Integrierter Kurs IV

Experimentalphysik II
Tom Folgmann

17. Mai 2023

Inhaltsverzeichnis

1 Atome und Atommodelle

VL 1 12.04.2023, 11:45

Die experimentelle Bestimmung der Atommasse geklingt durch verschiedene Verfahren, wie beispielsweise die folgenden.

VL 2 13.04.2023, 08:15

Röntgenbeugung an Kristallen. Man kennt zunächst die *Gitterkonstante* $d \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, also den *Abstand der Atome innerhalb des Gitters*. Damit ist das Atomvolumen gerade $d^3 = V_{Atom}$ und schließlich

$$N_A \cdot V_{Atom} = \frac{M}{\rho(M)},$$

wobei M die *Molekülmasse* und ρ eine Dichtefunktion ist.

. . . .

□ Recherchiere das „Avogadro-Projekt“ des PTB. (✎1)

. . . .

Gaskonstante. Über die Gaskonstante folgt der Atomradius $R = N_A \cdot k_B$ mit k_B als *Boltzmann-Konstante.*

Massenspektroskopie. Hier wird über die Atomablenkung die Masse bestimmt.

. . . .

(✎2) □ Recherchiere das genaue Vorgehen.

. . . .

1.1 Größe von Atomen

Atome weisen etwa eine Größe von 10^{-10}m im Radius vor, was wir folgend auf die Einheit *Angstrom* normieren werden: $1\text{Å} := 10^{-10}$m. Zum Vergleich: Das Wasserstoffatom weist einen Radius von 0.5Å auf, Magnesium einen von 1.6Å und Caesium 2.98Å.

1.2 Typische Bestimmung der Größe eines Atoms

Grobe Abschätzung. Für *reale Gase* gilt die sogenannte *Van-der-Waals-Gleichung* der Form

$$\left(p + \frac{a}{V_m^2}\right) \cdot (V_m - b) = RT,$$

wobei a den *Binnendruck* und b das *Kovolumen* darstellen. Aus einem pV Diagramm lässt sich dann die Konstante b bestimmen und die Approximation $b \approx N_A \cdot V_A$ liefert die gewünschten Größen.

Beugung von Röntgenstrahlen an Kristallen. Das Ziel der Beugung ist zunächst die Bestimmung der oben erwähnten Gitterkonstanten d. Man benötigt hierzu Röntgenstrahlen, gewonnen durch (i) eine Röntgenröhre, mit dem Nachteil der charakteristischen Linien, welche berücksichtigt werden müssen, oder (ii) die Synchrotronstrahlung. Diese werden auf einen *Einkristall* gelenkt, welcher durch eine *periodische*, *durchgehende äquidistante* Anordnung von Atomen als ein *Festkörper* charakterisiert wird. Durch diese Anordnung wird eine Ebenenstruktur initialisiert, welche insbesondere nicht eindeutig wählbar ist.

Im Expmeriment wird dann eine Beugungserscheinung ersichtlich sein, siehe [→ *AP3: Beugung am Gitter*]. Im wesentlichen wird hierfür die *Bragg Bedinung* der Form

$$2 \cdot d \cdot \sin(\alpha) = n \cdot \lambda$$

verwendet, wobei α der *Kontaktwinkel* der Strahlung zum Gitter und n die *Beugungsordnung* ist. Der Gitterabstand führt in der obigen weise auf das gesuchte Atomvolumen V_{Atom}.

Man kann das Experiment auch mit mehreren Verfahren ausführen, wie zB. das *Laue-Verfahren*, das *Bragg-* oder *Drehkristallverfahren* und *Dabye Scherrer Verfahren*, welches für Pulver und monochromatischem Licht verwendet.

Abbildende Größenbestimmung. Mithilfe eines Lichtmikroskopes lässt sich ein Atom *nicht* auflösen, da es der Abbeschen Theorie über das Auflösungsvermögen widerspricht. Das *Rayleigh-Kriterium* für d ist von der Form

$$d = \frac{\lambda}{n \cdot \sin(\alpha)},$$

mit n als Brechungsindex und α als Einfallswinkel (der halbe Winkel). Unter dem Link zum Auflösungsvermögen sind minimale sichtbare Längen bei ungefähr 500nm recherchierbar, woraus die Ausgangsaussage folgt.

„*Man braucht die mindestens die erste Ordnung, sonst haben wir keine Auflösung mehr.*“

. . . .

□ Finde heraus, was der Prof. (✎3) mit dieser Aussage meinte.

. . . .

Experiment 1. ***Die Nebelkammer.***

Die sogenannte Nebelkammer *ist gefüllt mit übersättigtem Wasserdampf, durch welche gewählte Teilchen hindurchfliegen, wie beispielsweise* ${}_2^4He$ *Kerne. Ihre Spuren in dem Nebel lassen sich dann optisch durch Schwärzungen nachvollziehen. Die Streifen entstehen durch die Reaktion*

$$^{14}_{7}N + ^{4}_{2}He \longrightarrow ^{17}_{8}O + ^{1}_{1}p.$$

Experiment 2. ***Das Feldemissionsmikroskop.***

Das Feldemissions- *oder* Feldelektronenmikroskop *wurde entwickelt von* E. Müller *im Jahre 1951. Die Wolframspitze weist einen Krümmungsradius von* $r \approx 10\text{nm}$ *auf, aus wessen Spitze durch eine angelegte Spannung zwischen ihr und dem Schirm Elektronen herausgerissen werden. Diesen Prozess nennt man auch* Kalte Elektronen Emission.

VL 3
14.04.2023,
11:45

Transmissions-Elektronenmikroskopie Die Methode der Transmissions - Elektronenmikroskopie wurde von E. Ruska 1932 entwickelt. Ihre Funktionsweise beruht auf der Emission von Elektronen und anschließender Beschleunigung in Richtung der Probe, an welcher ein Streumuster entsteht. Die Elektronen werden als Teilchen im Modell aufgefasst, sodaß das Auflösungsvermögen der De-Broglie Wellenlänge

$$\lambda = \frac{k}{p} = \frac{k}{\sqrt{2 \cdot m_e \cdot E_{kin}}},$$

entspricht, wobei k die Planck-Konstante und p der (nicht relativistische) Impuls des Elektrons ist.

