

# Integrierter Kurs IV

Experimentalphysik II  
Tom Folgmann

19. April 2023

Atommassenbestimmung

**Röntgenbeugung an Kristallen.** Man kennt zunächst die *Gitterkonstante*  $d \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ , also den *Abstand der Atome innerhalb des Gitters*. Damit ist das Atomvolumen gerade  $d^3 = V_{Atom}$  und schließlich

$$N_A \cdot V_{Atom} = \frac{M}{\rho(M)},$$

wobei  $M$  die *Molekülmasse* und  $\rho$  eine Dichtefunktion ist.

.....

☐ Recherchiere das „Avogadro-Projekt“ des PTB. (S.1)

.....

**Gaskonstante.** Über die Gaskonstante folgt der Atomradius  $R = N_A \cdot k_B$  mit  $k_B$  als *Boltzmann-Konstante*.

**Massenspektroskopie.** Hier wird über die Atomablenkung die Masse bestimmt.

.....

☐ Recherchiere das genaue Vorgehen. (S.2)

.....

## 0.1 Größe von Atomen

Atome weisen etwa eine Größe von  $10^{-10}$  m im Radius vor, was wir folgend auf die Einheit *Angstrom* normieren werden:  $1 \text{ \AA} := 10^{-10} \text{ m}$ . Zum Vergleich: Das Wasserstoffatom weist einen Radius von  $0.5 \text{ \AA}$  auf, Magnesium einen von  $1.6 \text{ \AA}$  und Caesium  $2.98 \text{ \AA}$ .

## 0.2 Typische Bestimmung der Größe eines Atoms

**Grobe Abschätzung.** Für *reale Gase* gilt die sogenannte *Van-der-Waals-Gleichung* der Form

$$\left(p + \frac{a}{V_m^2}\right) \cdot (V_m - b) = RT,$$

wobei  $a$  den *Binnendruck* und  $b$  das *Kovolumen* darstellen. Aus einem  $pV$  Diagramm lässt sich dann die Konstante  $b$  bestimmen und die Approximation  $b \approx N_A \cdot V_A$  liefert die gewünschten Größen.

**Beugung von Röntgenstrahlen an Kristallen.** Das Ziel der Beugung ist zunächst die Bestimmung der oben erwähnten Gitterkonstanten  $d$ . Man benötigt hierzu Röntgenstrahlen, gewonnen durch (i) eine Röntgenröhre, mit dem Nachteil der charakteristischen Linien, welche berücksichtigt werden müssen, oder (ii) die Synchrotronstrahlung. Diese werden auf einen *Einkristall* gelenkt, welcher durch eine *periodische, durchgehende äquidistante* Anordnung von Atomen als ein *Festkörper* charakterisiert wird. Durch diese Anordnung wird eine Ebenenstruktur initialisiert, welche insbesondere nicht eindeutig wählbar ist.

Im Experiment wird dann eine Beugungserscheinung ersichtlich sein, siehe [→ AP3: *Beugung am Gitter*]. Im wesentlichen wird hierfür die *Bragg Bedingung* der Form

$$2 \cdot d \cdot \sin(\alpha) = n \cdot \lambda$$

verwendet, wobei  $\alpha$  der *Kontaktwinkel* der Strahlung zum Gitter und  $n$  die *Beugungsordnung* ist. Der Gitterabstand führt in der obigen Weise auf das gesuchte Atomvolumen  $V_{\text{Atom}}$ .

Man kann das Experiment auch mit mehreren Verfahren ausführen, wie zB. das *Laue-Verfahren*, das *Bragg-* oder *Drehkristallverfahren* und *Dabye Scherrer Verfahren*, welches für Pulver und monochromatisches Licht verwendet.

**Abbildende Größenbestimmung.** Mithilfe eines Lichtmikroskopes lässt sich ein Atom *nicht* auflösen, da es der Abbeschen Theorie über das Auflösungsvermögen widerspricht. Das *Rayleigh-Kriterium* für  $d$  ist von der Form

$$d = \frac{\lambda}{n \cdot \sin(\alpha)},$$

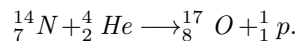
mit  $n$  als Brechungsindex und  $\alpha$  als Einfallswinkel (der halbe Winkel). Unter dem Link zum Auflösungsvermögen sind minimale sichtbare Längen bei ungefähr 500nm recherchierbar, woraus die Ausgangsaussage folgt.

