0.1 Der Trägheitssatz von Sylvester

[James Joses Sylvester *1814 †1897]

Satz und Definition 0.1.1. (Trägheitssatz) Sei V ein endlichdimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum und $q \in \mathrm{Q}(V)$. Dann gibt es genau ein Paar $(r, s) \in \mathbb{N}_0^2$, genannt Sylvester-Signatur mit a derart, dass es eine geordnete Basis $\underline{v}$ von V gibt mit

$$M(q, \underline{v}) = \begin{pmatrix} \left.\begin{matrix}1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1\end{matrix}\right\}r & & \text{\Huge 0} \\ & \left.\begin{matrix}-1 & & \\ & \ddots & \\ & & -1\end{matrix}\right\}s & \\ \text{\Huge 0} & & \begin{matrix}0 & & \\ & \ddots & \\ & & 0\end{matrix} \end{pmatrix}.$$

Beweis. Existenz. Nach Korollar **??** gibt es eine Basis $\underline{w} = (w_1, ..., w_n)$ von V derart, dass $M(q, \underline{w})$ Diagonalgestalt hat. Œ gibt es $r, s \in \mathbb{N}_0$ mit $q(w_1) > 0, ..., q(w_r) > 0, q(w_{r+1}) < 0, ..., q(w_{r+s}) < 0, q(w_{r+s+1}) = ... = q(w_n) = 0$. Setze nun

$$\underline{v} := \left(\frac{w_1}{\sqrt{q(w_1)}}, ..., \frac{w_r}{\sqrt{q(w_r)}}, \frac{w_{r+1}}{\sqrt{-q(w_{r+1})}}, ..., \frac{w_{r+s}}{\sqrt{-q(w_{r+s})}}, w_{r+s+1}, ..., w_n \right).$$

Dann ist $M(q, \underline{v})$ von der gewünschten Gestalt.

Eindeutigkeit. Seien $(r, s), (t, u) \in \mathbb{N}_0^2$ und $\underline{v} = (v_1, ..., v_n), \underline{w} = (w_1, ..., w_n)$ Basen von V mit

$$M(q, \underline{v}) = \begin{pmatrix} \left.\begin{matrix}1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1\end{matrix}\right\}r & & \text{\Huge 0} \\ & \left.\begin{matrix}-1 & & \\ & \ddots & \\ & & -1\end{matrix}\right\}s & \\ \text{\Huge 0} & & \begin{matrix}0 & & \\ & \ddots & \\ & & 0\end{matrix} \end{pmatrix} \quad \text{und}$$

$$M(q, \underline{w}) = \begin{pmatrix} \left.\begin{matrix}1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1\end{matrix}\right\}t & & \text{\Huge 0} \\ & \left.\begin{matrix}-1 & & \\ & \ddots & \\ & & -1\end{matrix}\right\}u & \\ \text{\Huge 0} & & \begin{matrix}0 & & \\ & \ddots & \\ & & 0\end{matrix} \end{pmatrix}$$

Zu zeigen ist $(r,s)=(t,u)$. Setze $b := b_q$. Dann gilt für $\lambda_1, ..., \lambda_n \in K$:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i \in \ker \vec{b} &\Longleftrightarrow \vec{b}\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i\right) = 0 \\ &\Longleftrightarrow b\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i, \cdot\right) = 0 \\ &\Longleftrightarrow \forall j \in \{1,...,n\} : \underbrace{b\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i, v_j\right)}_{=\lambda_j q(v_j)} = 0 \\ &\Longleftrightarrow \forall j \in \{1,...,r+s\} : \lambda_j = 0.\end{aligned}$$

Also $\operatorname{span}(v_{r+s+1}, ...v_n) = \ker \vec{b}$ und ebenso $\operatorname{span}(w_{r+s+1}, ...w_n) = \ker \vec{b}$. Es folgt $r+s = t+u$. Betrachte nun die Untervektorräume

- $U := \operatorname{span}(v_1, ...v_r, v_{r+s+1}, ..., v_n)$ und
- $W := \operatorname{span}(w_{t+1}, ..., w_{t+u})$.

