Integrierter Kurs IV

Theoretische Physik II
Tom Folgmann

27. April 2023

1 Einleitung und Wellenfunktion

Einleitung

VL 1
25.04.2023,
08:15

Bei der Auffassung kleinster Teilchen gab es Probleme mit dem Teilchenmodell.

. . . .

☐ Stelle dieses Problem *deutlich* dar. Skizziere eine Lösung desselben. (✎1)

. . . .

Schwarzkörperstrahlung

Jede sogenannte *Mode* mit der Frequenz $\nu = c_0/\lambda$ des elektromagnetischen Feldes kann beliebige Energien enthalten, enthält jedoch nach dem *Äquipositionsprinzip* im Mittel die Energie $E = k_B \cdot T$, bekannt als das *Rayleigh-Jeans-Gesetz*.

Photoeffekt

Compton Effekt

[→ IK4 Exp. II]

Welleneigenschaften der Materie

[→ IK4 Exp. II]

Doppelspaltexperiment mit Elektronen

[→ IK4 Exp. II]

. . . .

☐ Lies im Skript der *Experimentalphysik II* die Inhalte der Überschriften nach. (✎2)

- → Was ist die Wellenfunktion beim Doppelspaltexperiment? Wie erklärt man, daß ein Elektron durch beide Spalten gehen kann? Was passiert mit einem einzeln eingestrahlten Elektron? (✎2.1)
- → Wie lautet die *de Broglie Relation*? (✎2.2)

(✎2.3) → Kann man das Doppelspaltexperiment auch mit massiveren Teilchen oder Molekülen durchführen? Gibt es hierbei eine Grenze? Recherchiere den Beitrag zur Doppelspaltuntersuchung der *Universität Konstanz*.

....

Welle-Teilchen-Dualismus

Wir haben beobachtet:

→ elektromagnetische Wellen verhalten sich wie Teilchen

→ materielle Teilchen verhalten sich wie Wellen

Als Ziel unserer folgenden Untersuchungen setzen wir eine *einheitliche Theorie*, welche sowohl die Wellen- als auch die Teilcheneigenschaften beschreibt.

Wellenfunktion und Wahrscheinlichkeitsinterpretation

Wir wollen den folgenden Zusammenhang herstellen:

freies *Teilchen*	ebene *Welle*
Impuls $p \in \mathbb{R}^3$	Wellenvektor $k \in \mathbb{R}^3$
Energie $E(p) = p^2/2m$	Kreisfrequenz $\omega(k) = \hbar k^2/2m = c_0 \cdot \|\|k\|\|_2$
	Amplidute am Ort $r(t)$ mit $\psi(t, r(t)) = C \cdot \exp\left(\mathring{i}(\langle r(t), k\rangle - \omega \cdot t)\right) \to$ *Wellenfunktion*

Tabelle 1: Gegenüberstellung der Teilchen- und Welleneigenschaften.

Es kommen nun die folgenden Fragen auf:

→ Wie hängen p und k zusammen?

→ Was ist die physikalische Bedeutung von $\psi \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3, \mathbb{R})$?

Es stellt sich heraus, daß wir die erste Frage bereits mit der *de Broglie Relation* [→ IK4 Exp II] beantworten können: $p(k) = \hbar \cdot k$, wobei $\hbar := h/(2\pi)$ mit $h = 6.6 \cdot 10^{-34}\,\mathrm{J\,s}$. Für die Energie finden wir aus der Schwarzkörperstrahlung den Zusammenhang $E(\omega) = \hbar \cdot \omega$ (Einstein/Planck) mit $\omega = 2\pi \cdot \nu$. In die Funktion ψ eingesetzt folgt

$$\psi(t, r(t)) = C \cdot \exp\left(\frac{\mathring{i} \cdot (\langle p, r(t), -\rangle\, E(p) \cdot t)}{\hbar}\right).$$

Für die Dispersion der Welle gilt

$$E(\omega) = \hbar \cdot \omega = \begin{cases} \frac{\hbar^2 \cdot k^2}{2 \cdot m} & m > 0 \\ \hbar \cdot c_0 \cdot ||k||_2 & \text{sonst} \end{cases} = \begin{cases} \frac{\langle p, p\rangle}{2 \cdot m} & m > 0 \\ c_0 \cdot ||p||_2 & \text{sonst} \end{cases}$$