Rasterelektronenmikroskopie Die Methode der Rasterelektronenmikroskopie rastert ein Muster der Elektronenstrahlung über das zu mikroskopierende Objekt, welches selbstgewählt ist. Ein Sonderfall dieser ist die Rastertunnelmikroskopie (entworfen bei IBM in Zürich), bei welcher keine Elektronen verwendet werden, sondern die Elektrode sehr nahe (approx. 2Å) an das zu untersuchende Objekt herangebracht wird. Hierduch entsteht ein sogenannter *Tunnelstrom*, welcher eine Proportionalität $I \propto \exp(-d)$ vorweist, sodaß $-\ln(I) \propto d$ der Abstand zur Probe ist. Die Rastertunnelmikroskopie ist somit eine Methode zur Messung der Abstände zwischen Probe und Elektrode. Die Auflösung ist dabei

lateral: 0.05Å vertikal: 1pm.

. . . .

□ Recherchiere das IBM Logo aus Atomen gebastelt. Wie groß ist das Logo? Wie wurde das Logo zurechtgeschoben? (✎4)

. . . .

1.3 Definition des Atomradius

Misst man mit verschiedenen Methoden dasselbe Atom, erhält man verschiedene Radien und damit Atomgrößen. Die Messmethoden sind also bezüglich des Atomradius nicht eindeutig! Atome sind also keine harten Kugeln im Sinne der Vorstellung, sondern haben ein *Wechselwirkungspotential* (auch Lennard-Jones-Potential) der Form

$$V := \left(\frac{a}{r^{12}} - \frac{b}{r^6}\right)_{r\in\mathbb{R}_{\geq 0}},$$

welches mit verschiedenen Messmethoden zu verschiedenen Radien registriert wird.

. . . .

(✎5) □ Leite das Potential V her. Was ist die Bedeutung der Parameter a und b?

. . . .

VL 4 17.04.2023, 11:45 Den Atomradius setzt man nach dem Potential beispielsweise auf $r_m := (2a/b)^{1/b}$ als $\operatorname{argmin}(V)$ oder auch $r_0 = (a/b)^{1/b}$ als nächste Nullstelle zu $r = 0$ aus $V(r_0) = 0$.

1.4 Der elektrische Aufbau der Atome, das Elektron

Entdeckung der Kanalstrahlen, Ionen

Der Physiker E. Goldstein (1886) entdeckte die sogenannten *Kanalstrahlen*, neuer genannt auch Ionenstrahlung. Sie dienen der Untersuchung der Gasentladung. Die Funktionsweise der Kanalstrahlen ist wie folgt: Die Ionen werden per elektrischem Feld beschleunigt und zur Kathode gelenkt. Sie treten durch die Löcher (auch Defektelektronen) in der Kathode aufgrund ihrer Massenträgheit hindurch, was in Form von Leuchterscheinungen erkennbar ist. Man kann durch dieses Verfahren auf das Verhältnis e/m schließen.

Entdeckung der Kathodenstrahlen, Elektronen

Über eine Weiterentwicklung der Vakkuumtechnologie im Allgemeinen wird es möglich, sogar Elektronenstrahlen zu erzeugen. Dies geschieht in der sogenannten *Kathodenstrahlröhre*:

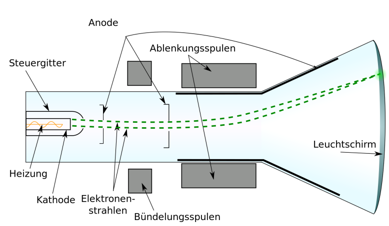


Abbildung 1: Schematischer Aufbau der Kathodenstrahlröhre.

[→ Live-Versuch] Es findet nach der Erzeugung des Elektronenstrahls also eine Ablenkung desselben durch ein elektromagnetisches Feld vor. Die Versuche gehen auf den Physiker J. J. Thomson zurück, welcher 1897 die erste Kathodenstrahlröhre baute. Das Massenverhältnis m_e/m_p lautet in diesem Fall

$$\frac{m_{Ion}}{e} \approx 10^{-4}.$$

□ Suche nach einer Formel zur konkreten Berechnung auf Grundlage der Versuchsbedingungen. (✎6)

Masse des Elektrons

Die Bestimmung von m_e aus den massenspektrometrischen Experimenten erfolgt bei bekannter Ladung durch die einfache Multiplikation $m_e/e \cdot e = m_e$. Der Literaturwert der Elektronenladung ist $e = 1,602 \cdot 10^{-19}$C, die Masse des Elektrons ist $m_e = 9,109 \cdot 10^{-31}$k.

Ladung des Elektrons (Elementarladung)

Von Robert Millikan (1909) wurde ein Experimentvorschlag der Elementarladungsbestimmung vorgeschlagen, das sogenannte Millikan-Experiment [→ AP3]. Das grobe Vorgehen ist zunächst (i) die Volumenmessung des Tröpfchens, (ii) die Kraftberücksichtigung von Schwerkraft $F_g = m \cdot g$, der Reibung $F_R = 6\pi \cdot \eta \cdot r \cdot v$ und der Auftriebskraft $F_A = V \cdot \rho \cdot g$, wodurch der Teilchenradius

$$r = \left(\frac{9 \cdot \eta \cdot v}{2 \cdot g \cdot (\rho_{\ddot{O}l} - \rho_{Luft})} \right)^{\frac{1}{2}} \implies m = \frac{4}{3}\pi r^3 \cdot \rho_{\ddot{O}l}$$

folgt. Die Spannung zwischen den Kondensatorplatten liefert die Feldstärke $E = U/d$, welche genau so justiert wird, daß das Teilchen zu schweben beginnt. Das Kräftegleichgewicht liefert dann das Ergebnis

$$n \cdot e = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3 \cdot g \cdot (\rho_{\ddot{O}l} - \rho_{Luft})}{E}.$$

Hinzukommende Röntgenstrahlung ändert nun schließlich die Tröpfchenladung in Stufen $\Delta q = n \cdot e$, wodurch die Existenz der Elementarladung e bewiesen werden kann [→ Ionisierende Strahlung].

□ Führe die angedeutete Rechnung konkret durch. (✎7)

Weitere Eigenschaften des Elektrons

Der Eigendrehimpuls (Spin). Der Spin kommt in Größen von $\hbar/2$ vor. Er ist ein Quantenzustand, der sich nicht addieren läßt. Nach dem *Elementarteilchenmodell* sind Elektronen Teil der Gruppe *Fermionen*, also Teilchen mit halbzahliger Spinzahl, und in der Untergruppe der Leptonen. Teilchen mit ganzzahliger Spinzahl heißen *Bosonen*.