„Man braucht die mindestens die erste Ordnung, sonst haben wir keine Auflösung mehr.“

.....  
 (S3) ☐ Finde heraus, was der Prof. mit dieser Aussage meinte.  
 .....

### Experiment 1. Die Nebelkammer.

Die sogenannte Nebelkammer ist gefüllt mit übersättigtem Wasserdampf, durch welche gewählte Teilchen hindurchfliegen, wie beispielsweise  ${}^4_2\text{He}$  Kerne. Ihre Spuren in dem Nebel lassen sich dann optisch durch Schwärzungen nachvollziehen. Die Streifen entstehen durch die Reaktion



## Experiment 2. Das Feldemissionsmikroskop.

Das Feldemissions- oder Feldelektronenmikroskop wurde entwickelt von E. Müller im Jahre 1951. Die Wolframspitze weist einen Krümmungsradius von  $r \approx 10\text{nm}$  auf, aus dessen Spitze durch eine angelegte Spannung zwischen ihr und dem Schirm Elektronen herausgerissen werden. Diesen Prozess nennt man auch Kalte Elektronen Emission.

**VL 3**  
14.04.2023,  
11:45

**Transmissions-Elektronenmikroskopie** Die Methode der Transmissions - Elektronenmikroskopie wurde von E. Ruska 1932 entwickelt. Ihre Funktionsweise beruht auf der Emission von Elektronen und anschließender Beschleunigung in Richtung der Probe, an welcher ein Streumuster entsteht. Die Elektronen werden als Teilchen im Modell aufgefasst, sodaß das Auflösungsvermögen der De-Broglie Wellenlänge

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2 \cdot m_e \cdot E_{kin}}},$$

entspricht, wobei  $h$  die Planck-Konstante und  $p$  der (nicht relativistische) Impuls des Elektrons ist.

**Rasterelektronenmikroskopie** Die Methode der Rasterelektronenmikroskopie rastert ein Muster der Elektronenstrahlung über das zu mikroskopierende Objekt, welches selbstgewählt ist. Ein Sonderfall dieser ist die Rastertunnelmikroskopie (entworfen bei IBM in Zürich), bei welcher keine Elektronen verwendet werden, sondern die Elektrode sehr nahe (approx.  $2\text{\AA}$ ) an das zu untersuchende Objekt herangebracht wird. Hierdurch entsteht ein sogenannter *Tunnelstrom*, welcher eine Proportionalität  $I \propto \exp(-d)$  vorweist, sodaß  $-\ln(I) \propto d$  der Abstand zur Probe ist. Die Rastertunnelmikroskopie ist somit eine Methode zur Messung der Abstände zwischen Probe und Elektrode. Die Auflösung ist dabei

lateral:  $0.05\text{\AA}$       vertikal:  $1\text{pm}$ .

.....

□ Recherchiere das IBM Logo aus Atomen gebastelt. Wie groß ist das Logo? Wie wurde das Logo zurechtgeschoben? (S.4)

.....

## 0.3 Definition des Atomradius

Misst man mit verschiedenen Methoden dasselbe Atom, erhält man verschiedene Radien und damit Atomgrößen. Die Messmethoden sind also bezüglich des Atomradius nicht eindeutig! Atome sind also keine harten Kugeln im Sinne der Vorstellung, sondern haben ein *Wechselwirkungspotential* (auch Lennard-Jones-Potential) der Form

$$V := \left( \frac{a}{r^{12}} - \frac{b}{r^6} \right)_{r \in \mathbb{R}_{\geq 0}},$$

welches mit verschiedenen Messmethoden zu verschiedenen Radien registriert wird.

- .....
- (§5) □ Leite das Potential  $V$  her. Was ist die Bedeutung der Parameter  $a$  und  $b$ ?
- .....