Es gilt $q(v) \geq 0$ für $v \in U$ und $q(v) < 0$ für $W\backslash\{0\}$. Daher gilt $U \cap W = \{0\}$ und mit der Dimensionsformel [→**??**] für Untervektorräume $n \geq \dim U + \dim W = n - s + u$. Also ist $u \leq s$. Genauso zeigt man $s \leq u$. Es folgt $s = u$ und daher auch $r = t$. Somit $(r,s) = (t,u)$.

Satz 0.1.2. Es gelte der Fundamentalsatz der Algebra. Sei V ein endlichdimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum und $q \in \mathrm{Q}(V)$ mit Sylvestersignatur $(r,s) \in \mathbb{N}_0$.

(a) Ist $\underline{v} = (v_1, ..., v_n)$ eine Basis und sind $\lambda_1, ...\lambda_n$ die Eigenwerte von $M(q, \underline{v})$ wobei jedes λ_i seiner algebraischen Vielfachheit entsprechend oft aufgeführt ist [→**??**,**??**], das heißt $\chi_{M(q,\underline{v})} = \det(M(q,\underline{v}) - XI_n) = (-1)^n \prod_{i=1}^{n}(X - \lambda_i)$, so gilt
  - $r = \#\{i \in \{1,...,n\} \mid \lambda_i > 0\}$ und
  - $s = \#\{i \in \{1,...,n\} \mid \lambda_i < 0\}$.

(b) Ist $\underline{v} = (v_1, ..., v_n)$ eine Basis von V, $D := \begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine Diagonalmatrix und $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ invertierbar mit $M(q, \underline{v}) = P^T D P$ oder $M(q, \underline{v}) = P^{-1} D P$, so gilt
  - $r = \#\{i \in \{1,...,n\} \mid d_i > 0\}$ und
  - $s = \#\{i \in \{1,...,n\} \mid d_i < 0\}$.

(c) Sind $l_1, ..., l_m \in V^*$ linear unabhängig und $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}$ mit $\forall v \in V : q(v) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i l_i^2(v)$, so gilt
  - $r = \#\{i \in \{1,...,n\} \mid \lambda_i > 0\}$ und

- $s = \#\{i \in \{1, ..., n\} \mid \lambda_i < 0\}$.

Beweis. Wir zeigen zunächst den Fall $M(q, \underline{v}) = P^T DP$ von (b), dann (a), dann den Fall $M(q, \underline{v}) = P^{-1}DP$ von (b) und schließlich (c).

(b) Fall $M(q, \underline{v}) = P^T DP$.

Schritt 1. Œ gelte $P = I_n$.
Begründung. Setze $w_i := \mathrm{vec}_{\underline{v}}(P^{-1}e_i)$ für alle $i \in \{1, ..., n\}$. Dann ist $\underline{w} = (w_1, ..., w_n)$ eine Basis von V [→ **??**,**??**] und es gilt $P^{-1} = M(\underline{w}, \underline{v})$ und somit

$$\begin{aligned} M(q, \underline{w}) &\overset{??}{=} M(\underline{w}, \underline{v})^T M(q, \underline{w}) M(\underbrace{\underline{w}}, \underline{v}) \\ &= (P^{-1})^T P^T DPP^{-1})(PP^{-1})^T D(PP^{-1}) = D. \end{aligned}$$

Schritt 2. Œ sei D von der Gestalt $\begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & \\ & & & -1 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & -1 & & & \\ & & & & & & 0 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & & & & 0 \end{pmatrix}$.

Begründung. Vertauschen der Basiselemente und Skalieren änder die Anzahl der positiven bzw. negativen Diagonaleinträge von $M(q, \underline{v})$ nicht.