Fermi-Dirac-Statistik. Die *Fermi-Dirac-Statistik* beschreibt die Wahrscheinlichkeit, daß ein Fermion in einem bestimmten Zustand ist. Sie ist definiert durch

Pauli-Prinzip. Das *Pauli-Prinzip* besagt, daß zwei Fermionen nicht denselben Quantenzustand haben können.

Magnetisches Moment. Ein Elektron weist ein *Magnetisches Moment* auf, welches sich aus der Spin-Bewegung ergibt. Es ist definiert durch

$$\mu_{\mathbf{s}} = -g_S \cdot \frac{e}{2 \cdot m_e} \cdot \mathbf{s}.$$

. . . .

(✎8) ☐ Recherchiere in einer Mußestunde die genannten Begriffe und versuche, sie zu verstehen.

. . . .

1.5 Bestimmung der Ladungsverteilung im Atom (Streuexperimente)

Aus den vorgehenden Kapiteln kann man entnehmen, daß Atomen aus $z \in \mathbb{N}_0$ Elektronen der Ladung $-z \cdot |e|$ und z positiven Ladungen der Ladung $z \cdot |e|$ konstruiert sind. Hieraus resultiert die *elektrische Neutralität* des Atoms.

Das Thomson'sche Atommodell

Das Thomson'sche Atommodell (auch Rosinenkuchenmodell) besagt, daß die Ladungen über das gesamte Atomvolumen verteilt sind. Die Ladungsdichte ρ ist also konstant und gleich der Ladung pro Volumeneinheit.

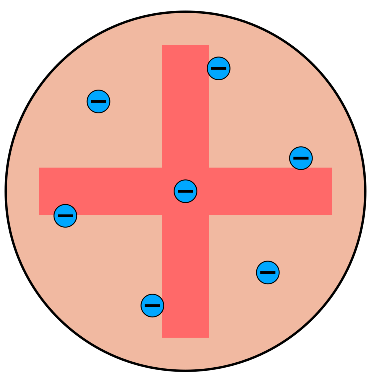


Abbildung 2: Das Thomson'sche Atommodell.

Die Bestimmung des inneren Atomaufbaus erfolgt durch die Streuung von α ($^4_2\mathrm{He}^{2+}$) Teilchen und ihrer Bahnanalyse.

Das Rutherford-Experiment

Das Experiment entstammt der Idee der drei Physiker E. Marsden, H. Geiger und E. Rutherford. Der Versuchsaufbau ist von der Form

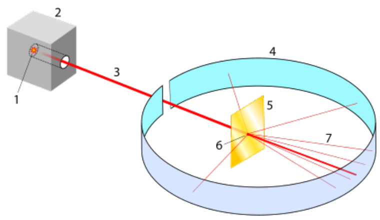


Abbildung 3: Das Rutherford-Experiment.

Mit einem *Szintillator* (oder technisch weiter fortgeschrittenen Messgeräten) wird Anzahl der Teilchenregistrierungen in Form von Blitzen in Abhängigkeit des Winkels θ gemessen, woraus sich zeitlich die Zählrate $N(\theta)$ ergibt.

☐ Recherchiere den *Rutherfordschen Streuungsquerschnitt* und versuche, ihn zu verstehen. (✎9)

Experiment 3. ***Rutherford-Experiment.***

Wir führen das Rutherford-Experiment durch und erhalten:

Registrierungen	Winkel	Zeit	Folie
1468cps	0°	20s	ohne
0 cps	15°	20s	ohne
1369 cps	0°	20s	mit
4 cps	15°	20s	mit

Tabelle 1: Vergleich Messung mit und ohne Folie.

(Einheit „cps“ ist counts per second*)*

VL 5
19.04.2023,
08:15

Wir wollen nun die Ergebnisse des vorigen Experimentes festhalten:

- 99.99% der eingestrahlten α Teilchen fliegen geradlinig durch die Au-Folie hindurch. Die Folie ist für die Teilchen also annähernd transparent.
- Der α Teilchenstrom wird leicht aufgefechert. Dies ist mit der erwarteten $e^- - \alpha$ Teilchenwechselwirkung vereinbar.
- Es wird auch die Rückwertsstreuung (bei den übrigen 0.01% der α Teilchen) beobachtet.
- Die zurückgestreuten α Teilchen haben keinen Energieverlust erfahren.
- Die Intensität der Rückwertsstreuung ist proportional zur Foliendicke (/-stärke).
- Die Winkelverteilung der Zählraten weist die Proportionalität

$$N(\theta) \propto \frac{1}{\sin(\theta/2)^4}$$

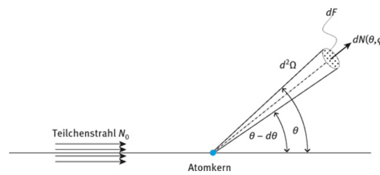


Abbildung 4: Darstellung des schematischen Streuprozesses aus [1].

auf.

Aus unseren Beobachtungen können wir das *Rutherford-Modell* ableiten:

(i) Atome sind aus Kern und Hülle aufgebaut.

(ii) Die Kerne enthalten den Großteil der Atommasse und sind positiv geladen, auf ≈ 40fm konzentriert.

(iii) Die Hüllen enthalten Elektronen, verteilt über das Restvolumen des Atoms.

(iv) Das *Coulomb-Gesetz* behält auf diesen Größenordnungen seine Gültigkeit.

Die Rutherfordsche Streuformel Wir wollen nun die Streuformel für die Rutherford-Experimente herleiten. Wir betrachten zunächst die Streuung eines α Teilchens auf ein Atom. Die Streuung ist in der Regel sehr klein, sodass wir die Streuung als eine Streuung auf den Atomkern betrachten können. Unser Ziel ist $N(\theta)$. Betrachte das Schema: Für die Coulombkraft erhalten wir zunächst

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{2 \cdot q(\text{Ze})^2}{r^3} \cdot \mathbf{r},$$

wobei die Funktion q die Ladung von Ze zuordne[1]. Die Kraftaufspaltung in orthogonale und parallele Flugrichtung ergibt

$$F_\perp = ||F||_2 \cdot \sin(\varphi) \qquad F_\parallel = ||F||_2 \cdot \cos(\varphi).$$

Für den Drehimpuls erhalten wir in *Zylinderkoordinaten* die Gleichungskette

$$\begin{aligned}\mathbf{L}_{r(t)} = \mathbf{r}(t) \times \mathbf{p}(t) = \mathbf{r}(t) \times m \cdot \mathbf{r}'(t) \\ = m \cdot ||\mathbf{r}(t)||_2^2 \cdot \varphi'(t) \cdot (\mathbf{e}(r(t)) \times \mathbf{e}(\varphi(t))) \\ =: m \cdot ||\mathbf{r}(t)||_2^2 \cdot \varphi'(t) \cdot \mathbf{e_3}.\end{aligned}$$

