

Integrierter Kurs IV

Experimentalphysik II
Tom Folgmann

21. April 2023

1 Atome und Atommodelle

VL 1
12.04.2023,
11:45
VL 2
13.04.2023,
08:15

Die experimentelle Bestimmung der Atommasse gelingt durch verschiedene Verfahren, wie beispielsweise die folgenden.

Röntgenbeugung an Kristallen. Man kennt zunächst die *Gitterkonstante* $d \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, also den *Abstand der Atome innerhalb des Gitters*. Damit ist das Atomvolumen gerade $d^3 = V_{Atom}$ und schließlich

$$N_A \cdot V_{Atom} = \frac{M}{\rho(M)},$$

wobei M die *Molekülmasse* und ρ eine Dichtefunktion ist.

.....
☐ Recherchiere das „Avogadro-Projekt“ des PTB. (S1)
.....

Gaskonstante. Über die Gaskonstante folgt der Atomradius $R = N_A \cdot k_B$ mit k_B als *Boltzmann-Konstante*.

Massenspektroskopie. Hier wird über die Atomablenkung die Masse bestimmt.

.....
☐ Recherchiere das genaue Vorgehen. (S2)
.....

1.1 Größe von Atomen

Atome weisen etwa eine Größe von 10^{-10} m im Radius vor, was wir folgend auf die Einheit *Angstrom* normieren werden: $1 \text{ \AA} := 10^{-10} \text{ m}$. Zum Vergleich: Das Wasserstoffatom weist einen Radius von 0.5 \AA auf, Magnesium einen von 1.6 \AA und Caesium 2.98 \AA .

1.2 Typische Bestimmung der Größe eines Atoms

Grobe Abschätzung. Für *reale Gase* gilt die sogenannte *Van-der-Waals-Gleichung* der Form

$$\left(p + \frac{a}{V_m^2}\right) \cdot (V_m - b) = RT,$$

wobei a den *Binnendruck* und b das *Kovolumen* darstellen. Aus einem pV Diagramm lässt sich dann die Konstante b bestimmen und die Approximation $b \approx N_A \cdot V_A$ liefert die gewünschten Größen.

Beugung von Röntgenstrahlen an Kristallen. Das Ziel der Beugung ist zunächst die Bestimmung der oben erwähnten Gitterkonstanten d . Man benötigt hierzu Röntgenstrahlen, gewonnen durch (i) eine Röntgenröhre, mit dem Nachteil der charakteristischen Linien, welche berücksichtigt werden müssen, oder (ii) die Synchrotronstrahlung. Diese werden auf einen *Einkristall* gelenkt, welcher durch eine *periodische, durchgehende äquidistante* Anordnung von Atomen als ein *Festkörper* charakterisiert wird. Durch diese Anordnung wird eine Ebenenstruktur initialisiert, welche insbesondere nicht eindeutig wählbar ist.

Im Experiment wird dann eine Beugungserscheinung ersichtlich sein, siehe [→ AP3: *Beugung am Gitter*]. Im wesentlichen wird hierfür die *Bragg Bedingung* der Form

$$2 \cdot d \cdot \sin(\alpha) = n \cdot \lambda$$

verwendet, wobei α der *Kontaktwinkel* der Strahlung zum Gitter und n die *Beugungsordnung* ist. Der Gitterabstand führt in der obigen Weise auf das gesuchte Atomvolumen V_{Atom} .

Man kann das Experiment auch mit mehreren Verfahren ausführen, wie zB. das *Laue-Verfahren*, das *Bragg-* oder *Drehkristallverfahren* und *Dabysche Scherrer Verfahren*, welches für Pulver und monochromatisches Licht verwendet.

Abbildende Größenbestimmung. Mithilfe eines Lichtmikroskopes lässt sich ein Atom *nicht* auflösen, da es der Abbeschen Theorie über das Auflösungsvermögen widerspricht. Das *Rayleigh-Kriterium* für d ist von der Form

$$d = \frac{\lambda}{n \cdot \sin(\alpha)},$$

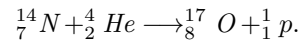
mit n als Brechungsindex und α als Einfallswinkel (der halbe Winkel). Unter dem Link zum Auflösungsvermögen sind minimale sichtbare Längen bei ungefähr 500nm recherchierbar, woraus die Ausgangsaussage folgt.

„Man braucht die mindestens die erste Ordnung, sonst haben wir keine Auflösung mehr.“

.....
 (3) □ Finde heraus, was der Prof. mit dieser Aussage meinte.

Experiment 1. Die Nebelkammer.

