathbb{R}^d)^{k+1} \to \mathbb{R}^m \\ (t, x) \mapsto \Phi(t, x) \end{pmatrix} \in C^1(\mathbb{R} \times (\mathbb{R}^d)^{k+1}, \mathbb{R}^d)$$

mit $k, d, m \in \mathbb{N}$ definiert werden. An Φ werden die Forderungen

1. differenzierbar
2. stetige partielle Ableitungen

gestellt. Weiter definiere die Menge

$$H(a,b)([t_1,t_2]) := \left\{ h \in Weg_{[}\,(k,])\,[t_1,t_2]\mathbb{R}^d : h(t_1) = h(t_2) = 0_{\mathbb{R}^d} \right\}.$$

Damit führen wir die Definition der Variation der Bahn y_α ein.

Information 4.1. Bahnvariation.

Als Variation der Bahn $x \in M(a,b)([t_1,t_2])$ verstehen wir für ein $h \in H(a,b)([t_1,t_2])$

$$y = x + t \cdot h, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Daraus ergibt sich das Variationsproblem mit der Funktion S_Φ für ein Funktional Φ.

Information 4.2. Wirkungsvariation.

Als Variation der Wirkungsfunktion S_Φ verstehen wir für $x \in M_k(a,b)([t_1,t_2])$ und $h \in H_k(a,b)([t_1,t_2])$

$$\delta S_\Phi\,(x)\,(h) := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[S_\Phi(x + t \cdot h)\right]\Big|_{t=0_{\mathbb{R}}}.$$

Vermutung 1. Ist $x \in M_k(a,b)([t_1,t_2])$ die gesuchte, optimale Kurve, gilt $x \in \operatorname{argmin}(S_\Phi)$ und man kann die Menge $M_k(a,b)([t_1,t_2])$ mit

$$y = x + th$$

aufspannen.

Vermutung 2. Man muss zum Vergleichen bereits wissen, welches q „das richtige“ ist, denn sonst wäre $\delta_{M,\square}S$ undefiniert...

Für die Lagrange Funktion ergibt sich damit dann wegen $\Phi := L$ mit $x \in M_k(a,b)([t_1,t_2])$ die Wirkungsfunktion

$$S_L(x) = \int_{[t_1,t_2]} L(t,(x(t),\ldots,D^k(x)(t)))\,\lambda\,(dt)\,.$$

Dann ist genau dann der tatsächliche Weg $q \in M_k(a,b)([t_1,t_2])$ gefunden, wenn für $h \in H_k(a,b)([t_1,t_2])$ gilt

$$\begin{aligned}0_{\mathbb{R}} = \delta S_L\left(q\right)\left(h\right) &:= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left[\int_{[t_1,t_2]} L(t,((q+sh)(t),\dots,D^k(q+sh)(t)))\,\lambda\left(dt\right)\right]\Bigg|_{s=0_{\mathbb{R}}}\\ &= \int_{[t_1,t_2]} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left[L(t,((q+sh)(t),\dots,D^k(q+sh)(t)))\right]\Big|_{s=0_{\mathbb{R}}}\lambda\left(dt\right).\end{aligned}$$

> **Bemerkung 1.** Es gilt also $q \in \operatorname{argmin}\left(S_L\right)$!

4.2 Ableitung Lagrange von Hamilton

Wir betrachten das in der letzten Vorlesung bestimmte Problem

$$\delta S_L\left(\gamma\right)\left(h\right) \stackrel{!}{=} 0$$

für $\gamma \in M_k(a,b)([t_1,t_2])$ mit $a,b \in \mathbb{R}^d$ auf dem Intervall $[t_1,t_2] \subseteq \mathbb{R}$ und $h \in H_k(a,b)([t_1,t_2])$ erneut. Dieses mal betrachten wir das Problem in Form von Richtungsableitungen und finden für $k=1$ [*Anzahl der Ableitungen von* γ] mit in das Integral gezogener Ableitung vor:

$$\begin{aligned}\delta S_L\left(\gamma\right)\left(h\right) &= \int_{[t_1,t_2]} \mathrm{D}_{(0,(h(t),h'(t)))}L\left(x\right)\ \lambda\left(dx_1\right)\\ &= \int_{[t_1,t_2]} \mathrm{D}_{(0,(h(t),0))}L\left(x\right) + \mathrm{D}_{(0,(0,h'(t)))}L\left(x\right)\ \lambda\left(dx_1\right).\end{aligned}$$

Für die zweite Richtungsableitung gilt

$$\begin{aligned}\mathrm{D}_{(0,(0,h'(t)))}L\left(x\right) &= \mathrm{D}_{(0,(0,dh(t)(1)))}L\left(x\right)\\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left[L(x+(0,(0,h'(t)))\right]\Big|_{s=0} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left[L(t,(\gamma(t),\gamma'(t)+s\cdot h'(t))\right]\Big|_{s=0}.\end{aligned}$$

Die Zeitableitung im zweiten Argument des zweiten Arguments kann ausgeschrieben werden:

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left[L(t,(\gamma(t),\mathrm{D}_{(1)}(\gamma+s\cdot h)\left(t\right)))\right]\Big|_{s=0}\\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left[L\left(t,\left(\gamma(t),\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\left[\gamma(u)+s\cdot h(u)\right]\Big|_{u=0}\right)\right)\right]\Bigg|_{s=0}\\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\left[L\left(t,(\gamma(t),\gamma(u)+s\cdot h(u))\right)\right]\Big|_{u=0}\right]\Bigg|_{s=0}.\end{aligned}$$

> **Erinnerung 4.** Es gilt für $f \in C^2(U,V)$ mit $U, V \in \mathscr{V}$ die Symmetriegleichung für $h, u \in U$:
>
> $$d^2 f(x)(h)(u) = d^2 f(x)(u)(h).$$

Damit dann

$$\mathrm{D}_{(0,(0,h'(t)))} L(x) =$$

4.3 Hamilton's principle for non-holonomic systems

4.4 Conversation laws and symmetries

Lecture 5

Weiterführung Hamilton

mi 09 nov 08:15

Lecture 6

Symmetrien

fr 11 nov 11:45

6.1 Erhaltungssätze und Symmetrien

Betrachte die folgende Ableitung:

$$\frac{\partial}{\partial x_i'} L = \frac{\partial}{\partial x_i'} T - \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_i'} V}_{=0_{\mathbb{R}}} = \frac{\partial}{\partial x_i'} T = m_i (x')_i^*(t) =: p_{(i,x)}(t).$$

Hintergrund 2. Es gilt eigentlich

$$\frac{\partial}{\partial x_i'} L := \frac{\partial}{\partial a} \left[L \left(t, \left(q(t), \left(\begin{cases} a & j = i \\ (q')_j^*(t) \\ \text{sonst} \end{cases} \right)_{j \in [N]} \right) \right) \right] \Bigg|_{a = (q')_i^*(t)} .$$

Wir kürzen ab mit

$$\text{IndexTupel}_{(i,j)}(q'(t)) := \left(\begin{cases} a & j = i \\ (q')_j^*(t) \\ \text{sonst} \end{cases} \right)_{j \in [N]} .$$

Damit gilt dann

$$\frac{\partial}{\partial x_i'} L = \frac{\partial}{\partial a} \left[L \left(t, \left(q(t), \texttt{IndexTupel}_{(i,l)}^{(a)} \left(q'(t) \right) \right) \right) \right] \Big|_{a = (q')_i^*(t)}$$

Information 6.1. Kanonischer Impuls.

Wir bezeichnen als kanonischen Impuls die Funktion

$$p : \begin{pmatrix} [N] \times \operatorname{Abb}\left(\mathbb{R}, \mathbb{R}^d\right) \to \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \\ (i,x) \mapsto \begin{pmatrix} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ t \mapsto \partial_{(x')^*_i(t)} L\left(t, (x(t), x'(t))\right) \end{pmatrix} \end{pmatrix}.$$

Es gilt $p_i = \partial_{q'_i} L$.

Beispiel 6. Betrachte Partikel an den Orten $\mathbf{r} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{N \times d}$ in einem elektromagnetischen Feld. Sei $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ das Potential des Vektorfeldes $\mathbf{E}$ und $\operatorname{rot} \mathbf{A} = \mathbf{B}$. Es gilt dann

$$\begin{aligned} L(t, (\mathbf{r}(t), \mathbf{r}'(t))) = \frac{1}{2} \sum_{i \in [N]} m_i \left|\left|(\mathbf{r}')^*_i(t)\right|\right|_2^2 \\ - \sum_{i \in [N]} q_i \cdot \phi(\mathbf{r}^*_1(t)) + \sum_{i \in [N]} q_i \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}^*_i(t)) \cdot (\mathbf{r}')^*_i(t). \end{aligned}$$

Nach kanonischer Definition des Impulses folgt

$$\begin{aligned} p_{(\mathbf{r}_{(i,1)})}(t) &= \frac{\partial}{\partial a} \left[L \left(t, \left(\left(\mathbf{r}^*_{(j,1)}(t) \right)_{j \in [N]}, \mathtt{IndexTupel}^{(a)}_{(i,l)} \left(\left(\mathbf{r}^*_{(l,1)}(t) \right)_{l \in [N]} \right) \right) \right) \right] \Bigg|_{a = (q')^*_i(t)} \\ =: \frac{\partial}{\partial (\mathbf{r}')^*_{(i,1)}(t)} L &= m_i \cdot (\mathbf{r}')^*_{(i,1)}(t) + q_i(t) \cdot A \left((\mathbf{r})^*_{(i,1)}(t) \right)_{i \in [N]} \neq m_i (\mathbf{r})^*_{(i,1)}(t). \end{aligned}$$

Zu beachten ist hier, daß $\mathbf{r}$ eine Matrix ist und $\mathbf{r}_{(i,j)}(t)$ ist der Ort des i-ten Teilchens und dessen j-te Komponente.

6.2 Noether-Theorem

Wenn ein System eine kontinuierliche Symmetrie besitzt, dann gibt es eine zeitunabhängige Größe. Wir diskutieren drei Symmetrien. Wir erinnern uns: Im Allgemeinen sind q Funktionen der Zeit mit

$$q : \begin{pmatrix} \mathbb{R} \to \mathbb{R}^d \\ t \mapsto q(t) \end{pmatrix}.$$

Wir finden mit den NOETHER-schen Theoremen jedoch Funktionen

$$F : \begin{pmatrix} \mathbb{R} \times (\mathbb{R}^d)^2 \to \mathbb{R}^d \\ (t,x) \mapsto F(t,x) \end{pmatrix},$$

welche zeitliche Konstanz aufweisen und nur von den Anfangsbedingungen des Systems bestimmt sind.

Information 6.2. Integrale der Bewegung.

Wir nennen Funktionen der Form $\mathbb{R} \times (\mathbb{R}^d)^2 \to \mathbb{R}^d$, $(t, x) \mapsto F(t, x)$ für $x = (q(t), q'(t))$ *Integrale der Bewegung*, falls

$$F(t, (q(t), q'(t))) = c \in \mathbb{R}$$

konstant.

Die Integrale der Bewegung ergeben also ein AWP der Form

$$c = \mathscr{F}(t, u(t))$$

und den Gleichungen $c_i = \mathscr{F}(t, u(t))_i$ mit $u(t) := (q(t), q'(t))$.

. . . .

□ Überlege dir, wie man die Analysis III Kenntnisse zur Lösung des AWPs anwenden könnte.

. . . .

Die generalisierten Impulse $p_{(i,q)}(t) := \partial_{q_i'} L\left(t, (q(t), q'(t))\right)$ sind zyklischen Koordinaten.