(a) Da $M(q, v)$ eine reelle symmetrische Matrix ist, gibt es nach **??** eine orthogonale Matrix $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und einer Diagonalmatrix $D = \begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit $M(q, \underline{v}) = P^T DP = P^{-1}DP$. Da $M(q, \underline{v})$ und D ähnlich sind, haben sie dasselbe charakteristische Polynom [→**??**], das heißt $\prod_{i=1}^n (X - \lambda_i) = \prod_{i=1}^n (X - d_i)$. Dann gibt es nach **??** eine Permutation $\sigma \in S_n$ mit $(\lambda_1, ... \lambda_n) = (d_{\sigma(1)}, ... d_{\sigma(n)})$, weshalb in der Behauptung die λ_i durch die d_i ersetzt werden können. Wegen $M(q, \underline{v}) = P^T DP$ folgt dann die Behauptung nach dem bereits bewiesenen Teil von (b).

(b) Fall $M(q, \underline{v}) = P^{-1}DP$. Setze $\lambda_i := d_i$ für $i \in \{1, ..., n\}$. Dann gilt $\chi_{M(q, \underline{v})} \overset{??}{=} \chi_D = (-1)^n \prod_{i=1}^n (X - \lambda_i)$ und die Behauptung folgt nun aus (a).

(c) Ergänze $l_1, ..., l_m$ zu einer Basis $l_1, ... l_m, l_{m+1}, ..., l_n$ von V^* und setze $\lambda_{m+1} = ... = \lambda_n = 0$. Wähle eine Basis $\underline{v} = (v_1, ..., v_n)$ von V. Nach **??** ist dann $P := (l_i(v_j))_{1 \le i,j \le n} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ invertierbar und mit $D := \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ gilt $M(q, \underline{v}) = P^T DP$. Nun folgt die Behauptung aus (b).

Definition 0.1.3. Sei $n \in \mathbb{N}_0$ und $A \in \mathbb{SR}^{n \times n}$. Dann definiert man die Sylvester-Signatur der von A als die Sylvester-Signatur der zu A gehörigen quadratischen Form $q_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, x \mapsto x^T Ax$.

Bemerkung 0.1.4. Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum mit Basis $\underline{v} = (v_1, ..., v_n)$ und $q \in \mathrm{Q}(V)$. Dann stimmen die Sylvester-Signaturen von q und $M(q, \underline{v})$ natürlich überein, denn setzt man $A := M(q, \underline{v})$, so gilt $M(q_A, \underline{e}) = A = M(q, \underline{v})$ und es liefert zum Beispiel (a) des obigen Satzes das Gewünschte.

Korollar 0.1.5. Sei $n \in \mathbb{N}_0$ und $A \in \mathbb{SR}^{n \times n}$ mit Sylvester-Signatur (r, s).

(a) Gilt $\chi_A = (-1)^n \prod_{i=1}^n (X - \lambda_i)$ mit $\lambda_1, ...\lambda_n \in \mathbb{R}$, so gilt
- $r = \#\{i \in \{1, ..., n\} \mid \lambda_i > 0\}$ und
- $s = \#\{i \in \{1, ..., n\} \mid \lambda_i < 0\}$.

(b) $D := \begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine Diagonalmatrix und $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ invertierbar mit $M(q_A, \underline{v}) = P^T DP$ oder $M(q_A, \underline{v}) = P^{-1} DP$, so gilt
- $r = \#\{i \in \{1, ..., n\} \mid d_i > 0\}$ und
- $s = \#\{i \in \{1, ..., n\} \mid d_i < 0\}$.

(c) Sind $l_1, ...l_m \in (\mathbb{R}^n)^*$ linear unabhängig und $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}$ mit $\forall x \in \mathbb{R}^n : x^T Ax = \sum_{i=1}^m \lambda_i l_i^2(v)$, so gilt
- $r = \#\{i \in \{1, ..., n\} \mid \lambda_i > 0\}$ und
- $s = \#\{i \in \{1, ..., n\} \mid \lambda_i < 0\}$.