Die sogenannte Nebelkammer ist gefüllt mit übersättigtem Wasserdampf, durch welche gewählte Teilchen hindurchfliegen, wie beispielsweise ${}^4_2\text{He}$ Kerne. Ihre Spuren in dem Nebel lassen sich dann optisch durch Schwärzungen nachvollziehen. Die Streifen entstehen durch die Reaktion



Experiment 2. Das Feldemissionsmikroskop.

Das Feldemissions- oder Feldelektronenmikroskop wurde entwickelt von E. Müller im Jahre 1951. Die Wolframspitze weist einen Krümmungsradius von $r \approx 10\text{nm}$ auf, aus dessen Spitze durch eine angelegte Spannung zwischen ihr und dem Schirm Elektronen herausgerissen werden. Diesen Prozess nennt man auch Kalte Elektronen Emission.

VL 3
 14.04.2023,
 11:45

Transmissions-Elektronenmikroskopie Die Methode der Transmissions - Elektronenmikroskopie wurde von E. Ruska 1932 entwickelt. Ihre Funktionsweise beruht auf der Emission von Elektronen und anschließender Beschleunigung in Richtung der Probe, an welcher ein Streumuster entsteht. Die Elektronen werden als Teilchen im Modell aufgefasst, sodaß das Auflösungsvermögen der De-Broglie Wellenlänge

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2 \cdot m_e \cdot E_{kin}}},$$

entspricht, wobei h die Planck-Konstante und p der (nicht relativistische) Impuls des Elektrons ist.

Rasterelektronenmikroskopie Die Methode der Rasterelektronenmikroskopie rastert ein Muster der Elektronenstrahlung über das zu mikroskopierende Objekt, welches selbstgewählt ist. Ein Sonderfall dieser ist die Rastertunnelmikroskopie (entworfen bei IBM in Zürich), bei welcher keine Elektronen verwendet werden, sondern die Elektrode sehr nahe (approx. 2\AA) an das zu untersuchende Objekt herangebracht wird. Hierdurch entsteht ein sogenannter *Tunnelstrom*, welcher eine Proportionalität $I \propto \exp(-d)$ vorweist, sodaß $-\ln(I) \propto d$ der Abstand zur Probe ist. Die Rastertunnelmikroskopie ist somit eine Methode zur Messung der Abstände zwischen Probe und Elektrode. Die Auflösung ist dabei

lateral: 0.05\AA vertikal: 1pm .

.....
☐ Recherchiere das IBM Logo aus Atomen gebastelt. Wie groß ist das Logo? Wie wurde das Logo zurechtgeschoben? (S4)

1.3 Definition des Atomradius

Misst man mit verschiedenen Methoden dasselbe Atom, erhält man verschiedene Radien und damit Atomgrößen. Die Messmethoden sind also bezüglich des Atomradius nicht eindeutig! Atome sind also keine harten Kugeln im Sinne der Vorstellung, sondern haben ein *Wechselwirkungspotential* (auch Lennard-Jones-Potential) der Form

$$V := \left(\frac{a}{r^{12}} - \frac{b}{r^6} \right)_{r \in \mathbb{R}_{\geq 0}},$$

welches mit verschiedenen Messmethoden zu verschiedenen Radien registriert wird.

(§5) □ Leite das Potential V her. Was ist die Bedeutung der Parameter a und b ?

VL 4
17.04.2023,
11:45

Den Atomradius setzt man nach dem Potential beispielsweise auf $r_m := (2a/b)^{1/b}$ als $\text{argmin}(V)$ oder auch $r_0 = ((a/b)^{1/b})$ als nächste Nullstelle zu $r = 0$ aus $V(r_0) = 0$.

1.4 Der elektrische Aufbau der Atome, das Elektron

Entdeckung der Kanalstrahlen, Ionen

Der Physiker E. Goldstein (1886) entdeckte die sogenannten *Kanalstrahlen*, neuer genannt auch Ionenstrahlung. Sie dienen der Untersuchung der Gasentladung. Die Funktionsweise der Kanalstrahlen ist wie folgt: Die Ionen werden per elektrischem Feld beschleunigt und zur Kathode gelenkt. Sie treten durch die Löcher (auch Defektelektronen) in der Kathode aufgrund ihrer Massenträgheit hindurch, was in Form von Leuchterscheinungen erkennbar ist. Man kann durch dieses Verfahren auf das Verhältnis e/m schließen.

Entdeckung der Kathodenstrahlen, Elektronen

Über eine Weiterentwicklung der Vakuumtechnologie im Allgemeinen wird es möglich, sogar Elektronenstrahlen zu erzeugen. Dies geschieht in der sogenannten *Kathodenstrahlröhre*:

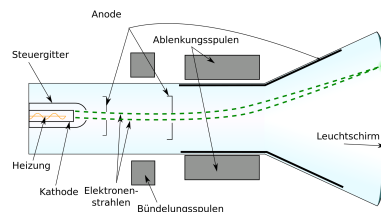


Abbildung 1: Schematischer Aufbau der Kathodenstrahlröhre.