Information 6.3. Zyklische Koordinaten.

Wir nennen $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^d$ *zyklisch in* $i \in [d]$ *bezüglich* L genau dann, wenn $\frac{\partial}{\partial q_i} L(t, (q(t), q'(t))) = 0$, also genau dann wenn $p_i = const.$

Hieraus lassen sich gewisse Integrale der Bewegung bereits ableiten. Man sollte also q so wählen, sodaß möglichst viele Einträge auf zyklische Koordinaten führen.

Beispiel 7 (Zweikörperproblem)**.** Bei einem nur vom Abstand abhängigen Potential $V(r) = V(||r_1 - r_2||_2)$ wähle Relativ- und Schwerpunktbewegungen:

1. Die Gesamtmasse ist $M := m_1 + m_2$
2. Die reduzierte Masse ist $\mu := m_1 \cdot m_2 / M$
3. Der Schwerpunkt ist $R(t) := 1/M \cdot (m_1 \cdot r_1(t) + m_2 \cdot r_2(t))$
4. Die Relativkoordinaten sind $r(t) := r_1(t) - r_2(t)$.

Definiere damit

$$q(t) := (R(t)_1, R(t)_2, R(t)_3, r(t)).$$

Mit den Definitionen und dem vorgegebenen Potential ergibt sich zunächst

$$L(t,(q(t),q'(t))) = \frac{1}{2}M \cdot \left|\left|q'(t)\right|\right|_2^2 - V(q_4^*(t)).$$

....

□ Betrachte $\mathcal{r}(t) := (r \circ f)(t)$ in Kugelkoordinaten mit Transformationsfunktion f und löse die Lagrange Gleichung weiter auf.

....

Eingesetzt erhalten wir

$$L(t,(q(t),q'(t))) = \frac{1}{2}M \cdot (R'(t)_1^2 + R'(t)_2^2 + R'(t)_3^2 + r'(t)^2) - V(q_4^*(t)).$$

Man erkennt durch Verwendung der Definition (6.3) und der Kugelkoordinatendarstellung, daß q_1, q_2, q_3 zyklisch sind.

....

□ Zeige die Aussage über q_1, q_2, q_3. Nutze hierzu die Koordinatentransformation.

....

Damit ist für $j \in [3]$

$$p_{(j,q)}(t) = M \cdot q'(t)_1 = const.$$

und in zusammengefasster Form $P(t) = M \cdot R'(t) = const.$ für $P := ((p_1, p_2, p_3))_{t \in \mathbb{R}}$.

6.2.1 Translationssymmetrie

6.2.2 Rotationssymmetrie

6.2.3 Zeitsymmetrie

Lecture 7

Lagrange Transformation

di 25 okt 10:30

7.1 Lagrange Transformation

7.1.1 Allgemeiner Ansatz

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $df\,(x)\,(h) = \partial_1 f\,(x) \cdot h_1 + \partial_2 f\,(x) \cdot h_2$ für $h \in \mathbb{R}^2$. Gelte zudem $df\,(x)\,(h) = 0_{\mathbb{R}}$. Definiere nun

$$g := f - \partial_1 f \cdot \pi_1.$$

Dann folgt mit der Kettenregel für $k \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned}
dg\,(x)\,(k) &= df\,(x)\,(k) - [d(\partial_1 f)\,(x)\,(k) \cdot \pi_1(x) + d\pi_1\,(x)\,(k) \cdot \partial_1 f\,(x)] \\
&= df\,(x)\,(k) - [d(\partial_1 f)\,(x)\,(k) \cdot \pi_1(x) + \pi_1(k) \cdot \partial_1 f\,(x)] \\
&= \partial_1 f\,(x) \cdot k_1 + \partial_2 f\,(x) \cdot k_2 - [d(\partial_1 f)\,(x)\,(k) \cdot \pi_1(x) + \pi_1(k) \cdot \partial_1 f\,(x)] \\
&= \partial_2 f\,(x) \cdot k_2 - d(\partial_1 f)\,(x)\,(k) \cdot \pi_1(x).
\end{aligned}$$

Wegen der vorausgesetzten Form

$$dg\,(x)\,(k) = \partial_1 g\,(x) \cdot k_1 + \partial_2 g\,(x) \cdot k_2$$

folgt mit Koeffizientenvergleich

$$\partial_1 g\,(x) = -\pi_1(x) = x_1 \qquad\qquad \partial_2 g\,(x) = \partial_2 f\,(x)\,.$$

Information 7.1. Legendre-Transformierte.

Als die Legendre-transformierte von $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definieren wir

$$\begin{aligned}
g :=& f - \partial_1 f \cdot \pi_1 \qquad \text{erste Komponente } x_1 \\
g :=& f - \partial_2 f \cdot \pi_2 \qquad \text{zweite Komponente } x_2.
\end{aligned}$$

7.1.2 Anwendung auf Lagrange

Es gilt für $L : \mathbb{R} \times (\mathbb{R}^d)^2 \to \mathbb{R}$ mit der Definition $q := \partial_{(2,2)} L$ dann mit dem obigen Kapitel

$$\tilde{L} := L - \pi_{(2,2)} \cdot \partial_{(2,2)} L.$$

Information 7.2. Hamilton-Funktion.

Damit folgt die Hamilton Funktion mit $H = -\tilde{L}$ als

$$H = \pi_{(2,2)} \cdot \partial_{(2,2)} L - L$$

für Funktionswerte $x \in \mathbb{R} \times (\mathbb{R}^d)^2$.

Ein besonderes Augenmerk lege auf

$$\partial_{(2,2)} L \cdot \pi_{(2,2)} = \sum_{i \in [d]} \partial_{(2,2)} L_i \cdot \pi_{(2,2)}.$$

Lecture 8

Virial- und Kepler Problem

di 22 nov 08:15

Erinnerung 5. Bezüglich des Zweikörperproblems haben wir herausgefunden

$$t = \int_{[r_0,r]} \frac{1}{\sqrt{g(W,V,m,r,l}}\,\lambda\,(dt)$$

mit

$$g : \begin{pmatrix} \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R} \\ x \mapsto 2/x_3(x_1 - x_2 - x_5^2/(2x_4^2)) \end{pmatrix}.$$

8.1 Das Virialproblem

Für $i \in [N]$ seien Massen $m_i \in \mathbb{R}$ mit Orten $\mathbf{q}_i := \mathbf{r}_i \in \mathrm{Abb}\left(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3\right)$ und Kräften $\mathbf{F}_i \in \mathrm{Abb}\left(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3\right)$ gegeben. Es gilt mit $d\mathbf{p}_i\,(t)\,(1_{\mathbb{R}}) = \mathbf{F}_i(t)$, wobei $\mathbf{p}_i \in \mathrm{Abb}\left(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3\right)$, dann

$$G_N : \begin{pmatrix} \mathbb{R} \times \mathrm{Abb}\left(\mathbb{R}^N, \mathrm{Abb}\left(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3\right)\right)^2 \to \mathbb{R} \\ (t, x) \mapsto \sum_{i \in [N]} \langle x_1(i)(t), x_2(i)(t) \rangle \end{pmatrix}.$$

Erinnerung 6. Es gilt eigentlich $\mathbf{p}, \mathbf{F}, \mathbf{q} \in \mathrm{Abb}\left(\mathbb{R}^N, \mathrm{Abb}\left(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3\right)\right)$.

Betrachte die zeitliche Ableitung von G, dann

$$\partial_t G\,(x) \overset{KR.}{=} \sum_{i \in [N]} \left\langle x_1'(i)(t), x_2(i)(t) \right\rangle + \sum_{i \in [N]} \left\langle x_1(i)(t), x_2'(i)(t) \right\rangle.$$

Für unseren Speziellen Fall ergibt sich

$$\partial_t G\,(t, (\mathbf{q}, \mathbf{p})) = \sum_{i \in [N]} \left\langle \mathbf{q}_i(t), (\mathbf{p}_i)'(t) \right\rangle + \sum_{i \in [N]} \left\langle (\mathbf{q}_i)'(t), \mathbf{p}_i(t) \right\rangle.$$

Wegen $W_{kin}(t) = 1/2m\,||r'(t)||_2^2$ folgt die Abkürzung

$$\partial_t G\left(t, (\mathbf{q}, \mathbf{p})\right) = 2 \cdot W_{kin}(t) + \sum_{i \in [N]} \left\langle \mathbf{F}_i(t), \mathbf{p}_i(t) \right\rangle .$$

Mit dem Mittelwertsatz der Integralrechunung folgt über ein Intervall $[0, \tau]$ mit $\tau \in \mathbb{R}_{>0}$ die Existenz eines $\zeta \in \mathbb{R}$ mit

$$\partial_t G\left(\zeta, (\mathbf{q}, \mathbf{p})\right) = \frac{1}{\tau} \cdot \int_{[0_{\mathbb{R}}, \tau]} \partial_t G\left(t, (\mathbf{q}, \mathbf{p})\right) \, \lambda\left(dt\right) = \frac{1}{\tau} \cdot \left[G(s, (\mathbf{q}, \mathbf{p}))\right]_{s=0}^{s=\tau} .$$

Annahme. Es sei nun $\tau = T$ die Periodendauer eines oszillierenden Systems. Andernfalls betrachte $\lim_{\tau \to \infty}$.

Dann ist $1/\tau \cdot (G(\tau, (\mathbf{q}, \mathbf{p})) - G(0, (\mathbf{q}, \mathbf{p}))) = 0_{\mathbb{R}}$ und wir erhalten

$$W_{kin}(t) = -\frac{1}{2} \cdot \sum_{i \in [N]} \left\langle \mathbf{F}_i(t), \mathbf{p}_i(t) \right\rangle .$$

Beispiel 8. Betrachte ein Gas des Volumens $V \subseteq \mathbb{R}^3$ mit $N \in \mathbb{N}$ Teilchen.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \cdot \overline{\sum_{i \in [N]} \left\langle \mathbf{F}_i(t), \mathbf{p}_i(t) \right\rangle} &= -\frac{1}{2} p \cdot \int_{\partial V} \left\langle \mathbf{n}, \sum_{i \in [N]} \mathbf{r}_i(t) \right\rangle \lambda|_S\left(dt\right) \\
&\overset{SvG}{=} -\frac{1}{2} p \cdot \int_V \operatorname{div} \left(\sum_{i \in [N]} \mathbf{r}_i(t) \right) \lambda\left(dt\right) \overset{?}{=} -\frac{3}{2} pV.
\end{aligned}$$

Lecture 9

Na, nicht aufgepasst?

mo 28 nov 10:00

Lecture 10

Hyperbolische Laufbahnen

di 29 nov 08:45

10.1 Streuungsquerschnitt

10.2 Beispiel Streuung geladener Teilchen

Beispiel 9. Es gilt die Exzentrizität

$$\mathscr{E} = ...$$

Aus der vorangegangenen Analyse des KEPLER-Problems folgt, daß allgemein gilt

$$||\mathbf{r}||_2 = \frac{p}{1 + \mathscr{E} \cdot \cos(\beta - \beta_0)} \iff \frac{p}{||r||_2} = 1 + \mathscr{E} \cdot \cos(\beta - \beta_0).$$

10.3 Streuparameter und Winkel

Ugly Physiker Shortcut 1. Wir erhalten magisch

$$\left|\left|\right|\right|_2$$

Lecture 11

Orthogonale Transformationen

mo 05 dez 10:00

11.1 Das Vektorrezept

Betrachte die Basis $\underline{e}$ des $\mathbb{R}^3$ und ein Basistupel $\underline{l}$ in

$$\underline{l} \in \mathrm{Bij}\left([3], \textit{Orthonormalbasis}_{\mathbb{R}}\left(\mathbb{R}^3\right)\right),$$

wobei $\underline{l}$ im Anwendungsfall die im starren Körper fixiere ONB sei. Dann lässt sich jeder Vektor $x \in \mathbb{R}^3$ basteln mit Elementen in $\underline{e}$ und $\underline{l}$. Hierzu brauchen wir verschiedene Multiplikatoren, welche offensichtlich Basisabhängig sind. Wir notieren zunächst das *Vektorrezept*.