Für die physikalische Interpretation müssen wir uns der Wahrscheinlichkeitsinterpretation widmen:

Teilchen	Welle
Aufenthaltswahrscheinlichkeit des Teilchens (pro Volumen) am Ort $r(t)$ zur Zeit $t \in \mathbb{R}$	Intensität der Welle $\lvert\psi(t, r(t))\rvert^2$

Prinzipiell ist es möglich, den *Ort* zum *Zeitpunkt* eines Teilchens zu kennen; anders ist es bei quantenmechanischen Wellen. Wir bemerken:

→ ψ bezeichnet man auch als *Wahrscheinlichkeitsamplitude*.

→ Die Aufenthaltswahrscheinlichkeit des durch r beschriebenen Teilchens ist gegeben als Integral

$$P(t, V) := \int |\psi(t, x)|^2 \; \lambda|_V \,(dx) =: \mu(V)$$

mit Wahrscheinlichkeitsmaß $P(t, \cdot) =: \mu$ auf $(\mathbb{R}^3, \sigma(\mathbb{R}^3))$. Ist der Aufenthalt in einem Volumen $V \subseteq \mathbb{R}^3$ bekannt, so sei

$$P(t, V) := \begin{cases} \int |\psi(t, x)|^2 \; \lambda|_V \,(dx) & V \in \sigma(\mathbb{R}^3) \\ \infty & \text{sonst} \end{cases}$$

eine Umdefinition des Maßes.

→ Aus der Wahrscheinlichkeitsmaß-Eigenschaft $\mu(\mathbb{R}^3) = 1$ folgt

$$P(t, \mathbb{R}^3) = \int |\psi(t, x)|^2 \; \lambda|_V \,(dx) = 1.$$

→ In einem Volumen $W \subseteq V \subseteq \mathbb{R}^3$ gilt $\mu|_V(W) = \lambda(V) \cdot |C|^2$ und für $W = V$ folgt $|C|^2 = 1/\lambda(V)$.

Ebene Wellen beschreiben also Teilchen mit wohldefiniertem Impuls $p = \hbar \cdot k$, aber vollständig unbestimmtem Ort.

. . . .

□ Überlege dir den Spezialfall eines Punktes $\{x\} \subseteq \mathbb{R}^3$ als Testvolumen. Wie sieht die Aufenthaltswahrscheinlichkeit aus? (✎3)

. . . .

Wellenpakete

Als nächstes beschäftigen wir uns mit der Frage, wie wir Teilchen mit genau definiertem Aufenthaltsort beschreiben. Wir wenden uns hierbei an das Prinzip der *Superposition*, konkreter der *Fourier-Summation*, bei der wir eine Funktion $f \in \mathscr{L}^2(\mathbb{R}^3)$ zerlegen in Funktionen des Typus der ebenen Welle:

$$\psi(t, r(t)) = \frac{1}{(2 \cdot \pi)^3} \int \left(\exp\left(\mathring{i} \cdot (\langle x, r(t) \rangle - \frac{\hbar \cdot x^2}{2 \cdot m} \cdot t) \right) \right)_{x \in \mathbb{R}^3} \tilde{\psi}|_V \quad V \subseteq \mathbb{R}^3,$$

wobei $(\mathbb{R}^3, \sigma(\mathbb{R}^3), \tilde{\psi})$ ein Maßraum ist. Wir haben dabei den Zusammenhang

$$E = \hbar \cdot \omega(k) = \frac{\hbar \cdot k^2}{2 \cdot m}.$$

....

(✎4) □ Warum wird bei der Fourier-Summation keine Wurzel im Vorfaktor gezogen? Recherchiere verschiedene Konventionen. [*Tipp:* Bedenke $\hbar = h/(2 \cdot \pi)$ und die Definition des Impulses über k.]

....