0.2 Positiv semidefinite Matrizen

Definition 0.2.1. Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum. Mann nennt $q \in \mathrm{Q}(V)$ $\begin{Bmatrix} \text{positiv} \\ \text{negativ} \end{Bmatrix}$ semidefinit (auch: $\begin{Bmatrix} \text{psd} \\ \text{nsd} \end{Bmatrix}$), wenn $\forall v \in V : q(v) \begin{Bmatrix} \geq \\ \leq \end{Bmatrix} 0$. Gilt zusätzlich $\forall v \in V : (q(v) = 0 \implies v = 0)$, so nennt man q $\begin{Bmatrix} \text{positiv} \\ \text{negativ} \end{Bmatrix}$ definit (auch: $\begin{Bmatrix} \text{pd} \\ \text{nd} \end{Bmatrix}$). Man nenn $b \in \mathrm{SBil}(V)$ psd/nsd/pd/ng, wenn b symmetrisch und q_b psd/nsd/pd/nd ist.

Beispiel 0.2.2. Ein Skalarprodukt auf einem reellen Vektorraum ist per Definition nichts anderes als eine pd Bilinearform [→**??**].

Definition 0.2.3. Sei $n \in \mathbb{N}_0$ und $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Es heißt A psd/nsd/pd/nd, wenn die zu gehörige Bilinearform $b_A : \mathbb{R}^{n \times n} \times \mathbb{R}^{n \times n} \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x^T Ay$ [→**??**(a)] psd/nsd/pd/nd ist

Bemerkung 0.2.4. Sei $n \in \mathbb{N}_0$ und $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Dann ist A psd/nsd/pd/nd genau dann, wenn A symmetrisch ist [$\to$**??**,**??**] und wenn $q_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, x \mapsto x^T Ax$ psd/nsd/pd/nd ist.

Bemerkung 0.2.5. Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum mit Basis $\underline{v} = (v_1, ..., v_n)$ und $q \in \mathrm{Q}(V)$. Dann ist q psd / nsd / pd / nd $\iff M(q, \underline{v})$ psd / nsd / pd / nd.

Bemerkung 0.2.6. Für reelle quadratische Formen q gilt natürlich q nsd $\iff -q$ psd und q nd $\iff -q$ pd. Analoges gilt für reelle Bilinearformen und Matizen. Daher betrachten wir im Folgenden nur noch die Begriffe psd/pd.

Satz 0.2.7. Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum mit $n = \dim V < \infty$ und $q \in \mathrm{Q}(V)$. Dann sind äquivalent:

(a) q ist psd.

(b) Die Sylvester-Signatur ist $(r, 0)$ for ein $r \in \mathbb{N}_0$,

(c) $\exists l_1, ..., l_n \in V^* : \forall v \in V : q(v) = \sum_{i=1}^{n} l_i^2(v)$.

(d) $\exists m \in \mathbb{N}_0 : \exists l_1, ..., l_m \in V^* : \forall v \in V : q(v) = \sum_{i=1}^{m} l_i^2(v)$.

Beweis. ***(a)*** $\implies$ ***(b)***. Dies folgt direkt aus der Definition der Sylvester-Signatur 0.1.1.

(b) $\implies$ ***(c)***. Dies folgt ebenfalls aus der Definition der Sylvester-Signatur mit Lemma **??**.

(c) $\implies$ ***(d)*** $\implies$ ***(a)***. Diese sind trivial.

Definition 0.2.8. [$\to$**??**] Sei $A \in S\mathbb{R}$. Unter einer Cholesky-Zerlegung [André Louis Cholesky *1875 †1918] von A verstehen wir ein Paar (P, D) von Matrizen $P, D \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $A = P^T DP$, wobei P von oberere Dreiecksgestalt ist mit lauter Einsen auf der Diagonale und D von Diagonalgestalt ohne negative Einträge.