> **Information 11.1.** Vektorrezept.
>
> Für $x \in \mathbb{R}^3$ und $\underline{e} \in \textit{Basistupel}\left(\mathrm{Raum}_{\mathbb{R}}\left(\mathbb{R}^3\right)\right)$ definieren wir die Menge
>
> $$\textit{Vektorrezept}_{\mathbb{R}^3}(x)(\underline{e}) := \left\{\lambda \in \mathbb{R}^3 : \Phi(\lambda, \underline{e}) = x\right\},$$
>
> wobei $\Phi(\lambda, \underline{e}) := \sum_{i \in \mathrm{Def}(\lambda)} \lambda_i \cdot \underline{e}_i$.

- ☐ Verallgemeinere das Konzept auf $\mathbb{R}^d$ für $d \in \mathbb{N}$.
- ☐ Zeige $\Phi(\lambda, \underline{e}) = \mathrm{vec}_{\underline{e}}(x)$.
- ☐ Zeige die Eindeutigkeit des Elementes aus $\textit{Vektorrezept}_{\mathbb{R}^d}(x)(\underline{e})$.

Wir können nun eine Analogie zur Linearen Algebra ziehen: Es gilt nämlich

$$\mathrm{coord}_{\underline{e}}(x) = \text{Eintrag } \textit{Vektorrezept}_{\mathbb{R}^3}(x)(\underline{e}).$$

Um nun einen Basiswechsel vorzunehmen, brauchen wir das Vektorrezept des Vektors x bezüglich der Zielbasis $\underline{l}$, also

$$\mathrm{coord}_{\underline{l}}(x) = \text{Eintrag } \textit{Vektorrezept}_{\mathbb{R}^3}(x)(\underline{l}).$$

> **Information 11.2.** Die Vektorrezeptabbildung.
>
> Seien $\operatorname{coord}_{\underline{e}}(x)$ und $\operatorname{coord}_{\underline{l}}(x)$ Vektorrezepte des Vektors $x \in \mathbb{R}^d$ zu den Basen $\underline{l}$ und $\underline{e}$, dann nennen wir
>
> $$\texttt{Vektorrezeptabbildung}_{(\underline{e},\underline{l})} : \begin{pmatrix} \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d \\ \operatorname{coord}_{\underline{e}}(x) \mapsto \operatorname{coord}_{\underline{l}}(x) \end{pmatrix}$$
>
> die zugehörige Vektorrezeptabbildung.

. . . .

□ (✎12) Zeige daß `Vektorrezeptabbildung` eine Bijektion ist.

. . . .

Mit der Form der Vektorrezeptabbildung können wir nun ein Gleichungssystem aufstellen, dessen Lösung $\operatorname{coord}_{\underline{l}}(x)$ sein wird:

$$f(x) = \sum_{i\in[3]} \texttt{Vektorrezeptabbildung}_{(\underline{e},\underline{l})}(x) \cdot \underline{l}_i =: \operatorname{vec}_{\underline{l}}(x)\,.$$

Damit ist dann

$$f = \operatorname{vec}_{\underline{l}}(x) \circ \texttt{Vektorrezeptabbildung}_{(\underline{e},\underline{l})}.$$

Die Basiswechselmatrix erhält man dann durch Einsetzen der Vektoren aus $\underline{e}$ für x. Sie lautet dann

$$M(f,\underline{e},\underline{l}) := \Big(\texttt{Vektorrezeptabbildung}_{(\underline{e},\underline{l})}(\underline{e}_j)(i)\Big)_{(i,j)\in[3]^2}\,.$$

. . . .

□ (✎13) Verallgemeinere das Konzept auf $\mathbb{R}^d$ für $d \in \mathbb{N}$.

□ (✎14) Beschreibe, wie man einen beliebigen Vektor $x \in \mathbb{R}$ zu $f(x)$ überführt. Nutze dazu die Abbildung $\mathit{Vektorrezept}_{\mathbb{R}^3}(x)(\underline{e})$ und das Matrixvektorprodukt. Bastle aus dem Ergebnis mit $\operatorname{vec}_{\underline{l}}(x)$ das Ergebnis $f(x)$.

. . . .

11.2 Die Winkelzuordnung

$$\mathit{Winkelzuordnung}(\underline{l},\underline{e}) : \begin{pmatrix} [3]^2 \to \mathbb{R} \\ (i,j) \mapsto \frac{\langle \underline{l}_i, \underline{e}_j \rangle}{||\underline{l}_i||_2 \cdot ||\underline{e}_j||_2} \end{pmatrix}.$$

Da allerdings $||\underline{e}_i|| = ||\underline{l}_i|| = 1$ gilt

$$\textit{Winkelzuordnung}(\underline{l}, \underline{e})(i, j) = \left\langle \underline{l}_i, \underline{e}_j \right\rangle =: \Gamma(\underline{l}, \underline{e})(i, j).$$

Information 11.3. Eulerwinkelzuordnung und Eulerwinkel.

Seien $\underline{l}, \underline{e} \in \textit{Basistupel}\left(\mathrm{Raum}_{\mathbb{R}}\left(\mathbb{R}^3\right)\right)$, dann sammeln wir die *Eulerzuordnungswinkel* in der Menge

$$\textit{Eulerwinkelzuordnung}\left(\underline{l}_i\right)\left(\underline{e}\right) := \{\Gamma(\underline{l}, \underline{e})(i, j) : j \in \mathrm{Def}\left(\underline{e}\right)\}$$

und sprechen von den Winkelzuordnungen von $\underline{l}_i$ bezüglich der ONB $\underline{e}$ für ein $i \in \mathrm{Def}\left(\underline{l}\right)$. Weiter sammeln wir in

$$\textit{Eulerwinkel}\left(\underline{l}_i\right)\left(\underline{e}\right) := \left\{\cos^{-1}(\alpha) : \alpha \in \textit{Eulerwinkelzuordnung}\left(\underline{l}_i\right)\left(\underline{e}\right)\right\}$$

die tatsächlichen *Winkel* $\alpha \in (-\pi, \pi)$ zu den obigen Zuordnungen.

Bemerkung 2. Beachte: $(\textit{Winkel} \circ \textit{Winkelzuordnung})(i)$ gibt für $\textit{Winkel} : \mathbb{R} \to [0, 2\pi],\ t \mapsto \cos^{-1}(t)$ den tatsächlichen Winkel zwischen den i-ten Basisvektoren - die Funktion *Winkelzuordnung* selbst ordnet nur den Eingabewert zu, gibt aber selbst **keinen** Winkel aus!

Damit ist dann $\Gamma(\underline{l}, \underline{e})$ eine Matrix in $\mathbb{R}^{3\times 3}$! Damit ergibt sich dann für einen Vektor in $\underline{l}$ gerade

$$\underline{l}_i = \sum_{j\in[3]} \Gamma(\underline{l}, \underline{e})(i, j) \cdot \underline{e}_j \qquad \underline{e}_j = \sum_{i\in[3]} \Gamma(\underline{l}, \underline{e})(i, j) \cdot \underline{l}_i$$

Ein Vektor $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 \cdot \underline{e}_1 + \mathbf{r}_2 \cdot \underline{e}_2 + \mathbf{r}_3 \cdot \underline{e}_3$ in $\underline{l}$ gerade

$$\mathbf{r} = \sum_{i\in[3]} \mathbf{r}_i \cdot \underline{e}_i = \sum_{i\in[3]} \mathbf{r}_i \cdot \sum_{j\in[3]} \Gamma(j, i) \cdot \underline{l}_j.$$

Lecture 12

Na, nicht aufgepasst?

di 06 dez 08:45

Betrachte nochmal die Matrix aus letzter Stunde:

$$\Gamma(\underline{l},\underline{e}) := \mathit{Winkelzuordnung}(\underline{l},\underline{e}) = \begin{pmatrix} \langle \underline{l}_1, \underline{e}_1\rangle & \langle \underline{l}_1, \underline{e}_2\rangle & \langle \underline{l}_1, \underline{e}_3\rangle \\ \langle \underline{l}_2, \underline{e}_1\rangle & \langle \underline{l}_2, \underline{e}_2\rangle & \langle \underline{l}_2, \underline{e}_3\rangle \\ \langle \underline{l}_3, \underline{e}_1\rangle & \langle \underline{l}_3, \underline{e}_2\rangle & \langle \underline{l}_3, \underline{e}_3\rangle \end{pmatrix}.$$

Wegen Symmetrie des Skalarproduktes sind nur sechs Einträge unabhängig:

$$\Gamma(\underline{l},\underline{e}) = \underbrace{\begin{pmatrix} \langle \underline{l}_1, \underline{e}_1\rangle & \langle \underline{l}_1, \underline{e}_2\rangle & \langle \underline{l}_1, \underline{e}_3\rangle \\ & \langle \underline{l}_2, \underline{e}_2\rangle & \langle \underline{l}_2, \underline{e}_3\rangle \\ & & \langle \underline{l}_3, \underline{e}_3\rangle \end{pmatrix}}_{\substack{\text{Matrix der}\\ \text{Zwangsbedingungen}}} + \underbrace{\begin{pmatrix} & & \\ \langle \underline{l}_2, \underline{e}_1\rangle & & \\ \langle \underline{l}_3, \underline{e}_1\rangle & \langle \underline{l}_3, \underline{e}_2\rangle & \end{pmatrix}}_{\substack{\text{Matrix der}\\ \text{Freiheitsgrade}}}$$

(Visualisierung!)

Wir können damit für $x \in \mathbb{R}^3$ als Transformation schreiben:

Information 12.1. Koordinatentransformationsfunktion.

Seien $\underline{l}, \underline{e} \in \mathit{Basistupel}\left(\mathbb{R}^3\right)$ auf ONBs und $\Gamma(\underline{l},\underline{e})$ die Winkelzuordungsmatrix. Dann nennen wir

$$\mathit{Transformation}_{\Gamma(\underline{l},\underline{e})} : \begin{pmatrix} \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \\ x \mapsto \Gamma(\underline{l},\underline{e}) \cdot x \end{pmatrix}$$

die Transformationsfunktion zu $\Gamma(\underline{l},\underline{e})$ und schreiben abgekürzt $\mathscr{T}_{\underline{l},\underline{e}}$.

. . . .

□ Zeige $f = \mathrm{vec}\,(\underline{l}) \circ f_M$ (✎15) $\mathrm{coord}\,(\underline{e}) \iff \forall i \in [\mathrm{Def}\,(e)] : (\mathrm{coord}\,(\underline{l}) \circ f)(x_i) = M \cdot \underline{e}_i$ für $x \in \mathbb{R}^d$.

. . . .

Mit der Aufgabe (✎??) können wir dann mit $f = \mathrm{id}\,\mathbb{R}^3$ schreiben

$$\mathrm{coord}_{\underline{l}}\,(x) = \left(\langle \underline{l}, \underline{e} \rangle \cdot x(i)\right)_{i \in \mathrm{Def}(\underline{l})}.$$

. . . .

□ Zeige, daß sich damit (✎??) $\Gamma(\underline{l}, \underline{e})$ ergibt.