[→ Live-Versuch] Es findet nach der Erzeugung des Elektronenstrahls also eine Ablenkung desselben durch ein elektromagnetisches Feld vor. Die Versuche gehen auf den Physiker J. J. Thomson zurück, welcher 1897 die erste Kathodenstrahlröhre baute. Das Massenverhältnis m_e/m_p lautet in diesem Fall

$$\frac{m_{Ion}}{e} \approx 10^{-4}.$$

.....
☐ Suche nach einer Formel zur konkreten Berechnung auf Grundlage der Versuchsbedingungen. (§6)

Masse des Elektrons

Die Bestimmung von m_e aus den massenspektrometrischen Experimenten erfolgt bei bekannter Ladung durch die einfache Multiplikation $m_e/e \cdot e = m_e$. Der Literaturwert der Elektronenladung ist $e = 1,602 \cdot 10^{-19}\text{C}$, die Masse des Elektrons ist $m_e = 9,109 \cdot 10^{-31}\text{kg}$.

Ladung des Elektrons (Elementarladung)

Von Robert Millikan (1909) wurde ein Experimentvorschlag der Elementarladungsbestimmung vorgeschlagen, das sogenannte Millikan-Experiment [\rightarrow AP3]. Das grobe Vorgehen ist zunächst (i) die Volumenmessung des Tröpfchens, (ii) die Kraftberücksichtigung von Schwerkraft $F_g = m \cdot g$, der Reibung $F_R = 6\pi \cdot \eta \cdot r \cdot v$ und der Auftriebskraft $F_A = V \cdot \rho \cdot g$, wodurch der Teilchenradius

$$r = \left(\frac{9 \cdot \eta \cdot v}{2 \cdot g \cdot (\rho_{\text{Öl}} - \rho_{\text{Luft}})} \right)^{\frac{1}{2}} \implies m = \frac{4}{3} \pi r^3 \cdot \rho_{\text{Öl}}$$

folgt. Die Spannung zwischen den Kondensatorplatten liefert die Feldstärke $E = U/d$, welche genau so justiert wird, daß das Teilchen zu schweben beginnt. Das Kräftegleichgewicht liefert dann das Ergebnis

$$n \cdot e = \frac{\frac{4}{3} \pi r^3 \cdot g \cdot (\rho_{\text{Öl}} - \rho_{\text{Luft}})}{E}.$$

Hinzukommende Röntgenstrahlung ändert nun schließlich die Tröpfchenladung in Stufen $\Delta q = n \cdot e$, wodurch die Existenz der Elementarladung e bewiesen werden kann [\rightarrow Ionisierende Strahlung].

.....
☐ Führe die angedeutete Rechnung konkret durch. (§7)

Weitere Eigenschaften des Elektrons

Der Eigendrehimpuls (Spin). Der Spin kommt in Größen von $\hbar/2$ vor. Er ist ein Quantenzustand, der sich nicht addieren läßt. Nach dem *Elementarteilchenmodell* sind Elektronen Teil der Gruppe *Fermionen*, also Teilchen mit halbzahlicher Spinzahl, und in der Untergruppe der Leptonen. Teilchen mit ganzzahliger Spinzahl heißen *Bosonen*.

Fermi-Dirac-Statistik. Die *Fermi-Dirac-Statistik* beschreibt die Wahrscheinlichkeit, daß ein Fermion in einem bestimmten Zustand ist. Sie ist definiert durch

Pauli-Prinzip. Das *Pauli-Prinzip* besagt, daß zwei Fermionen nicht denselben Quantenzustand haben können.

Magnetisches Moment. Ein Elektron weist ein *Magnetisches Moment* auf, welches sich aus der Spin-Bewegung ergibt. Es ist definiert durch

$$\mu_{\mathbf{S}} = -g_S \cdot \frac{e}{2 \cdot m_e} \cdot \mathbf{S}.$$

.....
 (§8) □ Recherchiere in einer Mußestunde die genannten Begriffe und versuche, sie zu verstehen.

1.5 Bestimmung der Ladungsverteilung im Atom (Streuexperimente)

Aus den vorgehenden Kapiteln kann man entnehmen, daß Atomen aus $z \in \mathbb{N}_0$ Elektronen der Ladung $-z \cdot |e|$ und z positiven Ladungen der Ladung $z \cdot |e|$ konstruiert sind. Hieraus resultiert die *elektrische Neutralität* des Atoms.