Definition 0.2.9. Sei K ein kommutativer Ring, $n \in \mathbb{N}_0$ und $A \in K^{n\times n}$. Für jedes $I \subseteq \{1, ..., n\}$ bezeichne $A_I \in K^{(\#I)\times(\#I)}$ die Matrix, die aus A durch Streichen aller Zeichen i und Spalten j mit $i, j \notin I$ entsteht. Wir bezeichnen die Determinanten der n Matrizen $A_{\{1\}}$,$A_{\{1,2\}}$,$A_{\{1,2,3\}}$,...,$A_{\{1,...,n\}}$ als die Leithauptminoren (auch: führende Hauptminoren) von A und die Determinanten der $2^n - 1$ Matrizen A_I ($\emptyset \neq I \subseteq \{1, ..., n\}$) als die Hauptminoren von A. [Vorsicht: manche deutschsprachige Autoren bezeichnen nur die Leithauptminoren als Hauptminoren und haben keine Bezeichnung für unsere Hauptminoren].

Beispiel 0.2.10. Die Leithauptminoren von $A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ sind $1, 0, 0$ und ihre Hauptminoren sind die Diagonaleinträge $1, 1, -1$, die Determinante $\det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 0$, $\det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -1$, $\det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -1$ und $\det(A) = 0$.

Satz 0.2.11. Es gelte der Fundamentalsatz der Algebra. Sei $A \in S\mathbb{R}^{n\times n}$. Dann sind äquivalent:

(a) A ist psd.

(b) $\forall x \in \mathbb{R}^n : x^T Ax \geq 0$.

(c) Die Sylvester-Signatur von A ist $(r, 0)$ für ein $r \in \mathbb{N}_0$.

(d) Alle Eigenwerte von A sind ≥ 0.

(e) Alle Koeffizienten von $\det(A + XI_n) = \chi_A(-X) \in \mathbb{R}[X]$ sind ≥ 0.

(f) Alle Hauptminoren von A sind ≥ 0.

(g) A besitzt eine Cholesky-Zerlegung.

(h) Es gibt eine obere Dreiecksmatrix [→**??**] $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $A = B^T B$.

(i) $\exists B \in \mathbb{R}^{n\times n} : A = B^T B$.

(j) $\exists m \in \mathbb{N}_0 : \exists B \in \mathbb{R}^{m\times n} : A = B^T B$.

(k) $\exists v_1, ..., v_n \in \mathbb{R}^n : A = \begin{pmatrix} \langle v_1, v_1\rangle & \dots & \langle v_1, v_n\rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle v_n, v_1\rangle & \dots & \langle v_n, v_n\rangle \end{pmatrix}$.

(l) $\exists m \in \mathbb{N}_0 : \exists v_1, ..., v_n \in \mathbb{R}^m : A = \begin{pmatrix} \langle v_1, v_1\rangle & \dots & \langle v_1, v_n\rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle v_n, v_1\rangle & \dots & \langle v_n, v_n\rangle \end{pmatrix}$.

(m) $\exists v_1, ... v_n \in \mathbb{R}^n : A = \sum_{i=1}^n v_i v_i^T$.

(n) $\exists m \in \mathbb{N}_0 : \exists v_1, ... v_m \in \mathbb{R}^n : A = \sum_{i=1}^m v_i v_i^T$.

Beweis. $\underline{(a) \iff (b)}$ ist trivial, da A symmetrisch ist.

$\underline{(b) \iff (c)}$ ist klar nach Definition 0.1.1 der Sylvester-Signatur.

$\underline{(c) \iff (d)}$ folgt aus 0.1.2(a).

$\underline{(d) \iff (e)}$

" $\Longrightarrow$ " Sind $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}$ die Eigenwerte von A gezählt mit algebraischer Vielfachheit [$\to$**??**,**??**], so gilt $\chi_A = \prod_{i=1}^n(\lambda_i - X)$ und daher $\chi_A = \prod_{i=1}^n(\lambda_i + X)$. Die Koeffizienten von $\chi_A(-X)$ sind daher Summen von Produkten der λ_i.

" $\Longleftarrow$ " Gelte (e). Sei $\lambda \in \mathbb{R}$ ein Eigenwert von A. Dann $\det(A - \lambda I_n) = \chi_A(\lambda) = 0$. Setzt man also $-\lambda$ anstelle von X in das Polynom $0 \neq \det(A + XI_n)$ ein, so erhält man 0. Hat dieses Polynom nur nichtnegativen Koeffizienten, so folgt $-\lambda \leq 0$.