. . . .

$$X = \Gamma(\underline{l}, \underline{e}) \cdot x := \left(\sum_{i \in [3]} \Gamma(\underline{l}, \underline{e})(j,i) \cdot x_i \right)_{j \in [3]}.$$

Aus dieser lässt sich nun die Transformationsfunktion ableiten:

$$\mathit{Transformation}_{\Gamma} : \begin{pmatrix} \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \\ x \mapsto \Gamma \cdot x \end{pmatrix}.$$

Bemerkung 3. Bei der $\mathit{Transformation}_{\Gamma}$ Funktion handelt es sich um eine orthogonale Abbildung. Nach der linearen Algebra [→ Satz 15.2.11] können wir die Matrix mit einer Funktion *Blockzuordnung* identifizieren:

$$\mathit{BlockMatrixZuordnung} : \begin{pmatrix} \mathbb{R}^{d \times d} \to \mathrm{Abb}\left(\mathbb{R}^l, \mathbb{R}^{d \times d}\right) \\ A \mapsto \begin{pmatrix} \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}^{d \times d} \\ x \mapsto M_A(x) \end{pmatrix} \end{pmatrix},$$

wobei

$$\mathit{BlockMatrixZuordnung}(A)(x) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda_k & & 0 \\ & & & \boxed{\begin{matrix} \cos x_1 & -\sin x_1 \\ \sin x_1 & \cos x_1 \end{matrix}} & \\ & 0 & & & \ddots \\ & & & & \boxed{\begin{matrix} \cos x_l & -\sin x_l \\ \sin x_l & \cos x_l \end{matrix}} \end{pmatrix}.$$

Lecture 13

Gekoppelter Oszillator

mo 09 jan 10:00

13.1 Gekoppelter Oszillator

Der gekoppelter Oszillator kann durch das Potential $V(x) = kx^2/2$ beschrieben werden. Die GewegungsDGL ist dann $mx''(t) + kx(t) = 0_{\mathbb{R}}$ mit der Lösung $x(t) = \exp(-\lambda t/m) \cdot \mathrm{Re}\left(A \cdot \exp\left(-\mathring{\imath}\,\omega t\right)\right)$.

. . . .

(✎17) □ Verifiziere die angegebene Lösung $x(t) = \exp(-\lambda t/m) \cdot \mathrm{Re}\left(A \cdot \exp\left(-\mathring{\imath}\,\omega t\right)\right)$ des DGP $mx''(t) + kx(t) = 0_{\mathbb{R}}$ für den gekoppelten Oszillator.

. . . .

13.2 Mehrteilchensysteme

Information 13.1. Gleichgewichtszustand.

Der *Gleichgewichtszustand* ist der Zustand, für welchen alle verallgemeinerten Kräfte gleich 0 sind, also

$$0 = Q_i(t, (q(t), q'(t))) =: -\mathrm{D}_{((0,(\mathbb{1}_i,0))}V\left(t, (q(t), q'(t))\right).$$

Es hat also V einen Extrempunkt $(t, x) \in \mathrm{kritP}\,(V)$. Wir unterscheiden hierbei $(t, q) \in \mathrm{argmin}\,(V)$ und sagen „(t, x) ist ein *stabiler Punkt*“, andernfalls mit $(t, q) \in \mathrm{argmax}\,(V)$ ein *instabiler Punkt*.

. . . .

(✎18) □ Bedenke den Zusammenhang des Extrempunktes mit der Definition des Gleichgewichtszustandes.

. . . .

Man kann sich nun die Umgebung des solchen Punktes (t, q) genauer ansehen, indem man kleine Änderungen der Einträge q_i durch eine Verschiebung $h_2(i)$ stimuliert:

$$dV\,(x)\,(h) \approx V(x+h) - V(x).$$

Taylorentwicklung

Es ist vielleicht nützlich, sich einmal das ganze aus der TAYLOR Perspektive anzusehen, wobei wir die EINSTEIN Summenkonvention verwenden wollen; Dann ist für $x \in \mathrm{kritP}\,(V)$

$$V(x+h) = V(x) + \mathrm{D}_{(h)}V\,(x) + \frac{1}{2}\mathrm{D}^2_{(h)}V\,(x) + \mathrm{TAF}_{V,x}\,(h)\,.$$

Dabei ist $\mathrm{D}_{(0,\mathbb{1}_i)}V\,(x) = 0$ wegen $x \in \mathrm{kritP}\,(V)$ und für $V(x)$ *eichen* wir nach der Art $V(x) = 0$, also wählen wir (willkürlich, aber von Vorteil) die lineare Verschiebung $-V(x)$ um schreiben zu können

$$V(x+h) = \frac{1}{2}\mathrm{D}^2_{(h)}V\,(x) + \mathrm{TAF}_{V,x}\,(h)\,.$$

Es ist jetzt an der Zeit sich zu überlegen, welche Form x und insbesondere h haben muss: Zunächst ist $x \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$, und da wir mit x einen Ort zu einem Zeitpunkt darstellen wollen, wählen wir $q \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3)$ mit $(t, q(t)) = x$ für ein $t \in \mathbb{R}$. Dementsprechend ist die Verschiebung h von der Form $(s, \hbar(t))$ für $\hbar \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3)$, also

$$\tilde{q}(t) = q(t) + h(t)$$

für das verschobene $\tilde{q}$. Wir können schreiben

$$V((t, q(t)) + (s, \hbar(t)) = \frac{1}{2} \cdot \mathrm{D}^2_{((s,\hbar(t)))}V\,(t, q(t)) + \mathrm{TAF}_{V,(t,q(t))}\,(s, \hbar(t))\,.$$

Dies ist schon um einiges unübersichtlicher, da die Gleichung in die Länge gezogen wird; jedoch bietet es den Vorteil zu überblicken, mit welchen Konstruktionen gearbeitet wird. Wir wollen nun jedoch die Struktur umformulieren.

. . . .

□ Führe die Umformulierung durch, indem du die Linearität der Ableitung im Mehrdimensionalen verwendest. Verwende hierbei den *Differentialquotient* $\mathbb{D}_h f(x)$. (✎19)

. . . .

Wir haben dann

$$V(x + (s, \hbar(x_1)) \approx s^2 \cdot \mathbb{D}_{\left(\left(1_{\mathbb{R}}, 0_{\mathbb{R}^3}\right)_{i\in[2]}\right)}V\,(x) + \sum_{(i,j)\in[3]^2} (\hbar)^*_i(x_1) \cdot (\hbar)^*_j(x_1) \cdot \underbrace{\mathbb{D}_{(((0_{\mathbb{R}}, e_i),(0_{\mathbb{R}}, e_j)))}V\,(x)}_{=d^2V(x)(0_{\mathbb{R}}, e_i)(0_{\mathbb{R}}, e_j)}\,.$$

Man fühlt bereits den Raum einer Abkürzung: Wir führen eine Matrix ein, um nicht immer den Differentialquotienten direkt schreiben und sehen zu müssen:

$$\Lambda := \left(\mathbb{D}_{(((0_{\mathbb{R}},e_i),(0_{\mathbb{R}},e_j)))} V(x)\right)_{(i,j)\in[d]^2}.$$

Man kann weiter zeigen $\Lambda_{(i,j)} = \Lambda_{(j,i)}$.

. . . .

□ Mache dir klar, weshalb (✎20) in den Taylor Summanden mit h_i, h_j multipliziert wird. Beachte hierbei die Linearität der Ableitung $\mathrm{D}_{(\mathbb{1}_i)} V(x)$.

□ Zeige $\mathrm{D}_{(\mathbb{1}_i)} V(q) = 0$ (✎21) und $V(x) = 0$.

□ Zeige $\Lambda_{(i,j)} = \Lambda_{(j,i)}$. (✎22)

. . . .

Den kinetischen Energieterm kann man in der Betrachtung des Extrempunktes $(t,q) \in \mathrm{kritP}(V)$ zu einer quadratischen Funktion schreiben:

$$T(x) = \frac{1}{2} m_{(i,j)} \cdot x_i x_j = \frac{1}{2} m_{(i,j)} h_i h_j.$$

Zu beachten ist, daß m von den Koordinaten x_k abhängt:

$$m_{(i,j)}(x) = m_{(q)} + ...$$

. . . .

□ Überlege, was m für eine (✎23) Matrix ist; wie fließt die Auswertung in x in die Konstruktion mit ein?

□ Vervollständige die Punkte. (✎24)

. . . .

... Damit können wir dann den Lagrangian schreiben mit

$$L(t, h(t), h'(t)) = \frac{1}{2}\left(T_{(i,j)}(h')_i^*(t) \cdot (h')_j^*(t) - V_{(i,j)} h_i^*(t) \cdot h_j^*(t)\right).$$

Unter der Verwendung der Euler-Lagrange Gleichung erhalten wir die Bewegungsgleichungen, welche Aussagen über die zeitliche Entwicklung der Abweichung h liefern;

$$\mathrm{D}_{(0,(0,\mathbb{1}_l))} L(t,x) = \frac{1}{2} T_{(l,i)} \cdot (x_2')^*_{(l,i)}(j) + \frac{1}{2} T_{(i,l)} \cdot (x_2')^*_i(t)$$

und wegen $T_{(i,j)} = T_{(j,i)}$ dann

$$\mathrm{D}_{(0,(0,\mathbb{1}_l))} L(t,x) = T_{(i,l)} \cdot (x_2')^*_i(t).$$

Für den Term $\mathrm{D}_{(0,(\mathbb{1}_i,0))} L((t,x))$ finden wir

$$\mathrm{D}_{(0,(\mathbb{1}_i,0))} L((t,x)) = -\Lambda_{(l,j)} \cdot h_j.$$

Somit ist dann die Bewegungsgleichung

$$T_{(i,j)}(h'')_j^*(t) + \Lambda_{(i,j)}h_j^*(t) = 0.$$

. . . .

(✎25) □ Rechne den Lagrangian nach und stelle ihn formal auf.

(✎26) □ Rechne die Terme der Euler Lagrange Gleichung nach und berechne die zeitliche Ableitung.

□ Kläre, welche Null in der Bewegungsgleichung gemeint ist.

. . . .

... Aus der Theorie der Linearen Algebra sei bekannt, daß das System genau dann eine nicht-triviale Lösung besitzt, wenn

$$\det\bigl(\Lambda - \omega^2 T\bigr) = 0.$$

. . . .

□ Zeige die Aussage und den dahinterliegenden Satz.

. . . .

Durch diese Gleichung sind die *Eigenfrequenzen* ω des Systems. Es kann dabei bis zu n Einträge geben, sogar $\omega \in \mathbb{C}^k \setminus \mathbb{R}^k$ mit $k \in [n]$ ist möglich! Wenn für $i \in [k]$ $\omega_i \in \mathbb{C}$ gilt, dann können wir $\omega_\alpha = \omega' + \mathring{i}\,\omega''$ mit $\omega', \omega'' \in \mathbb{R}$ schreiben. Dann gäbe es (i) für $\omega'' > 0$ eine *exponentielle Zunahme* oder (ii) für $\omega'' < 0$ eine *Dämpfung*, was <u>nicht</u> mit der Energieerhaltung vereinbar ist.

. . . .

□ Definiere den Begriff *Eigenfrequenz*.

□ Überlege dir, weshalb $\omega'' < 0$ nicht mit der Energieerhaltung vereinbar ist; Trifft dies auch auf $\omega'' > 0$ zu?

□ Was ist ω_α?

. . . .