Das Thomson'sche Atommodell

Das Thomson'sche Atommodell (auch Rosinenkuchenmodell) besagt, daß die Ladungen über das gesamte Atomvolumen verteilt sind. Die Ladungsdichte ρ ist also konstant und gleich der Ladung pro Volumeneinheit.

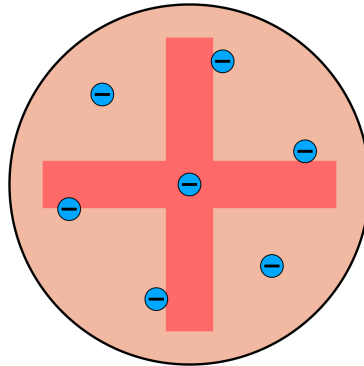


Abbildung 2: Das Thomson'sche Atommodell.

Die Bestimmung des inneren Atomaufbaus erfolgt durch die Streuung von α (${}^4_2\text{He}^{2+}$) Teilchen und ihrer Bahnanalyse.

Das Rutherford-Experiment

Das Experiment entstammt der Idee der drei Physiker E. Marsden, H. Geiger und E. Rutherford. Der Versuchsaufbau ist von der Form

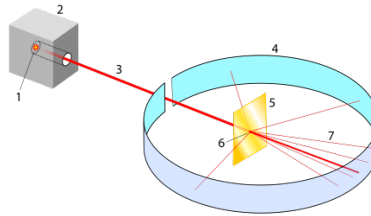


Abbildung 3: Das Rutherford-Experiment.

Mit einem *Szintillator* (oder technisch weiter fortgeschrittenen Messgeräten) wird Anzahl der Teilchenregistrierungen in Form von Blitzen in Abhängigkeit des Winkels θ gemessen, woraus sich zeitlich die Zählrate $N(\theta)$ ergibt.

.....
☐ Recherchiere den *Rutherfordschen Streuungsquerschnitt* und versuche, ihn zu verstehen. (S.9)

Experiment 3. *Rutherford-Experiment.*

Wir führen das *Rutherford-Experiment* durch und erhalten:

| Registrierungen | Winkel | Zeit | Folie |
|-----------------|--------|------|-------|
| 1468cps | 0° | 20s | ohne |
| 0 cps | 15° | 20s | ohne |
| 1369 cps | 0° | 20s | mit |
| 4 cps | 15° | 20s | mit |

Tabelle 1: Vergleich Messung mit und ohne Folie.

(Einheit „cps“ ist counts per second)

VL 5
 19.04.2023,
 08:15

Wir wollen nun die Ergebnisse des vorigen Experimentes festhalten:

- 99.99% der eingestrahnten α Teilchen fliegen geradlinig durch die Au-Folie hindurch. Die Folie ist für die Teilchen also annähernd transparent.
- Der α Teilchenstrom wird leicht aufgefächert. Dies ist mit der erwarteten $e^- - \alpha$ Teilchenwechselwirkung vereinbar.
- Es wird auch die Rückwertsstreuung (bei den übrigen 0.01% der α Teilchen) beobachtet.
- Die zurückgestreuten α Teilchen haben keinen Energieverlust erfahren.
- Die Intensität der Rückwertsstreuung ist proportional zur Foliendicke (/ -stärke).
- Die Winkelverteilung der Zählraten weist die Proportionalität

$$N(\theta) \propto \frac{1}{\sin(\theta/2)^4}$$

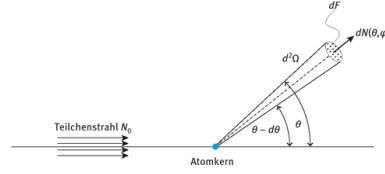


Abbildung 4: Darstellung des schematischen Streuprozesses aus [1].

auf.

Aus unseren Beobachtungen können wir das *Rutherford-Modell* ableiten:

- (i) Atome sind aus Kern und Hülle aufgebaut.
- (ii) Die Kerne enthalten den Großteil der Atommasse und sind positiv geladen, auf $\approx 40\text{fm}$ konzentriert.
- (iii) Die Hüllen enthalten Elektronen, verteilt über das Restvolumen des Atoms.
- (iv) Das *Coulomb-Gesetz* behält auf diesen Größenordnungen seine Gültigkeit.