Identifiziere nun $1/r^2 = \varphi'(t)/(v_0 \cdot b)$ mit $v_0 := ||r'(0)||_2$ und b als Bahnabstand zur Mittelachse durch den Kern [→ Abb. 4]. Wir erhalten für das Coulombgesetz

$$F_\perp = \frac{2 \cdot q(\text{Ze})^2}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\varphi'(t)}{v_0 \cdot b} \cdot \sin(\varphi(t)) = m \cdot ||r''(t)||_2$$

und durch Integration

$$b(\theta) = \frac{2 \cdot q(\text{Ze})^2}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{m \cdot v_0^2} \cdot \cot\left(\frac{\theta}{2}\right).$$

[1] Sie hätte wohl eine Form $q := (E \mapsto E_q)_{E \in TOE}$, wobei TOE eine Menge von Tupeln sei, welche zu allen Elemente des Periodensystems ihre Eigenschaften als Einträge zusammenfasst.

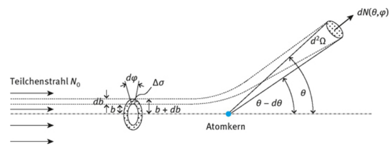


Abbildung 5: Erweiterung der Abbildung 4 um das Ursprungsraumelement [1].

- ☐ Fülle die Lücken der Rechnung auf. Was kommt beim parallelen Fall heraus? (✎10)

Bei unserem Experiment [→ Exp. 3] haben wir die *Anzahl der Ereignisse* auf dem Leuchtschirm gemessen. Diese geschahen alle in einem gewissen Raumwinkelbereich $d\Omega$ [→ Abb. 4], in welchem der Detektor gemessen hat. Wir fragen uns nun, aus welcher Richtung die detektierten Teilchen kommen, was uns auf ein paarweise definiertes Raumelement vor dem Atom bringt: Die gemittelte Anzahl der Teilchen dN in diesem Raumelement $d\Omega$ ist augenscheinlich von db ab, sodaß wir auf den schematischen Zusammenhang

$$dN = \textit{Anzahl der } \alpha \textit{ Teilchen} \cdot \frac{dB \cdot \textit{Streuzentrenanzahl}}{\textit{Gesamtfläche}},$$

wobei wir $dB := \pi \cdot (b^2 - (b - db)^2)$ als Trefferfläche und N_t als Streuzentrenanzahl (proportional zur Anzahl der Atome in der Ag-Folie) festhalten. Die Gesamtfläche F ist diejenige der Goldfolie. Daraus ergibt sich

$$dN = N_\alpha \cdot dB \cdot \frac{N_t}{F}$$

und „differenziert" nach $d\Omega$ insgesamt

$$\frac{dN}{d\Omega} = N_\alpha \cdot \frac{N_t}{F} \cdot \frac{dB}{d\Omega},$$

wobei wir $dB/d\Omega$ als den *differentiellen Streuquerschnitt* definieren.

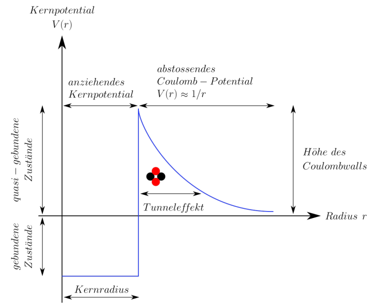
- ☐ Kläre die Bedeutung des angedeuteten Differenzierens. Wie ist der Prozess sauber definierbar? (✎11)
- ☐ Verifiziere die alternative Definition $dB := b \cdot db \cdot d\varphi$. Verifiziere auch $d\Omega = \sin(\theta) \cdot d\theta \cdot d\varphi$. (✎12)

Die Streuformel für die Rutherford-Experimente lautet nun

$$\frac{dB}{d\Omega} = \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q(\mathrm{Zr}) \cdot e^2}{m \cdot v_0^2}\right)^2 \cdot \frac{1}{\sin(\theta/2)^4}.$$

Man kann nun noch $E_0 = m \cdot v_0^2$ identifizieren.

Der Kernradius Für schnelle α Teilchen konnte jedoch experimentell bewiesen werden, daß die Coulombkraft nicht mehr alleinig die Bahn des gestreuten Teilchens beschreiben kann: Es muss eine weitere Wechselwirkung mit dem Atomkern geben, wie sich rausstellen wird die sogenannte *attraktive Kernkraft*.



(a) Der Tunnelprozess und die Kernkraft.

VL 6 20.04.2023, 10:00

Aufbau von Atomen, Isotopie Zusammenfassend haben wir festgestellt, daß Atome aus Elektronen (e^-) in der Hülle und Protonen (p^+) im Kern bestehen müssen. Noch nicht erwähnt sind die sogenannten *Neutronen* (n^0), welche sich ebenfalls im Kern ansiedeln. Wir definieren nun den Begriff *Isotop*, welcher ein Atom (also Element) beschreibt, bei welchem sich die Anzahl der Neutronen ändert, jedoch die Protonenanzahl gleich bleibt. Beipiel ist der Wasserstoff (H), welcher sich in *Protium* ($^1_1$H), *Deuterium* ($^2_1$H) und *Tritium* ($^3_1$H) unterteilt, bei welchen die letzten beiden Isotope natürlich eher selten anzutreffen sind.

1.6 Entwicklung der Quantenmechanik

Wichtige Experimente waren

- Das *Doppelspaltexperiment* von Thomas Young (1801), welches den Welle-Teilchen-Dualismus fundierte.
- Die *Schwarzkörperstrahlung* von Max Planck (1900), welche die Quantisierung der Strahlung beschrieb.
- Der *photoelektrische Effekt* von Albert Einstein (1905), welcher die Quantisierung der Photonen beschrieb.
- Der *Compton-Effekt* von Compton-Effekt (1923), welcher die Lichtstreuung an freien Elektronen beschrieb (Welle-Teilchen-Dualismus).
- Die *De Broglie-Wellenlänge* von Louis de Broglie (1924), welche die Wellenlänge von Teilchen/Materie beschrieb.
- Die *Spektrallinien* von J. Balmer (1885), welche die Quantisierung der Atomenergie durch Absorbtion und Emission von Licht beschrieb. Dies führte zur Entwicklung des Atommodells durch Niels Bohr (1913).