Damit lässt sich dann die Amplitude $A_{(i,\alpha)}$ bestimmen entlang der Koordinate $q_i^*(t)$ im *Modus* α:

$$\bigl(\Lambda_{(i,j)} - \omega_\alpha^2 \cdot T_{(i,j)}\bigr) \cdot A_{(j,\alpha)} = 0$$

mit $A_{(*,\alpha)} = \bigl(A_{(j,\alpha)}\bigr)_{j\in[n]}$. Wir assoziieren also ω_α mit der zugehörigen Gleichung der Amplitude $A_{(j,\alpha)}$.

. . . .

□ Was ist ein Modus?

. . . .

Lecture 14

Fortsetzung Oszillator

di 10 jan 08:30

Wir nehmen nun an, die Eigenfrequenzen ω_α seien paarweise verschieden. Wir untersuchen, ob $A_{(i,\alpha)}$ proportional zu $\mathrm{Minor}_i\left(\Lambda - \omega_\alpha^2 T\right)$ ist. Wir sparen uns hier allerdings den allgemeinen Beweis und betrachten einen Spezialfall. Sei $n = 3$ und $\alpha = 1 = i$. Dann

$$\sum_{j\in[3]} \Lambda_{(i,j)} - \omega_\alpha^2 T_{(i,j)} \cdot A_{(j,\alpha)} = 0_{\mathbb{R}^3}.$$

. . . .

(✎33) □ Zeige den allgemeinen Fall.

□ Überlege dir die Minoren (✎34) der angegebenen Matrix für den $\mathbb{R}^3$ Fall.

. . . .

Erweitere die Determinante entlang der ersten Spalte mit $\mathscr{M}_{(i,\alpha)} := \mathrm{Minor}_i\left(\Lambda - \omega_\alpha^2 T\right)$, also

$$\sum_{i\in[3]} \left(\Lambda_{(i,1)} - \omega_1^2 T_{(i,1)}\right) \cdot \mathscr{M}_{(i,\alpha)} = 0.$$

Wir finden ein $C_\alpha \in \mathbb{C}$ mit

$$A_{(i,\alpha)} = C_\alpha \cdot \mathscr{M}_{(i,\alpha)},$$

charakterisiert durch

$$C_\alpha \cdot \left(\sum_{i\in[3]} \left(\Lambda_{(i,1)} - \omega_1^2 T_{(i,1)}\right) \cdot \mathscr{M}_{(i,\alpha)} \right) = 0.$$

Damit ergibt sich für die Verschiebung

$$h_{(i,\alpha)}(t) = C_\alpha \cdot \mathscr{M}_{(i,\alpha)} \cdot \exp\Big(- \mathring{\imath}\, \omega_\alpha t\Big),$$

sodaß eine allgemeine reelle Lösung der Realteil von

$$\mathrm{Re}\left(h_i(t)\right) = \mathrm{Re}\left(\sum_{\alpha\in[n]} C_\alpha \cdot \mathscr{M}_{(i,\alpha)} \cdot \exp\Big(- \mathring{\imath}\, \omega_\alpha t\Big) \right)$$

ist.

. . . .

□ Rechne $A_{(i,\alpha)} = C_\alpha$ (35) $\mathscr{M}_{(i,\alpha)}$ nach. Erweitere hierzu zunächst die Determinante $\det\left(\Lambda - \omega_\alpha^2 T\right)$ in der ersten Spalte.

□ Übertrage $A_{(i,\alpha)} = C_\alpha \cdot \mathscr{M}_{(i,\alpha)}$ auf die am Anfang betrachtete Verschiebung h der generalisierten Koordinate q im Potential V.

□ Zeige, daß die allgemeine reelle Lösung die Gleichung (???) löst.

. . . .

Schreiben wir $\Theta_\alpha(t) := \mathscr{M}_{(i,\alpha)} \cdot \exp\Big(-\mathring{i}\,\omega_\alpha t\Big)$, dann können wir überlegen, ob die Bewegungsgleichungen zu Θ_α entkoppelt sind.

. . . .

□ Untersuche die Kopplung.

. . . .

Damit dann

$$\begin{aligned} T(t,(h(t),h'(t))) &= \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left((h')_i^*(t)\right) \cdot \mathrm{Re}\left((h')_j^*(t)\right) \\ &= \frac{1}{2}T_{(i,j)} \cdot \mathscr{M}_{(i,\alpha)} \cdot (\Theta')_\alpha^*(t) \cdot \mathscr{M}_{(j,\beta)} \cdot (\Theta')_\beta^*(t) \end{aligned}$$

und

$$V(t,h(t)) = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\,(h_i)\,\mathrm{Re}\,(h_j)\,.$$

. . . .

□ Schreibe das Potential V aus.

. . . .

Wir können nun für $\alpha, \beta \in$ *Eigenmodi* schreiben

$$\sum_{j\in[n]} \Lambda_{(i,j)}\mathscr{M}_{(i,\alpha)} = \omega_\alpha^2 \sum_{j\in[n]} T_{(i,j)}A_{(j,\alpha)}.$$

. . . .

□ Verwende $A_{(j,\alpha)} = C_\alpha \cdot \mathscr{M}_{(i,\alpha)}$ um die Summengleichheit zu zeigen.

. . . .

Die Differenz für α, β ergibt dann

$$\left(\omega_\alpha^2 - \omega_\beta^2\right) \cdot \sum_{(i,j)\in[n]^2} T_{(i,j)}\mathscr{M}_{(i,\alpha)}\mathscr{M}_{(i,\beta)} = 0_{\mathbb{R}}.$$

Wenn $\alpha \neq 0$ und $\beta \neq 0$ und $\alpha \neq \beta$ folgt $\sum_{(i,j)\in[n]^2} T_{(i,j)}\mathscr{M}_{(i,\alpha)}\mathscr{M}_{(i,\beta)} = 0$. Sind jedoch $\alpha = \beta$, dann kann die Summe Element aus $\mathbb{R}$ sein.
Irgendwie... kann man dann vereinfachen zu

$$T = \frac{1}{2}\left(\Theta'_\alpha(t)\right)^2 \qquad\qquad \frac{1}{2}\sum_{\alpha\in[n]} \omega_\alpha^2\Theta_\alpha(t)^2.$$

. . . .

□ Führe die Vereinfachung durch.

. . . .

Damit kann die Lagrange-Gleichung endlich beschrieben werden durch

$$L(t,(q(t),q'(t))) = \frac{1}{2}\sum_{\alpha\in[n]}\left(\Theta'_\alpha(t)^2 - \omega_\alpha^2\Theta_\alpha(t)^2\right)$$

mit der aus der Euler-Lagrange Gleichung resultierenden DGL

$$\Theta''_\beta(t) + \omega_\beta^2\Theta_\beta(t)^2 = 0.$$

. . . .

(✎42) □ Recherchiere „*dispersion relation photons*“ und betrachte die Graphen.

□ Finde den Zusammenhang zur Festkörperphysik. Inwiefern ist der bearbeitete Zusammenhang z.B. im Metzler vorhanden? (✎43)

□ Recherchiere wie das (✎44) Verfahren modifiziert wird, wenn zwei oder mehr Eigenfrequenzen entartet sind.

. . . .

Beispiel 10 (Freies Teilchen)**.** Betrachte ein freies Teilchen, dessen Potential $V(t,x(t)) = \frac{1}{2}\left(k_1x_1^2 + k_2x_2^2 + k_3x_3^2\right)$ ist. Die kinetische Energie sei $T(t,(x(t),x'(t))) = \frac{1}{2}m\,||x'(t)||_2^2$. Dann ist die Potentialenergiematrix Λ diagonal, also $\Lambda = \left(\delta_(i,j)\cdot k_i\right)_{(i,j)\in[3]^2}$. Die Matrix T ist demensprechend $T = m\cdot I_3$. Es gilt also

$$m(x'')_i^*(t) + k_ix_i^*(t) = 0$$

für $i\in[3]$, wobei $x_i^*(t) = A_i\cdot\exp\Big(-\mathring{\imath}\,\omega t\Big)$. Die Bedingung ist

$$\det\big(\Lambda - \omega^2T\big) = 0 = \sum_{i\in[3]}\left(k_i - m\omega^2\right)$$

und somit $\omega_i = \sqrt{k_i/m}$.

Lecture 15

Spezielle Relativitätstheorie Einleitung

mo 16 jan 10:00

Ziele des Kapitels:

1. Konzepte der Lorentz-Transformationen, der Lorentz-Invarianz und des Minkowski-Raumes verstehen.
2. Mit 4-Vektoren und ihren mathematischen Eigenschaften vertraut sein.
3. In der Lage sein, elementare Probleme der relativistischen Mechanik zu lösen, wie z.B. die Streuung von Teilchen.
4. Den Begriff der Schwellenenergie erklären können und wissen, wie sich elektromagnetische Felder relativistisch transformieren.

15.1 Einleitung und Postulate

Wir betrachten ein durch die Länge $L \in \mathbb{R}$ charakterisiertes System in $\mathbb{R}^3$. Ein in diesem befindlicher Körper der Masse $m \in \mathbb{R}$ habe eine Geschwindigkeit $v \in \mathbb{R}^3$ und damit den Impuls $p \in \mathbb{R}^3$.

Information 15.1. De-Broglie Wellenlänge.

Die de-Broglie Wellenlänge ordnet jedem Körper mit dem Impuls $p \in \operatorname{Abb}\left(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3 \setminus \{0_{\mathbb{R}^3}\}\right)$ eine charakteristische Wellenlänge $\lambda \in \mathbb{R}$ zu:

$$\lambda(t) := \frac{h}{p(t)}$$

. . . .

□ Was ist $L \in \mathbb{R}$ für eine charakterisierende Zuordnungsgröße? (✎45)

. . . .

Für alle weiteren Überlegungen definieren wir zunächst das Newtonsche Inertialsystem, welches eine Basis von $\mathbb{R}^3$ mit charakterisierenden Forderungen an den Körper ist.

Information 15.2. Newtonsches Inertialsystem.

Als *Newtonsches Intertialsystem* bezeichnen wir ein Koordinatensystem $\underline{v} \in \mathit{Basis}\left(\mathrm{Raum}_{\mathbb{R}}\left(\mathbb{R}^d\right)\right)$, in welchem sich genau dann alle Objekte in geradliniger unbeschleunigter Bewegung befinden, wenn $\mathbf{F} = 0$.

. . . .

(✎46) □ Überlege dir Syteme, welche die Intertialbedingung nicht erfüllen. Betrachte dazu die Coriolis-Kraft und Koordinatentransformationen.

. . . .

Einstein formulierte also die folgenden beiden Postulate als axiomatische Begründung der speziellen Relativitätstheorie:

1. Die Gesetze der Physik sind in allen Inertialsystemen gleich.
2. Die Lichtgeschwindigkeit c_0 ist bewegungsunabhängig und hat daher in allen Inertialsystemen denselben Wert: $c_0 = 299792458\,\mathrm{m\,s^{-1}}$.

15.2 Minkowski-Raum

Wir verwenden für die folgenden Definitionen die in der Vorlesung eingeführte Konvention mit komplexer Zeitdarstellung $\mathring{i} \cdot c_0 \cdot t \in \mathbb{C}$. Auf andere Konventionen kommen wir kurz zu sprechen.

Information 15.3. Minkowskivektormenge.

Als *Minkowski-Raum*, manchmal auch *Weltraum* genannt, bezeichnen wir den Vektorraum auf der Vektorenmenge

$$\mathscr{M} := \left\{x \in \mathbb{C}^4 : x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}\right\}$$

mit $\mathbb{R}$ als Multiplikatormenge. Einen Weg auf $\mathscr{M}$ nennen wir *Weltlinie*.

. . . .

(✎47) □ Zeige $\mathscr{M}$ bildet mit K Körper einen Vektorraum.