Die Rutherfordsche Streuformel Wir wollen nun die Streuformel für die Rutherford-Experimente herleiten. Wir betrachten zunächst die Streuung eines α Teilchens auf ein Atom. Die Streuung ist in der Regel sehr klein, sodass wir die Streuung als eine Streuung auf den Atomkern betrachten können. Unser Ziel ist $N(\theta)$. Betrachte das Schema: Für die Coulombkraft erhalten wir zunächst

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{2 \cdot q(Ze)^2}{r^3} \cdot \mathbf{r},$$

wobei die Funktion q die Ladung von Ze zuordnet¹. Die Kraftaufspaltung in orthogonale und parallele Flugrichtung ergibt

$$F_{\perp} = \|F\|_2 \cdot \sin(\varphi) \quad F_{\parallel} = \|F\|_2 \cdot \cos(\varphi).$$

Für den Drehimpuls erhalten wir in *Zylinderkoordinaten* die Gleichungskette

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_{r(t)} &= \mathbf{r}(t) \times \mathbf{p}(t) = \mathbf{r}(t) \times m \cdot \mathbf{r}'(t) \\ &= m \cdot \|\mathbf{r}(t)\|_2^2 \cdot \varphi'(t) \cdot (\mathbf{e}(r(t)) \times \mathbf{e}(\varphi(t))) \\ &=: m \cdot \|\mathbf{r}(t)\|_2^2 \cdot \varphi'(t) \cdot \mathbf{e}_3. \end{aligned}$$

Identifiziere nun $1/r^2 = \varphi'(t)/(v_0 \cdot b)$ mit $v_0 := \|\mathbf{r}'(0)\|_2$ und b als Bahnabstand zur Mittelachse durch den Kern [→ Abb. 4]. Wir erhalten für das Coulombgesetz

$$F_{\perp} = \frac{2 \cdot q(Ze)^2}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\varphi'(t)}{v_0 \cdot b} \cdot \sin(\varphi(t)) = m \cdot \|r''(t)\|_2$$

und durch Integration

$$b(\theta) = \frac{2 \cdot q(Ze)^2}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{m \cdot v_0^2} \cdot \cot\left(\frac{\theta}{2}\right).$$

¹Sie hätte wohl eine Form $q := (E \mapsto E_q)_{E \in TOE}$, wobei TOE eine Menge von Tupeln sei, welche zu allen Elementen des Periodensystems ihre Eigenschaften als Einträge zusammenfasst.

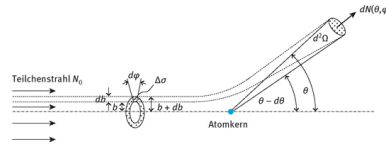


Abbildung 5: Erweiterung der Abbildung 4 um das Ursprungsraumelement [1].

.....
☐ Fülle die Lücken der Rechnung auf. Was kommt beim parallelen Fall heraus? (S.10)

Bei unserem Experiment [\rightarrow Exp. 3] haben wir die *Anzahl der Ereignisse* auf dem Leuchtschirm gemessen. Diese geschahen alle in einem gewissen Raumwinkelbereich $d\Omega$ [\rightarrow Abb. 4], in welchem der Detektor gemessen hat. Wir fragen uns nun, aus welcher Richtung die detektierten Teilchen kommen, was uns auf ein paarweise definiertes Raumelement vor dem Atom bringt: Die gemittelte Anzahl der Teilchen dN in diesem Raumelement $d\Omega$ ist augenscheinlich von db ab, sodaß wir auf den schematischen Zusammenhang

$$dN = \text{Anzahl der } \alpha \text{ Teilchen} \cdot \frac{dB \cdot \text{Streuzentrenanzahl}}{\text{Gesamtfläche}},$$

wobei wir $dB := \pi \cdot (b^2 - (b - db)^2)$ als Trefferfläche und N_t als Streuzentrenanzahl (proportional zur Anzahl der Atome in der Ag-Folie) festhalten. Die Gesamtfläche F ist diejenige der Goldfolie. Daraus ergibt sich

$$dN = N_\alpha \cdot dB \cdot \frac{N_t}{F}$$

und „differenziert“ nach $d\Omega$ insgesamt

$$\frac{dN}{d\Omega} = N_\alpha \cdot \frac{N_t}{F} \cdot \frac{dB}{d\Omega},$$

wobei wir $dB/d\Omega$ als den *differentiellen Streuquerschnitt* definieren.

.....
☐ Kläre die Bedeutung des angedeuteten Differenzierens. Wie ist der Prozess sauber definierbar? (S.11)

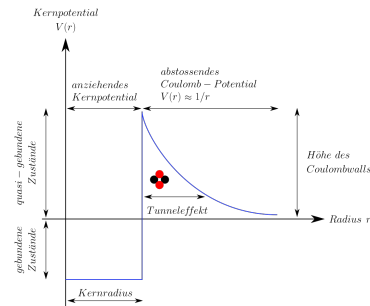
☐ Verifiziere die alternative Definition $dB := b \cdot db \cdot d\varphi$. Verifiziere auch $d\Omega = \sin(\theta) \cdot d\theta \cdot d\varphi$. (S.12)

Die Streuformel für die Rutherford-Experimente lautet nun

$$\frac{dB}{d\Omega} = \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q(\text{Zr}) \cdot e^2}{m \cdot v_0^2} \right)^2 \cdot \frac{1}{\sin(\theta/2)^4}.$$

Man kann nun noch $E_0 = m \cdot v_0^2$ identifizieren.