VL 2 27.04.2023, 10:00

Gaußsches Wellenpaket

Als fundamentale Funktion eines Wellenpaketes zählt das sogenannte *Gaußsche Wellenpaket*. Es wird beschrieben durch die Funktion

$$\psi(k) = A \cdot \exp\left(\frac{-(k-k_0)^2}{4 \cdot \pi^2}\right), \quad \psi \in \text{Abb}\left(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3\right),$$

wobei $4\pi^2$ mit der „Breite“ korreliert und k_0 der *mittlere Wellenvektor* ist. Die Funktion hat die Form

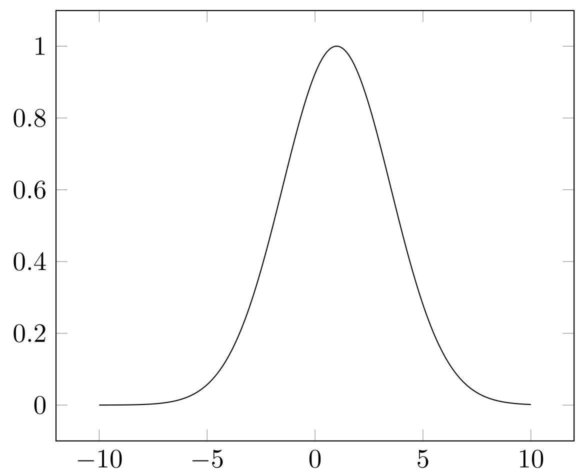

Abbildung 1: Die Gaußkurve für $A = 1$, $k_0 = 1$ in $\mathbb{R}$.

Das Ergebnis der Fourier-Summation angewendet auf die Gaußfunktion ergibt

$$|\psi(t, r(t))|^2 = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi} \cdot w(t)}^{\frac{3}{2}} \cdot \exp\left(-\frac{(r(t) - v \cdot t)^2}{2 \cdot w(t)^2}\right)$$

mit der Definition $v := \hbar \cdot k/m = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\omega(k_0 + t \cdot h)\right]\big|_{t=0} = d\omega(k_0)(h)$ und $w(t) := \sqrt{w(0)^2 + ((\hbar \cdot t)/(2 \cdot w(0) \cdot m))}$ mit dem Startwert $w(0) = 1/(2 \cdot \sigma)$.

....

(✎5) □ Man spricht bei Fourier-Summationen vom *Raumwechsel*. Was ist damit gemeint? Welche Räume haben wir hier verwendet?

□ Zeichne das Ergebnis einmal graphisch für dieselben Parameter wie oben. Was fällt dir auf? (✎6)

□ Welches $h \in \mathbb{R}^3$ ist bei der Ableitung $d\omega(k_0)(h)$ gemeint? (✎7)

. . . .

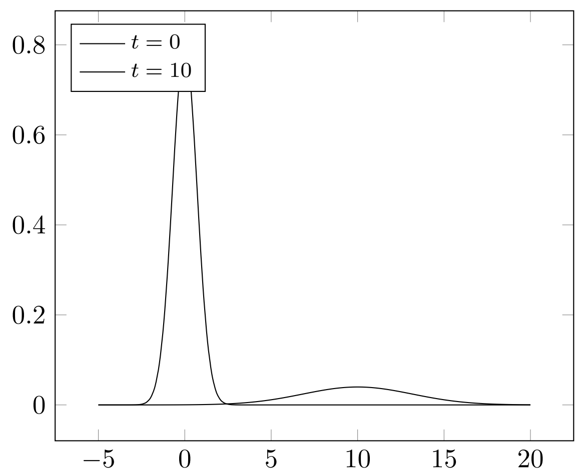

Abbildung 2: Die Forier-Summierte Gaußkurve für $A = 1$, $k_0 = 1$ in $\mathbb{R}$ zum Zeitpunkt $t = 0$ und $t = 10$

Zusammenfassung

→ Das Wellenpaket bewegt sich mit der Aufenthalserwartung

$$\langle r(t) \rangle = \int (r \cdot |\psi(t,r)|)_{r \in \mathbb{R}^3} \, \lambda\,(dr)\,.$$

→ Das Wellenpaket im Ortsraum ist ebenfalls eine Gaußfunktion mit Peakbreite $w(t)$ und Startwert $w(0) = 1/(2 \cdot \sigma)$.