**VL 4**  
 17.04.2023,  
 11:45

Den Atomradius setzt man nach dem Potential beispielsweise auf  $r_m := (2a/b)^{1/b}$  als  $\arg\min(V)$  oder auch  $r_0 = ((a/b)^{1/b})$  als nächste Nullstelle zu  $r = 0$  aus  $V(r_0) = 0$ .

## 0.4 Der elektrische Aufbau der Atome, das Elektron

### Entdeckung der Kanalstrahlen, Ionen

Der Physiker E. Goldstein (1886) entdeckte die sogenannten *Kanalstrahlen*, neuer genannt auch Ionenstrahlung. Sie dienen der Untersuchung der Gasentladung. Die Funktionsweise der Kanalstrahlen ist wie folgt: Die Ionen werden per elektrischem Feld beschleunigt und zur Kathode gelenkt. Sie treten durch die Löcher (auch Defektelektronen) in der Kathode aufgrund ihrer Massenträgheit hindurch, was in Form von Leuchterscheinungen erkennbar ist. Man kann durch dieses Verfahren auf das Verhältnis  $e/m$  schließen.

### Entdeckung der Kathodenstrahlen, Elektronen

Über eine Weiterentwicklung der Vakuumtechnologie im Allgemeinen wird es möglich, sogar Elektronenstrahlen zu erzeugen. Dies geschieht in der sogenannten *Kathodenstrahlröhre*:

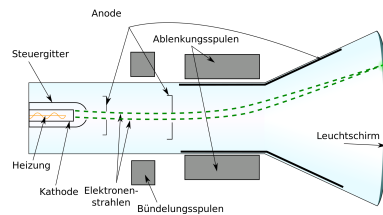


Abbildung 1: Schematischer Aufbau der Kathodenstrahlröhre.

[→ Live-Versuch] Es findet nach der Erzeugung des Elektronenstrahls also eine Ablenkung desselben durch ein elektromagnetisches Feld vor. Die Versuche gehen auf den Physiker J. J. Thomson zurück, welcher 1897 die erste Kathodenstrahlröhre baute. Das Massenverhältnis  $m_e/m_p$  lautet in diesem Fall

$$\frac{m_{Ion}}{e} \approx 10^{-4}.$$

- .....
- (§6) □ Suche nach einer Formel zur konkreten Berechnung auf Grundlage der Versuchsbedingungen.
- .....

### Masse des Elektrons

Die Bestimmung von  $m_e$  aus den massenspektrometrischen Experimenten erfolgt bei bekannter Ladung durch die einfache Multiplikation  $m_e/e \cdot e = m_e$ . Der Literaturwert der

Elektronenladung ist  $e = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{C}$ , die Masse des Elektrons ist  $m_e = 9,109 \cdot 10^{-31} \text{kg}$ .

### Ladung des Elektrons (Elementarladung)

Von Robert Millikan (1909) wurde ein Experimentvorschlag der Elementarladungsbestimmung vorgeschlagen, das sogenannte Millikan-Experiment [ $\rightarrow$  AP3]. Das grobe Vorgehen ist zunächst (i) die Volumenmessung des Tröpfchens, (ii) die Kraftberücksichtigung von Schwerkraft  $F_g = m \cdot g$ , der Reibung  $F_R = 6\pi \cdot \eta \cdot r \cdot v$  und der Auftriebskraft  $F_A = V \cdot \rho \cdot g$ , wodurch der Teilchenradius

$$r = \left( \frac{9 \cdot \eta \cdot v}{2 \cdot g \cdot (\rho_{\text{Öl}} - \rho_{\text{Luft}})} \right)^{\frac{1}{2}} \implies m = \frac{4}{3} \pi r^3 \cdot \rho_{\text{Öl}}$$

folgt. Die Spannung zwischen den Kondensatorplatten liefert die Feldstärke  $E = U/d$ , welche genau so justiert wird, daß das Teilchen zu schweben beginnt. Das Kräftegleichgewicht liefert dann das Ergebnis

$$n \cdot e = \frac{\frac{4}{3} \pi r^3 \cdot g \cdot (\rho_{\text{Öl}} - \rho_{\text{Luft}})}{E}.$$

Hinzukommende Röntgenstrahlung ändert nun schließlich die Tröpfchenladung in Stufen  $\Delta q = n \cdot e$ , wodurch die Existenz der Elementarladung  $e$  bewiesen werden kann [ $\rightarrow$  Ionisierende Strahlung].