Der Kernradius Für schnelle α Teilchen konnte jedoch experimentell bewiesen werden, daß die Coulombkraft nicht mehr allein die Bahn des gestreuten Teilchens beschreiben kann: Es muss eine weitere Wechselwirkung mit dem Atomkern geben, wie sich rausstellen wird die sogenannte *attraktive Kernkraft*.



(a) Der Tunnelprozess und die Kernkraft.

VL 6
 20.04.2023,
 10:00

Aufbau von Atomen, Isotopie Zusammenfassend haben wir festgestellt, daß Atome aus Elektronen (e^-) in der Hülle und Protonen (p^+) im Kern bestehen müssen. Noch nicht erwähnt sind die sogenannten *Neutronen* (n^0), welche sich ebenfalls im Kern ansiedeln. Wir definieren nun den Begriff *Isotop*, welcher ein Atom (also Element) beschreibt, bei welchem sich die Anzahl der Neutronen ändert, jedoch die Protonenanzahl gleich bleibt. Beispiel ist der Wasserstoff (H), welcher sich in *Protium* (^1_1H), *Deuterium* (^2_1H) und *Tritium* (^3_1H) unterteilt, bei welchen die letzten beiden Isotope natürlich eher selten anzutreffen sind.

1.6 Entwicklung der Quantenmechanik

Wichtige Experimente waren

- Das *Doppelspalterexperiment* von Thomas Young (1801), welches den Welle-Teilchen-Dualismus fundierte.
- Die *Schwarzkörperstrahlung* von Max Planck (1900), welche die Quantisierung der Strahlung beschrieb.
- Der *photoelektrische Effekt* von Albert Einstein (1905), welcher die Quantisierung der Photonen beschrieb.
- Der *Compton-Effekt* von Compton-Effekt (1923), welcher die Lichtstreuung an freien Elektronen beschrieb (Welle-Teilchen-Dualismus).
- Die *De Broglie-Wellenlänge* von Louis de Broglie (1924), welche die Wellenlänge von Teilchen/Materie beschrieb.
- Die *Spektrallinien* von J. Balmer (1885), welche die Quantisierung der Atomenergie durch Absorption und Emission von Licht beschrieb. Dies führte zur Entwicklung des Atommodells durch Niels Bohr (1913).

1.6.1 Schwarzkörperstrahlung

Der schwarze Körper / Hohlraumstrahlung Interessant ist die quantitative Beschreibung dieser Phänomene, z.B. durch die Intensitätsverteilung im Spektrum eines Körpers.

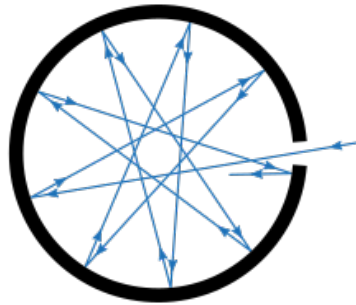


Abbildung 7: Schema eines Schwarzkörpers [3].

Der *schwarze Körper* ist ein Körper mit einer Oberfläche, welche alle Strahlung absorbiert, d.h. der Absorptionskoeffizient des Körpers ist $A = 1$, woraus mit $A + R = 1$ wiederum folgt $R = 0$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$. Somit muss ein Körper, welcher alle Strahlung absorbiert, auch alle Strahlung emittieren, und dies proportional zu seiner Temperatur. Dies ist die Grundlage des *Planckschen Strahlungsgesetz*. Anschaulich passiert mit einfallender Strahlung auf einen Schwarzkörper folgendes: Die Intensitätsverteilung der austretenden Strahlung ist identisch mit derjenigen des sich im Hohlraum befindlichen EM-Felder. Das spektrale Emissionsvermögen eines schwarzen Körpers ist also identisch mit der spektralen Strahlungsdichte der Hohlraumstrahlung.

.....
☐ Recherchiere die *Dyson-Sphäre*. Handelt es sich um einen Schwarzkörper?

(S13)

Experiment 4. Die Glühbirne.

Wir starten bei 6W. Das Licht einer Glühbirne wird spektral zerlegt. Ein Detektor misst die Strahlungsintensität und abhängig von der Wellenlänge. Wir sehen einen Peak und Maximum im Infraroten Bereich. Dies ist die Infrarotstrahlung der Glühbirne.