→ Das Wellenpaket erfährt Dispersion für $t > 0$ durch die Funktionsdefinition w:

→ Für $t >> w(0)^2 \cdot m/\hbar$ ist $w(t) \approx \hbar \cdot t/(2 \cdot w(0) \cdot m)$ linear von t abhängig. Für lange t ist die Dispersion also linear (und nicht proportional zu $\sqrt{t}$).

→ Für die Mittelung $\langle r(t) \rangle$ folgt

$$\Delta r^2 := \langle r(t_1) - \langle r(t_0) \rangle \rangle = \int ((r - \langle r \rangle) \cdot |\psi(t,r)|)_{r \in \mathbb{R}^3} \, \lambda\,(dr) = w(t)^2.$$

. . . .

□1 Berechne die Integrale $\int x \cdot \exp\bigl(-x^2\bigr)\,\lambda\,(dx)$, $\int x \cdot \exp\bigl(-(x-x_0)^2\bigr)\,\lambda\,(dx)$ und $\int (x - x_0) \cdot \exp\bigl(-(x-x_0)^2\bigr)\,\lambda\,(dx)$ für $x_0 \in \mathbb{R}$ auf $(\mathbb{R}, \sigma(\mathbb{R}), \lambda)$. Wie ist die Struktur? (✎8)

□ Rechne die Dispersion des Wellenpaketes für $t > 0$ gemäß w nach und zeige $w(t)^2 > w(0)$. (✎9)

. . . .

1.1 Die Heisenbergsche Unschärferelation

Zunächst bemerken wir die Eigenschaft der *Normerhaltung* gemäß des *Satzes von Parseval* der Fourier-Summation. Es gilt

$$\int |\psi(t,r)|^2 \ \lambda\,(dr) = \int \frac{\left|\tilde{\psi}(k)\right|^2}{(2\cdot\pi)^3}\,\lambda\,(dk) = \int \frac{\left|\tilde{\psi}(p)\right|^2}{(2\cdot\pi\cdot\hbar)^3}\,\lambda\,(dp)$$

und für die Mittelung

$$\langle p\rangle = \int \frac{p\cdot\left|\tilde{\psi}(p)\right|^2}{(2\cdot\pi\cdot\hbar)^3}\,\lambda\,(dp) := \int \frac{p\cdot\exp\left(-\frac{(p-p_0)^2}{4\cdot\hbar^2\cdot\sigma^2}\right)}{(2\cdot\pi\cdot\hbar)^3}\,\lambda\,(dp) \stackrel{(.??)}{=} p_0 = \hbar\cdot k_0.$$

Die mittlere Schwankung, also physikalisch die Genauigkeit des Impulses im Impulsraum, ergibt sich zu

$$\Delta p^2 = \langle (p-\langle p\rangle^2)^2\rangle = \hbar^2\cdot\sigma^2,$$

wobei unter Verwendung von $\Delta r^2 = w(t)^2$ folgt

$$\Delta r^2 = w(t)^2 \geq \left(\frac{1}{2\cdot\sigma}\right)^2 = \frac{1}{4\cdot\sigma^2},$$

sodaß mit beiden Gleichungen unter Produktbildung und Wurzelzug eine Ausdrucksweise der Unschärferelation, konkret jene von Heisenberg, folgt:

$$\Delta r\cdot\Delta p \geq \frac{\hbar}{2}.$$

....

(✎10) ☐ Lässt sich die Wellenfunktion direkt experimentell bestimmen? Recherchiere die *Quanten-Zustands-Tomographie*.

....

Physikalische Bedeutung

Aus der Unschärferelation folgen folgende physikalische Konsequenzen:

→ Unmittelbar ist ablesbar, daß bei genauerer Ortsbestimmung die Impulsgenauigkeit abnimmt.

→ Für $\Delta p \to 0$ (Fall ebene Welle) ist $\Delta r \to \infty$.

→ Der Phasenraum ist infolge der Unschärferelation quantisiert in Einheiten von $\hbar$.

Literatur