$\underline{(e) \iff (f)}$

" $\Longrightarrow$ " Gelte (e). Sei $\emptyset \neq I \subseteq \{1, ..., n\}$. Zu zeigen ist $\det(A_I) \geq 0$. Wegen $(b) \iff (e)$ gilt auch (b). Insbesondere $\forall x \in \mathbb{R}^{\#I} : x^T A_I x \geq 0$. Wieder wegen $(b) \iff (e)$ hat $\det(A_I + XI_{\#I}) \in \mathbb{R}[X]$ keine negativen Koeffizienten. Insbesondere ist der konstante Koeffizient $\det(A_I)$ dieses Polynoms ≥ 0.

" $\Longleftarrow$ " Schreibt man $\det(A + XI_n) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + ... + a_0$ mit $a_0, ..., a_{n-1} \in K$, so sieht man mit scharfem Auge direkt an der Definition einer Determinante **??**, dass $a_i = \sum_{\substack{I \subseteq \{1,...,n\} \\ \#(\{1,...,n\} \setminus I) = i}} \det(A_I)$ für $i \in \{0, ..., n-1\}$.

$\underline{(b) \implies (g)}$ folgt wie in Bemerkung **??** (c) angekündigt durch Inspektion des Beweises von Satz **??**.
$\underline{(g) \implies (h)}$. Ist $A = P^T D P$ mit $P = \begin{pmatrix} 1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $D = \begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit $d_i \geq 0$, so ist $B := \begin{pmatrix} \sqrt{d_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sqrt{d_n} \end{pmatrix} P \in R^{n \times n}$ und $A = B^T B$.

$\underline{(h) \implies (i) \implies (j)}$ ist trivial.

$\underline{(j) \implies (b)}$. Ist $A = B^T B$ mit $B \in \mathbb{R}^{m \times n}$, so gilt $x^T A X = x^T B^T B x = (Bx)^T Bx = \langle Bx, Bx \rangle \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$.

Es ist nun die Äquivalenz der Aussagen (a)-(j) gezeigt. Die Äquivalenzen $\underline{(i) \iff (k)}$ und $\underline{(j) \iff (l)}$ ergeben sich sofort, indem man die v_i als die Spalten von B auffasst, denn für $v_1, ..., v_n \in \mathbb{R}^m$ gilt $\begin{pmatrix} v_1^T \\ \vdots \\ v_n^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \dots v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle v_1, v_1 \rangle & \dots & \langle v_1, v_n \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle v_n, v_1 \rangle & \dots & \langle v_n, v_n \rangle \end{pmatrix}$.
Die Äquivalenzen $\underline{(i) \iff (m)}$ und $\underline{(j) \iff (n)}$ ergeben sich, indem man die v_i^T als

die Zeilen von B auffasst, denn für $v_1, ..., v_m \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$
\begin{aligned}
(v_1 \dots v_n) \begin{pmatrix} v_1^T \\ \vdots \\ v_n^T \end{pmatrix} &= \sum_{i=1}^{m} (0 \dots 0 \underset{\substack{\uparrow \\ i\text{–te Spalte}}}{v_i} 0 \dots 0) \begin{pmatrix} v_1^T \\ \vdots \\ v_n^T \end{pmatrix} \\
&= \sum_{i=1}^{m} (0 \dots 0 \underset{\substack{\uparrow \\ i\text{–te Spalte}}}{v_i} 0 \dots 0) \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ v_i^T \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \leftarrow i\text{-te Zeile} \\ \\ \\ \\ \end{matrix} = \sum_{i=1}^{m} v_i v_i^T.
\end{aligned}
$$

Satz 0.2.12. [$\rightarrow$0.2.7] Sei V ein endlichdimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum, $n := \dim V$ und $q \in \mathbb{Q}(V)$. Es sind äquivalent:

(a) q ist pd

(b) Die Sylvester-Signatur von q ist $(n, 0)$

(c) Es gibt eines Basis $l_1, ..., l_n$ von V^* mit $\forall v \in V : q(v) = \sum_{i=1}^{n} l_i^2(v)$

Beweis. <u>$(a) \implies (b)$</u> folgt direkt aus der Definition der Sylvester-Signatur 0.1.1.