Nun ändern wir die Leistung auf 3W; sofort wird das sichtbare Spektrum schwächer auf dem Schirm abgebildet. Die erhaltene Intensitätskurve ist relativ zu der 6W Kurve nach oben verschoben. Wir sehen, daß der Peak (nach rechts, ins Infrarote) verschoben ist. (Das Experiment wurde aufgrund zu flacher Kurve hier abgebrochen.) Hinweis: Simuliere das Experiment auf der FU-Berlin Website.

Aus klassischer Sicht ergibt sich für die spektrale Energiedichte

$$u(\nu, T) \cdot d\nu = \frac{8 \cdot \pi}{c^3} \cdot \nu^2 \cdot k_B \cdot T \cdot d\nu,$$

auch bekannt als *Rayleigh-Jeans-Gesetz*. Für $\nu \rightarrow \infty$ erfolgt eine sogenannte *Ultraviolett-katastrophe*. Dieses Verhalten ist jedoch nur bei klassischer Strahlung zu beobachten. Das Modell weist eine gute Übereinstimmung mit der Realität für kleine Frequenzen auf.

.....

Abbildung 8: Schema der Emission eines Photons durch eine Atomanregung [4].

- (14) □ Recherchiere den *Gleichverteilungssatz*. Wie fließt er in das Rayleigh-Jeans-Gesetz ein?

Plancksches Strahlungsgesetz Max Planck leitete die korrekte Strahlungsformel für das beobachtete Phänomen und Diskrepanz her. Wir konzentrieren uns nachfolgend jedoch auf die Herleitung nach Einstein.

Annahmen. Wir müssen annehmen, daß Licht aus Teilchen besteht, die sogenannten Photonen, und damit quantisiert ist. Weiter nehmen wir an, daß Atome diskrete Energieniveaus besitzen müssen. Es gibt insbesondere *nur* zwei, welche wir E_1 und E_2 mit $E_2 > E_1$ nennen wollen.

Damit kommen zwei Prozesse bei der Wechselwirkung mit der elektromagnetischen Strahlung infrage: (i) Absorption und (ii) Reflexion.

- (i) Bei der Absorption eines Photons mit Energie $E = E_2 - E_1 = h \cdot \nu$ wird das Atom von E_1 auf E_2 angeregt².
- (ii) Im angeregten Zustand kann das Atom *spontan* das Energieminimum anstreben und ein Photon der Energie $E_2 - E_1 = h \cdot \nu$ emittieren.

Anschaulich sind die Prozesse wie folgt, wobei noch die *induzierte Emission* als Kombination beigelegt wurde: In einem Atomsystem mit $N \in \mathbb{N}$ Atomen haben wir N_1 Atome in Zustand E_1 und N_2 Atome in Zustand E_2 . Für die Prozesse gilt dann:

- (i) Für ein Atom in Zustand E_1 gilt die Änderung

$$dN_{12} = \int B_{12} \cdot u(\nu, T) \cdot N_1 \lambda(dt),$$

wobei B_{12} ein *Einstein Koeffizient* ist, welcher die Übergangswahrscheinlichkeit angibt in der Einheit $[1/(s \cdot J/m^3)]$ mit E als Energiedichteinheit.

- (ii) Für ein Atom in Zustand E_2 gilt die Änderung

$$dN_{E,21} = \int A_{21} \cdot N_2 \lambda(dt),$$

mit A_{21} als *Einstein Koeffizient*.

Die induzierte Emission folgt dem Zusammenhang $dN_{I,21} = \int B_{21} \cdot u(\nu, t) \cdot N_2 \lambda(dt)$. Im thermischen Gleichgewicht gilt

$$dN_{12} = dN_{E,21} + dN_{I,21},$$

²Es ist $h = 6.62 \cdot 10^{-34} \text{Js}$ die *Planck-Konstante* und $\hbar := h/(2 \cdot \pi)$ die reduzierte Variante.

also nach Definitionen

$$\frac{N_2}{N_1} = \frac{B_{12} \cdot u(\nu, t)}{A_{21} + B_{21} \cdot u(\nu, t)} \Leftrightarrow \frac{N_2}{N_1} = \frac{(E_2/(k_B \cdot T))}{\exp(E_1/(k_B \cdot T))},$$

bei welchen der Zähler und Nenner sogenannte *Boltzmann-Faktoren* sind. Mit $E_2 - E_1 = h \cdot \nu$ folgt dann insgesamt

$$u(\nu, t) = \frac{A_{21}}{B_{12} \cdot \exp(h \cdot \nu/(k_B \cdot T)) - B_{21}}.$$