1.6.1 Schwarzkörperstrahlung

Der schwarze Körper / Hohlraumstrahlung Interessant ist die quantitative Beschreibung dieser Phänomene, z.B. durch die Intensitätsverteilung im Spektrum eines Körpers.

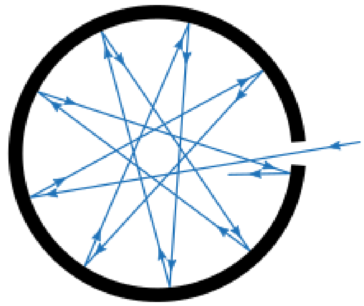


Abbildung 7: Schema eines Schwarzkörpers [3].

Der *schwarze Körper* ist ein Körper mit einer Oberfläche, welche alle Strahlung absorbiert, d.h. der Absorbtionskoeffizient des Körpers ist $A = 1$, woraus mit $A + R = 1$ wiederum folgt $R = 0$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$. Somit muss ein Körper, welcher alle Strahlung absorbiert, auch alle Strahlung emittieren, und dies proportional zu seiner Temperatur. Dies ist die Grundlage des *Planckschen Strahlungsgesetz*. Anschaulich passiert mit einfallender Strahlung auf einen Schwarzkörper folgendes: Die Intensitätsverteilung der austretenden Strahlung ist identisch mit derjenigen des sich im Hohlraum befindlichen EM-Felder. Das spektrale Emissionsvermögen eines schwarzen Körpers ist also identisch mit der spektralen Strahlungsdichte der Hohlraumstrahlung.

. . . .

□ Recherchiere die *Dyson-Sphäre*. Handelt es sich um einen Schwarzkörper? (✎13)

. . . .

Experiment 4. ***Die Glühbirne.***

Wir starten bei 6W*. Das Licht einer Glühbirne wird spektral zerlegt. Ein Detektor misst die Strahlungsintensität und abhängig von der Wellenlänge. Wir sehen einen Peak und Maximum im Ifraroten Bereich. Dies ist die* Infrarotstrahlung *der Glühbirne.*

Nun ändern wir die Leistung auf 3W*; sofort wird das sichtbare Spektrum schwächer auf dem Schirm abgebildet. Die erhaltene Intensitätskurve ist relativ zu der* 6W *Kurve nach oben verschoben. Wir sehen, daß der Peak (nach rechts, ins Infrarote) verschoben ist. (Das Experiment wurde aufgrund zu flacher Kurve hier abgebrochen.) Hinweis: Simuliere das Experiment auf der FU-Berlin Website.*

Aus klassischer Sicht ergibt sich für die spektrale Energiedichte

$$u(\nu, T) \cdot d\nu = \frac{8 \cdot \pi}{c^3} \cdot \nu^2 \cdot k_B \cdot T \cdot d\nu,$$

auch bekannt als *Rayleigh-Jeans-Gesetz*. Für $\nu \to \infty$ erfolgt eine sogenannte *Ultraviolett-katastrophe*. Dieses Verhalten ist jedoch nur bei klassischer Strahlung zu beobachten. Das Modell weist eine gute Übereinstimmung mit der Realität für kleine Frequenzen auf.

. . . .

Abbildung 8: Schema der Emission eines Photons durch eine Atomanregung [4].

□ Recherchiere den *Gleichverteilungssatz*. Wie fließt er in das Rayleigh-Jeans-Gesetz ein?

. . . .

Plancksches Strahlungsgesetz Max Planck leitete die korrekte Strahlungsformel für das beobachtete Phänomen und Diskrepanz her. Wir konzentrieren uns nachfolgend jedoch auf die Herleitung nach Einstein.

Annahmen. Wir müssen annehmen, daß Licht aus Teilchen besteht, die sogenannten Photonen, und damit quantisiert ist. Weiter nehmen wir an, daß Atome diskrete Energieniveaus besitzen müssen. Es gibt insbesondere *nur* zwei, welche wir E_1 und E_2 mit $E_2 > E_1$ nennen wollen.

Damit kommen zwei Prozesse bei der Wechselwirkung mit der elektromagnetischen Strahlung infrage: (i) Absorbtion und (ii) Reflexion.

(i) Bei der Absorbtion eines Photons mit Energie $E = E_2 - E_1 = h \cdot \nu$ wird das Atom von E_1 auf E_2 angeregt[2].

(ii) Im angeregten Zustand kann das Atom *spontan* das Energieminimm anstreben und ein Photon der Energie $E_2 - E_1 = h \cdot \nu$ emittieren.

Anschaulich sind die Prozesse wiefolgt, wobei noch die *induzierte Emission* als Kombination beigefügt wurde: In einem Atomsystem mit $N \in \mathbb{N}$ Atomen haben wir N_1 Atome in Zustand E_1 und N_2 Atome in Zustand E_2. Für die Prozesse gilt dann:

(i) Für ein Atom in Zstand E_1 gilt die Änderung

$$dN_{12} = \int B_{12} \cdot u(\nu, T) \cdot N_1 \, \lambda\,(dt)\,,$$

wobei B_{12} ein *Einstein Koeffizient* ist, welcher die Übergangswahrscheinlichkeit angibt in der Einheit $[1/(s \cdot J/m^3)]$ mit E als Energiedichteeinheit.

(ii) Für ein Atom in Zustand E_2 gilt die Änderung

$$dN_{E,21} = \int A_{21} \cdot N_2 \, \lambda\,(dt)\,,$$

VL 7 21.04.2023, 11:45

mit A_{21} als *Einstein Koeffizient.*

Die induzierte Emission folgt dem Zusammenhang $dN_{I,21} = \int B_{21} \cdot u(\nu, t) \cdot N_2 \, \lambda\,(dt)$. Im thermischen Gleichgewicht gilt

$$dN_{12} = dN_{E,21} + dN_{I,21},$$

[2]Es ist $h = 6.62 \cdot 10^{-34}\,\mathrm{J\,s}$ die *Planck-Konstante* und $\hbar := h/(2 \cdot \pi)$ die reduzierte Variante.

also nach Definitionen

$$\frac{N_2}{N_1} = \frac{B_{12} \cdot u(\nu,t)}{A_{21} + B_{21} \cdot u(\nu,t)} \Leftrightarrow \frac{N_2}{N_1} = \frac{(E_2/(k_B \cdot T))}{\exp(E_1/(k_B \cdot T))},$$

bei welchen der Zähler und Nenner sogenannte *Boltzmann-Faktoren* sind. Mit $E_2 - E_1 = h \cdot \nu$ folgt dann insgesamt

$$u(\nu,t) = \frac{A_{21}}{B_{12} \cdot \exp(h \cdot \nu/(k_B \cdot T)) - B_{21}}.$$