.....

□ Führe die angedeutete Rechnung konkret durch.

(S7)

.....

### Weitere Eigenschaften des Elektrons

**Der Eigendrehimpuls (Spin).** Der Spin kommt in Größen von  $\hbar/2$  vor. Er ist ein Quantenzustand, der sich nicht addieren läßt. Nach dem *Elementarteilchenmodell* sind Elektronen Teil der Gruppe *Fermionen*, also Teilchen mit halbzahlicher Spinzahl, und in der Untergruppe der Leptonen. Teilchen mit ganzzahliger Spinzahl heißen *Bosonen*.

**Fermi-Dirac-Statistik.** Die *Fermi-Dirac-Statistik* beschreibt die Wahrscheinlichkeit, daß ein Fermion in einem bestimmten Zustand ist. Sie ist definiert durch

**Pauli-Prinzip.** Das *Pauli-Prinzip* besagt, daß zwei Fermionen nicht denselben Quantenzustand haben können.

**Magnetisches Moment.** Ein Elektron weist ein *Magnetisches Moment* auf, welches sich aus der Spin-Bewegung ergibt. Es ist definiert durch

$$\mu_{\mathbf{s}} = -g_S \cdot \frac{e}{2 \cdot m_e} \cdot \mathbf{s}.$$

.....

□ Recherchiere in einer Mußestunde die genannten Begriffe und versuche, sie zu verstehen.

(S8)

.....

## 0.5 Bestimmung der Ladungsverteilung im Atom (Streuexperimente)

Aus den vorgehenden Kapiteln kann man entnehmen, daß Atomen aus  $z \in \mathbb{N}_0$  Elektronen der Ladung  $-z \cdot |e|$  und  $z$  positiven Ladungen der Ladung  $z \cdot |e|$  konstruiert sind. Hieraus resultiert die *elektrische Neutralität* des Atoms.

### Das Thomson'sche Atommodell

Das Thomson'sche Atommodell (auch Rosinenkuchenmodell) besagt, daß die Ladungen über das gesamte Atomvolumen verteilt sind. Die Ladungsdichte  $\rho$  ist also konstant und gleich der Ladung pro Volumeneinheit.

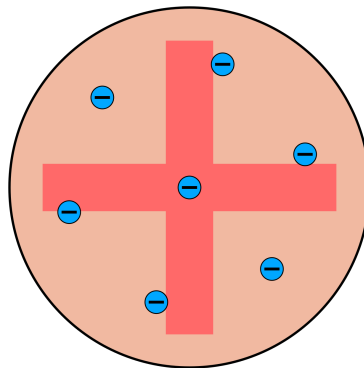


Abbildung 2: Das Thomson'sche Atommodell.

Die Bestimmung des inneren Aufbaus erfolgt durch die Streuung von  $\alpha$  ( ${}^4_2\text{He}^{2+}$ ) Teilchen und ihrer Bahnanalyse.

### Das Rutherford-Experiment

Das Experiment entstammt der Idee der drei Physiker E. Marsden, H. Geiger und E. Rutherford. Der Versuchsaufbau ist von der Form

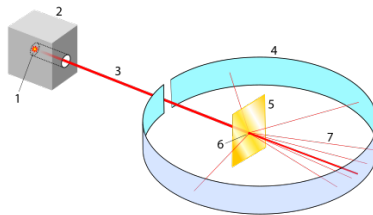


Abbildung 3: Das Rutherford-Experiment.

Mit einem *Szintillator* (oder technisch weiter fortgeschrittenen Messgeräten) wird Anzahl der Teilchenregistrierungen in Form von Blitzen in Abhängigkeit des Winkels  $\theta$  gemessen, woraus sich zeitlich die Zählrate  $N(\theta)$  ergibt.