. . . .

Wir führen weiter den Raumzeitvektor ein, ein Element aus $\mathscr{M}$, welcher für die Relativitätstheorie eine grundlegende Rolle spielen und zur Formulierung der Konzepte ohne Betrachtung der Gravitation hilfreich sein wird.

> **Information 15.4.** Der Raumzeitvektor.
>
> Habe ein Objekt die Ortszuweisung $r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, also den Ort $r(t)$ zum Zeitpunkt $t \in \mathbb{R}$, dann nennen wir
>
> $$\mathit{Raumzeitvektor}_r(t, r(t)) := (r_1^*(t), r_2^*(t), r_3^*(t), \mathring{i}\, c_0 \cdot t) \in \mathscr{M}$$
>
> den Raumzeitvektor des Objektes bezüglich r.

Hier können wir gleich eine Charakterisierung vorziehen, die eigentlich erst in `lec17` stattfinden würde; Nämlich müssen wir uns Gedanken über die im Minkowski-Raum verwendete Metrik machen.

Metrikkonstruktion

Diese wird erzeugt durch eine Funktion g der Form $g : A \to \mathrm{Abb}\left(V^2, \mathbb{R}\right)$. Zunächst betrachten wir die Menge A: Sie ist Teil des Tupels $(A, V, \to)$, genannt *affiner Punktraum*.

> **Information 15.5.** Affiner Punktraum und metrischer Tensor.
>
> Sei A eine nichtleere Menge, V ein $K-$Vektorraum und $\to : A^2 \to V$. Hat die Abbildung $\to$ die Eigenschaften (i) $\forall P, Q, R \in A : \vec{PQ} + \vec{QR} = \vec{PR}$ und (ii) $\forall v \in V, P \in A : \exists_1 Q \in A : \vec{PQ} = v$, dann nennen wir das Tipel $(A, V, \to)$ einen *affinen Punktraum* und schreiben $(A, V, \to) \in \mathit{affinPunktraum}_{(A,V,K)}$.

An dieser macht es Sinn, die Tensordefinition zu betrachten.

> **Information 15.6.** Tensor und Tensorräume.
>
> Sei K ein Körper und $(V_i)_{i\in I}$ Vektormengen. Sei $\mathrm{Raum}_K(V_i)$ endlichdimensional und $N := \mathrm{card}(I) \in \mathbb{N}$. Dann nennen wir für $\mathbb{V} := \prod_{i\in I} V_i$ die Funktion $\Phi : \mathbb{V} \to K$ einen *Tensor*, wenn $\Phi \in \mathit{Multilinearform}_{(\mathbb{V},K)}$.

Für den Spezialfall $V_i = V_j$ für $(i, j) \in I^2$ definieren wir

$$\bigotimes^N V^* := \mathit{Multilinearform}_{(V^N,K)}$$

für $N := \mathrm{card}(I) \in \mathbb{N}$ mit $\dim(\mathrm{Raum}_K\left(\bigotimes^N V^*\right)) = \dim(V)^N$. Weiter gilt sogar $\bigotimes^N V^* \cong \mathbb{R}^{\dim(V)^N}$.

. . . .

☐ Definiere die Mengen *Multilinearform*$_{(\mathbb{V},K)}$ nach dem Bauplan der aus LinA 2 bekannten Menge *Bilinearform*$_{(\mathbb{V},K)}$ im Fall $\mathbb{V} = \prod_{i\in[2]} V_i$. (✎48)

(✎49) ☐ Rechne die Vektorraumaxiome für $\bigotimes^N V^*$ als K-Vektorraum nach.

☐ Zeige $dim(\mathrm{Raum}_K\left(\bigotimes^N V^*\right)) = \dim(V)^N$ und damit $\bigotimes^N V^* \cong \mathbb{R}^{\dim(V)^N}$. (✎50)

☐ Stelle das Tensorprodukt $\Psi \otimes \Phi$ für $\Psi, \Phi \in$ *Multilinearform*$_{(\mathbb{V},K)}$ auf. Zeige die Distributivität, Assoziativität und Kommutativität. (✎51)

. . . .

Damit können wir eine *nicht-ausgeartete, symmetrische Bilinearform* zur Multiplikation zweier Minkowski-Vektoren definieren: Für jedes $P \in A$ und $\mathrm{Raum}_K(V) := \mathrm{Raum}_{\mathbb{R}}(\mathscr{M})$ ist

$$\mathrm{mal}_{(\mathscr{M},P)}(x,y) := g(P)(x,y)$$

mit $x, y \in \mathscr{M}$. Wegen der im Allgemeinen fehlenden positiv Definitheit ist jedoch $g(P)$ kein Skalarprodukt auf $\mathrm{Raum}_{\mathbb{R}}(\mathscr{M})$! Um dennoch über Abstände und Winkel sprechen zu können, nutzt man in abgeschwächter Metrikbedingung (keine pd) den *pseudometrischen Tensor* der Art

$$\mathrm{mal}_{(\mathscr{M},P)}(x,y) = x^T \circ \eta \circ y.$$

. . . .

☐ Kläre, welcher affine Punktraum $(A, V, \to)$ für den Spezialfall $V := \mathscr{M}$ und $K := \mathbb{R}$ gewählt wird. Wie sieht die Abbildung $\to$ aus? (✎52)

☐ Zeige $g(P)$ ist (i) nicht-ausgeartet, (ii) symmetrisch und (iii) bilinear, insbesondere $g(P) \in \mathrm{Bil}(\mathscr{M})$. Verwende dabei $\{v \in V : \forall w \in V : b(v,w) = 0\} = \{0_V\}$. (✎53)

. . . .

Für die Bilinearform $g(P)$ finden wir nun eine (konventionsabhängige) eindeutige Darstellungsmatrix

$$G(P) = (g(P)(e_i, e_j))_{(i,j)\in[4]} = (1,1,1,1) \cdot I_4$$

mit I_4 als Einheitsmatrix. Sie hat die $\mathrm{Spur}(G(P)) = 4$ und $(4,0)$ als Sylvester-Signatur. Alternativ für $(\gamma_1^*(t), \gamma_2^*(t), \gamma_3^*(t), c_0 t)$ als Raumzeitvektor mit angepasstem $\mathscr{M}$ dann $G(P) = (1,1,1,-1) \cdot I_4$ mit $(3,1)$ als Signatur.

. . . .

☐ Berechne die Spur der Matrix $G(P)$ und bestimme ihre Sylvester-Signatur. Schreibe die Matrix einmal aus. (✎54)

☐ Zeige, daß alle konventionellen Darstellungsarten äquivalent sind. (✎55)

. . . .

Mit Blick auf den *Raumzeitvektor* klassifizieren wir folgendermaßen.

Information 15.7. Raumvektorklassen.

Sei $x \in \mathscr{M}$. Wir bezeichnen $||x||_P^2 \in \mathbb{R}_{>0}$ als *raumähnlich*, $||x||_P^2 \in \mathbb{R}_{<0}$ als *zeitlich* und $||x||_P^2 = 0_\mathbb{R}$ als *lichtartig*.

Geschwindigkeiten

Mit dem konstruierten Raumzeitvektor des Ortes eines Objektes können wir den zugrundelegenden Weg ableiten und erhalten die Geschwindigkeit. Wir verketten die noch mit der Relativierungsfunktion:

Information 15.8. Relativierung.

Wir defineren die *Relativierungsfunktion* als die Abbildung $f : V \to W$ auf den K-Vektorräumen V, W der Form

$$x \mapsto \mathrm{mal}_W(k(v), x)$$

für $k(v) := 1/\sqrt{1 - ||v||_2^2 / c_0^2} \in \mathbb{R}$ als *Relativierungskoeffizient*, wobei mit v meist die Geschwindigkeit $||\left((\gamma')_i^*(t)\right)_{i\in[3]}||_2$ für einen Weg $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ gemeint ist.

Dann können wir schreiben

$$v(t) := (\texttt{Relativierung} \circ D^1 \circ \texttt{Raumzeitvektor}_r)(t, r(t))$$

für $r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ und $t \in \mathbb{R}$. Mit D^1 meinen wir die gewöhnliche formale Ableitung. In der Physik benutzt man häufig die Abkürzung $d\gamma/d\tau$, wobei γ eine Weltlinie in $\mathscr{M}$ ist.

. . . .

□ Wende das Konzept auf den konkreten Ort $r(t) := (x(t), y(t), z(t))$ an und berechne $v(t)$. (✎56)

□ Zeige nun $\langle x, x\rangle_{(\mathscr{M},P)} < 0_\mathbb{R}$ mit $\left|\left|(x_i)_{i\in[3]}\right|\right|_2 < c_0$. (✎57)

. . . .

Lecture 16

Galilei- und Lorentz-Transformation

di 17 jan 08:15

16.1 Transformationen

Eine bisher bekannte Transformation zwischen Basen ist die *Galilei-Transformation*.

Information 16.1. Gaililei-Transformation.

Eine Funktion $f : \mathbb{R} \times \operatorname{Abb}\left(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3\right) \to \mathbb{R}^4$ nennen wir *Galilei-Transformation*, wenn

$$(t, \gamma) \mapsto \left(\begin{cases} \gamma_i^*(t) - (\gamma')_i^*(t) \cdot t & i \in [3] \\ t & \text{sonst} \end{cases}\right)_{i \in [4]}.$$

Dann ist mithilfe der Galilei-Transformation ein transformierter Raumzeitvektor

$$\mathscr{G}(t, r) = \left(\begin{cases} r_i^*(t) - (r')_i^*(t) \cdot t & i \in [3] \\ t & \text{sonst} \end{cases}\right)_{i \in [4]},$$

wobei wir *Raumzeitvektor*$_{\tilde{r}}(t, \tilde{r}(t)) := f(t, r)$ feststellen. Es wird derselbe Ort beschrieben, jedoch aus der Sicht einer anderen Basis.

. . . .

(✎58) □ Vollziehe die Schritte mathematisch nach. Prüfe, ob die Definition des Raumzeitvektors optimal gelungen ist.

. . . .

Neu ist die sogenannte Lorentz-Transformation. Sie ergibt sich aus der Überlegung und Forderung einer konstanten Lichtgeschwindigkeit c_0, wie wir sie bisher unkommentiert notiert haben.

Information 16.2. Spezielle Lorentztransformation.

Seien die Systeme Σ_1, Σ_2 Basen des K-Vektorraums $\mathscr{M}$ und beschreibe $\gamma_1, \gamma_2 \in C^1(\mathbb{R}, \mathscr{M})$ die Orte von Σ_1, Σ_2 mit der Bedingung $\gamma_1(0) = \gamma_2(0)$. Habe Σ_2 die zu Σ_1 relative Geschwindigkeit $(\gamma_1 - \gamma_2)'(t) := v \cdot \underline{e}_1$, dann ist ein Ereignis an $r_{\Sigma_1} \in C^1(\mathbb{R}, \mathscr{M})$ aus der Sicht von Σ_2 transformierbar mit

$$L_{(s,1)} : \begin{pmatrix} \mathbb{R} \times \mathscr{M} \to \mathscr{M} \\ (v, x) \mapsto \begin{pmatrix} k(v) \cdot (x_1 + \mathring{i}\, v/c_0 \cdot x_4) \\ x_2 \\ x_3 \\ k(v) \cdot (x_4 - \mathring{i}\, v/c_0 \cdot x_1) \end{pmatrix} \end{pmatrix}.$$

. . . .