- Für $T \to \infty$ muss $u \to \infty$ gelten, da sonst die Emission nicht mehr möglich wäre. Dies folgt aus der Definition von u. Weiter folgt mit „physikalischer Argumentation“ $B_{12} = B_{21}$.
- Für $h \cdot \nu \ll k_B \cdot T$ (das R.J. Gesetz ist hier gut genug) folgt

  $$\exp(h \cdot \nu/(k_B \cdot T)) \approx 1 + \frac{h \cdot \nu}{k_B \cdot T} + \mathrm{TAF}_{f,x_0}(x)$$

  mit passend gewählten f, x_0, x durch Taylorapproximation. Daher gilt

  $$u(\nu,T) = \frac{A_{21}}{B_{12}} \cdot \frac{k_B \cdot T}{h \cdot \nu}$$

  mit $A_{21}/B_{12} = 8\pi h \cdot \nu^3/c_0^3$, sodaß

  $$u(\nu,T) = \frac{8\pi h \cdot \nu^3}{c_0^3} \cdot \frac{1}{\exp(h \cdot \nu/(k_B \cdot t)) - 1}.$$

  Es ist dann $u(\nu,T) \cdot d\nu$ die spektrale Energiedichte im Frequenzbereich $d\nu$ pro Volumen.
- Betrachte die gesamte Energiedichte

  $$U(T) = \int u(\nu,T)\, \lambda_{\mathbb{R}_{\geq 0}}(d\nu) = \frac{8\pi h}{c_0^3} \cdot \int \frac{\nu^3}{\exp(h \cdot \nu/(k_B \cdot T)) - 1}\, \lambda_{\mathbb{R}_{\geq 0}}(d\nu)$$

  und mit Substitution $x = h\nu/(k_B \cdot T)$ schließlich

  $$U(T) = \frac{8\pi h}{c_0^3} \cdot \left(\frac{k_B \cdot T}{h}\right)^4 \cdot \int \frac{x^3}{\exp(x) - 1}\, \lambda_{\mathbb{R}_{\geq 0}}(dx) = \frac{8 \cdot \pi^5 k_B^3}{15 \cdot c_0^3 \cdot h^3} \cdot T^4,$$

  auch bekannt als das *Stephan-Boltzmann-Gesetz.*

....

□ Führe die angedeutete Substitution in U in der Herleitung des Stephan-Boltzmann-Gesetzes durch und zeige, dass die Energie pro Volumen $U(T)$ proportional zu T^4 ist. Benenne den Faktor durch σ_B. (✎15)

(✎16) □ Wechsle die Eingabe von U von T nach λ, indem du U mit passendem Φ verkettest.

....

Für das Maximum der Funktion U muss zunächst $\mathrm{kritP}\,(U)$ durch die Gleichung $dU(\lambda)(h) = 0_{\mathbb{R}}$ bestimmt werden. Lösungen und damit Einträge von $\mathrm{argmax}\,(U)$ sind $x = (h \cdot c_0)/(k_B \cdot$

$T \cdot \lambda$) und $x = 5 \cdot (1 - \exp(x))$. Die numerische Lösung ist $x \approx 4.965114$. Umstellen liefert sodann
$$T \cdot \lambda_{max} = \frac{h \cdot c_0}{4.95114 \cdot k_B} \approx 2.998 \cdot 10^{-3} \mathrm{m\,K}.$$

. . . .

☐ Recherchiere das *Wiensche-Verschiebungsgesetz*. Wie hängt es mit der skizzierten Maximumssuche zusammen?

(✎18) ☐ Folge der Anweisung oben. Bestimme $dU(\lambda)(h)$ und löse $dU()(h) = 0$. Verifiziere die Lösung $x = (h \cdot c_0)/(k_B \cdot T \cdot \lambda)$.

(✎19) ☐ Bestimme nummerisch die Lösung der Gleichung.

. . . .

VL 8
24.04.2023, 11:45

Experiment 5. ***Ladungsnachweis Wimshurstmaschine und Photoplatte.***

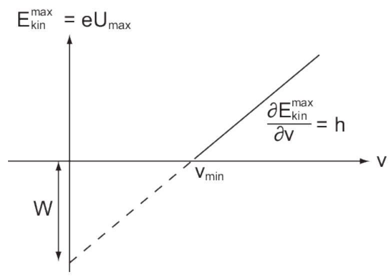
Bestrahlen der Photoplatte mit und ohne Glasscheibe. Ohne Scheibe ist Ladungsabfall erkennbar, mit Scheibe nicht. Wir beobachten:

- *Entladung einer negativ geladenen Zn-Photoplatte durch Bestrahlung mit Licht.*
- *Bei positiv geladener Platte verändert sich der Zeigerausschlag nicht.*
- *Mit Glasplatte findet keine Entladung statt: der UV-Anteil des Lichtes wird von der Scheibe absorbiert.*

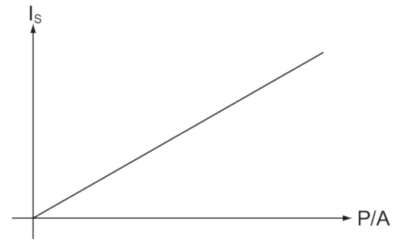
Die quantitative Durchführung mit der Gegenfeldmethode liefert folgende Beobachtungen:

- *Beuleuchtung einer Metallplatte führt zur Induktion elektrischen Stroms und eines Auslösens von Elektronen ab einer gewissen Grenzfrequenz* $f_{gr} \in \mathbb{R}_{>0}$.
- ν_{gr} *hängt von dem Material der Platte ab.*
- I *hängt von der Intensität* P *des Lichtes ab,* ν_{gr} *jedoch nicht.*
- *Ab einer negativen Spannung* U_{max} *wird der Stromfluss verhindert.*
- U_{max} *ist* nicht *von* P *abhängig.*
- U_{max} *ist* linear *von* ν *abhängig.*
- *Der Sättigungsstrom* I_S *hängt* liner *von* P *ab.*
- *Die Elektronen werden verzögerungsfrei herausgelöst.*

Trägt man die Messdaten in Graphen auf, erhält man folgende Schemata:



(a) $e \cdot U(\nu)$ aus [5].



(b) $I_S(P/A)$ aus [5].