.....

□ Recherchiere den *Rutherfordschen Streuungsquerschnitt* und versuche, ihn zu verstehen. (S.9)

### Experiment 3. *Rutherford-Experiment.*

Wir führen das *Rutherford-Experiment* durch und erhalten:

Registrierungen	Winkel	Zeit	Folie
1468cps	0°	20s	ohne
0 cps	15°	20s	ohne
1369 cps	0°	20s	mit
4 cps	15°	20s	mit

Tabelle 1: Vergleich Messung mit und ohne Folie.

(Einheit „cps“ ist counts per second)

**VL 5**  
 19.04.2023,  
 08:15

Wir wollen nun die Ergebnisse des vorigen Experimentes festhalten:

- 99.99% der eingestrahnten  $\alpha$  Teilchen fliegen geradlinig durch die Au-Folie hindurch. Die Folie ist für die Teilchen also annähernd transparent.
- Der  $\alpha$  Teilchenstrom wird leicht aufgefechert. Dies ist mit der erwarteten  $e^- - \alpha$  Teilchenwechselwirkung vereinbar.
- Es wird auch die Rückwertsstreuung (bei den übrigen 0.01% der  $\alpha$  Teilchen) beobachtet.
- Die zurückgestreuten  $\alpha$  Teilchen haben keinen Energieverlust erfahren.
- Die Intensität der Rückwertsstreuung ist proportional zur Foliendicke (/ -stärke).
- Die Winkelverteilung der Zählraten weist die Proportionalität

$$N(\theta) \propto \frac{1}{\sin(\theta/2)^4}$$

auf.

Aus unseren Beobachtungen können wir das *Rutherford-Modell* ableiten:

- Atome sind aus Kern und Hülle aufgebaut.
- Die Kerne enthalten den Großteil der Atommasse und sind positiv geladen, auf  $\approx 40\text{fm}$  konzentriert.
- Die Hüllen enthalten Elektronen, verteilt über das Restvolumen des Atoms.
- Das *Coulomb-Gesetz* behält auf diesen Größenordnungen seine Gültigkeit.

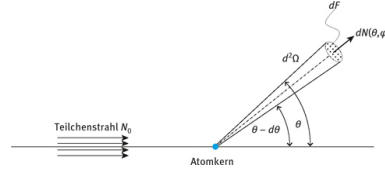


Abbildung 4: Darstellung des schematischen Streuprozesses aus [1].

**Die Rutherfordsche Streuformel** Wir wollen nun die Streuformel für die Rutherford-Experimente herleiten. Wir betrachten zunächst die Streuung eines  $\alpha$  Teilchens auf ein Atom. Die Streuung ist in der Regel sehr klein, sodass wir die Streuung als eine Streuung auf den Atomkern betrachten können. Unser Ziel ist  $N(\theta)$ . Betrachte das Schema: Für die Coulombkraft erhalten wir zunächst

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{2 \cdot q(\text{Ze})^2}{r^3} \cdot \mathbf{r},$$

wobei die Funktion  $q$  die Ladung von Ze zuordnet<sup>1</sup>. Die Kraftaufspaltung in orthogonale und parallele Flugrichtung ergibt

$$F_{\perp} = \|F\|_2 \cdot \sin(\varphi) \quad F_{\parallel} = \|F\|_2 \cdot \cos(\varphi).$$

Für den Drehimpuls erhalten wir in *Zylinderkoordinaten* die Gleichungskette

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_{r(t)} &= \mathbf{r}(t) \times \mathbf{p}(t) = \mathbf{r}(t) \times m \cdot \mathbf{r}'(t) \\ &= m \cdot \|\mathbf{r}(t)\|_2^2 \cdot \varphi'(t) \cdot (\mathbf{e}(r(t)) \times \mathbf{e}(\varphi(t))) \\ &=: m \cdot \|\mathbf{r}(t)\|_2^2 \cdot \varphi'(t) \cdot \mathbf{e}_3. \end{aligned}$$