☐ Betrachte noch einmal genau $(L_s \circ (\gamma_1 - r))_4^*(t)$. Kann man auch einen Zusammenhang zu $(\gamma_1 - r)_4^*(t) = \mathring{i}\, c_0 t$ herstellen? (✎59)

☐ Sei $\gamma_1 := \Big((0, 0, 0, \mathring{i}\, c_0 t)\Big)_{t \in \mathbb{R}}$ und $\gamma_2 := \Big((v \cdot t, 0, 0, \mathring{i}\, c_0 t\Big)_{t \in \mathbb{R}}$. Berechne $(L_s \circ (\gamma_1 - r))(t)$ für $r := \Big((1, 1, 1, \mathring{i}\, c_0 t)\Big)_{t \in \mathbb{R}}$. (✎60)

☐ Zeige $\lim_{v \to 0}(L_s \circ (\gamma_1 - r))(t) = \mathscr{G}(t, \gamma_1)$ für $\mathscr{G}$ als Galilei-Transformation. (✎61)

☐ Finde die Darstellungsmatrix von $L_{(s,1)}$ nachdem du gezeigt hast, daß Linearität vorliegt. Zeige weiter $M(L_{(s,1)}, \underline{v}, \underline{w})$ ist orthogonal. (✎62)

. . . .

Zur Veranschaulichung der Situation hilft ein Gedankenexperiment mit folgender Visualisierung:

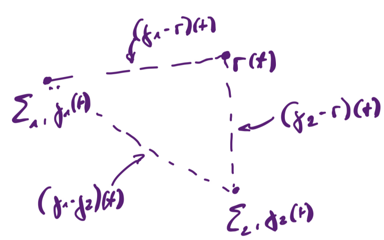


Abbildung 16.1: Darstellung der Situation im Anschauungsraum.

Eine wichtige Bedingung der Lorentz-Transformation war die konstante Lichtgeschwindigkeit. Unter den im Satz angebrachten Bedingungen folgt für die Norm

$$\begin{aligned}||(L_s \circ (\gamma_1 - r))(t)||_P &:= \sqrt{g(P)((L_s \circ (\gamma_1 - r))(t), (L_s \circ (\gamma_1 - r))(t))} \\ &= \sum_{i \in [4]} (L_s \circ (\gamma_1 - r))_i^*(t)^2 \\ &= \sum_{i \in [3]} (L_s \circ (\gamma_1 - r))_i^*(t)^2 - c_0^2 \cdot k(v)^2 \cdot \left(t - \frac{v \cdot \gamma - r_3^*(t)}{c_0^2}\right)^2.\end{aligned}$$

Nach Definition und Wahl der Situation können wir nun den ersten Summanden schreiben als

$$\begin{aligned}&\sum_{i \in [3]} (L_s \circ (\gamma_1 - r))_i^*(t)^2 \\ &\qquad = (L_s \circ (\gamma_1 - r))_1^*(t)^2 + (\gamma_1 - r)_2^*(t) + (\gamma_1 - r)_3^*(t).\end{aligned}$$

. . . .

□ Zeige die Gleichung (✎63) $\sqrt{g(P)((L_s \circ (\gamma_1 - r))(t), (L_s \circ (\gamma_1 - r))(t))} = \sum_{i \in [4]} (L_s \circ (\gamma_1 - r))_i^*(t)^2$.

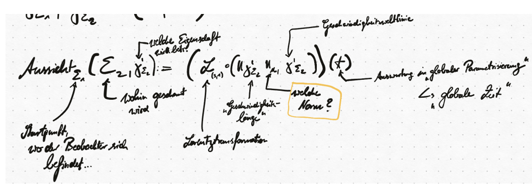
. . . .

Information 16.3. Relative Systemaussicht.

Seien Σ_1, Σ_2 zwei Systeme der Weltlinien $\gamma_{\Sigma_1}, \gamma_{\Sigma_2} \in C^1(\mathbb{R}, \mathscr{M})$. Dann beschreiben wir die *relative Aussicht* von Σ_1 ruhend auf σ_2 bewegend *bezüglich der Attribute* γ'_{Σ_2} als Auswertung

$$\texttt{Aussicht}_{\Sigma_1}(\Sigma_2, \gamma_{\Sigma_2}) := \left(\mathscr{L} \circ \left(||\gamma'_{\Sigma_2}||_{(P,\mathscr{M})}, \gamma'_{\Sigma_2}\right)\right).$$

Als Graphik veranschaulichen wir uns die Konstruktion wiefolgt.



Hierduch geben wir der Lorentz-Transformation eine Anschauung.

16.2 Maxwell Gleichungen

Ziel des Kapitels ist eine kompakte Schreibweise der Maxwell Gleichung. Hierzu betrachten wir zunächst den bekannten Satz.

Information 16.4. Die Maxwell-Gleichungen.

Die MAXWELL Gleichungen der Elektrodynamik lauten

$$\operatorname{div}\mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad \operatorname{div}\mathbf{D} = \rho$$
$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\partial_t\mathbf{B} \qquad \operatorname{rot}\mathbf{H} = \mathbf{j} + \partial_t\mathbf{D}.$$

Aus den Gleichungen (i) und (ii) können wir folgern, daß $\mathbf{E}$ und $\mathbf{B}$ aus Potential- und Rotatorfeld konstruierbar sind, sodaß folgt

$$\mathbf{B} = \operatorname{rot}\mathbf{A} \qquad \mathbf{E} = -\operatorname{grad}\varphi + \partial_t A.$$

Setzen wir diese in Gleichungen (iii) und (iv) ein, so erhalten wir mit $\mathbf{D} = \varepsilon\varepsilon_0\mathbf{E}$ und $\varepsilon = 1_{\mathbb{R}}$ die Beziehung

$$\operatorname{div}\,(-\operatorname{grad}\varphi - \partial_t A) = \rho/\varepsilon_0 \Longleftrightarrow \operatorname{lap}\varphi + \partial_t \operatorname{div} A = -\rho/\varepsilon_0.$$

Mit Gleichung (iv) haben wir schließlich

$$\operatorname{rot}(\mathbf{B}) - \mu_0 \cdot \partial_t\mathbf{D} = \mathbf{j}\cdot\mu_0$$

mit $\mathbf{H} = \mathbf{B}/\mu_0$ und schließlich durch Linearität der Ableitung mit den obigen Definitionen

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot}\mathbf{A}) + \mu_0\varepsilon_0 \cdot \partial_t(\operatorname{grad}\phi) = \mathbf{j}\cdot\mu_0.$$

....

□ Rechne die Umformungen nach.

....

Die Eichtoleranz

Betrachten wir nun eine Änderung der Funktionen $\mathbf{B} := (\operatorname{rot}\mathbf{A})_{A\in C^0(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^3)}$ und $\mathbf{E} := (-\operatorname{grad}\varphi)_{\varphi\in C^0(\mathbb{R}^3,\mathbb{R})}$, dann ergibt sich

$$dB\,(A)\,(H) \approx B(A+H) - B(A) \approx \operatorname{rot}(A+H).\operatorname{rot} A$$

und mit Linearität von rot schließlich $dB\,(A)\,(H) \approx \operatorname{rot} A$, sodaß wir sagen können $\mathbf{B}$ ist *stabil unter kleinen Änderungen*. Da wir $H = \operatorname{grad}\hbar$ und analog $\hbar = \partial_t h$ für das Analogon von $\mathbf{E}$ wählen können ($H, \hbar$ beliebig), wählen wir die folgende vorteilhafte Form.

Information 16.5. Lorenz Eichung.

Als *Lorenz Eichung* verstehen wir eine Funktion $\chi \in C^2(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$, welche das DGP

$$\Phi(t, (u(t), u'(t), u''(t))) := \operatorname{grad} u(t) - \frac{1}{c_0^2} \partial_t^2 \chi\,(t) = 0$$

löst, also $\chi \in \textit{Lösung}\,(\Phi)$.

. . . .

(✎65) ☐ Verfolge den analogen Weg zu **B** für **E**, indem du die Definition verwendest und die Änderung $d\mathbf{E}\,(\varphi)\,(\hbar)$ bestimmst.

. . . .

Durch die Wahl der Eichung ist uns garantiert, daß die Lorenz Bedingung

$$\operatorname{div} \mathbf{A} + \frac{1}{c_0^2} \partial_t \varphi\,(t) = 0_{\mathbb{R}}$$

in einem beliebigen Inertialsystem eingehalten wird. Mit der am Anfang durchgeführten umformulierung der Gleichung (iii) des Maxwell Satzes haben wir

$$\operatorname{lap} \varphi + \partial_t \left(-\frac{1}{c_0^2} \partial_t \varphi\,(t) \right)(t) = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}.$$

Mithilfe der Abkürzung können wir nun formulieren

$$\operatorname{dal} \mathbf{A} = -\mu_0 j.$$

. . . .

(✎66) ☐ Zeige die Kovarianz der Gleichung, wobei wir *kovariant* als $\alpha \in V^{\text{dual}}$ definieren... (Größen ändern sich durch Transformation).

. . . .

Änderung bei Inertialsystemwechsel

Wir behalten hierbei wieder im Hinterkopf, daß ein *Inertialsystemwechsel* nichts als ein *Basiswechsel* ist, wobei die Start- und Zielbasis bestimmte Kräfteanforderungen auf Körper erfüllen sollen. Sei Σ_1 ein stationäres und Σ_2 ein mit $v(t) = (0, 0, v_0, \mathring{i}\, c_0)$ relativ bewegtes System. Dann lautet die Lorentz-Transformationsmatrix

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k(v_0) & k(v_0) \cdot \mathring{i}\, v/c_0 \\ 0 & 0 & k(v_0) \cdot \mathring{i}\, v/c_0 & k(v_0) \end{pmatrix}$$

Lecture 17

Na, nicht aufgepasst?

mo 23 jan 10:00

17.1 Lorentz-Kovariante Formulierung

Betrachte nun eine Weltlinie $\gamma \in C^1(\mathbb{R}, \mathscr{M})$ eines Systems Σ_γ. Dann ist die Wegänderung $d\gamma\,(t)\,(h)$ unter der Lorentz-Transformation invariant, denn wir können mit Linearität die Ableitung in die Funktionszusammenfassung ziehen:

$$d\gamma\,(t)\,(h) = (d\gamma_i^*\,(t)\,(h))_{i\in[4]}\,.$$

Ein Teilchen an $r \in C^1(\mathbb{R}, \mathscr{M})$ mit $\Gamma = r$ als zweites System Σ_Γ ist dann

$$L_{(s,1)}((\gamma - r)(t)) = (-v \cdot h, 0, 0, k(v) \cdot \mathring{i}\, c_0 \cdot h).$$

. . . .

□ In der Vorlesungsfolie wird $L_{(s,1)}((\gamma - r)(t)) = (0, 0, 0, k(v)\, \mathring{i}\, c_0 \cdot h)$ behauptet, was ging schief? (✎67)

. . . .

Daraus können wir die Zeitdilatation ziehen.

> **Information 17.1.** Zeitdilatation.
>
> Die Funktionsauswertung $\texttt{Relativierung}_v(\mathring{i}\, c_0 t)$ bezeichnen wir als *Zeitdilation.* Sie ist relevant sobald $v \neq 0$.

Für die Längenkontraktion ergibt sich analog

$$\texttt{Relativierung}_v(\gamma_1^*(t_2) - \gamma_1^*(t_1) - v \cdot (t_2 - t_1)) =: \texttt{Relativierung}_v(l)$$

für $l := \gamma_1^*(t_2) - \gamma_1^*(t_1)$.

. . . .

□ Zeige $v \cdot (t_2 - t_1) = 0$.

. . . .

17.2 Beispiele

17.2.1 Das Zwillingsparadoxon

. . . .

□ Recherchiere das Paradoxon und mache dir die Problemstellung klar.