Die Interpretation der experimentellen Befunde liefert Einstein: er stellt die *Lichtquantenhypothese* auf. Sie postuliert folgende Annahmen:

1. Die einfallende Strahlung besteht aus *Lichtquanten* (Photonen) mit Energie $E = h \cdot \nu$.
2. Jedes absorbierte Photon gibt seine Energie vollständig an ein sogenanntes *Photoelektron* (herausgelöstes Elektron) ab.
3. Die Austrittsarbeit W muss aufgebracht werden, um Elektronen aus dem Festkörper hinauslösen zu können: $h \cdot \nu > W_A$
4. Für die kinetische Energie der Elektronen folgt $E_{kin}^{max}(\nu) = h \cdot \nu - W_A$. Haben die Atome die Anregungsenergie E_B, so muss zusätzlich noch berücksichtigt werden $E_{kin}(\nu) = h \cdot \nu - W_A - E_B$. [→ Niveausprung]
5. Bei Gegenspannung $U = U_{max}$ ist die Geschwindigkeit der Elektronen gleich Null: es gilt der Zusammenhang
$$\frac{1}{2} \cdot m_e \cdot v_e^2 = e \cdot U_{max} \overset{def\, E_{kin}^{max}(\nu)}{\Longleftrightarrow} e \cdot |U_{max}| = h \cdot \nu - W_A.$$
Mit der Photonenenergie- und Impuls
$$E$$
mit Wellenvektor $k \in \mathbb{R}^3$ und $p \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3)$ als Impuls, dann gilt mit *Relativitätstheorie* gerade
$$E^2 = p^2 \cdot c_0^2 + m_0^2 \cdot c_0^4 \overset{m_\gamma = 0}{\Longrightarrow} ||p||_2 = \frac{E}{c_0} = \frac{\hbar \cdot \omega(\nu)}{c_0} \overset{(D)}{=} \hbar \cdot ||k||_2 ,$$
wobei bei (D) die *Dispersionsrelation* [→ IK3-E] verwendet wurde.

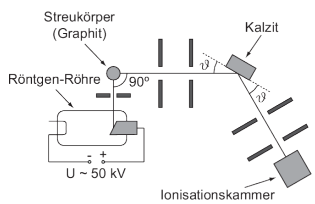
. . . .

□ Rechne noch einmal die Dispersionsrelation nach. Wie lautet das Argumentationsergebnis für ein Elektron e der Masse m_e? (✎20)

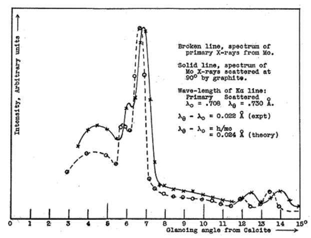
. . . .

Der Compton Effekt

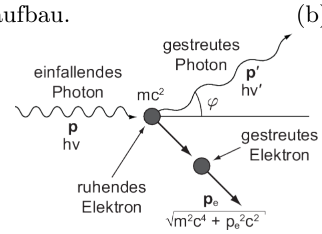
Der *Compton Effekt* diente dem Nachweis des Teilchencharakters von Photonen, wobei wiefolgt der Versuch aufgebaut wurde:



(a) Versuchsaufbau.



(b) Messung.



(c) Kollision.

Abbildung 10: Compton Effekt aus [6].

Es zeigt dabei Abbildung 10c die *angenommene inelastische Kollision* eines Photons mit einem Elektron. Somit gelingt *hier* der Brückenschlag aus der Quantenmechanik zur klassischen Mechanik des Zweierstoßes. Wir folgern mit Energieerhaltung

$$\hbar \cdot \omega(\nu) + m_e c_0^2 = \hbar \cdot \omega(\tilde{\nu}) + E_e,$$

wobei die $\hbar$ Terme das Photon und E_e das Elektron beschreiben. Mit Impulserhaltung folgt

$$p + 0_{\text{Abb}}\left(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3\right) = \tilde{p} + p_e,$$

sodaß $(1)^2 - (2)^2 \cdot c_0^2$ den Zusammenhang

$$\left[\hbar \cdot (\omega(\nu) - \omega(\tilde{\nu})) + m_o \cdot c_0^2\right]^2 - (p - \tilde{p})^2 \cdot c_0^2 = E_e^2 - p_e^2 \cdot c_0^2$$

liefert, wobei unter $E = m_0 2c^4 + c_0^2 p^2$ ($p^2 = \langle p, p \rangle_{\mathbb{R}^3}$) folgt

$$-2 \cdot \hbar^2 \cdot \omega(\nu) \cdot \omega(\tilde{\nu}) + 2 \cdot \hbar \cdot (\omega(\nu) - \omega(\tilde{\nu})) \cdot m_0 c_0^2 + 2\hbar^2 \cdot \omega(\nu) \cdot \omega(\tilde{\nu}) \cdot \cos(\phi(\nu)) = 0$$

für $|\phi| = (\hbar \cdot \omega(\nu))/c_0$ und schlielich

$$\omega(\tilde{\nu}) = \frac{\omega(\nu)}{\hbar\omega(\nu)/(m_0 \cdot c_0^2) \cdot (1 - \cos(\phi(\nu))) + 1}.$$

Für die Wellenlänge $\lambda_e(\nu) = 2\pi \cdot e/\omega(\nu)$ gilt letztlich

$$\Delta\lambda_e(\nu) = \frac{2\pi \cdot e}{\omega(\nu) \cdot \omega(\tilde{\nu})} \cdot (\omega(\nu) - \omega(\tilde{\nu})) =: \lambda_C \cdot (1 - \cos(\phi(\nu))),$$

wobei wir $\lambda_C := h/(m_0 \cdot c_0) \approx 2.4 \cdot 10^{-12}\mathrm{m} = 0.024\text{Å}$ als *Compton-Wellenlänge* definieren und die Gleichung $\lambda_e(\nu)$ als *Compton-Streuung* bezeichnen.

. . . .

□ Rechne die Herleitung der Compton-Streuung nach. Notiere zunächst die Voraussetzungen und halte dich fortfahrend an die ersten skizzierten Schritte, wobei du sauber die Terme ausmultiplizierst und kürzt. Orientiere dich zusätzlich an [→ Demtröder, S. 80]. (✎21)

. . . .

Eigenschafen des Photons

Wir listen wieder einige Eigenschafen des Photons auf:

- Die Photonendichte wird beschrieben als $n = N/V = U_{em}/(h \cdot \nu) = \varepsilon_0 \cdot E^2/(h \cdot \nu)$.
- Der Photonenstrom definiert als $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} n = I/(h \cdot \nu) = n \cdot c_0$.
- Der Gesamtimpuls als $p = n \cdot \hbar \cdot k$ mit Wellenvektor $k \in \mathbb{R}^3$ oder $|\phi| = n \cdot h/\lambda = U_{em}/c_0$.
- Der Drehimpuls als $L = \pm\hbar \cdot k/\left|\left|k\right|\right|_2$.