<u>$(b) \implies (c)$</u> folgt ebenfalls aus dieser Definition zusammen mit Lemma **??**

<u>$(c) \implies (a)$</u> Gelte (c) und sei $0 \neq v \in V$. Zu zeigen ist $q(v) > 0$. Da die kanonische Auswertung $V \rightarrow V^{**}$ [$\rightarrow$**??**] injektiv ist, gibt es $l \in V^*$ mit $l(v) \neq 0$. Wegen $l \in \operatorname{span}(l_1, ..., l_n)$ gibt es $i \in \{1, ..., n\}$ mit $l_i(v) \neq 0$. Daraus folgt $q(v) \geq l_i^2(v) > 0$.

Satz 0.2.13. Es gelte der Fundamentalsatz der Algebra. Sei $A \in S\mathbb{R}^{n \times n}$. Dann sind äquivalent:

(a) A ist pd.

(b) $\forall x \in \mathbb{R}^n : x^T A x > 0$.

(c) Die Sylvester-Signatur von A ist $(n, 0)$ für ein $r \in \mathbb{N}_0$.

(d) Alle Eigenwerte von A sind > 0.

(e) Die Koeffizienten zu den Monomen $1, X, ..., X^{n-1}$ von $\det(A + XI_n) = \chi_A(-X) \in \mathbb{R}[X]$ sind > 0.

(f) Alle Leithauptminoren von A sind > 0

(g) Alle Hauptminoren von A sind > 0.

(h) A besitzt eine Cholesky-Zerlegung (P, D) derart, dass alle Diagonaleinträge von D positiv sind.

Beweis. Die Äquivalent aller Aussagen mit Ausnahme von (f) zeigt man analog zum Beweis von Satz 0.2.11. Es ist $\underline{(g) \implies (f)}$ trivial. Wir zeigen schließlich $\underline{(f) \implies (b)}$ durch Induktion nach $n \in \mathbb{N}_0$.

$\underline{n = 0}$ Hier ist (b) die leer Aussage, da $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^0 = \{0\}$.
$\underline{n \to n+1 \ (n \in \mathbb{N}_0)}$ Seien die Leithauptminoren der Matrix $A \in \mathbb{R}^{(n+1)\times(n+1)}$ positiv. Schreibt man $A = \left(\begin{array}{c|c} B & \begin{matrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{matrix} \\ \hline a_1 \dots a_n & c \end{array}\right)$ mit $B \in S\mathbb{R}^{n\times n}$ und $a_1, ...,_n, c \in \mathbb{R}$, so $x^T Bx > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ (denn insbesondere sind alle Leithauptminoren von B positiv). Wähle nun $0 \neq v \in \ker \underbrace{\begin{pmatrix} & a_1 \\ & \vdots \\ & a_n \end{pmatrix}}_{\in \mathbb{R}^{n\times(n+1)}} B$. Wegen $\ker B = \{0\}$ kann nicht $v \in \operatorname{span}(e_1, ..., e_n)$ gelten, wobei $\underline{e} = (e_1, ..., e_{n+1})$ die Standardbasis des $\mathbb{R}^{n+1}$ bezeichnet. Dann ist $\underline{v} := (e_1, ..., e_n, v)$ und es gilt $e_i^T Av = 0$ f+r $i \in \{0, ..., n\}$. Es folgt, dass die Darstellungsmatrix $M(q_A, \underline{v})$ von der Form $M(q_A, \underline{v}) = \left(\begin{array}{c|c} B & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \\ \hline 0 \dots 0 & d \end{array}\right)$ mit $d \in \mathbb{R}$ ist. Wegen $A = M(q_A, \underline{e}) \overset{\mathbf{??}}{=} M(\underline{e}, \underline{v})^T M(q_A, \underline{v}) M(\underline{e}, \underline{v})$ gilt