. . . .

Die spezielle Relativitätstheorie kann über dieses Paradoxon keine Aussage machen, da dabei mindestens beim Umdrehen kein Inertialsystem mehr vorliegt.

Lecture 18

Na, nicht aufgepasst?

mo 30 jan 10:00

Information 18.1. Energie-Impuls-Dispersionsrelation.

Für den Impuls $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ eines Teilchens gilt die *Energie-Impuls-Dispersionsrelation* der Form

$$E(t)^2 = p(t)^2 \cdot c_0^2 + m^2 \cdot c_0^4.$$

. . . .

□ Folgere den Impuls eines Photons aus der Energie-Impuls-Dispersionsrelation. (✎70)

. . . .

Lecture 19

Na, nicht aufgepasst?

mo 30 jan 10:00

19.1 Maxwellsche Gleichung

Beispiel 11 (Gegenläufige Objektkollision). Seien $p_1, p_2 : \mathbb{R} \to \mathscr{M}$ mit $p_1 = -p_2$. Dann ist im Minkowskiraum die Summe

$$p_1 +_{\mathscr{M}} p_2 = \left(\begin{cases} (p_1)_i^* - (p_2)_i^* & i \in [3] \\ \mathring{i} \,/c_0 \cdot (E_1 + E_2) & \text{sonst} \end{cases} \right)_{i \in [4]} .$$

Aus dem Beispiel folgern wir für die Norm des resultierenden Impulses $\tilde{p} \in \mathscr{M}$ zu einem Zeitpunkt $t \in \mathbb{R}$

$$||\tilde{p}(t)||_2 := \left|\left|(\tilde{p}_i^*(t))_{i \in [3]}\right|\right|_2 + \left(\mathring{i} \,/c_0 \cdot (E_1(t) + E_2(t))\right)^2 .$$

19.2 Relativistische Mechanik und Kinematik

Information 19.1. Die Schwellenenergie.

Lecture 20

Na, nicht aufgepasst?

di 31 jan 08:15

Es ist also

$$\int F\,\mu|_= \int G\,\mu| \Longrightarrow F, G \in [f]_\equiv$$

mit $F = f + h_1$ und $G = f + h_2$, also $F = G + h$ mit $h := h_1 - h_2$ und $f \equiv g :\Longleftrightarrow f = g\mu$ f.ü. Betrachte h genauer.

Lecture 21

Poisson-Klammern

di 07 feb 08:15

Letzte Vorlesung! Wir betrachten als letztes Kapitel des Semesters die sogenannten *Poisson-Klammern.*

21.1 Poisson-Klammern

Seien $f, g \in C^1(\mathbb{R} \times (\mathbb{R}^d)^2, \mathbb{R})$ Funktionen der Zeit $t \in \mathbb{R}$ und den Auswertungen der Parameterfunktionen $p, q \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^d)$. Dabei kann q der *generalisierte Ort* und p der *generalisierte Impuls* sein. Dann können wir die Summe über die Freiheitsgrade $d \in \mathbb{N}$ des betrachteten Systems Σ formulieren, als welcher Summanden wir die symmetrische Differentialdifferenz

$$\begin{aligned}\mathrm{PD}_k(f,g) := \mathrm{D}_{\left(0_{\mathbb{R}},(e_k,0_{\mathbb{R}^d})\right)} f\,(x) \cdot \mathrm{D}_{\left(0_{\mathbb{R}},(0_{\mathbb{R}^d},e_k)\right)} g\,(x)& \\ - \mathrm{D}_{\left(0_{\mathbb{R}},(0_{\mathbb{R}^d},e_k)\right)} f\,(x) \cdot \mathrm{D}_{\left(0_{\mathbb{R}},(e_k,0_{\mathbb{R}^d})\right)} g\,(x)&\end{aligned}$$

mit der manchmal auch verwendeten Kurzschreibweise $\frac{\partial f}{\partial q_k} \cdot \frac{\partial g}{\partial p_k} - \frac{\partial f}{\partial p_k} \cdot \frac{\partial g}{\partial q_k}$.

Information 21.1. Poisson-Klammer.

Als *Poisson-Klammer* definieren wir den *bilinearen Differentialoperator* in $\mathrm{Diff}^1(C^1(\mathbb{R} \times (\mathbb{R}^d)^2, \mathbb{R}))$ der Form

$$\{f, g\} := \sum_{k \in [d]} \mathrm{PD}_k(f,g)$$

des Systems Σ der Freiheitsgrade $d \in \mathbb{N}$.

. . . .

(✎71) □ Zeige die Eigenschaften des bilinearen Differentialoperators: Zeige $\{\cdot, \cdot\}$ stellt für die Funktionstypen einen Differentialoperator dar. Zeige dessen Bilinearität.

. . . .

In der Menge $\mathrm{Diff}^k(C^k(V,W))$ sammeln wir alle Differentialoperatoren auf dem Funktionenraum der k-mal stetig differenzierbaren Funktionen von V nach W.

. . . .

☐ Recherchiere die genauen Rahmenbedingungen der Definition. (✎72)

. . . .

Die Poissonklammern stellen ein prominentes Beispiel für die sogenannten *Lie-Klammern*, welche definiert sind als spezielle *innere Verknüpfung* $[\cdot,\cdot] : V \times V \to V,\ (x,y) \mapsto [x,y]$ auf einem K-Vektorraum V. Sie erfüllt drei Charakteristiken, die wir im folgenden kurz beleuchten wollen.

Information 21.2. Lie-Klammer.

Eine innere Verknüpfung $[\cdot,\cdot] : V^2 \to V$ nennen wir *Lie-Klammer*, wenn sie die Bedingungen

1. Bilinearität,
2. Es gilt $[x,x] = 0_K$ für alle $x \in V$,
3. Sie ist mit der Jacobi-Rotationsidentität vereinbar; für $x,y,z \in V$ gilt

$$[x,[y,z]] = [z,[x,y]] = [y,[z,x]],$$

erfüllt. Liegt eine solche interne Verknüpfung auf einem K-Vektorraum V vor, so wird $(V,[\cdot,\cdot])$ als *Lie-Algebra* bezeichnet.

21.2 Theoreme

Zum Abschluss wollen wir noch einen Blick auf allgemeine Theoreme auf dem Vektorraum der Parameter der Form $(\mathbb{R}^d)^2$ mit $d \in \mathbb{N}$ als Freiheitsgrade betrachten.

Liouvilles Theorem

Für eine Teilmenge $\Lambda \subseteq (\mathbb{R}^d)^2$ gilt die *Volumentransformationsinvarianz* der Form

$$\int \psi(x)\lambda|_{(\mathbb{R}^d)^2}\,(dx) = \int (f \circ \psi)(x) \cdot V(f'(x))\lambda|_{(\mathbb{R}^d)^2}\,(dx)\,.$$

Der Beweis führt über die Definition des *Volumenfaktors* $V(f'(x))$ der *kanonischen* Transformationsfunktion $f \in C^1((\mathbb{R}^d)^2, (\mathbb{R}^d)^2)$ durch die Gramsche Matrix $G(x) = (\langle x_i, x_j\rangle)_{(i,j)\in[N]^2}$ mit $N := \dim((\mathbb{R}^d)^2) = 2d$.

. . . .

☐ Zeige den Satz mithilfe maßtheoretischer Produktmaße λ^k.

. . . .

Hamilton-Jacobi Formalismus

Auf der Suche nach einer möglichst vorteilhaften Perspektive im Parameterraum, also Basis, versucht man eine optimierende Transformation f zu finden, sodaß

$$H(t, f(x)) = 0.$$

Dies ist genau dann möglich, wenn die Auswertung $f(x)$ nur *Erhaltungsgrößen* enthält, also

$$\mathrm{D}_{(0,E_i)} H\left(t, f(x)\right) = 0$$

für $E := \left(\mathbb{1}_{[d]} \cdot (e_i, 0_{\mathbb{R}^d}) + \mathbb{1}_{\{d+1,2d\}} \cdot (0_{\mathbb{R}^d}, e_i)\right)_{i\in[2d]}$ gilt. Behaupte nun die Nullbedingung:

$$H(t, x) + H(t, h) = 0.$$

Dabei wählen wir nun *speziell* die Form $h := (x_1, f_2^*(x))$. Damit gilt dann

$$x_2 = \mathrm{D}_{\left(0,(0,1_{\mathbb{R}^d})\right)} H\left(t, h\right) \qquad f_1^*(x) = \mathrm{D}_{\left(0,(1_{\mathbb{R}^d},0)\right)} H\left(t, h\right)$$

und in eingesetzter Form

$$H(t, (x_1, \mathrm{D}_{\left(0,(0,1_{\mathbb{R}^d})\right)} H\left(t, h\right)) + \mathrm{D}_{\left(1,0_{(\mathbb{R}^d)^2}\right)} H\left(t, h\right) = 0.$$

. . . .

□ Leite die skizzierte Beziehung aus der Wirkungsvariation der Lagrange Funktion L gegeben durch $\delta L\left(t, (q(t), q'(t))\right)(0, (h(t), h'(t))) = 0$ her. (✎74)

□ Beobachte unter welchen Bedingungen die Existenz einer solchen Transformationsfunktion gegeben ist. (✎75)

. . . .

Das bereits skizzierte Programm zur Problemlösung folgt der Struktur:

1. Schreibe die Hamilton Funktion H auf.
2. Finde die Transformation f.
3. Schreibe für die Form $h := (x_1, f_2^*(x))$ die zweite Hamilton-Funktionsauswertung $H(t, h)$ auf.
4. Notiere die Variablen x_1, x_2 durch Ableitungen von $H(t, h)$.
5. Prüfe die Nullbedingung bei Addition.

. . . .

□ Verwende das Programm, um per Hammerschlag das Problem des harmonischen Oszillators zu lösen. (✎76)

. . . .

Reiserückblick

Die Reise des IK3 führte uns von $3N \in \mathbb{N}$ Freiheitsgrade mit $k \in \mathbb{N}$ Zwangsbedingungen zu den generalisierten Koordinaten, welche wir mithilfe der Lagrange-Multiplikatoren haben.
Mit den Symmetriargumenten versuchten wir uns das Leben leichter zu machen, woraufhin wir zum ersten Höhepunkt die Lagrangegleichung aufstellten; Ein kurzer Blick auf die Hamiltonfunktion erlaubte uns einen solch umfangreichen Werkzeugkasten zu bedienen, daß Vielteilchensysteme mathematisch greifbar wurden. Wir schauten im kleinen nach Rotationen und Translationen und fanden Transformationsmatrizen.
Als uns auffiel, daß mit hohen Geschwindigkeitstransformationen etwas nicht stimmte, fanden wir die spezielle Relativitätstheorie als Ausweg mit relativem Ausblick von Systemen auf andere mithilfe des Lorentz-Fernrohres.
Am Ende fanden wir den Weg zurück zu den Transformationen und den Blick in den Parameterraum und die Charakterisierung der kanonischen Transformationen. Als weisere Wanderer verlassen wir nun die Theorie bis zum IK4.
Lösung von (4)

$$\sum_{i\in[N]} \mathbf{R} \times m_i \mathbf{V} + \sum_{i\in[N]} \mathbf{J}_i \times m_i \mathbf{\Lambda}_i + \underbrace{\left(\sum_{i\in[N]} m_i \mathbf{J}_i\right)}_{=0_{\mathbb{R}^3}} \times \mathbf{V} + \mathbf{R} \times \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \underbrace{\left(\sum_{i\in[N]} m_i \mathbf{\Lambda}_i\right)}_{=0_{\mathbb{R}^3}}$$