Der Spin ist also Ganzzahlig, wodurch die Photonen den *Bosonen* zugeordnet wird.

Welle-Teilchen-Dualismus

Der *Welle-Teilchen-Dualismus* ist ein zentrales Konzept der Quantenmechanik, welches besagt, daß jedes Teilchen sowohl Wellen- als auch Teilcheneigenschaften besitzt. Dieses Konzept wurde von *Louis de Broglie* eingeführt. Er verknüpfte den Impuls $p \in \mathbb{R}^3$ mit dem Wellenvektor $k \in \mathbb{R}^3$ durch $p = \hbar \cdot k$ und der *de Broglie Wellenlänge*.

Das Doppelspaltexperiment

Als Paradebeispiel dieses Dualismus gilt das berühmte *Doppelspaltexperiment*. Welche Objekte hierbei verwendet werden, stellt sich als vielfältig heraus: von makroskopischen Teilchen, klassische Wellen oder auch Quantenobjekte selbst.

VL 9
17.05.2023,
08:15

`Bilddateien/Doppelspalt.png`

Abbildung 11: Der Aufbau und Ablauf des Doppelspaltexperimentes im Wellenbild aus [7].

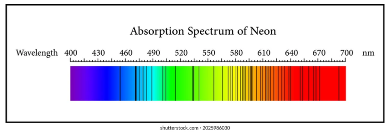


Abbildung 12: Emissionsspektrum am Beispiel von Neon aus [8].

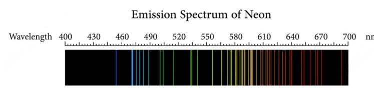


Abbildung 13: Absorbtionsspektrum am Beispiel von Neon aus [**?**].

Die Amplitude im Teilchenfall ergibt sich dabei durch $I_1 = |A_1|^2$, im Wellenfall dagegen aus $I = |A_1 + A_2|^2$.

. . . .

(✎22) ☐ Berechne die Wellenintensität für zwei komplexe Amplituden $\psi_1, \psi_2 \in \mathbb{C}$.

. . . .

Experiment 6. ***Ein Doppelspaltexperiment*.**

Wir wollen nun die Maxima der Schirmverteilung untersuchen: Hierzu ziehen wir einen Sensor zur Photonenmessung pro Zeitintervall mit verschiebbarer Position x über den Schirm. Die Messwerte suggerieren den erwarteten Verlauf der Wellenintensität.

2 Das Bohrsche Atommodell

2.1 Absorption und Emission

Im groben Bild stellen wir uns den Aufbau eines Atoms als einen Kern mit Elektronen vor, welche sich auf Kreisbahnen um den Kern bewegen. Letztere bezeichnen wir als *Elektronenhülle*, welche nachfolgend Untersuchungsgegenstand sein wird.

Diese Spektren stellen sich als *charakteristisch* für Atome heraus. Als Beispiel gilt hier die *Balmer-Serie* [→ AP4], welche sich durch die Formel

$$\tilde{\nu} = \lambda^{-1} = R_H \cdot \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{n^2}\right), \quad n \in \mathbb{N}_{>2},$$

in *normierter Form* beschreiben lässt. Dabei bezeichnet R_H die *Rydberg-Konstante* mit $R_H = 1.097 \cdot 10^7 \mathrm{m}^{-1}$. Multipliziert mit c_0 erhalten wir die *Rydberg-Frequenz* $\nu_R = \tilde{\nu} \cdot c_0$. Die Betrachtung $n \to \infty$ ergibt das *Serien-Grenzkontinuum* $\nu = 1/4 \cdot R_H \cdot c_0$. In diesem Bereich weist das Spektrum keine Linien mehr vor, sondern ist kontinuierlich. Bei Wasserstoff stellt sich heraus, daß es noch weitere Serien gibt; Eine davon ist die *Rydberg-Serie* mit

$$\nu = R_H \cdot c_0 \cdot \left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{n^2}\right), \quad n \in \mathbb{N}_{>1},\ n > k.$$

. . . .

□ Erkläre, warum die Spektren (23) zueinander komplementär erscheinen. Handelt es sich dabei um eine Phänomenologie, oder lässt sich dies auch theoretisch begründen?

. . . .

Literatur

[1] Degryer (2018). *Der differentielle Wirkungsquerschnitt – die Rutherfordsche Streuformel*. URL: https://www.degruyter.com/database/PHYSIKO/entry/physiko.21.45/html. Abgerufen am 19.04.2023.

[2] Wikipedia (2023). *Kernpotential*. URL: https://de.wikipedia.org/wiki/Kernpotential. Abgerufen am 19.04.2023.

[3] Wikipedia (2023). *Black body*. URL: https://commons.wikimedia.org/wiki/Category:Black_body?uselang=de, abgerufen am 20.04.2023.

[4] Universität Ulm (?). *Ableitung der Planckschen Strahlungsformel nach Einstein*. URL: https://www.uni-ulm.de/fileadmin/website_uni_ulm/nawi.inst.251/Didactics/quantenchemie/html/AbleitF.html, abgerufen am 20.04.2023.

[5] ETH Zürich (?). *Kapitel 2: Der Photoeffekt*. URL: https://qudev.phys.ethz.ch/static/content/science/BuchPhysikIV/PhysikIVch2.html, abgerufen am 24.04.2023.

[6] ETH Zürich (?). *Kapitel 4: Der Photonenimpuls*. URL: https://qudev.phys.ethz.ch/static/content/science/BuchPhysikIV/PhysikIVch4.html, abgeufen am 24.04.2023.

[7] TU Braunschweig (?). *Experimente mit Wellen, Teilchen und Kugeln*. URL: http://www.pci.tu-bs.de/aggericke/PC3/Kap_II/Experimente.htm, abgerufen am 17.05.2023.

[8] Shutterstock (?). *Absorbtionsspektrum Neon*. URL: https://www.shutterstock.com/image-vector/absorption-spectrum-neon-element-2025986030, abgerufen am 17.05.2023.

[9] Shutterstock (?). *Emissionsspektrum Neon*. URL: https://www.shutterstock.com/image-vector/emission-spectrum-neon-element-2025986753, abgerufen am 17.05.2023.