- Für $T \rightarrow \infty$ muss $u \rightarrow \infty$ gelten, da sonst die Emission nicht mehr möglich wäre. Dies folgt aus der Definition von u . Weiter folgt mit „physikalischer Argumentation“ $B_{12} = B_{21}$.
- Für $h \cdot \nu \ll k_B \cdot T$ (das R.J. Gesetz ist hier gut genug) folgt

$$\exp(h \cdot \nu/(k_B \cdot T)) \approx 1 + \frac{h \cdot \nu}{k_B \cdot T} + \text{TAF}_{f, x_0}(x)$$

mit passend gewählten f, x_0, x durch Taylorapproximation. Daher gilt

$$u(\nu, T) = \frac{A_{21}}{B_{12}} \cdot \frac{k_B \cdot T}{h \cdot \nu}$$

mit $A_{21}/B_{12} = 8\pi h \cdot \nu^3/c_0^3$, sodaß

$$u(\nu, T) = \frac{8\pi h \cdot \nu^3}{c_0^3} \cdot \frac{1}{\exp(h \cdot \nu/(k_B \cdot T)) - 1}.$$

Es ist dann $u(\nu, T) \cdot d\nu$ die spektrale Energiedichte im Frequenzbereich $d\nu$ pro Volumen.

- Betrachte die gesamte Energiedichte

$$U(T) = \int u(\nu, T) \lambda|_{\mathbb{R}_{\geq 0}}(d\nu) = \frac{8\pi h}{c_0^3} \cdot \int \frac{\nu^3}{\exp(h \cdot \nu/(k_B \cdot T)) - 1} \lambda|_{\mathbb{R}_{\geq 0}}(d\nu)$$

und mit Substitution $x = h\nu/(k_B \cdot T)$ schließlich

$$U(T) = \frac{8\pi h}{c_0^3} \cdot \left(\frac{k_B \cdot T}{h}\right)^4 \cdot \int \frac{x^3}{\exp(x) - 1} \lambda|_{\mathbb{R}_{\geq 0}}(dx) = \frac{8 \cdot \pi^5 k_B^3}{15 \cdot c_0^3 \cdot h^3} \cdot T^4,$$

auch bekannt als das *Stephan-Boltzmann-Gesetz*.

-
- Führe die angedeutete Substitution in U in der Herleitung des Stephan-Boltzmann-Gesetzes durch und zeige, dass die Energie pro Volumen $U(T)$ proportional zu T^4 ist. Benenne den Faktor durch σ_B . (S15)
- Wechsle die Eingabe von U von T nach λ , indem du U mit passendem Φ verkettest. (S16)
-

Für das Maximum der Funktion U muss zunächst $\text{kritP}(U)$ durch die Gleichung $dU(\lambda)(h) = 0_{\mathbb{R}}$ bestimmt werden. Lösungen und damit Einträge von $\text{argmax}(U)$ sind $x = (h \cdot c_0)/(k_B \cdot T \cdot$

λ) und (numerisch bestimmt) $x = 5 \cdot (1 - \exp(x))$. Die numerische Lösung ist $x \approx 4.965114$. Umstellen liefert sodann

$$T \cdot \lambda_{max} = \frac{h \cdot c_0}{4.965114 \cdot k_B} \approx 2.998 \cdot 10^{-3} \text{ m K}.$$

-
- (S17) ☐ Recherchiere das *Wiensche-Verschiebungsgesetz*. Wie hängt es mit der skizzierten Maximumsuche zusammen?
- (S18) ☐ Folge der Anweisung oben. Bestimme $dU(\lambda)(h)$ und löse $dU(\lambda)(h) = 0$. Verifiziere die Lösung $x = (h \cdot c_0)/(k_B \cdot T \cdot \lambda)$.
- (S19) ☐ Bestimme numerisch die Lösung der Gleichung.
-

Literatur

- [1] Degryer (2018). *Der differentielle Wirkungsquerschnitt – die Rutherfordsche Streuformel*. URL: <https://www.degruyter.com/database/PHYSIK0/entry/physiko.21.45/html>. Abgerufen am 19.04.2023.
- [2] Wikipedia (2023). *Kernpotential*. URL: <https://de.wikipedia.org/wiki/Kernpotential>. Abgerufen am 19.04.2023.
- [3] Wikipedia (2023). *Black body*. URL: https://commons.wikimedia.org/wiki/Category:Black_body?uselang=de, abgerufen am 20.04.2023.
- [4] Universität Ulm (?). *Ableitung der Planckschen Strahlungsformel nach Einstein*. URL: https://www.uni-ulm.de/fileadmin/website_uni_ulm/nawi.inst.251/Didactics/quantenchemie/html/AbleitF.html, abgerufen am 20.04.2023.