$$0 < \det A \underset{\mathbf{??}}{\overset{\mathbf{??}}{=}} (\det M(\underline{e}, \underline{v}))^2 \det(M(q_A, \underline{v})) = \underbrace{\det M(\underline{e}, \underline{v})}_{>0} \underbrace{(\det B)}_{>0} d$$

und daher $d > 0$. Nun gilt für alle $x \in \mathbb{R}^n$ und $y \in \mathbb{R}$, dass $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)^T M(q_A, \underline{v}) \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = x^T Bx + dy^2 > 0$ falls $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \neq 0$ und damit q_A positiv definit, das heißt A ist positiv definit.

Bemerkung 0.2.14. Wie man eine Cholesky-Zerlegung einer psd Matrix berechnet, ist aus dem Beweis von **??** wegen Bemerkung **??**(c) klar. Ist die Matrix sogar positiv definit, so kann auch der dortige Fall 1 nicht auftreten. Da im dortigen Fall 2 die Wahl der Linearform l_1 zwingend (d.h. eindeutig) ist, sieht man mit Hilfe von **??** leicht, dass die Cholesky-Zerlegung einer pd eindeutig ist.

Die in **??** bewiesene Diagonalisierung quadratischer Formen über beliebigen Körper mit $0 \neq 2$ kann über dem Körper der reellen Zahlen zu folgender in §11.3 in einer anderen Sprache formulierten Aussage verschärft werden (ßimultane Diagonalisierung").

Satz 0.2.15. Es gelte der Fundamentalsatz de Algebra. Sei V ein endlichdimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum und $q_1, q_2 \in \mathrm{Q}(V)$. Ist q_1 pd oder nd, so gibt es eine geordnete Basis $\underline{v}$ von V derart, dass $M(q_1, \underline{v})$ und $M(q_2, \underline{v})$ beide Diagonalgestalt haben.

Beweis. Œ sei q_1 pd. Es ist b_{q_1} [→**??**] ein Skalarprodukt auf V vermöge dessen V zu einem Vektorraum mit Skalarprodukt wird [→**??**]. Wähle eine ONB $\underline{w}$ von V [→**??**,**??**]. Wähle $f \in \mathrm{End}(V)$ mit $M(f, \underline{w}) = M(q_2, \underline{w})$ (nämlich $f : \mathrm{vec}_{\underline{w}} \circ f_{M(q_2,\underline{w})} \circ \mathrm{coord}_{\underline{v}}$). Da $M(f, \underline{w})$ symmetrisch (also selbstadjungiert [→**??**]) und $\underline{w}$ eine ONB ist, ist f nach **??** selbstadjungiert. Nach Satz **??** gibt es eine ONB $\underline{v}$ von V, die aus Eigenvektoren von f besteht. Dann ist $M(q_1, \underline{v}) = M(b_{q_1}, \underline{v})$ die Einheitsmatrix (da $\underline{v}$ eine ONB ist) und

$$\begin{aligned}
M(q_2, \underline{v}) &= (\underline{v}, \underline{w})^T M(q_2, \underline{w}) M(\underline{v}, \underline{w}) = (\underline{v}, \underline{w})^T M(f, \underline{w}) M(\underline{v}, \underline{w}) \\
&\overset{\underline{v},\underline{w}\text{ ONB}}{\underset{\mathbf{??}}{=}} (\underline{v}, \underline{w})^{-1} M(f, \underline{w}) M(\underline{v}, \underline{w}) \overset{\mathbf{??}}{=} M(\underline{w}, \underline{v}) M(f, \underline{w}) M(\underline{v}, \underline{w}) \\
&\overset{\mathbf{??}}{=} M(f, \underline{v})
\end{aligned}$$

von Diagonalgestalt.