Identifiziere nun  $1/r^2 = \varphi'(t)/(v_0 \cdot b)$  mit  $v_0 := \|\mathbf{r}'(0)\|_2$  und  $b$  als Bahnabstand zur Mittelachse durch den Kern [→ Abb. 4]. Wir erhalten für das Coulombgesetz

$$F_{\perp} = \frac{2 \cdot q(\text{Ze})^2}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\varphi'(t)}{v_0 \cdot b} \cdot \sin(\varphi(t)) = m \cdot \|r''(t)\|_2$$

und durch Integration

$$b(\theta) = \frac{2 \cdot q(\text{Ze})^2}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{m \cdot v_0^2} \cdot \cot\left(\frac{\theta}{2}\right).$$

(S.10) □ Fülle die Lücken der Rechnung auf. Was kommt beim parallelen Fall heraus?

Bei unserem Experiment [→ Exp. 3] haben wir die *Anzahl der Ereignisse* auf dem Leuchtschirm gemessen. Diese geschahen alle in einem gewissen Raumwinkelbereich  $d\Omega$  [→ Abb. 4], in welchem der Detektor gemessen hat. Wir fragen uns nun, aus welcher Richtung die detektierten Teilchen kommen, was uns auf ein paarweise definiertes Raumelement vor dem Atom bringt: Die gemittelte Anzahl der Teilchen  $dN$  in diesem Raumelement  $d\Omega$  ist augenscheinlich von  $db$  ab, sodaß wir auf den schematischen Zusammenhang

$$dN = \text{Anzahl der } \alpha \text{ Teilchen} \cdot \frac{dB \cdot \text{Streuzentrenanzahl}}{\text{Gesamtfläche}},$$

<sup>1</sup>Sie hätte wohl eine Form  $q := (E \mapsto E_q)_{E \in TOE}$ , wobei  $TOE$  eine Menge von Tupeln sei, welche zu allen Elementen des Periodensystems ihre Eigenschaften als Einträge zusammenfasst.



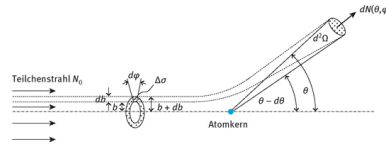


Abbildung 5: Erweiterung der Abbildung 4 um das Ursprungsraumelement  $||$ .

wobei wir  $dB := \pi \cdot (b^2 - (b - db)^2)$  als Trefferfläche und  $N_t$  als Streuzentrenanzahl (proportional zur Anzahl der Atome in der Ag-Folie) festhalten. Die Gesamtfläche  $F$  ist diejenige der Goldfolie. Daraus ergibt sich

$$dN = N_\alpha \cdot dB \cdot \frac{N_t}{F}$$

und „differenziert“ nach  $d\Omega$  insgesamt

$$\frac{dN}{d\Omega} = N_\alpha \cdot \frac{N_t}{F} \cdot \frac{dB}{d\Omega},$$

wobei wir  $dB/d\Omega$  als den *differentiellen Streuquerschnitt* definieren.

.....

□ Kläre die Bedeutung des angedeuteten Differenzierens. Wie ist der Prozess sauber definierbar? (S.11)

□ Verifiziere die alternative Definition  $dB := b \cdot db \cdot d\varphi$ . Verifiziere auch  $d\Omega = \sin(\theta) \cdot d\theta \cdot d\varphi$ . (S.12)

.....

Die Streuformel für die Rutherford-Experimente lautet nun

$$\frac{dB}{d\Omega} = \left( \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q(\text{Zr}) \cdot e^2}{m \cdot v_0^2} \right)^2 \cdot \frac{1}{\sin^4(\theta/2)}.$$

Man kann nun noch  $E_0 = m \cdot v_0^2$  identifizieren.

## Literatur

- Degryer (2018). *Der differentielle Wirkungsquerschnitt – die Rutherfordsche Streuformel*. URL: <https://www.degruyter.com/database/PHYSIKO/entry/physiko.21.45/html>. Abgerufen am 19.04.2023.